গণিত

অধ্যায়ভিত্তিক প্রশ্ন বিশ্লেষণ

গুরুত্ব বুঝে অধ্যয়ন, নিত্য সবার প্রয়োজন

গণিত প্রথম পত্র		DU-7 College						
		2023-24	2022-23	2021-22	2020-21	2019-20	2018-19	2017-18
01	ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক	2	1	3	2	1	-	1
02	ভেক্টর	-	-	-	1	1	1	1
03	সরল রেখা, স্থানাঙ্ক	2	4	2	1	1	2	2
04	বৃত্ত	5	3	3	2	2	1	2
05	বিন্যাস ও সমাবেশ	-	-	-	1	1	1	1
06	ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	-	-	-	1	1	-	1
07	সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	2	2	-	1	-	2	2
08	ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র	-	-	1	2	2	1	1
09	অন্তরীকরণ (লিমিটসহ)	4	2	4	2	3	2	1
10	যোগজীকরণ	3	4	5	3	2	2	3
	প্রথম পত্র থেকে মোট প্রশ্ন	18	16	18	16	14	12	15

গণিত দ্বিতীয় পত্র		DU-7 College						
		2023-24	2022-23	2021-22	2020-21	2019-20	2018-19	2017-18
01	বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা	-	-	-	-	2	1	1
02	যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম	-	-	-	-	-	-	-
03	জটিল সংখ্যা	1	2	-	1	2	1	1
04	বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ	-	1	1	1	2	1	1
05	দ্বিপদী বিস্তৃতি	1	-	-	-	-	2	-
06	কণিক	2	3	3	2	1	2	1
07	বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও সমীকরণ	1	1	2	2	1	2	3
08	স্থিতিবিদ্যা	1	1	1	1	1	1	1
09	সমতলে বস্তু কণার গতি (গতিবিদ্যা)	1	1	-	1	-	2	1
10	বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাবনা	-	-	-	1	2	1	1
	দ্বিতীয় পত্র থেকে মোট প্রশ্ন	07	09	07	09	11	13	10
	প্রথম ও দ্বিতীয় থেকে মোট প্রশ্ন	25	25	25	25	25	25	25

টপিকের সাথে প্রশ্ন বিশ্লেষণ

+

প্যারালাল তথ্য = ৯৫% কমন

প্রথম পত্র অধ্যায় ০১

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক
(MATRIX & DETERMINANTS)

কি পড়ব ? কেন পড়ব ? **SURVEY TABLE** কতটুকু পড়ব ? কিভাবে পড়ব ?

টপিক নং	বিগত বছরে যে সকল টপিকস্ থেকে প্রশ্ন এসেছে	RATINGS [কেন পড়ব?]
01	ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ ও মান নির্ণয় সংক্রান্ত	★
02	ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য [Properties of Matrics]	★★★
03	ম্যাট্রিক্সের মাত্রা, যোগ, বিয়োগ, গুণ ও সমতা	★★
04	ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স	★★
05	অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্স	★★★
06	অনুরাশি ও সহগুণক নির্ণয়	★★★
07	নির্ণায়কের মান নির্ণয়	★★
08	একটি অজানা চলক থাকলে মান নির্ণয়	★★★
09	সবগুলো অজানা চলক থাকলে মান নির্ণয়	★★

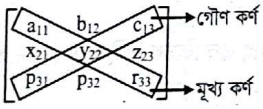
টপিক আলোচনা

ম্যাট্রিক্স সংক্রান্ত কিছু মৌলিক তথ্য

■ **ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ:**

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
বর্গ ম্যাট্রিক্স	আয়ত ম্যাট্রিক্স	কর্ণ ম্যাট্রিক্স	স্কেলার ম্যাট্রিক্স	অভেদ/একক ম্যাট্রিক্স
সারি ও কলাম সংখ্যা সমান	সারি ও কলাম সংখ্যা ভিন্ন	প্রধান কর্ণের উপাদান ব্যতীত সকল উপাদান '0' হবে	কর্ণ ম্যাট্রিক্সের অশূন্য উপাদানগুলো সমান	কর্ণ ম্যাট্রিক্সের উপাদান গুলো 1 হলে

■ **মূখ্য বা প্রধান কর্ণ:** ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারি ও প্রথম কলামে যে উপাদান থাকে তাকে নিয়ে যে কর্ণ গঠিত হয় তাই মূখ্য কর্ণ এবং অপর কর্ণটি গৌণ কর্ণ। যেমন-



Note: মূখ্য কর্ণের উপাদান গুলোর যোগফলকে ট্রেস $(a + y + r)$ বলে।

■ **ম্যাট্রিক্সের মাত্রা/ক্রম** = সারি × কলাম

Ex: (i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 2টি সারি, 3টি কলাম ∴ মাত্রা হলো 2×3

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ মাত্রা $= 3 \times 3$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ মাত্রা $= 1 \times 3$

⇒ ম্যাট্রিক্সের কোন মান নেই। তবে বর্গ ম্যাট্রিক্সকে নির্ণায়ক আকারে প্রকাশ করে সেই নির্ণায়কের মান নির্ণয় করা যায়। যেমন-

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান $|A| = Det(A) = ad - bc$

ম্যাট্রিক্সের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও সমতা

■ দুটি ম্যাট্রিক্সের মাত্রা সমান না হলে যোগ বা বিয়োগ করা যায় না।

■ দুটি ম্যাট্রিক্স সমান হলে তাদের অনুরূপ উপাদানগুলো সমান হবে।

■ দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B এর গুণফল AB নির্ণয় করা যাবে যদি A ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা B ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যার সমান হয়।

∴ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ এবং $B = [b_{ij}]_{n \times r}$ হলে যদি $AB = [ab_{ij}]_{m \times r}$ হয় তবে AB ম্যাট্রিক্সের মাত্রা $m \times r$ হবে।

■ ম্যাট্রিক্স গুণনের ক্ষেত্রে যেকোনো একটি সারি বা কলাম এর গুণ বের করে দেখলেই Ans. অপশনে পাওয়া যায়।

⊙ অনুবন্ধী ম্যাটিক্স এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্স

■ **Adjoint ম্যাটিক্স:** কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর নির্ণায়ক |A| এর সহগুণক দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সের (ভুক্তিগুলোর ক্রম অনুসারে) Transpose ম্যাট্রিক্সকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A এর Adjoint matrix বলা হয়। এটিকে সূচিত করা হয় Adj (A)

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স বা adjoint of A/Adj (A)

= প্রাইমারি কর্ণের উপাদানগুলোর স্থান পরিবর্তন এবং সেকেন্ডারি কর্ণের উপাদানগুলোর চিহ্ন পরিবর্তন করলে যা পাওয়া যায় তাই Adjoint

$\therefore$ Adjoint of A = $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত বা Inverse ম্যাট্রিক্স = $\frac{1}{\text{Det (A)}}$ Adj (A) = $\frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Note: সকল ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকে না। Inverse ম্যাট্রিক্স থাকার শর্ত দুটি:

(i) ম্যাট্রিক্সটি অবশ্যই বর্গ ম্যাট্রিক্স হতে হবে। (ii) ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়কের মান শূন্য হওয়া যাবে না।

⊙ নির্ণায়কের মান নির্ণয়

■ **নির্ণায়কের মান:** কোন নির্ণায়কের যে কোন সারি বা কলামের এর উপাদানসমূহ ও তাদের নিজ নিজ সহরাশির গুণফলের সমষ্টিই নির্ণায়কের মান।

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের a_1, a_2, a_3 এর সহগুণক যথাক্রমে A_1, A_2, A_3 হলে নির্ণায়কের মান হবে

$= a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \times -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

⊙ অনুরাশি ও সহগুণক নির্ণয় সংক্রান্ত

01. অনুরাশি:

FORMULA **Step-01:** যে রাশি বা সংখ্যার **অনুরাশি** বের করতে বলবে ঠিক সেই রাশি বরাবর **Row** এবং **Column** বাদ দাও।

Step-02: বাকি উপাদান গুলো দিয়ে নির্ণায়ক গঠন কর। সেটিই **অনুরাশি**।

Step-03: মান বের করতে বললে সাধারণ নিয়মে নির্ণায়কের মান বের করতে হবে।

02. সহগুণক: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এর b_3 এর সহগুণক কত?

Finix Tecnique:

Step-1: অনুরাশি বের করার পদ্ধতি অবলম্বন করে প্রথমে অনুরাশি বের কর।

Step-2: অনুরাশি সামনে $(-1)^{R+C}$ সূত্র ব্যবহার করে যথাযথ চিহ্ন বসাও। সেটিই সহগুণক।

Shortcut Sol^n $(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Magic!!!
সহগুণক = $(-1)^{\text{সারি + কলাম}}$ × অনুরাশি
সহগুণক = চিহ্ন × অনুরাশি

Shortcut Tricks. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ সহগুণক নির্ণয় এর বক্স এর ভিতর চিহ্নিত উপাদান গুলোর সামনে (+) এবং বাকি উপাদান গুলোর সামনে (–) বসবে।

গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যা সমূহ

MEx 01 যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলামের সংখ্যা সমান তাকে বলা হয়-

Solve সারি = কলাম → বর্গ ম্যাট্রিক্স।

MEx 02 A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর মাত্রা যথাক্রমে 4×5, 5×4 এবং 4×2 হলে $(A^T+B)C$ ম্যাট্রিক্স এর মাত্রা কত?

Solve $A = 4 \times 5 \therefore A^T = 5 \times 4$;

$B = 5 \times 4 \therefore (A^T + B) = 5 \times 4$

$(A^T + B)\,C = 5 \times \boxed{4 \quad 4} \times 2 = 5 \times 2$

MEx 03 A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং I একই ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স হলে AI এর মান কত?

Solve একটি ম্যাট্রিক্সকে তার অভেদক ম্যাট্রিক্স দ্বারা গুণ করলে ঐ ম্যাট্রিক্সই পাওয়া যায়। অর্থাৎ AI = A

MEx 04 $A = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ এবং B = [1 2 3] হলে AB ম্যাট্রিক্সের মাত্রা কোনটি?

Solve A হলো (3 × 1) ম্যাট্রিক্স আর B হলো (1 × 3) ম্যাট্রিক্স

$\therefore AB = (3 \times 1).(1 \times 3) = (3 \times 3)$

MEx 05 Matrix $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ এর নাম–

Solve যে Matrix এর কলাম এবং সারি inter-change করলে Matrix অপরিবর্তিত থাকে। তাকে প্রতিসম Matrix বলে।

MEx 06 যদি $A = \begin{vmatrix} a & -b \\ c & d \end{vmatrix}$ হয়, তবে A^{-1} = কত?

Solve $A^{-1} = \frac{1}{ad + bc}\begin{bmatrix} d & b \\ -c & a \end{bmatrix}$

MEx 07 A একটি 3×3 বর্গম্যাট্রিক্স এবং |A| = 8 হলে |2A| এর মান কোনটি?

Solve **Finix shortcut:**

Here, $|A| = 8$, $|2A| = 2^3\,|A| = 8 \times 8 = 64$

MEx 08 A একটি অব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে A^{-1} এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স কোনটি?

Solve A^{-1} এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $(A^{-1})^{-1} = A$

জেনে রাখা ভাল: ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স invere ম্যাটিক্স নেই/বিপরীত যোগ্য নয়।

MEx 09 $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}$ হলে x ও y এর মান-

Solve $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4x \\ -2x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$ এবং $-2x + 3y = 3$

$\Rightarrow -6 + 3y = 3 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3 \quad \therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

MEx 10 এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $\begin{vmatrix} \omega & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 & 1 \\ \omega^3 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান কত?

Solve $\begin{vmatrix} \omega & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 & 1 \\ \omega^3 & 1 & \omega \end{vmatrix} = \omega\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = \omega\begin{vmatrix} 1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ 1+\omega+\omega^2 & \omega^2 & 1 \\ 1+\omega+\omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$= \omega(1+\omega+\omega^2)\begin{vmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & \omega \end{vmatrix} = \omega(1+\omega+\omega^2)\times 0 = 0$

PYQ — PREVIOUS YEARS' QUESTIONS

01. a এর কোন মানের জন্য $\begin{pmatrix} 4a & -1 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে? [DU-7Clg. 2023-24]

A. $\frac{1}{-5}$ B. $\frac{1}{6}$ C. -8 D. $-\frac{1}{4}$

D Explanation $\begin{pmatrix} 4a & -1 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বলে, $\begin{vmatrix} 4a & -1 \\ -8 & -8 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow -32a - 8 = 0 \therefore a = \frac{8}{-32} = -\frac{1}{4}$

02. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স এর ট্রেস কোনটি? [DU-7Clg. 2023-24]

A. $-\frac{5}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

A Explanation ধরি, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \therefore A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\therefore$ Trace $= -2 - \frac{1}{2} = \frac{-4-1}{2} = \frac{-5}{2}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ হলে $|4A^{-1}| = ?$ [DU-7Clg: 2022-23]

A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

S D Why $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\times 0 - 2(-2) = 4$

এখন, $|4A^{-1}| = \left|\frac{4}{A}\right| = \frac{4^2}{|A|} = \frac{4^2}{4} = 4$

4. c এর কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & c \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স প্রতিসম? [DU-7Clg: 2021-22]

A. 4 B. 0
C. -1 D. -4

S A Why $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & c \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & c & 0 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হবে যদি এবং কেবল যদি $c = 4$ হয়।

05. $Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -5 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির (2,3) তম ভুক্তির সহগুণক কত? [DU-7Clg: 2021-22]

A. -19 B. 19 C. -95 D. 95

S A Why $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ এর (2, 3) তম ভুক্তির সহগুণক।

$= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -(12+7) = -19$

06. $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ হলে $A^{-1} = ?$ [DU-7Clg: 2021-22]

A. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ B. $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

C. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ D. $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

S A Why $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)}\text{adj}(A) = \frac{1}{-4+6}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

07. β এর কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix} (\beta+5) & 2 \\ 3 & \beta \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হবে? [DU-7Clg: 2020-21]

A. 1, 6 B. 1, -6 C. 0, 0 D. 1, 1

S B Why ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে তার নির্ণায়ক শূন্য।

$\therefore \begin{vmatrix} \beta+5 & 2 \\ 3 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta^2 + 5\beta - 6 = 0$

$\Rightarrow \beta^2 + 6\beta - \beta - 6 = 0 \Rightarrow \beta(\beta+6) - 1(\beta+6) = 0$

$\Rightarrow (\beta+6)(\beta-1) = 0 \quad \therefore \beta = 1, -6$

08. A, B, C ম্যাট্রিক্সগুলোর আকার যথাক্রমে 4×5, 5×4, 4×2 হলে $(A^T + B)C$ এর আকার হবে- [DU-7Clg. 2019-20]

A. 5×4 B. 4×2 C. 5×2 D. 2×5

S C Why A এর আকার 4×5

$\therefore A^T$ এর আকার $5\times 4 \quad \therefore (A^T + B)C$ এর আকার 5×2

09. $\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ -5 & x+4 \end{vmatrix} = 0$ হলে, x এর মান কত? [DU-7Clg. 2017-18]

A. $-1, -3$ B. 1, 3 C. $-1, 3$ D. $1, -3$

S D Why $(x-2)(x+4) + 5 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 4x - 8 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3x - x - 3 = 0 \Rightarrow x(x+3) - 1(x+3) = 0$

$x = 1, -3$

IQA — IMPORTANT QUESTION FOR DCU ADMISSION

01. k এর কোন মানের জন্য $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k^2 & k^4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে না?

A. $k = 1$ B. $k = -1$ C. $k = 3$ D. $k = 0$

S C Why $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k^2 & k^4 \end{vmatrix} = 0$ বা, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & k^2-k \\ 1 & k^2-1 & k^4-k^2 \end{vmatrix} = 0$

বা, $(k-1)(k^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k^2 \end{vmatrix} = 0$

বা, $(k-1)(k^2-1)(k^2-k) = 0$ বা, $k = 1, -1, 0$

$\therefore k = 3$ এর জন্য নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে না।

02. $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 5 \\ -2 & b & -3 \\ -5 & 3 & c \end{bmatrix}$ একটি বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে a, b, c এর মানগুলো-

A. –2, –5, 3 B. 0, 0, 0 C. 1, 1, 1 D. 2, 5, 3

S B Why যদি $A^T = -A$ হয় তখন তাকে বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে। যে কোন ম্যাট্রিক্সের বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স পেতে হলে মুখ্য কর্ণ বরাবর উপাদানগুলো সব শূন্য হতে হবে। সুতরাং a = 0, b = 0 এবং c = 0।

03. $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}$ এবং $i = \sqrt{-1}$ হলে AB এর মান হবে-

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$

S B Why $AB = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} i - i & -1 - i^2 \\ -i^2 - 1 & i - i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

PRIME TEST

01. ম্যাট্রিক্স M এর আকার 4 × 3 এবং N এর আকার 3 × 5 হলে MN এর আকার কোনটি?

A. 4 × 4 B. 4 × 5
C. 3 × 5 D. 3 × 4

02. কোনটি বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য নয়?

A. $(A^{-1})^{-1} = A$ B. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
C. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ D. $(BA)A^{-1} = B$

03. যদি $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ হয়, তবে AB সমান-

A. $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -15 & -3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 15 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

04. যদি $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $C = A + I_{3\times3}$ তাহলে $C_{23} = ?$

A. 6 B. 7
C. 8 D. 3

05. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ হলে $P^2 =$ কত?

A. $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix}$ B. $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$
C. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^2$ D. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

06. $\begin{pmatrix} p-4 & 8 \\ 2 & p+2 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে যদি p এর মান-

A. –4, 6 B. –6, 4
C. 4, 6 D. –6, –4

07. যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ হয় তবে A^{-1}

A. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
C. $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ D. $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

08. $X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & p \end{bmatrix}$, P এর মান কত হলে X ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করা যাবে না?

A. 0 B. 2
C. 3 D. –3

09. $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 5 \\ -2 & b & -3 \\ -5 & 3 & c \end{bmatrix}$ একটি বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে a, b, c এর মানগুলো-

A. –2, –5, 3 B. 0, 0, 0 C. 1, 1, 1 D. 2, 5, 3

10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$ এর মান-

A. ab B. 1–ab C. a + b + 1 D. 0

OMR SHEET		
01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

ANS ANALYSIS

প্রশ্ন	উত্তর	ব্যাখ্যা
01	B	$M \to 4 \times 3 \quad 3 \times 5 \leftarrow N$ $=$ MN এর আকার 4 × 5
02	B	বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য: (i) $(A^{-1})^{-1} = A$ (ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (iii) $(BA)A^{-1} = B$ (iv) $A.A^{-1} = I$ (v) $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$
03	A	$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3+0.5 & 2.0+0.1 \\ 0.3-3.5 & 0.0-3.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -15 & -3 \end{pmatrix}$
04	B	$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = A + I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 9 \\ 2 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ $\therefore C_{23} = 7$
05	D	$P = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$ $\Rightarrow P^2 = 4$ অপশন (D) হতে, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$
06	A	ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বলে, $(p-4)(p+2) - 16 = 0$ $\Rightarrow p^2 - 2p - 24 = 0$ $\Rightarrow (p-6)(p+4) = 0 \quad \therefore p = 6, -4$
07	D	$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\therefore A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} adj(A) = \frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$
08	C	ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে না যদি ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়কের মান শূণ্য হয়। $3(4p - 12) = 0 \Rightarrow p = 3$
09	B	যদি $A^T = -A$ হয় তখন তাকে বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে। যে কোন ম্যাট্রিক্সের বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স পেতে হলে মুখ্য কর্ণ বরাবর উপাদানগুলো সব শূন্য হতে হবে। সুতরাং a = 0, b = 0 এবং c = 0।
10	A	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -a & a & 1 \\ 0 & -b & 1+b \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$ $= \begin{vmatrix} -a & a \\ 0 & -b \end{vmatrix} = ab$

প্রথম পত্র অধ্যায় ০২

ভেক্টর
(VECTORS)

কি পড়ব ? কেন পড়ব ? **SURVEY TABLE** কতটুকু পড়ব ? কিভাবে পড়ব ?

টপিক নং	বিগত বছরে যে সকল টপিকস্ থেকে প্রশ্ন এসেছে	RATINGS [কেন পড়ব?]
01	ভেক্টর রাশির যোগ-বিয়োগ এবং মান নির্ণয় সংক্রান্ত	★★★
02	দুটি ভেক্টরের গুণন (ডট গুণন ও ক্রস গুণন) সম্পর্কিত গাণিতিক প্রয়োগ	★★
03	দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় সম্পর্কিত গাণিতিক প্রয়োগ	★★★
04	অভিক্ষেপ এবং উপাংশ নির্ণয় সম্পর্কিত গাণিতিক প্রয়োগ	★★
05	ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্পর্কিত গাণিতিক প্রয়োগ	★
06	তিনটি ভেক্টর এক সমতলীয় হওয়া সম্পর্কিত গাণিতিক প্রয়োগ	★
07	সমান্তরাল একক ভেক্টর ও লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয়	★★★

টপিক আলোচনা

গুরুত্বপূর্ণ সূত্র সমূহের Topic	সূত্র সমূহ
দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয়	$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\bar{A}.\bar{B}}{AB}\right)$; $\bar{A}.\bar{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$; $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$; $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$
একটি ভেক্টর ও একটি অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ নির্নয়	$\bar{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ভেক্টরটি: (i) x অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে $\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{\hat{i} \text{ এর সহগ}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\right)$ (ii) y অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে $\theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{\hat{j} \text{ এর সহগ}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\right)$ (iii) z অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে $\theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{\hat{k} \text{ এর সহগ}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\right)$
দুটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব এবং সমান্তরাল হওয়ার শর্ত সংক্রান্ত	1. দুটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হলে $\bar{A}.\bar{B} = 0 \Rightarrow A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0$ হবে। 2. দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে $\bar{A} \times \bar{B} = 0$ or, $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$ হবে।
ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত	$\bar{A}$ ও $\bar{B}$ ভেক্টরদ্বয়- (i) সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে ক্ষেত্রফল $= \lvert\bar{A} \times \bar{B}\rvert$ (ii) সামান্তরিকের কর্ণ ধরে ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\lvert\bar{A} \times \bar{B}\rvert$ (iii) ত্রিভূজের সন্নিহিত বাহু ধরে ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\lvert\bar{A} \times \bar{B}\rvert$ (iv) রম্বসের কর্ণ ধরে ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\lvert\bar{A} \times \bar{B}\rvert$
সমান্তরাল ও লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় সংক্রান্ত	(i) $\bar{A}$এর সমান্তরাল একক ভেক্টর, $\vec{a} = \pm\frac{\bar{A}}{\lvert\bar{A}\rvert}$ (ii) $\bar{A}$ ও $\bar{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি বরাবর একক ভেক্টর $\hat{\eta} = \frac{\bar{A} + \bar{B}}{\lvert\bar{A} + \bar{B}\rvert}$ (iii) $\bar{A}$ ও $\bar{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের যেই সমতলে অবস্থিত তার লম্ব বরাবর একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \pm\frac{\bar{A} \times \bar{B}}{\lvert\bar{A} \times \bar{B}\rvert}$
অভিক্ষেপ ও উপাংশ নির্ণয় সংক্রান্ত	(i) $\bar{A}$ ভেক্টর বরাবর $\bar{B}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $B\cos\theta = \frac{\bar{A}.\bar{B}}{\lvert\bar{A}\rvert}$ (iii) $\bar{A}$ ভেক্টর বরাবর $\bar{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $\frac{\bar{A}.\bar{B}}{\lvert\bar{A}\rvert}\hat{a}$ (ii) $\bar{B}$ ভেক্টর বরাবর $\bar{A}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $A\cos\theta = \frac{\bar{A}.\bar{B}}{\lvert\bar{B}\rvert}$ (iv) $\bar{B}$ ভেক্টর বরাবর $\bar{A}$ ভেক্টরের উপাংশ $\frac{\bar{A}.\bar{B}}{\lvert\bar{B}\rvert}\hat{b}$ [যার বরাবর, যার তুলনায়, যার দিকে বলবে সে নিচে থাকবে।]
তিনটি ভেক্টর এক সমতলীয় হওয়া সম্পর্কিত গাণিতিক প্রয়োগ	i) $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$, $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ এবং $\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$ ভেক্টরত্রয় একই সমতলে থাকার শর্ত: $\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = 0.$ ii) $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ হয়।

গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যা সমূহ

MEx 01 $\bar{A} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ ভেক্টরের মান কত?

Solve $A = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2} = 7$

MEx 02 $\bar{a}$ ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর কোনটি?

Solve একক ভেক্টর $= \dfrac{\text{ভেক্টর}}{\text{ঐ ভেক্টরের মান}}$

MEx 03 $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরটি y অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোন উৎপন্ন করে তার পরিমান কোনটি?

Solve $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}$; $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

MEx 04 $\bar{P} + \bar{Q} = \bar{P} - \bar{Q}$ হলে $\bar{P}$ ও $\bar{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোন কত?

Solve $(\vec{P} + \vec{Q})^2 = (\vec{P} - \vec{Q})^2$

$\Rightarrow P^2 + Q^2 + 2\vec{P}.\vec{Q} = \vec{P} + Q^2 - 2\vec{P}.\vec{Q}$

$\Rightarrow 4\vec{P}.\vec{Q} = 0 = \vec{P}.\vec{Q} = 0$

$\therefore \vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোন $\pi/2$

MEx 05 $P = 6\hat{i}$ এবং $Q = 7\hat{i}$ হলে P ও Q এর মধ্যবর্তী কোন কত?

Solve $\theta = \cos^{-1}\left|\dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{P.Q}\right|$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{42}{42}\right) = \theta = \cos^{-1}(1) = 0°$

MEx 06 ভেক্টরদ্বয় $\vec{V}_1 = 4\hat{i} - 3\lambda\hat{j} + 5\hat{k}$ ও $\vec{V}_2 = 3\lambda\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হলে λ এর মান কত?

Solve $\vec{V}_1$ ও $\vec{V}_2$ লম্ব বলে, $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$

$\Rightarrow (4\hat{i} - 3\lambda\hat{j} + 5\hat{k})(3\lambda\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 12\lambda - 15\lambda - 30 = 0$

$\therefore \lambda = -10$

MEx 07 $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, 2\hat{j} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $3\hat{j} + 4\hat{j} + a\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একতলীয় হলে a এর মান কত?

Solve শর্তমতে, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & a \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 1(3a - 16) - 2(2a - 12) + 3(8 - 9) = 0$

$\Rightarrow 3a - 16 - 4a + 24 - 3 = 0$

$\Rightarrow -a + 5 = 0$

$\therefore a = 5$

MEx 08 $A = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $B = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ কর্ণ বিশিষ্ট সমান্তরিকের ক্ষেত্রফল কত?

Solve $\Delta = \dfrac{1}{2}|\bar{A} \times \bar{B}|$

$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} i & 2 & 3 \\ j & 3 & 4 \\ k & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-3 - 4) - \hat{j}(-2 - 3) + \hat{k}(8 - 9)$

$= -7\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore \dfrac{1}{2}|\bar{A} \times \bar{B}| = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

MEx 09 $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ কত?

Solve $\vec{B}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $A\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}$

$\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$A\cos\theta = \dfrac{12 - 6 + 2}{7} = \dfrac{8}{7}$

PYQ — PREVIOUS YEARS' QUESTIONS

01. $2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর এবং x-অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ নিচের কোনটি? [DU-7Clg: 2020-21]

A. $\cos^{-1}(2/3)$ B. $\cos^{-1}(1/3)$
C. $\cos^{-1}(-2/3)$ D. $\cos^{-1}(-1/3)$

Explanation মধ্যবর্তী কোণ $= \cos^{-1}\dfrac{(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}).\hat{i}}{|2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}||\hat{i}|}$

$= \cos^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}\sqrt{1^2}}$

$= \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$

02. $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $|\overrightarrow{AB}| =$ কত? [DU-7Clg. 2019-20]

A. $2\sqrt{19}$ B. $\sqrt{19}$
C. $2\sqrt{17}$ D. $\sqrt{17}$

Explanation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$

03. $\vec{u} = 3\hat{i} + a\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{v} = 6\hat{i} - 8\hat{j} - 10\hat{k}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে a এর মান- [DU-7Clg. 2018-19]

A. –4 B. –3
C. 2 D. 4

Explanation $\dfrac{3}{6} = \dfrac{a}{-8} \Rightarrow a = -4$

04. $3\hat{i} + 2\hat{j} + a\hat{k}$ এবং $4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, a এর মান কত? [DU-7Clg. 2017-18]

A. 6 B. – 6
C. $\sqrt{6}$ D. $-\sqrt{6}$

Explanation $3.4 + 2(-3) + a = 0$

$\Rightarrow 6 + a = 0 \Rightarrow a = -6$

IQA — IMPORTANT QUESTION FOR DCU ADMISSION

01. $\bar{u} = 3\bar{i} + a\bar{j} - 5\bar{k}$ এবং $\bar{v} = 6\bar{i} - 8\bar{j} - 10\bar{k}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে a এর মান-

A. –4 B. –3
C. 2 D. 4

Explanation $\dfrac{3}{6} = \dfrac{a}{-8}$ $\therefore a = -4$

02. $\vec{b} = 6\hat{i} + 7\hat{j} - 6\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ হলো-

A. $\frac{8}{121}\vec{b}$ B. $\frac{-8}{121}\vec{b}$

C. $\frac{8}{121}\vec{a}$ D. $\frac{-8}{121}\vec{a}$

B Explanation $\vec{b} = 6\hat{i} + 7\hat{j} - 6\hat{k}$;

$\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{b}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{a}$ ভেক্টরের উপাংশ

$= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}.\hat{b}$

$= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}.\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$= \frac{-8}{\sqrt{121}}.\frac{\vec{b}}{\sqrt{121}} = \frac{-8}{121}.\vec{b}$

03. ভেক্টর $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ ও $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ-

A. $\cos^{-1}(1/\sqrt{3})$ B. $\cos^{-1}(1/3)$

C. $\cos^{-1}(1/2)$ D. $\cos^{-1}(1/\sqrt{2})$

C Explanation অন্তর্ভুক্ত কোণ

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{uv}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

04. $\vec{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ও $\vec{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি যে সামন্তরিকের সন্নিহিত বাহু তার ক্ষেত্রফল হবে-

A. $3\sqrt{3}$ sq units B. $6\sqrt{3}$ sq units

C. $6\sqrt{6}$ sq units D. $3\sqrt{6}$ sq units

C Explanation $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-12+6) - \hat{j}(16-4) + \hat{k}(-12+6) = -6\hat{i} - 12\hat{j} - 6\hat{k}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{36+144+36} = \sqrt{216}$

$= \sqrt{36\times 6} = 6\sqrt{6}$ sq. units

05. $\vec{P} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ-

A. $\frac{5}{\sqrt{38}}$ B. $\frac{3}{\sqrt{38}}$

C. $\frac{2}{\sqrt{38}}$ D. $\frac{1}{\sqrt{38}}$

B Explanation $Q\cos\theta = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{P}$

$= \frac{10-3-4}{\sqrt{5^2+(-3)^2+2^2}}$

$= \frac{3}{\sqrt{38}}$

06. $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $b = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে নিম্নের কোনটি সত্য?

A. $\vec{a}.\vec{b} = 0$

B. $\vec{a}\wedge\vec{b} = 0$

C. $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = 0$

D. $(\vec{a}+\vec{b})\wedge(\vec{a}-\vec{b}) = 0$

C Explanation $\vec{a}.\vec{b} = 3 - 2 - 6 = -5$ (অর্থাৎ A সত্য নয়)

এখন, $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = (4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}).(-2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$

$= -8 + 3 + 5 = 0$

অর্থাৎ C সত্য হয়।

PRIME TEST

01. $\overrightarrow{OA} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 6\vec{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 7\hat{i} - 5\hat{j} + 8\vec{k}$ $\overrightarrow{AB}$ কত?

A. $12\hat{i} - 7\hat{j} + 6\vec{k}$

B. $-2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\vec{k}$

C. $2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\vec{k}$

D. $12\hat{i} - 3\hat{j} - 14\vec{k}$

02. $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j}, \vec{B} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{C} = -2\hat{i} + \hat{k}$ হলে $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = ?$

A. $-2\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$

B. $-2\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}$

C. $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$

D. $\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

03. $\vec{p} = 24\hat{i} + 7\hat{j}$ এবং $\vec{q} = 20\hat{i} + 15\hat{j}$ হলে $(\vec{p}+\vec{q})$ এবং $(\vec{p}-\vec{q})$ এর অন্তঃবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

A. 90° B. 0°

C. 120° D. 60°

04. $4\underline{i} + 2\underline{j} - 3\underline{k}$ এবং $\lambda\underline{i} - 3\underline{j} + 2\underline{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে λ এর মান-

A. 3 B. -1

C. 5 D. 2

05. $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি y-অক্ষের সঙ্গে যে কোণ তৈরী করে তার মান হলো-

A. $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

B. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$

C. $\cos^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right)$

D. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

06. k এর মান কত হলে $\vec{a} = 2\hat{i} + k\hat{j}$ এবং $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j}$ ভেক্টর দুটো পরস্পর সমান্তরাল হবে?

A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{-8}{3}$ D. $\frac{10}{3}$

07. $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{b} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশের সাংখ্যিক মান কত?

A. 2 B. 3
C. 1 D. 0

08. $\vec{A} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এর একক ভেক্টর কত?

A. $\frac{1}{2}(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

B. $\frac{1}{\sqrt{38}}(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

C. $\sqrt{38}(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

D. $\frac{1}{2}(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

09. $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশের মান?

A. $\frac{13}{15}$ B. $\frac{12}{15}$
C. $\frac{13}{14}$ D. $\frac{12}{14}$

10. কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ দ্বারা সূচিত হলে সামন্তরিকটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

A. $5\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$
C. $3\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

OMR SHEET	04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

ANS ANALYSIS

প্রশ্ন	উত্তর	ব্যাখ্যা
01	C	$\overrightarrow{OA} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 6\vec{k}$ $\overrightarrow{OB} = 7\hat{i} - 5\hat{j} + 8\vec{k}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ $= 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\vec{k}$
02	A	$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j}, \vec{B} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{C} = -2\hat{i} + \hat{k}$ $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $= -\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
03	A	$\vec{p} = 24\hat{i} + 7\hat{j}$; $\vec{q} = 20\hat{i} + 15\hat{j}$ $(\vec{p} + \vec{q}) = ;44\hat{i} + 22\hat{j}$; $(\vec{p} - \vec{q}) = 4\hat{i} - 8\hat{j}$ $\therefore (\vec{p} + \vec{q})$ ও $(\vec{p} - \vec{q})$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(\vec{p} + \vec{q}).(\vec{p} - \vec{q})}{\lvert\vec{p} + \vec{q}\rvert \lvert\vec{p} - \vec{q}\rvert}\right)$ $= \cos^{-1}\left(\frac{176 - 176}{\lvert\vec{p} + \vec{q}\rvert \lvert\vec{p} - \vec{q}\rvert}\right) = \cos^{-1}(0) = 90°$
04	A	$(4\underline{i} + 2\underline{j} - 3\underline{k}).(\lambda\underline{i} - 3\underline{j} + 2k) = 0$ $\Rightarrow 4\lambda - 6 - 6 = 0$ $\Rightarrow 4\lambda = 12$ $\therefore \lambda = 3$
05	B	$2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি y অক্ষের সঙ্গে θ কোণ করলে, $\theta = \cos^{-1}\frac{\hat{j} \text{ এর সহগ}}{\text{ভেক্টরটির মান}}$ $= \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$
06	D	$\hat{a} = 2\hat{i} + k\hat{j}$ এবং $\hat{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল $\therefore \frac{2}{3} = \frac{k}{5} \Rightarrow k = \frac{10}{3}$
07	B	উপাংশ $= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{a}.\hat{a} = \frac{10 - 3 - 4}{\sqrt{4 + 1 + 4}}.\hat{a} = \frac{3}{3}.\hat{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ $\therefore$ উপাংশের মান $= \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$
08	B	$\vec{A} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $\vec{A}$ এর একক ভেক্টর $= \frac{\vec{A}}{\lvert\vec{A}\rvert} = \frac{5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{5^2 + (-2)^2 + 3^2}}$ $= \frac{1}{\sqrt{38}}(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$
09	A	$\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ ভেক্টরের উপাংশ $= \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\lvert B\rvert}$ $= \frac{4 + 20 - 11}{\sqrt{(2)^2 + (10)^2 + (-11)^2}} = \frac{13}{15}$
10	A	ধরি, $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $= \hat{i}(4 - 6) - \hat{j}(12 + 2) + \hat{k}(-9 - 1) = -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$ $\lvert\vec{A} \times \vec{B}\rvert = \sqrt{(-2)^2 + (-14)^2 + (-10)^2}$ $= \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটি সামান্তরিকের কর্ণ হলে সামান্তরিক এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\lvert\vec{A} \times \vec{B}\rvert = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

প্রথম পত্র অধ্যায় ০৩

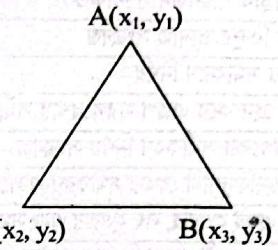
সরলরেখা
(STRAIGHT LINES)

কি পড়ব ? কেন পড়ব ? SURVEY TABLE কতটুকু পড়ব ? কিভাবে পড়ব ?

টপিক নং	বিগত বছরে যে সকল টপিকস্ থেকে প্রশ্ন এসেছে	RATINGS [কেন পড়ব?]
01	স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার পরিবর্তন সম্পর্কিত	★★
02	বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক সংক্রান্ত	★★
03	সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়	★★
04	অক্ষদ্বয়কে ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত	★★★
05	লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত	★★★
06	ছেদবিন্দু, ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ ও লম্বের পাদবিন্দু নির্ণয় সংক্রান্ত	★★★
07	দুইটি রেখা একই হওয়ার, লম্ব হওয়ার এবং সমান্তরাল হওয়ার শর্ত সংক্রান্ত	★★
08	দুটি রেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত	★★★

টপিক আলোচনা

অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্র সমূহের Topic	সূত্র সমূহ
কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের পারস্পরিক রূপান্তর	(i) $x = r\cos\theta$, (ii) $y = r\sin\theta$ → পোলার হতে কার্তেসীয়; (iii) $r = \sqrt{x^2+y^2}$, (iv) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ → কার্তেসীয় হতে পোলার
P(x, y) বিন্দুটির চারটি চতুর্ভাগে অবস্থানের উপর ভিত্তি করে আর্গুমেন্টের মান (θ) নির্ণয়ের সাধারণ নিয়ম	(i) P(x, y) এর ক্ষেত্রে: $\theta = \tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$ (ii) P(– x, y) এর ক্ষেত্রে: $\theta = \pi - \tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert = -\pi - \tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$ (iii) P(– x, – y) এর ক্ষেত্রে: $\theta = \pi + \tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert = -\pi + \tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$ (vi) P(x, – y) এর ক্ষেত্রে: $\theta = 2\pi - \tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$ or $-\tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$
দূরত্ব সূত্র	
কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে	$P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ দুটি বিন্দু হলে উক্ত বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $PQ = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ একক
পোলার স্থানাঙ্কে	$P(r_1, \theta_1)$ ও $Q(r_2, \theta_2)$ দুটি বিন্দু হলে উক্ত বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $PQ = \sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$ একক
লম্ব দূরত্ব	বিন্দু $P(x_1, y_1)$ থেকে রেখা $ax+by+c=0$ এর লম্ব দূরত্ব $D = \left\lvert\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\rvert$
দুইটি সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব	একটি রেখা $ax+by+c_1=0$ থেকে অপর একটি রেখা $ax+by+c_2=0$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $D = \left\lvert\frac{c_1-c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\rvert$
লম্ব আকৃতির সরলরেখার আদর্শ সমীকরণ	$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ যেখানে, p = মূলবিন্দু হতে সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্ব দূরত্ব α = x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ।
বিভক্তিকরণ সূত্র	
অন্তর্বিভক্তি করণ	$A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে $C(x, y)$ বিন্দুটি $m_1:m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে, $x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$ এবং $y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$
বহির্বিভক্তি করণ	$A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে $C(x, y)$ বিন্দুটি $m_1:m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে, $x = \frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}$ এবং $y = \frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}$
মধ্যবিন্দু নির্ণয়	$A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দু : $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

অক্ষদ্বয়কে বিভক্ত করলে	(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে * x অক্ষ: $-\frac{y_1}{y_2}$ অনুপাতে * y অক্ষ: $-\frac{x_1}{x_2}$ অনুপাতে বিভক্ত করে।
ভরকেন্দ্র সংক্রান্ত	$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ শীর্ষ বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$
ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত	
ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল	ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ দেওয়া থাকলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$  $= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$ বর্গ একক
বর্গ/সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল	একটি বর্গ বা সামন্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায়। সুতরাং বর্গ বা সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \Delta ABC$
সমরেখ/সমবিন্দু/একই সমতলে/ একই সরলরেখা অবস্থিত হলে	■ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ ■ তিনটি (x_1, y_1) (x_2, y_2), (x_3, y_3) বিন্দু সমরেখ হওয়ার শর্ত হচ্ছে বিন্দুত্রয়ের ঢাল সমান হবে $\therefore \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$
সরলরেখার সমীকরণ	
আদর্শ সমীকরণ	$ax + by + c = 0$
ঢাল (m) এবং (x_1,y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ	$y - y_1 = m(x - x_1)$
ঢাল এবং y ছেদক আকৃতি রেখার সমীকরণ	$y = mx + c$ $\downarrow$ $\tan\theta$
(x_1,y_1) এবং (x_2,y_2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ	$\frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}$
ছেদক আকারের সমীকরণ	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
সমান্তরাল এবং লম্ব সরলরেখার সমীকরণ	$ax+by+c= 0$ রেখার (i) সমান্তরাল রেখার সমীকরন $ax + by + k = 0$ (ii) লম্ব রেখার সমীকরণ $bx - ay + k = 0$
রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান নির্ণয়	
দুইটি রেখার $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\tan\theta = \pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} = \pm\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$ **Note:** সরলরেখার ঢাল tanθ স্থূলকোণ হলে (–)ve এবং সূক্ষ্মকোণ হলে (+)ve	
বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দুর প্রতিবিম্ব	
01. সাপেক্ষ বিন্দুটি প্রদত্ত বিন্দু ও প্রতিবিম্ব বিন্দুর মধ্যবিন্দু হয়। যেমন- (x_1, y_1) বিন্দুর সাপেক্ষে (x_2, y_2) বিন্দুর প্রতিবিম্ব (x,y) হলে, $\frac{x+x_2}{2} = x_1$ এবং $\frac{y+y_2}{2} = y_1$ 02. অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব (i) x অক্ষের সাপেক্ষে (x, –y) (ii) y অক্ষের সাপেক্ষে (–x, y)	
পরস্পর সমান্তরাল এবং লম্ব সরলরেখা দ্বয়ের ঢাল	
দুইটি সরলরেখা $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ পরস্পর সমান্তরাল হলে তাদের ঢালদ্বয় সমান হবে অর্থাৎ $m_1 = m_2$ অথবা রেখাদ্বয়ের সমান্তরাল হলে $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ এবং পরস্পর লম্ব হলে ঢালদ্বয়ের গুনফল $= -1$ অর্থাৎ $m_1 \times m_2 = -1$ অথবা $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$	

গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যা সমূহ

MEx 01 কার্টেসীয় সমতলে একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, –1) হলে এর পোলার স্থানাঙ্ক কত?

Solve $r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}, \theta=\tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right)=-\frac{\pi}{4}$

MEx 02 (2, –4) ও (–3,6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে x অক্ষ রেখা কী অনুপাতে বিভক্ত করে?

Solve অনুপাত $=-\frac{y_1}{y_2}=-\frac{-4}{6}=2:3$

MEx 03 যে বিন্দু (1, 4) এবং (9, –12) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাংশকে অন্তঃস্থভাবে 3:5 অনুপাতে বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক-

Solve নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক:

$$\left(\frac{3.9+5.1}{3+5},\frac{3.(-12)+5.4}{3+5}\right)=\left(\frac{32}{8},\frac{-16}{8}\right)=(4,-2)$$

MEx 04 x – y = 1 রেখাটি x অক্ষের সাথে যে বিন্দুতে মিলিত হয় সে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক কোনটি?

Solve $x-y=1\Rightarrow\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1$;

x-অক্ষে মিলিত বিন্দু (1, 0)

MEx 05 (1, 2) এবং (3, 4) বিন্দুগামী সংযোগরেখার ঢালের মান কোনটি?

Solve ঢাল $=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-2}{3-1}=1$

MEx 06 3x + 4y = 12 রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল কোনটি?

Solve প্রদত্ত রেখা, $3x+4y=12, \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

$\therefore a=4, b=3$

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times4\times3=6$

MEx 07 k-এর মান কত হলে x – y = 1, x – 3y + 5 = 0 এবং kx = 3y – 4 সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু হবে-

Solve $\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -3 & 5\\ k & -3 & 4\end{vmatrix}=0 \Rightarrow k=\frac{5}{4}$

MEx 08 (0, 5) বিন্দুটির অবস্থান কোথায়?

Solve y অক্ষের উপর অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (0, y)

MEx 09 মূলবিন্দু $\sqrt{3}x+y-10=0$ থেকে সরলরেখাটির লম্ব দূরত্ব হবে-

Solve $\sqrt{3}x+y-10=0$

(0, 0) হতে লম্ব দূরত্ব $=\left|\frac{0\times\sqrt{3}+0-10}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}\right|$

$=\left|\frac{-10}{\sqrt{4}}\right|=\frac{10}{2}=5$

MEx 10 12x – 5y + 13 = 0 এর উপর লম্ব এবং মূলবিন্দুগামী সরলরেখা হবে-

Solve 12x – 5y + 13 = 0 এর মূলবিন্দু (0, 0) গামী লম্ব রেখার সমীকরণ,

5(x–0)+12(y–0)

⇒ 5x+12y = 0

MEx 11 α এর কোন মানের জন্য (α–1)x+(α+1)y–7 = 0 রেখাটি 3x+5y+7 = 0 রেখার সমান্তরাল হবে?

Solve প্রদত্ত রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল বলে, ঢালদ্বয় পরস্পর সমান হবে।

$\therefore -\frac{\alpha-1}{\alpha+1}=-\frac{3}{5} \therefore \alpha=4$

MEx 12 4y = 3(x–4) এবং 4y = 3(x–) সমান্তরাল রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব হবে-

Solve 4y = 3(x – 4)

⇒ 3x – 4y – 12 = 0 ..... (i) এবং 4y = 3(x – 1)

⇒ 3x – 4y – 3 = 0 ..... (ii)

(i) ও (ii) নং সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব $=\left|\frac{-12-(-3)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right|=\left|\frac{-9}{5}\right|=\frac{9}{5}$

MEx 13 x-অক্ষের সাপেক্ষে (2, –3) বিন্দুর প্রতিচ্ছবির স্থানাঙ্ক কোনটি?

Solve x-অক্ষের সাপেক্ষে (x_1,y_1) বিন্দুর প্রতিচ্ছবির স্থানাঙ্ক হবে $(x_1,-y_1)$

টেকনিক: x এর সাপেক্ষে প্রতিচ্ছবি স্থানাঙ্ক বললে y এর স্থানাঙ্কের চিহ্ন পরিবর্তন হবে। y এর সাপেক্ষে প্রতিচ্ছবি স্থানাঙ্ক বললে x এর স্থানাঙ্কের চিহ্ন পরিবর্তন হবে।

P/Q PREVIOUS YEARS' QUESTIONS

01. 3x – 2y – 11 = 0 এবং 3x – ky + k = 0 সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? [DU-7Clg. 2023-24]

A. $\frac{7}{\sqrt{13}}$ B. $\frac{11}{\sqrt{13}}$ C. $\sqrt{11}$ D. $\sqrt{13}$

D Explanation সমান্তরাল বলে k = 2

$\therefore$ দূরত্ব $=\left|\frac{2+11}{\sqrt{9+4}}\right|=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$ একক

02. y = – 5x + 9 সরলরেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল কত? [DU-7Clg. 2023-24]

A. 5 B. –5 C. $\frac{1}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$

C Explanation y = – 5x + 9

ঢাল = – 5 ∴লম্বরেখার ঢাল $=\frac{1}{5}$

03. 2x – y + 3 = 0 এবং 3x + ay – 2 = 0 সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হলে 'a' এর মান কোনটি? [DU-7Clg: 2022-23]

A. 1 B. 3 C. 6 D. 9

C Explanation 2x – y + 3 = 0

⇒ y = 2x + 3

$\therefore m_1=2$

3x + ay – 2 = 0

$\Rightarrow y=\frac{-3}{a}x+\frac{2}{a} \therefore m_2=\frac{-3}{a}$

$\therefore m_1m_2=-1\Rightarrow 2\times\left(\frac{-3}{a}\right)=-1\Rightarrow a=6$

04. x + y = 3 এবং y – x = 1 সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ- [DU-7Clg: 2022-23]

A. y – 2 = 0 B. y + 2 = 0 C. y – 3 = 0 D. y + 3 = 0

A Explanation x + y = 3 .....(i); y – x = 1 ⇒ y = 1 + x ..... (ii)

(ii) হতে y কে (i) এ বসিয়ে পাই, x + 1 + x = 3 ⇒ x = 1

y = 1 + x = 1 + 1 = 2 ∴ ছেদবিন্দু = (1, 2)

∴ ছেদবিন্দুগামী ও x অক্ষের সমান্তরাল রেখা, y = 2 ⇒ y – 2 = 0

05. একটি সরলরেখার ঢাল – 1 হলে x -অক্ষের সাথে সরলরেখাটির আনত কোণ- [DU-7Clg: 2022-23]

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. π

C Explanation $m=-1=\tan\theta\Rightarrow\theta=\tan^{-1}(-1)=135^\circ=\frac{3\pi}{4}$

06. (–1, 3) এবং (4, –2) বিন্দুগামী রেখার অক্ষদুটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য কত? [DU-7Clg: 2021-22]

A. $2\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

D Explanation (–1, 3) এবং (4, –2) এর সংযোগ সরলরেখার সমীকরণ:

$$\frac{x+1}{-1-4}=\frac{y-3}{3+2}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{-5}=\frac{y-3}{5} \Rightarrow x+1=-y+3 \Rightarrow x+y=2$$

$\therefore \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$ ∴ অক্ষ দুটির মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

07. 3x + 2y + c = 0, 2x – ay + 7 = 0 সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে a এর মান কত? [DU-7Clg: 2021-22]

A. 3 B. – 3 C. 2 D. – 2

A Explanation $3x+2y+c=0$ এর ঢাল $m_1=-\frac{3}{2}$

$2x-ay+7=0$ এর ঢাল $m_2=-\frac{2}{-a}=\frac{2}{a}$

যেহেতু সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব $\therefore m_1\times m_2=-1$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}\times\frac{2}{a}=-1 \quad \therefore a=3$

08. x+2y+7 = 0 রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [DU-7Clg: 2020-21]

A. (– 7, –7) B. (–7 / 2, –7/2)
C. (–7/2, –7/4) D. (7, 0)

C Explanation $x+2y+7=0$

$\Rightarrow \frac{x}{-7}+\frac{y}{\frac{-7}{2}}$ ∴ বিন্দুদ্বয় $A(-7,0), B\left(0,-\frac{7}{2}\right)$

∴ মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=\left(\frac{-7+0}{2},\frac{0-\frac{7}{2}}{2}\right)=\left(\frac{-7}{2},\frac{-7}{4}\right)$

09. (2, 5) বিন্দুটি (–1, –2) ও (3, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে সেটি হবে- [DU-7Clg. 2019-20]

A. 1:3 B. 3:1 C. 2:5 D. 5:2

B Explanation $\frac{m_1}{m_2}=\frac{x_1-x}{x-x_2}=\frac{-1-2}{2-3}=\frac{-3}{-1}$ ∴ 3:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

10. মূলবিন্দুগামী এবং 2x – 3y = 5 সরলরেখার উপর লম্ব রেখাটি [DU-7Clg. 2018-19]

A. 2x +3y =5 B. 3x +2y = 0
C. 2x +3y = 0 D. 3x + 2y = 7

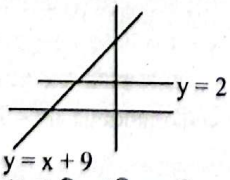
B Explanation $2x-3y=5$ রেখার উপর লম্ব $3x+2y+k=0$ যা (0, 0) বিন্দুগামী ∴ $3.0+2.0+k=0 \Rightarrow k=0$

∴ লম্বরেখার সমীকরণ $3x+2y=0$

11. y = 2 এবং y = x + 9 এর মধ্যবর্তী স্থূল কোণ [DU-7Clg. 2018-19]

A. 120° B. 180° C. 145° D. 135°

D Explanation $y=2$ রেখার ঢাল শূন্য। যা x অক্ষের সাথে 0° কোণ করে।
$y=x+9$ রেখার ঢাল 1 যা x অক্ষের সাথে 45° কোণ করে।
∴ রেখাদ্বয়ের মধ্যেবর্তী স্থূলকোণ 135°



12. 2x – 3y – 5 = 0 সরলরেখার সমান্তরাল এবং (4,5) বিন্দুগামী রেখাটি? [DU-7Clg. 2017-18]

A. 2x + 3y + 7 = 0 B. 3x – 2y – 7 = 0
C. 2x – 3y + 7 = 0 D. 3x – 2y – 22 = 0

C Explanation $2x-3y-5=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $2x-3y+k=0$ যা (4, 5) বিন্দুগামী

$\therefore 2.4-3.5+k=0$
$k=7$

∴ সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $2x-3y+7=0$

13. (3, – 1) ও (4, – 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখা x অক্ষের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করবে? [DU-7Clg. 2017-18]

A. 45° B. 135° C. 120° D. 75°

B Explanation (3, – 1) ও (4, – 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সররেখা x অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করবে তাই সংযোগ রেখার ঢাল।

$\therefore M=\tan\theta=\frac{-2+1}{4-3}=-1 \Rightarrow \theta=\tan^{-1}(-1)=135°$

IQA — IMPORTANT QUESTION FOR DCU ADMISSION

01. y = x + 4 এবং y = x রেখাদ্বয়ের লম্ব দূরত্ব-

A. 4 একক B. $2\sqrt{2}$ একক C. 2 একক D. $4\sqrt{2}$ একক

B Explanation $y=x+4$

$\Rightarrow x-y+4=0$ এবং $y=x \Rightarrow x-y=0$

∴ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\left|\frac{4-0}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{4}{\sqrt{2}}\right|=2\sqrt{2}$

02. y = b এবং $\sqrt{3}$ x – y + 1 = 0 রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের মান-

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

C Explanation $\sqrt{3}x-y+1=0$ রেখার ঢাল $\sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta=\sqrt{3} \Rightarrow \theta=60°$

তাই রেখাটি x অক্ষ বা x অক্ষের সমান্তরাল রেখা y = b এর সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে।

03. $2r\sin^2(\theta/2)=1$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ-

A. $y^2=1+2x$ B. $y^2=4(1-x)$
C. $y^2=4(1+x)$ D. $x^2=4(1+y)$

A Explanation $2r\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=1 \Rightarrow r(1-\cos\theta)=1$

$\Rightarrow r=1+r\cos\theta \quad \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=1+x$

$\Rightarrow x^2+y^2=1+2x+x^2 \quad \therefore y^2=1+2x$

04. y-অক্ষের সমান্তরাল এবং 2x – 7y + 11 = 0 ও x + 3y = 8 রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ-

A. 13x – 23 = 0 B. 3x – 7 = 0
C. 7x – 3 = 0 D. 23x –13 = 0

A Explanation প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $\left(\frac{23}{13},\frac{27}{13}\right)$

আমরা জানি, y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ,

x = a; রেখাটি ছেদবিন্দুগামী বলে, $x=\frac{23}{13}$

∴ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x=\frac{23}{13}$ বা, $13x-23=0$

05. 5x–7y–15=0 সরলরেখার উপর লম্ব এবং (2, –3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হবে-

A. 7x–5y–29=0 B. 5x–7y–31=0
C. 5x+7y+11=0 D. 7x+5y+1=0

D Explanation প্রদত্ত 5x–7y–15= 0 রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ, 7x+5y+k=0 ------ (i)

∴ (i) রেখাটি (2, –3) বিন্দু দিয়ে যায়, ∴ 7. 2+5.(–3)+k =0 বা, k =1

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, 7x+5y+1 = 0

06. $2x+3y-4=0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান-

A. $\frac{1}{\sqrt{13}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{13}}$ C. $\frac{3}{\sqrt{13}}$ D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$

D Explanation $2x+3y-4=0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে, $\frac{2}{\cos\alpha} = \frac{3}{\sin\alpha} = \frac{4}{p}$

$\therefore \cos\alpha = \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$ এবং $\sin\alpha = \frac{3p}{4}$;

সুতরাং $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{p^2}{4} + \frac{9p^2}{16} = p^2\left(\frac{4+9}{16}\right) \Rightarrow 1 = p^2\left(\frac{13}{16}\right)$

$\Rightarrow p^2 = \frac{16}{13} \quad \therefore p = \frac{4}{\sqrt{13}}$

07. P(6, 8), Q(4, 0) এবং R(0, 0) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল-

A. 32 Sq. units B. 16 Sq. units
C. 12 Sq. units D. 24 Sq. units

B Explanation নির্ণেয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$= \frac{1}{2}\{6(0-0)+4(0-8)+0(8-0)\}$

$= \frac{1}{2}.(0-32+0) = \frac{1}{2}.|-32| = 16$ sq. units.

PRIME TEST

01. $r = 2a\cos\theta$ বৃত্তের কেন্দ্র কোনটি?

A. (a, 0) B. (–a, 0)
C. (–a, a) D. (0, 0)

02. (1, 5) এবং (3, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x অক্ষরেখা কোন অনুপাতে বিভক্ত করে?

A. 5:2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত B. 5:2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত
C. 2:5 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত D. 2:5 অনুপাতে বহির্বিভক্ত

03. P(6, 8), Q(4, 0) এবং R(0, 0) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল-

A. 32 Sq. units B. 16 Sq. units
C. 12 Sq. units D. 24 Sq. units

04. P(2, 5), Q(5, 9) এবং S(6, 8) বিন্দুত্রয় PQRS রম্বসের শীর্ষবিন্দু হলে R এর স্থানাঙ্ক-

A. (12, 9) B. $\left(\frac{7}{2}, 7\right)$
C. $\left(4, \frac{13}{2}\right)$ D. (9, 12)

05. সরলরেখার সমীকরণ কোনটি যা y অক্ষকে –8 বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের সাথে 45° হেলানো অবস্থায় আছে?

A. $x + y + 8 = 0$ B. $3x + 8y = 1$
C. $x - y = 8$ D. $y = 8$

06. $2x-3y+6=0$ রেখার উপর লম্ব এবং (1, –1) বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ-

A. $3x + 2y = 1$ B. $3x - 2y = 5$
C. $3x + 2y = 5$ D. $2x + 3y = 1$

07. $3x - 4y - 12 = 0$ রেখার ঢাল কত হবে?

A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

08. (3, –6) বিন্দুগামী এবং y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ কোনটি?

A. $x = -6$ B. $y = -6$
C. $x = 3$ D. $y = 3$

09. $4x - 3y + 2 = 0$ এবং $8x - 6y - 9 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কোনটি?

A. $\frac{15}{10}$ B. $\frac{11}{9}$
C. $\frac{14}{9}$ D. $\frac{13}{10}$

10. $px + qy + 12 = 0$ এবং $px + qy + 20 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ?

A. $\pi/3$ B. $\pi/2$
C. π D. কোনটিই নহে

OMR SHEET		
01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

ANS ANALYSIS

প্রশ্ন	উত্তর	ব্যাখ্যা
01	A	$r = 2a\cos\theta$ $\Rightarrow r^2 = 2a.r\cos\theta$ $\Rightarrow x^2 + y^2 = 2ax \quad \therefore$ কেন্দ্র (a, 0)
02	A	$m = -\frac{y_1}{y_2} = -\frac{5}{2}$ $\therefore$ 5:2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।
03	B	নির্ণেয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $= \frac{1}{2}\{6(0-0)+4(0-8)+0(8-0)\}$ $= \frac{1}{2}.(0-32+0) = \frac{1}{2}.\|-32\| = 16$ sq. units.
04	D	R বিন্দুর স্থানাংক = {(5 + 6 – 2), (9 + 8 – 5)} = (9, 12)
05	C	রেখাটির সমীকরণ, $y = mx + c$ $\Rightarrow y = (\tan 45°)x - 8$ $\therefore y = x - 8 \Rightarrow x - y = 8$
06	A	$2x - 3y + 6 = 0$ রেখার ঢাল $= -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$ $\therefore 2x - 3y + 6 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $= -\frac{3}{2}$ $\therefore$ লম্ব রেখার সমীকরণ $y + 1 = -\frac{3}{2}(x-1)$ $\Rightarrow 2y + 2 = -3x + 3$ $\therefore 3x + 2y = 1$
07	A	$3x - 4y - 12 = 0$ রেখার ঢাল $= -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$
08	C	y অক্ষের সমান্তরাল হলে $x = a$ হয়। $\because$ (3, – 6) বিন্দুগামী $\therefore x = 3$
09	C	$4x - 3y + 2 = 0$ ..... (i) $8x - 6y - 9 = 0$ $\Rightarrow 4x - 3y - \frac{9}{2} = 0$ ..... (ii) (i) ও (ii) নং রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \left\|\frac{2-\left(-\frac{9}{2}\right)}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right\| = \left\|\frac{\frac{13}{2}}{5}\right\| = \frac{13}{10}$
10	D	As straight lines are parallel $\therefore$ অন্তর্ভুক্ত কোণ $= 0^0$

স্পর্শকের দৈর্ঘ্য
i. (x_1, y_1) বিন্দু হতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত $\sqrt{x_1^2+y_1^2-a^2}$
ii. (x_1, y_1) বিন্দু হতে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য, $PT=\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$
iii. মূলবিন্দু (0, 0) হতে কোন বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{\text{ধ্রুবক}}$

বৃত্তের সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়		
বিন্দুর অবস্থান	(x_1, y_1) বিন্দুটি $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের	(x_1, y_1) বিন্দুটি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের
বাইরে হলে	$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c>0$	$x_1^2+y_1^2-a^2$ এর মান >0
বৃত্তের (পরিধির) উপর হলে	$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$	$x_1^2+y_1^2-a^2=0$
ভিতরে হলে	$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c<0$	$x_1^2+y_1^2-a^2<0$
জ্যা এর দৈর্ঘ্য		$l=2\sqrt{r^2-d^2}$
বৃত্তের জ্যা কর্তৃক কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ		$\theta=2\sin^{-1}\left(\frac{\text{জ্যা এর দৈর্ঘ্য}}{\text{ব্যাস}}\right)$

গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যা সমূহ

MEx 01 $x^2+y^2-4x-8y-41=0$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?

Solve $x^2+y^2-4x-8y-41=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+2(-2)x+2(-4)y+(-41)=0$

$\therefore (-g,-f)=(2,4)$

Magic: x^2 ও y^2 এর সহগকে মুছে করে। x ও y এর সহগকে -2 দ্বারা ভাগ করলে বৃত্তের কেন্দ্র পাওয়া যায়।

MEx 02 $x^2+y^2-2x-4y+c=0$ বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করলে c এর মান কত?

Solve $x^2+y^2-2x-4y+c=0$ বৃত্তটিতে $f=-2$ কোনো বৃত্ত y অক্ষকে স্পর্শ করলে $f^2=c$ $\therefore c=f^2=(-2)^2=4$s

MEx 03 $2x^2+2y^2-4x+6y+1=0$ বৃত্তটি দ্বারা x অক্ষের খণ্ডিতাংশ কত?

Solve $g=1; f=\frac{3}{2}; c=\frac{1}{2}$

খণ্ডিতাংশ $=2\sqrt{g^2-C}$

$=2\sqrt{1-\frac{1}{2}}=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

MEx 04 যদি $y=mx+c$ রেখাটি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হয় তবে c = ?

Solve $y=mx+c$ রেখাটি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত,

$c=\pm a\sqrt{1+m^2}$

MEx 05 $x^2+y^2-2x+6y+2=0$ বৃত্তের উপর (3,–1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ-

Solve $x(3)+y(-1)-2.\frac{x+3}{2}+6.\frac{y-1}{2}+2=0$

$\Rightarrow 3x-y-x-3+3y-3+2=0$

$\Rightarrow 2x+2y-4=0$

$\therefore x+y-2=0$

MEx 06 $x^2+y^2-6x+16y=0$ বৃত্তের (1,1) বিন্দুগামী ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত?

Solve $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ হলে,

ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

সুতরাং প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য $=2\times\sqrt{(-3)^2+(8)^2-0}=2\sqrt{73}$

MEx 07 (1,–1) বিন্দু হতে $2x^2+2y^2-x+3y+1=0$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত?

Solve $2x^2+2y^2-x+3y+1=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=0$

$\therefore$ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{1^2+(-1)^2-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(-1)+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

MEx 08 $x^2+y^2-8x+6y+9=0$ বৃত্ত সাপেক্ষে মূলবিন্দুর অবস্থান কোনটি?

Solve $0^2+0^2-0+9>0$

$\therefore 9>0$ $\therefore$ বৃত্তের বাইরে

MEx 09 $r=a\sin\theta$ নিম্নের কোনটি নির্দেশ করে?

Solve $r=a\sin\theta\Rightarrow r^2=ar\sin\theta\Rightarrow x^2+y^2=ay$

$\Rightarrow x^2+y^2-ay=0$ যাহা একটি বৃত্ত নির্দেশ করে।

MEx 10 $x^2+y^2=9$ এবং $x^2+y^2+2ax+2y+1=0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পর স্পর্শ করলে a এর মান কত?

Solve $C_1C_2=r_1+r_2$; $\sqrt{a^2+1}=3+a$

$\Rightarrow 6a+9=1$ $\Rightarrow a=\frac{-4}{3}$

P/Q PREVIOUS YEARS' QUESTIONS

01. $r=a\sin\theta$ সমীকরণটি নির্দেশ করে– [DU-7Clg. 2023-24]

A. বৃত্ত B. পরাবৃত্ত C. উপবৃত্ত D. অধিবৃত্ত

Explanation $r=a\sin\theta\Rightarrow r^2=ar\sin\theta\therefore x^2+y^2=ay\rightarrow$ বৃত্ত

02. (2, – 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তটির ব্যাস কত? [DU-7Clg. 2023-24]

A. – 3 B. 2 C. 4 D. 6

Explanation x অক্ষকে স্পর্শ করলে ব্যাসার্ধ $r=|\text{কেন্দ্রের কোটি}|$

$=|-3|=3$

$\therefore$ ব্যাস $=2r=6$ একক

03. $2(x^2+y^2)-3x+4y=0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ কোনটি? [DU-7Clg. 2023-24]

A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

Explanation $x^2+y^2-\frac{3}{2}x+2y=0$ $\therefore$ কেন্দ্র $=\left(\frac{3}{4},-1\right)$

$\therefore r=\sqrt{\frac{9}{16}+1}=\sqrt{\frac{9+16}{16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$

04. $x^2+y^2-9x=0$ বৃত্তটির পোলার সমীকরণ– [DU-7Clg. 2023-24]

A. $r=9\cos\theta$ B. $r=3\cos\theta$

C. $r+9\cos\theta=0$ D. $r+3\cos\theta=0$

Explanation $x^2+y^2=9x$

$\Rightarrow r^2=9r\cos\theta$

$\Rightarrow r=9\cos\theta$

প্রথম পত্র অধ্যায় ০৫

বিন্যাস ও সমাবেশ
(PERMUTATIONS & COMBINATIONS)

কি পড়ব ? কেন পড়ব ? **SURVEY TABLE** কতটুকু পড়ব ? কিভাবে পড়ব ?

টপিক নং	বিগত বছরে যে সকল টপিকস্ থেকে প্রশ্ন এসেছে	RATINGS [কেন পড়ব?]
01	(i) কিছু বর্ণ/বস্তুর কোন দুটিকে পাশাপাশি বা একত্রে না রেখে বিন্যাস (ii) কতগুলো বস্তু যা কখনোই থাকবে না (iii) কতগুলো বস্তু যা অবশ্যই থাকবে	★★★
02	(i) কতগুলো বিশেষ বস্তুর কিছু থাকবে কিছু থাকবে না (ii) কতগুলো বিশেষ বস্তু অবস্থান পরিবর্তন করবে না (iii) কতগুলো বিশেষ বস্তু আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন করবে না (iv) কতগুলো বিশেষ বস্তু ক্রম পরিবর্তন করবে না	★★★
03	সমজাতীয়/ ভিন্ন জাতীয় বস্তু বাছাইয়ের ক্ষেত্রে	★★★
04	বিন্যাস ও সমাবেশের মিশ্রিত সমস্যা সংক্রান্ত	★★

টপিক আলোচনা

বিন্যাস

সাধারণ সূত্রাবলি	(i) ${}^nP_r = {}^nC_r \times r!$ (ii) ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ (iii) ${}^nC_n = 1$ (iv) ${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$
n সংখ্যক ভিন্ন জিনিস হতে n সংখ্যক নিয়ে	${}^nP_n = n!$
n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস	${}^nP_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}$; $[n \geq r]$
n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে সবগুলি নিয়ে বিন্যাস	${}^nP_n = \lfloor n$
n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের মধ্যে p একজাতীয়, q সংখ্যক অন্য এক জাতীয়, r সংখ্যক আর এক জাতীয় হলে সবগুলো নিয়ে বিন্যাস	$\frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor q \lfloor r}$

বৃহত্তম মান নির্ণয়

${}^np_r$ এর মান বৃহত্তম হবে যদি $r = n$ বা $r = n - 1$ হয় এবং ${}^np_r = {}^np_s$ হবে যখন হয় $r = s$ অথবা, $n = r + s$

কিছু বর্ণ বা বস্তু একত্রে রেখে বিন্যাস

i) r সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিস একত্রে রেখে n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস একসাথে নিয়ে বিন্যাস $= (n - r + 1)! \times r!$

ii) একত্রে না রেখে বিন্যাস = সবগুলো নিয়ে বিন্যাস – একত্রে রেখে বিন্যাস

চক্র বিন্যাস

n সংখ্যক মানুষ নিয়ে চক্রাকারে বৈঠক করা যাবে	$(n - 1)$ উপায়ে
আসন সংখ্যা স্বতন্ত্র উল্লেখ থাকলে	$n!$ উপায়ে
মালা, পুথি, তজবি, এরূপ জিনিসের বিন্যাস	$\frac{(n-1)!}{2}$ উপায়ে
দুটি গ্রুপের ক্ষেত্রে একই গ্রুপের সদস্যদের পাশাপাশি না রেখে চক্রাকারে বৈঠক করার ক্ষেত্রে	$(n - 1)!$ উপায়ে

n সংখ্যক বিভিন্ন ঘটনা/বস্তু থেকে সংখ্যক ঘটনা/বস্তু দ্বারা পুনরাবৃত্তিমূলক বিন্যাস যাহা অবশ্যই ব্যবহার করতে হবে

01. ভোট দেওয়ার ক্ষেত্রে = $(\text{প্রার্থী})^{\text{ভোটার}}$

02. ফোন করার ক্ষেত্রে = $(10)^{\text{ডিজিট}}$

03. চিঠি পোষ্ট বাক্সে ফেলার ক্ষেত্রে = $(\text{পোষ্ট বক্স})^{\text{চিঠি}}$

04. বন্ধু নির্বাচনের ক্ষেত্রে = $2^n - 1$

Magic: $(\text{একাধিক নিতে পারে})^{\text{একাধিক দিতে পারে}}$ অথবা, $\text{Optional}^{\text{compulsary}}$

সংখ্যার বিন্যাস

FORMULA সংখ্যা গঠনের অংক :

01. যত অংকের সংখ্যা ততটা ঘর বানাব।
02. যতটা অংক দেওয়া আছে প্রথম ঘরে তত বসাব।
03. পুনরাবৃত্তি ছাড়া হলে 1, 1 করে কমাবো।
04. পুনরাবৃত্তিসহ হলে কমাবো না।
05. কোন বিশেষ শর্ত থাকলে নির্দিষ্ট ঘরে ফিক্সড করে দিব।
06. প্রথম ঘরে শূন্য বসার সম্ভবনা থাকলে বিয়োগ করতে হবে।
07. ঘরে বসানো সংখ্যাগুলোর গুণ করব।

সমাবেশ

সমাবেশের ধর্ম

- ${}^nC_0 = 1$
- ${}^nC_1 = n$
- ${}^nC_n = 1$
- ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ [${}^nC_r$ ও ${}^nC_{n-r}$ কে পরস্পরের সম্পূরক সমাবেশ বলে।]
- ${}^nC_x = {}^nC_y$ হলে, Either $x = y$ or $x + y = n$
- ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$; $[n > r > 1]$
- ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots\ldots + {}^nC_n = 2^n$
- ${}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \ldots\ldots + {}^nC_n = 2^n - 1$
- ${}^nP_r = r! \times {}^nC_r$

n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বাছাই বা সমাবেশ	${}^nC_r = \dfrac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}$; $[n \geq r]$
n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে প্রতিবারে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত যে সমস্ত সমাবেশে p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই থাকবে, তার সংখ্যা	${}^{n-p}C_{r-p}$ $[p + r \leq n]$
n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত যে সমস্ত সমাবেশে p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু কখনোই থাকবে না, তার সংখ্যা	${}^{n-p}C_r$ $[p + r \leq n]$

n সংখ্যক বিন্দু দ্বারা গঠিত

সরলরেখাকে সংখ্যা	${}^nC_2$
ত্রিভুজের সংখ্যা	${}^nC_3$
চতুর্ভুজের সংখ্যা	${}^nC_4$
কর্ণের সংখ্যা	${}^nC_2 - n$

কমিটি বা দল গঠন

m সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে p আবার n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে q সংখ্যক করে নিয়ে (m + n) সংখ্যক বস্তু হতে (p + q) সংখ্যক বস্তু নির্বাচন করা যাবে ${}^mC_p \times {}^nC_q$ উপায়ে। আবার এর সাথে s সংখ্যক বস্তু t সংখ্যক বস্তু নির্বাচন হবে ${}^mC_p \times {}^nC_q \times {}^sC_t$ উপায়ে।

সমজাতীয়/ ভিন্ন জাতীয় বস্তু বাছাইয়ের ক্ষেত্রে

সমজাতীয়/ভিন্ন বস্তু বাছাইয়ের অংক করতে গেলে সমজাতীয় বা ভিন্ন জাতীয় বস্তুর সংখ্যা গুলোকে আলাদা করে বাছাই করতে হবে আর আমরা জানি যে একজাতীয় n সংখ্যক বস্তু হতে প্রতি বারে যতগুলোই বাছাই করা হোক না কেন তার বিন্যাস/সমাবেশ সবসময় 1।

গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যা সমূহ

MEx 01 ${}^nP_r$ এর মান ${}^nC_r$ এর মানের কতগুণ?

Solve ${}^nP_r = r! \times {}^nC_r = r!$

MEx 02 0! এর মান কত হবে?

Solve 1

MEx 03 যদি ${}^nC_5 = {}^nC_7$ হয় তবে ${}^nC_{11}$ এর মান কত?

Solve সর্বদা এক্ষেত্রে ডান ও বাম পাশে n এর যে মান দেওয়া থাকে তা যোগ করলে এর মান পাওয়া যায়।

$n = 5 + 7 = 12$; ${}^{12}C_{11} = 12$; ${}^nC_{n-1} = n$

MEx 04 5 টি মুদ্রা 4টি দানবক্সে কতভাবে ফেলা যায়?

Solve $(\text{দানবক্স})^{\text{মুদ্রা}} = (4)^5$

MEx 05 3 জন ছাত্রী ও 4 জন ছাত্রকে একটি সারিতে কত প্রকারে বিন্যাস করা যায় যাতে 3 জন ছাত্রী সর্বদাই একত্রে থাকে?

Solve এখানে, 3 জন ছাত্রীকে একত্রে একটি গ্রুপ মান করে মোট বিন্যাস সংখ্যা = 5!

আবার, 3 জন ছাত্রীর নিজেদের মধ্যে বিন্যাস সংখ্যা = 3!

∴ মোট বিন্যাস সংখ্যা = 5! ×3! =720

MEx 06 টেলিফোন ডায়ালে 0 হলে 9 পর্যন্ত লেখা থাকে। যদি কক্সবাজার শহরের টেলিফোনগুলো 5 অংকবিশিষ্ট হয়, তবে ঐ শহরে কত টেলিফোন সংযোগ দেয়া যাবে?

Solve সূত্র = 10^{Digit}

সংজ্ঞা = $10^5 = 100000$

MEx 07 0, 1, 2, 3 দ্বারা চার অঙ্কের কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

Solve এখানে অঙ্ক আছে 8টি

3	3	2	1	= 18

↑ 0 ব্যতিত বাকিগুলো

MEx 08 'EQUATION' শব্দটির সবগুলো অক্ষর ব্যবহার করে কতগুলো শব্দ গঠন করা যেতে পারে যাতে স্বরবর্ণগুলি একত্রে থাকে?

Solve n সংখ্যক জিনিসের মধ্যে P সংখ্যক ভিন্ন জিনিসকে একত্রে রেখে,

বিন্যাস = $(n - p + 1)! \times p!$

∴ নির্ণেয় বিন্যাস = $(8 - 5 + 1)! \times 5!$

= 2880

MEx 10 একটি প্রতিষ্ঠানের দশজন কর্মী মিটিং এর সময় প্রধান কর্মকর্তার আসনটি নির্দিষ্ট রেখে একটি গোল টেবিলের চারপাশে কতভাবে বসতে পারে?

Solve গোলটেবিলের চারপাশে বসতে পারবে $= (10-1)! = 9! = 362880$

MEx 10 একটি সভা শেষে প্রত্যেকের সাথে করমর্দন করলেন। করমর্দনের সংখ্যা 66 হলে কতজন লোক সভায় উপস্থিত ছিলেন?

Solve $^nC_2 = 66 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2!} = 66$

$\Rightarrow n^2 - n = 132$

$\Rightarrow n^2 - 12n + 11n - 132 = 0$

$\Rightarrow n = -11, 12$

যেহেতু $n = -11$ গ্রহণযোগ্য নয়, সুতরাং $n = 12$

MEx 11 একটি সমতলে 15টি বিন্দু আছে। এদের 5টি বিন্দু একটি সরল রেখায় অবস্থিত। এছাড়া অন্য কোন 3টি বিন্দু সমরেখ নয়। বিন্দুগুলির শীর্ষ ব্যবহার করে কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যায়?

Solve গঠিত ত্রিভুজ এর সংখ্যা $= {}^{15}C_3 - {}^5C_3 = 445$

P/Q PREVIOUS YEARS' QUESTIONS

01. EXIT এর অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে বিন্যাস করা যায়, যাতে শুরুতে স্বরবর্ণ থাকে? [DU-7Clg. 2020-21]

A. 24 B. 12
C. 6 D. 16

B Explanation EXIT এর মোট অক্ষর 4টি যার মধ্যে 2টি স্বরবর্ণ (E, I)

$\therefore$ বিন্যাস $= 2 \times 3! = 12$

02. "MATHEMATICS" শব্দটির বর্ণগুলি কত প্রকারে সাজানো যায় যখন স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকে? [DU-7Clg. 2019-20]

A. 120960 B. 42350
C. 12060 D. 24690

A Explanation "MATHEMATICS" শব্দটি মোট বর্ণ 11 টি স্বরবর্ণ 4টি। স্বরবর্ণ 4টি কে 1টি বর্ণ ধরে মোট বর্ণ 8টি যাদের বিন্যাস $= \frac{\lfloor 8}{\lfloor 2 \lfloor 2}$

[$\because$ 2টি M, 2টি T রয়েছে]

স্বরবর্ণগুলোর নিজেদের মধ্যে বিন্যাস $= \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2}$

$\therefore$ মোট বিন্যাস $= \frac{\lfloor 8}{\lfloor 2 \lfloor 2} \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} = 120960$

03. পুনরাবৃত্তি ব্যতীত 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলি দ্বারা চার অঙ্কবিশিষ্ট অর্থপূর্ণ সংখ্যা গঠনের সংখ্যা- [DU-7Clg. 2018-19]

A. 18 B. 24
C. 15 D. 12

B Explanation 1, 2, 3, 4 অংকগুলো দ্বারা চার অংকবিশিষ্ট অর্থপূর্ণ সংখ্যা গঠন করা যাবে $^4P_4 = \lfloor 4 = 24$

04. TRIANGLE শব্দটির বিন্যাস সংখ্যা? [DU-7Clg. 2017-18]

A. 4320 B. 4032
C. 36000 D. 40320

D Explanation TRIANGLE শব্দটির বিন্যাস সংখ্যা $= \lfloor 8 = 40320$

IQA IMPORTANT QUESTION FOR DCU ADMISSION

01. 'Geometry' শব্দটির বর্ণগুলির সবগুলি একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় যেন প্রথম ও শেষ অক্ষর 'e' থাকে?

A. 306 B. 20160
C. 720 D. 30

C Explanation Geometry শব্দটির 2টি e কে প্রথম ও শেষে স্থির রেখে অবশিষ্ট 6টি ভিন্ন বর্ণের সাজানো সংখ্যা $= {}^6P_6 = \lfloor 6 = 720$

e							e

02. $^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \ldots + {}^nC_n = ?$

A. 2^{n+1} B. 2^n
C. 2^{n-1} D. $2^n - 1$

D Explanation $^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \ldots + {}^nC_n = 2^n - 1$

03. 1, 2, 0 দ্বারা গঠিত তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাগুলির মধ্যে কয়টি 2 দ্বারা বিভাজ্য?

A. 6 B. 18
C. 4 D. 12

C Explanation 1, 2, 0 মোট অংক = 3টি, [শ] [দ] [এ]

একককের ঘরে (2, 0) বসলে সংখ্যাগুলো 2 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

Any two 0 or 2 $^2C_1$

1	2	0
1	0	2
2	1	0
0	1	2
2	0	1
0	2	1

} শর্ত পূরণ করে না

$\therefore$ গঠিত সংখ্যা $= 2! \times {}^2C_1 = 4$

কিন্তু প্রদত্ত অংকে অর্থপূর্ণ 3 অংক বিশিষ্ট সংখ্যা বললে, একটি সংখ্যায় প্রথমে 0 আসায় 3 অংক বিশিষ্ট অর্থপূর্ণ সংখ্যা $= 4 - 1 = 3$ হবে।

04. 6 জন বালক এবং 5 জন বালিকার একটি দল থেকে কত উপায়ে 3 জন বালক এবং 2 জন বালিকার একটি দল গঠন করা যেতে পারে?

A. 10 B. 20
C. 50 D. 200

D Explanation নির্দেশ দল গঠন করার উপায় সংখ্যা $= {}^6C_3 \times {}^5C_2 = 200$

05. 1, 2, 3, 4, 5, 6 ও 7 থেকে পুনরাবৃত্তি ছাড়া তিন অঙ্কের সংখ্যা গঠন করা হলে কয়টি সংখ্যার মান 100 থেকে 500 এর মধ্যে?

A. 240 B. 60
C. 120 D. 480

C Explanation অংকগুলো পুনরাবৃত্তি ছাড়া ব্যবহার করে তিন অংকের মোট সংখ্যা $= {}^7P_3 = 210$

কিন্তু 100 থেকে 500 এর মধ্যে থাকতে হলে প্রথম সংখ্যাটি অবশ্যই 1, 2, 3, 4 এর যেকোন একটি হতে হবে।

$\therefore$ মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 210 \times \frac{4}{7} = 120$

PRIME TEST

01. $4 \times {}^nP_3 = 5 \times {}^{n+1}P_3$ হলে n-

A. 11 B. 12
C. 14 D. 15

02. APPLIED শব্দটির বর্ণগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায়?

A. 1260 B. 2520
C. 2540 D. 5040

3 জন বালক এবং 4জন বালিকাকে একটি সারিতে কত প্রকারে বিন্যাস করা যাবে, যাতে 3 জন বালক সর্বদাই একত্রে থাকবে?

a. 720 B. 2430
C. 4320 D. 144

BANGLADESH শব্দটিকে কত ভাবে সাজানো যায় যেন "BANGLA" শব্দটি একত্রে থাকে?

a. 43200 B. 8640
C. 5040 D. 120

"TIME" শব্দটির অক্ষর গুলোকে পুনর্বিন্যাস করা হয়, তবে কতগুলো স্বরবর্ণ দ্বারা শুরু হয়?

a. 6 B. 216
C. 12 D. 60

কার্মেসী বিভাগের ছাত্রকে একত্রে না বসিয়ে 5 জন রসায়নের ছাত্র ও 5 জন কার্মেসী বিভাগের ছাত্র কত রকমে একটি টেবিলের পাশে আসন নিতে পারে?

a. 2880 B. 2840
C. 2420 D. 2440

প্রত্যেক সংখ্যাকে যে কোন সংখ্যক বার ব্যবহার করে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অংকগুলো দ্বারা তিন অঙ্কের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যাবে?

a. 729 B. 84
C. 126 D. 504

SCHOOL শব্দটি থেকে তিনটি অক্ষর নিয়ে পৃথকভাবে সাজানো সংখ্যা-

a. 18 B. 14
C. 4 D. 15

N.B: একটির সংখ্যা প্রশ্নে ভুল ছিল। সাজানোর পরিবর্তে বাছাই হবে।

ইংরেজ এবং চারজন মার্কিনিদের মধ্যে থেকে ছয়জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে। কমিটিতে কমপক্ষে দুইজন মার্কিনি থাকবে, এই শর্তে কতভাবে এটা গঠন করা যেতে পারে?

a. 150 B. 371
C. 721 D. 415

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 অংকগুলি পুনরাবৃত্তি সহ ব্যবহার করে তিন অঙ্কের কতগুলো সংখ্যা তৈরী করা যাবে?

a. 120 B. 216
C. 1 D. 60

[illegible]	04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	[illegible]

ANSWER ANALYSIS

প্রশ্ন	উত্তর	ব্যাখ্যা
01	[illegible]	[illegible]
02	[illegible]	[illegible]
03	A	যেহেতু, 3 জন বালক সর্বদাই একত্রে থাকবে, সেহেতু, 3জন বালককে একজন ধরে মোট লোকসংখ্যা 5 জন। এই 5 জনকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় = 5! উপায়ে। আবার, 3 জন বালক নিজেদের মধ্যে সাজে 3! ভাবে। ∴ সর্বমোট বিন্যাস সংখ্যা = 5!×3!=720
04	D	'BANGLA' শব্দটির বর্ণগুলোকে 1টি ধরে 'BANGLADESH' শব্দটির বিন্যাস = (1 + 4)! = 5! = 120
05	C	TIME শব্দটিতে মোট বর্ণ 4টি। স্বরবর্ণ 2টি, ব্যঞ্জনবর্ণ 2টি। প্রথম স্থানে স্বরবর্ণকে বসানো উপায় = $^2P_1 = 2$ অবশিষ্ট 3টি স্থানে অবশিষ্ট 3টি বর্ণ বসানোর উপায় = $^3P_3 = 6$; স্বরবর্ণকে প্রথমে রেখে বিন্যাস = 2 ×6 = 12 স্বরবর্ণ দ্বারা শুরু হয়ে TIME শব্দটির পুনর্বিন্যাস = 12 [যেহেতু স্বরবর্ণ দ্বারা শুরু হলে TIME শব্দটি পাওয়া যায় না, সেহেতু পুনর্বিন্যাস বলা হলেও 1 বিয়োগ হবে না]
06	A	5 জন রসায়নের ছাত্রকে টেবিলের পাশে বসিয়ে তাদের মাঝে কার্মেসী বিভাগের ছাত্রকে বসালে দুইজন কার্মেসী বিভাগের ছাত্র একত্রে থাকবে না। একজনকে নির্দিষ্ট ধরে 5 জন রসায়নের ছাত্রকে টেবিলের পাশে 4! উপায়ে বসানো যায়। ∴ তাদের মাঝে কার্মেসী বিভাগের ছাত্রকে বসানো যায় 5! উপায়ে। ∴ মোট বিন্যাস সংখ্যা = 4! × 5! = 2880
07	A	মোট ভিন্ন ভিন্ন সাজানো সংখ্যা = 9^3 = 729
08	B	SCHOOL শব্দটিতে মোট 6 টি বর্ণ আছে এবং এর মধ্যে 2টি 'O' সুতরাং প্রতিবারে 3টি করে বর্ণ নিয়ে নিম্নবর্ণিতভাবে বাছাই করা যেতে পারে: (i) 2টি বর্ণ অভিন্ন এবং অপর 1টি ভিন্ন। এক্ষেত্রে বাছাই সংখ্যা = $1\times{}^4C_1=4$ (ii) 3টি বর্ণই ভিন্ন। এক্ষেত্রে বাছাই সংখ্যা = $^5C_3 = 10$ ∴ বর্ণগুলো বাছাইয়ের মোট সংখ্যা = 4+10=14
09	B	কমিটি গঠনের সম্ভাব্য উপায়গুলো নিম্নরূপ: উপায় | ইংরেজ (7) | মার্কিনি (4) (i) | 4 | 2 (ii) | 3 | 3 (iii) | 2 | 4 ∴ কমিটি গঠনের উপায় $= {}^7C_4\times{}^4C_2 + {}^7C_3\times{}^4C_3 + {}^7C_2\times{}^4C_4$ = 210 + 140 + 21 = 371
10	B	এখানে, মোট অঙ্ক 6টি। ∴ n = 6, r = 3 ∴ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = 6^3 =216

সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় সংক্রান্ত

(a) একটি রাশি $a \sin x + b \cos x + c$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান বের করতে হলে।

$$a \sin x + b \cos x + c = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) + c$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}(\sin x \cos\theta + \cos x \sin\theta) + c$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta) + c$$

এখন, $-1 \le \sin(x+\theta) \le 1$

$\therefore$ রাশির সর্বোচ্চ মান $= \sqrt{a^2+b^2} + c$

$\therefore$ রাশির সর্বনিম্ন মান $= -\sqrt{a^2+b^2} + c$

(b) ভিন্ন কোণ যুক্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে মান সর্বোচ্চ হবে যখন প্রতিটি পদের মান পৃথক পৃথক ভাবে সর্বোচ্চ হবে এবং মান সর্বনিম্ন হবে যখন প্রতিটি পদের মান পৃথক পৃথক সর্বনিম্ন হবে।

(c) $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ যুক্ত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করার জন্য নিম্নোক্ত মানগুলো বিবেচনায় রাখতে হবে:

(i) $\sin\theta$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে 1 ও −1

(ii) $\cos\theta$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে 1 ও −1

(iii) $\sin^2\theta$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে 1 ও 0

(iv) $\cos^2\theta$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে 1 ও 0

(v) $|\sin\theta|$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে 1 ও 0

গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যা সমূহ

MEx 01 $50°37'30''$ কত রেডিয়ানের সমান?

Solve $50°37'30'' = \frac{\pi}{180}\left[50 + \frac{37}{60} + \frac{30}{60\times 60}\right] = \frac{9\pi}{32}$

MEx 02 tan x একটি পর্যায়ী ফাংশন। tan x এর পর্যায় কত?

Solve tan x এর পর্যায় $= \frac{\pi}{\text{চলকের সহগ}}$

MEx 03 $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান সবসময়ই-

Solve $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান সর্বদাই (−1 থেকে +1 পর্যন্ত হয়)

MEx 04 যদি $\sec\theta = -2$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হয়, তবে θ এর মান কত?

Solve $\sec\theta = -2$ বা, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\therefore \cos\theta = \cos 120°$

$\therefore \theta = 120°$

MEx 05 $y = \cot x$ ফাংশনটি কোন বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন?

Solve যেহেতু x এর মান 0°, 180°, 360° ইত্যাদি হলে cotx এর মান অসংজ্ঞায়িত হয়, সেহেতু এসব বিন্দুতে cotx ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।

MEx 06 যদি $\tan\theta = \sqrt{2x^2}$ হয় তবে $\cos 2\theta$ এর মান-

Solve $\tan\theta = \sqrt{2x^2}$

$$\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$
$$= \frac{1-(\sqrt{2x^2})^2}{1+(\sqrt{2x^2})^2} = \frac{1-2x^4}{1+2x^4}$$

MEx 07 $0° < \theta < 90°$ এবং $\tan\theta = \frac{3}{4}$ হলে $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ এর মান কোনটি?

Solve $$\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}$$
$$= \frac{\tan\theta - 1}{\tan\theta + 1} = \frac{\frac{3}{4}-1}{\frac{3}{4}+1} = -\frac{1}{7}$$

MEx 08 একটি বহুভুজের একটি কোণের পরিমাণ 170° বহুভুজটির বাহুর সংখ্যা কত?

Solve $\frac{(n-2)\times 180°}{n} = 170°$

$\Rightarrow 180°n - 360° = 170°n \quad \therefore n = 36$

জেনে রাখা ভালো:

- বহুভুজের অন্তঃস্থ কোণের মান $= \frac{n-2}{n}\times 180$ [n=বাহুর সংখ্যা]
- কোণ বহুভুজের বহিঃস্থ একটি কোণের মান 30° হলে বাহুর সংখ্যা $n = \frac{360}{30}$

P/Q PREVIOUS YEARS' QUESTIONS

01. $y = \sin x$ ফাংশনটির পর্যায়কাল কত? [DU-7Clg. 2019-20]

A. π B. 2π
C. 3π D. 4π

B Explanation sinx, cosx, secx, cosecx এদের Power বিজোড় হলে পর্যায়কাল $= \frac{2\pi}{\text{চলকের সহগ}}$ $\therefore y = \sin x$ এর পর্যায়কাল $= \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

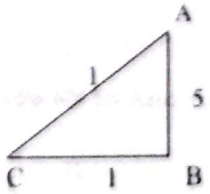
IQA IMPORTANT QUESTION FOR DCU ADMISSION

01. যদি $\cos\theta = \frac{12}{13}$ হয়, তাহলে $\tan\theta$ এর মান-

A. $\pm\frac{5}{12}$ B. $\frac{25}{144}$ C. $\frac{13}{12}$ D. $\pm\frac{13}{12}$

A Explanation দেওয়া আছে, $\cos\theta = \frac{12}{13}$

পার্শ্বের ত্রিভুজ হতে পাই,



$\tan\theta = \pm\frac{5}{12}$ [θ সূক্ষ্ম বা স্থূল উভয়ই হতে পারে।]

02. $f(x) = 1 + \sqrt{\sin^2 x + 1}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান কত হবে?

A. $1 + \sqrt{1.5}$ B. 2 C. $1 + \sqrt{2}$ D. $3\sqrt{3}$

Explanation যেহেতু sinx এর সর্বোচ্চ মান 1
সুতরাং $\sin^2 x$ এর সর্বোচ্চ মানও 1 হবে।

$\therefore 1 + \sqrt{\sin^2 x + 1}$ এর সর্বোচ্চ মান $= 1 + \sqrt{1+1} = 1 + \sqrt{2}$

PRIME TEST

01. cotθ ফাংশনের ডোমেন কোনটি?

A. R
B. $R - \{n\pi, n \in Z\}$
C. $R - \{(2n+1)\pi/2, n \in Z$
D. $R - \{2n\pi, n \in Z\}$

02. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে 72°53' 51'' এবং 37°6' 9'' তৃতীয় কোণটির মান রেডিয়ানে কত হবে?

A. $\frac{4\pi}{9}$ রেডিয়ান
B. $\frac{7\pi}{18}$ রেডিয়ান
C. $\frac{6\pi}{12}$ রেডিয়ান
D. $\frac{5\pi}{18}$ রেডিয়ান

03. $f(x) = 1 + \sqrt{\sin^2 x + 1}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান কত হবে?

A. $1 + \sqrt{1.5}$ B. 2
C. $1 + \sqrt{2}$ D. $3\sqrt{3}$

04. কোট্যানজেন্ট ফাংশনের মৌলিক পর্যায় কত?

A. 2π B. π
C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{3\pi}{2}$

05. $0 \le x \le 360°$ এবং $4\sin x - 1 = -5$ হলে, x = ?

A. 0 B. 90
C. 180 D. 270

06. tanθ = c হলে sinθ হবে-

A. $\frac{-1}{\sqrt{1+c^2}}$
B. $\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$
C. $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$
D. $\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}$

07. $\cot A = \frac{12}{5}$ হলে sinA + cosA এর মান কত?

A. $\frac{13}{17}$ B. $-\frac{7}{13}$
C. $\frac{17}{13}$ D. $-\frac{13}{17}$

08. 20° = কত রেডিয়ান?

A. 0.35^c B. $28°27^c$
C. $12°63^c$ D. 160°

09. কোন লেখচিত্রটি মূলবিন্দু দিয়ে যায় না?

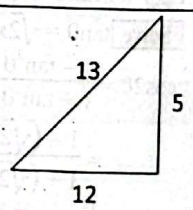
A. y = sinx
B. y = sin (x + 45°)
C. y = tan x
D. সব কয়টিই

10. যদি $\cos x = \frac{4}{5}$ এবং $0 < x < \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে tanx =?

A. $\frac{7}{24}$ B. $\frac{7}{25}$
C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{24}{25}$

OMR SHEET		
01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	সে ৫ ৪০

ANS ANALYSIS

প্রশ্ন	উত্তর	ব্যাখ্যা
01	B	General discussion of Trigonometric Ratios.
02	B	তৃতীয় কোণটির মান $= 180° - (72°53'51'' + 37°6'9'')$ $= 70° = 70 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{18}$ রেডিয়ান
03	C	যেহেতু sinx এর সর্বোচ্চ মান 1 সুতরাং $\sin^2 x$ এর সর্বোচ্চ মানও 1 হবে। $\therefore 1 + \sqrt{\sin^2 x + 1}$ এর সর্বোচ্চ মান $= 1 + \sqrt{1+1} = 1 + \sqrt{2}$
04	B	cot এর মৌলিক পর্যায়কাল = π
05	D	$\sin 270° = -1$
06	C	দেওয়া আছে, $\tan\theta = c$; পার্শ্বের ত্রিভুজ হতে পাই, $\sin\theta = \pm\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ [θ সূক্ষ্ম বা স্থূল উভয়ই হতে পারে।]
07	C	দেওয়া আছে, $\cot A = \frac{12}{5}$ ∴ পাশের চিত্র হতে পাই, $\sin A = \frac{5}{13}$ এবং $\cos A = \frac{12}{13}$ $\therefore \sin A + \cos A = \frac{5}{13} + \frac{12}{13} = \frac{17}{13}$ 
08	A	$\cos^2 x$ এর বৃহত্তম মান 1 এবং ক্ষুদ্রতম মান 0
09	B	General discussion of Trigonometric Ratios
10	C	$\cos x = \frac{4}{5}$ $\Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ $\therefore \tan x = \tan\left(\cos^{-1}\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{4}$

প্রথম পত্র অধ্যায় ০৭

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
(TRIGONOMETRIC RATIOS OF ASSOCIATED ANGLES)

কি পড়ব ? কেন পড়ব ? **SURVEY TABLE** কতটুকু পড়ব ? কিভাবে পড়ব ?

টপিক নং	বিগত বছরে যে সকল টপিকস্ থেকে প্রশ্ন এসেছে	RATINGS [কেন পড়ব?]
01	সহগুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত	★★
02	জানা কোণের ত্রিকোণমিতিক রাশির মান নির্ণয় সম্পর্কিত গাণিতিক প্রয়োগ	★★
03	অজানা কোণের ত্রিকোণমিতিক রাশির মান নির্ণয় সম্পর্কিত গাণিতিক প্রয়োগ	★★★
04	ত্রিভুজের sin ও cosine সূত্রের ব্যবহার	★★★
05	ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত	★★

টপিক আলোচনা

sin/cos এর যৌগিক কোণের সূত্র		
$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$	$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$	$\sin 2A = 2\sin A\cos A$
$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$	$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$
$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$	$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$; $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$
$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$	$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$	$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$; $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$
$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$	$\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$
$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A \Rightarrow \sin^3 A = \frac{1}{4}(3\sin A - \sin 3A)$	$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$	$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A \Rightarrow \cos^3 A = \frac{1}{4}(\cos 3A + 3\cos A)$	
tan/cot এর যৌগিক কোণের সূত্র		
$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$	$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$	$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$
$\cot(A \pm B) = \frac{\cot A\cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$	$\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$	$\tan^2 A = \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$
নিম্নোক্ত মানগুলো MCQ এর জন্য মুখস্থ রাখতে হবে		
$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$	$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
$\tan(-15^\circ) = \sqrt{3} - 2$	$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$
$\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$	$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
ত্রিভুজের সূত্র সমূহ		
ত্রিভুজের sine এর সূত্র	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ [R = পরিব্যাসার্ধ]	
ত্রিভুজের cosine এর সূত্র	1. $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$	2. $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$ 3. $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল	$\frac{1}{2}$ × বাহুদ্বয়ের গুণফল × বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত কোণের sin	

ত্রিভুজের অর্ধ পরিসীমা			
একটি ত্রিভুজের অর্ধ পরিসীমা	$\frac{a+b+c}{2}$		
ক্ষেত্রফল	$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$		
ত্রিভুজের অন্তঃব্যাসার্ধ	$r = \frac{\Delta}{s}$		
ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ	$R = \frac{abc}{4\Delta}$		
অভিক্ষেপ- সূত্র	$a = b\cos C + c\cos B$	$b = c\cos A + a\cos C$	$c = a\cos B + b\cos C$

$\sin^2\theta$ ও $\cos^2\theta$ এর ধারা থাকলে মান নির্ণয়

ধারার সমষ্টির ক্ষেত্রে $\sin^2\theta$ এবং $\cos^2\theta$ এর জন্য আগে পদ সংখ্যা বের করতে হবে।

পদ সংখ্যা $= \frac{\text{শেষ পদ} - \text{১ম পদ}}{\text{ব্যবধান}} + 1$

(i) পদ সংখ্যা জোড় হলে Answer $= \frac{n}{2}$

(ii) পদ সংখ্যা বিজোড় হলে Answer $= \frac{n-1}{2} + (\sin^2 0 / \sin^2 90 / \cos^2 0 / \cos^2 90)$

Note:

(i) পদ সংখ্যা বিজোড় হলে $\sin^2 0 / \sin^2 90 / \cos^2 0 / \cos^2 90$ এই চারটি পদের যে কোনো একটি পদ প্রশ্নে থাকবে এবং যেটি থাকবে তার মান যোগ করতে হবে।

(ii) পদ সংখ্যা বিজোড় হলে এবং $\sin^2 0 / \sin^2 90 / \cos^2 0 / \cos^2 90$ এই চারটি পদের কোনোটি না থাকলে $\frac{1}{2}$ যোগ করতে হবে।

[অর্থাৎ পদসংখ্যা বিজোড় হলে মধ্যপদ আলাদা করে নিয়ে এর সাথে বাকি অংশের সমষ্টি যোগ করতে হবে]

গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যা সমূহ

MEx 01 $\sin 10^0 \sin 50^0 \sin 70^0$ এর মান হবে-

Solve $\sin\theta \sin(60-\theta) \sin(60+\theta) = \frac{1}{4}\sin 3\theta$

MEx 02 $\sin^2 2^\circ + \sin^2 7^\circ + \sin^2 12^\circ + \ldots \sin^2 147^\circ$ এর পদসংখ্যা কত?

Solve $\sin^2 2^\circ + \sin^2 7^\circ + \sin^2 12^\circ + \ldots\ldots + \sin^2 147^\circ$

ধরি, পদ সংখ্যা, $n = \frac{\text{শেষ পদ} - \text{প্রথম পদ}}{\text{ব্যবধান}} + 1 = \frac{147-2}{5} + 1 = 30 \therefore n = 30$

MEx 03 $\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ এর মান-

Solve $\frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

MEx 04 যদি $A + B + C = \pi$ হয় তবে $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C$ = কত হবে?

Solve $A = 60^\circ, B = 60^\circ, C = 60^\circ$ বসিয়ে

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$

MEx 05 $4\cos x + 3\sin x$ এর বৃহত্তম মান কত?

Solve সর্বোচ্চ মান $= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

MEx 06 $\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}$

Solve $\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \tan(45^\circ + A) = \cot(45^\circ - A)$

$\therefore \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \tan(45^\circ + 15^\circ) = \sqrt{3}$

MEx 07 একটি স্থূলকোণী ত্রিভূজের বাহুগুলি পরিমান 3 সেমি. 5 সেমি. এবং 7 সেমি. হলে স্থূলকোণটির পরিমাণ কত?

Solve $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2.3.5}\right) = 120^\circ$

MEx 08 ΔABC সমকোণী হলে $\sin(A + B + C) = ?$

Solve For any triangle, $A + B + C = \pi$

So, $\sin(A + B + C) = \sin\pi = 0$

MEx 09 $\sin x \sin(x + 30^\circ) + \cos x \sin(x + 120^\circ)$ এর মান কত?

Solve $x = 30^0$ ধরে, $\sin x \sin(x+30^\circ) + \cos x \sin(x + 120^\circ)$

$= \sin 30^\circ \sin 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin 10^0 \sin 50^0 \sin 70^0 = \frac{1}{4}\sin(3\times 10) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

MEx 10 $\cos A + \cos C = \sin B$ হলে $\sin(B+C)$ এর মান কত?

Solve $\cos A + \cos C = \sin B \Rightarrow 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \sin B$

$\Rightarrow 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} \Rightarrow \frac{A-C}{2} = \frac{B}{2}$

$\Rightarrow A = B + C \Rightarrow A = 180^\circ - A \Rightarrow A = 90^\circ$

$\therefore \sin(B + C) = \sin 90^\circ = 1$

MEx 11 $\sqrt{x}\sin\theta = \sqrt{3}$ এবং $\sqrt{x}\cos\theta = 1$ হলে 'θ' এর মান কতহবে?

Solve $\frac{\sqrt{x}\sin\theta}{\sqrt{x}\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^0$

MEx 12 $\tan 36^\circ + \tan 9^\circ + \tan 36^\circ \tan 9^\circ = ?$

Solve আমরা জানি, $\tan A + \tan B + \tan A.\tan B = 1$

$\therefore \tan\frac{36^\circ}{A} + \tan\frac{9^\circ}{B} + \tan\frac{36^\circ}{A}.\tan\frac{9^\circ}{B} = 1$

P/Q PREVIOUS YEARS' QUESTIONS

01. $A + B = \frac{\pi}{4}$ হলে $(1 + \tan A)(1 + \tan B)$ এর মান কত? [DU-7Clg. 2023-24]

A. – 2 B. – 1 C. 1 D. 2

Explanation $A + B = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(A + B) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1 \Rightarrow \tan A + \tan B = 1 - \tan A \tan B$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan A \tan B + 1 = 2$

$\Rightarrow (1 + \tan A) + (1 + \tan A)\tan B = 2$

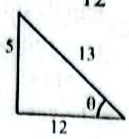
$\Rightarrow (1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$

02. যদি $\cos\theta = \frac{12}{13}$ হয় তাহলে $\tan\theta$ এর একটি মান কোনটি? [DU-7Clg. 2023-24]

A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{25}{144}$ C. $\frac{13}{12}$ D. $\pm\frac{13}{12}$

A Explanation $\cos\theta = \frac{12}{13}$

$\therefore \tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{5}{12}$



03. ΔABC এর তিনটি বাহুর অনুপাত $a : b : c = 3 : 7 : 5$ হলে B কোণের মান- [DU-7Clg: 2022-23]

A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

D Explanation $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ca} = \frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5} = -\frac{1}{2} \therefore B = 120°$

04. $\sin(A - 30°) + \sin(A + 150°) = ?$ [DU-7Clg: 2022-23]

A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 0 D. 2

C Explanation $\sin(A - 30°) + \sin(150° + A)$

$= 2\sin\frac{150° + A + A - 30°}{2}\cos\frac{150° + A - A + 30°}{2}$

$= 2\sin(60° + A)\cos 90° = 0$

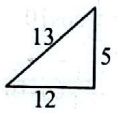
05. যদি $\sin\alpha = 5/13$ এবং $0 < \alpha < \pi/2$ হয়, তবে $\tan\alpha$ এর মান কত? [DU-7Clg: 2020-21]

A. –5/12 B. 5/12 C. 12/13 D. –12/13

B Explanation $\sin\alpha = \frac{5}{13}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে $\tan\theta$ ধনাত্মক

$\therefore \tan\alpha = \frac{5}{12}$



06. $2\sin^2 15°$ এর মান নিচের কোনটি? [DU-7Clg: 2020-21]

A. $\frac{(2-\sqrt{3})}{2}$ B. $\frac{(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$ C. $\frac{(2-\sqrt{3})}{2}$ D. $\frac{(2+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$

A Explanation $2\sin^2 15° = 1 - \cos(2\times15°) = 1 - \cos30°$

$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

07. $\cos(120° + A) + \cos(120° - A) = ?$ [DU-7Clg. 2018-19]

A. 2cosA B. cosA C. – cosA D. 0

C Explanation $A = 60°$ ধরে, $\cos(120° + 60°) + \cos(120° - A)$

$= \cos180° + \cos60° = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

option C থেকে $-\cos A = -\cos60 = -\frac{1}{2}$

08. $\cos^2(\pi/6) + \cos^2(2\pi/3) = ?$ [DU-7Clg. 2018-19]

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 2 D. 1

D Explanation $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$

09. $\cos 2\theta = \frac{24}{25}$ হলে, $\tan\theta$ এর মান কোনটি? [DU-7Clg. 2017-18]

A. ± 7 B. $\pm\frac{7}{5}$ C. $\pm\frac{5}{7}$ D. $\pm\frac{1}{7}$

D Explanation $\cos 2\theta = \frac{24}{25}; \frac{1-\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{24}{25}$

$25 - 25\tan^2\theta = 24 + 24\tan^2\theta$

$\Rightarrow 49\tan^2\theta = 1; \tan\theta = \pm\frac{1}{7}$

10. ΔABC এর বাহুগুলো 3, 4 ও 5 একক হলে, $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C =$ কত? [DU-7Clg. 2017-18]

A. – 1 B. 1 C. 0 D. 1/2

B Explanation ΔABC এর বাহুগুলো 3, 4, 5 একক

$\therefore 3^2 + 4^2 = 5^2$

$\therefore \cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1$

IQA — IMPORTANT QUESTION FOR DCU ADMISSION

01. $\cos^2(60° + A) + \cos^2(60° - A)$ এর মান-

A. $1 - \frac{1}{2}\cos 2A$ B. $1 + \sin2A$ C. $1 + 3\cos2A$ D. $1 + \frac{1}{2}\cos 2A$

A Explanation $\cos^2(60° + A) + \cos^2(60° - A)$

$A = 30°$ ধরে $\cos^2(60° + 30°) + \cos^2(60° - 30°)$

$\Rightarrow \cos^2(90°) + \cos^2(30°) \Rightarrow 0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

option → A তে $1 - \frac{1}{2}\cos(2\times30°) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

option → B তে $1 + \sin2A = 1 + \sin(2\times30°) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

option → C তে $1 + 2\cos2A = 1 + 3\cos(2\times30°) = 1 + 3.\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

option → D তে $1 + \frac{1}{2}\cos2A = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\times30) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

02. $A + B = \frac{\pi}{2}$ হলে $\cos^2A - \cos^2B$ এর মান-

A. sin (A – B) B. sin (B – A) C. cos (B – A) D. – cos (A – B)

B Explanation $\cos^2A - \cos^2B = 1 - \sin^2A - 1 + \sin^2B$

$= \sin^2B - \sin^2A = \sin(B + A).\sin(B - A)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).\sin(B-A) = 1.\sin(B - A) = \sin(B - A)$ **Ans.**

03. $\sin(A-30°) + \sin(150°+A)$ এর মান-

A. $-\frac{1}{2}\cos A$ B. 0 C. $\cos A$ D. $\sin A$

B Explanation $\sin(A-30°) + \sin(150°+A)$

$= 2\sin\frac{150° + A + A - 30°}{2}\cos\frac{150° + A - A + 30°}{2}$

$= 2\sin(60° + A)\cos90° = 0$

04. যদি $9\theta = \pi$ হয়, তবে $\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta$ এর মান-

A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{8}$ C. 8 D. 9

B Explanation $\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta = \frac{1}{2\sin\theta}(2\sin\theta\cos\theta)\cos2\theta$

$\cos4\theta = \frac{1}{2.2\sin\theta}2\sin2\theta\cos2\theta\cos4\theta = \frac{1}{4\sin\theta}\sin4\theta\cos4\theta$

$= \frac{1}{8\sin\theta}\sin8\theta = \frac{\sin(9\theta-\theta)}{8\sin\theta} = \frac{\sin(\pi-\theta)}{8\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{8\sin\theta} = \frac{1}{8}$

05. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ হলে $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = ?$

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 0 D. –1

B Explanation $A = 90°, B = 60°$ এবং $C = 30°$ ধরলে

প্রদত্ত রাশিটির মান দাঁড়ায়, $\cos^2(90°) + \cos^2(60°) + \cos^2(30°)$

$= 0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

প্রথম পত্র অধ্যায় ০৮

ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র
(FUNCTIONS & GRAPHS OF FUNCTIONS)

কি পড়ব ? কেন পড়ব ? **SURVEY TABLE** কতটুকু পড়ব ? কিভাবে পড়ব ?

টপিক নং	বিগত বছরে যে সকল টপিকস্ থেকে প্রশ্ন এসেছে	RATINGS [কেন পড়ব?]
01	ফাংশনের মান নির্ণয়	★
02	ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়	★★★
03	বিপরীত ফাংশন নির্ণয়	★★★

টপিক আলোচনা

FORMULA ডোমেন, রেঞ্জ এবং ফাংশন সংক্রান্ত:

- ডোমেন: প্রদত্ত শর্তানুযায়ী x এর গ্রহনযোগ্য বাস্তব মানের সেট।
- রেঞ্জ: x এর গ্রহনযোগ্য বাস্তব মানের জন্য প্রাপ্ত y এর গ্রহনযোগ্য বাস্তব মানের সেট।
- এক এক ফাংশন: A সেটের একটি উপাদানের সাথে B সেটের কেবল একটি উপাদানের সম্পর্ক।

Note: x এর power বিজোড় হলে এক এক, x এর power জোড় হলে এক এক নয়।

- সার্বিক ফাংশন : A সেটের সবগুলো উপাদানের সাথে B সেটের সবগুলো উপাদানের কোন না কোন ভাবে সম্পর্ক থাকবে।
- Technique: ভগ্নাংশ বিশিষ্ট ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় সংক্রান্ত:

একঘাত বিশিষ্ট ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে, ডোমেন = R – {x এর যে মানের জন্য হর শূন্য হয়} রেঞ্জ = R – {লবের x এর সহগ/হরের x এর সহগ}

অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্র সমূহের Topic	সূত্র সমূহ
ডোমেন রেঞ্জ নির্ণয়	
$f(x)=ax+b$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে	Technique: $D_f = R$ এর $R_f = R$
$f(x)=\frac{a}{bx+c}$ আকৃতির ফাংশনে ক্ষেত্রে	Technique: $Df = R - \left\{-\frac{c}{b}\right\}$ এবং $R_f = R - \{0\}$
$f(x)=\frac{ax}{bx+c}$ আকৃতির ফাংশনে ক্ষেত্রে	Technique: $D_f = R - \left\{-\frac{c}{b}\right\}$ এবং $R_f = R - \left\{\frac{a}{b}\right\}$
$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ আকৃতির ফাংশনে ক্ষেত্রে	Technique: $D_f = R - \left\{\frac{-d}{c}\right\}$ এবং $R_f = R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$
$f(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a}$ আকৃতির ফাংশনে ক্ষেত্রে	Technique: $D_f = R - \{a\}$ এবং $R_f = R - \{na^{n-1}\}$
$f(x)=\sqrt{x^2 - a^2}$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে ডোমেন	Technique: $x \le -a$ or $x \ge a$ $\therefore$ রেঞ্জ $R_f = [0,\infty)$
$f(x)=\sqrt{a^2 - x^2}$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে ডোমেন	Technique: $D_f - a \le x \le a$ বা $\lvert x\rvert \le a$ এবং $R_f = [0,a]$
$f(x)=\log(a+bx)$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে log এর ভেতরের রাশিটি 0 অপেক্ষা বড় হবে	Technique: ডোমেন, $a+bx>0 \Rightarrow x > \frac{-a}{b}$ এবং রেঞ্জ $R_f = R$
$f(x)=e^x$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে	Technique: $D_f = (-\infty,\infty)$ এবং $R_f = (0,\infty)$
লব দ্বিঘাত ও হর এক ঘাত বিশিষ্ট $f(x) = \left[\frac{ax^2+b}{cx+d}\right]$ ফাংশনের ক্ষেত্রে	Technique: রেঞ্জ = R – {2 × x এর যে মানের জন্য হর শূন্য হয়}
বর্গমূল যুক্ত ফাংশনের $\left[f(x) = \sqrt{ax+b}\right]$ ক্ষেত্রে	Technique: ডোমেন=$ax+b \ge 0$ ধরে প্রাপ্ত x এর মান,রেঞ্জ = $[0, \infty)$
বিপরীত ফাংশন নির্ণয় সংক্রান্ত	
যদি $f(x) = ax + c$ হয় তবে $f^{-1}(x) = \frac{x-c}{a}$	যদি $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ হয় তবে, $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$
$f(x) = ax^n + c$ হলে $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{\frac{x-c}{a}}$	যদি $f(x) = \frac{a}{bx-c}$ হয় তবে, $f^{-1}(x) = \frac{a+cx}{bx}$
$f(x)=ax^2+c$ হলে $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x-c}}{\sqrt{a}}$	
সংযোজিত ফাংশন	$fog(x) = f(g(x))$; $gof(x) = g(f(x))$

ফাংশনের মান নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ মুখস্থ করাটা ভাল যা নিম্নে প্রদান করা হলো:

01. $f(x)=\sin x$ $\therefore$ Dom f=R and Range f=[−1,1]
02. $f(x)=\cos x$ $\therefore$ Dom f=R and Range f=[−1,1]
03. $f(x)=\tan x$ $\therefore$ Dom $f\{x: x\in R\setminus\{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n\in Z\}$ and Range f=R
04. $f(x)=\cot x$ $\therefore$ Dom $f\{x: x\in R\setminus\{n\pi; n\in Z\}$ and Range f=R
05. $f(x)=\operatorname{cosec} x$ $\therefore$ Dom $f\{x: x\in R\setminus\{n\pi; n\in Z\}$ and Range $f=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Note: যে কোন cosecant function এর রেঞ্জ $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

*** জেনে রাখা ভাল: $f(x)=x^2$ যুগ্ম ফাংশন, $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$; **Even function:** $f(-x)=f(x)$, **Odd Function:** $f(-x)=-f(x)$

গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যা সমূহ

MEx 01 $f(x)\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x; & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{x}; & x>0 \end{cases}$ হলে f(−5) এর মান কত?

Solve $-5<0$ $\therefore f(-5)=(-5)^2+1=26$

MEx 02 যদি $f(x)=\sin x$ হয় তবে f একটি-

Solve $f(x)=\sin x$ হয় তবে f একটি বিজোড় ফাংশন।

MEx 03 $f(x)=|1-x^3|+1$ হলে f(2) এর মান কোনটি?

Solve $f(2)=|1-(2)^3|+1=|1-8|+1=7+1=8$

MEx 04 $f(x)=\frac{|x|}{x}$ বাস্তব ফাংশনের রেঞ্জ কোনটি?

Solve $f(x)=\frac{|x|}{x}=\pm\frac{x}{x}=\pm 1$ $\therefore R_f=\{-1,1\}$

MEx 05 $F:R\to R$ ফাংশনটি $f(x)=2x-3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে f^{-1} কত হবে?

Solve Tech $\to f(x)=ax+b$ হলে

$f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$ $\therefore f(x)=2x-3$ হলে $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{2}$

MEx 06 $y=\sqrt{4-x^2}$ এর ডোমেন কত?

Solve শর্তমতে, $4-x^2\ge 0\Rightarrow -x^2\ge -4\therefore x^2\le 4\therefore |x|\le 2\therefore -2\le x\le 2$

MEx 07 ফাংশন $f:R\to R$. $f(x)=x+1$ হলে ফাংশনটি হবে-

Solve এক-এক ও সার্বিক ফাংশন

MEx 08 $f(x)=\tan x+\cot x$ হলে $f(x)+f(-x)$ এর মান কোনটি?

Solve $f(x)+f(-x)=(\tan x+\cot x)+\{\tan(-x)+\cot(-x)\}=0$

MEx 09 $f(x)=\log_e\sin x$ হলে $e^{2f(a)}$ এর মান কত?

Solve $e^{2\log_e\sin x}=e^{\log e^{\sin^2 x}}=\sin^2 x$

MEx 10 যদি $f(x)=x^2+4$ এবং $g(x)=3x+1$ হয় তবে $g(f(0))=$ কত?

Solve $(x)=x^2+4$ $\therefore f(0)=4$ $\therefore g(f(0))=3\times 4+1=13$A

PYQ — PREVIOUS YEARS' QUESTIONS

01. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ফাংশনটির ডোমেন কত? [DU-7Clg: 2020-21]

A. [−4, 3] B. [−4, 4] C. [−3, 3] D. [−0, 3]

C Explanation ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যখন $9-x^2\ge 0$

$\Rightarrow x^2-9\le 0$ $\Rightarrow x^2\le 9$

$\Rightarrow |x|\le 3$ $\Rightarrow -3\le x\le 3$ $\Rightarrow [-3,3]$ $\therefore$ ডোমেন $=[-3,3]$

02. $f(x)=\tan^{-1}(\sin x)$ হলে $f'(\pi)$ এর মান কত? [DU-7Clg: 2020-21]

A. −1 B. 0
C. $\sqrt{3}/2$ D. 1

A Explanation $f(x)=\tan^{-1}(\sin x)$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+\sin^2 x}\cdot\cos x$

$\Rightarrow f'(\pi)=\frac{1}{1+\sin^2\pi}\cos\pi=\frac{-1}{1+0}=-1$

03. $\tan^{-1}x$ ফাংশনটির রেঞ্জ নিচের কোনটি? [DU-7Clg: 2020-21]

A. $(-\pi/2,\pi/2)$ B. $[-\pi/2,\pi/2]$
C. $(-\pi/2,\pi/2]$ D. $[0,\pi]$

A Explanation $\tan^{-1}x$ এর ডোমেন = R, রেঞ্জ $=\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

এবং $\cot^{-1}x$ এর ডোমেন = R, রেঞ্জ $=(0,\pi)$

04. $f(x)=5x-3$ হলে, $f^{-1}(3)$ এর মান কত? [DU-7Clg. 2019-20]

A. $-\frac{6}{5}$ B. $\frac{6}{5}$ C. 12 D. −12

B Explanation $f(x)=5x-3$; $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{5}$ $\therefore f^{-1}(3)=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}$

05. $f(x)=\frac{x}{|x|}$ ফাংশনের রেঞ্জ কোনটি? [DU-7Clg. 2019-20]

A. {−1, 1} B. {1} C. $\Re-\{1\}$ D. $[0,\infty)$

A Explanation $f(x)=\frac{x}{|x|}=\frac{x}{\pm x}=\pm 1$ $\therefore$ ফাংশনটির রেঞ্জ = {−1, 1}

06. $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ ফাংশনের ডোমেন [DU-7Clg. 2018-19]

A. $\mathbb{R}$ B. $\mathbb{R}-\{1\}$ C. $\mathbb{R}-\{-1\}$ D. $[0,\infty)$

B Explanation $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$; $D_f=R-\{1\}$

07. $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ফাংশনের ডোমেন? [DU-7Clg. 2017-18]

A. $\mathbb{R}$ B. $\mathbb{N}$ C. $(-\infty,-2)$ D. $[-2,2]$

D Explanation $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

$D_f=4-x^2\ge 0=-x^2\ge -4=x^2\le 4=-2\le x\le 2$

$\therefore$ ডোমেন $=[-2,2]$

IQA — IMPORTANT QUESTION FOR DCU ADMISSION

01. $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ এর ডোমেন হলো-

A. $(-\infty,2)$ B. $(-\infty,\infty)$ C. $(-2,\infty)$ D. $[-2,2]$

D Explanation $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{2-x}}$

$\therefore 2-\sqrt{2-x}\ge 0$ এবং $2-x\ge 0$

$\Rightarrow 2\ge\sqrt{2-x}$ $\Rightarrow 2\ge x$

$\Rightarrow 4\ge 2-x$ $\Rightarrow x\le 2$

$\Rightarrow 2\ge -x$ $\Rightarrow -2\le x$

$\therefore$ ডোমেন : $-2\le x$ এবং $x\le 2$

$\Rightarrow -2\le x\le 2$ $\Rightarrow [-2,2]$

02. যদি $f(x)=x^2-2|x|$ এবং $g(x)=x^2+1$ হয়, তাহলে $g(f(-2))$ এর মান কত?

A. 0 B. 1 C. −1 D. 5

B Explanation $f(-2)=(-2)^2-2|-2|=0$

$g(f(-2))=g(0)=0+1=1$

অধ্যায় ০৯

অন্তরীকরণ
(DIFFERENTIATION)

কি পড়ব ? কেন পড়ব ? **SURVEY TABLE** কতটুকু পড়ব ? কিভাবে পড়ব ?

টপিক নং	বিগত বছরে যে সকল টপিকস্ থেকে প্রশ্ন এসেছে	RATINGS [কেন পড়ব?]
01	লব/হর আকৃতির ফাংশন সংক্রান্ত	★
02	'√' ফাংশন সংক্রান্ত	★★★
03	Logarithomic ও Exponential ফাংশন সংক্রান্ত সমস্যা	★★
04	Exponential Form সংক্রান্ত সমস্যাবলী	★★
05	ফাংশনের বিচ্ছিন্নতা ও অবিচ্ছিন্নতা (Continuity & Discontinuity of Function)	★★★
06	লগারিদম সম্পর্কিত	★★
07	পরামিতিক ফাংশন [Parametric Function]	★★
08	ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশনের ক্ষেত্রে অন্তরীকরণ	★
09	স্পর্শক ও অভিলম্বের ঢাল ও সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত	★★

টপিক আলোচনা

■ **Important Formula of Limit:**

⊙ $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$	⊙ $\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e$
⊙ $\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin^{-1}x}=1$	⊙ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
⊙ $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1$	⊙ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
⊙ $\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan^{-1}x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1$	⊙ $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$
⊙ $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$	⊙ $\lim_{x\to0}\frac{(1\pm x)^n-1}{x}=\pm n$
⊙ $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$	

■ **FINIX EXCLUSIVE:** অভিনব টেকনিক (SHORTCUT SOLUTION):

FINIX SHORTCUT TRICKS & TIPS	MODEL EXAMPLE
01. $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$	$\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{7x}$ এর মান $\frac{4}{7}$
02. $\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}$	$\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{5x}$ এর মান $\frac{3}{5}$
03. $\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}ax}{bx}=\frac{a}{b}$	$\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{5x}$ এর মান $\frac{3}{5}$
04. $\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$	$\lim_{x\to0}\frac{\tan 5x}{\sin 2x}=\frac{5}{2}$
05. $\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}ax}{bx}=\frac{a}{b}$	$\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}(2x)}{x}=2$
06. $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$	$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\frac{3}{5}$
07. $\lim_{x\to0}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}=\frac{b^2-a^2}{2}$	$\lim\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}=\frac{3^2-2^2}{2}=\frac{5}{2}$
08. $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax-\sin bx}{\sin cx-\sin dx}=\frac{a-b}{c-d}$	$\lim_{x\to0}\frac{\sin 8x-\sin 3x}{\sin 5x-\sin 2x}=\frac{8-3}{5-2}=\frac{5}{3}$
09. $\lim_{x\to0}\frac{\cos ax-\cos bx}{\cos cx-\cos dx}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$	$\lim_{x\to0}\frac{\cos 7x-\cos 9x}{\cos 3x-\cos 5x}=\frac{9^2-7^2}{5^2-3^2}=\frac{32}{13}=\frac{1}{2}$

FINIX SHORTCUT TRICKS & TIPS	MODEL EXAMPLE
10. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\frac{a^2}{b^2}$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$
11. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{bx^2}=\frac{a^2}{2b}$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2}=\frac{7^2}{2.3}=\frac{49}{6}$

অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্র সমূহের Topic	সূত্র সমূহ
বীজগণিতীয় অসীম লিমিট $x\to\infty$ হলে	
ভগ্নাংশের লবের সর্বোচ্চ Power < হরের সর্বোচ্চ Power. Ans: 0 ভগ্নাংশের লবের সর্বোচ্চ Power > হরের সর্বোচ্চ Power. Ans: ∞	ভগ্নাংশের হর এবং লবের সর্বোচ্চ Power সমান হলে Ans: $\frac{\text{লবের সর্বোচ্চ Power যুক্ত x এর সহগ}}{\text{হরের সর্বোচ্চ Power যুক্ত x এর সহগ}}$
$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ এই আকারে থাকলে	Ans: a^x এর সহগের অনুপাত
বর্গমূল সংক্রান্ত ফাংশন	
$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$ এই আকারের প্রশ্নের	Ans: $\frac{1}{\sqrt{a}}$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{c+dx}}{x}$ এই আকারের প্রশ্নের	Ans: $\frac{b-d}{2\sqrt{a}}$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{c-dx}}{x}$ এই আকারের প্রশ্নের	Ans: $\frac{b+d}{2\sqrt{a}}$
বাইনোমিয়াল আকার সংক্রান্ত	
♦ $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}=e^{ax.\frac{b}{x}}=e^{ab}$	$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{bx}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\times bx}=e^{ab}$
$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$ আকারে থাকলে	Ans. $=na^{n-1}$ হয়।

La Hospital' Rule

$x\to\infty$ ছাড়া অন্য কিছু যেমন $x\to 0$, $x\to 2$, $x\to\pi$ ইত্যাদি হলে শুরুতেই limit বসিয়ে দিতে হবে যেই মান পাওয়া যাবে তাই Ans.

Example : $\lim_{x\to 0}(\sec x)^x = ?$ Ans: 1

x এর পরিবর্তে limit বসিয়ে সাধারণত $\frac{0}{0}$ বা, $\frac{\infty}{\infty}$ এই আকৃতি আসে। এসব ক্ষেত্রে La'Hospital' Rule Apply করতে হবে।

La' Hospital' Rule: লব ও হরকে x এর সাপেক্ষে Differentiate করতে হবে। অতঃপর x এর মান বসিয়ে $\frac{0}{0}$ বা, $\frac{\infty}{\infty}$ আকৃতি Remove হলে যে মান পাওয়া যায় তাই Ans.

Note: মান বসিয়ে $\frac{\infty}{\infty}$ বা $\frac{0}{0}$ আকৃতি Remove না হওয়া পর্যন্ত লব ও হরকে Differentiate করতে হবে।

Required Formulas for Differentiation

$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(cx^n)=cnx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{d}{dx}(c)=0$
$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$	$\frac{d}{dx}(\log_e x)$ or, $\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$	$\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\log_e a=a^x\ln a$
$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$	$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$	$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$	$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$
$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\operatorname{cosec}^2 x$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)=-\operatorname{cosec} x\cot x$	$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=-\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\frac{d}{dx}(U\pm V)=\frac{dU}{dx}\pm\frac{dV}{dx}$.	$\frac{d}{dx}(UV)=U\frac{dV}{dx}+V\frac{dU}{dx}$.	$\frac{d}{dx}(UVW)=VW\frac{dU}{dx}+UW\frac{dV}{dx}+UV\frac{dW}{dx}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{U}{V}\right)=\frac{V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}}{V^2}$.

❑ গাণিতিক সমস্যাসমূহ সমাধানের জন্য প্রয়োজনীয় সূত্র ও প্রক্রিয়াসমূহ:

$(\text{Constant})^{function}$ এই ধরনের Problem	i. $(\text{Constant})^{function}$ এই ধরনের Problem Solve করার জন্য $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x/na$ এই সূত্র ব্যবহার করতে হবে। ii. $(\text{Exponential})^{function}$ এই ধরনের Problem Solve করার জন্য $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ এই সূত্র ব্যবহার করতে হবে। iii. $(\text{Function})^{Constant}$ এই ধরনের Problem Solve করার জন্য $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ এই সূত্র ব্যবহার করতে হবে। **Note:** যেকোনো ধরনের অন্তরীকরণ করতে গেলে প্রথমে প্রশ্নের x এর জায়গায় যা থাকবে তাকে x ধরে সূত্র প্রয়োগ করতে হবে। তারপর যাকে x ধরা হলো তার অন্তরীকরণ করতে হবে। সবশেষে দুই অন্তরীকরণ গুণ করতে হবে।
$\{f(x)\}^{g(x)}$ আকারের Problem	i. $Y = \{f(x)\}^{g(x)}$ এই আকারের Problem Solve করতে হবে, $\frac{d}{dx}\{f(x)^{g(x)}\} = \{f(x)\}^{g(x)}\frac{d}{dx}\{g(x)\ln(f(x)\}$ সূত্রের সাহায্যে ii. $\{f(x)\}^{g(x)}$ এই আকারের Problem উভয় পক্ষে ln নিয়েও Solve করা যায়।
অব্যক্ত ফাংশন [Implicit Function]	**Implicit function চেনার উপায়:** (সমীকরণ আকারে থাকবে এবং সমীকরণের একই পাশে একাধিক চলক বিদ্যমান থাকবে)। **Technique:** $\frac{dy}{dx} = -\frac{x \text{ এর সাপেক্ষে Differentiate } (Y \to \text{constant})}{y \text{ এর সাপেক্ষে Differentiate } (X \to \text{constant})}$
পরামিতিক ফাংশন	**Parametric Function চেনার উপায়:** x ও y এর মান তৃতীয় অন্য একটি চলকের মাধ্যমে দেয়া থাকবে এবং তৃতীয় চলকটিকে বলে পরামিতি। **Technique:** $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{পরামিতির সাপেক্ষ y এর diff}}{\text{পরামিতির সাপেক্ষে x এর diff}} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$ [θ পরামিতি]
চরম মান বা সন্ধি মান (গুরুমান ও লঘু মান)	**Step-1:** দেওয়া ফাংশনটিকে $y = f(x)$ ধরতে হবে। **Step-2:** $f'(x)$ এবং $f''(x)$ নির্ণয় করতে হবে। **Step-3:** $f'(x) = 0$ ধরে x এর মান (ধরি x এর মানগুলি a,b,c ইত্যাদি) নির্ণয় করতে হবে। **Step-4:** $x = a$ এর জন্য $f''(a)$ বের করতে হবে। যদি $f''(a) > 0$ হয় তবে $x = a$ এর জন্য $f(x)$ এর সর্বনিম্ন মান বা লঘুমান থাকবে এবং যদি $f''(x) < 0$ হয় তবে $x = a$ এর জন্য $f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান বা গুরুমান থাকবে। **Step-5:** অনুরূপভাবে $x = b, c$ ইত্যাদির জন্য চরম মান নির্নয় করতে হবে। **Note:** (i) $f'(x)$ ফাংশনের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান থাকবে যদি $f'(x) = 0$ হয়। (ii) $f''(x) = 0$ হলে ফাংশনের কোন চরমমান থাকবে না। $f''(a) = 0$ হলে পরবর্তী পর্যায়ে অন্তরক সহগ নির্ণয় করে ফাংশনের চরম মান নির্ণয় করা যায়। (iii) কোনো বিন্দুতে ফাংশনের সর্বোচ্চ মান অপর একটি বিন্দুর সর্বনিম্ন মান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম হতে পারে।

❑ পর্যায় ক্রমিক অন্তরীকরণ:

- $y = f(x)$ একটি ফাংশন হলে অন্তরীকরণের বিভিন্ন আকার: $y_1 = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{d}{dx}\{f(x)\}$
- $y = f(x)$ এর ১ম অন্তরীকরণ, $y_1 = \frac{dy}{dx} = f'(x)$; ২য় অন্তরীকরণ, $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$; ৩য় অন্তরীকরণ, $y_3 = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$; n তম অন্তরীকরণ, $y_n = \frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x)$

Technique:

$y = x^n$ হলে $y_n = n!$ $y_m = 0\ [m > n]$ $y_m = {}^np_m\, x^{n-m}\ [m < n]$	$y = x^4$ $y_1 = 4x^3 = {}^4p_1\, x^{4-1}$ $y_2 = 4.3x^2 = {}^4p_2\, x^{4-2}$ $y_3 = 4.3.2.x = {}^4p_3\, x^{4-3}$ $y_4 = 4.3.2.1 = {}^4p_4\, x^{4-4} = 4!$ $y_5 = 0\ [5 > 4]$	$y = \sin x$ $y_1 = \cos x$ $y_2 = -\sin x$ $y_3 = -\cos x$ $y_4 = \sin x = y$ অর্থাৎ প্রতি 4n তম অন্তরকের পর পুনরাবৃত্তি হয়	$y = \cos x$ $y_1 = -\sin x$ $y_2 = -\cos x$ $y_3 = \sin x$ $y_4 = \cos x = y$ অর্থাৎ প্রতি 4n তম অন্তরকের পর পুনরাবৃত্তি ঘটবে
$y = (ax + b)^n$ $y_n = n! \times a^n$ $y_m = 0\ [m > n]$ $y_m = {}^np_m\,(ax + b)^{n-m} \times a^m\ [m < n]$	$y = \frac{1}{x}$ এর nতম অন্তরক $= \frac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$ $y = \frac{1}{x+a}$ এর nতম অন্তরক $= \frac{(-1)^n.n!}{(x+a)^{n+1}}$	$y = e^{mx}$ $y_1 = m.e^{mx}$ $y_2 = m^2.e^{mx}$ $y_3 = m^3.e^{mx}$ $y_n = m^n.e^{mx}$	$y = a^x$ $y_1 = a^x \ln a$ $y_2 = a^x(\ln a)^2$ $y_3 = a^x(\ln a)^3$ $y_n = a^x(\ln a)^n$
$y = \sin(ax+b)$ এর nতম অন্তরক, $y_n = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$	$y = \cos(ax + b)$ এর nতম অন্তরক, $y_n = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$		

গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যা সমূহ

MEx 01 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ = এর মান কত?

Solve $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ [using L' Hospital Rule]

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$ [Again using L' Hospital Rule]

MEx 02 $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = ?$

Solve $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1} = 1$

MEx 03 $\lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h)-\sec x}{x}$ এর মান কত?

Solve $\frac{0}{0}$ form; তাই L' Hospital প্রয়োগ করে পাই,

$\lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h)-\sec x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h)\tan(x+h)}{1} = \sec x \tan x$

MEx 04 $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ এর মান কত?

Solve Use: Hospital Rule : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1}$

MEx 05 $y = \sqrt{\sin 2x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত?

Solve $\frac{d}{dx}\sqrt{\sin 2x} = \frac{1}{2\sqrt{\sin 2x}} \cdot \frac{d}{dx}\sin 2x = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$

MEx 06 $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ এর সমান কোনটি?

Solve $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} a^x \ln a = \ln a$ [La Hospitals Law] $= \ln a$

MEx 07 $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{\ln(1-x)}$ এর মান কত?

Solve Use: Hospital Rule: $\frac{-2e^{2x}}{\frac{1}{1-x}\times 1} \Rightarrow \frac{(1-0)\times -2e^0}{-1} = 2$

MEx 08 5^x এর অন্তরক সহগ কত?

Solve আগে একটা সূত্র জেনে রাখ, $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

সেই আলোকে, $\frac{d}{dx}(5^x) = 5^x \ln 5$

MEx 09 $y = \ln x$ হলে y_n এর মান কত?

Solve $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{x^n}$

MEx 10 $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ বক্র রেখাটির $x = 2$ বিন্দুতে ঢালের মান কোনটি?

Solve $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$; $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 4 = 3\times 2^2 - 4\times 2 + 4 = 8$

MEx 11 $y = \sec x°$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান হবে-

Solve $y = \sec x° = \sec\frac{x\pi}{180}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(\sec\frac{x\pi}{180}\tan\frac{x\pi}{180}\right)\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}\sec x° \tan x°$

MEx 12 $y = x^2 \log x$ হলে $\frac{d^3y}{dx^3}$ এর মান কত?

Solve $y_1 = 2x\log x + x$, $y_2 = 2\log x + 2 + 1$ $\therefore y_3 = \frac{2}{x}$

MEx 13 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)$ এর সমান কোনটি?

Solve $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}} = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}} = 1$

$\therefore \frac{d}{dx}(1) = 0$

MEx 14 $x = \sin y$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি?

Solve $x = \sin y \Rightarrow y = \sin^{-1}x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

MEx 15 $y = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$ হলে $3(y^2-1)\frac{dy}{dx}$ সমান-

Solve $y^3 = x + \frac{1}{x} + 3\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right) = x + \frac{1}{x} + 3y$

$\Rightarrow y^3 - 3y = x + \frac{1}{x}$ $\therefore 3\frac{dy}{dx}(y^2-1) = 1 - \frac{1}{x^2}$

MEx 16 $\frac{d}{dx}(x^n + a^n) =$ কত?

Solve $\frac{d}{dx}(x^n + a^n) = nx^{n-1}$ [a ধ্রুবক]

MEx 17 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{a}}$ এর মান কত?

Solve $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{a}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b}\cdot\frac{b}{a}} = e^{\frac{b}{a}} = e$

MEx 18 $\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x})$ এর মান কত?

Solve $\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$

MEx 19 যদি $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান-

Solve $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots\infty}}}$ $y = \sqrt{x+y}$

$\Rightarrow y^2 = x + y$ $\therefore 2y\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-1}$

P/Q PREVIOUS YEARS' QUESTIONS

01. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x^2+x} = ?$ [DU-7Clg. 2023-24]

A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. -2

Explanation B $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x^2+x}$; $\left[\frac{0}{0}\text{ form}\right]$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{4x+1}$ [L' hospital Rule]

$= \frac{2\cos 0}{0+1} = 2$

02. যদি $e^{xy+1} = 5$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [DU-7Clg. 2023-24]

A. $\frac{ln5}{xy}$ B. $-\frac{ln5}{xy}$ C. $-\frac{y}{x}$ D. $\frac{ln5}{x}$

Ⓒ Explanation $e^{xy+1} = 5 \Rightarrow ln\, e^{xy+1} = ln5 \Rightarrow xy + 1 - ln5 = 0$

∴ অন্তরীকরণ করে, $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

03. x এর সাপেক্ষে $\log_{10} x$ এর অন্তরক সহগ হলো– [DU-7Clg. 2023-24]

A. $\frac{1}{x}$ B. $\log_{10}e$ C. $\frac{\log_{10}e}{10}$ D. $\frac{1}{x}\log_{10}e$

Ⓓ Explanation $\frac{d}{dx}(\log_{10}x) = \frac{1}{x\ln 10} = \frac{1}{x\log_e 10} = \frac{1}{x}\log_{10}e$

04. $\lim_{z\to\infty} \frac{3x^2+4x+1}{2x^2-1} = ?$ [DU-7Clg. 2023-24]

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. ∞

Ⓒ Explanation $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x+1}{2x^2-1}$ ∴ $\frac{\text{লবের সর্বোচ্চ ঘাতবিশিষ্ট চলকের সহগ}}{\text{হরের সর্বোচ্চ ঘাতবিশিষ্ট চলকের সহগ}} = \frac{3}{2}$

05. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+6x}{2x^2+5} = ?$ [DU-7Clg: 2022-23]

A. 0 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

Ⓒ Explanation $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+6x}{2x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{6}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{6}{x}}{2+\frac{5}{x^2}} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$

06. x এর কোন মানের জন্য $y = x + \frac{1}{x}$ এর ঢাল শূন্য হবে? [DU-7Clg: 2022-23]

A. ± 2 B. 1 C. ± 1 D. ± 3

Ⓒ Explanation $y = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ প্রশ্নমতে, ঢাল $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

07. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \ln e$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [DU-7Clg: 2022-23]

A. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$ B. $-\sqrt{\frac{x}{y}}$ C. $\sqrt{\frac{y}{x}}$ D. $\frac{x}{y}$

Ⓐ Explanation $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \ln e = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$

Finix Special: $x^n + y^n = a^n$ হলে, $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$

08. $x^2 + x + 2 = 0$ এর মূলদ্বয় α এবং β হলে $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = ?$ [DU-7Clg: 2022-23]

A. –2 B. – 1 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Ⓒ Explanation $x^2 + x + 2 = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে, a = 1, b = 1 ও c = 2

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a} = 2$ ∴ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}$

09. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ফাংশনটির রেঞ্জ কত? [DU-7Clg: 2021-22]

A. (– 2, 2) B. (–2, 0) C. [0, 2] D. [0, ∞]

Ⓒ Explanation $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2^2 - x^2}$

$\{\sqrt{x^2 - a^2}$ এর জন্য রেঞ্জ $R_f = [0, a]\}$ ∵ $R_f = [0; 2]$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x} = ?$ [DU-7Clg: 2021-22]

A. $\frac{7}{6}$ B. $\frac{-7}{6}$ C. 1 D. – 1

Ⓒ Explanation [Using L'Hospital Rule]

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x} = \lim_{x\to 0} \frac{7\cos 7x - \cos x}{6\cos 6x} = \frac{7.1 - 1}{6.1} = 1$

11. কোন শর্তে y = f(x) ফাংশনটি কোন একটি ব্যবধীতে ক্রমহ্রাসমান হবে? [DU-7Clg: 2021-22]

A. $\frac{dy}{dx} < 0$ B. $\frac{dy}{dx} > 0$ C. $\frac{dy}{dx} = 0$ D. $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

Ⓐ Explanation যদি কোনো ব্যবধিতে x বৃদ্ধির সাথে f(x) ফাংশনের মান হ্রাস পায় অর্থাৎ f'(x)< 0 হয় তবে তাকে ক্রমহ্রাসমান ফাংশন বলে।

12. $\lim_{x\to 0} \frac{7\sin\frac{x}{7}}{x} = ?$ [DU-7Clg: 2021-22]

A. 0 B. $\frac{1}{7}$ C. 1 D. 7

Ⓒ Explanation $\lim_{x\to 0} \frac{7\sin\frac{x}{7}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{7}}{\frac{x}{7}} = 1$

13. $\frac{d}{dx}(\log_x e) = ?$ [DU-7Clg: 2021-22]

A. $\frac{\log_x e}{x}$ B. $\frac{1}{x\ln x}$ C. $\frac{-\ln x}{x}$ D. $\frac{-1}{x(\ln x)^2}$

Ⓓ Explanation ধরি, $y = \log_x e = \frac{1}{\log_e x} = \frac{1}{\ln x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$

14. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ এর মান কত? [DU-7Clg: 2020-21]

A. –e B. 1 / e C. 2 / e D. e

Ⓓ Explanation $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (সূত্রানুসারে)

15. x < 0 এর কোন মানের জন্য $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ফাংশনটি সর্বোচ্চ মান সম্পন্ন হবে? [DU-7Clg: 2020-21]

A. – 5 B. – 1 C. 0 D. 2

Ⓑ Explanation $f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \therefore x = \pm 1$

∴ x = 1 হলে, $f''(1) = 2 \geq 0$ ∴ x = 1 বিন্দুতে লঘু মান হবে।

∴ x = –1 হলে, $f''(-1) = -2 < 0$ ∴ x = –1 বিন্দুতে গুরুমান হবে।

16. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+6x}{2x^2+5}$ এর মান কত? [DU-7Clg. 2019-20]

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 0

Ⓑ Explanation $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+6x}{2x^2+5}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{6}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{5}{x}\right)} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$

Finix SUPER TRICKS :
$x \to \infty$ হলে এবং লব ও হরের সর্বোচ্চ Power সমান হলে
Ans : সর্বোচ্চ ঘাতযুক্ত x এর সহগের অনুপাত ∴ $\frac{1}{2}$

17. $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের মূলবিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত? [DU-7Clg. 2019-20]

A. -1 B. 1 C. ∞ D. 0

Ⓒ Explanation $y^2 = 4x \Rightarrow y = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,0)} = \frac{1}{0} = \infty$

18. $\frac{d}{dx}\{\cos^{-1}(\sin x)\}$ নিচের কোনটি? [DU-7Clg. 2019-20]

A. -1 B. 1 C. x D. $\frac{1}{x}$

Ⓐ Explanation $\frac{d}{dx}\{\cos^{-1}(\sin x)\}$

$= \frac{d}{dx}\left\{\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(\sin x)\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\pi}{2} - x\right\} = 0 - 1 = -1$

19. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{4x+1} = ?$ [DU-7Clg. 2018-19]

A. 0 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

Ⓒ Explanation $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{4x+1} = \frac{1}{2}$

20. $y = \sqrt{x}$ বক্ররেখার উপর $x = 4$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল [DU-7Clg. 2018-19]

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

Ⓓ Explanation $y = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$x = 4$ বিন্দুতে $\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

21. $x = 2$ বিন্দুতে $y = x^3 - 5x^2 + 6$ এর ঢাল হবে? [DU-7Clg. 2017-18]

A. -6 B. -7 C. -8 D. -9

Ⓒ Explanation $y = x^3 - 5x^2 + 6$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 10x$; $x = 2$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 3.2^2 - 10.2 = -8$

22. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}}{1 + \cos(2x)} =$ কত? [DU-7Clg. 2017-18]

A. $\frac{e}{2}$ B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

Ⓒ Explanation $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}}{1 + \cos(2x)} = \frac{e^{\tan 0^\circ}}{1 + \cos 0^\circ} = \frac{e^0}{1+1} = \frac{1}{2}$

IQA IMPORTANT QUESTION FOR DCU ADMISSION

01. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{-x}$ এর মান হলো-

A. 1 B. -1 C. $-\infty$ D. ∞

Ⓑ Explanation $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{-x}$

$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{-1} = -\sqrt{1} = -1$

02. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan^{-1}(3x)} = ?$

A. 0 B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. 3

Ⓑ Explanation $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan^{-1}(3x)} = \frac{1}{3}$

03. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 3x + 5}{3x^2 + 5x - 6}$ এর মান-

A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{5}{6}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

Ⓒ Explanation $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 3x + 5}{3x^2 + 5x - 6} = \frac{2}{3}$ [সর্বোচ্চ ঘাতযুক্ত x এর সহগের অনুপাত]

04. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x}}{\cos x}$ এর মান-

A. e B. 1 C. $\frac{1}{e}$ D. 0

Ⓐ Explanation $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x}}{\cos x} = \frac{e^1}{1} = e$

05. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x} = ?$

A. $\frac{7}{6}$ B. $-\frac{7}{6}$ C. 1 D. -1

Ⓒ Explanation [Using L'Hopital Rule]

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x} = \lim_{x\to 0} \frac{7\cos 7x - \cos x}{6\cos 6x} = \frac{7.1 - 1}{6.1} = 1$

06. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = ?$

A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

Ⓑ Explanation $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \left[\text{Form}: \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{2x}$

[Using L' Hospital Rule] $\left[\text{Form}: \frac{0}{0}\right]$

$= \lim_{x\to 0} -\frac{\cos x}{2}$ [Using L' Hospital Rule] $= -\frac{1}{2}$

07. $f(x) = 1 + x^3$ বক্ররেখাটির সাথে x-অক্ষের ছেদবিন্দুর সংখ্যা-

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Ⓑ Explanation $y = f(x) = 1 + x^3$ বক্ররেখাকে ছেদ করলে, $1 + x^3 = 0$

$\Rightarrow x^3 = -1 \quad \therefore x = -1, \omega, \omega^2$

$\therefore$ বাস্তবমান একটি তাই ছেদবিন্দুও একটি।

08. (4, 3) বিন্দুতে $3x^2 - 4y^2 = 12$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের ঢালের মান-

A. -1 B. 1 C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

Ⓑ Explanation $\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{8y} = \frac{3x}{4y} \quad \therefore$ (4, 3) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= \frac{3.4}{4.3} = 1$

09. $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5$ এর লঘিষ্ঠ মান-

A. 4 B. 5 C. 6 D. 8

Ⓑ Explanation ধরি, $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \quad \Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, 2$

আবার, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 24x + 8$

$\therefore x = 1$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = -4 < 0$; $\therefore x = 1$ হলে ফাংশনটির মান গরিষ্ঠ।

আবার, $x = 2$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 8 > 0 \quad \therefore x = 2$ হলে ফাংশনটির মান লঘিষ্ঠ।

$\therefore$ ফাংশনটির লঘিষ্ঠ মান $= 2^4 - 4.2^3 + 4.2^2 + 5 = 5$

10. x কোন মানের জন্য $y = x + \frac{1}{x}$ বক্ররেখাটির ঢাল শুণ্য হবে?

A. ±3/2 B. ±2 C. 1 D. ±1

(D) Explanation দেওয়া আছে, $y = x + \frac{1}{x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

প্রশ্নমতে, $\frac{dy}{dx} = 0$ বা, $\frac{x^2-1}{x^2} = 0$ বা, $x^2 = 1$ বা, $x = \pm 1$

11. k-এর কোন মানের জন্য $y = kx(1-x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে?

A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

(B) Explanation $y = ax - ax^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = a - 2ax$ এখন, মূলবিন্দু (0, 0) তেঃ $\frac{dy}{dx} = a - 2a.0 = a$

∴ মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে,

$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

12. a-এর যে মানের জন্য $y = ax(1-x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে-

A. $\sqrt{3}$ B. $1/\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}/2$ D. 1

(A) Explanation $y = ax - ax^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = a - 2ax$ এখন, মূলবিন্দু (0, 0) তেঃ $\frac{dy}{dx} = a - 2a.0 = a$

∴ মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে,

$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan 60° = \sqrt{3}$ $\therefore a = \sqrt{3}$

PRIME TEST

01. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x}{5x^2+2} = ?$

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. 0

02. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1}(2x)}{x}$ এর মান-

A. 1 B. 0 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

03. $\lim_{x\to y} \frac{\sin x - \sin y}{x - y} = ?$

A. sec y B. $\sec^2 y$ C. $\cos^2 y$ D. cos y

04. যদি $y = e^{e^x}$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ = কত?

A. $e^{e^x}.e^x$ B. $e^x.\log x$ C. $e^{e^x}.\log x$ D. $\log e^{e^x}$

05. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ =?

A. 2 sin 2x B. 0 C. 1 D. cos 2x

06. $y = \sqrt{\sec x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

A. $\frac{y}{4}\tan x$ B. $\frac{y}{2}\tan x$ C. $\frac{y^2}{2}\tan x$ D. $\frac{y}{2}\tan^2 x$

07. যদি $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = ?$

A. $\frac{x+4y}{2x}$ B. $\frac{x-2y}{x+2y}$ C. $\frac{x-y}{x-2y}$ D. $\frac{x-2y}{4y}$

08. যদি $x = \sin\theta$, $y = \cos\theta$ হয় তবে নিচের কোনটি সত্য?

A. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ B. $\frac{dy}{dx} = \tan\theta$ C. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ D. $\frac{dy}{dx} = -\cot\theta$

09. একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $5t + \frac{1}{2}t^2$ ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে। 2 সেকেন্ড পর ট্রেনটির বেগ কত হবে?

A. 15ft/s B. 7ft/s C. 12ft/s D. 10ft/s

10. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে $y = 1 + 2\sin x + 2\cos^2 x$ এর মান x এর কোন মানদ্বয়ের জন্য গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ হবে?

A. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$ D. $0, \frac{\pi}{2}$

OMR SHEET		
01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	সে Ⓓ ৯০

ANS ANALYSIS

প্রশ্ন	উত্তর	ব্যাখ্যা
01	C	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x}{5x^2+2} = \frac{1}{5}$ [সর্বোচ্চ ঘাতযুক্ত x এর সহগের অনুপাত]
02	C	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1}2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1}2x}{2x} \times 2 = 2 \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1}2x}{2x} = 2 \times 1 = 2$
03	D	$\lim_{x\to y} \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$; যেহেতু $x \to y$ তখন Ans. হবে sin y বা, cos y
04	A	$y = e^{e^x} \Rightarrow \ln y = e^x \ln e = e^x$ $\therefore \frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}e^x \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = e^x$ $\therefore \frac{dy}{dx} = e^{e^x}.e^x$
05	B	ধরি, $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = 1$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 0$
06	B	$y = \sqrt{\sec x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\sec x}}.\sec x \tan x = \frac{\sqrt{\sec x}}{2}\tan x = \frac{y}{2}\tan x$
07	C	$x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$ $\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x-2y}{-2x+4y}$ [∵ Implicit function] $= -\frac{2(x-y)}{-2(x-2y)} = \frac{x-y}{x-2y}$
08	A	$x = \sin\theta, y = \cos\theta$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{x}{y}$
09	B	$s = 5t + \frac{1}{2}t^2$ বা, $\frac{ds}{dt} = 5 + t$ $\therefore v = 5 + 2$ [t = 2 সে.] = 7ft/s
10	C	$y = 1 + 2\sin x + 2\cos^2 x$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 2\cos x - 4\sin x \cos x$ গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$ $\Rightarrow 2\cos x - 4\sin x \cos x = 0$ $\Rightarrow 2\cos x(1 - \sin x) = 0$ $\therefore \cos x = 0$ আবার, $\sin x = \frac{1}{2}$ বা, $x = \frac{\pi}{2}$ বা, $x = \frac{\pi}{6}$ $\therefore x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$

■ **মুখে মুখে করার Technique:**

Step-01: সুবিধাজনক অংশকে Z ধর । মনে মনে $\frac{d}{dx}$ কর।

Step-02: দেখ অংকটিতে Complete result আছে কিনা। Complete result থাকলে তা অংক হতে বাদ দাও। না থাকলে ∫Operator এর ভেতরে-বাইরে চিহ্ন বা সংখ্যা Input Output করে Complete result বানিয়ে নাও (অবশ্যই প্রশ্নপত্রে অংকের ডাকের মধ্যেই), তারপর তা বাদ দাও।

Step-03: অতঃপর তুমি যেভাবে Integration এর প্রাথমিক সূত্র শিখেছ সেভাবে সূত্র ফেল ।

TOPIC 02 নির্দিষ্ট যোগজ

■ **নির্দিষ্ট যোগজ:** x স্বাধীন চলক বিশিষ্ট কোন একটি ফাংশন f(x) যদি [a, b] ব্যবধিতে চলমান থাকে তবে ফাংশনটির নির্দিষ্ট যোগজ বলতে X ও Y অক্ষদ্বয় এবং f(x) ফাংশনটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বুঝায়। $F = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ এক্ষেত্রে, b কে উর্ধ্বসীমা ও a কে নিম্নসীমা বলে।

TOPIC 03 নির্দিষ্ট যোগজ এর প্রয়োগ

■ y এর একটি ফাংশন থাকলে ক্ষেত্রফল = $\int_a^b y\,dx$

■ y এর দুটি ফাংশন থাকলে ক্ষেত্রফল = $\int_a^b (y_1 - y_2)dx$ [মনে রাখতে হবে a ও b হবে x এর Value]

■ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = a^2$ দ্বারা আবদ্ধ- (i) মোট ক্ষেত্রফল = πa^2 (ii) একটি চর্তুভাগের আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{\pi a^2}{4}$

■ উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ দ্বারা আবদ্ধ (যেখানে a > b) (i) মোট ক্ষেত্রফল = πab (ii) একটি চর্তুভাগের আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{\pi ab}{4}$

■ $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত ও $y = mx$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{8a^2}{3m^3}$

■ দুটি পরাবৃত্তের a সমান হলে ক্ষেত্রফল = $\frac{16}{3}a^2$

গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যা সমূহ

MEx 01 $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = ?$

Solve $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}dx = \int \frac{e^x dx}{1 + (e^x)^2}$

MEx 02 $\int e^{2-3x}\,dx$ এর মান একটি ধ্রুবক এবং কোনটির সমষ্টির সমান?

Solve $\int e^{2-3x}\,dx = \frac{e^{2-3x}}{-3} = -\frac{1}{3}e^{2-3x}$

MEx 03 $\int \sin^5 x\,dx = ?$

Solve $\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x.\sin x dx$
$= \int (\sin^2 x)^2.\sin x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx$
$= -\int (1 - z^2)^2\,dz = -\int (1 - 2z^2 + z^4)dz$
$= -\int (z - \frac{2}{3}z3 + \frac{z^5}{5}) + c = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$

Let,
$\cos x = z$
$-\sin x dx = dz$

MEx 04 $\int \frac{dx}{4+x^2}$ এর সমান কোনটি?

Solve $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{2^2+x^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$

MEx 05 $\int 4\sin x \cos x\,dx$ এর মান কোনটি?

Solve $\int 2 \times 2\sin x\cos x\,dx = 2\int \sin 2x\,dx = -\cos x + c$

MEx 06 $\int \frac{2x}{1+x^4}dx$ এর মান কোনটি?

Solve $\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}dx = \tan^{-1}(x^2) + c$ [সূত্র $\frac{F'}{1+(F)^2} = \tan^2 x$]

MEx 07 $\int \ln x dx$ এর মান হবে-

Solve $\int \ln x dx = \ln x \int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int dx\right\}dx$

$= x\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx, = x\ln x - x + c$

MEx 08 $\int_0^1 x^3\sqrt{(1+3x^4)}\,dx = ?$

Solve $\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}dx$

$\Rightarrow \frac{1}{12}\int_1^4 \sqrt{z}\,dz \Rightarrow \frac{1}{12}\left[\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$\Rightarrow \frac{1}{12} \times \frac{2}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{7}{18}$

$\therefore 1 + 3x^4 = z$
$\therefore 12x^3\,dx = dz$

x	0	1
z	1	4

MEx 09 $\int 3x^2 \cos x^3 dx$ এর মান কোনটি?

Solve $\int 3x^2 \cos x^3\,dx = \int \cos z dz = \sin z + c = \sin x^3 + c$

MEx 10 $\int \sqrt{1 + \sin 2x}dx$ এর মান কোনটি?

Solve $\int \sqrt{1 + \sin 2x}\,dx = \int \sqrt{(\cos x + \sin x)^2}\,dx$
$= \int \cos x dx + \int \sin x dx = \sin x - \cos x + c$

MEx 11 $\int_1^6 \frac{dx}{x^3}$ এর মান কোনটি?

Solve $\int_1^6 \frac{dx}{x^3} = \left[\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^6 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]_1^6 = \frac{35}{72}$

MEx 12 $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ এর মান কোন্‌টি?

Solve $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\sin^{-1}x\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \sin^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1}0 = \frac{\pi}{6}$

PREVIOUS YEARS' QUESTIONS

01. $\int 5^{7x}\,dx = ?$ [DU-7Clg. 2023-24]

A. $\frac{5^{7x}}{7\ln 5}+c$ B. $\frac{5^{7x}}{\ln 5}+c$ C. $5^{7x}\ln 5+c$ D. $5^{7x}(7\ln 5)+c$

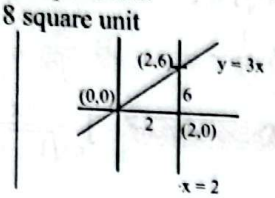
A Explanation $\int 5^{7x}\,dx = \frac{5^{7x}}{7\ln 5}+c$

02. $y=3x$, x-অক্ষ এবং $x=2$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল- [DU-7Clg. 2023-24]

A. 12 square unit B. 10 square unit
C. 6 square unit D. 8 square unit

C Explanation $A=\frac{1}{2}\times 2\times 6$

$=6$ square unit



03. $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = ?$ [DU-7Clg. 2023-24]

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. π

B Explanation $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \left[\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

$=\left(\sin^{-1}\frac{a}{a}-\sin^{-1}\frac{0}{a}\right)=\sin^{-1}1=\frac{\pi}{2}$

04. $\int \frac{2\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx = f(x)+c$ হলে $f(x)=?$ [DU-7Clg: 2022-23]

A. $\frac{2}{1+x^2}$ B. $2(\tan^{-1}x)^2$ C. $(\tan^{-1}x)^2$ D. $\frac{(\tan^{-1}x)^2}{2}$

C Explanation $\int \frac{2\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

$=2\int z\,dz = 2.\frac{z^2}{2}+c = z^2+c = (\tan^{-1}x)^2+c$

$\therefore f(x)=(\tan^{-1}x)^2$

Let, $\tan^{-1}x = z$
$\Rightarrow \frac{dx}{1+x^2}=dz$

05. $f(x)=10$ হলে, $\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)\,dx = ?$ [DU-7Clg: 2022-23]

A. 25 B. 15 C. 20 D. 14

A Explanation $f(x)=10$

$\therefore \int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{5}{2}} 10\,dx = 10[x]_0^{\frac{5}{2}} = 10\left(\frac{5}{2}-0\right)=25$

06. $y^2=4x$ এবং $y=x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল- [DU-7Clg: 2022-23]

A. 8 square unit B. $\frac{8}{3}$ square unit
C. $\frac{3}{8}$ square unit D. 4 square unit

B Explanation $y^2=4x$ ও $y=x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$=\frac{8}{3}\frac{a^2}{m^3}=\frac{8\times 1^2}{3\times 1^3}$ [$\because a=1; m=1$] $=\frac{8}{3}$ sq. units

07. $\int_{-1}^{1}|x|\,dx = ?$ [DU-7Clg: 2022-23]

A. 2 B. -1
C. 1 D. 0

C Explanation $\int_{-1}^{1}|x|dx = \int_{-1}^{0}|x|dx + \int_{0}^{1}|x|dx$

$=-\int_{-1}^{0} x\,dx + \int_0^1 x\,dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$=-\left(0-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right)=1$

08. $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx = ?$ [DU-7Clg: 2021-22]

A. $\frac{2}{3}$ B. -4π C. -1 D. 4π

D Explanation $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx = \left[\frac{x\sqrt{4^2-x^2}}{2}+\frac{4^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_0^4 = \frac{4^2}{2}.\frac{\pi}{2}=4\pi$

Finix Special: ব্যবহৃত সূত্র: $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$ $+c$ এরকম Math থাকলে $\frac{\pi}{4}$ এর সাথে const. অংশ গুণন করতে হবে।

$\therefore \frac{\pi}{4}\times \text{const.} = \frac{\pi}{4}\times 16 = 4\pi$

09. $\int_0^4 f(x)\,dx = 6$ হলে $\int_{-1}^{3} f(x+1)dx = ?$ [DU-7Clg: 2021-22]

A. 5 B. 7 C. 0 D. 6

D Explanation $\int_{-1}^{3} f(x+1)\,dx$

$=\int_0^4 f(z)\,dz = \int_0^4 f(x)\,dx = 6$

ধরি, $x+1=z$
$\Rightarrow dx = dz$

x	−1	3
z	0	4

10. $y=x$, $y=0$ রেখাদ্বয় এবং $x^2+y^2=16$ বৃত্ত দ্বারা প্রথম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? [DU-7Clg: 2021-22]

A. 2π square units B. 3π square units
C. 4π square units D. 5π square units

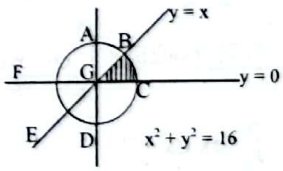
A Explanation প্রশ্নে BGC অংশের ক্ষেত্রফল চাওয়া হয়েছে।

$\therefore BGC = \frac{1}{2}(AGCB)$;

আবার, $AGCB = \frac{1}{4}$ (বৃত্ত ABCDEF)

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi r^2 = \pi 4^2 = 16\pi$

$\therefore BGC = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}(16\pi)\right\}=2\pi$



11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x+\tan x)\,dx = ?$ [DU-7Clg: 2021-22]

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

B Explanation $\int_0^{\pi/4}(\tan^3 x+\tan x)dx = \int_0^{\pi/4}\tan x(\tan^2 x+1)dx$

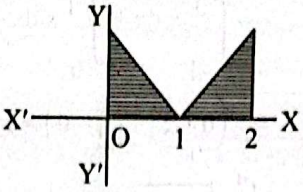
$=\int_0^{\pi/4}\tan x.\sec^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4}\tan x.d(\tan x) = \left[\frac{(\tan x)^2}{2}\right]_0^{\pi/4}$

$=\frac{1}{2}(1^2-0)=\frac{1}{2}$

12. $\int_0^2 |x-1|\,dx = ?$ [DU-7Clg: 2021-22]

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Ⓑ Explanation $\int_0^2 |x-1|\,dx$



$= \left|\int_0^1 -(x-1)\,dx\right| + \left|\int_1^2 (x-1)\,dx\right|$

$= \left|\int_0^1 -x\,dx + \int_0^1 1\,dx\right| + \left|\int_1^2 x\,dx - \int_1^2 1\,dx\right|$

$= \left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2 = -\frac{1}{2}+1+\frac{2^2}{2}-2-\frac{1}{2}+1 = 1$

13. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = ? + C$ [DU-7Clg: 2020-21]

A. $\tan^{-1}(e^{-x})$ B. $\tan(e^{-x})$ C. $\tan^{-1}(e^x)$ D. $\tan(e^x)$

Ⓒ Explanation $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x\,dx}{1+(e^x)^2} = \tan^{-1}(e^x) + C$

14. $y = \sin x, y = 0, x = 0$ এবং $x = \pi$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? [DU-7Clg: 2020-21]

A. 2 বর্গ একক B. $\sqrt{2}$ বর্গ একক C. 3 বর্গ একক D. $\sqrt{3}$ বর্গ একক

Ⓐ Explanation ক্ষেত্রফল $= \int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0$

$= -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2$ বর্গ একক

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$ এর মান কত? [DU-7Clg: 2020-21]

A. 2 / 7 B. 2/ 5 C. 1/ 3 D. 2 / 3

Ⓓ Explanation $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x + 3\cos x)\,dx$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 3x}{3} + 3\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 3\frac{\pi}{2}}{3} + 3\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}+3\right) = \frac{1}{4}\times\frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

ASPECT SPECIAL: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \frac{3-1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$

16. $\int_1^e \ln x\,dx = ?$ [DU-7Clg. 2019-20]

A. 1 B. –1 C. 0 D. e

Ⓐ Explanation $\int_1^e \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^e$

$= e\ln e - e - 1\ln 1 + 1 = e - e - 0 + 1 = 1$

17. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = ?$ [DU-7Clg. 2019-20]

A. $-\tan e^x + c$ B. $\tan e^x + c$ C. $\cot^{-1}e^x + c$ D. $\tan^{-1}e^x + c$

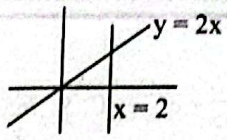
Ⓓ Explanation $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x\,dx}{(e^x)^2+1}$

$= \int \frac{dz}{z^2+1} = \tan^{-1}(z) + c = \tan^{-1}(e^x) + c$ | ধরি, $e^x = z$, $e^x\,dx = dz$

18. $y = 2x$, x-অক্ষ এবং $x = 2$ লাইনসমূহ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল [DU-7Clg. 2018-19]

A. 5 B. 4 C. 9 D. 30

Ⓑ Explanation $y = 2x$, x-অক্ষ এবং $x = 2$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



$= \int_0^2 2x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2}{2}(2^2-0) = 4$ বর্গ একক

19. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}\,dx = ?$ [DU-7Clg. 2018-19]

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{x}{\sqrt{2}}$ C. 1 D. $\frac{\pi}{2}$

Ⓐ Explanation $-\int_0^1 \frac{-dx}{\sqrt{1-x}} = -2\left[\sqrt{1-x}\right]_0^1$

$= -2(0-1) = 2$

20. $\int_0^1 \frac{x}{2-x^2}\,dx$ এর মান কত? [DU-7Clg. 2017-18]

A. $\frac{1}{2}\log 2$ B. $\log 2$

C. $2\log 2$ D. $-\frac{1}{2}\log 2$

Ⓐ Explanation $\int_0^1 \frac{x}{2-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-2x\,dx}{2-x^2}$

$= -\frac{1}{2}[\ln(2-x^2)]_0^1 = -\frac{1}{2}[\ln 1 - \ln(2)] = -\frac{1}{2}[0 - \ln 2] = \frac{1}{2}\ln 2$

21. $\int 2\sin^2\frac{x}{2}\,dx =$ কত? [DU-7Clg. 2017-18]

A. $x - \sin x + c$ B. $x - \cos x + c$

C. $1 - \sin x$ D. $1 + \sin x + c$

Ⓐ Explanation $\int 2\sin^2\frac{x}{2}\,dx = \int (1-\cos x)\,dx = x - \sin x + c$

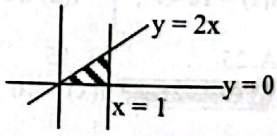
22. $y = 0, x = 1$ এবং $y = x$ রেখা তিনটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল- ? [DU-7Clg. 2017-18]

A. 2 sq. units B. 1 sq units

C. $\frac{1}{2}$ sq. units D. $\frac{1}{3}$ sq. units

Ⓒ Explanation $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$



IQA — IMPORTANT QUESTION FOR DCU ADMISSION

01. $\int \frac{dx}{(e^x+e^{-x})^2} = ?$

A. $\frac{1}{2(e^{2x}+1)} + C$ B. $\frac{-1}{2(e^{2x}+1)} + C$

C. $\frac{1}{2e^{2x}} + C$ D. $\frac{-1}{2e^{2x}} + C$

Ⓑ Explanation $\int \frac{dx}{(e^x+e^{-x})^2} = \int \frac{dx}{\left(\frac{e^{2x}+1}{e^x}\right)^2}$

$= \int \frac{e^{2x}\,dx}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{z}\right) + c = -\frac{1}{2(e^{2x}+1)} + c$ | ধরি, $e^{2x}+1 = z \Rightarrow 2e^{2x}\,dx = dz \Rightarrow e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}dz$

02. $\int \sqrt{e^x}dx = ?$

A. $\frac{2}{3}(ex)^{3/2} + c$ B. $\frac{1}{2}\sqrt{e^x} + c$

C. $2e^{x/2} + c$ D. $e^{x/2} + c$

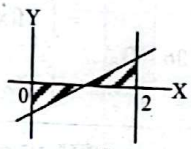
C Explanation $\int \sqrt{e^x}dx = \int e^{\frac{x}{2}} dx = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2e^{\frac{x}{2}} + c$

03. [0, 2] ব্যবধিতে y= x–1 এবং y = 0 রেখা দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের মোট ক্ষেত্রফল কত?

A. $\int_0^2 (x-1)\,dx$ B. $\int_0^2 |x-1|\,dx$

C. $2\int_1^2 (1-x)\,dx$ D. $2\int_0^1 (x-1)\,dx$

B Explanation [0, 2] ব্যবধিতে y = x – 1 এবং y = 0 দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



$= -\int_0^1 y\,dx + \int_1^2 y\,dx$

$= \int_0^2 |y|\,dx = \int_0^2 |x-1|\,dx$

[0, 1) ব্যবধিতে y(–v)
(1, 2] ব্যবধিতে y(+v)

04. $\int \frac{\tan(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = ?$

A. $\sec^2(\sin^{-1}x) + c$
B. $\sec(\sin^{-1}x) + c$
C. $ln|\sec(\sin^{-1}x) + c$
D. $ln|\tan(\sin^{-1}x)| + c$

C Explanation $\int \frac{\tan(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \int \tan(\sin^{-1}x)d(\sin^{-1}x) = ln|\sec(\sin^{-1}x)| + c$

05. y = 2 এবং y= |x| রেখাগুলো দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল-

A. 2 sq. units B. 4 sq. units
C. 6 sq. units D. 8 sq. units

B Explanation ক্ষেত্রফল $= \int_{-2}^{2} |x|\,dx = \left[\frac{x|x|}{2}\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{4}{2} + \frac{4}{2}\right) = 4$ sq. units

06. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = f(x) + c$ হলে, f(x) সমান-

A. sinx B. $\sin^{-1}x$
C. cosx D. $\sec^{-1}x$

D Explanation Option গুলোকে অন্তরীকরণ করলে যে Option এর জন্য প্রশ্ন পাওয়া যাবে সেটিই সঠিক উত্তর। সুতরাং সঠিক উত্তর Option (D

07. যদি $\int_0^6 f(t)dt = 8$ হয়, তবে $\int_0^3 f(2x)dx$ এর মান-

A. 0 B. 6 C. 10 D. 4

D Explanation দেওয়া আছে, $\int_0^6 f(t)\,dt = 8$

$\Rightarrow [F(t)]_0^6 = 8 \quad \Rightarrow F(6) - F(0) = 8$

$\therefore \int_0^3 f(2x)dt = \frac{1}{2}[F(2x)]_0^3 = \frac{1}{2}[F(6) - F(0)] = \frac{1}{2}.8 = 4$

08. $y = x^2, x = 1, x = 3$ এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল-

A. 26/3 sq units B. 80/3 sq units
C. 8/3 sq units D. 35/3 sq units

A Explanation সীমা x = 1, x = 3

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_1^3 ydx$

$= \int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3$

$= \frac{1}{3}(3^3 - 1^3) = \frac{26}{3}$ sq. units

09. $\int_0^x f(p)f'(p)dp = ?$

A. $\frac{1}{2}f^2(x)$

B. $\frac{1}{2}x^2$

C. $\frac{1}{2}[\{f(x)\}^2 - \{f(0)\}^2]$

D. $f(x) - f(0)$

C Explanation $\int_0^x f(p).f'(p)\,dp$

$= \left[\frac{\{f(p)\}^2}{2}\right]_0^x$

$= \frac{1}{2}[\{f(x)\}^2 - \{f(0)\}^2]$

PRIME TEST

01. $\int x^{-1}\,dx$ এর মান কত?

A. $\frac{1}{0}$ B. –logx
C. logx D. logx + C

02. $\int e^x(x+1)dx =$ কত?

A. $xe^x + e^x + k$ B. $xe^x + x + k$
C. $xe^x + k$ D. $\frac{x^2}{2}e^x + e^x + k$

03. $\int \cos^2 2x dx = ?$

A. $\frac{\sin^3 2x}{2} + k$ B. $\frac{2}{3}\sin^3 2x + k$

C. $4\sin 2x \cos 2x + k$ D. $\frac{1}{8}(4x + \sin 4x) + k$

04. $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}dx = ?$

A. 4π B. 16π
C. 8π D. 2π

05. $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}=?$

A. $\tan\frac{x}{2}$ B. $\frac{\pi}{4}$

C. 2π D. 0

06. যদি $\int_0^4 f(x)dx=6$ তবে $\int_{-1}^{3} f(x+1)dx$ এর মান-

A. 5 B. 7

C. 0 D. 6

07. $y^2=4ax$ এবং $y=x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল-

A. $\frac{4}{3}a^2$ B. $\frac{7}{3}a^2$

C. $\frac{8}{3}a^2$ D. $\frac{4}{3}$

08. $\int_0^{\pi/3}\sin 2x\sin x dx=?$

A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

09. $\int x\cos x\, dx=f(x)+cont.$ হলে, f(x) = ?

A. x sinx+cosx

B. x sinx-cosx

C. $\frac{x^2}{2}\sin x$

D. $\frac{x^2}{2}\cos x+x\sin x$

10. $\int e^x(\tan x-\ln|\cos x|)dx$ এর মান কত?

A. $\frac{e^x}{\ln|\cos x|}+c$ B. $e^x\ln|\sec x|+c$

C. $e^x\ln|\cot x|+c$ D. কোনটিই নয়

OMR SHEET		
01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

ANS ANALYSIS

প্রশ্ন	উত্তর	ব্যাখ্যা
01	D	$\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\log x+c$
02	C	$\int e^x(x+1)dx=xe^x+k=xe^x+k$
03	D	$\int\cos^2 2xdx=\frac{1}{2}\int 2\cos^2 2xdx$ $=\frac{1}{2}\int(1+\cos 4x)dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+k$ $\therefore\int\cos^2 2xdx=\frac{1}{8}(4x+\sin 4x)+k$
04	A	$\int_0^4\sqrt{16-x^2}dx$ $=\left[\frac{x\sqrt{4^2-x^2}}{2}+\frac{4^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_0^4=\frac{4^2}{2}.\frac{\pi}{2}=4\pi$
05	B	$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_{-2}^{2}$ $=\frac{1}{2}\{\tan^{-1}1-\tan^{-1}(-1)\}=\frac{\pi}{4}$
06	D	$=\int_{-1}^{3}f(x+1)\,dx$ $=\int_0^4 f(z)\,dz=\int_0^4 f(x)\,dx=6$ ধরি, $x+1=z\Rightarrow dx=dz$ x: −1, 3 ; z: 0, 4
07	C	প্রদত্ত $y^2=4ax$ এবং $y=x$ সমীকরণ সমাধান করে পাই, $x=0$ এবং $x=4a$ ∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\int_0^{4a}(2\sqrt{a}.\sqrt{x}-x)dx=\left[2\sqrt{a}.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right]_0^{4a}$ $=\left(\frac{4}{3}.\sqrt{a}.8(\sqrt{a})^3-\frac{16a^2}{2}\right)$ $=\frac{32}{3}a^2-\frac{16a^2}{2}=\frac{8}{3}a^2$ বর্গএকক
08	C	$\int_0^{\pi/3}\sin 2x\sin x dx=\frac{1}{2}$ $=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(\cos x-\cos 3x)dx$ $=\frac{1}{2}\left[\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi/3}$ $=\frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}\sin\pi\right)-0\right]$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$
09	A	$\int x\cos x\,dx=x\int\cos x\,dx-\int\left\{\frac{d}{dx}x\int\cos x dx\right\}dx=x\sin x+\cos x+c$
10	B	$\int e^x(\tan x-\ln\|\cos x\|)dx$ $=-\int e^x(\ln\|\cos x\|-\tan x)dx$ $=-e^x\ln\|\cos x\|+c$

দ্বিতীয় পত্র

অধ্যায় ০১

বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা
(REAL NUMBERS & INEQUALITIES)

কি পড়ব ? কেন পড়ব ? **SURVEY TABLE** কতটুকু পড়ব ? কিভাবে পড়ব ?

টপিক নং	বিগত বছরে যে সকল টপিকস্ থেকে প্রশ্ন এসেছে	RATINGS [কেন পড়ব?]
01	মূলদ, অমূলদ সংখ্যা নির্ণয়	★★★
02	মান নির্ণয় ও পরমমানের ধর্ম সংক্রান্ত	★★
03	(<) বা (≤) যুক্ত অসমতার সমাধান	★★★
04	> বা ≥ যুক্ত অসমতার সমাধান	★★★
05	পরমমানের দুই দিকে অসমতা থাকলে সমাধান	★★
06	দ্বিঘাত অসমতার সমাধান	★★★

টপিক আলোচনা

সংখ্যা সংক্রান্ত প্রাথমিক ধারণা

- 1871 সালে জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর বাস্তব সংখ্যা নির্ণয়ে কৃতিত্ব অর্জন করেন।
- **স্বাভাবিক সংখ্যার সেট:** ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেটকে স্বাভাবিক সংখ্যার সেট বলে। ইহাকে N দ্বারা প্রকাশ করা হয় [∴ N = {1,2,3 .....}]
- **পূর্ণ সংখ্যার সেট:** ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, শূন্য এবং ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যাকে একত্রে পূর্ণ সংখ্যার সেট বলা হয়। ইহাকে Z দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
  Z = {.....–4,–3,–,1,0,1,2,3.....}
- **মূলদ সংখ্যার সেট:** কোন সংখ্যাকে সমাপ্ত দশমিক অথবা আবৃত দশমিক প্রকাশ করা গেলে তাকে মূলদ সংখ্যা বলে। একে Q দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
  Q = {–3, –2, 5, 0, 1 2.....}
- **অমূলদ সংখ্যা সেট:** কোন সংখ্যাকে সমাপ্ত দশমিক বা আবৃত দশমিক প্রকাশ করা না গেলে তাকে অমূলদ সংখ্যা বলে। একে Q′ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
  $Q' = \sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \pi$.....
- শূন্য সহ ধনাত্মক, ঋণাত্মক সকল সংখ্যাকে একত্রে বাস্তব সংখ্যা বলে। একে R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- 0 একটি নিরপেক্ষ সংখ্যা।
- সংখ্যার সেটকে প্রকাশ করা হয়: $N \subset Z \subset Q \subset R$
- **মূলদ-অমূলদ সংখ্যা:**

মূলদ সংখ্যার বৈশিষ্ট্য: i. যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়। যেমন- 1/2, 5/7, 12/13..... ইত্যাদি
ii. সসীম / সমাপ্ত দশমিক, পূর্ণ দশমিক সংখ্যা। যেমন- 1.5, 2.257, 3.339 ..... ইত্যাদি
iii. আবৃত দশমিক সংখ্যা যেমন- 12.101101101.....; 5.656565..... ইত্যাদি

অমূলদ সংখ্যা চিনার উপায়: i. অসীম দশমিক (পৌনঃপুনিক নয়) ii. মৌলিক সংখ্যার বর্গমূল। যেমন- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ ইত্যাদি। (iii). π, e ইত্যাদি।

উর্ধ্বসীমা ও নিম্নসীমা: কোন সেটের সবচেয়ে বড় উপাদানটিকে ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমাএবং সবচেয়ে ছোট উপাদান টিকে বৃহত্তম নিম্ন সীমা বলে।

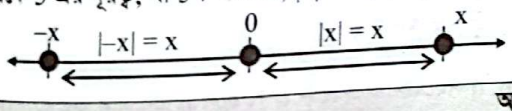
Pro: s={1,2,5,7} সেটের ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা এবং বৃহত্তম নিম্নসীমা কত? সমাধান: ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা = 7 এবং বৃহত্তম নিম্নসীমা = 1

- **যদি x একটি বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে x এর পরমমানকে |x| দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাহলে,**

$$|x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x > 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

জ্যামিতিকভাবে বলা যায়, সংখ্যারেখার 0 এবং x এর দূরত্বই হলো x এর পরমমান।
|5| হলো 0 থেকে 5 এর দূরত্ব, যা 5। অতএব, |5| = 5 ; |–5| হলো 0 থেকে –5 এর দূরত্ব, যা 5। অতএব, |–5| = 5

সংখ্যারেখায়:



অসমতা সম্পর্কিত স্বীকার্য	
যোগের ধর্ম	a,b,c∈R এর জন্য- যদি a<b হয় তবে, a+c<b+c হবে। যদি a>b হয় তবে, a+c>b+c হবে
গুণের ধর্ম	a,b,c∈R এর জন্য যদি a<b এবং c>o হয় তবে, ac<bc হবে। যদি a<b এবং c<o হয় তবে, ac>bc হবে
ভাগের ধর্ম	a,b,c∈R এর জন্য যদি a<b এবং c>o হয় তবে, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ হবে। যদি a<b এবং c<o হয় তবে, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ হবে

পরমমানের ধর্ম			
$x \in R$ এর জন্য	i) $\|x\| \le a \Rightarrow -a \le x \le a$	ii) $\|a\| > \|b\| \Rightarrow a^2 > b^2$	iii) $\|x\| \ge x$
$a.b \in R$	i) $\|a^2\| = a^2 = \|-a^2\|$	ii) $\|ab\| = \|a\|\,\|b\|$	iii) $\|abc\| = \|a\|\,\|b\|\,\|c\|$
	iv) $\|a\| + \|b\| \le \|a+b\|$	v) $\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|}$ $(b \ne o)$	vi) $a,b \in R$ এর জন্য $\|a\| - \|b\| \le \|a-b\|$

পরমমান আকারে প্রকাশ

$a \le bx + c \le d$ হলে প্রত্যেক অংশ হতে a, b এর বীজগাণিতিক গড় বিয়োগ করতে হবে।

অর্থাৎ $a - \frac{a+d}{2} \le bx + c - \frac{a+d}{2} \le d - \frac{a+d}{2} \Rightarrow \frac{a-d}{2} \le bx + k \le \frac{d-a}{2}\left[k = c - \frac{a+d}{2} \text{ ধরে}\right] \Rightarrow -\frac{d-a}{2} \le bx + k \le \frac{d-a}{2}$ $\therefore |bx+k| \le \frac{d-a}{2}$ লিখতে হবে।

অসমতার সমাধান

Suppose: $\|ax+b\| \le c$ এর সমাধান করতে হবে	
Step-1	অংকের ডাকটিকে প্রথমে $-c \le ax + b \le +c$ আকারে লিখ
Step-2	মডুলাসের ভেতরে যে Constant সংখ্যাটি থাকে তার বিপরীত চিহ্নযুক্ত সংখ্যা নিয়ে Step-1 এর তিনটি অংশের সাথেই যোগ কর। অর্থাৎ, $-c-b \le ax + b - b \le c - b$ বা $-c-b \le ax \le c-b$ আকারে লিখ।
Step-3	x কে a মুক্ত কর। অর্থাৎ, $\frac{-c-b}{a} \le x \le \frac{c-b}{a}$
Step-4	x এর সামনে ঋণাত্মক চিহ্ন থাকলে (−1) দ্বারা গুন করে অসমতার চিহ্নটি উল্টে দাও।আবার ধনাত্মক চিহ্ন থাকলে কিছু করার দরকার নেই।
Suppose: $\|ax+b\| \ge c$ এর সমাধান করতে হবে	
Step-1:	অংকের ডাকটিকে প্রথমে $-c \ge ax + b \ge +c$ আকারে লিখ।
Step-2:	মডুলাসের ভেতরে যে Constant সংখ্যাটি থাকে তার বিপরীত চিহ্নযুক্ত সংখ্যা নিয়ে Step-1 এর তিনটি অংশের সাথেই যোগ কর। অর্থাৎ, $-c-b \ge ax + b - b \ge c - b$ বা $-c-b \ge ax \ge c-b$ আকারে লিখ
Step-3:	x কে a মুক্ত কর। অর্থাৎ, $\frac{-c-b}{a} \ge x \ge \frac{c-b}{a}$

মনে রাখবে: Less than ($\le$ or $<$) থাকলে উত্তরে "এবং" অথবা '$\cap$' চিহ্ন ব্যবহার করতে হয়।

- Greater than ($\ge$ or $>$) থাকলে উত্তরে "অথবা"/ ($\cup$) চিহ্ন ব্যবহার করতে হয়
- (−1) দ্বারা গুন করলে অসমতা চিহ্ন উল্টে যায়

গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যা সমূহ

MEx 01 3, 2.8787, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{-2}$ এই সংখ্যাগুলির মধ্যে কোনটি অমূলদ?

Solve ৩টি

MEx 02 $|-16+3| + |-1-4| - 3 - |-1-7| = ?$

Solve $|-16+3| + |-1-4| - 3 - |-1-7|$
$= |-13| + |-5| - 3 - |-8| = 13 + 5 - 3 - 8 = 18 - 11 = 7$

MEx 03 $|x-2| \le 5$ এর সমাধান সেট কোনটি?

Solve $|x-2| \le 5 \Rightarrow -5 \le x - 2 \le 5 \Rightarrow -2 + 2 \le x \le 5 + 2$
$\Rightarrow -3 \le x \le 7$ $\therefore$ সমাধান সেট $= [-3, 7]$

MEx 04 $|2x-7| > 5$ অসমতাটির বাস্তব সংখ্যার সমাধান কি?

Solve $-5 > 2x - 7 > 5 \Rightarrow 5+7 > 2x > 12$
$\Rightarrow 2 > 2x > 12 \Rightarrow 1 > x > 6 \Rightarrow x < 1$ অথবা $x > 6$

MEx 05 $4 < x < 10$ অসমতাকে পরমমান চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করলে হবে-

Solve $\frac{4+10}{2} = 7$ $\therefore 4 - 7 < x - 7 < 10 - 7$
$\Rightarrow -3 < x - 7 < 3 \Rightarrow |x-7| < 3$

MEx 06 বাস্তব সংখ্যার উপসেট $S = \{x: x^2 - 3x + 2 < 0$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা ও ক্ষুদ্রতম উর্ধসীমা হবে-

Solve $S = \{x: x^2 - 3x + 2 < 0\}, = \{x: x^2 - 2x - x + 2 < 0\}$
$= \{x: x(x-2) - 1(x-2) < 0\} = \{x: (x-2)(x-1) < 0\} = \{x: 1 < x < 2$

MEx 07 $\frac{3x-2}{2x-1} > 1$ অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি?

Solve $\frac{3x-2}{2x-1} > 1 \Rightarrow \frac{3x-2-2x+1}{2x-1} > 0$
$\Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow (1, \infty)$

MEx 08 C, R, Q, Z ও N দ্বারা যথাক্রমে জটিল সংখ্যা, বাস্তব সংখ্যা, মূলদ সংখ্যা,পূর্ণ সংখ্যা ও স্বাভাবিক সংখ্যার সেট বুঝানো হলে নিচের কোনটি সঠিক?

Solve $N \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$

PYQ — PREVIOUS YEARS' QUESTIONS

01. $1/2 \ge |x-1|$ অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি? [DU-7Clg: 2020-21]

A. $1/2 \le x \infty$ B. $-\infty < x \le 1/2$ C. $0 \le x < \infty$ D. $1/2 \le x \le 3/2$

Explanation $|x-1| \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le x - 1 \le \frac{1}{2}$
$\Rightarrow -\frac{1}{2} + 1 \le x \le \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$

02. নিচের কোন অসমতাটি $|3x-4| > 2$ এর সমতুল্য? [DU-7Clg. 2019-20]

A. $\frac{2}{3} < x < 2$ B. $\frac{3}{4} < x < 2$ C. $3 < x < 6$ D. $\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$

Explanation $|3x-4| > 2 \Rightarrow -2 > 3x - 4 > 2$
$\Rightarrow -2 + 4 > 3x - 4 + 4 > 2 + 4 \Rightarrow 2 > 3x > 6 \Rightarrow \frac{2}{3} > x > 2$
$\therefore \frac{2}{3} > x$ অথবা $x > 2$

03. p, q সহমৌলিক এবং $\frac{q}{p} \in N$ হলে p এর মান কত? [DU-7Clg. 2019-20]

A. −2 B. 0 C. 1 D. 2

Explanation p, q সহমৌলিক হবে যদি এদের মাঝে 1 ব্যতিত কোন সাধারণ উৎপাদক না থাকে
$\therefore$ p এর মান 1

04. নীচের কোন অসমতাটি $|x-2| < 5$ এর সমতুল্য? [DU-7Clg. 2018-19]
A. $-5 < x < 5$ B. $-3 < x < 5$ C. $-3 < x < 7$ D. $-5 < x < 7$
Ⓒ Explanation $|x-2| < 5 \Rightarrow -5 < x-2 < 5$
$\Rightarrow -5+2 < x-2+2 < 5+2 \Rightarrow -3 < x < 7$

05. $-7 < x < -1$ কে পরমমানের সাহায্যে লিখলে দাঁড়ায়? [DU-7Clg. 2017-18]
A. $|x+3| < 4$ B. $|x+1| < 3$ C. $|x-4| < 1$ D. $|x+4| < 3$
Ⓓ Explanation $-7 < x < -1 \Rightarrow -7+4 < x+4 < -1+4$
$\Rightarrow -3 < x+4 < 3 \Rightarrow |x+4| < 3$

IQA — IMPORTANT QUESTION FOR DCU ADMISSION

01. $-7 < x < -1$ কে পরম মানের সাহায্যে লিখলে দাঁড়ায়-
A. $|x+4| < 3$ B. $|x-4| < 3$ C. $|x+3| < 4$ D. $|x-3| < 4$
Ⓐ Explanation $-7 < x < -1 \Rightarrow -7+4 < x+4 < -1+4 \Rightarrow -3 < x+4 < 3$
$\therefore$ পরম মানের সাহায্যে লিখলে দাঁড়ায় $= |x+4| < 3$

02. $\left|3-\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$ অসমতাটির সমাধান সেট-
A. $\frac{2}{7} < x < \frac{2}{5}$ B. $-\frac{4}{7} < x < -\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{8} < x < \frac{1}{7}$ D. $\frac{1}{5} < x < \frac{1}{7}$
Ⓐ Explanation $\left|3-\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-3\right| < \frac{1}{2}$
$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{x}-3 < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}+3 < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}+3 \Rightarrow \frac{5}{2} < \frac{1}{x} < \frac{7}{2}$
$\Rightarrow \frac{2}{5} > x > \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{2}{7} < x < \frac{2}{5}$

03. নিচের কোন অসমতাটি $|x-2| < 5$ এর সমতুল্য?
A. $-5 < x < 5$ B. $-3 < x < 5$ C. $-3 < x < 7$ D. $-5 < x < 7$
Ⓒ Explanation $|x-2| < 5 \Rightarrow -5 < x-2 < 5$
$\Rightarrow -5+2 < x < 5+2 \therefore -3 < x < 7$

04. $|x^2+1| < 10$ এর সমাধান-
A. $-3 < x < 3$ B. $-3 \le x < 3$ C. $-3 < x \le 3$ D. $-3 \le x \le 3$
Ⓐ Explanation $|x^2+1| < 10$ বা, $-10 < x^2+1 < 10$
$\Rightarrow -11 < x^2 < 9$ [কিন্তু $-11 < x^2$ এর চেয়ে $0 \le x^2$ অধিক যুক্তিযুক্ত]
$\Rightarrow 0 \le x^2 < 9$ বা, $-3 < x < 3$

05. নিচের কোন অসমতাটি $|3x-4| > 2$ এর সমতুল্য?
A. $\frac{2}{3} < x < 2$ B. $\frac{3}{4} < x < 2$ C. $3 < x < 6$ D. $\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$
Ⓐ Explanation $|3x-4| > 2 \Rightarrow -2 > 3x-4 > 2$
$\Rightarrow -2+4 > 3x-4+4 > 2+4 \Rightarrow 2 > 3x > 6 \Rightarrow \frac{2}{3} > x > 2$
$\therefore \frac{2}{3} > x$ অথবা $x > 2$ Ans : Correct Answer $\frac{2}{3} > x$ অথবা $x > 2$

06. অসমতা $|5-2x| \ge 4$ এর সমাধান সেট-
A. $\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{9}{2}, \infty\right)$
C. $\left[-\infty, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right] \cup \left[\frac{27}{2}, \infty\right)$
Ⓑ Explanation দেওয়া আছে, $|5-2x| \ge 4$
$\Rightarrow -4 \ge 5-2x \ge 4 \Rightarrow -9 \ge -2x \ge -1$
$\Rightarrow \frac{9}{2} \le x \le \frac{1}{2} \Rightarrow x \le \frac{1}{2}$ অথবা $x \ge \frac{9}{2} \Rightarrow \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, \infty\right)$

PRIME TEST

01. $|x-1| < \frac{1}{10}$ হলে $|x^2-1|$ এর মান কোনটি?
A. $\frac{1}{100}$ B. $\frac{7}{100}$ C. $\frac{14}{100}$ D. $\frac{21}{100}$

02. $|2x-7| < 5$ অসমতাটির বাস্তব সংখ্যার সমাধান কি?
A. $x > 1$ B. $x < 6$
C. $x > 1$ অথবা $x < 6$ D. $x > 1$ এবং $x < 6$

03. যদি $a, b, \in R$ হয় এবং $a > 0, b > 0, a < b$ হয় তবে নিচের কোনটি সঠিক?
A. $a > b$ B. $b^{-1} > a^{-1}$ C. $b \ge a^{-1}$ D. কোনটিই নয়

04. যদি x এবং y উভয়েই ধারাবাহিক Prime number হয় এবং $x, y \le 70$ হয়, তাহলে x এবং y এর জন্য নীচের কোন পার্থক্যটি সঠিক নয়?
A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

05. $-4 \le x \le 2$ কে পরমমান চিহ্নের মাধ্যমে প্রকাশ করলে নিম্নের কোনটি সঠিক?
A. $|x+1| \le 3$ B. $|x+1| \le 1$ C. $|x+1| \le 5$ D. $|x+1| \le 2$

06. $a, b \in R$ এর জন্য কোনটি সঠিক নয়?
A. $|a| + |b| \ge |a+b|$ B. $|ab| = |a||b|$
C. $|a-c| + |c-b| > |a-b|$ D. $|a| - |b| < |a-b|$

07. বাস্তব সংখ্যার উপসেট $S = \{x : x^2 - 3x + 2 < 0$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা ও ক্ষুদ্রতম উর্ধসীমা হবে-
A. $2 < x < 1$ B. $1 < x < 2$ C. $-3 < x < 2$ D. $2 < x < 3$

08. বাস্তব সংখ্যায় $|2x-3| \le 1$ অসমতাটির সমাধান কোনটি?
A. $1 \le x \le 2$ B. $1 < x < 2$ C. $x \le 1$ অথবা $x \ge 2$ D. $-2, x \le 2$

09. $\{-\infty, \ldots\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots, \infty\}$ সংখ্যার সেটকে বলে-
A. পূর্ণ সংখ্যার সেট B. স্বাভাবিক সংখ্যার সেট
C. অমূলদ সংখ্যার সেট D. বাস্তব সংখ্যার সেট

10. $|x| = |y|$ থেকে নিচের কোনটি নির্দেশিত হয়?
A. $x = y$ B. $x = -y$ C. $\frac{x}{y} = \pm 1$ D. কোনটিই নয়

OMR SHEET	04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

ANS ANALYSIS

প্রশ্ন	উত্তর	ব্যাখ্যা
01	D	$\lvert x-1\rvert < \frac{1}{10}$ বা, $\lvert x-1+2\rvert < \frac{1}{10}+2$ বা, $\lvert x+1\rvert < \frac{21}{10}$ বা, $x^2-1 < \frac{1}{10} \times \frac{21}{10}$ বা, $\lvert x^2-1\rvert < \frac{21}{100}$
02	D	$\lvert 2x-7\rvert < 5 \Rightarrow -5 < 2x-7 < 5 \Rightarrow 2 < 2x < 12$ $\Rightarrow 1 < x < 6$ $\therefore$ অসমতাটির সমাধান $= x > 1$ এবং $x < 6$
03	D	$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow a^{-1} > b^{-1} \therefore b^{-1} < a^{-1}$
04	C	যেহেতু, 2 ব্যতিত অপর সকল মৌলিক সংখ্যা বিজোড়, সেহেতু এদের পার্থক্য 5 হতে পারে না।
05	A	$-4 \le x \le 2 \Rightarrow -4+1 \le x+1 \le 2+1$ $\Rightarrow -3 \le x+1 \le 3 \therefore \lvert x+1\rvert \le 3$
06	D	পরম মানের ধর্ম: (i) $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert > \lvert a+b\rvert$ (ii) $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$ (iii) $\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \le \lvert a-b\rvert$ (iv) $\lvert a-c\rvert + \lvert c-b\rvert > \lvert a-b\rvert$
07	B	$S = \{x: x^2-3x+2 < 0\}, = \{x: x^2-2x-x+2 < 0\}$ $= \{x: x(x-2)-1(x-2) < 0\}$ $= \{x: (x-2)(x-1) < 0\} = \{x: 1 < x < 2\}$
08	A	$\lvert 2x-3\rvert \le 1 \Rightarrow -1 \le 2x-3 \le 1$ $\Rightarrow 2 \le 2x \le 4 \Rightarrow 1 \le x \le 2$
09	A	সরাসরি পূর্ণ সংখ্যার সেট সংজ্ঞা থেকে
10	C	$\lvert x\rvert = \lvert y\rvert$ বা, $x = \pm y$ বা, $\frac{x}{y} = \pm 1$

দ্বিতীয় পত্র অধ্যায় ০২

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম
(LINEAR PROGRAMMING)

কি পড়ব ? কেন পড়ব ? **SURVEY TABLE** কতটুকু পড়ব ? কিভাবে পড়ব ?

টপিক নং	বিগত বছরে যে সকল টপিকস্ থেকে প্রশ্ন এসেছে	RATINGS [কেন পড়ব?]
01	সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্নকরণ	★★
02	সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্নকরণ এর ব্যবহারিক প্রয়োগ সংক্রান্ত	★★

টপিক আলোচনা

■ **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম:** 1939 সালে রাশিয়ার গণিতবিদ এল.ভি ক্যান্ট্রভিচ সর্বপ্রথম যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের মডেল তৈরি করেন। কোন ব্যবসা প্রতিষ্ঠানের সমস্যাকে তার সীমাবদ্ধতা ও শর্ত সাপেক্ষে একাধিক স্বাধীন চলকের রৈখিক অসমতা ও একটি অভিষ্ট ফাংশনের মাধ্যমে সমাধানই হল যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম থেকে 4 ধরনের প্রশ্ন হতে পারে:

(i) সর্বোচ্চ মান বা গুরু মান কত?
(ii) সর্বনিম্ন মান বা লঘুমান কত?
(iii) কোন বিন্দুতে সর্বোচ্চ বা গুরুমান পাওয়া যায়?
(iv) কোন বিন্দুতে সর্বনিম্ন বা লঘুমান পাওয়া যায়?

01. সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয়:

FORMULA **Step-01:** উপরের চার ধরনের প্রশ্নের সমাধানের জন্য অসমতা গুলোকে সমীকৃত করে লেখচিত্র অংকন করে অভিষ্ট এরিয়া বের করতে হবে।
Step-02: অভিষ্ট এরিয়ার প্রান্ত বিন্দুগুলো অভিষ্ট ফাংশনে বসিয়ে প্রশ্নের উত্তর বের করতে হবে।

গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যা সমূহ

MEx 01 যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামে $x + 2y \le 10, 2x + y \ge 2, y \le 3, x,y \ge 0$ সীমাবদ্ধতায় কোন বিন্দুতে $= z = 2x + y$ এর (i) সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে? (ii) সর্বোচ্চ মান কত?

Solve $x + 2y = 10$ .....(i)
$2x+y=2$ .....(ii)
$y = 3$.....(iii)

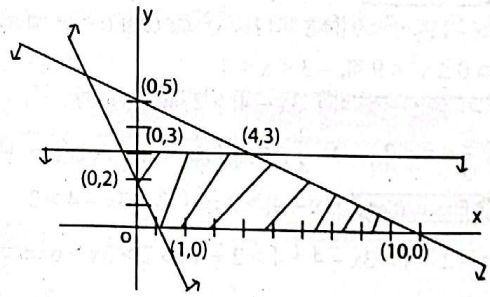
১নং হতে পাই $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$

২নং হতে পাই $x + \frac{y}{2} = 1$

১নং ও ৩নং এর ছেদবিন্দু $y=3, x+6=10 \Rightarrow x=4 \therefore (4,3)$

(1,0) বিন্দুতে $\Rightarrow z = 2$
(10,0) বিন্দুতে $\Rightarrow z = 20$
(4,3) বিন্দুতে $\Rightarrow z = 11$
(0,3) বিন্দুতে $\Rightarrow z = 3$
(0,2) বিন্দুতে $\Rightarrow z = 2$

সর্বোচ্চ মান 20 এবং (10,0) বিন্দুতে সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে



IQA — IMPORTANT QUESTION FOR DCU ADMISSION

01. $x+ 2y \le 10, x + y \le 6, x \le 4, x, y \ge 0$ শর্তাধীনে $z = 2x + 3y$ এর সর্বোচ্চ মান–

A. 14 B. 15
C. 16 D. 18

Explanation $x + 2y \le 10$

$\Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$

$x + y \le 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$ এবং $x \le 4 \Rightarrow x = 4$

এখন, $x + y = 6$ ও $x = 4$-এর ছেদবিন্দু (4, 2)
এবং $x + 2y = 10$ ও $x + y = 6$-এর ছেদবিন্দু (2, 4) :