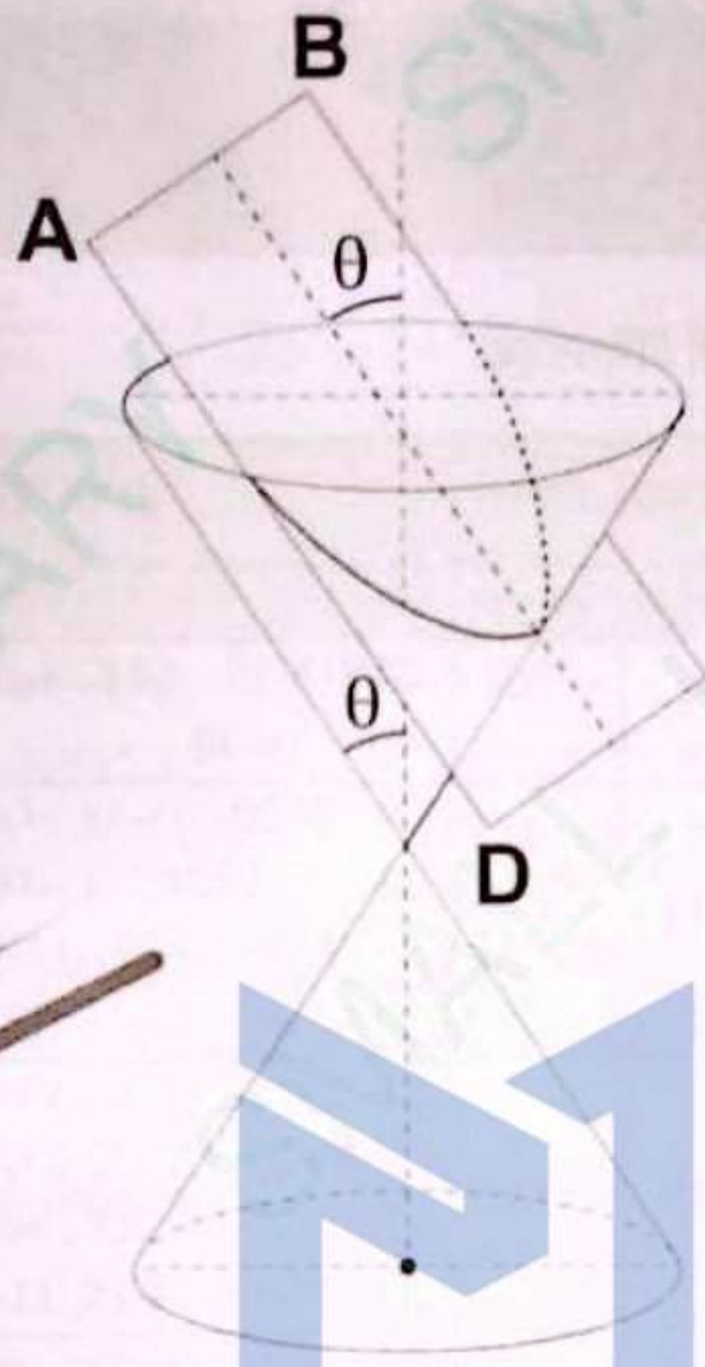


উচ্চতর গণিত
২য় পত্র

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

অধ্যায় ০৩
জটিল সংখ্যা

➤ ভার্সিটি ভর্তি পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪	T-01	A + iB আকারে প্রকাশ	5	-	DU'18-19; CU'23-24, 18-19; JU'22-23; Agri.'19-20	-
✪✪✪	T-02	জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট সংক্রান্ত সমস্যা	13	1	DU'19-20, 17-18; GST'22-23; RU'22-23, 20-21, 19-20, 17-18; CU'23-24, 22-23; JU'23-24, 22-23, 18-19, 14-15; KU'17-18, 16-17	RU'19-20
✪✪✪	T-03	মূল সংক্রান্ত	19	-	RU'19-20, 17-18, 14-15, 11-12, 10-11, 07-08, 06-07; CU'22-23, 21-22, 15-16, 14-15, 11-12, 07-08; JU'19-20, 14-15; KU'19-20; JnU'17-18, 14-15, 11-12	-
✪✪✪	T-04	i এর ঘাতের মান নির্ণয় এবং ধারা সংক্রান্ত	9	-	DU'14-15; GST'23-24; RU'23-24, 22-23, 21-22; JU'18-19, 16-17	-
✪✪	T-05	ω এর ঘাতের মান নির্ণয় এবং ω এর ধারা সংক্রান্ত	2	-	GST'21-22; RU'19-20	-
✪✪✪	T-06	ω যুক্ত রাশির মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা	08	-	DU'23-24, 18-19, 15-16; GST'23-24, 21-22, RU'22-23, 06-07; JU'22-23	-
✪✪✪	T-07	শর্তাধীনে মান নির্ণয় সংক্রান্ত	12	-	DU'16-17; GST'20-21; RU'23-24, 22-23, 15-16, 14-15; CU'23-24, 16-17; JU'19-20	-
✪✪✪	T-08	জটিল সংখ্যাভিত্তিক সঞ্চারপথ সংক্রান্ত	8	-	DU'16-17; RU'16-17, 13-14, 09-10; CU'22-23, 06-07; KU'19-20, 18-19	-

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-01: A+iB আকারে প্রকাশ

➲ **Formula & Concept:**

বাস্তব অংশগুলোকে A ও কাল্পনিক অংশগুলোকে B আকারে প্রকাশ করতে হবে।

➤ যদি দুটি জটিল সংখ্যা গুণ আকারে থাকে তবে সাধারণ নিয়মে গুণ করে A + iB আকারে প্রকাশ করতে হবে।

➤ যদি দুটি জটিল সংখ্যা ভাগ আকারে থাকে তবে হরের জটিল সংখ্যার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে A + iB আকারে প্রকাশ করতে হবে।

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

MCQ

01. $\frac{1}{1+i}$ কে A + iB আকারে প্রকাশ করলে B এর মান কত হবে? [CU'23-24] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) -1

সমাধান: $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2-i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \therefore B = -\frac{1}{2}$

02. যদি $\frac{2+3i}{2-i} = A + iB$ এবং A ও B বাস্তব সংখ্যা হয় তাহলে B এর মান কত? [JU'22-23; Agri.'19-20] [Ans: d]

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{7}{5}$ (d) $\frac{8}{5}$

সমাধান: $\frac{2+3i}{2-i} = A + iB \Rightarrow \frac{(2+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = A + iB$

$\Rightarrow \frac{4+6i+2i+3i^2}{2^2-i^2} = A + iB \Rightarrow \frac{4+8i-3}{4+1} = A + iB \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i = A + iB \therefore B = \frac{8}{5}$

03. $z = \frac{(-4+3i)}{i}$ এর কাল্পনিক অংশ- [DU'18-19] [Ans: b]

(a) 3 (b) 4 (c) -4 (d) -3

সমাধান: $z = \frac{-4+3i}{i} = -\frac{4}{i} + 3 = -\frac{4i}{i^2} + 3 = -\frac{4i}{-1} + 3 = 4i + 3$ ∴ কাল্পনিক অংশ = 4।

04. যদি $z_1 = 1 + i$ এবং $z_2 = 1 - i$ হয়, তাহলে $z_1 z_2$ এর মান হবে- [CU'18-19] [Ans: b]

(a) জটিল সংখ্যা (b) বাস্তব সংখ্যা (c) অবাস্তব সংখ্যা (d) কাল্পনিক সংখ্যা

সমাধান $z_1 z_2 = (1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$ অর্থাৎ, বাস্তব সংখ্যা।

Type-02: জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

➢ মডুলাস: মডুলাস হলো মূলবিন্দু থেকে কোনো জটিল সংখ্যার প্রতিরূপী বিন্দুর দূরত্ব।

প্রকাশ: mod (z), |z|, r

➢ আর্গুমেন্ট: কোনো জটিল সংখ্যা বাস্তব অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ঐ জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট বলে।

প্রকাশ: θ, arg (z)

$z = x + iy$ একটি জটিল সংখ্যা হলে তার মডুলাস, $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r}$

আর্গুমেন্ট ২ প্রকার: (i) মুখ্য আর্গুমেন্ট (Principal argument) (ii) সাধারণ আর্গুমেন্ট (General argument)

(i) মুখ্য আর্গুমেন্ট (Principal argument): বাস্তব অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কোনো জটিল সংখ্যা যে ক্ষুদ্রতম কোণ উৎপন্ন করে তাকে মুখ্য আর্গুমেন্ট বলে।

সীমা: $-\pi < x \leq \pi$; [আমরা আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে বললে মুখ্য আর্গুমেন্টই নির্ণয় করবো]

(ii) সাধারণ আর্গুমেন্ট (General argument): মুখ্য আর্গুমেন্ট ব্যতীত বাকি সব আর্গুমেন্টই সাধারণ আর্গুমেন্ট।

♦ মুখ্য আর্গুমেন্ট নির্ণয়:

(i) প্রথম চতুর্ভাগে (1st Quadrant) $\boxed{\arg(z) = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

(ii) দ্বিতীয় চতুর্ভাগে (2nd Quadrant) $\boxed{\arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

(iii) তৃতীয় চতুর্ভাগে (3rd Quadrant) $\boxed{\arg(z) = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

(iv) চতুর্থ চতুর্ভাগে (4th Quadrant) $\boxed{\arg(z) = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

(v) অক্ষদ্বয়ের উপরে থাকলে: $a > 0$ হলে,

a এর মুখ্য আর্গুমেন্ট = 0; ai এর মুখ্য আর্গুমেন্ট = $\frac{\pi}{2}$; $-a$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট = π; $-ai$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট = $-\frac{\pi}{2}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

- জটিল সংখ্যার গুণফল, ভাগফল ও ঘাত:

দুইটি জটিল সংখ্যার গুণফল	দুইটি জটিল সংখ্যার ভাগফল	জটিল সংখ্যার n তম ঘাত
$z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ এবং $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ হলে, $z_1z_2 = \underbrace{r_1r_2}_{\text{গুণফলের মডুলাস}}\, e^{\underbrace{i(\theta_1+\theta_2)}_{\text{গুণফলের আর্গুমেন্ট}}}$ $\therefore \lvert z_1z_2\rvert = \lvert z_1\rvert.\lvert z_2\rvert = r_1.r_2$ $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ [যেমন, $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$] $= \theta_1 + \theta_2$	$\frac{z_1}{z_2} = \underbrace{\frac{r_1}{r_2}}_{\text{ভাগফলের মডুলাস}}\, e^{\underbrace{i(\theta_1-\theta_2)}_{\text{ভাগফলের আর্গুমেন্ট}}}$ $\therefore \left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert} = \frac{r_1}{r_2}$ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ [যেমন, $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$] $= \theta_1 - \theta_2$	$z^n = \underbrace{r^n}_{\text{n তম ঘাতের মডুলাস}}\, e^{i\,\underbrace{n\theta}_{\text{n তম ঘাতের আর্গুমেন্ট}}}$ $\therefore$ (i) $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n = r^n$ (ii) $\arg(z^n) = n\arg(z)$ [যেমন, $\log_a M^N = \log_a M] = n\theta$

$z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$; [অয়লারের সূত্র: $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$]

MCQ

01. $\frac{5-i}{2-3i}$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট কত হবে? **[CU'23-24] [Ans: d]**

(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

সমাধান: $\frac{5-i}{2-3i} = \frac{(5-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{10-2i+15i-3i^2}{2^2-3^2i^2} = \frac{10+13i+3}{4+9} = \frac{13+13i}{13} = 1+i$

$\therefore \arg\left(\frac{5-i}{2-3i}\right) = \arg(1+i) = \tan^{-1}\left\lvert\frac{1}{1}\right\rvert = \frac{\pi}{4}$

বিকল্প: আর্গুমেন্ট $= -\tan^{-1}\left\lvert-\frac{1}{5}\right\rvert - \left\{-\tan^{-1}\left\lvert-\frac{3}{2}\right\rvert\right\} = -\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{3}{2} = \tan^{-1}\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}\frac{3}{2}} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$

02. $-1+i$ এর আর্গুমেন্ট কোনটি? **[JU'23-24, 18-19, 14-15] [Ans: b]**

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{3\pi}{4}$ (c) $\frac{5\pi}{4}$ (d) $\frac{7\pi}{4}$

সমাধান: $\arg(-1+i) = \pi - \tan^{-1}\left\lvert\frac{1}{-1}\right\rvert = \frac{3\pi}{4}$

03. $(3\sqrt{3}-3i)(-3\sqrt{3}+9i)$ এর মডুলাস =? **[GST'22-23] [Ans: c]**

(a) $54\sqrt{3}$ (b) $27\sqrt{3}$ (c) $36\sqrt{3}$ (d) $45\sqrt{3}$

সমাধান: $z_1 = 3\sqrt{3}-3i$ এর মডুলাস, $r_1 = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = 6$

$z_2 = -3\sqrt{3}+9i$ এর মডুলাস, $r_2 = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + 9^2} = 6\sqrt{3}$

$\therefore z_1z_2$ এর মডুলাস, $r_1r_2 = 6\times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

বিকল্প: $\lvert(3\sqrt{3}-3i)(-3\sqrt{3}+9i)\rvert = \lvert3(\sqrt{3}-i)\cdot 3\sqrt{3}(-1+\sqrt{3}i)\rvert$

$= 9\sqrt{3}\lvert(\sqrt{3}-i)(-1+\sqrt{3}i)\rvert = 9\sqrt{3}\lvert\sqrt{3}-i\rvert\lvert-1+\sqrt{3}i\rvert$

$= (9\sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 9\sqrt{3}\cdot 2\cdot 2 = 36\sqrt{3}$

04. $\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}$ এর আর্গুমেন্ট কত? **[RU'22-23] [Ans: d]**

(a) $60°$ (b) $\tan^{-1}3$ (c) $30°$ (d) $45°$

সমাধান: $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}}{3+1} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{4} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ (প্রথম চতুর্ভাগ)

$\therefore \arg(z) = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30°$

বিকল্প: $\arg\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}\right) = \arg(1+\sqrt{3}i) - \arg(\sqrt{3}+i) = 60° - 30° = 30°$

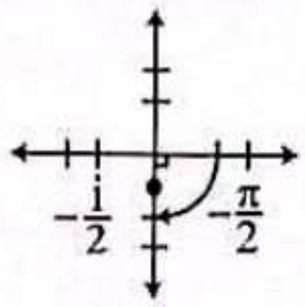
POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

05. $\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4}$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট হবে- [CU'22-23] [Ans: d]

(a) π (b) $-\pi$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $-\frac{\pi}{2}$

সমাধান: $\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4} = \frac{(i^2+2i+1)}{(i^2-2i+1)(i^2-2i+1)} = \frac{2i}{(-2i)(-2i)} = \frac{2i}{-4} = -\frac{i}{2}$ ∴ আগুমেন্ট $= -\frac{\pi}{2}$



06. $\frac{i-2i^{-1}}{1-i^{-1}}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট কত হবে? [RU'20-21] [Ans: a]

(a) $\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3\pi}{4}$ (c) $\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-\pi}{4}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{8}$

সমাধান: $\frac{i-\frac{2}{i}}{1-\frac{1}{i}} = \frac{-1-2}{i-1} = \frac{-3(i+1)}{(i-1)(i+1)} = \frac{-3(i+1)}{i^2-1} = \frac{-3(i+1)}{-1-1} = \frac{3}{2}(1+i)$

∴ আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{4}$, মডুলাস $= \frac{3}{2}\sqrt{1^2+1^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

বিকল্প: $\frac{i-2i^{-1}}{1-i^{-1}} = \frac{i+2i}{1+i} = \frac{3i}{1+i} = \frac{3i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3}{2}i(1-i) = \frac{3}{2}(1+i)$

07. $\frac{1+i}{1-i}$ এর পরম মান হলো- [DU'19-20] [Ans: b]

(a) 0 (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) i

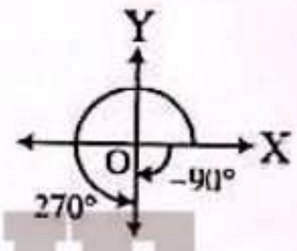
সমাধান: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{2} = i$

∴ $\frac{1+i}{1-i}$ এর পরম মান $= \text{mod}(i) = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

08. $-2i$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট হবে- [RU'19-20] [Ans: b]

(a) 90° (b) 270° (c) 120° (d) 300°

সমাধান: $-2i = 0 - 2.i$ ∴ আর্গুমেন্ট $= -90°$ (মুখ্য আর্গুমেন্ট) অথবা 270° (সাধারণ আর্গুমেন্ট)



09. যদি $z_1 = 1 - i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ হয় তবে $\frac{z_2}{z_1}$ এর নতি- [DU'17-18] [Ans: a]

(a) $\frac{5\pi}{12}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $-\frac{\pi}{4}$ (d) $-\frac{5\pi}{12}$

সমাধান: $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$ ∴ $\frac{z_2}{z_1}$ এর নতি $= (z_2$ এর নতি$) - (z_1$ এর নতি$)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \tan^{-1}(-1) = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$

10. $z_1 = 1 + i$ এবং $z_2 = 2 + i$ হলে, $z_1 z_2$ এর মডুলাস- [RU'17-18] [Ans: d]

(a) $\tan^{-1} 2$ (b) $2\sqrt{5}$ (c) $5\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{10}$

সমাধান: $\text{mod}(z_1 z_2) = \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$; $[\text{mod}(z_1) = \sqrt{2}, \text{mod}(z_2) = \sqrt{5}]$

11. $1 - \frac{1}{1-\frac{1}{1+i}}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট কোনটি? [KU'17-18] [Ans: b]

(a) 1, 0 (b) $1, \frac{\pi}{2}$ (c) $1, \pi$ (d) $1, \frac{3\pi}{2}$

সমাধান: $1 - \frac{1}{1-\frac{1}{1+i}} = 1 - \frac{1}{\frac{i}{1+i}} = 1 - \frac{1+i}{i} = \frac{-1}{i} = \frac{-i}{i^2} = \frac{-i}{-1} = i$

∴ মডুলাস $= \sqrt{0^2+(1)^2} = 1$ এবং আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Written

01. $-1-i$ জটিল সংখ্যাটির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। [RU'19-20]

সমাধান: $Z=-1-i \therefore$ মডুলাস $=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\therefore$ আর্গুমেন্ট $=-\pi+\tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$ **(Ans.)**

Type-03: মূল সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

◆ বর্গমূল: $b>0$ হলে, $\left.\begin{matrix}\sqrt{a+ib}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{r+a}+i\sqrt{r-a}]\\ \sqrt{a-ib}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{r+a}-i\sqrt{r-a}]\end{matrix}\right\}$ যেখানে, $r=\sqrt{a^2+b^2}$

◆ ঘনমূল: এককের ঘনমূলত্রয় যথাক্রমে $1, \omega, \omega^2$; (a) $\omega^3=1$ (b) $1+\omega+\omega^2=0$

[যেখানে, $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$] $\sqrt[3]{\text{রাশি}}=x$ ধরে সমস্যাগুলোকে সমাধান করা যায়।

❖ **Shortcut:** ঘনমূল

$\sqrt[3]{a^3}=a, a\omega, a\omega^2$; $\sqrt[3]{-a^3}=-a, -a\omega, -a\omega^2$; $\sqrt[3]{a^3i}=-ai, -ai\omega, -ai\omega^2$; $\sqrt[3]{-a^3i}=ai, ai\omega, ai\omega^2$

◆ চতুর্মূল: $\sqrt[4]{\text{রাশি}}=x$ ধরে সমস্যাগুলোকে সমাধান করতে হবে।

❖ **Shortcut:** (চতুর্মূল)

➢ $\sqrt[4]{a^4}=\pm a, \pm ai$ ➢ $\sqrt[4]{-a^4}=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

◆ ষড়মূল: $\sqrt[6]{1}=\pm1, \pm\omega, \pm\omega^2$; $\sqrt[6]{\text{রাশি}}=x$ ধরে সমস্যাগুলোকে সমাধান করতে হবে।

❖ **Shortcut:** (ষড়মূল)

➢ $\sqrt[6]{a^6}=\pm a, \pm a\omega, \pm a\omega^2$ ➢ $\sqrt[6]{-a^6}=\pm ai, \pm ai\omega, \pm ai\omega^2$

MCQ

01. $-3-4i$ এর বর্গমূল হবে- [CU'22-23] [Ans: b]

(a) $\pm(2-i)$ (b) $\pm(1-2i)$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ (d) 1

সমাধান: $\left.\begin{matrix}\sqrt{x+iy}=\pm\frac{\sqrt{r+x}+i\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{x-iy}=\pm\frac{\sqrt{r+x}-i\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\}$ যেখানে, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ এবং $y>0$

প্রশ্নমতে, $x=-3, y=-4 \therefore r=\sqrt{x^2+y^2}=5$

$\therefore \sqrt{-3-4i}=\pm\frac{\sqrt{r+x}-i\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{5+(-3)}-i\sqrt{5-(-3)}}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}}=\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}}\right)=\pm(1-2i)$

বিকল্প: $-3-4i=1-2\cdot1\cdot2i+2i^2=(1-2i)^2 \therefore \sqrt{-3-4i}=\pm(1-2i)$

02. যদি $z^2=5+12i$ হয় তবে z এর মান কত? [CU'21-22; 15-16] [Ans: d]

(a) $\pm4i$ (b) $\pm(1-2i)$ (c) $7i$ (d) $\pm(3+2i)$

সমাধান: $z^2=5+12i=9+12i-4=(3)^2+12i+(2i)^2=(3+2i)^2 \therefore z=\pm(3+2i)$

03. $x=\sqrt[3]{1}$ সমীকরণের মূল তিনটির গুণফল কত? [RU'19-20] [Ans: c]

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $x=\sqrt[3]{1}$ সমীকরণের তিনটি মূল $1, \omega, \omega^2 \therefore 1\times\omega\times\omega^2=\omega^3=1$

04. $\sqrt{2+8\sqrt{5}i}=?$ [JU'19-20] [Ans: a]

(a) $\pm(\sqrt{10}+\sqrt{8}i)$ (b) $\pm(\sqrt{8}+\sqrt{10}i)$ (c) $\pm(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)$ (d) $\pm(\sqrt{10}+\sqrt{4}i)$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

সমাধান: $r = \sqrt{2^2 + (8\sqrt{5})^2} = 18$; $\sqrt{2 + 8\sqrt{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{r+2} + i\sqrt{r-2})$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{18+2} + i\sqrt{18-2}) = \pm(\sqrt{10} + \sqrt{8}i)$

05. $-2i$ এর বর্গমূল কত? **[KU'19-20; JnU'17-18; JU'14-15; RU'07-08] [Ans: b]**

(a) $\pm(2-i)$ (b) $\pm(1-i)$ (c) $\pm(1+i)$ (d) $\pm(1-2i)$

সমাধান: $-2i = 1^2 + 2\cdot 1(-i) + (-i)^2 = (1-i)^2 \therefore \sqrt{-2i} = \pm(1-i)$

06. $\sqrt[4]{1}$ এর মান কত? **[RU'17-18] [Ans: a]**

(a) $i, -i, 1, -1$ (b) $i, -i, 2, -2$ (c) $i, -i, 3, -3$ (d) $1, -1, -2, 2$

সমাধান: ধরি, $\sqrt[4]{1} = x \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow (x^2)^2 - 1^2 = 0 \Rightarrow (x^2+1)(x^2-1) = 0$

হয়, $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ | অথবা, $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x = \pm i$

$\therefore \sqrt[4]{1} = 1, -1, i, -i$

Shortcut: $\sqrt[4]{a^4} = \pm a, \pm ai; \therefore \sqrt[4]{1} = \pm 1, \pm i$

07. i-এর বর্গমূল কোনটি? **[RU'14-15] [Ans: a]**

(a) $\pm\frac{\sqrt{2}}{1-i}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ (c) $\pm\frac{\sqrt{2}}{1+i}$ (d) $\pm\sqrt{2}(1-i)$

সমাধান: $\frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i \ \therefore i = \frac{(1+i)^2}{2} \Rightarrow \sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{1-i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{1-i}$

বিকল্প: i এর মডুলাস, $r = 1$

$\therefore \sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+0} + i\sqrt{1-0}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(1+i)(1-i)}{(1-i)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-i^2}{1-i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{1-i}$

08. i-এর ঘনমূলগুলির দুইটির মান $\frac{1}{2}(i \pm \sqrt{3})$ হলে অপরটির মান- **[CU'14-15] [Ans: c]**

(a) i (b) 1 (c) $-i$ (d) -1

সমাধান: ধরি, $\sqrt[3]{i} = x \Rightarrow x^3 = i \Rightarrow x^3 + i^3 = 0 \Rightarrow (x+i)(x^2 - ix - 1) = 0 \therefore x = -i$

09. $\sqrt{i} + \sqrt{-i}$ এর মান কত? **[JnU'14-15, 11-12; RU'11-12, 10-11; CU'07-08] [Ans: d]**

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) $\sqrt{2}$

সমাধান: $\sqrt{i} = \sqrt{\frac{2i}{2}} = \sqrt{\frac{(1+i)^2}{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \ \therefore \sqrt{i} + \sqrt{-i} = \frac{1+i+1-i}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

10. $\sqrt[4]{-64}$ এর মান কত? **[CU'11-12; RU'06-07] [Ans: b]**

(a) $2i(1 \pm i)$ (b) $\pm 2(1 \pm i)$ (c) $i^4(1 \pm i^2)$ (d) 1 ± 8

সমাধান: ধরি, $\sqrt[4]{-64} = x \Rightarrow x^4 = -64 \Rightarrow x^4 + 64 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - (8i)^2 = 0 \Rightarrow (x^2+8i)(x^2-8i) = 0$

$\therefore x^2 + 8i = 0 \Rightarrow x^2 - (2\sqrt{2}i)^2 = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}i$; যা প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

অথবা, $x^2 - 8i = 0 \Rightarrow x^2 = 8i \Rightarrow x = \pm\sqrt{8i} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}\sqrt{i} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)\right\}$

$\Rightarrow x = \pm 2(1 \pm i)$ এখানে, $\sqrt{i} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \therefore \sqrt[4]{-64} = \pm 2(1 \pm i)$

বিকল্প: $\sqrt[4]{-64} = \sqrt{\pm 8i} = \pm 2\sqrt{2}\left(\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}\right) = \pm 2(1 \pm i)$

Shortcut: $\sqrt[4]{-64} = \sqrt[4]{-(2\sqrt{2})^4} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(1 \pm i) = \pm 2(1 \pm i)$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-04: i এর ঘাতের মান নির্ণয় এবং ধারা সংক্রান্ত

১ **Formula & Concept:**

(i) $i^{4n+1} = i^1 = i$, $i^{4n+2} = i^2 = -1$, $i^{4n+3} = i^3 = -i$, $i^{4n} = i^4 = 1$, $i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$

(ii) a, b, c, d চারটি ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা হলে, $i^a + i^b + i^c + i^d = 0$

(iii) a ও b দুইটি ক্রমিক বিজোড় সংখ্যা হলে, $i^a + i^b = 0$

(iv) a ও b দুইটি ক্রমিক জোড় সংখ্যা হলে, $i^a + i^b = 0$

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

MCQ

01. $i = \sqrt{-1}$ হলে $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots\ldots\ldots + i^{39}$ এর মান কত? [GST'23-24] [Ans: c]

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) i

সমাধান: এখানে, $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots\ldots\ldots + i^{39}$

$i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \ldots\ldots\ldots + i^{39}$

পদ সংখ্যা, $n = \frac{39-0}{1} + 1 = 40$ ∴ 4টি করে পদ যোগ করলে 0 আসবে। 40টি পদের যোগফল 0।

02. $i^2 = -1$ হলে $\sum_{k=0}^{100} i^k$এর মান কোনটি? [RU'23-24] [Ans: a]

(a) 1 (b) $-i$ (c) i (d) 0

সমাধান: $i^2 = -1; \sum_{k=0}^{k=100} i^k = i^0 + i^1 + i^2 + \ldots\ldots\ldots + i^{100} = 1 + i + i^2 + \ldots\ldots\ldots + i^{100}$

$= 1; [\because i + i^2 + \ldots\ldots\ldots + i^{100} = 0]$

03. $i^2 = -1$ হলে, $\frac{i-i^{-1}}{i+2i^{-1}}$ এর মান কত? [RU'22-23, 21-22; DU'14-15; Agri.'20-21] [Ans: a]

(a) -2 (b) 2 (c) 1 (d) -1

সমাধান: $\frac{i-i^{-1}}{i+2i^{-1}} = \frac{i-\frac{1}{i}}{i+\frac{2}{i}} = \frac{i^2-1}{i^2+2} = \frac{-1-1}{-1+2} = -2$

বিকল্প: $\frac{i-i^{-1}}{i+2i^{-1}} = \frac{i+i}{i-2i} = \frac{2i}{-i} = -2$

04. যদি $i^2 = -1$ হয়, $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{23}$ এর মান কত? [Agri.'20-21] [Ans: a]

(a) -1 (b) i (c) $-i$ (d) 1

সমাধান: $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{23} = \underbrace{1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{23}}_{\text{এর মান}=0} - 1 = -1$

05. i^{4n+3} এর মান কোনটি? [JU'18-19] [Ans: b]

(a) -1 (b) $-i$ (c) 1 (d) i

সমাধান: $i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = (i^4)^n \cdot (-i) = 1^n \cdot (-i) = -i$

06. $\sqrt{-16} \times \sqrt{-1}$ = কোনটি? [JU'16-17] [Ans: b]

(a) 4 (b) -4 (c) ± 4 (d) 4i

সমাধান: $\sqrt{-16} \times \sqrt{-1} = 4i \times i = -4$

Type-05: ω এর ঘাতের মান নির্ণয় এবং ω এর ধারা সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

(i) $\omega^{3n+1} = \omega^{3n} \cdot \omega^1 = (\omega^3)^n \cdot \omega^1 = 1^n \cdot \omega = \omega$

(ii) $\omega^{3n+2} = \omega^{3n} \cdot \omega^2 = 1 \cdot \omega^2 = \omega^2$

(iii) $\omega^{3n} = (\omega^3)^n = 1^n = 1$

∴ ω এর ঘাতকে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ থাকলে ω এর ঘাতের মান = $\omega^{\text{ভাগশেষ}}$

অর্থাৎ, $\omega^p = \omega^q$ [যখন, q হলো p কে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ]

আবার, $1 + \omega + \omega^2 = 0$

অর্থাৎ, a, b, c তিনটি ক্রমিক সংখ্যা হলে, $\omega^a + \omega^b + \omega^c = 0$

MCQ

01. যদি $\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ এবং $\beta = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ হয়, তবে এদের সম্পর্ক কী? [GST'21-22] [Ans: b]

(a) $\alpha = -\beta^2$ (b) $\alpha = \beta^2$ (c) $\alpha^3 = 1 - \beta^3$ (d) $\alpha^3 = 1 + \beta^3$

সমাধান: আমরা জানি, 1 এর জটিল ঘনমূলদ্বয় $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$. এখানে, $\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \omega$ হলে, $\beta = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \omega^2$

এখন, $\beta^2 = (\omega^2)^2 = \omega^4 = \omega^3 \cdot \omega = 1 \cdot \omega = \omega = \alpha \therefore \alpha = \beta^2$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

02. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে $1+\omega^2+\omega^4+\cdots+\omega^{16}$ এর মান হবে- [RU'19-20] [Ans: a]
(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) ω^2
সমাধান: $1+\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8+\omega^{10}+\omega^{12}+\omega^{14}+\omega^{16}$
$=1+\omega^2+\omega+1+\omega^2+\omega+1+\omega^2+\omega=0+0+0=0$ $[1+\omega+\omega^2=0]$

Type-06: ω যুক্ত রাশির মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

Formula & Concept: $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ [যেখানে, ω এবং ω^2 হলো এককের দুইটি জটিল ঘনমূল]
- $\omega^3=1$
- $1+\omega+\omega^2=0$
- $\omega^{3n+x}=\omega^{3n}\cdot\omega^x=\omega^x$

MCQ

01. 1 এর একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $\omega^{16}+\omega^{32}=?$ [DU'23-24] [Ans: c]
(a) 1 (b) 2 (c) -1 (d) -2
সমাধান: এখানে, 1 এর একটি ঘনমূল ω; এখন, $\omega^{16}+\omega^{32}=\omega^{15}\cdot\omega^1+\omega^{30}\cdot\omega^2$
$=(\omega^3)^5\cdot\omega^1+(\omega^3)^{10}\cdot\omega^2=1^5\cdot\omega+1^{10}\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$; [$\because 1+\omega+\omega^2=0$ এবং $\omega^3=1$]
বিকল্প: $\omega^{16}+\omega^{32}=\omega^1+\omega^2=-1$; [এখানে, ω এর ঘাতে থাকা 3 এর গুণিতক সংখ্যাগুলো কেটে দিতে পারি।]

02. $1+\omega^{19999}+\omega^{15558}=?$ [GST'23-24] [Ans: d]
(a) 0 (b) -1 (c) $1+2\omega$ (d) $2+\omega$
সমাধান: $1+\omega^{19999}+\omega^{15558}=1+\omega^{19998+1}+\omega^{15558}=1+\omega^{19998}\cdot\omega+\omega^{15558}$
$=1+(\omega^3)^{6666}\cdot\omega+(\omega^3)^{5186}=1+1\cdot\omega+1=2+\omega$
Shortcut: ω এর ঘাত এ 3 ও 3 এর গুণিতক এবং যাদের যোগ করলে 3 বা 3 এর গুণিতক হয় তাদের কেটে দিতে হবে।
তাহলে, $\omega^{19999}=\omega^1$ এবং $\omega^{15558}=\omega^0=1[\because 1+5+5+5+8=24]$
$\therefore 1+\omega^{19999}+\omega^{15558}=1+\omega+1=2+\omega$

03. ω এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল হলে, $(1+\omega)^3$ এর মান কত? [RU'22-23] [Ans: b]
(a) 1 (b) -1 (c) $-\omega^2$ (d) ω^2
সমাধান: $(1+\omega)^3=(-\omega^2)^3=-(\omega^6)=-1$; [$\because$ যেহেতু $\omega^3=1$]

04. ω যদি এককের একটি জটিল ঘনমূল হয়, তবে $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)$ এর মান কোনটি? [JU'22-23] [Ans: a]
(a) 4 (b) 6 (c) 3 (d) 2
সমাধান: $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega+\omega^4)=\{(1+\omega^2)-\omega\}\{(1+\omega^3\cdot\omega)-\omega^2\}$
$=(-\omega-\omega)\{(1+\omega)-\omega^2\}=-2\omega(-\omega^2-\omega^2)=(-2\omega)(-2\omega^2)=4\omega^3=4$

05. অসমান x ও y এর যে কোনো একটির বর্গ অপরটির সমান হলে সম্পর্কটি- [GST'21-22] [Ans: d]
(a) $x=y-1$ (b) $x=y+2$ (c) $x=-y+2$ (d) $x=-y-1$
সমাধান: আমরা জানি, এককের জটিল ঘনমূলদ্বয় হলো ω ও ω^2। অর্থাৎ, একে অপরের বর্গ, তাই x ও y মূলত ω ও ω^2 কে নির্দেশ করে। আমরা জানি, $\omega+\omega^2+1=0\Rightarrow x+y+1=0\therefore x=-y-1$

06. $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং $y=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হলে, x^2+xy+y^2 এর মান- [DU'18-19] [Ans: a]
(a) 0 (b) 2 (c) $1+\sqrt{3}$ (d) 1
সমাধান: $x=\omega,\ y=\omega^2\ \therefore x^2+xy+y^2=\omega^2+\omega^3+\omega^4=\omega^2+1+\omega=0$

07. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)$ এর মান- [DU'15-16; RU'06-07] [Ans: d]
(a) 18 (b) 6 (c) -9 (d) 9
সমাধান: $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$
$=\{(1-\omega)(1-\omega^2)\}^2=(1-\omega-\omega^2+\omega^3)^2=(1-(\omega+\omega^2)+1)^2=(1+1+1)^2=9$; [$\because \omega+\omega^2=-1$]

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-07: শর্তাধীনে মান নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

এক্ষেত্রে জটিল সংখ্যার ধর্মগুলো ব্যবহার করতে হবে।

♦ জটিল সংখ্যার ধর্ম:

(i) $x + iy = 0$ হলে, $x = 0, y = 0$

(ii) দুইটি জটিল সংখ্যা $x_1 + iy_1$ ও $x_2 + iy_2$ সমান হবে যদি ও কেবল যদি $x_1 = x_2$ ও $y_1 = y_2$ হয়।

(iii) দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $x + iy$ ও $x - iy$ এর সমষ্টি এবং গুণফল বাস্তব সংখ্যা।

(iv) অনুবন্ধী নয় এরূপ দুইটি জটিল সংখ্যা $x_1 + iy_1$ ও $x_2 + iy_2$ $(y_1 \neq -y_2)$ এর সমষ্টি, বিয়োগফল, গুণফল এবং ভাগফল প্রত্যেকটিই জটিল সংখ্যা হবে।

(v) $z = x + iy$ জটিল সংখ্যা এবং n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে z^n জটিল সংখ্যা হবে।

♦ অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার কিছু ধর্ম:

(i) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ (ii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ (iii) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

(iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (v) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

MCQ

01. $(1 + i)(x + iy) = 2 + 4i$ হলে, '5x' এর মান কোনটি? **[CU'23-24] [Ans: d]**

(a) 11 (b) 13 (c) 14 (d) 15

সমাধান: $x + iy = \frac{2+4i}{1+i} = \frac{(2+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+4i-2i-4i^2}{1-i^2} = \frac{2+2i+4}{1+1} = \frac{6+2i}{2} = 3 + i$

$\therefore (x, y) = (3, 1) \therefore 5x = 3 \times 5 = 15$

02. $i = \sqrt{2}y - 1$ হলে $y^8 =$ কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: d]**

(a) i (b) $-i$ (c) -1 (d) 1

সমাধান: $i = \sqrt{2}y - 1 \Rightarrow y = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow y^2 = \frac{(1+i)^2}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{1+2i+i^2}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{1+2i-1}{2} \Rightarrow y^2 = i$

$\therefore y^8 = (y^2)^4 = i^4 = 1$

03. $x + iy = \sqrt{\frac{p+iq}{r+iq}}$ হলে, $(x^2 + y^2)^2 =$ কত? **[RU'22-23] [Ans: c]**

(a) $\frac{p^2-q^2}{r^2+q^2}$ (b) $\frac{p^2+q^2}{r^2-q^2}$ (c) $\frac{p^2+q^2}{r^2+q^2}$ (d) $\frac{p^2-q^2}{r^2-q^2}$

সমাধান: $|x + iy| = \left|\sqrt{\frac{p+iq}{r+iq}}\right| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \left(\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{r^2+q^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = \frac{p^2+q^2}{r^2+q^2}$

04. $\sqrt{p + 4i} = q + i$ হলে, $p - q$ এর মান কত? **[GST'20-21] [Ans: b]**

(a) 0 (b) 1 (c) 3 (d) 5

সমাধান: $\sqrt{p + 4i} = q + i \Rightarrow p + 4i = (q + i)^2 = q^2 + i^2 + 2qi \Rightarrow p + 4i = q^2 - 1 + i \cdot 2q$

এখন, $2q = 4 \Rightarrow q = 2$; $p = q^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3 \therefore p - q = 3 - 2 = 1$

05. $z = 8 + 3i$ হলে, $z + \bar{z}$ এর মান কত? **[JU'19-20] [Ans: c]**

(a) 8 (b) 12 (c) 16 (d) 20

সমাধান: এখানে, $z = 8 + 3i \therefore \bar{z} = 8 - 3i \therefore z + \bar{z} = 8 + 3i + 8 - 3i = 16$

06. $a + ib = 4 - i$ হলে, $a^2 - b^2$ এর মান কত? **[JU'19-20] [Ans: d]**

(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 15

সমাধান: $a = 4$; $b = -1 \because a^2 - b^2 = 4^2 - (-1)^2 = 16 - 1 = 15$; [সহগ সমীকৃত করে]

07. যদি $\frac{1}{a+i} = \frac{i}{a-i}$ হয়, তবে a এর মান কত? **[DU'16-17] [Ans: c]**

(a) 1 (b) $\frac{i}{2}$ (c) -1 (d) $-\frac{i}{2}$

সমাধান: $\frac{1}{a+i} = \frac{i}{a-i} \Rightarrow a - i = ia + i^2 \Rightarrow a - i = -1 + ai$, বাস্তব অংশের সহগ সমীকৃত করে, $a = -1$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

08. $1 + x^2C^2 = 0$ হলে, C এর মান কত? [CU'16-17] [Ans: c]

(a) $ix, \frac{i}{x}$ (b) $\pm\frac{1}{x}$ (c) $\pm\frac{i}{x}$ (d) $\pm ix$

সমাধান: $C^2 = \frac{-1}{x^2} = \left(\frac{i}{x}\right)^2 \therefore C = \pm\frac{i}{x}$

09. $z_1 = a + ib$ হলে, z এর কোন মানের জন্য $z_1 z = 1$ হবে? [CU'16-17] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{a^2+b^2}(a+ib)$ (b) $\frac{1}{|a+ib|^2}(a-ib)$ (c) $\frac{1}{|a+ib|}(a-ib)$ (d) $\frac{a}{a^2+b^2} \pm \frac{b}{a^2+b^2}$

সমাধান: $z_1 z = 1$; $z = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{|a+ib|^2}(a-ib)$

10. $x = -1 + i\sqrt{2}$ হলে, $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = ?$ [RU'15-16] [Ans: a]

(a) 3 (b) 5 (c) 7 (d) 1

সমাধান: $x = -1 + i\sqrt{2} \Rightarrow x + 1 = i\sqrt{2} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$

এখন, $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = x^2(x^2 + 2x + 3) + 2x(x^2 + 2x + 3) - (x^2 + 2x + 3) + 3$

$= x^2 \times 0 + 2x \times 0 - 0 + 3 = 3$

11. $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$ এবং x, a ও b বাস্তব হলে, নিচের কোনটি সঠিক? [RU'15-16] [Ans: a]

(a) $a^2 + b^2 = 1$ (b) $a^2 - b^2 = 1$ (c) $a^2 + b^2 = -1$ (d) $a^2 + b^2 = 0$

সমাধান: $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib \Rightarrow \left|\frac{1-ix}{1+ix}\right| = |a - ib| \Rightarrow \frac{\sqrt{1^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{a^2 + b^2} \therefore a^2 + b^2 = 1$

12. $\sqrt[3]{x + iy} = p + iq$ হলে, কোনটি সত্য? [RU'14-15] [Ans: b]

(a) $4(p^2 + q^2) = \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$ (b) $4(p^2 - q^2) = \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$ (c) $4(p^2 - q^2) = \frac{x}{p} - \frac{y}{q}$ (d) $4(p^2 + q^2) = \frac{x}{p^2} + \frac{y}{q^2}$

সমাধান: $\sqrt[3]{x + iy} = p + iq \Rightarrow x + iy = p^3 + 3p^2 \cdot iq - 3pq^2 - iq^3$

$\Rightarrow x + iy = (p^3 - 3pq^2) + i(3p^2q - q^3) \therefore x = p^3 - 3pq^2$

$y = 3p^2q - q^3 \Rightarrow \frac{x}{p} = p^2 - 3q^2 \ldots\ldots\ldots (i) \Rightarrow \frac{y}{q} = 3p^2 - q^2 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) যোগ করে, $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 4(p^2 - q^2)$

Type-08: জটিল সংখ্যাভিত্তিক সঞ্চারপথ সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

$z = x + iy$ কোনো জটিল সংখ্যা হলে-

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow (0, 0)$ বিন্দু হতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব।

$|z - 3| = |x + iy - 3| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \rightarrow (3, 0)$ বিন্দু হতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব।

(i) $|z + a| = |z + b|$ সরলরেখা নির্দেশ করে।

(ii) $|z + a| = k$ বৃত্ত নির্দেশ করে।

(iii) $|az + k_1| = |bz + k_2|$ বৃত্ত নির্দেশ করে।

(iv) $\left|\frac{z+a}{z+b}\right| = k$; $k = 1$ হলে সরলরেখা নির্দেশ করে।

(v) $z\bar{z} = 0$ বিন্দু বৃত্ত নির্দেশ করে এবং $z\bar{z} = k$ বৃত্ত নির্দেশ করে।

(vi) $|z - a| + |z - b| = k$; যদি $|a - b| < k$ তাহলে এটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে। ; [k = প্রধান অক্ষের বা বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য]

(vii) $|z - a| - |z - b| = k$; যদি $|a - b| > k$ তাহলে এটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করে। ; [যেখানে a, b, k হলো বাস্তব ধ্রুবক সংখ্যা এবং k = আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য]

- $|z + a| + |z - a| = 2b$ উপবৃত্তের সমীকরণ হবে যদি $a < b$ হয়।
- $|z + a| - |z - a| = 2b$ অধিবৃত্তের সমীকরণ হবে যদি $a > b$ হয়।

এদের উপকেন্দ্র $(\pm a, 0)$, বৃহৎ/আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

MCQ

01. $|z-3|=1$ দ্বারা প্রকাশিত বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ কত? [CU'22-23] [Ans: c]

(a) (5,0), 3 একক (b) (0,0), 1 একক (c) (3,0), 1 একক (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $|z-3|=1 \Rightarrow |(x-3)+iy|=1$ [যেখানে $z=x+iy$] $\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2}=1$

$\therefore (x-3)^2+(y-0)^2=1^2$ অর্থাৎ, কেন্দ্র (3,0) এবং ব্যাসার্ধ 1 একক।

Shortcut: $|z+a|=k$ দ্বারা প্রকাশিত বৃত্তের ক্ষেত্রে- $|(x+a)+iy|=k \Rightarrow \sqrt{(x+a)^2+y^2}=k^2$

$\Rightarrow (x+a)^2+(y-0)^2=k^2$ অর্থাৎ, কেন্দ্র হবে $(-a,0)$ এবং ব্যাসার্ধ হবে k

$|z-3|=1$ এর জন্য $a=-3$ এবং $k=1$

অর্থাৎ, কেন্দ্র (3,0) এবং ব্যাসার্ধ 1 একক

02. যদি $z=x+iy$ হয়, তবে $|2z-1|=|z-2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ হবে কোনটি? [KU'19-20] [Ans: c]

(a) অধিবৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) একক বৃত্ত (d) পরাবৃত্ত

সমাধান: $z=x+iy \therefore |2z-1|=|z-2| \Rightarrow |2(x+iy)-1|=|x+iy-2|$

$\Rightarrow \sqrt{(2x-1)^2+(2y)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2} \Rightarrow 4x^2+1-4x+4y^2=x^2+4+y^2-4x$

$\Rightarrow 3x^2+3y^2=3 \therefore x^2+y^2=1 \therefore$ সমীকরণটি একক বৃত্তের, কারণ ব্যাসার্ধ 1 একক।

Shortcut: কোনো জটিল সংখ্যা $z=x+iy$ এর জন্য $|az+k_1|=|bz+k_2|$ সর্বদা বৃত্ত নির্দেশ করে।

03. যদি $z=x+iy$ হয়, তবে $|z+i|=|\bar{z}+2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের নাম কি হবে? [KU'18-19] [Ans: a]

(a) সরলরেখা (b) বৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

সমাধান: $|z+i|=|\bar{z}+2| \Rightarrow |x+iy+i|=|x-iy+i| \Rightarrow |x+i(y+1)|=|x-i(y+1)|$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2+2y+1=x^2+4x+4+y^2$

$\Rightarrow 4x-2y+3=0$; যা সরলরেখার সঞ্চারপথ নির্দেশ করে।

04. $z=x+iy$ হলে, $|z-5|+|z+5|=16$ নির্দেশ করে- [DU'16-17; RU'13-14] [Ans: d]

(a) বৃত্ত (b) পরাবৃত্ত (c) অধিবৃত্ত (d) উপবৃত্ত

সমাধান: $|z-5|+|z+5|=16$ একটি বক্ররেখা যার প্রতিটি বিন্দুর $(-5,0)$ ও $(5,0)$ বিন্দু থেকে দূরত্বের যোগফল 16। কাজেই এটি একটি উপবৃত্ত যার উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm 5,0)$ ও বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য 16 একক।

Shortcut: $|z-a|+|z+a|=2b$ হলে এবং $a<b$ হলে এটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

$|z-5|+|z+5|=16$ সমীকরণে $a=5, b=8$

$\because 5<8 \therefore$ এটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

05. যদি $z=x+iy$ হয়, তাহলে $z\bar{z}=1$ সমীকরণটি হবে- [RU'16-17, 09-10; CU'06-07] [Ans: a]

(a) বৃত্ত (b) সরলরেখা (c) বিন্দু বৃত্ত (d) পরাবৃত্ত

সমাধান: $z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=1$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

"যখন সবকিছু আপনার বিরুদ্ধে যাচ্ছে বলে মনে হবে, মাথায় রাখবেন- উড়োজাহাজ বাতাসের প্রতিকূলেই উড্ডয়ন করে, অনুকূলে নয়।"
-Henry Ford

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery
Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

অধ্যায় ০৪

বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

➤ ভার্সিটি ভর্তি পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪	T-01	দ্বিঘাত সমীকরণের মূল নির্ণয় সংক্রান্ত	2	-	JU'14-15; JnU'14-15	-
✪✪✪	T-02	নিশ্চায়ক সম্পর্কিত সমস্যা	15	-	DU' 21-22; GST'22-23; RU'21-22, 14-15, 08-09; CU'23-24, 21-22 18-19; JU'23-24, 22-23, 18-19, 16-17, 14-15; Agri.'21-22, 19-20	-
✪✪✪	T-03	মূলদ্বয়ের মধ্যবর্তী সম্পর্ক হতে মান নির্ণয় সম্পর্কিত	32	3	DU'23-24, 15-16; GST'23-24, 20-21; RU'23-24, 21-22, 20-21, 17-18, 09-10, 08-09; CU'21-22, 20-21, 16-17, 14-15, 13-14; JU'21-22, 20-21, 19-20, 18-19, 17-18, 16-17, 14-15; Agri.' 19-20; SUST'19-20; KU'19-20, 18-19; JnU'13-14	DU'23-24, 21-22, 20-21
✪✪✪	T-04	মূল হতে সমীকরণ গঠন সম্পর্কিত সমস্যা	7	-	DU'13-14; RU'23-24, 20-21, 13-14; CU'22-23; JU'21-22,	-
✪	T-05	মূলদ্বয়ের অন্তর সংক্রান্ত	1	-	RU'15-16	-
✪✪✪	T-06	প্রতিসম রাশির মান নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা	9	1	DU'20-21, 16-17; RU'23-24, 22-23, 17-18; CU'22-23; JU'19-20, 15-16; Agri.'20-21	CU'12-13
✪✪✪	T-07	প্রতিসম মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয়	4	1	DU'18-19; RU'22-23, 21-22; JU'21-22	DU'22-23
✪✪✪	T-08	সাধারণ মূল সংক্রান্ত	7	-	GST'23-24; RU'14-15, 08-09; CU'23-24, 16-17; JU'12-13, 10-11	-
✪✪	T-09	একটি লেখচিত্র অক্ষদ্বয়কে কয়টি বিন্দুতে ছেদ করবে তা সংক্রান্ত	2	-	DU'18-19; GST'21-22	-
✪✪✪	T-10	দ্বিঘাত বহুপদী ফাংশনের সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মান সংক্রান্ত	3	1	RU'23-24, 21-22; JU'23-24	RU'12-13
✪✪✪	T-11	বিবিধ	8	-	RU'23-24, 22-23, 17-18; CU'16-17; JU'23-24, 19-20, 17-18	-

POLE MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-01: দ্বিঘাত সমীকরণের মূল নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

$ax^2 + bx + c = 0$ কোনো দ্বিঘাত সমীকরণ হলে এর মূলদ্বয় হবে, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

MCQ

01. $x^2 - 10x + 34 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো হলো- **[JU'14-15] [Ans: d]**

(a) $3 \pm i$ (b) $5 \pm i$ (c) $5 \pm 2i$ (d) $5 \pm 3i$

সমাধান: $x^2 - 10x + 34 = 0$; $\alpha = \frac{10+\sqrt{(10)^2-4\cdot1\cdot34}}{2} = 5 + 3i$

$\beta = \frac{10-\sqrt{(-10)^2-4\cdot34}}{2} = 5 - 3i$ [এক্ষেত্রে ১টি মূল বের করলেই অপরটি পাওয়া যায় (একে অপরের অনুবন্ধী)]

02. $9x^2 - 12x + 4 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে মূলদ্বয়ের অনুপাত $(\alpha : \beta)$ কত? **[JnU'14-15] [Ans: c]**

(a) 4 : 9 (b) 3 : 2 (c) 1 : 1 (d) 4 : 3

সমাধান: $9x^2 - 12x + 4 = 0$ এখানে, $\alpha = \frac{-(-12)-\sqrt{(-12)^2-4\cdot9\cdot4}}{2\cdot9} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{-(-12)+\sqrt{(-12)^2-4\cdot9\cdot4}}{2\cdot9}$

$\Rightarrow \beta = \frac{2}{3} \therefore \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1 : 1$

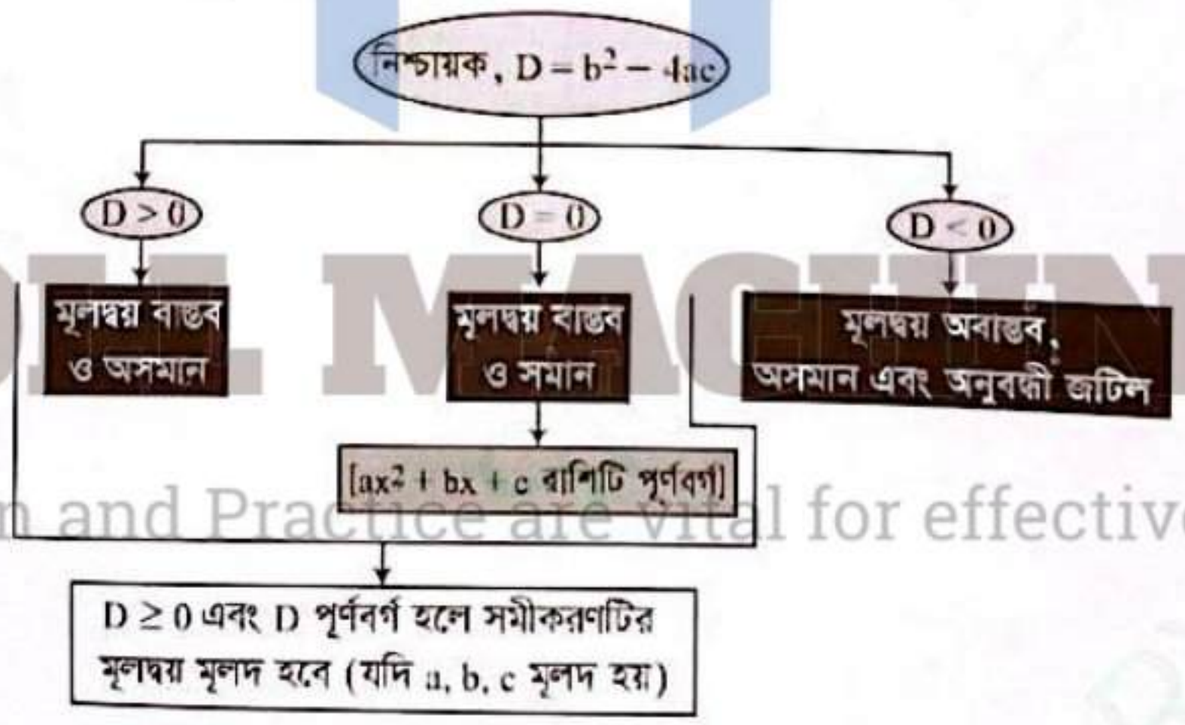
Shortcut: নিশ্চায়ক, $D = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$

নিশ্চায়ক শূন্য হওয়ায় মূল দুটি সমান। সুতরাং এদের অনুপাত হবে 1 : 1।

Type-02: নিশ্চায়ক সম্পর্কিত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

$ax^2 + bx + c = 0$ এর নিশ্চায়ক, $\boxed{D = b^2 - 4ac}$



POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. k এর মান কত হলে $x^2 + kx + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হবে? **[CU'23-24; Agri.'21-22; JU'14-15]**

(a) $-4 < k$ (b) $-1 < k < 1$ (c) $-2 < k < 2$ (d) $0 < k < 1$ **[Ans: c]**

সমাধান: সমীকরণটির নিশ্চায়ক $= k^2 - 4$ জটিল মূলের জন্য, $k^2 - 4 < 0 \Rightarrow k^2 < 4 \Rightarrow |k| < 2 \therefore -2 < k < 2$

02. $x^2 + 4x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো কি প্রকৃতির? **[CU'23-24] [Ans: a]**

(a) বাস্তব ও মূলদ (b) অবাস্তব ও অসমান (c) জটিল (d) অমূলদ ও সমান

সমাধান: $D = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4$, যা একটি ধনাত্মক পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

∴ মূলদ্বয় অসমান, বাস্তব ও মূলদ।

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

03. $x^2 - kx + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হলে, k এর মান কোনটি? [JU'23-24] [Ans: d]
(a) $-1 < k < 1$ (b) 6 (c) -6 (d) $-6 < k < 6$
সমাধান: $x^2 - kx + 9 = 0$ জটিল মূলের ক্ষেত্রে,
নিশ্চায়ক < 0 হবে
$k^2 - 36 < 0$
$(k+6)(k-6) < 0$
(+) -6 (−) 6 (+)
$\therefore -6 < k < 6$

04. a এর কোন ডোমেনের জন্য $x^2 + ax + 3 = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে? [GST'22-23] [Ans: c]
(a) $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ (b) $(-\infty, -2\sqrt{3})$
(c) $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$ (d) $(2\sqrt{3}, \infty)$
সমাধান: $x^2 + ax + 3 = 0$। যেহেতু মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান $\therefore D > 0$
$\Rightarrow a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 > 0 \Rightarrow a^2 - (2\sqrt{3})^2 > 0 \Rightarrow (a + 2\sqrt{3})(a - 2\sqrt{3}) > 0 \Rightarrow a < -2\sqrt{3}$ অথবা $a > 2\sqrt{3}$
$-\infty$ $-2\sqrt{3}$ $2\sqrt{3}$ ∞
$a \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$

05. k-এর মান কত হলে, $x^2 - 6x - 1 + k(2x + 1) = 0$ সমীকরণের মূল দুটি সমান হবে? [JU'22-23] [Ans: b]
(a) 3 অথবা 6 (b) 2 অথবা 5 (c) 2 অথবা 6 (d) 3 অথবা 5
সমাধান: $x^2 - 6x - 1 + k(2x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 1 + 2kx + k = 0 \therefore x^2 + (2k - 6)x + (k - 1) = 0$
$\therefore a = 1, b = 2k - 6, c = k - 1$
মূলদ্বয় সমান হলে, $D = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (2k - 6)^2 - 4 \cdot 1(k - 1) = 0$
$\Rightarrow \{2(k - 3)\}^2 - 4(k - 1) = 0 \Rightarrow 2^2(k - 3)^2 - 4(k - 1) = 0$
$\Rightarrow k^2 - 6k + 9 - k + 1 = 0 \Rightarrow k^2 - 7k + 10 = 0 \therefore k = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} = 2, 5$

06. $\frac{1}{x} + a - bx = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে কোনটি সঠিক? [DU' 21-22] [Ans: d]
(a) $a^2 - 4b = 0$ (b) $b^2 - 4a = 0$ (c) $b^2 + 4a = 0$ (d) $a^2 + 4b = 0$
সমাধান: $\frac{1}{x} + a - bx = 0 \Rightarrow 1 + ax - bx^2 = 0 \Rightarrow bx^2 - ax - 1 = 0$
$\therefore D = (-a)^2 - 4 \cdot b(-1) = 0 \Rightarrow a^2 + 4b = 0$

07. k-এর মান কত হলে, $(3k + 1)x^2 + (11 + k)x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো জটিল হবে? [CU' 21-22; JU'18-19, 16-17]
(a) $1 < k < 85$ (b) $k > 85$ (c) $3 < k < 86$ (d) $k < 3$ [Ans: a]
সমাধান: নিশ্চায়ক, $b^2 - 4ac = (11 + k)^2 - 4 \cdot 9(3k + 1) = k^2 + 22k + 121 - 108k - 36$
$= k^2 - 86k + 85 = (k - 1)(k - 85)$
$b^2 - 4ac < 0$ হলে মূলগুলো জটিল হবে যদি নিশ্চায়ক < 0 হয়। অর্থাৎ $(k - 1)(k - 85) < 0$ হবে; $\therefore 1 < k < 85$

08. কোন শর্তে $ax^2 + bx + c$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হবে? [Agri.'19-20] [Ans: a]
(a) $4ac = b^2$ (b) $4ac > b^2$ (c) $4ac < b^2$ (d) $ac = b$
সমাধান: একটি রাশি পূর্ণবর্গ হওয়ার শর্ত হচ্ছে নিশ্চায়ক শূন্য হবে। $\therefore b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow b^2 = 4ac$

09. $x^2 - px + p + 3 = 0$ সমীকরণের বাস্তব ও অসমান মূল থাকলে p এর মান বের কর। [CU'18-19] [Ans: b]
(a) $p < 6$ অথবা $p > -2$ (b) $p > 6$ অথবা $p < -2$ (c) $p = 0$ (d) $p > 6$
সমাধান: $D > 0 \Rightarrow p^2 - 4(p + 3) > 0 \Rightarrow p^2 - 4p - 12 > 0 \Rightarrow p^2 - 6p + 2p - 12 > 0$
$\Rightarrow p(p - 6) + 2(p - 6) > 0 \Rightarrow (p + 2)(p - 6) > 0$
$\therefore p < -2$ অথবা, $p > 6$

10. নিম্নের কোন শর্তের জন্য $px^2 + 3x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও অসমান হবে? [RU'14-15, 08-09] [Ans: c]
(a) $p < \frac{16}{9}$ (b) $p = \frac{9}{16}$ (c) $\frac{1}{p} > \frac{16}{9}$ (d) $p > \frac{9}{16}$
সমাধান: $px^2 + 3x + 4 = 0$ শর্তমতে, $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 3^2 - 4 \cdot p \cdot 4 > 0 \Rightarrow 9 - 16p > 0$
$\Rightarrow 9 > 16p \Rightarrow p < \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{16}{9}$

POEL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-03: মূলদ্বয়ের মধ্যবর্তী সম্পর্ক হতে মান নির্ণয় সম্পর্কিত

➲ **Formula & Concept:**

(i) $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে, [দ্বিঘাত সমীকরণের মূল 2 টি]

$\sum \alpha = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$; $\sum \alpha\beta = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

(ii) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ এর মূলত্রয় α, β, γ হলে ; [ত্রিঘাত সমীকরণের মূল 3 টি]

$\sum \alpha = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$; $\sum \alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$; $\sum \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

$\sum n$ সংখ্যক মূলের গুণফল $= (-1)^n \frac{(n+1) \text{ তম পদের সহগ}}{\text{সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ}}$; [এক্ষেত্রে পদগুলোকে ঘাতের অর্ধ্বঃক্রম অনুসারে সাজাতে হবে]

❖ **Shortcut:**

➢ $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় যৌগিক বিপরীতক হলে একটি α এবং অপরটি $-\alpha$

$\therefore \alpha + (-\alpha) = -\frac{b}{a} \therefore \boxed{b = 0}$

➢ যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় একে অপরের বিপরীত হয় (বা গৌণিক বিপরীতক হয়) তবে,

মূলদ্বয় হবে $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ $[\alpha \neq 0]$

সুতরাং, মূলদ্বয়ের গুণফল $= \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1 = \frac{c}{a} \therefore \boxed{a = c}$

➢ $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের ক্ষেত্রে, যেখানে a, b, c মূলদ,

$c = 0$ হলে 1 টি মূল শূন্য।

- a, b, c সমান্তর প্রগমনে হবে যদি: $b - a = c - b$; $\boxed{a + c = 2b}$
- a, b, c গুণোত্তর প্রগমনে হবে যদি: $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \boxed{ac = b^2}$
- a, b, c harmonic প্রগমনে হবে যদি: $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ অর্থাৎ, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}}$

➢ কোন বহুপদীর সকল সহগগুলোর যোগফল 0 হলে তার একটি মূল 1

জটিল মূল অনুবন্ধীরূপে আসে। অর্থাৎ, বাস্তব সহগবিশিষ্ট একটি বহুপদী সমীকরণের একটি মূল $a + ib$ হলে, অপর একটি মূল হবে $a - ib$; $[a, b \in \mathbb{R}]$

MCQ

01. k এর কোন মানের জন্য $2x^2 - (k+1)x + k = 0$ এর একটি মূল অপর মূলের বিপরীতের তিন গুণের সমান হবে? **[DU'23-24]**

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 **[Ans: d]**

সমাধান: ধরি, মূলদ্বয় $\alpha, \frac{3}{\alpha}$; প্রশ্নমতে, $\alpha \cdot \frac{3}{\alpha} = \frac{k}{2} \Rightarrow 3 = \frac{k}{2} \therefore k = 6$

02. যদি $x^2 - bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে $b^2 - 4c$ এর মান কত? **[GST'23-24] [Ans: a]**

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

সমাধান: ধরি, $x^2 - bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় $\alpha, \alpha + 1$

মূলদ্বয়ের যোগফল

$\therefore \alpha + \alpha + 1 = b \ldots\ldots\ldots (i)$

$\Rightarrow \alpha = \frac{b-1}{2}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল; $\alpha(\alpha + 1) = c \ldots\ldots\ldots (ii)$

$\Rightarrow \frac{b-1}{2}\left(\frac{b-1}{2} + 1\right) = c \Rightarrow \frac{b-1}{2} \cdot \frac{b+1}{2} = c$

$\Rightarrow \frac{b^2-1}{4} = c \Rightarrow b^2 - 1 = 4c \therefore b^2 - 4c = 1$

বিকল্প: $2\alpha + 1 = b$ এবং $\alpha^2 + \alpha = c$; [(i) ও (ii) হতে]

এখন, $b^2 - 4c = (2\alpha + 1)^2 - 4(\alpha^2 + \alpha) = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 - 4\alpha^2 - 4\alpha = 1$

03. $2x^2 + 3x + p = 3$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির উল্টা হলে p এর মান কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: c]**

(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 7

সমাধান: $2x^2 + 3x + p = 3$; $2x^2 + 3x + (p - 3) = 0$

ধরি, মূলদ্বয় α ও $\frac{1}{\alpha} \therefore \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{p-3}{2} \Rightarrow p - 3 = 2 \Rightarrow p = 5$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

04. k-এর মান কত হলে, $(k^2-3)x^2+3kx+3k+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর উল্টা হবে? **[RU'21-22, 17-18, 08-09]**
(a) $4, 1$ (b) $4, -1$ (c) $-4, 1$ (d) $6, -1$ **[Ans: b]**

সমাধান: ধরি, সমীকরণটির মূলদ্বয় $\alpha, \frac{1}{\alpha}$

প্রশ্নমতে, $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{3k+1}{k^2-3} \Rightarrow 1 = \frac{3k+1}{k^2-3} \Rightarrow k^2-3 = 3k+1 \Rightarrow k^2-3k-4=0 \therefore k = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}$

$= \frac{3\pm5}{2} = 4, -1$

05. $x^3-5x^2+17x-13=0$ সমীকরণটির একটি মূল 1 হলে, অপর মূলগুলো কত? **[RU'21-22, 20-21] [Ans: c]**
(a) $4\pm3i$ (b) $3\pm2i$ (c) $2\pm3i$ (d) $-2\pm3i$

সমাধান: $x^3-5x^2+17x-13=0$ সমীকরণটির একটি মূল 1

$\Rightarrow x^3-x^2-4x^2+4x+13x-13=0 \Rightarrow x^2(x-1)-4x(x-1)+13(x-1)=0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2-4x+13)=0$

যখন, $x^2-4x+13=0$, $x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot13}}{2\cdot1} = \frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2} = \frac{4\pm6i}{2} = 2\pm3i$

বিকল্প: ধরি, সমীকরণের মূলত্রয় $\alpha, \beta, 1$

$\therefore \alpha+\beta+1 = -\frac{(-5)}{1} = 5 \therefore \alpha+\beta=4 \ldots\ldots\ldots$ (i); $\alpha\cdot\beta\cdot1 = -\frac{(-13)}{1} \therefore \alpha\beta = 13 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

এখন, $\alpha-\beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} = \sqrt{4^2-4\cdot13} = \sqrt{-36} = 6i \therefore \alpha-\beta = 6i \ldots\ldots\ldots$ (iii)

(i) + (iii) $\Rightarrow 2\alpha = 4+6i \therefore \alpha = 2+3i$; (i) − (iii) $\Rightarrow 2\beta = 4-6i \therefore \beta = 2-3i$ $\therefore$ অপর মূলদ্বয় $2\pm3i$

06. $t^2+8t+2=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় e^a এবং e^b হলে, $(a+b)$ এর মান কত? **[RU'21-22] [Ans: c]**
(a) -2 (b) 2 (c) $\ln 2$ (d) $\ln\frac{1}{2}$

সমাধান: $t^2+8t+2=0$ সমীকরণের দুইটি মূল হলো e^a এবং e^b

এখানে, $e^a\cdot e^b = 2 \Rightarrow e^{a+b} = 2 \Rightarrow (a+b)\ln e = \ln 2$; [উভয় পাশে ln নিয়ে] $\therefore a+b = \ln 2$; [$\because \ln e = 1$]

07. $2x^3+5x^2+5x+2=0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β ও γ হলে, $\Sigma\alpha\beta$ এর মান কত? **[JU'21-22] [Ans: a]**
(a) $\frac{5}{2}$ (b) $-\frac{5}{2}$ (c) 1 (d) -1

সমাধান: $\Sigma\alpha\beta = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{5}{2}$

08. $x^2-5x+5=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha^3+\beta^3$ এর মান কত? **[JU'21-22] [Ans: a]**
(a) 50 (b) 25 (c) 75 (d) 100

সমাধান: $\alpha+\beta=5; \alpha\beta=5 \therefore \alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 5^3-3\times5\times5 = 50$

09. যদি $x^2-5x+k=0$ সমীকরণটির একটি মূল 4 হয় তাহলে k এর মান এবং অন্য মূলটি কত? **[CU'21-22, Agri.'19-20]**
(a) $0, 0$ (b) $4, 1$ (c) $-4, -1$ (d) $4, -1$ **[Ans: b]**

সমাধান: $\alpha+4=5 \therefore \alpha=1$ এবং $4\cdot1=k \therefore k=4$

বিকল্প: $(4)^2-5(4)+k=0 \Rightarrow k=4$; $\alpha+4=5 \therefore \alpha=1$

POLE MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

10. কোন শর্তে $x^3-mx^2+nx+r=0$ সমীকরণের দুইটি মূলের সমষ্টি শূন্য হবে? **[GST'20-21] [Ans: b]**
(a) $mn-r=0$ (b) $mn+r=0$ (c) $mr+n=0$ (d) $mr-n=0$

সমাধান: ধরি, মূলত্রয় a, b এবং c। $a+b=0$ হলে, $a+b+c = -\frac{-m}{1} = m \Rightarrow 0+c=m \Rightarrow c=m$

$ab+bc+ca=n \Rightarrow ab+c(b+a)=n \Rightarrow ab=n$; $abc=-r \Rightarrow n\cdot m=-r \Rightarrow mn+r=0$

11. দুইটি মূলের যোগফল শূন্য হলে, $x^3-5x^2-16x+80=0$ সমীকরণটির মূলগুলো কত? **[RU'20-21] [Ans: a]**
(a) $4, -4, 5$ (b) $3, -3, -5$ (c) $2, -2, -5$ (d) $5, 6, -6$

সমাধান: মূলত্রয় $\alpha, -\alpha, \beta$; $\alpha+(-\alpha)+\beta = -(-5) \Rightarrow \beta=5$

$-\alpha^2\beta = -80 \Rightarrow \alpha^2 = 16 \Rightarrow \alpha = 4, -4$

12. $3x^2+7x-2=0$ সমীকরণটির মূল দুইটির যোগফল ও গুণফল এর সমষ্টি কত? **[JU'20-21, 14-15] [Ans: b]**
(a) $-\frac{5}{3}$ (b) -3 (c) 5 (d) $\frac{4}{3}$

সমাধান: মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha+\beta = -\frac{7}{3}$, $\alpha\beta = \frac{-2}{3}$ $\therefore (\alpha+\beta)+\alpha\beta = \frac{-7}{3}-\frac{2}{3} = \frac{-7-2}{3} = \frac{-9}{3} = -3$

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

13. $(a^2-3)x^2+3ax+(3a+1)=0$ সমীকরণের মূল দুইটি পরস্পর উল্টা হলে 'a' এর মান কত? **[CU'20-21] [Ans: c]**

(a) $1,-4$ (b) $-1,-4$ (c) $-1,4$ (d) $1,4$

সমাধান: একটি মূল α হলে অপর মূল $\frac{1}{\alpha}$

$\therefore \alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{3a+1}{a^2-3}\Rightarrow a^2-3-3a-1=0\Rightarrow a^2-3a-4=0\therefore a=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}=\frac{3\pm5}{2}=-1,4$

14. $x^3+bx^2-ax+1=0$ সমীকরণের একটি মূল -1 এবং অন্য মূলগুলো সমান হলে a এর মান কোনটি? **[SUST'19-20]**

(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) 2 (e) 3 **[Ans: c]**

সমাধান: $x^3+bx^2-ax+1=0$ এর একটি মূল -1 ও অপরগুলো α,α

$\therefore -1+b+a+1=0$; [-1 দ্বারা সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে] $\therefore a+b=0$

$\therefore$ মূলগুলোর যোগফল, $\sum\alpha^3=-1+\alpha+\alpha=-b=a\Rightarrow 2\alpha-1=a$

এবং $\sum\alpha\beta=-\alpha-\alpha+\alpha^2=-a=-(2\alpha-1)=1-2\alpha\ \therefore\alpha^2=1\ \therefore\alpha=\pm1\ \therefore\alpha=1$ হলে, $a=1$; [যেহেতু সমীকরণটির শুধুমাত্র একটি মূল -1 সেহেতু অপর মূল দুটি 1 হবে]

15. $x^2+6x-1=0$ সমীকরণটি সমাধান করলে x এর একটি মান p এবং অপর মানটি q পাওয়া যায়। তাহলে, $p+q=?$ **[JU'19-20]**

(a) -1 (b) 6 (c) 2 (d) -6 **[Ans: d]**

সমাধান: $x^2+6x-1=0$। মূলদ্বয়ের যোগফল $=-6\ \therefore p+q=-6$

16. $(k+3)x^2+(6-2k)x+(k-1)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় একটি অপরটির সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হলে, $k=?$

[KU'19-20] [Ans: c]

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

সমাধান: যেহেতু মূলদ্বয় সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট সেহেতু ধরি, মূলদ্বয় α ও $-\alpha$.

এখন, $\alpha+(-\alpha)=-\frac{6-2k}{k+3}\Rightarrow-\frac{6-2k}{k+3}=0\Rightarrow-6+2k=0\therefore k=3$

Shortcut: দুটি মূলের যোগফল শূন্য হলে $b=0\ \therefore 6-2k=0\Rightarrow k=3$

17. $x^3-5x^2+6=0$ সমীকরণের মূলত্রয় a, b, c হলে, $\frac{1}{abc}$ এর মান কোনটি? **[JU'18-19] [Ans: b]**

(a) -6 (b) $\frac{-1}{6}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{5}$

সমাধান: $abc=-6\ \therefore\frac{1}{abc}=-\frac{1}{6}$

18. $x^3-7x^2+8x+10=0$ সমীকরণের একটি মূল $1+\sqrt{3}$ হলে, তৃতীয় মূলটি কত? **[KU'18-19] [Ans: c]**

(a) $1-\sqrt{3}$ (b) $1-i\sqrt{3}$ (c) 5 (d) $-1+i\sqrt{3}$

সমাধান: একটি মূল $1+\sqrt{3}$ হলে অপর মূল $1-\sqrt{3}$, তৃতীয় মূল p

$\therefore$ মূলগুলোর গুণফল, $(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})p=-10\Rightarrow(1-3)p=-10\Rightarrow p=5$

19. $3x^3+x^2-12x-4=0$ সমীকরণটিতে x এর দুটি মান $2,-2$ হলে, অপরটি কত? **[JU'17-18] [Ans: d]**

(a) 1 (b) -1 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

সমাধান: $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{1}{3}\Rightarrow2-2+\gamma=-\frac{1}{3}\Rightarrow\gamma=-\frac{1}{3}$

20. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{3-i\sqrt{2}}$ হলে অপর মূল কোনটি? **[JU'17-18] [Ans: a]**

(a) $\frac{3}{11}-i\frac{\sqrt{2}}{11}$ (b) $\frac{3}{11}+i\frac{\sqrt{2}}{11}$ (c) $\frac{3i}{11}-\frac{\sqrt{2}}{11}$ (d) $\frac{3i}{11}+\frac{\sqrt{2}}{11}$

সমাধান: $\frac{1}{3-i\sqrt{2}}=\frac{3+i\sqrt{2}}{(3-i\sqrt{2})(3+i\sqrt{2})}=\frac{3+i\sqrt{2}}{9+2}=\frac{3}{11}+\frac{\sqrt{2}}{11}i\ \therefore$ অপর মূলটি, $\frac{3}{11}-\frac{\sqrt{2}}{11}i$

21. $x^2+ax+b=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান এবং $x^2+ax+8=0$ সমীকরণটির একটি মূল 4 হলে b এর মান কত? **[JU'16-17]**

(a) 4 (b) 8 (c) 9 (d) 12 **[Ans: c]**

সমাধান: $x^2+ax+8=0$ এর একটি মূল 4, অপর মূল α

$\therefore\alpha+4=-a,\alpha\cdot4=8\Rightarrow\alpha=2\therefore2+4=-a\Rightarrow a=-6$

$\therefore x^2+ax+b=0$ বা $x^2-6x+b=0$ এর মূলদ্বয় যেহেতু সমান সেহেতু নিশ্চায়ক $=0\ \therefore(-6)^2-4b=0$

$\Rightarrow4b=36\Rightarrow b=9\therefore b=9$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

22. c এর মান কত হলে $x^2 - 3x + c = 0$ এর মূল দুইটি ক্রমিক সংখ্যা হবে? **[CU'16-17] [Ans: b]**

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) -2

সমাধান: ধরি, মূলদ্বয় $\alpha, \alpha+1$ $\therefore \alpha + (\alpha+1) = 3 \therefore \alpha = 1$; $c = \alpha(\alpha+1) = 2$

23. $2x^2 - 7x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β; $x^2 - 4x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় β এবং γ হলে $(\gamma + \alpha) : (\gamma - \alpha) = ?$

(a) 6 : 5 (b) 5 : 6 (c) 11 : 1 (d) 1 : 6 **[DU'15-16; RU'09-10] [Ans: c]**

সমাধান: $2x^2 - 7x + 5 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 5x + 5 = 0$

$\Rightarrow 2x(x-1) - 5(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(2x-5) = 0 \therefore x = 1, \frac{5}{2}$

$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1) = 0 \therefore x = 3, 1 \therefore \alpha = \frac{5}{2}, \beta = 1, \gamma = 3 \therefore \frac{\gamma+\alpha}{\gamma-\alpha} = \frac{3+\frac{5}{2}}{3-\frac{5}{2}} = \frac{6+5}{6-5} = 11:1$

24. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির উল্টা হওয়ার শর্ত- **[CU'14-15] [Ans: d]**

(a) $b = 0$ (b) $a = 0$ (c) $c = 0$ (d) $c = a$

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$; $\alpha\frac{1}{\alpha} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \therefore a = c$

25. $3x^2 + 5x - 3 = 0$ এর একটি মূল (Root) যদি a হয় তবে অপর মূলটি কত? **[JnU'13-14] [Ans: a]**

(a) $-\frac{1}{a}$ (b) $\frac{1}{a}$ (c) $-a$ (d) a

সমাধান: অপর মূলটি α হলে, $\alpha \cdot a = -\frac{3}{3} = -1 \therefore \alpha = -\frac{1}{a}$

26. $x^3 + 7x^2 + cx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল 0 হলে c এর মান কত? **[CU'13-14] [Ans: a]**

(a) 0 (b) 2 (c) -1 (d) 3 e) 4

সমাধান: ধরি, তিনটি মূল হচ্ছে α, β, γ $\therefore \alpha\beta\gamma = -\frac{c}{1}$; [একটি মূল 0] অথবা, $c = 0$

[কোনো সমীকরণের একটি মূল 0 হলে কোনো ধ্রুবক থাকবে না]

Shortcut: $0^3 + 7 \cdot 0^3 + c \cdot 0 + c = 0$; [0 দ্বারা সিদ্ধ করে] $\therefore c = 0$

Written

01. $x^2 + kx + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $x^2 - 2x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাতের সমান হলে k-এর মান নির্ণয় কর। **[DU'23-24]**

সমাধান: ধরি, $x^2 + kx + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β এবং $x^2 - 2x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় m ও n.

অর্থাৎ $\alpha + \beta = -k; \alpha\beta = 1; m + n = 2$

$mn = 9$ ও $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{m+n}{m-n}$; [যোজন-বিয়োজন] $\Rightarrow \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^2 = \left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2$; [বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} = \frac{(m+n)^2}{(m+n)^2-4mn} \Rightarrow \frac{k^2}{k^2-4} = \frac{2^2}{2^2-4\times9}$ [মান বসিয়ে]

$\Rightarrow \frac{k^2}{k^2-4} = \frac{4}{-32} = -\frac{1}{8} \Rightarrow 8k^2 + k^2 - 4 = 0 \Rightarrow 9k^2 = 4 \Rightarrow k^2 = \frac{4}{9} \therefore k = \pm\frac{2}{3}$

02. $ax^2 + bx + c = 0$ -এর মূলদ্বয়ের অনুপাত 3 : 4 হলে দেখাও যে, $12b^2 = 49ac$. **[DU'21-22]**

সমাধান: ধরি, মূলদ্বয় $3\alpha, 4\alpha$ $\therefore 3\alpha + 4\alpha = -\frac{b}{a} \therefore 7\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{7a}$ ..... (i)

আবার, $3\alpha \cdot 4\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow 12\alpha^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 12\frac{b^2}{49a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow 12b^2 = 49ac$ [দেখানো হল]

বিকল্প: আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত m : n হলে, $\frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{ca}{b^2}$

এখানে, $m = 3, n = 4 \therefore \frac{3\cdot4}{(3+4)^2} = \frac{ca}{b^2}$ $\therefore 12b^2 = 49ac$ [দেখানো হল]

03. $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $(1 + 2i)$ হলে, অন্য মূলগুলো নির্ণয় কর। **[DU'20-21]**

সমাধান: $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $1 + 2i$ হলে, অপর একটি মূল $1 - 2i$ এবং তৃতীয় মূলটি α হলে $\sum\alpha = \alpha + (1 + 2i) + (1 - 2i) = 3 \Rightarrow \alpha + 2 = 3 \therefore \alpha = 1 \therefore$ অন্য মূল দুইটি $1 - 2i$ ও 1।

বিকল্প: যেহেতু একটি মূল $1 + 2i$ অপর একটি মূল হবে $1 - 2i$

প্রদত্ত সমীকরণের সহগগুলোর যোগফল $= 1 - 3 + 7 - 5 = 0$

আমরা জানি, কোনো সমীকরণের সহগগুলোর যোগফল 0 হলে, একটি মূল অবশ্যই 1 হবে। অর্থাৎ তৃতীয় মূলটি 1।

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-04: মূল হতে সমীকরণ গঠন সম্পর্কিত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

- দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে মূলদ্বয় α, β হলে দ্বিঘাত সমীকরণ: $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$ অথবা, $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$
- ত্রিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে মূলত্রয় α, β, γ হলে ত্রিঘাত সমীকরণ:
  $x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$ অথবা, $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0$
- কোনো সমীকরণের একটি জটিল মূল $a + ib$ আকারে দেওয়া থাকলে, $x = a + ib \Rightarrow (x-a) = ib$ ধরে উভয়পক্ষকে বর্গ করে সমীকরণটি বের করতে হবে।

MCQ

01. $1 + \sqrt{2}i$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: a]**

(a) $x^2 - 2x + 3 = 0$ (b) $x^2 + 2x + 3 = 0$ (c) $x^2 - 2x - 1 = 0$ (d) $x^2 + 2x - 1 = 0$

সমাধান: $\Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}i \Rightarrow (x-1)^2 = (\sqrt{2}i)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -2 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$

02. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{1+i}$ হলে, সমীকরণটি হবে – **[CU'22-23; RU'20-21] [Ans: b]**

(a) $x^2 - x + 1 = 0$ (b) $2x^2 - 2x + 1 = 0$ (c) $x^2 + x + 1 = 0$ (d) $2x^2 + 2x + 1 = 0$

সমাধান: জটিল মূলদ্বয় জোড়ায় জোড়ায় আসে এবং পরস্পর অনুবন্ধী হয়। একটি মূল $= \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)}$

$= \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{1-(-1)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ ∴ অপর মূলটি $= \overline{\frac{1}{2} - \frac{i}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

∴ সমীকরণটি: $x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ (মূলদ্বয়ের গুণফল) $= 0$

$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) = 0 \Rightarrow x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{i^2}{2^2} = 0$

$\Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{-1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1+1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{2}{4} = 0$ ∴ $2x^2 - 2x + 1 = 0$

বিকল্প: $x = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = -\frac{i}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{-i}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{i^2}{4} \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

$\Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ ∴ $2x^2 - 2x + 1 = 0$

POLL MACHINE

03. $1 + i$ কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল হলে সমীকরণটি হবে – **[CU'22-23] [Ans: a]**

(a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ (b) $x^2 - 3x + 3 = 0$ (c) $x^2 + x = 0$ (d) $x^2 - 4x + 4 = 0$

Preparation and Practice are vital for effective delivery

সমাধান: একটি মূল $1 + i$ হলে, অনুবন্ধী মূল $1 - i$ ∴ মূলদ্বয়ের সমষ্টি $= 1 + i + 1 - i = 2$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $= (1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$ ∴ সমীকরণ: $x^2 - 2x + 2 = 0$

বিকল্প: $x = 1 + i \Rightarrow x - 1 = i \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -1$; [বর্গ করে] ∴ $x^2 - 2x + 2 = 0$

04. বাস্তব সহগবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করতে হবে যার একটি মূল $-1 + \sqrt{-5}$ হবে- **[CU'22-23; DU'13-14; RU'13-14] [Ans: c]**

(a) $x^2 + x + 6 = 0$ (b) $x^2 + 6 = 0$ (c) $x^2 + 2x + 6 = 0$ (d) $x^2 - 2x + 6 = 0$

সমাধান: জটিল মূল যুগলরূপে আসে। ∴ মূলদ্বয় $-1 + i\sqrt{5}$ এবং $-1 - i\sqrt{5}$

নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (-1 + i\sqrt{5} - 1 - i\sqrt{5})x + (-1 + i\sqrt{5})(-1 - i\sqrt{5}) = 0$ ∴ $x^2 + 2x + 6 = 0$

বিকল্প: ধরি, $x = \sqrt{5}i - 1 \Rightarrow x + 1 = \sqrt{5}i \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = -5 \Rightarrow x^2 + 2x + 6 = 0$

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-05: মূলদ্বয়ের অন্তর সংক্রান্ত

Formula & Concept:

যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β; $[\alpha > \beta]$ হয় এবং মূলদ্বয়ের পার্থক্য d হয় তবে, $\alpha - \beta = d$ হবে।

MCQ

01. $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির পার্থক্য 1 হলে, নিচের কোনটি সঠিক? **[RU'15-16] [Ans: b]**

(a) $p^2 + q^2 = 1$ (b) $p^2 = 1 + 4q$ (c) $p^2 = 1 + q$ (d) $p^2 = 1 - q$

সমাধান: ধরি, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের একটি মূল α এবং অপর মূল $(\alpha + 1)$।

$\therefore 2\alpha + 1 = -p \ \therefore \alpha = \frac{-(p+1)}{2}$ এবং $\alpha(\alpha + 1) = q$

$\Rightarrow \frac{-(p+1)}{2} \cdot \left(\frac{-p-1}{2} + 1\right) = q \Rightarrow p^2 - 1 = 4q \ \therefore \ p^2 = 1 + 4q$

বিকল্প: ধরি, মূলদ্বয় α ও β; $[\alpha > \beta] \ \therefore \alpha + \beta = -p; \alpha\beta = q$

শর্তমতে, $\alpha - \beta = 1 \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = 1 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1 \Rightarrow p^2 - 4q = 1 \Rightarrow p^2 = 1 + 4q$

Type-06: প্রতিসম রাশির মান নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা

Formula & Concept:

প্রতিসম রাশি: একাধিক চলকবিশিষ্ট কোন বীজগাণিতিক রাশির যেকোন দুইটি চলকের স্থান বিনিময় করলে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে, তাহলে ঐ রাশিটিকে উক্ত চলকসমূহের প্রতিসম রাশি বলা হয়।

যেমন: $\alpha + \beta + \gamma, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ ইত্যাদি।

সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত মূল-সহগ সম্পর্কগুলো ব্যবহার করে প্রদত্ত রাশির মান নির্ণয় করতে হবে।

MCQ

01. $x^2 + 2x - 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় p ও q হলে $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ এর মান কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: a]**

(a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) -2

সমাধান: $p + q = -2; pq = -2 \ \therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p+q}{pq} = \frac{-2}{-2} = 1$

02. $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণটির মূলগুলো α, β, γ হলে, $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}$ এর মান কত? **[RU'22-23] [Ans: b]**

(a) 2 (b) -2 (c) 0 (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ এর মূলগুলো $\alpha, \beta, \gamma \ \therefore \alpha + \beta + \gamma = \frac{2}{3}; \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$ এবং $\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{3}$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\gamma+\alpha+\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2$

03. $2x^3 - 5x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)$ এর মান কত? **[CU'22-23] [Ans: c]**

(a) 3 (b) -3 (c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}$

সমাধান: $\alpha + \beta + \gamma = 0 \ \therefore \alpha + \beta = -\gamma \ \therefore \beta + \gamma = -\alpha$

$\therefore \gamma + \alpha = -\beta$, অর্থাৎ $(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta) = (-\alpha)(-\beta)(-\gamma) = -\alpha\beta\gamma = -\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{3}{2}$

04. $x^2 - 2x + 1 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয়ের ত্রিঘাত এর সমষ্টি হলো- **[DU'20-21; Agri.'20-21] [Ans: d]**

(a) -3 (b) 3 (c) -2 (d) 2

সমাধান: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1,1 \ \therefore \alpha^3 + \beta^3 = 1^3 + 1^3 = 2$

বিকল্প: $\alpha + \beta = 2; \alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2^3 - 3 \cdot 1(2) = 8 - 6 = 2$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

05. $x^3 + px + q = 0$ সমীকরণের মূল a, b, c হলে, $(a^2 + b^2 + c^2)$ এর মান কত? [JU'19-20] [Ans: d]

(a) $2q$ (b) $-2q$ (c) $2p$ (d) $-2p$

সমাধান: $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 0 - 2(p) = -2p$

$[a + b + c = 0, ab + bc + ca = p]$

06. $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $\sum \alpha^2\beta$ এর মান কত? [RU'17-18; JU'15-16] [Ans: d]

(a) $\frac{2}{3}$ (b) 0 (c) $-\frac{1}{3}$ (d) 1

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ এর মূলত্রয় $\alpha, \beta, \gamma \therefore \alpha + \beta + \gamma = \frac{2}{3}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \alpha\beta\gamma = -\frac{1}{3}$

$\therefore \sum \alpha^2\beta = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\beta + \gamma^2\alpha + \alpha^2\gamma$

$= \alpha\beta(\alpha + \beta) + \gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha) = \alpha\beta\left(\frac{2}{3} - \gamma\right) + \beta\gamma\left(\frac{2}{3} - \alpha\right) + \gamma\alpha\left(\frac{2}{3} - \beta\right)$

$= \frac{2}{3}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma = -3\alpha\beta\gamma = -3\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$

07. $3x^3 - 1 = 0$ এর মূলগুলো α, β, γ হলে $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ এর মান- [DU'16-17] [Ans: d]

(a) -1 (b) 0 (c) $\frac{1}{3}$ (d) 1

সমাধান: $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{0}{3} = 0,\ \alpha\beta\gamma = \frac{1}{3},\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma = 0 + 3 \times \frac{1}{3} = 1$

বিকল্প: $3x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}},\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\omega,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\omega^2$

$\therefore \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{3}\omega^6 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$

Shortcut: $3x^3 - 1 = 0$ এর মূলগুলো α, β, γ হলে α, β, γ বসিয়ে পাই,

$3\alpha^3 - 1 = 0$

$3\beta^3 - 1 = 0$

$3\gamma^3 - 1 = 0$

$\therefore 3(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) = 3$

$\Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 1 \therefore \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 1$

POLL MACHINE

Written

01. যদি $x^3 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হয়, তবে $\sum \alpha^2\beta^2$ এর মান নির্ণয় কর। [CU'12-13]

Preparation and Practice are vital for effective delivery

সমাধান: $\alpha + \beta + \gamma = 0,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p,\ \alpha\beta\gamma = -q$

$(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + 2\alpha\beta\gamma\,(\alpha + \beta + \gamma)$

$\Rightarrow p^2 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + 2(-q) \times 0$

$\therefore \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = p^2 \therefore \sum \alpha^2\beta^2 = p^2$ **(Ans.)**

Type-07: প্রতিসম মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে যদি α ও β এর অবস্থান পরিবর্তন করলে যদি মূলগুলো একই থাকে, তবে তাদেরকে প্রতিসম মূল বলে।

n ঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে যেকোন 2 টি চলকের অবস্থান বিনিময় করলে যদি মূলগুলো একই থাকে তাহলে তাদের প্রতিসম মূল বলে।

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

❖ **Shortcut:** $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলগুলো (α, β) হলে

নতুন সমীকরণের মূল	x এর পরিবর্তে $ax^2 + bx + c = 0$ তে যা বসাতে হবে।
$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$	$\frac{1}{x}$
$-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}$	$-\frac{1}{x}$
$\alpha + d, \beta + d$	$x - d$
$\alpha - d, \beta - d$	$x + d$
$d\alpha, d\beta$	$\frac{x}{d}$
$\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d}$	dx
α^2, β^2	$\pm\sqrt{x}$
α^3, β^3	$\sqrt[3]{x}$
$\frac{1}{\alpha^2\beta}, \frac{1}{\beta^2\alpha}$	$\frac{1}{\frac{c}{a}x} = \frac{a}{cx}$
$\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$	$\frac{\frac{c}{a}+1}{x} = \frac{c+a}{ax}$

MCQ

01. $x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 2 কম মূল বিশিষ্ট সমীকরণ হলো- **[RU'22-23; DU'18-19] [Ans: b]**

(a) $x^2 + 2x + 3 = 0$ (b) $x^2 - x - 7 = 0$ (c) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (d) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

সমাধান: ধরি, $x^2 - 5x - 1 = 0$ এর মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha + \beta = 5, \alpha\beta = -1$ নতুন সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha - 2$ ও $\beta - 2$

$\therefore \alpha - 2 + \beta - 2 = \alpha + \beta - 4 = 5 - 4 = 1$ এবং $(\alpha - 2)(\beta - 2) = \alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4 = -1 + 4 - 2 \times 5 = -7$

$\therefore$ নতুন সমীকরণ: $x^2 - 1 \cdot x - 7 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 7 = 0$

বিকল্প: নির্ণেয় সমীকরণের জন্য, $x = \alpha - 2 \Rightarrow \alpha = x + 2$; $\therefore \alpha$ এর এই মান প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$(x + 2)^2 - 5(x + 2) - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 - 5x - 10 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 7 = 0$, যা নির্ণেয় সমীকরণ।

02. $6x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? **[RU'21-22] [Ans: a]**

(a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (b) $x^2 - 2x + 1 = 0$ (c) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (d) $x^2 - 11x + 30 = 0$

সমাধান: $6x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β $\therefore \alpha + \beta = -\left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{5}{6}$ এবং $\alpha\beta = \frac{1}{6}$

নতুন সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ $\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$ $\therefore$ নতুন সমীকরণ: $x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ (মূলদ্বয়ের গুণফল) $= 0$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

বিকল্প: নির্ণেয় সমীকরণের একটি মূল, $x = \frac{1}{\alpha}$ $\therefore \alpha = \frac{1}{x}$

α এর এই মান প্রদত্ত সমীকরণে বসালে পাই, $6 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 5 \cdot \frac{1}{x} + 1 = 0 \Rightarrow 6 - 5x + x^2 = 0$ $\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

03. $3x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\frac{1}{\alpha}$ এবং $\frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? **[JU'21-22] [Ans: b]**

(a) $3x^2 - 6x + 3 = 0$ (b) $x^2 - 6x + 3 = 0$ (c) $x^2 + 6x - 3 = 0$ (d) $x^2 - 6x + 1 = 0$

সমাধান: $\alpha + \beta = 6; \alpha\beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{6}{1} = 6$

$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ $\therefore$ সমীকরণটি হবে $x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 3 = 0$

বিকল্প: মূলদ্বয় α এবং β হলে $\frac{1}{\alpha}$ এবং $\frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণের ক্ষেত্রে, $x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}$

$\therefore 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 3 = 0$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are Vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Written

01. $3x^2 - 6x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় m এবং n হলে, $m + \frac{1}{n}$ এবং $n + \frac{1}{m}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। [DU'22-23]

সমাধান: $3x^2 - 6x + 2 = 0$ এর মূলদ্বয় m ও n. $\therefore m + n = -\frac{-6}{3} = 2 ; mn = \frac{2}{3}$

$\therefore$ নতুন সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল, $m + \frac{1}{n} + n + \frac{1}{m} = (m + n) + \frac{m+n}{mn} = 2 + \frac{2}{\frac{2}{3}} = 2 + 3 = 5$

আবার মূলদ্বয়ের গুণফল, $\left(m + \frac{1}{n}\right)\left(n + \frac{1}{m}\right) = mn + 1 + 1 + \frac{1}{mn} = 2 + mn + \frac{1}{mn} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{25}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2 - (\text{মূলদ্বয়ের যোগফল})\, x + (\text{মূলদ্বয়ের গুণফল}) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{6} = 0$

$\therefore 6x^2 - 30x + 25 = 0$ **(Ans.)**

বিকল্প: আবার, নির্ণেয় সমীকরণের একটি মূল, $x = m + \frac{1}{n} = \frac{mn+1}{n} = \frac{\frac{2}{3}+1}{n}$ $\left[\because mn = \frac{2}{3}\right]$

$\therefore x = \frac{2+3}{3n} \Rightarrow n = \frac{5}{3x}$; এখন প্রদত্ত সমীকরণে n এর এই মান বসালে পাই, $3\left(\frac{5}{3x}\right)^2 - 6 \cdot \frac{5}{3x} + 2 = 0$

$\Rightarrow 3 \cdot \frac{25}{9x^2} - \frac{10}{x} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{25}{3x^2} - \frac{10}{x} + 2 = 0 \Rightarrow 25 - 30x + 6x^2 = 0 \therefore 6x^2 - 30x + 25 = 0$ **(Ans.)**

Type-08: সাধারণ মূল সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ এর একটি সাধারণ মূল α থাকলে,

$\therefore$ (i) $\boxed{(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2}$ **[12, 21 Rule]**

❖ **Shortcut:**

2 টি সমীকরণ দেওয়া থাকলে যদি তাদের সাধারণ মূল থাকে তাহলে তা নির্ণয়ের সহজ উপায় হলো সমীকরণদ্বয় বিয়োগ করে দেওয়া (x^2 এর সহগ একই রেখে)।

বি.দ্র: 2 টি সমীকরণের সাধারণ মূল না থাকলেও বিয়োগ করলে x এর একটি মান আসবে। কিন্তু সেটা উক্ত সমীকরণদ্বয়ের একটিরও মূল নয়। তাই 2 টি সমীকরণ বিয়োগ করে x এর প্রাপ্ত মানটিকে যেকোন একটি সমীকরণে বসিয়ে দিলে যদি L.S. = R.S. হয় তাহলে ঐটাই সাধারণ মূল। অন্যথায় সাধারণ মূল নেই।

দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি সাধারণ মূল থাকলে:

2 টি দ্বিঘাত সমীকরণের 2 টি মূলই সমান হবে যদি একটি সমীকরণ অপরটির গুণিতক হয় বা সমীকরণদ্বয়ের x^2, x এর সহগগুলোর এবং ধ্রুবক পদের অনুপাত সমান হয়।

অর্থাৎ, $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ এর 2 টি মূলই সমান হলে, $\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$

POLE MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $x^2 - 11x + a = 0$ ও $x^2 - 14x + 2a = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে, a =? **[GST'23-24] [Ans: a]**

(a) 0, 24 (b) 0, −24 (c) 1, −1 (d) −2, 1

সমাধান:

$x^2 - 11x + a = 0$ .....(i)

$x^2 - 14x + 2a = 0$ .....(ii)

(−) (+) (−)

$3x - a = 0$

$\therefore x = \frac{a}{3}$

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $\left(\frac{a}{3}\right)^2 - 11 \cdot \left(\frac{a}{3}\right) + a = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{9} - \frac{11a}{3} + a = 0 \Rightarrow a^2 - 33a + 9a = 0$

$\Rightarrow a^2 - 24a = 0 \Rightarrow a(a - 24) = 0 \therefore a = 0, 24$

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

02. $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ এবং $x^2 + b_1x + a_1 = 0$ সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকলে $a_1 + b_1 = ?$ **[CU'23-24] [Ans: c]**

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) কোনো মান নেই

সমাধান: $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ ..... (i)

$x^2 + b_1x + a_1 = 0$ ..... (ii)

(–) (–) (–)

$(a_1 - b_1)x + (b_1 - a_1) = 0$

$\Rightarrow (a_1 - b_1)x = (a_1 - b_1) \Rightarrow x = 1$

$\therefore x = 1$, (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $(1)^2 + a_1 \times 1 + b_1 = 0 \Rightarrow 1 + a_1 + b_1 = 0 \therefore a_1 + b_1 = -1$

03. $x^2 - bx + c = 0$ এবং $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটিমাত্র সাধারণ মূল থাকার শর্ত কোনটি? **[CU'16-17] [Ans: a]**

(a) $b + c + 1 = 0$ (b) $b + c = 1$ (c) $b + c = 0$

(d) $b - c + 1 = 0$ (e) $b^2 + c^2 = 0$

সমাধান: $\alpha^2 - b\alpha + c = 0$ ..... (i) $\alpha^2 - c\alpha + b = 0$ ..... (ii)

$\frac{\alpha^2}{-b^2+c^2} = \frac{\alpha}{c-b} = \frac{1}{-c+b}$ $\therefore \alpha = c + b = -1$ $\therefore b + c + 1 = 0$

বিকল্প: ধরি, সাধারণ মূল α

তাহলে, $\alpha^2 - \beta\alpha + c = 0$ ..... (i)

$\alpha^2 - c\alpha + b = 0$ ..... (ii)

(i)-(ii) $\Rightarrow (c - b)\alpha + (c - b) = 0 \Rightarrow (c - b)(\alpha + 1) = 0$

$\therefore \alpha = -1$

α এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $1 + b + c = 0 \Rightarrow b + c + 1 = 0$

04. $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণদ্বয়ের দুটি মূলই সাধারণ হওয়ার শর্ত কি?

[RU'14-15, 08-09; JU'12-13, 10-11] [Ans: c]

(a) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ (b) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}$ (c) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (d) $a_1a_2 = b_1b_2 = c_1c_2$

Type-09: একটি লেখচিত্র অক্ষদ্বয়কে কয়টি বিন্দুতে ছেদ করবে তা সংক্রান্ত

Formula & Concept:

(i) একটি লেখচিত্র x অক্ষকে যেসকল বিন্দুতে ছেদ করবে, সেখানে তাদের কোটির মান 0। তাহলে, $y = f(x)$ বা $f(x, y) = 0$ আকৃতির সমীকরণে $y = 0$ বসালে x এর যতটি বাস্তব মান পাওয়া যাবে লেখচিত্রটি x অক্ষকে ততোগুলো বিন্দুতে ছেদ করবে।

(ii) একটি লেখচিত্র y অক্ষকে যেসকল বিন্দুতে ছেদ করবে, সেখানে তাদের ভুজের মান 0। তাহলে, $y = f(x)$ বা $f(x, y) = 0$ সমীকরণে $x = 0$ বসালে y এর যতটি বাস্তব মান পাওয়া যাবে লেখচিত্রটি y অক্ষকে ততগুলো বিন্দুতে ছেদ করবে।

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. যদি [a, b] ব্যবধিতে $f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন হয়, যেখানে $f(a)f(b) > 0$, তবে উক্ত ব্যবধিতে $f(x) = 0$ সমীকরণের বাস্তব মূল থাকবে- **[GST'21-22] [Ans: a]**

(a) জোড় সংখ্যক (b) মাত্র ২ টি (c) মাত্র ১ টি (d) বিজোড় সংখ্যক

সমাধান:

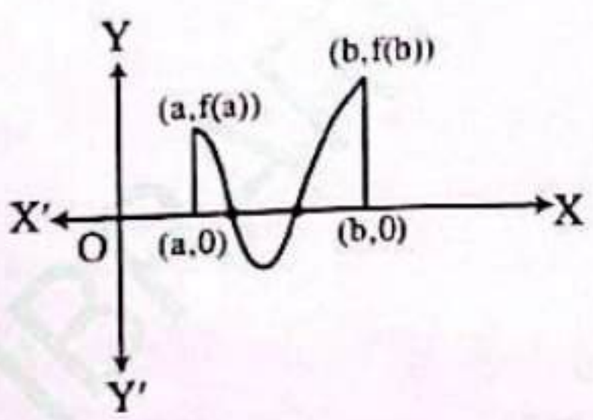


Figure-1

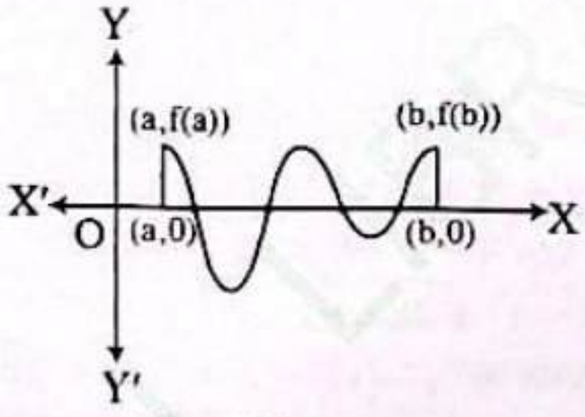


Figure-2

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

$y = f(x)$ ফাংশনটি x অক্ষকে যতগুলো বিন্দুতে ছেদ করে $f(x) = 0$ ফাংশনের ততগুলো বাস্তব মূল আছে। $f(a)f(b) > 0$ হলে $f(a) > 0, f(b) > 0$ অথবা $f(a) < 0, f(b) < 0$ হবে।
Fig-1 ও 2 এর ক্ষেত্রে, $x = a$ এর জন্য $f(a) > 0$ ও $x = b$ এর জন্য $f(b) > 0$ । $\therefore f(a)f(b) > 0$ । বাস্তব মূল থাকার জন্য ফাংশনের লেখচিত্রকে $(a, f(a))$ থেকে y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে এসে আবার y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে গিয়ে $(b, f(b))$ তে যেতে হবে। দেখা যাচ্ছে যে, Fig-1 এ x-অক্ষের ছেদবিন্দু 2 টি। $\therefore$ বাস্তব মূল 2 টি। আবার Fig-2 এর x-অক্ষের ছেদবিন্দু 4 টি। $\therefore$ বাস্তব মূল 4টি। অর্থাৎ, উভয়ক্ষেত্রেই বাস্তব মূল আছে জোড় সংখ্যক। অর্থাৎ, এক্ষেত্রে যদি ফাংশনের বাস্তব মূল থাকে তাহলে জোড় সংখ্যক বাস্তব মূল থাকবে।

02. $f(x) = 1 + x^3$ বক্ররেখাটির সাথে x-অক্ষের ছেদবিন্দুর সংখ্যা- **[DU'18-19] [Ans: b]**
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3
সমাধান: $y = f(x) = 1 + x^3$ ফাংশনটি x অক্ষকে যে সকল বিন্দুতে ছেদ করবে তাদের জন্য $y = 0$.
তাহলে, $0 = 1 + x^3 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x^3 = (-1)^3 \Rightarrow \left(\frac{x}{-1}\right)^3 = 1 \Rightarrow \frac{x}{-1} = \sqrt[3]{1} = 1, \omega, \omega^2$
$\therefore x = -1, -\omega, -\omega^2$
এখানে, -1 বাস্তব, কিন্তু $-\omega, -\omega^2$ অবাস্তব মূল। $\therefore$ বাস্তব মূল একটি।
অর্থাৎ, $f(x) = 1 + x^3$ ফাংশনটি 1 টি বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করবে।

Type-10: দ্বিঘাত বহুপদী ফাংশনের সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মান সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**
আদর্শ দ্বিঘাত বহুপদী ফাংশন $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ..... (i)
$\therefore a > 0$ হলে, $x = -\frac{b}{2a}$ তে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান, $y_{min} = -\frac{D}{4a} = c - \frac{b^2}{4a}$
$a < 0$ হলে, $x = -\frac{b}{2a}$ তে ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান, $y_{max} = -\frac{D}{4a} = c - \frac{b^2}{4a}$

MCQ

01. $y = x(1 - x)$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: d]**
(a) -2 (b) $-\frac{1}{4}$ (c) -1 (d) $\frac{1}{4}$
সমাধান: $y = x - x^2 = -x^2 + x$; সর্বোচ্চ মান $= \frac{-D}{4a} = \frac{-(1^2 - 4.(-1) \times 0)}{4.(-1)} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$

02. x বাস্তব সংখ্যা হলে $x^2 - 4x + 5$ রাশিটির ক্ষুদ্রতম মান কোনটি? **[JU'23-24] [Ans: a]**
(a) 1 (b) -1 (c) 4 (d) 5
সমাধান: $x^2 - 4x + 5$ এর ক্ষুদ্রতম মান$= c - \frac{b^2}{4a} = 5 - \frac{16}{4 \cdot 1} = 1$; $[\because a = 1, b = -4, c = 5]$

03. $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান কত? **[RU'21-22] [Ans: b]**
(a) 4 (b) -4 (c) 16 (d) -16
সমাধান: সর্বনিম্ন মান $= -\frac{D}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}{4 \cdot 1} = -\frac{36 - 20}{4} = -4$
বিকল্প: $f(x) = x^2 - 6x + 5 \therefore f'(x) = 2x - 6$
$\therefore$ সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \therefore x = 3 \therefore f''(x) = 2 > 0$
$\therefore x = 3$ তে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে $\therefore f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$

Written

01. x এর কোন মানের জন্য $-x^2 + 2bx + c^2$ এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়? **[RU'12-13]**
সমাধান: $-x^2 + 2bx + c^2 = -x^2 + 2bx - b^2 + b^2 + c^2 = -(x - b)^2 + b^2 + c^2$
রাশিটির মান সর্বোচ্চ হবে যদি $x - b = 0$ হয় $\therefore x = b$
বিকল্প: ধরি, $f(x) = -x^2 + 2bx + c^2$
সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের জন্য, $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2b = 0 \Rightarrow x = b$
এখন, $f''(x) = -2 < 0 \therefore x = b$ হলে রাশিটির মান সর্বোচ্চ হবে।

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-11: বিবিধ

Formula & Concept:

- ভাগশেষ উপপাদ্য **(Remainder Theorem):** কোনো বহুপদী $f(x)$ কে $x-\alpha$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $f(\alpha)$ হয়।
  উৎপাদক উপপাদ্য **(Factor Theorem):** $f(x)=0$ সমীকরণের একটি মূল α হলে, $x-\alpha$ হবে $f(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক। উৎপাদক উপপাদ্যে মূলত ভাগশেষ উপপাদ্যের-ই একটি অনুসিদ্ধান্ত।
- ভাগশেষ উপপাদ্য এবং আরও কিছু শর্ত সাপেক্ষে মান নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা এখানে দেওয়া হয়েছে। প্রয়োজন অনুসারে শর্তসমূহ ব্যবহার করে এগুলো সমাধান করতে হবে।

MCQ

01. $x^{19}-6x^{11}+k$ রাশির একটি উৎপাদক $(x-1)$ হলে, $k=$? **[RU'23-24] [Ans: a]**

(a) 5 (b) -5 (c) 6 (d) -6

সমাধান: $x^{19}-6x^{11}+k=f(x)$

$(x-1)$ উৎপাদক হলে, $f(1)=0\Rightarrow 1-6+k=0\Rightarrow k=5$

02. $4x^4-5x^3-4x^2+7x+9$ কে $x+1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কোনটি? **[JU'23-24] [Ans: a]**

(a) 7 (b) -7 (c) 11 (d) 10

সমাধান: $f(x)=4x^4-5x^3-4x^2+7x+9$; $(x+1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(-1)$

$\therefore f(-1)=4+5-4-7+9=18-11=7$

03. $\frac{x^n-a^n}{x-a}$ নিঃশেষে বিভাজ্য হলে, ভাগফলের সর্বোচ্চ ঘাত কত? **[RU'22-23] [Ans: c]**

(a) 1 (b) n (c) $n-1$ (d) $n-2$

সমাধান: লবে চলকের সর্বোচ্চ ঘাত n এবং হরে চলকের সর্বোচ্চ ঘাত 1। নিঃশেষে বিভাজ্য হলে, সর্বোচ্চ ঘাত হবে: $n-1$

04. k এর কোন মানের জন্য $x^2-3x+2+k$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x-3)$ হবে? **[RU'22-23] [Ans: b]**

(a) -3 (b) -2 (c) 1 (d) 2

সমাধান: $f(x)=x^2-3x+2+k\therefore f(3)=3^2-3\cdot 3+2+k=k+2$

এখন, $f(3)=0\Rightarrow k+2=1\therefore k=-2$

05. α এর মান কত হলে $x^3+x^2+x+\alpha$ রাশিটি $x+2$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে? **[JU'19-20] [Ans: b]**

(a) 4 (b) 6 (c) -6 (d) 9

সমাধান: $f(x)=x^3+x^2+x+\alpha$; যেহেতু $(x+2)$ দ্বারা $f(x)$ কে নিঃশেষে ভাগ করা যাবে।

সেহেতু $f(-2)=0$ হবে। $\therefore f(-2)=0\Rightarrow(-2)^3+(-2)^2+(-2)+\alpha=0$

$\Rightarrow \alpha-6=0\Rightarrow\alpha=6\therefore\alpha=6$

06. $3^{x+5}=3^{x+3}+\frac{8}{3}$ হলে, $x=$? **[RU'17-18] [Ans: c]**

(a) 1 (b) -2 (c) -4 (d) 4

সমাধান: $3^x\cdot 3^5-3^x\cdot 3^3=\frac{8}{3}\Rightarrow 3^{x+3}(3^2-1)=\frac{8}{3}\Rightarrow 3^{x+3}\cdot 8=8\cdot 3^{-1}\therefore x+3=-1\therefore x=-4$

07. $2x^2-9x+4$ ফাংশনের একটি উৎপাদক $(x-4)$ হলে, $2x^2-9x+4=0$ সমীকরণটিতে x এর মান কত হবে? **[JU'17-18] [Ans: b]**

(a) $(1,4)$ (b) $\left(4,\frac{1}{2}\right)$ (c) $(1,-4)$ (d) $(2,4)$

সমাধান: একটি উৎপাদক $(x-4)$ হওয়ায় একটি মূল হবে 4। ধরি, অপর মূলটি α

$\therefore \alpha\cdot 4=\frac{4}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}\therefore$ মূলদ্বয় $\left(4,\frac{1}{2}\right)$

08. m এর কোন মানের জন্য $(x-1)^{m-1}$ এর 3 টি বাস্তব এবং অভিন্ন মূল বিদ্যমান? **[CU'16-17] [Ans: c]**

(a) $m=3$ (b) $m=-3$ (c) $m=4$ (d) $m=-4$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

"প্রাপ্তি দেয় জীবিকা, জীবন ভূমিষ্ঠ হয় দানে"
-Winston S. Churchill

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

অধ্যায় ০৬

কনিক

➤ ভার্সিটি ভর্তি পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪✪	T-01	কনিকের প্রকৃতি নির্ণয় সংক্রান্ত	11	-	DU'23-24, 18-19; RU'21-22, 19-20, 18-19, 17-18; CU'20-21, 15-16; JU'18-19; SUST'19-20	-
✪✪	T-02	পরাবৃত্তের লেখচিত্র সম্পর্কিত	2	-	RU'13-14; CU'22-23	-
✪✪✪	T-03	সমীকরণ থেকে পরাবৃত্তের বিভিন্ন উপাদান নির্ণয়	22	1	DU'23-24, 21-22, 20-21, 16-17, 14-15, 13-14; GST'22-23, 20-21; RU'23-24, 22-23; CU'18-19; JU'20-21, 18-19, 17-18; Agri.'19-20; KU'19-20	DU'22-23
✪✪	T-04	অক্ষের সমান্তরাল অক্ষরেখা / দিকাক্ষ	2	-	RU'21-22; CU'14-15	-
✪	T-05	পরাবৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ	2	-	GST'22-23; CU'14-15	-
✪✪	T-06	উপকেন্দ্রিক দূরত্ব / ফোকাস দূরত্ব	2	-	RU'15-16; JU'22-23	-
✪	T-07	অনাদর্শ অবস্থানে উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষের সমীকরণ হতে পরাবৃত্তের সমীকরণ	1	-	JU'18-19	-
✪✪✪	T-08	উপবৃত্তের সমীকরণ থেকে বিভিন্ন উপাদান নির্ণয়	25	-	DU'21-22, 19-20, 17-18, 16-17; GST'22-23, 21-22; RU'23-24, 21-22, 17-18, 16-17; CU'23-24, 16-17, 14-15; JU'23-24, 22-23, 21-22, 19-20, 17-18, 15-16; KU'18-19; BAU'18-19	-
✪	T-09	$SP = e \cdot PM$ সম্পর্কিত	1	-	CU'18-19	-
✪✪✪	T-10	অধিবৃত্তের সমীকরণ থেকে বিভিন্ন উপাদান নির্ণয়	10	-	DU'21-22, 18-19; RU'23-24, 22-23, 21-22; CU'22-23; JU'21-22; JnU'15-16	-

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪✪	T-11	অধিবৃত্তের অসীমতট সম্পর্কিত	5	-	RU'22-23, 21-22, 20-21, 17-18; SUST'19-20	-
✪✪✪	T-12	স্পর্শক/ছেদক সম্পর্কিত	11	-	DU'17-18; GST'21-22; RU'23-24, 22-23, 21-22, 20-21; JU'23-24, 16-17; Agri.'21-22; JnU'14-15	-

Type-01: কনিকের প্রকৃতি নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

কনিকের সাধারণ সমীকরণ, $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

(i) $\Delta = 0$ হলে সমীকরণটি একজোড়া সরলরেখা নির্দেশ করে।

(ii) $\Delta \neq 0; a = b \neq 0$ এবং $h = 0$ হলে সমীকরণটি বৃত্ত নির্দেশ করে। $[e \to 0]$

(iii) $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 - ab = 0 \Rightarrow h^2 = ab$ হলে, $[e = 1]$ সমীকরণটি পরাবৃত্ত।

(iv) $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 - ab < 0 \Rightarrow h^2 < ab$ হলে, $[0 < e < 1]$ সমীকরণটি উপবৃত্ত।

(v) $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 - ab > 0 \Rightarrow h^2 > ab$ হলে, $[e > 1]$ সমীকরণটি অধিবৃত্ত।

➲ **Shortcut:**

সহজ করে ভাবি যদি xy যুক্ত পদ না থাকে তবে,

(i) বৃত্ত হলে x^2 এর সহগ $= y^2$ এর সহগ।

(ii) উপবৃত্ত হলে x^2, y^2 এর সহগ একই চিহ্নবিশিষ্ট এবং অসমান।

(iii) অধিবৃত্ত হলে x^2, y^2 এর সহগ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট।

(iv) পরাবৃত্ত হলে x^2 বা y^2 এর যেকোনো একটি অনুপস্থিত।

MCQ

01. $16y^2 - 9x^2 + 18x + 64y + 199 = 0$ দ্বারা নির্দেশিত কনিক কোনটি? [DU'23-24] [Ans: a]

(a) অধিবৃত্ত (hyperbola) (b) বৃত্ত (circle) (c) পরাবৃত্ত (parabola) (d) উপবৃত্ত (ellipse)

সমাধান: $16y^2 - 9x^2 + 18x + 64y + 199 = 0$ ∵ এখানে কোনো xy যুক্ত পদ নেই এবং x^2 ও y^2 এর চিহ্ন বিপরীত, তাই এটি একটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করে।

বিকল্প: $a = -9, b = 16, h = 0, c = 199, g = 9, f = 32$

$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & 0 & 9 \\ 0 & 16 & 32 \\ 9 & 32 & 199 \end{vmatrix} \neq 0 \therefore h^2 - ab = 0^2 - (-9) \times 16 = 144 > 0$

∴ এটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করে।

02. $x = \frac{1}{2\cos\theta}$, $y = \frac{3\sin\theta}{2\cos\theta}$ দ্বারা কোন কনিকের সমীকরণ বুঝায়? [RU'21-22] [Ans: b]

(a) বৃত্ত (b) অধিবৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) পরাবৃত্ত

সমাধান: $x = \frac{1}{2\cos\theta} = \frac{\sec\theta}{2}; y = \frac{3\sin\theta}{2\cos\theta} = \frac{3}{2}\tan\theta$

$\therefore 2x = \sec\theta \ldots\ldots\ldots (i)$; $\frac{2}{3}y = \tan\theta \ldots\ldots\ldots (ii)$

$(i)^2 - (ii)^2 \Rightarrow 4x^2 - \frac{4}{9}y^2 = \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \therefore \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1 \ldots\ldots\ldots (iii)$

যেহেতু, (iii) অধিবৃত্তের সমীকরণের $\left[\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right]$ সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ, তাই এটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

03. $17x^2 - 2xy + 17y^2 - 104x - 140y + 446 = 0$ বক্র রেখাটির জ্যামিতিক পরিচয় কি? [CU'20-21] [Ans: d]
(a) বৃত্ত (b) পরাবৃত্ত (c) অধিবৃত্ত (d) উপবৃত্ত

সমাধান: $ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + 2hxy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $h = -1 ; a = b = 17$

সুতরাং, $h^2 = 1$ এবং $ab = 289 \therefore h^2 < ab$ অর্থাৎ কনিকটি উপবৃত্ত।

04. $3x^2 + 4y^2 - 6x = 9$ সমীকরণটি কী বর্ণনা করে? [RU'19-20; CU'13-14] [Ans: c]
(a) এক জোড়া সরলরেখা (b) পরাবৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

সমাধান: $3x^2 + 4y^2 - 6x = 9 \Rightarrow 3(x^2 - 2x + 1) + 4y^2 = 9 + 3$

$\Rightarrow 3(x-1)^2 + 4y^2 = 12 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, যা উপবৃত্তের সমীকরণ।

বিকল্প: $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে,

$A = 3;\ b = 4; g = -3; c = -9$ এবং $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 3(-36 - 0) - 3(0 + 12) = -144 \neq 0$

$\therefore ab = 12 \ \therefore h^2 = 0 \ \therefore h^2 - ab < 0 \therefore$ উপবৃত্ত

Shortcut: xy যুক্ত পদ নেই x^2, y^2 এর সহগ একই চিহ্ন এবং ধনাত্মক চিহ্নবিশিষ্ট তবে অসমান তাই উপবৃত্ত।

05. $2x^2 - 4xy + 3y^2 - x + y - 1 = 0$ সমীকরণের জ্যামিতিক রূপ কোনটি? [SUST'19-20; RU'18-19] [Ans: c]
(a) পরাবৃত্ত (b) বৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত (e) জোড়া সরলরেখা

সমাধান: $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4} \neq 0$

$h^2 = 4,\ ab = 6,\ h^2 < ab \therefore$ উপবৃত্ত।

06. $xy = 2$ সমীকরণটি হবে- [JU'18-19] [Ans: d]
(a) বৃত্ত (b) পরাবৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

সমাধান: যেহেতু $a = 0, b = 0, h = \frac{1}{2}, h^2 - ab > 0 \therefore$ সমীকরণটি অধিবৃত্ত।

07. বৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত? [RU'17-18; CU'14-15] [Ans: a]
(a) 0 (b) ∞ (c) $45°$ (d) 1

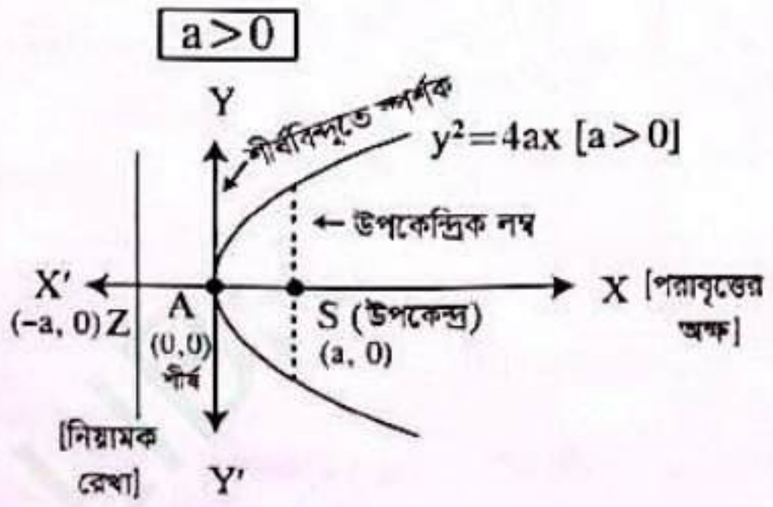
08. যদি $0 < e < 1$ সত্য হয়, তবে উৎকেন্দ্রিকতা (e) এর জন্য সঞ্চারপথটি হবে- [CU'15-16] [Ans: e]
(a) অধিবৃত্ত (b) বৃত্ত (c) সরলরেখা (d) পরাবৃত্ত (e) উপবৃত্ত

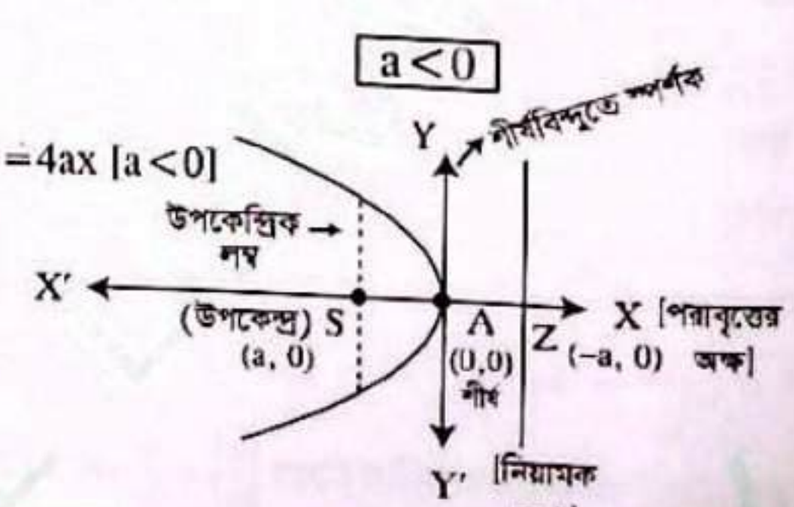
POLE MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-02: পরাবৃত্তের লেখচিত্র সম্পর্কিত

➲ **Formula & Concept:**

♦ $y^2 = 4ax$

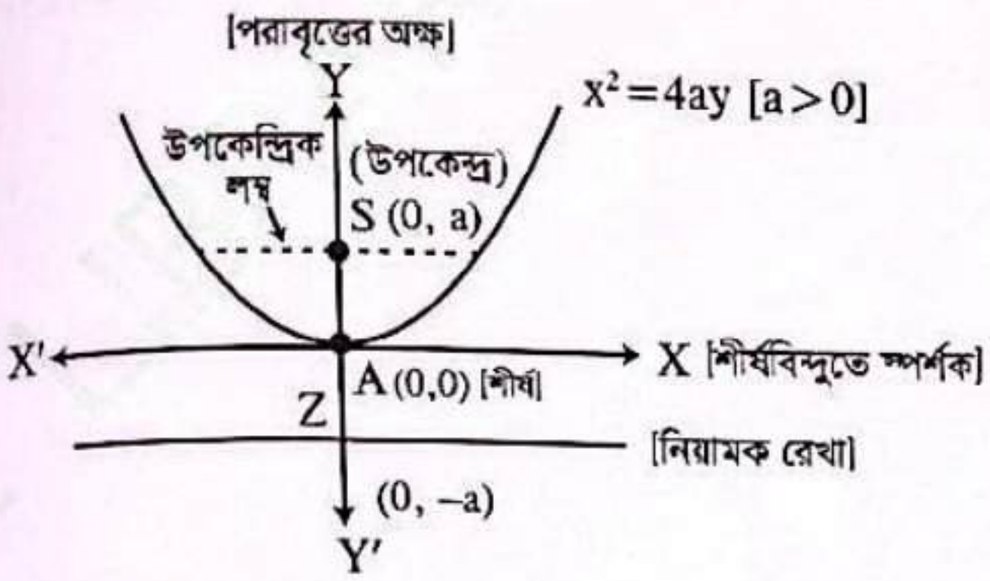




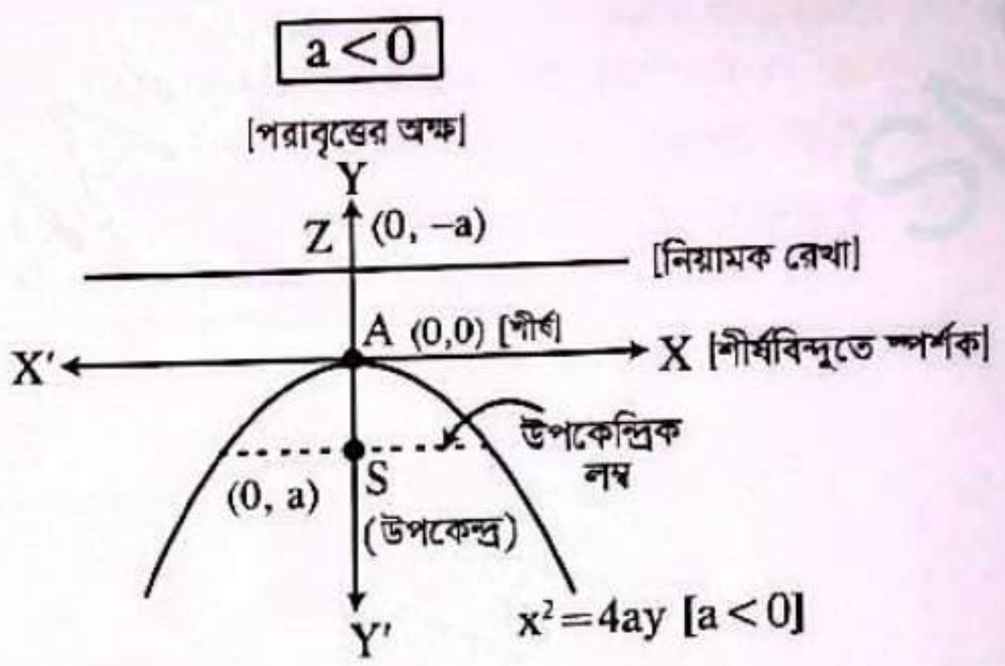
Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

- $x^2 = 4ay$

a > 0



a < 0



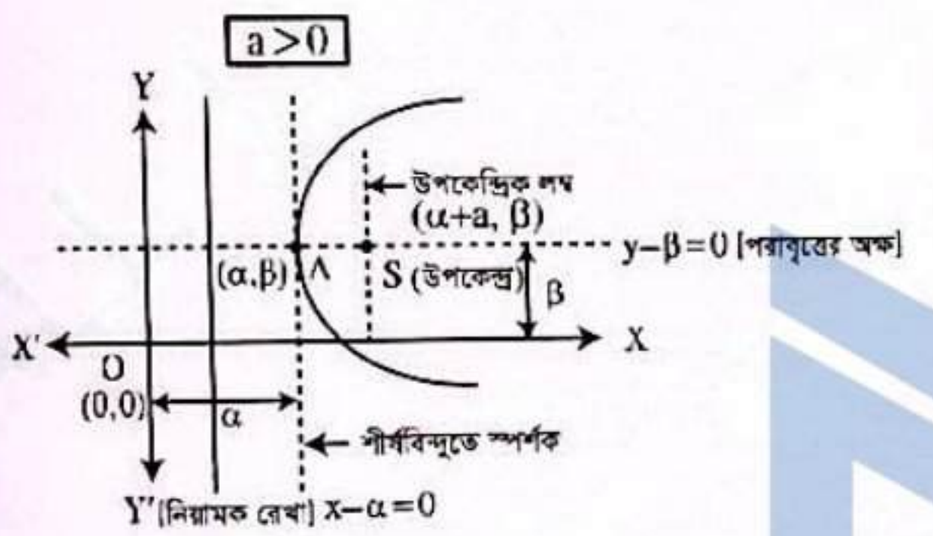
- **অক্ষ স্থানান্তর:**

(i) শীর্ষ (α, β) এবং অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল হলে পরাবৃত্তের চিত্র:

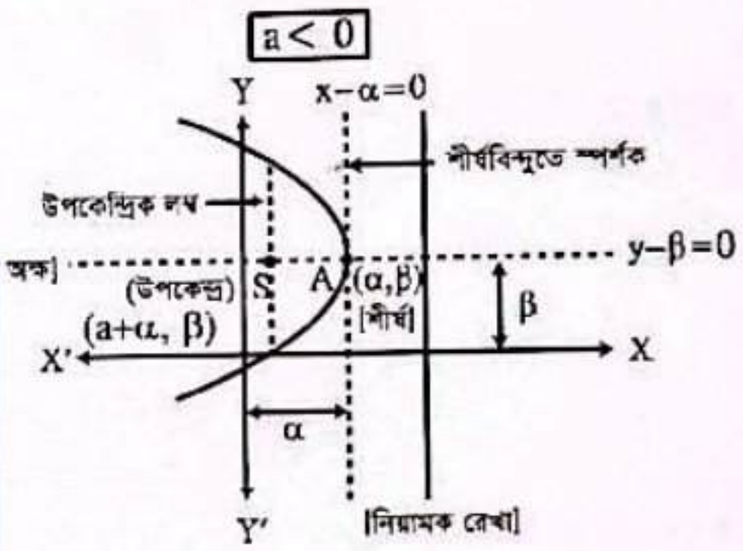
$A(\alpha, \beta)$ তে শীর্ষবিন্দু এবং অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$\boxed{(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)}$ বা, $\boxed{Y^2 = 4aX}$; [যেখানে, $Y = y-\beta, X = x-\alpha$]

a > 0



a < 0

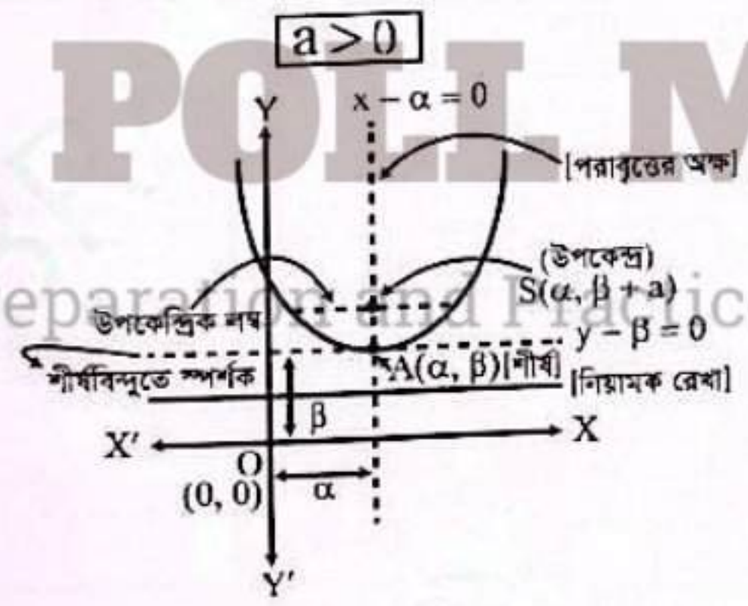


(ii) (α, β) শীর্ষ এবং অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল হলে পরাবৃত্তের চিত্র:

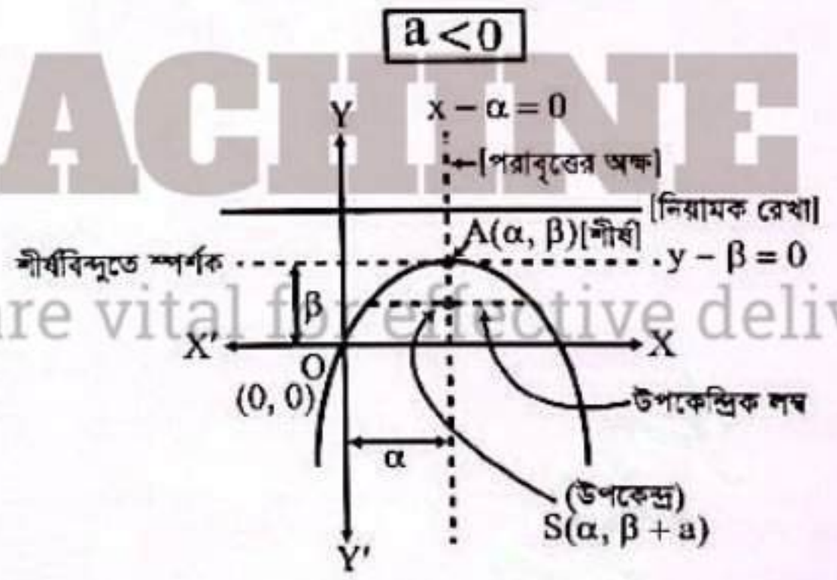
$A(\alpha, \beta)$ তে শীর্ষ বিন্দু এবং অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$\boxed{(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)}$ বা, $\boxed{X^2 = 4aY}$ [যেখানে, $Y = y-\beta, X = x-\alpha$]

a > 0



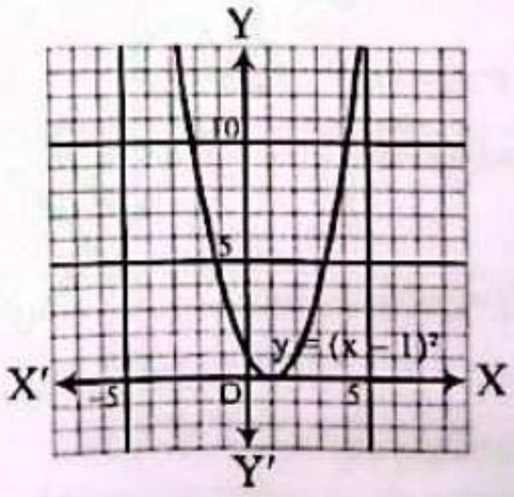
a < 0



Special Case: $\sqrt{y} = (x-1)$ এর লেখচিত্র:

$y = (x-1)^2$; [বর্গ করে]

$\Rightarrow \sqrt{y} \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 0 \therefore x \geq 1$ হতে হবে।



POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

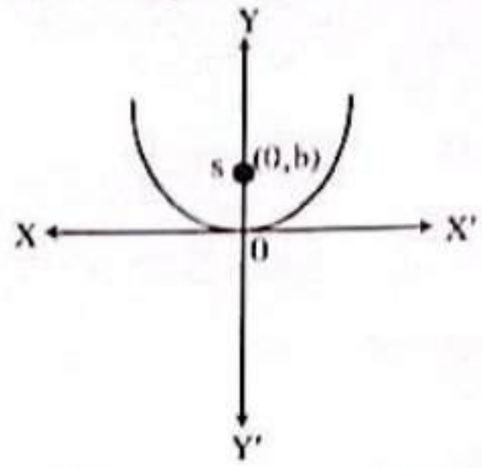
Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

MCQ

01. $x^2 = 4by$ পরাবৃত্তটি কিসের সাপেক্ষে প্রতিসম? [CU'22-23] [Ans: b]

(a) x-অক্ষের (b) y-অক্ষের (c) মূলবিন্দুর (d) কোনোটিই নয়

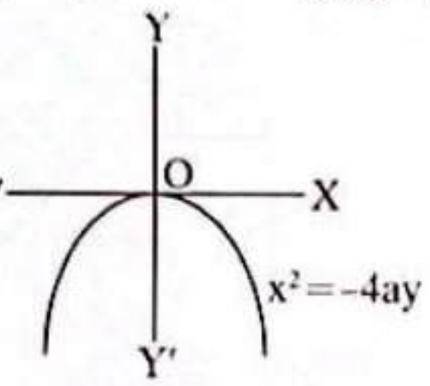
সমাধান: সমীকরণে যে চলকে এক ঘাত থাকবে ঐ পরাবৃত্তটি উক্ত অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।



02. $x^2 = -4ay, a > 0$ অক্ষরেখার কোন দিকে অবস্থিত? [RU'13-14] [Ans: d]

(a) x-অক্ষের উপরে (b) y-অক্ষের ডানদিকে (c) y-অক্ষের বামদিকে (d) x-অক্ষের নিচে

সমাধান:



Type-03: সমীকরণ থেকে পরাবৃত্তের বিভিন্ন উপাদান নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

	$a > 0, a < 0$	$a > 0, a < 0$	$a > 0, a < 0$	$a > 0, a < 0$
পরাবৃত্তের আকার	$y^2 = 4ax$	$x^2 = 4ay$	$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$	$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$
(i) শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক, A:	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α, β)
(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, S:	$(a, 0)$	$(0, a)$	$(a+\alpha, \beta)$	$(\alpha, a+\beta)$
(iii) নিয়ামকরেখার পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক, Z:	$(-a, 0)$	$(0, -a)$	$(-a+\alpha, \beta)$	$(\alpha, -a+\beta)$
(iv) অক্ষরেখার সমীকরণ:	$y = 0$ বা, x অক্ষ	$x = 0$ বা, y অক্ষ	$y - \beta = 0$ বা, x অক্ষের সমান্তরাল	$x - \alpha = 0$ বা, y অক্ষের সমান্তরাল
(v) নিয়ামকরেখার সমীকরণ:	$x + a = 0$ $x = -a$	$y + a = 0$ $y = -a$	$x - \alpha + a = 0$ $(x-\alpha) = -a$	$y - \beta + a = 0$ $(y-\beta) = -a$
(vi) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ:	$x = a$	$y = a$	$x - \alpha = a$	$y - \beta = a$
(vii) শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ:	$x = 0$	$y = 0$	$x - \alpha = 0$	$y - \beta = 0$
(viii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, LL':	$4\lvert a\rvert$	$4\lvert a\rvert$	$4\lvert a\rvert$	$4\lvert a\rvert$
(ix) উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক:	$(a, \pm 2a)$	$(\pm 2a, a)$	$(a+\alpha, \pm 2a+\beta)$	$(\pm 2a+\alpha, a+\beta)$
(x) (x, y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব, SP:	$x + a$	$y + a$	$x - \alpha + a$	$y - \beta + a$
(xi) উপকেন্দ্র ও শীর্ষের দূরত্ব	a	a	a	a

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

	$a>0, a<0$	$a>0, a<0$	$a>0, a<0$	$a>0, a<0$
পরাবৃত্তের আকার	$y^2 = 4ax$	$x^2 = 4ay$	$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$	$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$
(xii) পরামিতিক সমীকরণ	$x = at^2$ $y = 2at$	$x = 2at$ $y = at^2$	$x = \alpha + at^2$ $y = \beta + 2at$	$x = \alpha + 2at$ $y = \beta + at^2$
(xiii) পোলার সমীকরণ	$r = 4a\cot\theta$ $\operatorname{cosec}\theta$	$r = 4a\tan\theta$ $\sec\theta$	$(r\sin\theta-\beta)^2 = 4a(r\cos\theta-\alpha)$	$(r\cos\theta-\alpha)^2 = 4a(r\sin\theta-\beta)$

- অন্যান্য:

(i) x-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ: $x = ay^2 + by + c$;

শীর্ষ $\left(c - \frac{b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{1}{|a|}$

(ii) y-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ: $y = ax^2 + bx + c$;

শীর্ষ $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{1}{|a|}$

(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 2 \times$ উৎকেন্দ্রিকতা $\times$ উপকেন্দ্র হতে দিকাক্ষের লম্ব দূরত্ব।

MCQ

01. $y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু হবে- **[DU'23-24, 16-17] [Ans: a]**

(a) $\left(\frac{9}{4}, -1\right)$ (b) $\left(-\frac{9}{4}, 1\right)$ (c) $(0,2)$ (d) $(2,0)$

সমাধান: $y^2 + 4x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = -4x + 9 \Rightarrow (y+1)^2 = -4\left(x - \frac{9}{4}\right)$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দু $\left(\frac{9}{4}, -1\right)$

বিকল্প: $y^2 + 4x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy}(y^2 + 4x + 2y - 8) = 0$ [যার দ্বিঘাত তার সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে ঐ অক্ষ বরাবর শীর্ষের স্থানাঙ্ক পাওয়া যায়]

$\Rightarrow 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \therefore (-1)^2 + 4x + 2(-1) - 8 = 0 \Rightarrow 4x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{4} \therefore$ শীর্ষবিন্দু $\left(\frac{9}{4}, -1\right)$

02. $y^2 = -8x$ ও $x^2 = 16y$ পরাবৃত্ত দুইটির উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: c]**

(a) 0 (b) $\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{5}$ (d) 6

সমাধান: $y^2 = -8x; x^2 = 16y$

উপকেন্দ্র $S_1(-2,0)$ উপকেন্দ্র $S_2(0,4) \therefore S_1S_2 = \sqrt{(0+2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$ একক।

03. $2x = y^2 + 8y + 22$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে- **[RU'23-24; RU'22-23; DU'20-21] [Ans: a]**

(a) $(3,-4)$ (b) $(-3,4)$ (c) $(-3,-4)$ (d) $(3,4)$

সমাধান: $2x = y^2 + 8y + 22 \Rightarrow y^2 + 8y + 16 = 2x - 6 \Rightarrow (y+4)^2 = 2(x-3) \therefore$ শীর্ষবিন্দু $(3,-4)$

বিকল্প: $y^2 + 8y + 22 - 2x = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy}(y^2 + 8y + 22 - 2x) = 0$; [যার দ্বিঘাত তার সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে ঐ অক্ষ বরাবর শীর্ষের স্থানাঙ্ক পাওয়া যায়।]

$\Rightarrow 2y + 8 = 0 \Rightarrow y = -4 \therefore (-4)^2 + 8(-4) + 22 = 2x \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \therefore$ শীর্ষবিন্দু $(3,-4)$

04. $x^2 - 8x + 4y - 4 = 0$ কনিকটির দিকাক্ষের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক- **[GST'22-23] [Ans: a]**

(a) $(4,6)$ (b) $(4,-6)$ (c) $(-4,-6)$ (d) $(6,4)$

সমাধান: $x^2 - 8x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 + 4y - 4 - 4^2 = 0$

$\Rightarrow (x-4)^2 + 4y - 4 - 16 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 + 4y - 20 = 0$

$\Rightarrow (x-4)^2 + 4(y-5) = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = -4(y-5) \Rightarrow (x-4)^2 = 4(-1)(y-5)$

$\therefore$ প্রদত্ত কনিকটি একটি $X^2 = 4aY$ আকৃতির পরাবৃত্ত।

এক্ষেত্রে, দিকাক্ষের পাদবিন্দু $\equiv (0,-a) \therefore X = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \therefore x = 4$ এবং $Y = -a \Rightarrow y - 5 = -(-1)$

$\therefore y = 6 \therefore (x,y) = (4,6)$

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

05. $x^2 = 4(2-y)$ পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ কোনটি? [RU'22-23] [Ans: c]

(a) $y = 1$ (b) $y + 3 = 0$ (c) $y = 3$ (d) $x = 3$

সমাধান: $x^2 = 4(2-y) \Rightarrow x^2 = -4(y-2) \therefore X^2 = 4(-1)Y \therefore a = -1$

$\therefore$ নিয়ামক রেখা: $Y = -a \Rightarrow y - 2 = -(-1) \therefore y = 3$

06. $y^2 = 8x + 2y - 9$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত? [DU'21-22] [Ans: a]

(a) (3, 1) (b) (3, 0) (c) (−1, 1) (d) (2, 0)

সমাধান: $y^2 = 8x + 2y - 9 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 8x - 8 \Rightarrow (y-1)^2 = 8(x-1)$

$\Rightarrow (y-1)^2 = 4 \cdot 2 \cdot (x-1) \therefore a = 2$

$\Rightarrow Y^2 = 4 \cdot 2 \cdot X$

উপকেন্দ্রের জন্য, $X = a; x - 1 = 2 \therefore x = 3$ এবং $Y = 0; y - 1 = 0 \therefore y = 1$ $\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $S(3, 1)$.

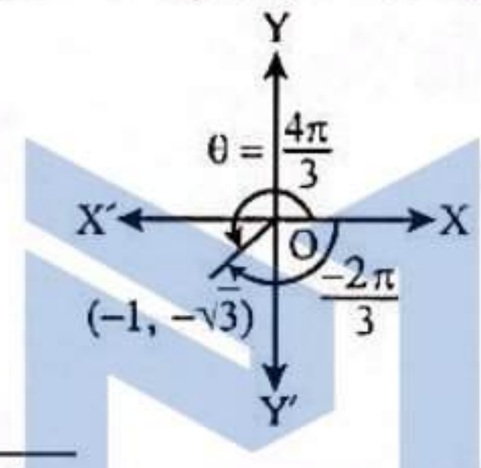
07. $(y+\sqrt{3})^2 = 8(x+3)$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি? [GST'20-21] [Ans: c]

(a) $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ (c) $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$ (d) $\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

সমাধান: $(y+\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 2(x+3) \Rightarrow Y^2 = 4aX$; [যেখানে $Y = y + \sqrt{3}, a = 2, X = x + 3$]

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\equiv (a, 0)$

$\therefore X = a \Rightarrow x + 3 = 2 \Rightarrow x = -1$ এবং $Y = 0 \Rightarrow y + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{3}$



$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ এবং $\theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

[$\because$ মুখ্য আর্গুমেন্ট $= -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = \frac{-2\pi}{3}$, যা option-এ নেই]

$\therefore$ উপকেন্দ্রের পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$।

08. $y^2 + 8x - 2y - 23 = 0$ পরাবৃত্ত (parabola) এর উপকেন্দ্র (focus) কোনটি? [JU'20-21; RU'17-18; CU'16-17; JU'15-16] [Ans: d]

(a) (1, 2) (b) (3, 1) (c) (5, 1) (d) (1, 1)

সমাধান: $y^2 + 8x - 2y - 23 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 - 1 + 8x - 23 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -8x + 24 \Rightarrow (y-1)^2 = 4(-2)(x-3) \Rightarrow Y^2 = 4aX$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

ফোকাস $(a, 0)$; $X = a \Rightarrow x - 3 = -2 \therefore x = 1$; $Y = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \therefore y = 1$ $\therefore$ ফোকাস (1, 1)

09. $5y^2 - 2x = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র কোনটি? [Agri.'19-20] [Ans: c]

(a) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(0, \frac{1}{5}\right)$ (c) $\left(\frac{1}{10}, 0\right)$ (d) $\left(0, \frac{1}{10}\right)$

সমাধান: $5y^2 - 2x = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{2}{5}x = 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot x \therefore a = \frac{1}{10}$ $\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(x, y) \equiv (a, 0) \equiv \left(\frac{1}{10}, 0\right)$

10. $y^2 = 4p(x-2)$ পরাবৃত্তটি $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে p এর মান কত? [KU'19-20] [Ans: d]

(a) −4 (b) 1 (c) 2 (d) 4

সমাধান: $(-4)^2 = 4p(3-2) \Rightarrow 16 = 4p \therefore p = 4$

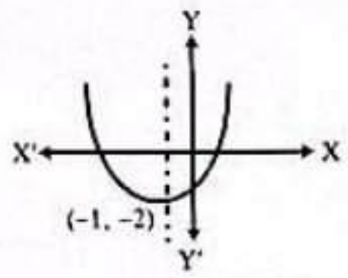
11. $3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$ পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ কোনটি? [CU'18-19] [Ans: a]

(a) $3y + 7 = 0$ (b) $x = -7$ (c) $x + y = 0$ (d) $x = y - 3$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

সমাধান: $3(x^2+2x+1)=4y+5+3$; $(x+1)^2=4\left(\frac{1}{3}\right)(y+2)$ [এখানে, $a=\frac{1}{3}$]; $X^2=4aY$ এর সাথে তুলনা করে পাই,



∴ দিকাক্ষের সমীকরণ: $Y=-a \therefore (y+2)=-a \therefore y=-2-\frac{1}{3} \Rightarrow y=-\frac{7}{3} \therefore 3y+7=0$

12. $y^2=6x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? **[JU'18-19] [Ans: b]**

(a) 8 (b) 6 (c) 4 (d) 5

সমাধান: $y^2=4ax$, এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=|4a|$ এখানে, $|4a|=6$.

13. $x^2-4x+12y-40=0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? **[JU'18-19; DU'13-14] [Ans: d]**

(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 12

সমাধান: $(x-2)^2=-12\left(y-\frac{11}{3}\right)$; এখানে, $|4a|=12$

Shortcut: x^2 থাকলে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=|y$ এর সহগ$|=12$ (কিন্তু এক্ষেত্রে সর্বদা দ্বিঘাতমুক্ত পদের সহগ 1 হতে হবে।)

14. $y^2-6x+4y+10=0$ পরাবৃত্তের অক্ষের সমীকরণ কোনটি? **[JU'17-18]**

(a) $x=1$ (b) $x+1=0$ (c) $x=0$ (d) $x-2=0$

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $y^2-6x+4y+10=0 \Rightarrow (y+2)^2=6(x-1)$

বা, $Y^2=4aX$ এর সাথে তুলনা করে পাই, পরাবৃত্তের অক্ষরেখার সমীকরণ, $Y=0 \Rightarrow y+2=0$

15. $5x^2+15x-10y-4=0$ পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ- **[DU'14-15] [Ans: c]**

(a) $40x+81=0$ (b) $2x+3=0$ (c) $40y+81=0$ (d) $40y+41=0$

সমাধান: $5\left(x^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\frac{9}{4}\right)=10y+4+\frac{45}{4} \Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{5}\left(y+\frac{61}{40}\right)$ বা, $X^2=4aY$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a=\frac{1}{2}; X=x+\frac{3}{2}; Y=y+\frac{61}{40}$

∴ নিয়ামকের সমীকরণ: $Y=-a \Rightarrow Y=-\frac{1}{2} \Rightarrow y+\frac{61}{40}+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow y+\frac{61+20}{40}=0 \therefore 40y+81=0$

Written

01. p এর কোন মানের জন্য (4,4) বিন্দুটি $x^2-8x+py+7=0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র হবে? **[DU'22-23]**

সমাধান: $x^2-8x+py+7=0 \Rightarrow x^2-8x=-py-7 \Rightarrow x^2-8x+16=-py-7+16$

$\Rightarrow (x-4)^2=-p\left(y-\frac{9}{p}\right) \Rightarrow (x-4)^2=4\left(\frac{-p}{4}\right)\left(y-\frac{9}{p}\right)$ বা, $X^2=4ay$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

উপকেন্দ্র $\equiv (0,a) \therefore X=0 \Rightarrow x-4=0 \therefore x=4$ এবং $Y=a \Rightarrow y-\frac{9}{p}=-\frac{p}{4} \Rightarrow y=-\frac{p}{4}+\frac{9}{p}$

∴ শর্তমতে, $-\frac{p}{4}+\frac{9}{p}=4 \Rightarrow p^2+16p-36=0 \therefore p=-18, 2$ **(Ans.)**

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-04: অক্ষের সমান্তরাল অক্ষরেখা / দিকাক্ষ

১ **Formula & Concept:**

- x-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল নিয়ামক রেখাবিশিষ্ট পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে পরাবৃত্তের সমীকরণ, $ay^2+by+c=x$ $[a\neq 0]$ অথবা, $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$ ধরতে হবে। [যেখানে (α,β) পরাবৃত্তের শীর্ষ]
- y-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল নিয়ামক রেখাবিশিষ্ট পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে পরাবৃত্তের সমীকরণ, $ax^2+bx+c=y$ $[a\neq 0]$ অথবা, $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$ ধরতে হবে। [যেখানে (α,β) পরাবৃত্তের শীর্ষ]

অতঃপর সমাধান করে a, b, c অথবা α, β, a এর মান বের করতে হবে।

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

MCQ

01. $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ $(-2,3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং এটি $(0,5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। b এর মান কত? **[RU'21-22] [Ans: d]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 5 (c) -2 (d) 2

সমাধান: ∵ পরাবৃত্তের শীর্ষ $(-2,3)$ এবং $y = ax^2 + bx + c$ .... (i) যার y একঘাত অর্থাৎ পরাবৃত্তের অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(x+2)^2 = 4a(y-3)$ .... (ii); (i) পরাবৃত্তটি $(0,5)$ বিন্দুগামী হলে,

$(0+2)^2 = 4a(5-3)$ ∴ $a = \frac{1}{2}$; (ii) নং-এ a এর মান বসালে পরাবৃত্তের সমীকরণ,

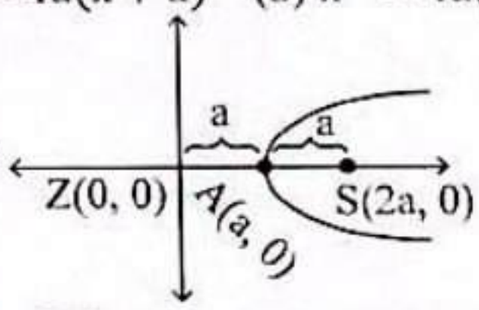
$(x+2)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}(y-3) = 2(y-3) \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 2y - 6 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 10)$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$ .... (iii) এখন, (i) ও (iii) তুলনা করে পাই, $b = 2$

02. অক্ষরেখাকে x -অক্ষ এবং দিকাক্ষকে y-অক্ষ ধরে পরাবৃত্তের সমীকরণ হবে- **[CU'14-15] [Ans: c]**

(a) $y^2 = 4a(x+a)$ (b) $x^2 = 4a(y-a)$ (c) $y^2 = 4a(x-a)$ (d) $x^2 = 4a(y+a)$

সমাধান:



পরাবৃত্তের শীর্ষ $A(a,0)$ এবং অক্ষ x অক্ষ। ∴ সমীকরণ হবে, $(y-0)^2 = \pm 4a(x-a) \Rightarrow y^2 = \pm 4a(x-a)$

∴ $y^2 = 4a(x-a)$

Type-05: পরাবৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ

➲ **Formula & Concept:**

আদর্শ সমীকরণ	$y^2 = 4ax$	$x^2 = 4ay$
পরামিতিক সমীকরণ	$x = at^2, y = 2at$	$y = at^2, x = 2at$

MCQ

01. যে কনিকের পরামিতিক সমীকরণ $x = 3 + at^2, y = 2at$ সেটার শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক- **[GST'22-23] [Ans: c]**

(a) (0,0) (b) (2,0) (c) (3,0) (d) (2,3)

সমাধান: এখানে, $t = \frac{y}{2a}$ এবং $(x-3) = a \cdot t^2 = a \cdot \frac{y^2}{4a^2} \Rightarrow (x-3) = \frac{y^2}{4a}$ ∴ $(y-0)^2 = 4a(x-3)$

∴ শীর্ষবিন্দু (3,0)

Shortcut: $x = 3 + at^2$ ∴ $(x-3) = at^2$; $y = 2at$ ∴ $(y-0) = 2at$ ∴ শীর্ষবিন্দু (3, 0)

02. $x = pt^2, y = 2pt$ পরামিতিক সমীকরণ দ্বারা সূচিত কনিক- **[CU'14-15] [Ans: c]**

(a) বৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

সমাধান: $x = pt^2; y = 2pt$ এখন, $y^2 = 4p^2t^2 = 4p(pt^2) = 4px$ ∴ $y^2 = 4px$; যা পরাবৃত্ত।

Type-06: উপকেন্দ্রিক দূরত্ব/ ফোকাস দূরত্ব

➲ **Formula & Concept:**

পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব = ঐ বিন্দু হতে নিয়ামক রেখার লম্ব দূরত্ব।

(i) $y^2 = 4ax$ এর উপরস্থ কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক/ফোকাস দূরত্ব $= a + x$,

(ii) $x^2 = 4ay$ এর উপরস্থ কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক/ফোকাস দূরত্ব $= a + y$

(iii) $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha) \Rightarrow Y^2 = 4aX$; $[X = x - \alpha, Y = y - \beta]$
এর উপরস্থ কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= a + X = a + x - \alpha$

(iv) $(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta) \Rightarrow X^2 = 4aY$; $[X = x - \alpha,\ Y = y - \beta]$
এর উপরস্থ কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= a + Y = a + y - \beta$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery
Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

MCQ

01. $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর কোটি 6 হলে, ঐ বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব কত? **[JU'22-23] [Ans: c]**

(a) $3\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) 10 (d) $3\sqrt{5}$

সমাধান: $y^2 = 4x$; প্রশ্নমতে কোটি, $y = 6 \therefore 6^2 = 4x \Rightarrow x = \frac{6^2}{4} = 9 \therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $(x, y) \equiv (9,6)$

$y^2 = 4x = 4 \cdot 1 \cdot x$ পরাবৃত্তে, উপকেন্দ্র $S(1, 0)$

$\therefore SP = \sqrt{(9-1)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ একক

বিকল্প: $SP = a + x_p = a + \frac{y_p^2}{4a} = 1 + \frac{6^2}{4 \cdot 1} = 1 + 9 = 10$ একক

02. কোনো পরাবৃত্ত $y^2 = 16x$ এর কোন বিন্দুর ফোকাস দুরত্ব 6। বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক কত? **[RU'15-16] [Ans: c]**

(a) $(2, \pm\sqrt{2})$ (b) $(4\sqrt{2}, \pm 2)$ (c) $(2, \pm 4\sqrt{2})$ (d) $(2, 4\sqrt{2})$

সমাধান: এখানে, $(0,0)$ পরাবৃত্ত $y^2 = 16x$ এর শীর্ষবিন্দু এবং ফোকাল দূরত্ব $= a + x \therefore 4 + x = 6 \Rightarrow x = 2$

যদি $x = 2$ হয়, তাহলে $y^2 = 32 \therefore y = \pm 4\sqrt{2} \therefore$ কাঙ্ক্ষিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv (2, \pm 4\sqrt{2})$

Type-07: অনাদর্শ অবস্থানে উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষের সমীকরণ হতে পরাবৃত্তের সমীকরণ

➲ **Formula & Concept:**

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (α, β) এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ

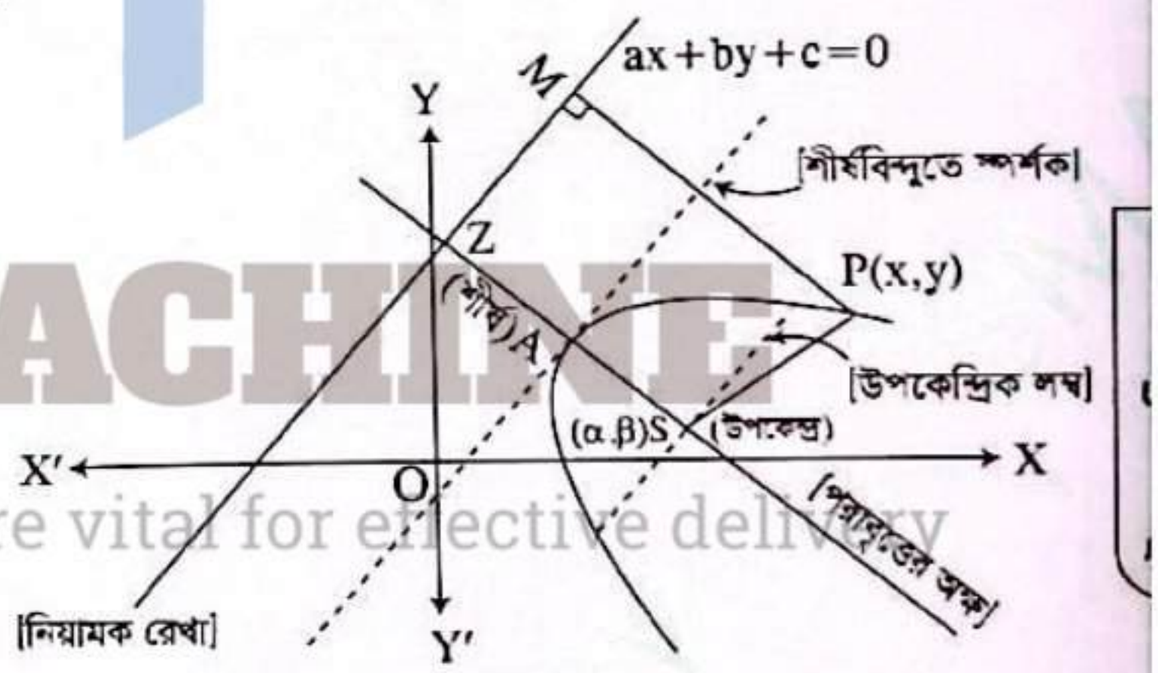
$ax + by + c = 0$ হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি, P (x, y) উক্ত পরাবৃত্তের উপর যেকোনো একটি বিন্দু।

$\frac{SP}{PM} = e = 1 \Rightarrow SP = PM \Rightarrow SP^2 = PM^2$

$\Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$



Tips: এক্ষেত্রে ব্যবহৃত সূত্র,

$SP = e \cdot PM$

S = উপকেন্দ্র

P = পরাবৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু

e = উৎকেন্দ্রিকতা

[**Note:** পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে, উৎকেন্দ্রিকতা 1]

MCQ

01. উপকেন্দ্র $(2, 0)$ এবং $x + 2 = 0$ নিয়ামক বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ কোনটি? **[JU'18-19] [Ans: b]**

(a) $y^2 = 4x$ (b) $y^2 = 8x$ (c) $x^2 = 4y$ (d) $x^2 = 8y$

সমাধান: $(x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2 \Rightarrow y^2 = 8x$; [$SP = e \cdot PM$ ব্যবহার করে]

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

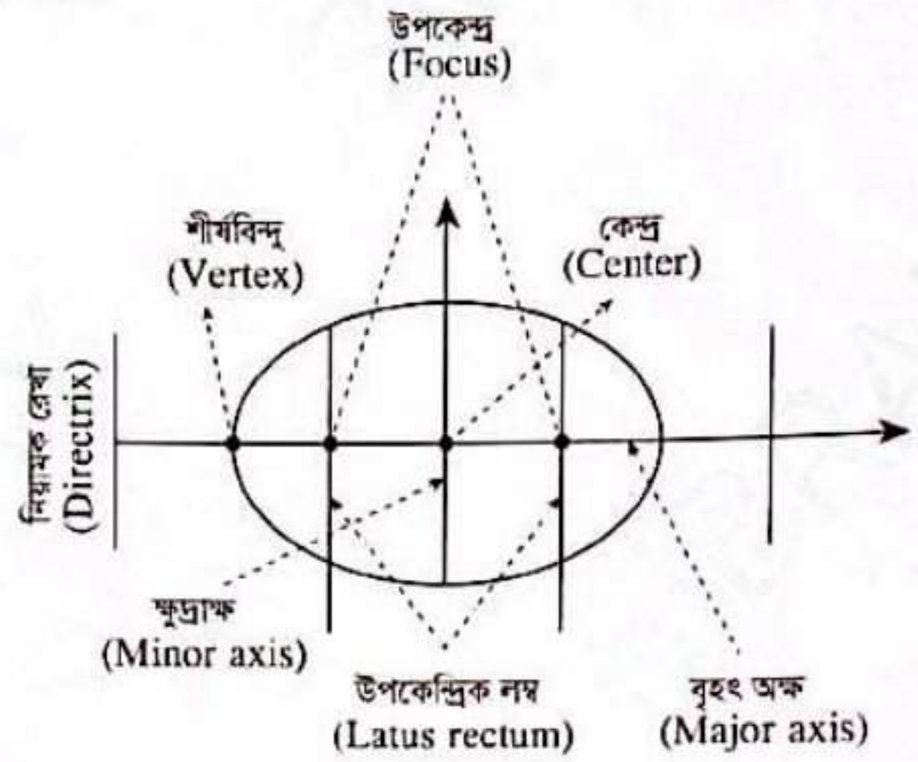
Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-08: উপবৃত্তের সমীকরণ থেকে বিভিন্ন উপাদান নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

উপবৃত্তের জন্য $0 < e < 1$.

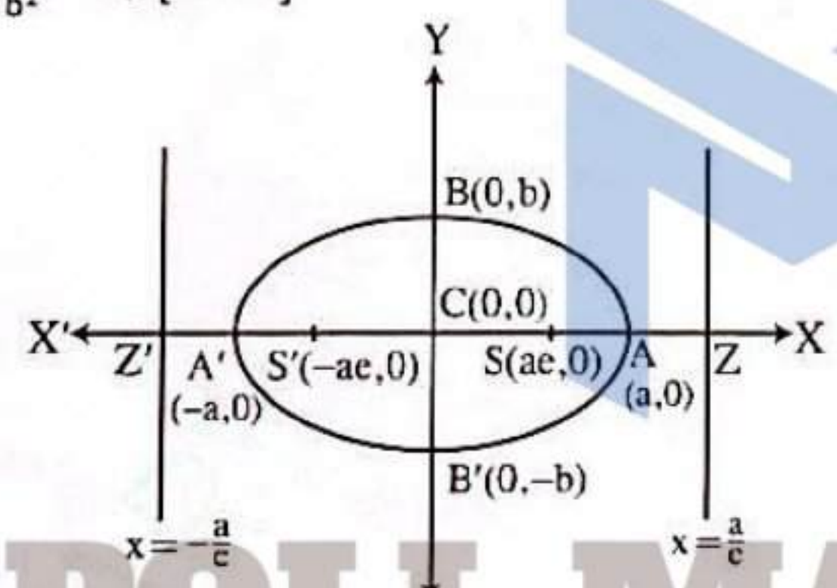
♦ চিত্র হতে বিভিন্ন উপাদান শনাক্তকরণ:



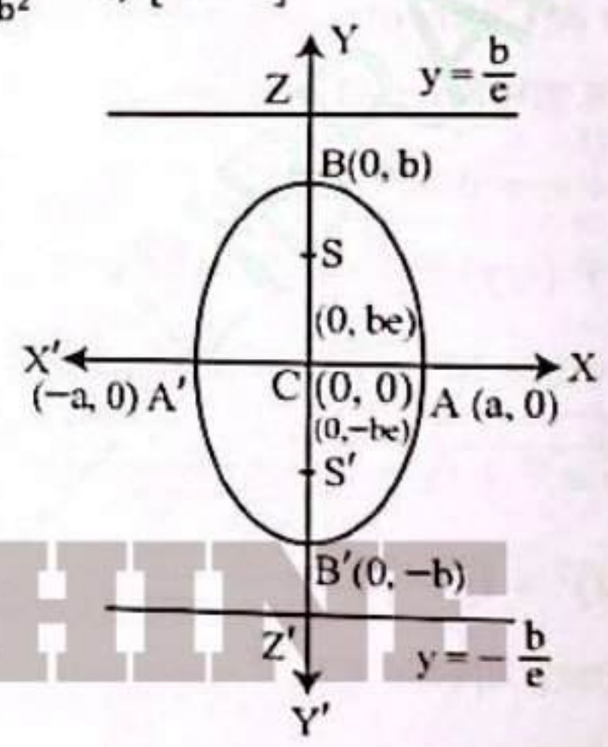
♦ উপবৃত্তের বিভিন্ন আদর্শ আকৃতির চিত্র:

➢ অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষ বরাবর:

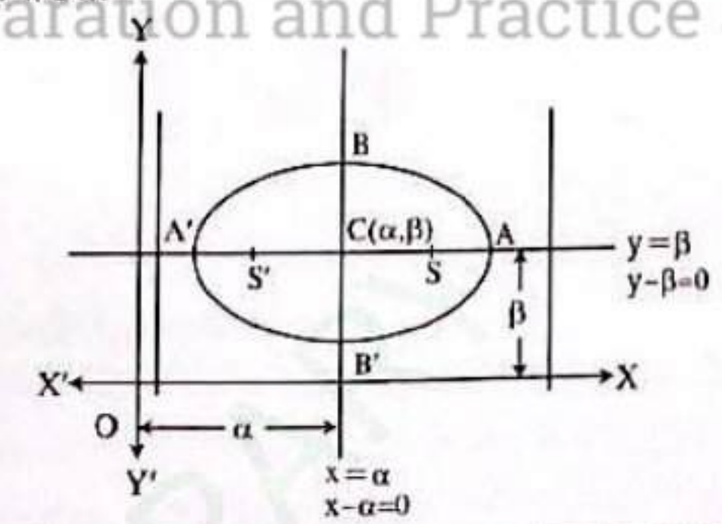
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\ [a > b]$



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\ [a < b]$



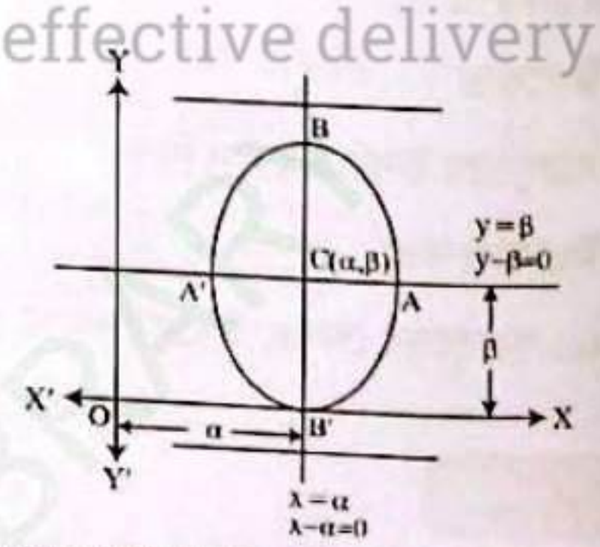
➢ অক্ষ স্থানান্তর:



কেন্দ্র (α, β) এবং বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল হলে

সমীকরণ, $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1\ [a > b]$

$\Rightarrow \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1;\ \begin{bmatrix} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{bmatrix}$



কেন্দ্র (α, β) এবং বৃহৎ অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল হলে

সমীকরণ, $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1\ [b > a]$

$\Rightarrow \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1;\ \begin{bmatrix} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{bmatrix}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

ক্রমিক নং	আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a<b$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1, a>b$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1, a<b$
(i)	কেন্দ্র, C	(0, 0)	(0, 0)	(α, β)	(α, β)
(ii)	বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য	2a	2b	2a	2b
(iii)	ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য	2b	2a	2b	2a
(iv)	উপকেন্দ্র, S	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$	$(\alpha \pm ae, \beta)$	$(\alpha, \beta \pm be)$
(v)	বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ	$y=0$	$x=0$	$y-\beta=0$	$x-\alpha=0$
(vi)	ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ	$x=0$	$y=0$	$x-\alpha=0$	$y-\beta=0$
(vii)	দিকাক্ষের সমীকরণ	$x=\pm\frac{a}{e}$	$y=\pm\frac{b}{e}$	$x=\alpha\pm\frac{a}{e}$	$y=\beta\pm\frac{b}{e}$
(viii)	উপকেন্দ্রিক লম্ব, LL′	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
(ix)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=\pm be$	$x-\alpha=\pm ae$	$y-\beta=\pm be$
(x)	উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুগুলো	$\left(\pm ae, \pm\frac{b^2}{a}\right)$	$\left(\pm\frac{a^2}{b}, \pm be\right)$	$\alpha\pm ae, \beta\pm\frac{b^2}{a}$	$\alpha\pm\frac{a^2}{b}, \beta\pm be$
(xi)	উৎকেন্দ্রিকতা, e	$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$	$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$
(xii)	বৃহৎ অক্ষের প্রান্তবিন্দু (শীর্ষবিন্দু)	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$	$(\alpha \pm a, \beta)$	$(\alpha, \beta \pm b)$
(xiii)	ক্ষুদ্র অক্ষের প্রান্ত বিন্দু	$(0, \pm b)$	$(\pm a, 0)$	$(\alpha, \beta \pm b)$	$(\alpha \pm a, \beta)$
(xiv)	ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব, SS′	2ae	2be	2ae	2be
(xv)	নিয়ামকের দূরত্ব, ZZ′	$2\frac{a}{e}$	$2\frac{b}{e}$	$2\frac{a}{e}$	$2\frac{b}{e}$
(xvi)	ক্ষেত্রফল	πab	πab	πab	πab
(xvii)	পরামিতিক সমীকরণ	$x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, যেখানে $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{ay}{bx}\right)$	$x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, যেখানে $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{ay}{bx}\right)$	$x=\alpha+a\cos\theta$, $y=\beta+b\sin\theta$ যেখানে $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{a(y-\beta)}{b(x-\alpha)}\right)$	$x=\alpha+a\cos\theta$, $y=\beta+b\sin\theta$, যেখানে $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{a(y-\beta)}{b(x-\alpha)}\right)$

- প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণটিকে x সম্বলিত পূর্ণবর্গ ও y সম্বলিত পূর্ণবর্গ আকারে প্রকাশ করতে হবে।
  অর্থাৎ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।

POLY MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{m}=1$ উপবৃত্তটি (4,6) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে উৎকেন্দ্রিকতা কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: b]**

(a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2}$

সমাধান: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{m}=1$; (4, 6) বসিয়ে, $\frac{16}{25}+\frac{36}{m}=1 \Rightarrow \frac{36}{m}=1-\frac{16}{25} \Rightarrow \frac{36}{m}=\frac{9}{25} \Rightarrow m=100$

$\therefore \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{10^2}=1$ $\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{100-25}{100}}=\sqrt{\frac{75}{100}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

02. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: d]**

(a) 3 (b) 8 (c) 6 (d) 4

সমাধান: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য, $2b=2\times 2=4$

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

03. যদি $3x^2 + 5y^2 = 15$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ হয়, তাহলে উৎকেন্দ্রিকতা নিচের কোনটি? **[CU'23-24] [Ans: d]**

(a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ (b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ (c) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (d) $\sqrt{\frac{2}{5}}$

সমাধান: $3x^2 + 5y^2 = 15 \Rightarrow \frac{3x^2}{15} + \frac{5y^2}{15} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$ সমীকরণটিকে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = \sqrt{5}, b = \sqrt{3}, a > b$

$\therefore e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{5-3}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

04. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি? **[JU'23-24] [Ans: b]**

(a) $(0, \pm 5)$ (b) $(\pm 5, 0)$ (c) $(0, \pm 12)$ (d) $(\pm 13, 0)$

সমাধান: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1; e = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$ $\left[\because a = 13, b = 12 \ \therefore a > b \ \therefore e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right]$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $(\pm ae, 0) = (\pm 5, 0)$

05. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব কোনটি? **[JU'23-24] [Ans: b]**

(a) 18 (b) $\frac{16}{3}$ (c) 12 (d) 8

সমাধান: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ $[a = 4; b = 6, \ b > a]$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 16}{6} = \frac{16}{3}$

06. $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{14} = 1$ উপবৃত্তের নিয়ামক রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত একক? **[GST'22-23] [Ans: c]**

(a) 7 (b) 14 (c) 15 (d) 30

সমাধান: $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{14} = 1; a^2 = 30, b^2 = 14 \ \therefore e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{30-14}{30}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{30}} = \frac{4}{\sqrt{30}}$

$\therefore$ নিয়ামক রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2 \cdot \frac{a}{e} = 2 \cdot \frac{\sqrt{30}}{\frac{4}{\sqrt{30}}} = \frac{2}{4} \times 30 = 15$ একক

07. $2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$ উপবৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি? **[GST'22-23] [Ans: a]**

(a) (2,1) (b) $(-2,1)$ (c) (1,2) (d) $(1, -2)$

সমাধান: $2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 4x) + y^2 - 2y + 1 = 0$

$\Rightarrow 2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2) + (y-1)^2 = 0 \Rightarrow 2\{(x-2)^2 - 4\} + (y-1)^2 = 0$

$\Rightarrow 2(x-2)^2 - 8 + (y-1)^2 = 0 \Rightarrow 2(x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1 \therefore \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 0$

যেখানে, $X = x - 2; Y = y - 1$ কেন্দ্রের জন্য $X = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \therefore x = 2$

এবং $Y = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \therefore y = 1; \therefore$ কেন্দ্র $C(2,1)$

বিকল্প: সমীকরণটিকে x এবং y এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরীকরণ করে তার মান 0 ধরে সমাধান করতে হবে।

$2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$

$D_x = 4x - 8 = 0$; [x এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরীকরণ করে]

$\therefore x = 2$

$D_y = 2y - 2 = 0$; [y এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরীকরণ করে]

$\therefore y = 1$

$\therefore$ কেন্দ্র $C(2,1)$

Shortcut: $\alpha = \frac{x \text{ এর সহগ}}{-2(x^2 \text{ এর সহগ})} = \frac{-8}{-2 \times 2} = \frac{-8}{-4} = 2$ এবং $\beta = \frac{y \text{ এর সহগ}}{-2(y^2 \text{ এর সহগ})} = \frac{-2}{-2 \times 1} = \frac{-2}{-2} = 1$; কেন্দ্র (2,1)

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

08. $16x^2 + 9y^2 - 32x - 128 = 0$ উপবৃত্তটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [JU'22-23] [Ans: a]

(a) 12π (b) 10π (c) 14π (d) 7π

সমাধান: $16x^2 + 9y^2 - 32x - 128 = 0 \Rightarrow 16(x^2 - 2x) + 9y^2 - 128 = 0$

$\Rightarrow 16(x^2 - 2x + 1) + 9y^2 - 128 - 16 = 0 \Rightarrow 16(x-1)^2 + 9y^2 - 144 = 0 \Rightarrow 16(x-1)^2 + 9y^2 = 144$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \therefore \frac{(x-1)^2}{(3)^2} + \frac{y^2}{(4)^2} = 1 \therefore a = 3, b = 4$ $\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi ab$ বর্গ একক

$= \pi \times 3 \times 4$ বর্গ একক $= 12\pi$ বর্গ একক

09. একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্যের অর্ধেক, উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা কত? [DU'21-22] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{2}{3}$

সমাধান: ধরি, বৃহদাক্ষ x-অক্ষ এবং ক্ষুদ্রাক্ষ y-অক্ষ। $\therefore \frac{2b^2}{a} = \frac{1}{2} \times 2a \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$

এখন, $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \therefore e = \frac{1}{\sqrt{2}}$

10. $2x^2 + 3y^2 - 12x + 12y + 29 = 0$ কনিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? [GST'21-22] [Ans: c]

(a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (d) $2\sqrt{\frac{2}{3}}$

সমাধান: $2x^2 + 3y^2 - 12x + 12y + 29 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 6x) + 3(y^2 + 4y) = -29$

$\Rightarrow 2(x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 4y + 4) = -29 + 2 \times 9 + 3 \times 4$

$\Rightarrow 2(x-3)^2 + 3(y+2)^2 = 1 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{(y+2)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \therefore a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $(a > b)$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ একক।

11. ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্যের তিনগুণ দৈর্ঘ্যের বৃহৎ অক্ষ বিশিষ্ট উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা এর জন্য কোনটি সত্য? [RU'21-22] [Ans: d]

(a) $e^2 = \frac{2}{3}$ (b) $e^2 = \frac{5}{12}$ (c) $e^2 = \frac{4}{3}$ (d) $e^2 = \frac{8}{9}$

সমাধান: ধরি, উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষ $\therefore [a > b]$

প্রশ্নমতে, বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 3 \times$ ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $\Rightarrow 2a = 3 \times 2b \therefore a = 3b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{3}$

$\therefore e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \therefore e^2 = \frac{8}{9}$

12. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{p} = 1$ উপবৃত্তটি (4, 6) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে p এর মান কত? [RU'21-22] [Ans: d]

(a) 25 (b) 50 (c) 80 (d) 100

সমাধান: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{p} = 1$ উপবৃত্তটি (4, 6) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে, $\frac{4^2}{25} + \frac{6^2}{p} = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \frac{36}{p} = 1 \therefore p = 100$

13. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক কত? [JU'21-22] [Ans: b]

(a) $(\pm 2, 0)$ (b) $(0, \pm 2)$ (c) $(\pm 2\sqrt{7}, 0)$ (d) $(0, \pm 2\sqrt{7})$

সমাধান: $e = \sqrt{1 - \frac{12}{16}} = \frac{1}{2} \therefore$ উপকেন্দ্র $\equiv (0, \pm be) \equiv \left(0, \pm 4 \times \frac{1}{2}\right) \equiv (0, \pm 2)$ $[a^2 = 12, b^2 = 16]$

14. $25x^2 + 16y^2 = 400$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত? [DU'19-20, 17-18] [Ans: d]

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{3}{5}$

সমাধান: $25x^2 + 16y^2 = 400 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \therefore e = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}; [a^2 = 16, b^2 = 25]$

15. $9x^2 + 4y^2 = 36$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? [JU'19-20] [Ans: b]

(a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{8}{3}$ (c) $\frac{9}{2}$ (d) 9

সমাধান: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$ একক; $[a^2 = 4, b^2 = 9]$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

16. $\left(4,\frac{3}{2}\right)$ এবং (3, 2) বিন্দুগামী একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়, স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় বরাবর হলে উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা কত? [KU'18-19] [Ans: b]

(a) $2\sqrt{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (d) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

সমাধান: ধরি, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; (3, 2) বিন্দুগামী হলে, $\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2}=\frac{1}{9}\left(1-\frac{4}{b^2}\right)$; $\left(4,\frac{3}{2}\right)$ বিন্দুগামী হলে, $\frac{16}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$

$\frac{16}{a^2}=1-\frac{9}{4b^2}\Rightarrow\frac{16}{9}\left(1-\frac{4}{b^2}\right)=1-\frac{9}{4b^2}\Rightarrow\frac{16}{9}-\frac{64}{9b^2}=1-\frac{9}{4b^2}\Rightarrow\frac{7}{9}=\frac{175}{36b^2}$

$b^2=\frac{25}{4}\therefore a^2=25\therefore e=\sqrt{1-\frac{\frac{25}{4}}{25}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব ক্ষুদ্র অক্ষের অর্ধেক। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা (e) কত? [BAU'18-19; JU'17-18] [Ans: c]

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

সমাধান: $\frac{2b^2}{a}=\frac{1}{2}\times 2b\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\therefore e=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয় ও মূলবিন্দু, সেই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [Ans: d]

(a) $\frac{5}{4}$ (b) 20 (c) $\frac{4}{5}$ (d) 0 [RU'17-18]

সমাধান: উপবৃত্তটির ফোকাসদ্বয় ও মূলবিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত। ∴ ক্ষেত্রফল = 0

19. $4x^2+y^2=2$ উপবৃত্তটির বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে– [DU'16-17] [Ans: d]

(a) 4 ও 2 (b) 2 ও 4 (c) $\sqrt{2}$ ও $2\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{2}$ ও $\sqrt{2}$

সমাধান: $4x^2+y^2=2\Rightarrow\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$ ∴ বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2\sqrt{2}$ ও $\sqrt{2}$

20. $px^2+4y^2=1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1,0)$ বিন্দু দিয়ে যায়। উপবৃত্তটির অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য কত? [RU'16-17] [Ans: b]

(a) 4 ও 1 (b) 2 ও 1 (c) 8 ও 2 (d) 4 ও 2

সমাধান: $px^2+4y^2=1$; $(\pm1,0)$ বিন্দুগামী $\Rightarrow p\cdot 1+0=1\therefore p=1\therefore x^2+4y^2=1\Rightarrow\frac{x^2}{(1)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$

অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য $=2\cdot 1,\ 2\cdot\frac{1}{2}$ বা 2, 1

21. $9x^2+16y^2=144$ উপবৃত্তের x-অক্ষ এবং y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য কত? [CU'16-17] [Ans: b]

(a) $-4,-3$ (b) 4, 3 (c) 3, 4 (d) $-4,3$ (e) 9,16

সমাধান: খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য সবসময় ধনাত্মক মান। $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1\Rightarrow\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

$a=4,b=3\therefore$ খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 ও 3 একক

22. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{25}=1$ উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দু দিয়ে যায়। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা কত? [JU'15-16] [Ans: a]

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) 100 (c) $\frac{3}{4}$ (d) $5\sqrt{3}$

সমাধান: যেহেতু প্রদত্ত উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দু দিয়ে যায়, $\frac{6^2}{p}+\frac{4^2}{25}=1\Rightarrow p=100$

∴ উপবৃত্তটির সমীকরণ দাঁড়ায়, $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1\therefore e=\sqrt{\frac{100-25}{100}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $[a^2=100,b^2=25]$

23. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$ উপবৃত্তীয় ক্ষেত্রের যে অংশ ধনাত্মক বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষ দ্বারা বেষ্টিত তার ক্ষেত্রফল কত বর্গএকক? [CU'14-15]

(a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{\pi\sqrt{6}}{4}$ [Ans: d]

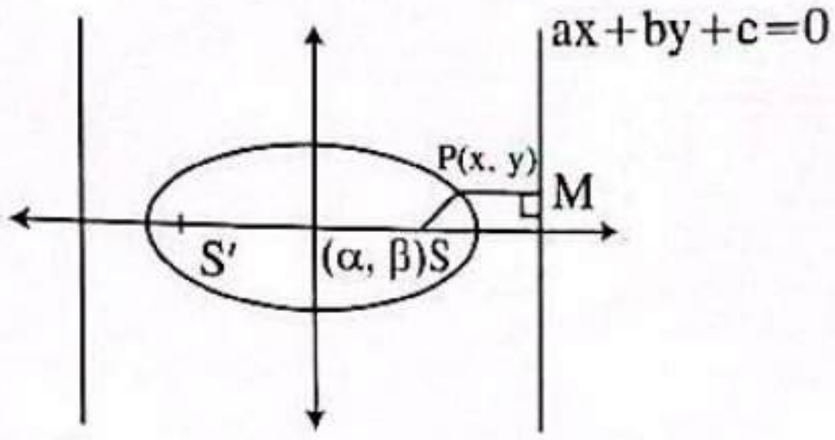
সমাধান: $a=\sqrt{2}$ ও $b=\sqrt{3}$ ∴ আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল, $\frac{\pi ab}{4}=\frac{\pi\sqrt{6}}{4}$ বর্গ একক

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-09: SP = e · PM সম্পর্কিত

Formula & Concept:



কোনো উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(\alpha, \beta)$, নিয়ামকের সমীকরণ $ax + by + c = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা; e ; $[0 < e < 1]$ হলে তার সমীকরণ, $SP = e \cdot PM$

$\Rightarrow SP^2 = e^2 \cdot PM^2 \Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2 \cdot \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$

MCQ

01. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(1, -1)$ দিকাক্ষের সমীকরণ $x - y + 2 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$।

[CU'18-19] [Ans: b]

(a) $x + 7 = y$
(b) $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x + 12y + 4 = 0$
(c) $3x^2 + 2x = 7$
(d) $3x^2 - 3y^2 - 2xy + 12x + 4 = 0$

সমাধান: $SP = e \cdot PM \Rightarrow SP^2 = e^2 \cdot PM^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{x-y+2}{\sqrt{2}}\right|^2$

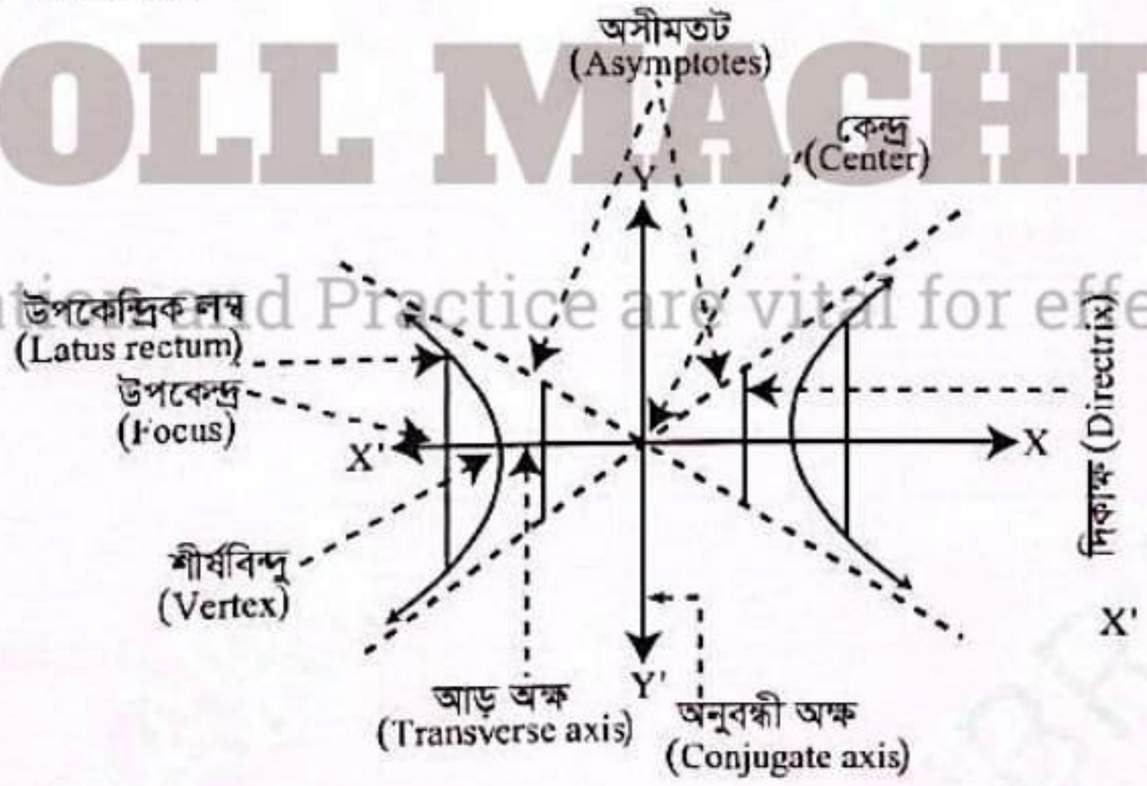
$\Rightarrow 4(x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1) = x^2 + y^2 + 4 - 2xy - 4y + 4x$

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x + 12y + 4 = 0$

Type-10: অধিবৃত্তের সমীকরণ থেকে বিভিন্ন উপাদান নির্ণয়

Formula & Concept:

- চিত্র হতে বিভিন্ন উপাদান শনাক্তকরণ



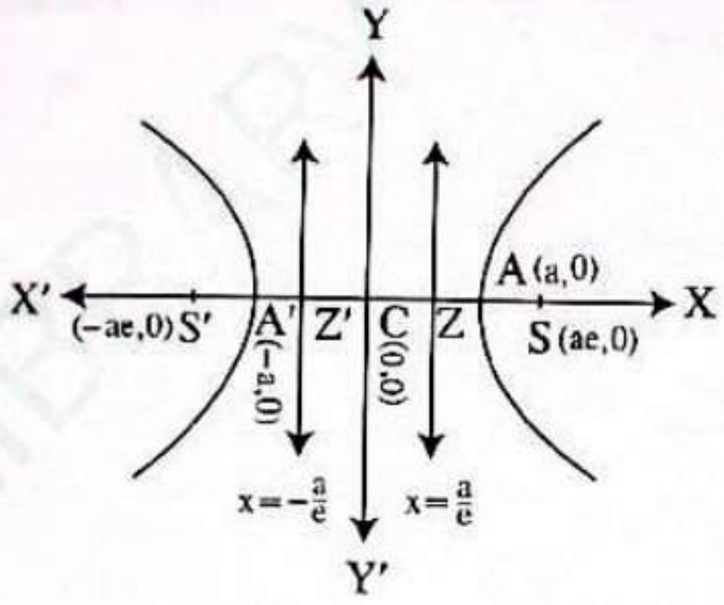
- অধিবৃত্তের বিভিন্ন আদর্শ আকৃতির চিত্র:

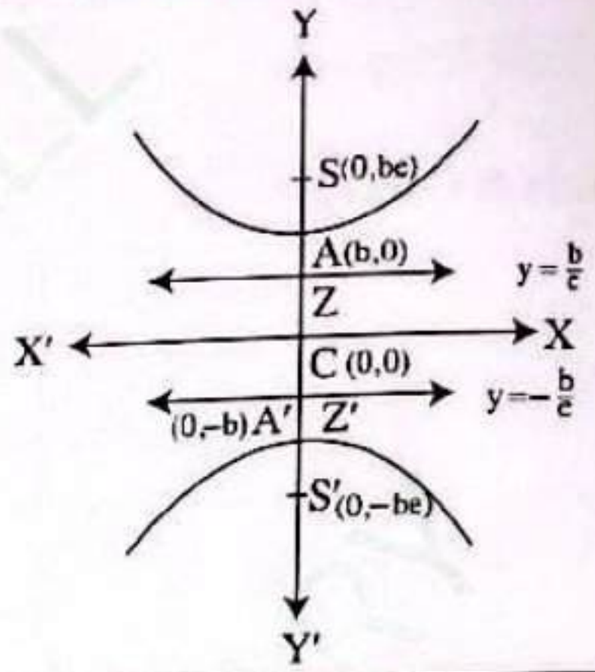
(1) x-অক্ষ আড় অক্ষ এবং কেন্দ্র মূলবিন্দু $(0, 0)$ হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(2) y-অক্ষ আড় অক্ষ এবং কেন্দ্র মূলবিন্দু $(0, 0)$ হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

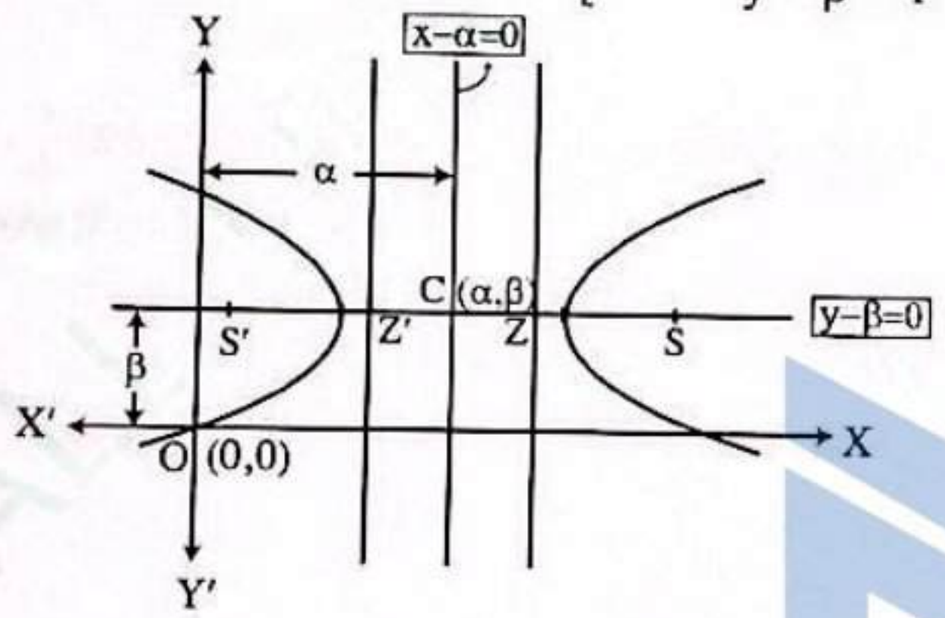
Scanned with OKEN Scanner
CamScanner





(3) আড় অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং কেন্দ্র (α, β) হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ,

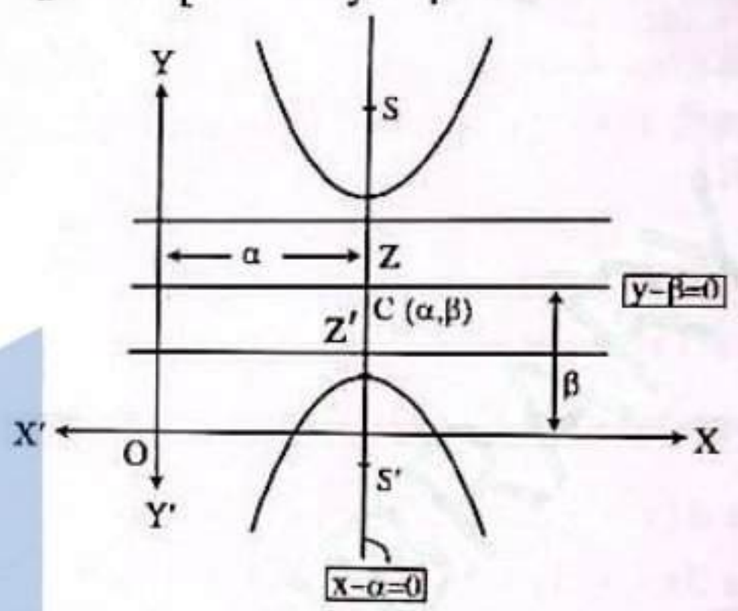
$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ [যেখানে, $x-\alpha=X$, $y-\beta=Y$



(4) আড় অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল এবং কেন্দ্র (α, β) হলে

অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1$

$\Rightarrow \frac{Y^2}{b^2}-\frac{X^2}{a^2}=1$ [যেখানে, $x-\alpha=X$, $y-\beta=Y$



(i)	আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1$
(ii)	পরামিতিক সমীকরণ	$x=a\sec\theta$, $y=b\tan\theta$	$x=a\tan\theta$, $y=b\sec\theta$	$x-\alpha=a\sec\theta$, $y-\beta=b\tan\theta$	$x-\alpha=a\tan\theta$, $y-\beta=b\sec\theta$
(iii)	পোলার স্থানাঙ্কের সমীকরণ	$r^2(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta) = a^2b^2$	$r^2(a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta) = a^2b^2$	$b^2(r\cos\theta-\alpha)^2 - a^2(r\sin\theta-\beta)^2 = a^2b^2$	$a^2(r\sin\theta-\beta)^2 - b^2(r\cos\theta-\alpha)^2 = a^2b^2$
(iv)	কেন্দ্র, C	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α, β)
(v)	উপকেন্দ্র, S	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$	$(\alpha \pm ae, \beta)$	$(\alpha, \beta \pm be)$
(vi)	অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য	2b	2a	2b	2a
(vii)	শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm, a, 0)$	$(0, \pm b)$	$(\alpha \pm a, \beta)$	$(\alpha, \beta \pm b)$
(viii)	আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য	2a	2b	2a	2b
(ix)	উৎকেন্দ্রিকতা, e	$e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$ $=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}$ $=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$	$e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$ $=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}$ $=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$
(x)	উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$

POWER MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

(xi)	আড় অক্ষের সমীকরণ	$y=0$ বা, x অক্ষ	$x=0$ বা, y অক্ষ	$y-\beta=0$	$x-\alpha=0$
(xii)	অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ	$x=0$	$y=0$	$x-\alpha=0$	$y-\beta=0$
(xiii)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=\pm be$	$x-\alpha=\pm ae$	$y-\beta=\pm be$
(xiv)	নিয়ামক রেখার সমীকরণ	$x=\pm\frac{a}{e}$	$y=\pm\frac{b}{e}$	$x-\alpha=\pm\frac{a}{e}$	$y-\beta=\pm\frac{b}{e}$
(xv)	উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, SS′	2ae	2be	2ae	2be
(xvi)	উপকেন্দ্র ও অনুরূপ নিয়ামকের মধ্যবর্তী দূরত্ব	$ae-\frac{a}{e}$	$be-\frac{b}{e}$	$ae-\frac{a}{e}$	$be-\frac{b}{e}$
(xvii)	নিয়ামক/দিকাক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, ZZ′	$\frac{2a}{e}$	$\frac{2b}{e}$	$\frac{2a}{e}$	$\frac{2b}{e}$
(xviii)	অসীমতটের সমীকরণ	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$(y-\beta)=\pm\frac{b}{a}(x-\alpha)$	$(y-\beta)=\pm\frac{b}{a}(x-\alpha)$
(xix)	শীর্ষ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ	$x=\pm a$	$y=\pm b$	$x=\alpha\pm a$	$y=\beta\pm b$

➢ প্রদত্ত সমীকরণকে $\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1$ অথবা $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।
অতঃপর, এখান থেকে উপকেন্দ্রিক লম্ব, উপকেন্দ্র, শীর্ষ, নিয়ামকরেখা, অক্ষরেখা ইত্যাদি নির্ণয় করা যাবে।

MCQ

01. $y^2-\frac{x^2}{2}=1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কোনটি? [RU'23-24] [Ans: c]

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) $\sqrt{5}$

সমাধান: $\frac{y^2}{1^2}-\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}=1$; উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2a^2}{b}=\frac{2\times2}{1}=4$ একক।

02. $\frac{y^2}{2}-x^2=1$, অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কোনটি? [RU'23-24] [Ans: a]

(a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\pm\sqrt{3}$

সমাধান: $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{1}=1$ ∴ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{1+2}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$; $[a^2=1, b^2=2]$

03. $4y^2-5x^2=20$ অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ কোনটি? [RU'22-23] [Ans: d]

(a) $3x=\pm5$ (b) $3x=\pm\frac{1}{5}$ (c) $3y=\pm\frac{1}{5}$ (d) $3y=\pm5$

সমাধান: $4y^2-5x^2=20\Rightarrow\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{4}=1$ ∴ $e=\sqrt{1+\frac{4}{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$; $[a^2=4, b^2=5]$

∴ নিয়ামকের সমীকরণ, $y=\pm\frac{b}{e}=\pm\frac{\sqrt{5}}{\frac{3}{\sqrt{5}}}=\pm\frac{5}{3}\Rightarrow3y=\pm5$

04. $16x^2-9y^2=144$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ। অধিবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা নিচের কোনটি? [CU'22-23; JU'21-22] [Ans: b]

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) $\frac{7}{3}$ (d) $\frac{8}{3}$

সমাধান: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ∴ $a^2=9$; $b^2=16$ ∴ $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{16}{9}}=\frac{5}{3}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

05. $x^2 - 3y^2 - 2x = 8$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুদ্বয়- **[DU'21-22] [Ans: d]**

(a) $(-4, 0), (2, 0)$ (b) $(0, 4), (0, 2)$ (c) $(0, -4), (0, -1)$ (d) $(4, 0), (-2, 0)$

সমাধান: $x^2 - 3y^2 - 2x = 8 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 3y^2 = 9 \Rightarrow (x-1)^2 - 3y^2 = 9$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{3^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{3^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$ তাহলে, $a = 3, b = \sqrt{3}$

শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের জন্য, $X = \pm a \Rightarrow x - 1 = \pm 3 \therefore x = 4, -2$ এবং $Y = 0 \therefore y = 0$ $\therefore$ শীর্ষবিন্দুদ্বয় $A(4, 0), A'(-2, 0)$

06. অধিবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(4\sec\theta, 6\tan\theta)$ হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ কোনটি? **[RU'21-22] [Ans: d]**

(a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ (b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ (c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ (d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$

সমাধান: $x = 4\sec\theta \Rightarrow \frac{x}{4} = \sec\theta$ ..... (i) এবং $y = 6\tan\theta \Rightarrow \frac{y}{6} = \tan\theta$ ..... (ii)

এখন, $(i)^2 - (ii)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{6^2} = \sec^2\theta - \tan^2\theta \therefore \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$

07. $y^2 - x^2 = 1$ অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক কত? **[JU'21-22] [Ans: d]**

(a) $(0, \pm 1)$ (b) $(\pm 1, 0)$ (c) $(\pm\sqrt{2}, 0)$ (d) $(0, \pm\sqrt{2})$

সমাধান: $y^2 - x^2 = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{1^2} - \frac{x^2}{1^2} = 1 \quad \therefore a = 1, b = 1$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 + \frac{1^2}{1^2}} = \sqrt{2}$ তাহলে, $be = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$ $\therefore$ উপকেন্দ্র, $S(0, \pm be) \equiv (0, \pm\sqrt{2})$

08. $2x^2 - 8y^2 = 2$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতার মান- **[DU'18-19] [Ans: c]**

(a) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (d) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

সমাধান: $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 ; e = \sqrt{1 + \frac{\frac{1}{4}}{1}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} ; \left[a^2 = 1, b^2 = \frac{1}{4}\right]$

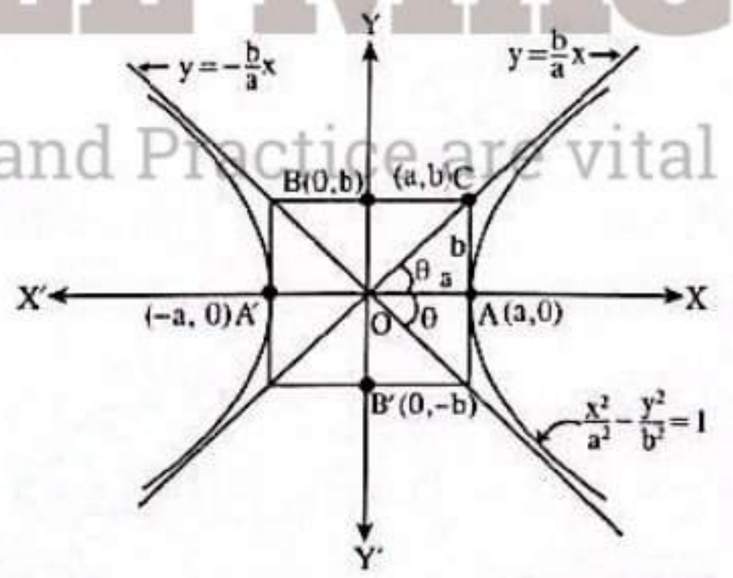
09. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ অধিবৃত্তটির দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[JnU'15-16] [Ans: b]**

(a) $5x = 48$ (b) $5x = \pm 16$ (c) $5x = 16$ (d) $x = 16$

সমাধান: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \therefore x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{4}{\sqrt{\frac{16+9}{16}}} = \pm 4 \times \frac{4}{5} = \pm\frac{16}{5} \therefore 5x = \pm 16 \left[a^2 = 16, b^2 = 9, c = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4}\right]$

Type-11: অধিবৃত্তের অসীমতট সম্পর্কিত

➲ **Formula & Concept:**



(i) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ বা $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ $\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x}$; [অধিবৃত্তের সমীকরণে 1 এর পরিবর্তে 0 বসালে অসীমতটের সমীকরণ পাওয়া যায়।] অসীমতটদ্বয়ের ছেদবিন্দু হলো অধিবৃত্তের কেন্দ্র।

(ii) অসীমতটের সমীকরণ থেকে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়ের সূত্র:

$\boxed{\text{১ম অসীমতটের সমীকরণ} \times \text{২য় অসীমতটের সমীকরণ} + \lambda = 0}$ [λ একটি ধ্রুবক]

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

(iii) অসীমতটদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $= 2\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

(iv) কোনো অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90° বা, $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ হলে উক্ত অধিবৃত্তকে আয়তাকার অধিবৃত্ত বলে।

$\therefore \boxed{a = b}$ ← আয়তাকার অধিবৃত্তের আড় অক্ষের এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য সমান।

আয়তাকার অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ, $x^2 - y^2 = a^2$ অথবা, $y^2 - x^2 = a^2$

$\therefore$ আয়তাকার অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$

অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয়ের ঢালের গুণফল নির্ণয়:

অসীমতটদ্বয়ের ঢালের গুণফল $= \frac{\text{অধিবৃত্তের } x^2 \text{ এর সহগ}}{\text{অধিবৃত্তের } y^2 \text{ এর সহগ}} = -\frac{b^2}{a^2}$

MCQ

01. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ কোনটি? **[RU'22-23, 17-18] [Ans: d]**

(a) $y = \pm x$ (b) $y = \pm ax$ (c) $y = \pm\frac{a}{b}x$ (d) $y = \pm\frac{b}{a}x$

সমাধান: $y = \pm\frac{b}{a}x$ [উভয় আকারের অধিবৃত্তের জন্যই এই সমীকরণটি প্রযোজ্য]

02. $25y^2 - 9x^2 + 200y + 36x - 140 = 0$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ কোনগুলো? **[RU'21-22] [Ans: c]**

(a) $3x + 5y - 26 = 0, 3x - 5y + 14 = 0$ (b) $5x + 3y - 26 = 0, 5x - 3y + 14 = 0$

(c) $3x - 5y - 26 = 0, 3x + 5y + 14 = 0$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $25y^2 - 9x^2 + 200y + 36x - 140 = 0 \Rightarrow 25(y^2 + 8y) - 9(x^2 - 4x) = 140$

$\Rightarrow 25(y^2 + 8y + 16) - 9(x^2 - 4x + 4) = 140 + 400 - 36 \Rightarrow 25(y+4)^2 - 9(x-2)^2 = 504$

$\Rightarrow \frac{(y+4)^2}{\frac{504}{25}} - \frac{(x-2)^2}{\frac{504}{9}} = 1; \therefore b^2 = \frac{504}{25}; a^2 = \frac{504}{9} \therefore \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\frac{504}{25}}{\frac{504}{9}}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

$\therefore$ অসীমতটের সমীকরণ, $(y+4) = \pm\frac{b}{a}(x-2) \Rightarrow (y+4) = \pm\frac{3}{5}(x-2) \Rightarrow 5y + 20 = \pm 3(x-2)$

$(+) \Rightarrow 5y + 20 = 3x - 6 \ \therefore 3x - 5y - 26 = 0$ এবং $(-) \Rightarrow 5y + 20 = -3x + 6 \therefore 3x + 5y + 14 = 0$

Shortcut: $25y^2 - 9x^2 + 200y + 36x - 140 = 0$

$D_x = -18x + 36 = 0$ [x এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরীকরণ করে]

$\therefore x = 2 ; D_y = 50y + 200 = 0$ [y এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরীকরণ করে]

$\therefore y = -4 \therefore$ অধিবৃত্তটির কেন্দ্র বা অসীমতটদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(2, -4)$

এখন যেই অপশনের সমীকরণগুলো $(2, -4)$ বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হয়। সেটিই হবে সঠিক উত্তর।

অপশন (c), $(2, -4)$ বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হয়।

$3(2) - 5(-4) - 26 = 0$ এবং $3(2) + 5(-4) + 14 = 0$

$\therefore$ সঠিক উত্তর অপশন (c)

03. $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$ অধিবৃত্তটির অসীমতটদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? **[RU'20-21] [Ans: d]**

(a) $(1, 2)$ (b) $(-2, 1)$ (c) $(2, -1)$ (d) $(2, 1)$

সমাধান: $(2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 4 + 16 = (3y)^2 - 2\cdot 3y\cdot 3 + 9 + 36$

$\Rightarrow \frac{(2x-4)^2}{6^2} - \frac{(3y-3)^2}{6^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$। অসীমতটদ্বয় কেন্দ্রে ছেদ করবে। $\therefore x = 2, y = 1$

Shortcut: আংশিক অন্তরীকরণের সাহায্যে অধিবৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করা যায়। যেহেতু অসীমতটদ্বয়ের ছেদবিন্দু অধিবৃত্তের কেন্দ্র সেহেতু কেন্দ্র বের করলেই ছেদবিন্দু পাওয়া যাবে।

$D_x = 8x - 16 = 0 \therefore x = 2 ; D_y = -18y + 18 = 0 \therefore y = 1 \therefore$ ছেদবিন্দু $(2, 1)$

POLY MACHINE
Preparation and Practice are Vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

04. $4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y - 41 = 0$ কনিকের অসীমতটদ্বয়ের ঢালের গুণফল কত? [SUST'19-20] [Ans: a]

(a) $-\frac{4}{9}$ (b) -1 (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{3}{2}$ (e) $-\frac{2}{3}$

সমাধান: $4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y = 41 \Rightarrow 4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 - 2y + 1) = 41 - 5$

$\Rightarrow 4(x-1)^2 - 9(y-1)^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

$a^2 = 9, b^2 = 4 \therefore$ অসীমতটদ্বয়ের ঢালের গুণফল $= -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{4}{9} \therefore$ ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -\frac{4}{9}$

Shortcut: অসীমতটদ্বয়ের ঢালের গুণফল $= \frac{x^2 \text{ এর সহগ}}{y^2 \text{ এর সহগ}} = -\frac{4}{9}$

Type-12: স্পর্শক/ছেদক সম্পর্কিত

Concept

- **Case-01: কনিকের উপরস্থ কোনো একটি বিন্দুতে স্পর্শক:**

$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ কনিকের উপরস্থ যেকোনো একটি বিন্দু (x_1, y_1) হলে, (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক নির্ণয়ের জন্য,

x^2 এর পরিবর্তে $\rightarrow xx_1$ | x এর পরিবর্তে $\rightarrow \frac{x+x_1}{2}$
y^2 এর পরিবর্তে $\rightarrow yy_1$ | y এর পরিবর্তে $\rightarrow \frac{y+y_1}{2}$
xy এর পরিবর্তে $\rightarrow \frac{xy_1+yx_1}{2}$

$\therefore ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ এর উপরস্থ (x_1, y_1)

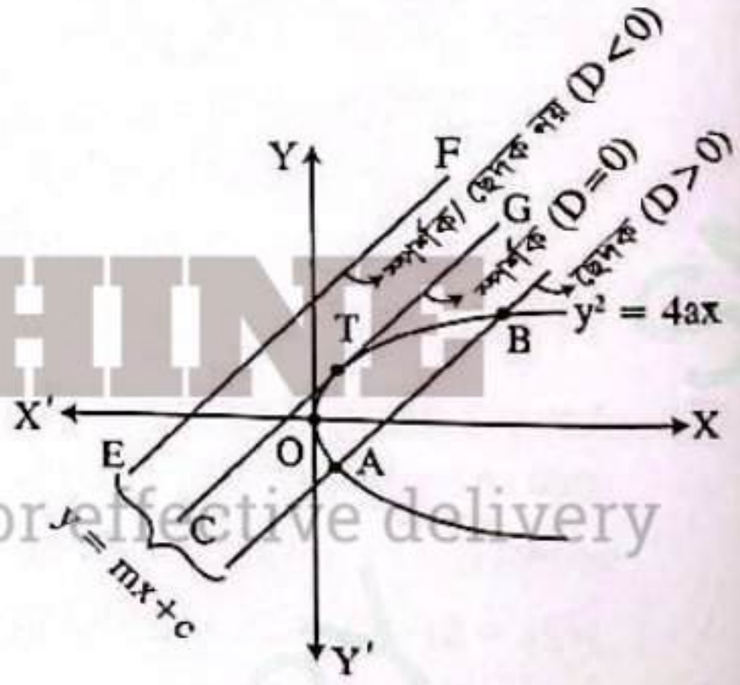
বিন্দুতে কনিকটির স্পর্শকের সমীকরণ, $axx_1 + byy_1 + 2h.\left(\frac{xy_1+yx_1}{2}\right) + 2g\left(\frac{x+x_1}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+y_1}{2}\right) + c = 0$

$\therefore \boxed{axx_1 + byy_1 + h(xy_1 + yx_1) + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0}$

- **Case-02: $y = mx + c$ কোনো কনিকের স্পর্শক/ছেদক হলে:**

মনে করি,

$y^2 = 4ax$ একটি পরাবৃত্ত। $y = mx + c$ সরলরেখাটি পরাবৃত্তকে প্রথমে A এবং B দুইটি বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাই AB রেখাটি পরাবৃত্তটির ছেদক। এখন সরলরেখাটিকে সরিয়ে CG অবস্থানে নিয়ে আসা হলো। এক্ষেত্রে সরলরেখাটি পরাবৃত্তটিকে একটি বিন্দুতে (T) স্পর্শ করে। তাহলে, CG রেখাটি পরাবৃত্তের স্পর্শক। এর চেয়েও সরলরেখাটি সরালে (EF অবস্থানে আনলে) সরলরেখাটি আর পরাবৃত্তটিকে স্পর্শ/ ছেদ করে না।



এখন, পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 4ax$

সরলরেখার সমীকরণ, $y = mx + c$

সমাধান করে পাই, $(mx + c)^2 = 4ax \Rightarrow m^2x^2 + 2mcx + c^2 = 4ax$

$\Rightarrow m^2x^2 + (2mc - 4a)x + c^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (i)$

সমীকরণ (i) হলো x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার 2 টি মূল থাকবে।

এখন সরলরেখাটি,

(i) পরাবৃত্তের ছেদক হলে মূলদ্বয় হবে বাস্তব ও অসমান। $[D > 0]$

(ii) পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে মূলদ্বয় হবে বাস্তব ও সমান। $[D = 0]$; [অর্থাৎ আসলে 2 টি মূলই একই হয়ে যাবে]

(iii) পরাবৃত্তের ছেদক/ স্পর্শক না হলে মূলদ্বয় হবে অবাস্তব (জটিল); $[D < 0]$

এখন নিশ্চায়ক, $D = (2mc - 4a)^2 - 4 \cdot m^2c^2$

$= 4m^2c^2 - 16amc + 16a^2 - 4m^2c^2 = 16a^2 - 16amc$ $\boxed{D = 16a(a - mc)}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

আবার,

(i) সরলরেখাটি ছেদক হলে, $D > 0 \Rightarrow 16\,a(a - mc) > 0 \Rightarrow a(a - mc) > 0$

এখন, $\boxed{a > 0}$ হলে, $a - mc > 0 \Rightarrow a > mc \therefore \boxed{c < \frac{a}{m}}; [m \neq 0]$

$\boxed{a < 0}$ হলে, $a - mc < 0 \Rightarrow a < mc \therefore \boxed{c > \frac{a}{m}} [m \neq 0]$

(ii) সরলরেখাটি স্পর্শক হলে, $D = 0 \Rightarrow 16\,a\,(a - mc) = 0 \Rightarrow a - mc = 0; [\because a \neq 0] \Rightarrow a = mc \therefore \boxed{c = \frac{a}{m}} [m \neq 0]$

(iii) সরলরেখাটি ছেদক/ স্পর্শক না হলে, $D < 0$ অর্থাৎ, $16\,a(a - mc) < 0 \Rightarrow a(a - mc) < 0$

এখন, $\boxed{a > 0}$ হলে, $a - mc < 0 \Rightarrow \boxed{c > \frac{a}{m}}\ [m \neq 0]$

$\boxed{a < 0}$ হলে, $a - mc > 0 \Rightarrow \boxed{c < \frac{a}{m}};\ [m \neq 0]$

নোট: নিচের ছকটি MCQ এর জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ:

বক্ররেখার সমীকরণ	$y = mx + c$ আকারের সরলরেখা	
	স্পর্শক হলে $[D = 0]$	স্পর্শক বিন্দু
(i) $y^2 = 4ax$	$c = \frac{a}{m} [m \neq 0]$	$\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$
(ii) $x^2 = 4ay$	$c = -am^2$	$\left(\frac{2a}{m}, \frac{a}{m^2}\right)$
(iii) $x^2 + y^2 = r^2$	$c^2 = r^2(m^2 + 1)$ $\therefore c = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$	$\left(\frac{-cm}{1+m^2}, \frac{c}{1+m^2}\right)$
(iv) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 = b^2 + a^2m^2$	$\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$
(v) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2m^2 - b^2$	$\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{-b^2}{c}\right)$
(vi) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$	$c^2 = b^2 - a^2m^2$	$\left(\frac{a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$

MCQ

01. $y = 4x + c$ রেখাটি $y^2 = 32x$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে c এর মান- **[RU-23-24] [Ans: a]**

(a) 2 (b) -128 (c) 128 (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: $y = 4x + c \Rightarrow y^2 = 32x \Rightarrow y^2 = 4 \cdot 8 \cdot x$; $[y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে $a = 8]$

$\therefore c = \frac{a}{m} = \frac{8}{4} = 2$; $[m = 4]$

02. $6x - y + k = 0$ রেখাটি $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে k-এর মান কত? **[JU'23-24] [Ans: a]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 3 (c) 6 (d) 2

সমাধান: $6x - y + k = 0 \Rightarrow y = 6x + k$; $y^2 = 12x$ এর স্পর্শক হলে, $k = \frac{3}{6} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$; $\left[\because c = \frac{a}{m}\right]$

03. $x + 2y - 1 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে এরূপ রেখার সমীকরণ কোনটি? **[RU'22-23] [Ans: c]**

(a) $4x + 2y + 3 = 0$ (b) $4x - 2y - 3 = 0$ (c) $4x - 2y + 3 = 0$ (d) $4x + 2y - 3 = 0$

সমাধান: $x + 2y - 1 = 0$ রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ, $2x - y + k = 0 \therefore y = 2x + k$

$y^2 = 12x = 4 \times 3 \times x \therefore a = 3, m = 2 \therefore k = \frac{a}{m} = \frac{3}{2} \therefore$ সমীকরণ, $y = 2x + \frac{3}{2} \Rightarrow 4x - 2y + 3 = 0$

04. $y = x - 5$ সরলরেখাটি $9x^2 + 16y^2 = 144$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? **[RU'22-23] [Ans: b]**

(a) $\left(\frac{-16}{5}, \frac{9}{5}\right)$ (b) $\left(\frac{16}{5}, \frac{-9}{5}\right)$ (c) $\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$ (d) $\left(\frac{-16}{5}, \frac{-9}{5}\right)$

সমাধান: $y = x - 5 \ldots\ldots\ldots$ (i) কে উপবৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে, $9x^2 + 16(x - 5)^2 = 144$

$\Rightarrow 9x^2 + 16(x^2 - 10x + 25) = 144 \Rightarrow 25x^2 - 160x + 256 = 0$

$\Rightarrow (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 16 + 16^2 = 0 \Rightarrow (5x - 16)^2 = 0 \therefore x = \frac{16}{5}$

এখন, $y = \frac{16}{5} - 5 = -\frac{9}{5} \therefore$ নির্ণেয় স্পর্শ বিন্দু $\equiv \left(\frac{16}{5}, \frac{-9}{5}\right)$

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Shortcut: $y = mx + c \therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর স্পর্শক হলে স্পর্শবিন্দু $\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$

প্রদত্ত প্রশ্নে, $y = x - 5$ রেখা $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক। এক্ষেত্রে, $m = 1, c = -5, a^2 = 16, b^2 = 9$

$\therefore$ স্পর্শবিন্দু $= \left(\frac{-16\times1}{-5}, \frac{9}{-5}\right) = \left(\frac{16}{5}, \frac{-9}{5}\right)$

05. $y^2 = 3x$ এবং $x^2 = 3y$ পরাবৃত্তদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার ঢাল কত? **[GST'21-22] [Ans: b]**

(a) -1 (b) 1 (c) 2 (d) 3

সমাধান: $y^2 = 3x \therefore x = \frac{y^2}{3} \ldots\ldots\ldots$ (i) $x^2 = 3y \ldots\ldots\ldots$ (ii) সমাধান করে পাই,

$\therefore \left(\frac{y^2}{3}\right)^2 = 3y \Rightarrow y^4 = 27y \Rightarrow y(y^3 - 27) = 0$

$\therefore y = 0, 3 \ \therefore x = 0, 3$ [(i)হতে] $\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয় (0, 0), (3, 3) $\therefore$ নির্ণেয় ঢাল $m = \frac{3-0}{3-0} = 1$

06. $y = 2x + c$ রেখাটি $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হলে, c এর মান কত? **[Agri.'21-22; JU'16-17] [Ans: c]**

(a) 7 (b) $\sqrt{25}$ (c) $\sqrt{19}$ (d) 25

সমাধান: $c^2 = a^2m^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 2^2 \times 4 + 3 \Rightarrow c^2 = 19 \therefore c = \sqrt{19}$ $[a^2 = 4, b^2 = 3, m = 2]$

07. $y = 3x + 1$ রেখাটি $y^2 = ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে, স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? **[RU'20-21] [Ans: a]**

(a) $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ (b) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (c) $\left(\frac{2}{3}, 3\right)$ (d) (3, 2)

সমাধান: $y^2 = \frac{4a}{4}x$; $1 = \frac{\left(\frac{a}{4}\right)}{3} \therefore a = 12$; $\left[\because c = \frac{a}{m}\right]$

$(3x + 1)^2 = 12x \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 12x \Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + (1)^2 = 0$

$\Rightarrow (3x - 1)^2 = 0 \therefore x = \frac{1}{3} \therefore y = 3 \times \frac{1}{3} + 1 = 2 \therefore$ স্পর্শবিন্দু $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$

08. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক $y = 2x + c$ হলে, c এর মান কত? **[RU'20-21] [Ans: b]**

(a) ± 12 (b) ± 13 (c) ± 14 (d) ± 15

সমাধান: $c^2 = b^2 + a^2m^2 = 25 + 4 \times 36 = 169 \therefore c = \pm 13$; [উপবৃত্তের x অক্ষ প্রধান অক্ষ]

$[a^2 = 36, b^2 = 25, m = 2]$

09. (4, 3) বিন্দুতে $3x^2 - 4y^2 = 12$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের ঢালের মান- **[DU'17-18] [Ans: b]**

(a) -1 (b) 1 (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{4}{3}$

সমাধান: $3x^2 - 4y^2 = 12 \Rightarrow 6x - 8y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{(x,y)} = \frac{6x}{8y} \therefore \frac{dy}{dx}|_{(4,3)} = \frac{6\times4}{8\times3} = 1$

বিকল্প: স্পর্শকের সমীকরণ, $3 \cdot x \cdot 4 - 4 \cdot y \cdot 3 = 12 \therefore$ স্পর্শকের ঢাল, $m = -\frac{3.4}{(-4).3} = 1$

10. $x^2 + 4y^2 = 8$ বক্ররেখার দুইটি স্পর্শক (tangent) x অক্ষের উপর লম্ব হলে, স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করো? **[JnU'14-15]**

(a) $x = 2\sqrt{2}, y = 2\sqrt{2}$ (b) $x \pm 2\sqrt{2} = 0$ (c) $x + 2\sqrt{2} = 0, y + 2\sqrt{2} = 0$ (d) $y \pm 2\sqrt{2} = 0$ **[Ans: b]**

সমাধান: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$, এখানে $a = 2\sqrt{2}$

x-অক্ষের সাথে লম্ব রেখার সমীকরণ, $x = \pm a \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \therefore x \pm 2\sqrt{2} = 0$

> প্রচন্ড চাপেই হীরার সৃষ্টি হয় সুতরাং ধৈর্য ধরো, সুদিন কাছেই।
>
> -Sope Agbelus

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

অধ্যায় ০৭

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

> ডার্সিটি ভর্তি পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪	T-01	বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয়	1	-	JU'23-24	-
✪✪✪	T-02	বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অজানা মান	39	2	DU'23-24, 21-22, 19-20, 14-15, 13-14; GST'23-24, 21-22; RU'23-24, 22-23, 21-22, 17-18, 15-16, 14-15, 12-13, 10-11, 08-09; CU'23-24, 17-18, 16-17, 05-06; JU'22-23, 21-22, 19-20, 18-19, 14-15; Agri.'21-22, 20-21; SUST'19-20; JnU'14-15, 13-14; BAU'18-19	DU'21-22; RU'19-20
✪✪✪	T-03	বিপরীত ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের প্রমাণ সংক্রান্ত সমস্যা	3	3	DU'17-18; GST'23-24; KU'17-18	DU'20-21; RU'19-20; JnU'19-20
✪✪✪	T-04	বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনযুক্ত সমীকরণের সমাধান	7	-	DU'16-17; GST'22-23, 20-21; RU'23-24; KU'19-20, 14-15	-
✪✪✪	T-05	$a\cos\theta + b\sin\theta = c$; [যেখানে, $\lvert c\rvert \leq \sqrt{a^2+b^2}$] আকৃতির ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সংক্রান্ত সমস্যা	8	-	DU'22-23, 20-21, 13-14; RU'23-24; JU'22-23, 21-22, 18-19; Agri.'21-22	-
✪✪✪	T-06	cot θ, tan θ, sec θ, cosec θ বিশিষ্ট ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সংক্রান্ত সমস্যা	4	-	DU'18-19; RU'20-21; JU'17-18; KU'18-19	-

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

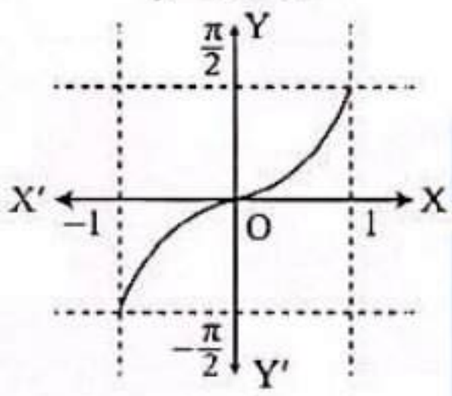
গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪✪	T-07	$\sin\theta, \cos\theta$ বিজোড় সংখ্যক পদ সম্বলিত সমীকরণ সংক্রান্ত সমস্যা	8	2	DU'17-18; GST'21-22; RU'22-23, 19-20; CU'21-22; JU'18-19, 14-15; JnU'15-16	DU'19-20; RU'19-20
✪✪✪	T-08	$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \sec\theta$ -এর দ্বিঘাত রাশি সম্বলিত পদ থাকলে	16	1	DU'16-17, 15-16; GST'22-23; RU'23-24, 21-22; CU'22-23, 14-15; JU'23-24, 22-23, 19-20, 18-19, 14-15; JnU'15-16, 09-10	DU'23-24

Type-01: বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

◆ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র:

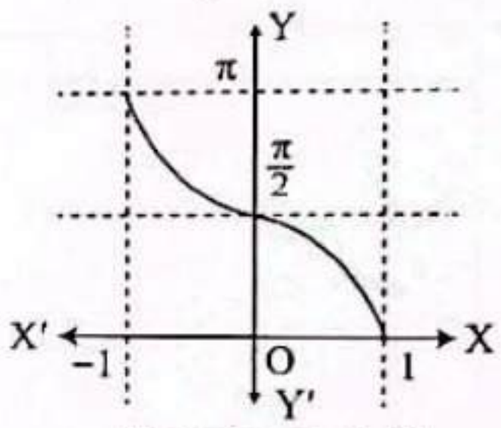
$y = \sin^{-1}x$



Domain = $[-1, 1]$

Range = $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

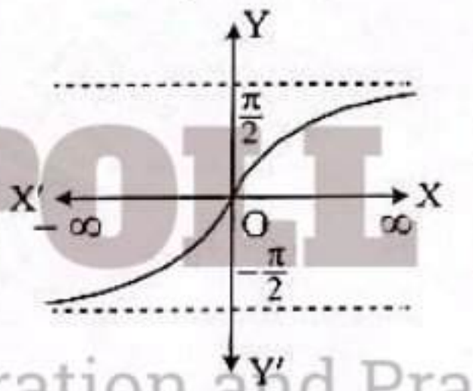
$y = \cos^{-1}x$



Domain = $[-1, 1]$

Range = $[0, \pi]$

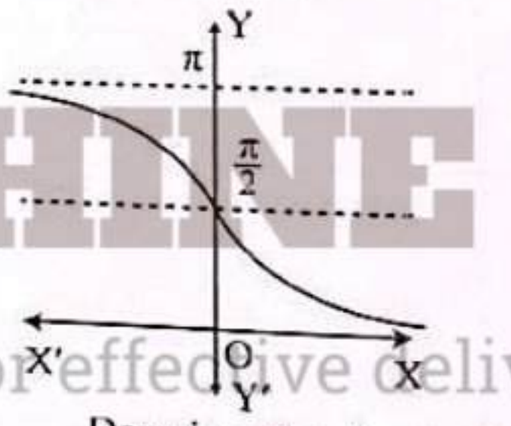
$y = \tan^{-1}x$



Domain = $\mathbb{R}$ or $(-\infty,\infty)$

Range = $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

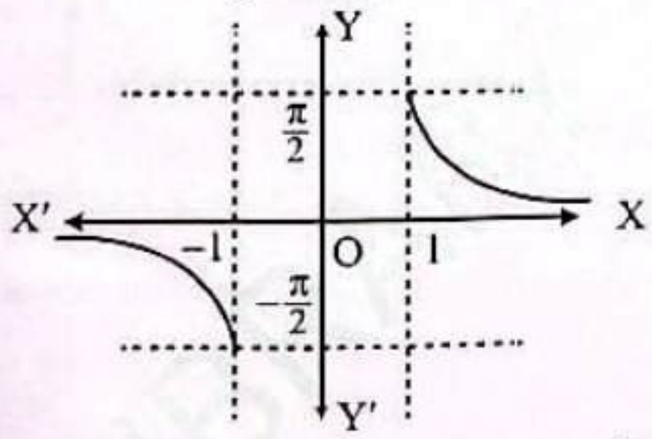
$y = \cot^{-1}x$



Domain = $\mathbb{R}$ or $(-\infty,\infty)$

Range = $(0, \pi)$

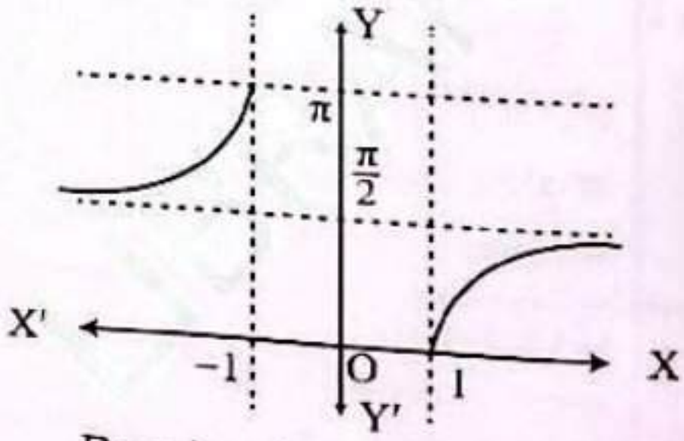
$y = \operatorname{cosec}^{-1}x$



Domain = $\mathbb{R} - (-1, 1)$ or $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

Range = $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$ or $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)\cup\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$y = \sec^{-1}x$



Domain = $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ or $\mathbb{R}-(-1, 1)$

Range = $[0, \pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ or $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক/বৃত্তীয় ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ:

ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ
$\sin^{-1}x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\tan^{-1}x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1}x$	$\mathbb{R}$	$(0,\pi)$
$\text{cosec}^{-1}x$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ বা, $\mathbb{R}-(-1,1)$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$
$\sec^{-1}x$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ বা, $\mathbb{R}-(-1,1)$	$[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

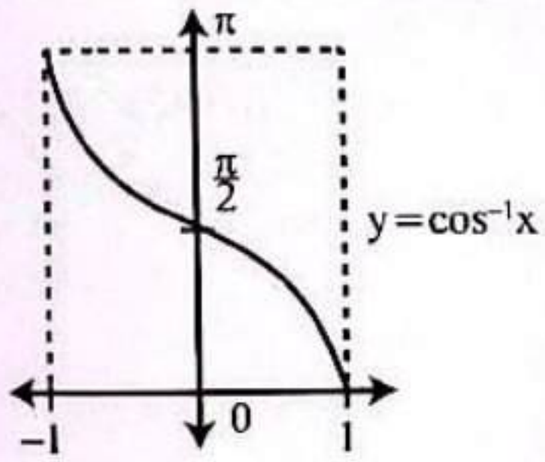
Note: $\sin^{-1}x$ কে অনেক সময় arc sin x লেখা হয়।

MCQ

01. $\cos^{-1}x$ এর রেঞ্জ কোনটি? **[JU'23-24] [Ans: d]**

(a) $(-1,1)$ (b) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (c) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ (d) $[0,\pi]$

সমাধান: $\cos^{-1}x$ এর রেঞ্জ $[0,\pi]$



Type-02: বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অজানা মান

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

- **Formula & Concept:**

একটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনকে অপর একটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে রূপান্তর করতে সমকোণী ত্রিভুজের সাহায্য নিতে হবে এবং প্রয়োজনে অন্যান্য সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে। $\tan^{-1}$ এর সূত্রগুলো ব্যবহার করা সুবিধাজনক।

- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন:

01. $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin^{-1}x+\sec^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$
02. $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$
03. $\sec^{-1}x+\text{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sec^{-1}x+\sin^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$
04. $\tan^{-1}x\pm\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x\pm y}{1\mp xy}$
05. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$
06. $\sin^{-1}x\pm\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}\right\}$
07. $\cos^{-1}x\pm\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left\{xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$
08. $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$
09. $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$
10. $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$
11. $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$
12. $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x)$
13. $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$
14. $\frac{1}{2}\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$
15. $\frac{1}{2}\sin^{-1}x=\tan^{-1}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$
16. $\frac{1}{2}\cos^{-1}x=\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

MCQ

01. $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=?$ [DU'23-24] [Ans: a]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 1 (d) 0

সমাধান: $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$

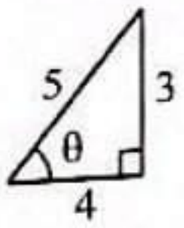
$=\tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}=\tan^{-1}\frac{\frac{21+4}{28}}{\frac{28-3}{28}}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$

02. $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ হলে $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=?$ [GST'23-24] [Ans: d]

(a) $\frac{16}{25}$ (b) $\frac{9}{25}$ (c) $\frac{8}{25}$ (d) $\frac{7}{25}$

সমাধান: $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\therefore\cos\theta=\frac{4}{5}$ তাহলে, $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\frac{16}{25}-1=\frac{32-25}{25}=\frac{7}{25}$

বিকল্প: $\theta=\cos^{-1}\frac{4}{5}\therefore\cos\theta=\frac{4}{5}\therefore\tan\theta=\frac{3}{4}$



তাহলে, $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{16-9}{16+9}=\frac{7}{25}$

03. $\sin\left\{\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=?$ [GST'23-24] [Ans: d]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) -1 (d) 1

সমাধান: $\sin\left[\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=\sin\left[\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\frac{\pi}{2}=1$

04. $\tan^{-1}6+\tan^{-1}\frac{7}{5}$ এর মান কোনটি? [RU'23-24] [Ans: a]

(a) $\frac{3\pi}{4}$ (b) $\frac{3\pi}{2}$ (c) $\frac{7\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

সমাধান: $\tan^{-1}(6)+\tan^{-1}\left(\frac{7}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{6+\frac{7}{5}}{1-\frac{6\times7}{5}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{37}{-37}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right)$

$\therefore\theta=\pi-\tan^{-1}(1)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$; [$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ এর সাথে তুলনা করলে পাই, বিন্দুটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত]

05. $\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\cot^{-1}3\right)$ এর মান হবে কোনটি? [CU'23-24; JU'19-20] [Ans: c]

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{3}{4}$

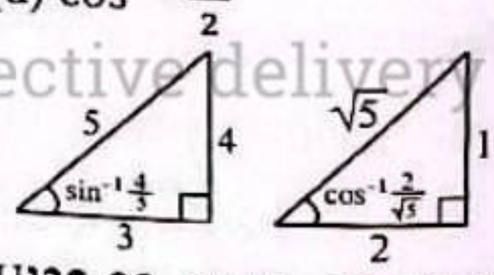
সমাধান: $\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\cot^{-1}3\right)=\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)=\sin\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\sin\tan^{-1}1=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

06. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ সমান- [RU'23-24; DU'14-15] [Ans: c]

(a) $\tan^{-1}\frac{2}{11}$ (b) $\sin^{-1}\frac{11}{2}$ (c) $\tan^{-1}\frac{11}{2}$ (d) $\cos^{-1}\frac{11}{2}$

সমাধান: $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}$

$=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}}=\tan^{-1}\frac{\frac{11}{6}}{\frac{1}{3}}=\tan^{-1}\frac{11}{2}$



07. $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3$ এর মান কোনটি? [JU'22-23, 19-20, 18-19] [Ans: c]

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) 2π

সমাধান: $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3=\tan^{-1}\left(\frac{1+2+3-1.2.3}{1-1\cdot2-2\cdot3-3\cdot1}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{6-6}{1-2-6-3}\right)=\tan^{-1}0=0$ বা π

$\because\tan^{-1}1,\tan^{-1}2,\tan^{-1}3$ প্রত্যেকে 0 হতে বড় ও $\frac{\pi}{2}$ হতে ছোট।

$\therefore\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3\neq0\therefore\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3=\pi$

বিকল্প: $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3=\tan^{-1}\left(\frac{1+2}{1-1\times2}\right)+\tan^{-1}3=\tan^{-1}(-3)-\tan^{-1}3$

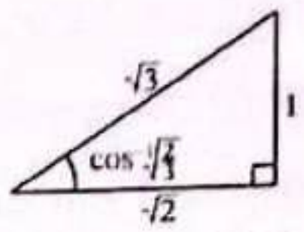
$=\pi+\tan^{-1}(3)-\tan^{-1}(3)=\pi$; [$\because\tan^{-1}(-3)=-\tan^{-1}3$ হলে Answer 0 হয়, কিন্তু $\tan^{-1}1+\tan^{-2}2+\tan^{-1}3\neq0$]

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

08. $\tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$ = কত? [RU'22-23] [Ans: a]

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 0°



সমাধান: $\tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$

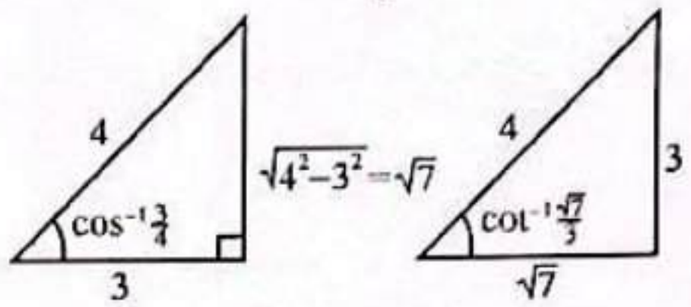
$= \tan^{-1}\sin\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$

09. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}\frac{3}{4}$ এর মান কত? [RU'22-23; Agri.'21-22] [Ans: c]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$

সমাধান: $\sin\cot^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3}$

$= \sin\cot^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3} = \sin\sin^{-1}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$



সহঅনুপাত

Shortcut: $\sin \quad \cot^{-1} \quad \tan \quad \cos^{-1}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

সহঅনুপাত

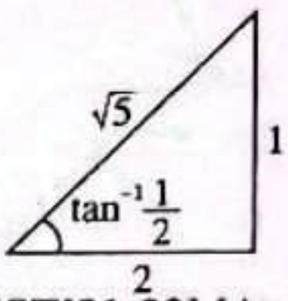
[এক্ষেত্রে 1 নং ও 4 নং এবং 2 নং ও 3 নং ফাংশন সহঅনুপাত থাকলে শেষে যা থাকবে তাই উত্তর হবে]

10. $\text{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) - 3\sec^2\left(\cot^{-1}\sqrt{3}\right) = ?$ [DU'21-22] [Ans: c]

(a) 15 (b) $\frac{2}{9}$ (c) 1 (d) 25

সমাধান: $\text{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) - 3\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3})$

$= \{\text{cosec}(\text{cosec}^{-1}\sqrt{5})\}^2 - 3\sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5 - 3\times\frac{4}{3} = 1$



11. $\cos^3\left(\cot^{-1}\left(\cot\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right)$ = কত? [GST'21-22] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (d) $3\sqrt{\frac{3}{8}}$

সমাধান: $\cos^3\left(\cot^{-1}\left(\cot\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right) = \left(\cos\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

12. $\cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত? [Agri.'21-22; DU'19-20] [Ans: d]

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

সমাধান: $\sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \therefore \cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right) = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

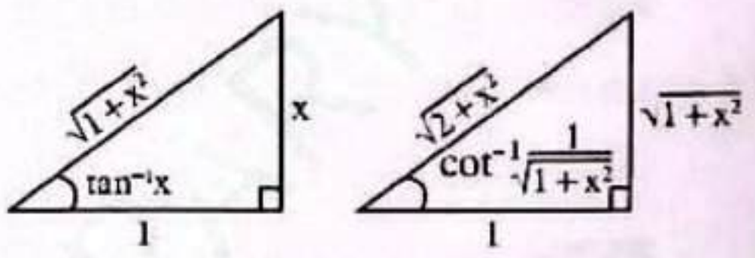
13. $\sin\cot^{-1}\cos\tan^{-1}x$ = কত? [RU'21-22] [Ans: c]

(a) $\sqrt{\frac{1-x^2}{2-x^2}}$ (b) $\sqrt{\frac{1+x^2}{2-x^2}}$ (c) $\sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$ (d) $\sqrt{\frac{1-x^2}{2+x^2}}$

সমাধান: $\sin\cot^{-1}\cos\tan^{-1}x = \sin\cot^{-1}\cos\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \sin\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

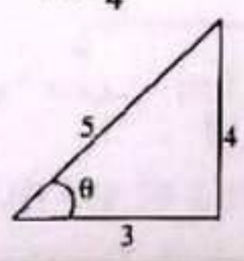
$= \sin\sin^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}} = \sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$



14. $f(x) = \cos x$ হলে $f(\cot^{-1}\frac{3}{4})$ এর মান কত? [JU'21-22] [Ans: b]

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{3}{4}$

সমাধান: $f(x) = \cos x \therefore f\left(\cot^{-1}\frac{3}{4}\right) = \cos\left(\cot^{-1}\frac{3}{4}\right) = \cos\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$



POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery
Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

[Agri.'20-21] [Ans: c]

15. যদি $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 + \tan^{-1}4 = \theta$ হয়, তবে $\tan\theta = ?$

(a) 9 (b) $\frac{7}{2}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{4}{5}$

সমাধান: $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 + \tan^{-1}4 = \theta \Rightarrow \tan^{-1}\frac{2+3+4-2\times3\times4}{1-2\times3-3\times4-4\times2} = \theta \Rightarrow \tan^{-1}\frac{3}{5} = \theta \therefore \tan\theta = \frac{3}{5}$

বিকল্প: $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 + \tan^{-1}4 = \tan^{-1}4 + \tan^{-1}\left(\frac{2+3}{1-2\times3}\right) = \tan^{-1}4 + \tan^{-1}\left(\frac{5}{-5}\right)$

$= \tan^{-1}4 + \tan^{-1}(-1) = \tan^{-1}4 - \tan^{-1} = \tan^{-1}\left(\frac{4-1}{1+4\times1}\right) = \tan^{-1}\frac{3}{5} \therefore \tan\theta = \tan\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$

[SUST'19-20] [Ans: e]

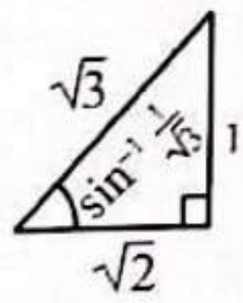
16. যদি $x = \sqrt{2}$ হয়, তবে $\cos\sin^{-1}\tan\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ এর মান কত?

(a) 0 (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

সমাধান: $x = \sqrt{2}, \cos\sin^{-1}\tan\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{2})^2}}$

$= \cos\sin^{-1}\tan\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \cos\sin^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \cos\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$



[JU'19-20] [Ans: a]

17. $\sin[2(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)] = a$ হলে, a এর মান কত?

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

সমাধান: $\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) = a \therefore a = 0; \left[\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$

[JU'19-20] [Ans: b]

18. যদি $x = \sin\cos^{-1}y$ হয়, তবে $(x^2 + y^2)$ এর মান কোনটি?

(a) 2 (b) 1 (c) -1 (d) 0

সমাধান: $x = \sin\cos^{-1}y \Rightarrow x = \sin\sin^{-1}\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow x^2 = 1-y^2 \therefore x^2 + y^2 = 1$

[BAU'18-19] [Ans: a]

19. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ সূত্রটি কোন শর্তে বৈধ?

(a) $xy < 1$ (b) $xy > 1$ (c) $xy < 2$ (d) $xy > 2$

[RU'17-18] [Ans: d]

20. $\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{4}\right)$ এর মান কত?

(a) -1 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

সমাধান: $\cos\frac{\pi}{2} = 0; \left[\because \sin^{-1}\frac{1}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}\right]$

[CU'17-18] [Ans: a]

21. $\sin(\sin^{-1}x + 2\cos^{-1}x)$ এর মান কত?

(a) x (b) 2x (c) 3x (d) 4x

সমাধান: $\sin(\sin^{-1}x + 2\cos^{-1}x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \cos^{-1}x\right) \left[\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$

$= \cos(\cos^{-1}x) = x \left[\because \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta\right]$

POEL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

22. $\sin^{-1}x + \tan^{-1}x + \cot^{-1}x + \cos^{-1}x$ এর মান কত?

[CU'16-17] [Ans: c]

(a) $\pm\frac{\pi}{2}$ (b) $\pm\pi$ (c) π (d) $-\pi$ (e) 0

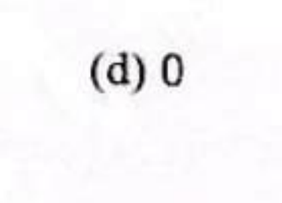
সমাধান: $\sin^{-1}x + \tan^{-1}x + \cot^{-1}x + \cos^{-1}x = (\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) + (\tan^{-1}x + \cot^{-1}x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

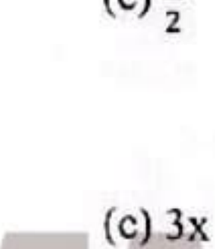
23. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x$ এর মান কত? [RU'15-16, 12-13, 10-11, 08-09; JU'14-15; JnU'14-15; CU'05-06] [Ans: b]

(a) 0 (b) x (c) $\frac{1}{x}$ (d) 1

সমাধান: $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x = \sin\cot^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$= \sin\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sin\sin^{-1}\frac{x}{1} = x$





Shortcut:

sin cot⁻¹ tan cos⁻¹x=x

1 নং ও 4 নং এবং 2 নং ও 3 নং সহঅনুপাত থাকলে শেষে যা থাকবে তাই উত্তর হবে।

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

24. কোনটি সঠিক নয়? [RU'14-15] [Ans: a]

(a) $\sin^{-1} x$ একটি সংখ্যা (b) $\sin(\sin^{-1} x)$ এর মান একটি সংখ্যা

(c) $\sin^{-1} x$ এবং $(\sin x)^{-1}$ এর মান এক নয় (d) $\sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$

25. $\sin\theta = x$ হলে $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x =$ কত? [JU'14-15] [Ans: c]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

সমাধান: $\sin\theta = x \Rightarrow \theta = \sin^{-1} x$; আবার, $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$

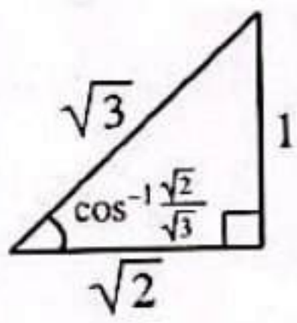
$\therefore \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \theta; \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$

[Note: সূত্র থেকে আমরা জানি, $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$]

26. $\tan^{-1}\left\{\sin\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ সমান- [DU'13-14] [Ans: d]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

সমাধান: $\tan^{-1}\left\{\sin\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\} = \tan^{-1}\left\{\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$



27. যদি $\sin^{-1} x = \theta$ হয়, তবে $\cos\theta$ এর মান কত? [JnU'13-14] [Ans: b]

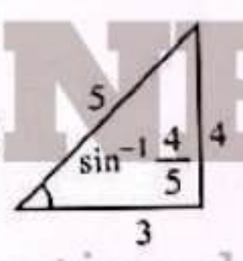
(a) $1 - x^2$ (b) $\sqrt{1 - x^2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

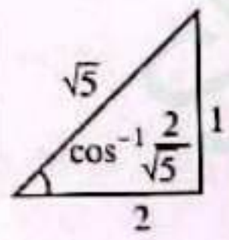
সমাধান: $\sin^{-1} x = \theta \Rightarrow x = \sin\theta \therefore \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - x^2}$

Written

01. $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ -এর মান নির্ণয় কর। [DU'21-22]

সমাধান: $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}} = \tan^{-1}\frac{11}{2}$ (Ans.)





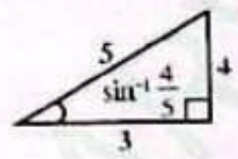
02. মান নির্ণয় কর: $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{16}{65}$ [RU'19-20]

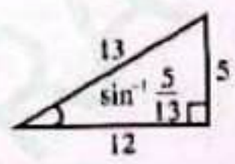
সমাধান: $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{16}{65} = \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{5}{12} + \sin^{-1}\frac{16}{65}$

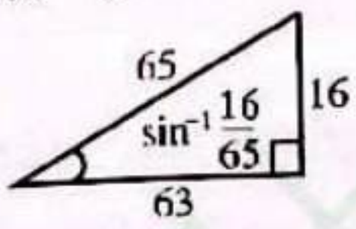
$= \tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{12}}{1-\frac{20}{36}} + \sin^{-1}\frac{16}{65} = \tan^{-1}\frac{\frac{16+5}{12}}{\frac{16}{36}} + \sin^{-1}\frac{16}{65}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{21}{12}\times\frac{36}{16}\right) + \sin^{-1}\frac{16}{65}$

$= \tan^{-1}\frac{63}{16} + \sin^{-1}\frac{16}{65} = \tan^{-1}\frac{63}{16} + \cot^{-1}\frac{63}{16} = \frac{\pi}{2}$ (Ans.)







POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-03: বিপরীত ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের প্রমাণ সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

এক্ষেত্রে যা চাওয়া হয়েছে তার সাথে মিল রেখে সমাধান করে এগিয়ে যেতে হবে। কোনো সমস্যা সমাধানের একাধিক পদ্ধতি থাকতে পারে। এর মধ্যে সর্বোৎকৃষ্ট পদ্ধতি বেছে নেয়াই বুদ্ধিদীপ্ত কাজ।

MCQ

01. $\sin^{-1} p + \sin^{-1} q = \frac{\pi}{2}$ হলে $p\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{1-p^2}$ -এর মান কত? **[GST'23-24] [Ans: c]**

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

সমাধান: $\sin^{-1} p + \sin^{-1} q = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^{-1}\left[p\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{1-p^2}\right] = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow p\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{1-p^2} = \sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore p\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{1-p^2} = 1$

02. $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ হলে কোনটি সঠিক? **[DU'17-18; KU'17-18] [Ans: a]**

(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $x^2 - y^2 = 1$ (c) $x + y = 1$ (d) $x - y = 1$

সমাধান: $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} y = \cos^{-1} y = \sin^{-1}\sqrt{1-y^2}$

$\therefore x = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

Written

01. দেখাও যে, $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$. **[DU'20-21]**

সমাধান: ধরি, $\tan A = x \therefore A = \tan^{-1} x$ এবং $\tan B = y \therefore B = \tan^{-1} y$

$\therefore \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{x+y}{1-xy}$; $A + B = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ **[Showed]**

$\therefore \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ **[Showed]**

02. প্রমাণ কর: $\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$। **[RU'19-20]**

সমাধান: $\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{2}{9}}\right) = \tan^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times 2\tan^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$ **[Proved]**

বিকল্প: ধরি, $\cos^{-1}\frac{3}{5} = \theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5} \therefore \sin\theta = \frac{4}{5}$

এখন, $\tan\left(\frac{1}{2}\theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{2\cos^2\left(\frac{1}{2}\theta\right)} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{1+\frac{3}{5}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

এখন, L.H.S. $= \tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{2}{9}} = \tan^{-1}\frac{9+8}{36-2} = \tan^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$ = R.H.S. **[Proved]**

03. যদি $A + B + C = \pi$, $\tan^{-1} 2 = A$ এবং $\tan^{-1} 3 = B$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $C = \frac{\pi}{4}$. **[JnU'19-20]**

সমাধান: $A + B + C = \pi$; $\tan^{-1} 2 = A$; $\tan^{-1} 3 = B \therefore A + B = \pi - C$ এবং $\tan A = 2$ এবং $\tan B = 3$

$\therefore \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} \Rightarrow \tan(\pi - C) = \frac{2+3}{1-2\times 3}$

$\Rightarrow -\tan C = -1 \Rightarrow \tan C = \tan\frac{\pi}{4} \therefore C = \frac{\pi}{4}$ **(Proved)**

Type-04: বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনযুক্ত সমীকরণের সমাধান

➲ **Formula & Concept:**

একাধিক বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন থাকলে প্রতিটিকে যেকোনো এক ধরনের বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে রূপান্তর করতে হবে এবং সমাধান করতে হবে।

POLL MACHINE Preparation and Practice are vital for effective delivery
Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

MCQ

01. $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} + \cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}$ সমীকরণে $x = ?$ [RU'23-24] [Ans: b]

(a) $\frac{a-b}{1+ab}$ (b) $\frac{a+b}{1-ab}$ (c) $\frac{2ab}{1+ab}a+b$ (d) $\frac{2ab}{1-ab}$

সমাধান: $2\tan^{-1}x = 2\tan^{-1}a + 2\tan^{-1}b \Rightarrow \tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab} \therefore x = \frac{a+b}{1-ab}$

02. $\sin^{-1}(-\cos x) + \sin^{-1}(\cos 3x) =$ কোনটি? [RU'23-24] [Ans: b]

(a) $-4x$ (b) $-2x$ (c) $\pi - 2x$ (d) $\pi - 4x$

সমাধান: $\sin^{-1}(-\cos x) + \sin^{-1}(\cos 3x)$

$= \sin^{-1}\left[-\cos x\sqrt{1-\cos^2 3x} + \cos 3x\sqrt{1-\cos^2 x}\right]$; $\left[\because \sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right]\right.$

$= \sin^{-1}[\sin x\cos 3x - \cos x\sin 3x]$

$= \sin^{-1}[\sin(x-3x)] = -2x$

বিকল্প: $\sin^{-1}(-\cos x) + \sin^{-1}(\cos 3x) = -\sin^{-1}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\} + \sin^{-1}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\right\}$

$= -\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{2} - 3x = -2x$

03. যদি $\tan\left(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right) = \sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ হয় তাহলে $x = ?$ [GST'22-23] [Ans: a]

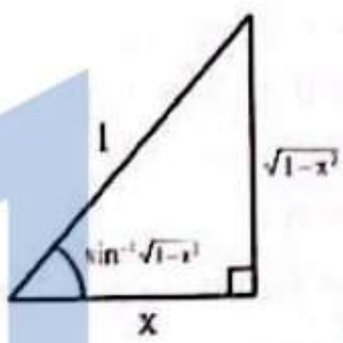
(a) $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (c) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{5}{3}$

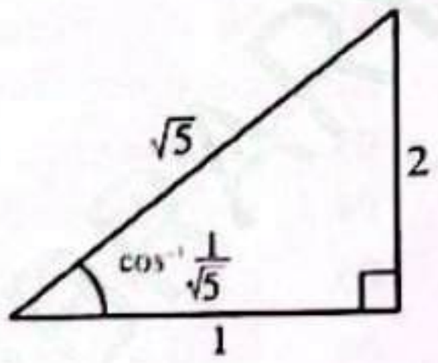
সমাধান: $\tan\sin^{-1}\sqrt{1-x^2} = \sin\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$\Rightarrow \tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sin\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{4}{5}$; [বর্গ করে]

$\Rightarrow 5 - 5x^2 = 4x^2 \Rightarrow 9x^2 = 5 \therefore x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$





$\therefore x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ও $x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ উভয়ই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

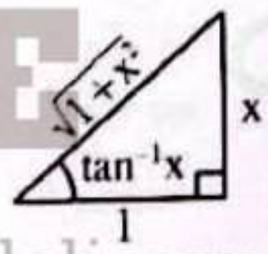
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

04. যদি $\sec^{-1}3 = \tan^{-1}x$ হয়, তবে x এর মান কত? [GST'20-21] [Ans: d]

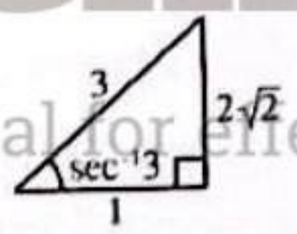
(a) 3 (b) $\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{2}$

সমাধান: $\tan^{-1}x = \sec^{-1}\sqrt{1+x^2} = \sec^{-1}3 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} = 3 \Rightarrow 1 + x^2 = 9$

$\Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$



বিকল্প: $\sec^{-1}3 = \tan^{-1}x \Rightarrow \tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{1}\right) \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$



05. $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}y$ সমীকরণে $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে, y এর মান কত? [KU'19-20] [Ans: c]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 1

সমাধান: $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}y \Rightarrow 2\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin^{-1}y \Rightarrow 2\times\frac{\pi}{3} = \sin^{-1}y \Rightarrow y = \sin\frac{2\pi}{3} \therefore y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

06. যদি $\tan^{-1}\left(x+\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(x-\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}2$ হয়, তবে x এর মান হবে- [DU'16-17] [Ans: d]

(a) $-\frac{5}{6}$ (b) $-\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

সমাধান: $\tan^{-1}\left(x+\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(x-\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{3}+x-\frac{1}{3}}{1-\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \tan^{-1}\frac{2x}{\frac{10}{9}-x^2} = \tan^{-1}2$

$\Rightarrow 2x = \frac{20}{9} - 2x^2 \Rightarrow 9x^2 + 9x - 10 = 0 \Rightarrow (3x+5)(3x-2) = 0 \therefore x = \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

07. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3}$ হলে $x = ?$ [KU'14-15] [Ans: b]

(a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ (c) $\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

সমাধান: $\sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin^{-1}x + \cos^{-1}x + \sin^{-1}2x = \cos^{-1}x + \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}2x = \cos^{-1}x + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}2x\right) = \cos\left(\cos^{-1}x + \frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow -\sin(\sin^{-1}2x) = x\frac{1}{2} - \sqrt{1-x^2}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -2x = \frac{x}{2} - \sqrt{1-x^2}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow 5x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 25x^2 = 3 - 3x^2$; [বর্গ করে]

$\Rightarrow 28x^2 = 3 \Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{3}}{\sqrt{28}} \therefore x = \frac{\pm\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ কিন্তু $x = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে না, তাই $x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \therefore x = \sqrt{\frac{3}{28}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

Type-05: $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ [যেখানে, $|c| \le \sqrt{a^2+b^2}$]
আকৃতির ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

এ ধরনের অঙ্কে উভয়পক্ষকে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করে $\cos(A \pm B)$ এর সূত্র প্রয়োগ করাই উত্তম।

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ: (সকল ক্ষেত্রে $n \in \mathbb{Z}$ হবে।)

01. $\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\alpha$
02. $\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha$
03. $\tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha$
04. $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$
05. $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
06. $\tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$
07. $\sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$
08. $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2n\pi$
09. $\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = (4n+1)\frac{\pi}{4} = n\pi + \frac{\pi}{4}$
10. $\sin\theta = -1 \Rightarrow \theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$
11. $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = (2n+1)\pi$
12. $\tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = (4n-1)\frac{\pi}{4} = n\pi - \frac{\pi}{4}$

MCQ

01. $\sqrt{3}\cos A + \sin A = 2$; $(0 < A < \pi)$ সমীকরণে A এর মান- [RU'23-24] [Ans: c]

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

সমাধান: $\sqrt{3}\cos A + \sin A = 2\ (0 < A < \pi)$; $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A + \frac{1}{2}\sin A = 1 \Rightarrow \cos A\cos 30° + \sin A\sin 30° = 1$

$\Rightarrow \cos(A - 30°) = \cos 0° \therefore A - 30° = 2n\pi \Rightarrow A = 2n\pi + 30° \Rightarrow A = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$

$n = 0$ হলে, $\Rightarrow A = \frac{\pi}{6}$ অথবা, $n = 1$ হলে, $A = 2\pi + \frac{\pi}{6}$; (গ্রহণযোগ্য নয়)

02. $\tan\theta + \cot\theta = 2\text{cosec}\,\theta, 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ হলে, θ-এর মান কত? [DU'22-23] [Ans: d]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{5\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

সমাধান: $\tan\theta + \cot\theta = 2\text{cosec}\,\theta \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin\theta}$; $[\sin\theta \neq 0; \cos\theta \neq 0]$

$\Rightarrow \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = 2 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

03. $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ হলে, $\cos\theta - \sin\theta$ এর মান কত? [JU'22-23] [Ans: c]

(a) $\pm\sqrt{2}\sin\theta$ (b) $2\sin\theta$ (c) $\sqrt{2}\sin\theta$ (d) $\sqrt{2\sin\theta}$

সমাধান: $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta \Rightarrow (\sqrt{2}-1)\cos\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\cos\theta = (\sqrt{2}+1)\sin\theta$; [উভয়পক্ষে $\sqrt{2}+1$ দ্বারা গুণ]

$\Rightarrow (2-1)\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta \therefore \cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

বিকল্প: $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta \Rightarrow \sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta = 2\cos\theta$; [$\sqrt{2}$ দ্বারা গুণ]

$\Rightarrow \cos\theta + \sin\theta + \sqrt{2}\sin\theta = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

04. $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3}$ হলে, θ এর মান কত? **[Agri.'21-22; DU'20-21] [Ans: b]**

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi^2}{3}$

সমাধান: $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot\frac{\theta}{2} = \cot\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

05. $\cos x + \sec x = 2$ হলে, x এর মান কত? **[JU'21-22] [Ans: c]**

(a) $(2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$ (b) $(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ (c) $2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ (d) $(2n+1)\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$

সমাধান: $\cos x + \frac{1}{\cos x} = 2 \Rightarrow \cos^2 x + 1 - 2\cos x = 0$

$\Rightarrow (\cos x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \therefore x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

06. $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ হলে, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে θ এর মান কত? **[JU'18-19] [Ans: c]**

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

সমাধান: $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = 1$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\sin\theta + \sin\frac{\pi}{4}\cos\theta = 1 \Rightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

07. $\cot\theta + \sqrt{3} = 2\operatorname{cosec}\theta$ সমীকরণের সমাধান- **[DU'13-14] [Ans: b]**

(a) $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$ (b) $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$ (c) $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$ (d) $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{6}$

সমাধান: $\cot\theta + \sqrt{3} = 2\operatorname{cosec}\theta \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \sqrt{3} = \frac{2}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = 1$

$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{6}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{6}\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \theta = \frac{(4n+1)\pi}{2}$; $[n \in \mathbb{Z}]$

$\Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$

Type-06: cot θ, tan θ, sec θ, cosec θ বিশিষ্ট ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

এই টাইপের সমস্যাগুলোতে tan বা cot এর সূত্র আনার চেষ্টা করতে হবে। যদি সূত্র না আনা যায়, তাহলে, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ আকারে ভেঙ্গে সমাধান করতে হবে।

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $\tan x + \tan 3x = 0$ এর সমাধান কী হবে? **[RU'20-21] [Ans: a]**

(a) $\frac{n\pi}{4}$ (b) $n\pi + \frac{\pi}{4}$ (c) $n\pi - \frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{n\pi}{2}$

সমাধান: $\tan 4x = \tan(x + 3x) \Rightarrow \frac{\tan x + \tan 3x}{1 - \tan x \cdot \tan 3x} = \tan 4x$

$\Rightarrow \tan x + \tan 3x = (\tan 4x)(1 - \tan x \cdot \tan 3x) \Rightarrow 0 = (\tan 4x)(1 - \tan x \cdot \tan 3x)$; [দেওয়া আছে]

$\Rightarrow \tan 4x = 0 = \tan(n\pi)$; $[n \in \mathbb{Z}] \Rightarrow 4x = n\pi \therefore x = \frac{n\pi}{4}$

বিকল্প: $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0 \Rightarrow \sin x\cos 3x + \cos x\sin 3x = 0 \Rightarrow \sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = n\pi \therefore x = \frac{n\pi}{4}$

02. $\cot\theta\cot 3\theta = 1$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান- **[DU'18-19] [Ans: b]**

(a) $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ (b) $(2n+1)\frac{\pi}{8}$ (c) $\frac{n\pi}{4}$ (d) $(2n-1)\frac{\pi}{2}$

সমাধান: $\frac{\cos\theta\cos 3\theta}{\sin\theta\sin 3\theta} = 1 \Rightarrow \cos\theta\cos 3\theta - \sin\theta\sin 3\theta = 0$

$\Rightarrow \cos(\theta + 3\theta) = 0 \Rightarrow \cos 4\theta = 0 \Rightarrow 4\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{8}$; $n \in \mathbb{Z}$

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

03. $\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta = \sqrt{3}$ হলে, θ এর মান কত? (যখন n এর মান শূন্য বা পূর্ণসংখ্যা) [KU'18-19] [Ans: d]

(a) $\frac{n}{3} + \frac{\pi}{7}$ (b) $\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{7}$ (c) $\frac{n}{3} + \frac{\pi}{9}$ (d) $\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$

সমাধান: $\tan\theta + \tan 2\theta = \sqrt{3}(1 - \tan\theta\tan 2\theta) \Rightarrow \frac{\tan\theta+\tan 2\theta}{1-\tan\theta\tan 2\theta} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan 3\theta = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow 3\theta = n\pi + \frac{\pi}{3} \therefore \theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{9}; n \in \mathbb{Z}$

[JU'17-18] [Ans: d]

04. $\tan\theta + \cot\theta = 2$ হলে, θ =?

(a) $\theta = (4n-1)\frac{\pi}{4}$ (b) $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ (c) $\theta = (2n-1)\frac{\pi}{4}$ (d) $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{4}$

সমাধান: $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 2 \Rightarrow \tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0 \Rightarrow (\tan\theta - 1)^2 = 0 \Rightarrow \tan\theta = 1$

$\therefore \theta = n\pi + \frac{\pi}{4} = (4n+1)\frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

Type-07: $\sin\theta, \cos\theta$ বিজোড় সংখ্যক পদ সম্বলিত সমীকরণ সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

যখন সমীকরণে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ কোণের বিজোড় সংখ্যক পদ থাকে তখন $\sin C \pm \sin D, \cos C \pm \cos D$ এর সূত্র ব্যবহার করতে হবে। প্রয়োজনে, $1 \pm \cos 2\theta$ এর সূত্র ব্যবহার করা যেতে পারে।

MCQ

01. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ হলে, $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$ এর সমাধান কোনটি? [RU'22-23] [Ans: d]

(a) $x = 0$ (b) $x = \frac{\pi}{6}$ (c) $x = \frac{-3\pi}{2}$ (d) $x = \frac{\pi}{2}$

সমাধান: $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \therefore x = \frac{\pi}{2}$

02. $[-\pi, 2\pi]$ ব্যবধিতে $\cos\theta + 1 = 0$ এর সমাধান সেট কোনটি? [GST'21-22] [Ans: a]

(a) $\{-\pi, \pi\}$ (b) $\{\pi, 2\pi\}$ (c) $\left\{\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ (d) $\left\{-\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$

সমাধান: $\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = (2n+1)\pi; n \in \mathbb{Z}$; $n = 0$ হলে $\theta = \pi$; $n = -1$ হলে $\theta = -\pi$

$n = 0, -1$ বসালে পাই, $\therefore \theta = -\pi, \pi \therefore [-\pi, 2\pi]$ সীমার মধ্যে, সমাধান সেট $\{-\pi, \pi\} \therefore$ সমাধান সেট $= \{-\pi, \pi\}$

03. $\sin\theta = -1$ হলে, θ এর সাধারণ মান কত? [CU'21-22] [Ans: b]

(a) $(4n+1)\frac{\pi}{2}$ (b) $(4n-1)\frac{\pi}{2}$ (c) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (d) $(2n-1)\frac{\pi}{2}$

04. $\cos\theta = 0$ হলে, θ এর সাধারণ মান হবে- [RU'19-20] [Ans: c]

(a) $2n\pi$ (b) $n\pi$ (c) $n\pi + \frac{\pi}{2}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

05. $\cos\theta = 1$ হলে, θ = কত? [JU'18-19] [Ans: b]

(a) $(2n+1)\pi$ (b) $2n\pi$ (c) $\frac{n\pi}{2}$ (d) $n\pi \pm \alpha$

06. $0 \le x \le 90°$ হলে, $\sin 3x = \cos x$ সমীকরণের সমাধান হবে- [DU'17-18] [Ans: d]

(a) $0°, 45°$ (b) $0°, 22.5°$ (c) $45°, 45°$ (d) $22.5°, 45°$

সমাধান: $\sin 3x = \cos x \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos x \Rightarrow x = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

$\therefore x = 2n\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Rightarrow x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - 3x$

$\Rightarrow 4x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$; $n = 0$ হলে, $x = 22.5°$

বা, $x = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - 2n\pi$

$\Rightarrow n = 0$ হলে, $x = 45°$

07. $\sin\theta - \cos\theta = 0$ হলে, θ এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক মান কোনটি? [JnU'15-16] [Ans: a]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

POLE MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

সমাধান: $\sin\theta - \cos\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta \Rightarrow \tan\theta = 1 \therefore \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$; $n \in \mathbb{Z}$; [$\theta = \frac{\pi}{4}$ হবে ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক মান, যখন $n = 0$]

08. $\sin x = \cos x$ হলে, x এর মান কোনটি? **[JU'14-15] [Ans: b]**

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{5\pi}{4}$ (c) $\frac{5\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

সমাধান: $\sin x = \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = n\pi + \frac{\pi}{4}$; $[n \in \mathbb{Z}]$

$n = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{4}$ এবং $x = 1$ হলে, $x = \frac{5\pi}{4}$

Written

01. সমাধান কর: $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta$ **[DU'19-20]**

সমাধান: $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta$

$\Rightarrow 2\sin 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta = 2\cos^2\theta + \cos\theta \Rightarrow \sin 2\theta(2\cos\theta + 1) = \cos\theta(2\cos\theta + 1)$

$\Rightarrow \sin 2\theta(2\cos\theta + 1) - \cos\theta(2\cos\theta + 1) = 0 \Rightarrow (2\cos\theta + 1)(\sin 2\theta - \cos\theta) = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3} \therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

অথবা, $\sin 2\theta - \cos\theta = 0 \Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0 \therefore \cos\theta = 0 \therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} \therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ অথবা, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ অথবা, $\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$; (যেখানে, $n \in \mathbb{Z}$) **(Ans.)**

02. সমাধান কর: $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$ **[RU'19-20]**

সমাধান: $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0 \Rightarrow 2\sin 4x\cos 2x - \sin 4x = 0 \Rightarrow \sin 4x(2\cos 2x - 1) = 0$

$\because \sin 4x = 0 \therefore 4x = n\pi \therefore x = n\frac{\pi}{4}$ অথবা, $2\cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{6} \therefore x = n\frac{\pi}{4}, n\pi \pm \frac{\pi}{6}$; $[n \in \mathbb{Z}]$ **(Ans.)**

Type-08: $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \sec\theta$-এর দ্বিঘাত রাশি সম্বলিত পদ থাকলে

➲ **Formula & Concept:**

সবগুলো ত্রিকোণমিতিক ফাংশনকে যেকোনো একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে রূপান্তরিত করতে হবে অতঃপর দ্বিঘাত রাশির সমাধান ও ত্রিকোণমিতিক সমাধান করতে হবে।

➢ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ➢ $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ ➢ $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

MCQ

01. $5\tan^2\theta - \sec^2\theta = 11 (\pi < \theta < 2\pi)$ সমীকরণে $\theta =$? **[RU'23-24] [Ans: c]**

(a) $\frac{7\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

সমাধান: $5\tan^2\theta - \sec^2\theta = 11$

$\Rightarrow 5\tan^2\theta - 1 - \tan^2\theta = 11$

$\Rightarrow 4\tan^2\theta = 12 \Rightarrow \tan^2\theta = 3$

$\therefore \tan\theta = \pm\sqrt{3}$; $(\pi < \theta < 2\pi)$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

$\theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$ এবং $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

[JU'23-24] [Ans: d]

02. $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta$ হলে $\tan\theta$ এর মান কত?

(a) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) ±1 (c) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm1$

সমাধান: $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta$; $\sec^2\theta = x$ হলে, $3x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 4x + 8 = 0$

$\Rightarrow 3x(x-2) - 4(x-2) = 0$

যখন, $x = 2$

$\sec^2\theta = 2 \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = 2$

$\Rightarrow \tan^2\theta = 1 \therefore \tan\theta = \pm1$

আবার যখন, $x = \frac{4}{3}$

$\therefore \sec^2\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{3} \therefore \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

বিকল্প: $3\sec^2\theta - 10\sec^2\theta + 8 = 0 \therefore \sec^2\theta = \frac{10\pm\sqrt{100-96}}{6} = \frac{10\pm2}{6} = 2, \frac{4}{3}$

$\therefore \sec^2\theta = 2 \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = 2 \therefore \tan\theta = \pm1$ | $\therefore \sec^2\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \frac{4}{3} \therefore \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

[GST'22-23] [Ans: a]

03. $2\cos^2 x + 3\cos x = 2, 0 < \theta < 2\pi$ এর সমাধান সেট-

(a) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ (b) $\left\{\frac{\pi}{3}, \pi\right\}$ (c) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ (d) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

সমাধান: $2\cos^2 x + 3\cos x = 2 \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + 4\cos x - \cos x - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos x(\cos x + 2) - (\cos x + 2) = 0 \Rightarrow (\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$ কিন্তু $\cos x \neq -2[\because -1 \leq \cos x \leq 1]$

$\therefore \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z} \therefore x = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$; [$\because 0 < x < 2\pi$ এবং $\cos x$ এর চিহ্ন "+", মানে x এর অবস্থান ১ম চতুর্ভাগে অথবা ৪র্থ চতুর্ভাগে]

04. $2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta = 3$ হলে, θ এর মান কোনটি? [JU'22-23, 19-20] [Ans: b]

(a) $30°$ (b) $45°$ (c) $60°$ (d) $120°$

সমাধান: $2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta = 3 \Rightarrow 2(1 - \sin^2\theta) + 2\sqrt{2}\sin\theta = 3 \Rightarrow 2 - 2\sin^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta = 3$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta - 2 - 2\sqrt{2}\sin\theta + 3 = 0 \Rightarrow 2\sin^2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 1 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{2}\sin\theta - 1\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$

বিকল্প: লক্ষ করো ডানপক্ষে 3 কিন্তু মূলদ সংখ্যা, কাজেই $2\sqrt{2}\sin\theta$ এর θ তে এমন মান বসাতে হবে যেন $\sqrt{2}$ সরে যায়, নয়তো বর্গ হয়। $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ই সেটা করতে পারে। তাই, $\theta = 45°$।

05. $\tan^2 x + \sec^2 x = 3$ হলে, x-এর মান হবে – [CU'22-23] [Ans: a]

(a) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{n\pi}{4}$ (d) 0

সমাধান: $\tan^2 x + \sec^2 x = 3 \Rightarrow \tan^2 x + 1 + \tan^2 x = 3 \Rightarrow 2\tan^2 x = 2 \Rightarrow \tan^2 x = 1$

$\Rightarrow \tan x = \pm1 = \tan x = \tan\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) \therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$

06. $\tan^2\theta + \sec\theta + 1 = 0; 0° \leq \theta \leq 360°$ এর সমাধান কত? [RU'21-22] [Ans: c]

(a) $0°$ (b) $90°$ (c) $180°$ (d) $270°$

সমাধান: $\tan^2\theta + \sec\theta + 1 = 0 \Rightarrow \sec^2\theta - 1 + \sec\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow \sec^2\theta + \sec\theta = 0 \Rightarrow \sec\theta(\sec\theta + 1) = 0 \because \sec\theta \neq 0$; [$\because \sec\theta$ এর রেঞ্জ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$]

$\therefore \sec\theta = -1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = (2n+1)\pi; n \in \mathbb{Z}$

$n = 0$ হলে, $\theta = \pi$ বা $180°$

07. $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}; 0 < \theta < \pi$ এর সমাধান কোনটি? [RU'21-22; DU'16-17] [Ans: d]

(a) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ (b) $-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

সমাধান: $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3} \Rightarrow 1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3} \Rightarrow 2\tan^2\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$; $n = 0$ হলে, $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$; [$0 < \theta < \pi$ সীমায় θ এর গ্রহণযোগ্য মান $\frac{\pi}{6}$]

$n = 1$ হলে, $\theta = \pi \pm \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$; [$0 < \theta < \pi$ সীমায় θ এর গ্রহণযোগ্য মান $\frac{5\pi}{6}$]

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

08. $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ হলে, $\sec\theta$ এর মান কত? [JU'19-20] [Ans: a]

(a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{2}{3}$

সমাধান: $7(1-\cos^2\theta) + 3\cos^2\theta = 4 \Rightarrow 7 - 7\cos^2\theta + 3\cos^2\theta - 4 = 0 \quad = 3 - 4\cos^2\theta = 0$

$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \sec^2\theta = \frac{4}{3} \therefore \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

09. $\cot^2\theta - (\sqrt{3}+1)\cot\theta + \sqrt{3} = 0,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \theta =$ কত? [JU'18-19, DU'15-16] [Ans: d]

(a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$ (d) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$

সমাধান: $\cot^2\theta - \sqrt{3}\cot\theta - \cot\theta + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cot\theta(\cot\theta - \sqrt{3}) - 1(\cot\theta - \sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow (\cot\theta - \sqrt{3})(\cot\theta - 1) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$

10. $2(\sec x + \cos x) = 5$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি? [JnU'15-16] [Ans: a]

(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (b) $2n\pi + \frac{\pi}{3}$ (c) $n\pi + \frac{\pi}{3}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

সমাধান: $2(\sec x + \cos x) = 5 \Rightarrow \frac{2(1+\cos^2 x)}{\cos x} = 5 \Rightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 2) = 0 \ \therefore \cos x = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$; [যেহেতু $\cos x \neq 2$]

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

11. $\sin\theta - \cos 2\theta = 2$ এর সাধারণ সমাধান কোনটি? [CU'14-15] [Ans: b]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $(4n+1)\frac{\pi}{2}$ (c) $(2n+1)\frac{n}{2}$ (d) $(2n+1)\frac{\pi}{3}$

সমাধান: $\sin\theta - (1 - 2\sin^2\theta) = 2 \Rightarrow \sin\theta - 1 + 2\sin^2\theta = 2 \Rightarrow 2\sin^2\theta + \sin\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow (2\sin\theta + 3)(\sin\theta - 1) = 0 \Rightarrow \sin\theta = 1, -\frac{3}{2}$ কিন্তু, $\sin\theta = -\frac{3}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore \sin\theta = 1 \therefore \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$; $[n \in \mathbb{Z}]$

12. $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \sqrt{3}$ হলে, θ এর মান কত? [JU'14-15, JnU'09-10] [Ans: b]

(a) $\pi + \frac{\pi}{12}$ (b) $n\pi \pm \frac{\pi}{12}$ (c) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (d) $n\pi + \frac{\pi}{12}$

সমাধান: $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \sqrt{3} \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 2\theta = 2\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{12}$

Written

01. θ-এর জন্য সমাধান কর: $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta, 0 < \theta < 2\pi$। [DU'23-24]

সমাধান: $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta \Rightarrow 3\sec^4\theta - 10\sec^2\theta + 8 = 0 \Rightarrow 3\sec^4\theta - 4\sec^2\theta - 6\sec^2\theta + 8 = 0$

$\Rightarrow \sec^2\theta(3\sec^2\theta - 4) - 2(3\sec^2\theta - 4) = 0 \Rightarrow (3\sec^2\theta - 4)(\sec^2\theta - 2) = 0$

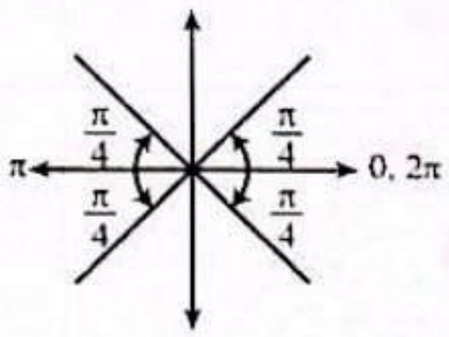
$\therefore \sec\theta = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{2} \therefore \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

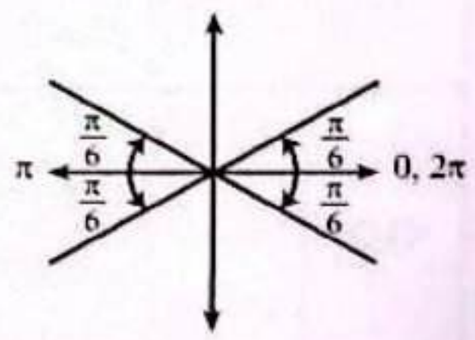
এখন, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে, $\theta = 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}; \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\theta = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}; \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে, $\theta = \pi \pm \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\theta = \pi \pm \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$





POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

"মানুষ সাধারণত ক্ষমতা হারায়, তার আর কোন ক্ষমতা নেই এমন বোধ থেকে।"
-Alice Walker

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

অধ্যায় ০৮
স্থিতিবিদ্যা

➤ ভার্সিটি ভর্তি পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪✪	T-01	দুইটি বলের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সামান্তরিক সূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত সমস্যা	13	1	DU'18-19, 17-18, 11-12; RU'23-24, 20-21; CU'22-23, 21-22, 20-21; JU'21-22; Agri.'21-22, JnU'13-14	RU'19-20
✪✪✪	T-02	কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত	15	2	DU'21-22, 20-21, 14-15, 12-13, 09-10; GST'23-24; RU'23-24, 17-18, 15-16; CU'23-24, 22-23, 16-17; JU'22-23; Agri.'21-22, 19-20, JnU'17-18,	JnU'18-19, KU'18-19
✪✪	T-03	বলের সাথে সমকোণে ক্রিয়ারত লব্ধি সংক্রান্ত	3	-	RU'22-23, 20-21; JU'19-20	-
✪✪	T-04	লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকার শর্ত সংক্রান্ত	3	-	DU'13-14; GST'21-22; RU'21-22	-
✪	T-05	ত্রিভুজের গুণাবলি সংক্রান্ত	1	-	JU'11-12	-
✪✪	T-06	দুই বা ততোধিক বলের লব্ধির মান সরাসরি নির্ণয়ের সূত্র এবং লম্বাংশ উপপাদ্য	4	-	DU'16-17; RU'21-22, 17-18; CU'22-23	-
✪✪✪	T-07	তিনটি সমবিন্দু বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে তা হতে বলত্রয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত	14	-	GST'23-24, 22-23; RU'22-23, 21-22, 19-20, 17-18, 15-16; CU'23-24, 13-14, 11-12, 03-04, 02-03; JU'21-22	-

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery
Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪✪	T-08	তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে তা থেকে বিভিন্ন অজানা রাশির মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা	2	1	Agri.'21-22; KU'14-15	JnU'19-20
✪	T-09	বলের ভ্রামক সম্পর্কিত	1	-	RU'18-19	-
✪✪✪	T-10	সদৃশ ও বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি সংক্রান্ত	4	-	RU'22-23, 21-22; JU'22-23; KU'13-14	-
✪✪	T-11	সমান্তরাল বলের ক্ষেত্রে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দুর সরণ নির্ণয় সংক্রান্ত	2	-	RU'18-19; KU'19-20	-

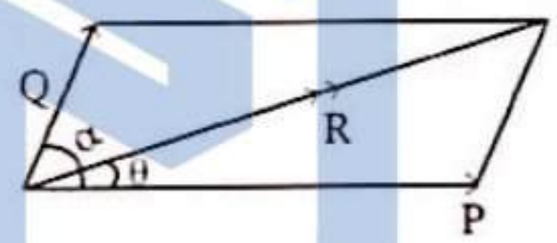
Type-01: দুইটি বলের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সামান্তরিক সূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

P ও Q বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়ারত হলে তাদের লব্ধি,

$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$



Special cases:

(i) মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 0°$, হলে, $R = R_{max} = P + Q$ (বৃহত্তম লব্ধি)

(ii) মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 180^0$ হলে, $R = R_{min} = P \sim Q$ (ক্ষুদ্রতম লব্ধি)

(iii) $\alpha = 90°$ হলে লব্ধি, $R_p = \sqrt{P^2 + Q^2}$ [p ⇒ Perpendicular (লম্ব)]

(iv) $P = Q$ হলে, $R_e = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$; $\theta = \frac{\alpha}{2}$ [e ⇒ Equal (সমান)]

(v) $(P+Q)^2 + (P\sim Q)^2 = 2(P^2 + Q^2) \Rightarrow \boxed{R_{max}^2 + R_{min}^2 = 2R_p^2}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $\frac{2\pi}{3}$ কোণে কার্যরত 4N ও 1N মানের বল দুইটির লব্ধির মান- [RU'23-24] [Ans: c]

(a) $\sqrt{21}$ N (b) $\sqrt{19}$ N (c) $\sqrt{13}$ N (d) $\sqrt{23}$ N

সমাধান: লব্ধি, $R = \sqrt{4^2 + 1^2 + 2\times4\times1\times\cos120°} = \sqrt{16 + 1 + 2\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{16+1-4} = \sqrt{13}$ N

02. S, T(S > T) দুটি বল। বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি 8N এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 2N হলে S-এর মান কত? [CU'22-23] [Ans: b]

(a) 2N (b) 5N (c) 6N (d) 8N

সমাধান: বৃহত্তম লব্ধি, $S + T = 8$ ..... (i)

ক্ষুদ্রতম লব্ধি $S - T = 2$ ..... (ii)

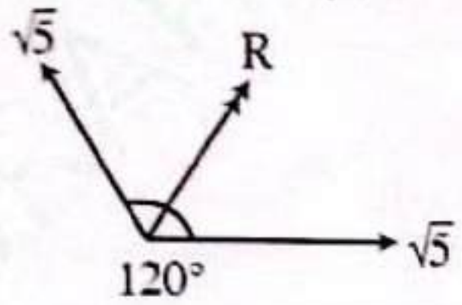
(i) + (ii) ⇒ $2S = 10 \Rightarrow S = 5$N

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

03. $\sqrt{5}$ এককের দুইটি সমান বলের অন্তর্ভুক্ত কোণ $120°$ হলে, এদের লব্ধি কত? [CU'22-23] [Ans: d]

(a) $2\sqrt{5}$ (b) 5 (c) $3\sqrt{5}$ (d) $\sqrt{5}$

সমাধান:



লব্ধি, $R = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \cos 120°} = \sqrt{5 + 5 + 2 \times 5\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{5}$ একক

Shortcut: সমান বলদ্বয়ের লব্ধি $= 2P\cos\frac{\alpha}{2} = 2 \times \sqrt{5}\cos\left(\frac{120°}{2}\right) = 2\sqrt{5} \times \frac{1}{2} = \sqrt{5}$ একক

04. 3 N ও 5 N মানের বল দুইটি পরস্পর লম্ব। তাদের লব্ধির মান কোনটি? [Agri.'21-22] [Ans: c]

(a) 5 N (b) 6 N (c) $\sqrt{34}$ N (d) $\sqrt{31}$ N

সমাধান: লব্ধি $= \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5\cos(90°)} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ একক।

05. P ও Q বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 180°$ হলে, লব্ধির মান ও দিক হবে- [CU'21-22] [Ans: c]

(a) $P + Q, 0°$ (b) $\sqrt{P^2 + Q^2}, \tan^{-1}\frac{Q}{P}$ (c) $P - Q, 0°$ (d) $PQ, \tan^{-1}\frac{Q}{P}$

সমাধান: P ও Q বলের মধ্যবর্তী কোণ $180°$

$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180°} = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ} = P \sim Q$

এবং দিক, $\tan\theta = \frac{Q\sin 180°}{P + Q\cos 180°} = 0 \therefore \theta = 0°$ বা $180° \therefore (P - Q), 0°$ [কিন্তু অপশনে $P - Q$ ও $0°$ আছে বলে এটিই সঠিক উত্তর]

06. একটি বল উহার তিনগুণ আর একটি বলের সহিত $60°$ কোণে ক্রিয়া করলে বল দুটির লব্ধি কত? [CU'21-22] [Ans: b]

(a) $13p^3$ (b) $\sqrt{13}p$ (c) $(10 + 3\sqrt{2})p^3$ (d) $\sqrt{(10 + 3\sqrt{2})p}$

সমাধান: ধরি, বলগুলো p ও 3p এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ $60°$

$\therefore$ লব্ধি $R = \sqrt{p^2 + (3p)^2 + 2 \cdot p \cdot 3p \cdot \cos 60°} = p\sqrt{1 + 9 + 6 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{13}p$ একক

07. $\sqrt{3}$ এককের দুইটি সমান বল $120°$ কোণে এক বিন্দুতে কাজ করে। এদের লব্ধির মান কত? [JU'21-22; JnU'13-14; DU'11-12]

(a) $4\sqrt{3}$একক (b) 3 একক (c) $2\sqrt{3}$ একক (d) $\sqrt{3}$ একক [Ans: d]

সমাধান: লব্ধি $= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\cos(120°)} = \sqrt{3 + 3 + 2 \times 3\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3}$ একক

Shortcut: লব্ধি, $R = 2 \times \sqrt{3} \times \cos\left(\frac{120°}{2}\right) = \sqrt{3}$ একক।

08. দুইটি বল পরস্পর এক সমকোণে ক্রিয়ারত থাকলে তাদের লব্ধি $\sqrt{13}$ N; আবার তারা $120°$ কোণে ক্রিয়ারত থাকলে তাদের লব্ধি $\sqrt{7}$ N। বলদ্বয়ের সমষ্টি কত? [RU'20-21] [Ans: c]

(a) 7 N (b) 8 N (c) 5 N (d) 6 N

সমাধান: বলদ্বয় p ও q হলে প্রথম ক্ষেত্রে, $\sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{13} \Rightarrow p^2 + q^2 = 13$

আবার, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $\sqrt{p^2 + q^2 + 2pq \times \cos 120°} = \sqrt{7} \Rightarrow p^2 + q^2 - pq = 7$

$\therefore pq = 13 - 7 = 6 \therefore p + q = \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq} = \sqrt{13 + 2 \times 6} = \sqrt{25} = 5$ N

09. P এবং Q বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ $135°$ এবং এদের লব্ধি Q হলে, P ও Q এর মধ্যে সম্পর্ক কোনটি? [CU'20-21] [Ans: a]

(a) $P = \sqrt{2}Q$ (b) $\sqrt{2}P = Q$ (c) $P = 3Q$ (d) $P = Q$

সমাধান: $Q^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 135° \Rightarrow 0 = P^2 + 2PQ \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow P - \sqrt{2}Q = 0 \Rightarrow P = \sqrt{2}Q$

10. দুইটি সমান মানের বল P এর সর্বনিম্ন লব্ধির মান কত? [DU'18-19] [Ans: b]

(a) 2P (b) 0 (c) P (d) $\frac{P}{2}$

POLL MACHINE Preparation and Practice are vital for effective delivery
Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

11. 2N এবং 5N মানের দুইটি বল একই রেখায় একই দিকে ক্রিয়ারত। উহাদের সর্বাধিক লব্ধি হবে- **[DU'17-18] [Ans: a]**

(a) 7 N (b) 3 N (c) $\sqrt{29}$N (d) 5 N

সমাধান: $R_{max} = P + Q = 2 + 5 = 7N$

Written

01. দুটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 7 N এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 1 N; বল দুটি পরস্পরের সাথে 90° কোণে একটি কণার উপর ক্রিয়া করলে লব্ধির মান কত হবে? **[RU'19-20]**

সমাধান: ধরি, বল দুটি P ও Q এবং $P > Q$

প্রশ্নমতে, $P + Q = 7$ ..... (i); $P - Q = 1$ ..... (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2P = 8 \therefore P = 4$ N আবার, (i) − (ii) $\Rightarrow 2Q = 6 \therefore Q = 3$ N $\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2 \cdot P \cdot Q \cos 90°$

$\therefore R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5N$ **(Ans.)**

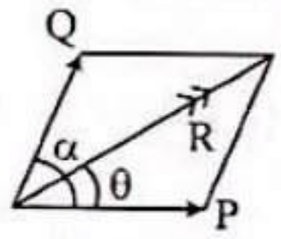
Type-02: কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

➢ P ও Q মানের দুইটি বলের অন্তর্ভুক্ত কোণ α হলে এবং এদের লব্ধি R হলে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\therefore \cos\alpha = \frac{R^2 - P^2 - Q^2}{2PQ}$ [এখান থেকে α নির্ণয় করতে হবে]

আবার, P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$



MCQ

01. 3P এবং 2P বলদ্বয়ের লব্ধি R। প্রথম বল দ্বিগুণ করলে লব্ধির পরিমাণও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ কোনটি? **[GST'23-24, JU'22-23, DU'20-21, 14-15, 12-13, 09-10] [Ans: b]**

(a) 110° (b) 120° (c) 135° (d) 150°

সমাধান: প্রথম ক্ষেত্রে, $R^2 = (3P)^2 + (2P)^2 + 2 \times 3P \times 2P\cos\alpha \Rightarrow R^2 = 9P^2 + 4P^2 + 12P^2\cos\alpha$

$\Rightarrow 4R^2 = 52P^2 + 48P^2\cos\alpha$ ..... (i);

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $(2R)^2 = (6P)^2 + (2P)^2 + 2 \times 6P \times 2P\cos\alpha \Rightarrow 4R^2 = 40P^2 + 24P^2\cos\alpha$ ..... (ii)

(i) ও (ii) হতে, $P^2(52 + 48\cos\alpha) = P^2(40 + 24\cos\alpha)$

$\Rightarrow 24\cos\alpha = -12 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \therefore \alpha = 120°$

02. সমমানের দুটি বলের লব্ধির বর্গ বলদ্বয়ের গুণফলের তিনগুণ হলে বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ কত? **[CU'23-24, 16-17, RU'23-24]**

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$ **[Ans: a]**

সমাধান: $P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha = 3P^2 \therefore \cos\alpha = \frac{P^2}{2P^2} = \frac{1}{2} \therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

বিকল্প: এখানে, $R^2 = 3P^2 \therefore R = \sqrt{3}P \therefore \sqrt{3}P = 2P\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6} \therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

03. P মানের দুটি বলের লব্ধি P হলে, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কোনটি? **[CU'22-23, Agri.'21-22] [Ans: d]**

(a) 0° (b) 45° (c) 135° (d) 120°

সমাধান: $P = \sqrt{P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha} \Rightarrow P = \sqrt{2P^2 + 2P^2\cos\alpha} \Rightarrow 2P^2\cos\alpha = P^2 - 2P^2 = -P^2$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-P^2}{2P^2} = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$

Shortcut: $P = 2P\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60° \therefore \alpha = 120°$

04. কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত 2N ও $2\sqrt{2}$N বলদ্বয়ের লব্ধি $2\sqrt{5}$N হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ- **[DU'21-22] [Ans: b]**

(a) 135° (b) 45° (c) 225° (d) 90°

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

সমাধান: ধরি, 2N ও $2\sqrt{2}$N এর মধ্যবর্তী কোণ α

$\therefore (2\sqrt{5})^2 = 2^2 + (2\sqrt{2})^2 + 2\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}\cos\alpha \Rightarrow 20 = 4 + 8 + 8\sqrt{2}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \alpha = 45°$

05. দুটি সমান মানের বলের লব্ধি এদের গুণফলের বর্গমূল হলে, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[Agri.'19-20] [Ans: d]**

(a) 0° (b) 30° (c) 60° (d) 120°

সমাধান: সমমানের বলের লব্ধি, $R = 2P\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ [সমমানের বলের মান P এবং বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α]

শর্তমতে, $R = \sqrt{P^2} \Rightarrow R = P \Rightarrow 2P\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = P \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 60° \therefore \alpha = 120°$

06. 7 ও 8 কিলোগ্রাম ওজনের দুইটি বলের লব্ধি 13 কিলোগ্রাম হলে বলদ্বয় পরস্পর কত কোণে ক্রিয়া করবে? **[RU'17-18] [Ans: b]**

(a) 50° (b) 60° (c) 45° (d) 30°

সমাধান: $13^2 = 7^2 + 8^2 + 2\cdot 7\cdot 8\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{169-49-64}{2\times 7\times 8} = \frac{1}{2} \therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$

07. একই বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বল দুইটির লব্ধি R, $\alpha = 90°$ ও Q = P হলে R, P বলের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে? **[RU'15-16] [Ans: a]**

(a) 45° (b) 30° (c) 60° (d) 120°

সমাধান: সমমানের দুটি বলের লব্ধি তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ R, P বলের সাথে $\frac{90°}{2} = 45°$ কোণ উৎপন্ন করবে।

Written

01. 3p এবং 2p মানের দুইটি বলের লব্ধি R। প্রথম বলটির মান দ্বিগুণ বাড়লে লব্ধির মানও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের মান নির্ণয় কর। **[KU'18-19, JnU'18-19]**

সমাধান: $R^2 = 9p^2 + 4p^2 + 12p^2\cos\alpha$ ..... (i)

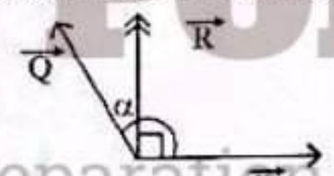
$4R^2 = 36p^2 + 4p^2 + 24p^2\cos\alpha$ ..... (ii)

(i) $\div$ (ii) $\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{9+4+12\cos\alpha}{36+4+24\cos\alpha} \Rightarrow 52 + 48\cos\alpha = 40 + 24\cos\alpha \Rightarrow 24\cos\alpha = -12$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$ **(Ans.)**

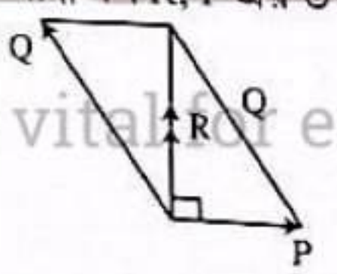
Type-03: বলের সাথে সমকোণে ক্রিয়ারত লব্ধি সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**



$\tan 90° = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} \therefore P + Q\cos\alpha = 0$

লব্ধি বল R, P এর উপর লম্ব হলে,



$Q^2 = R^2 + P^2 \therefore \boxed{R = \sqrt{Q^2 - P^2}}$

MCQ

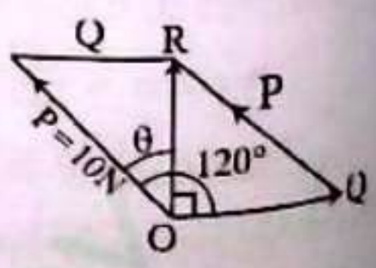
01. একটি বিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের বৃহত্তম বলটির মান 10N এবং এদের লব্ধি ক্ষুদ্রতম বলটির উপর লম্ব। লব্ধির মান কত? **[RU'22-23] [Ans: c]**

(a) $3\sqrt{3}$N (b) $5\sqrt{2}$N (c) $5\sqrt{3}$N (d) 10N

সমাধান: $\theta = 120° - 90° = 30°$

$\sin 30° = \frac{Q}{P} \therefore Q = \frac{1}{2}\times 10 = 5N$

$\therefore$ লব্ধি $= \sqrt{10^2 + 5^2 + 2\times 10\times 5\times\cos 120°}\sqrt{125 + 100\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}N$



বিকল্প: OQ বরাবর লম্বাংশ প্রয়োগ করে, $Q + P\cos 120° = 0 \Rightarrow Q = 5N$; $R = \sqrt{P^2 - Q^2} = 5\sqrt{3}N$

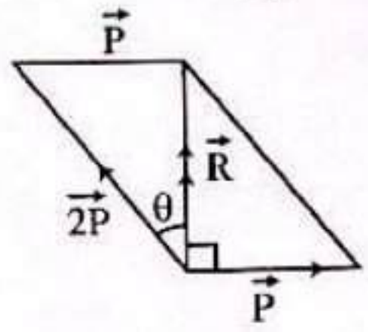
POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery
Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

02. P ও 2P মানের দুইটি বলের লব্ধি R, P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে লম্বভাবে ক্রিয়া করে। বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[RU'20-21]**
(a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) 120° **[Ans: d]**

সমাধান: $\tan 90° = \frac{2P\sin\alpha}{P + 2P\cos\alpha} = \frac{1}{0}$

$\Rightarrow P + 2P\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$

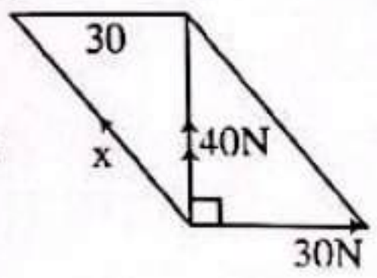


বিকল্প: $\sin\theta = \frac{P}{2P} \therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$

$\therefore \alpha = 90° + \theta = 90° + 30° = 120°$

03. দুইটি বলের লব্ধি 40 N যা ক্ষুদ্রতর বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব। ক্ষুদ্রতর বলটি 30 N হলে বৃহত্তম বল কত? **[JU'19-20] [Ans: c]**
(a) 60 N (b) 70 N (c) 50 N (d) 85 N

সমাধান:



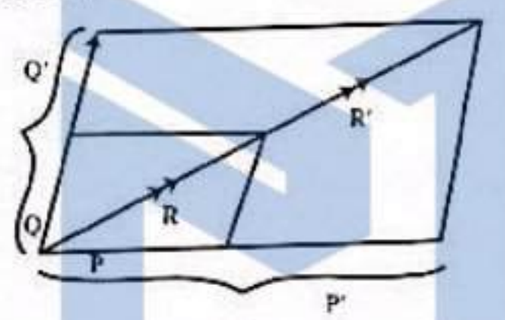
$x^2 = 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 \therefore x = 50$ N

Type-04: লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকার শর্ত সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

P, Q বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়ারত হলে এবং P, Q এর স্থলে P′ ও Q′ বলদ্বয় ক্রিয়া করলে যদি লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে তবে,

$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}$ $\left[\text{অর্থাৎ, } \left(\frac{\text{১ম বল}}{\text{২য় বল}}\right)_{\text{১ম ক্ষেত্র}} = \left(\frac{\text{১ম বল}}{\text{২য় বল}}\right)_{\text{২য় ক্ষেত্র}}\right]$



Shortcut: প্রথম বলকে যত গুণ বাড়ানো হয়, ২য় বলকে যদি ততো গুণই বাড়ানো হয়, তাহলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে।

MCQ

01. পরস্পরের সাথে α কোণে ক্রিয়ারত দুইটি বলের মান একই হারে বৃদ্ধি বা হ্রাস করলে, তাদের লব্ধির দিকের পরিবর্তন কোনটি? **[RU'21-22] [Ans: c]**
(a) 120° (b) 90° (c) 0° (d) কোনটিই নয়

সমাধান: লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকার শর্ত হলো, $\left(\frac{\text{১ম বল}}{\text{২য় বল}}\right)_{\text{১ম ক্ষেত্র}} = \left(\frac{\text{১ম বল}}{\text{২য় বল}}\right)_{\text{২য় ক্ষেত্র}}$

অর্থাৎ, দুই ক্ষেত্রেই বলদ্বয়ের অনুপাত সমান হতে হবে। অন্যভাবে বলা যায়, দুইটি বল একই হারে বৃদ্ধি বা হ্রাস করলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে।

02. F এবং 2F মানের দুটি সমবিন্দু বলের লব্ধির ক্রিয়া দিক এবং একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 2F এবং 2F + 2 মানের বলদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়াদিক একই হলে F এর মান কত একক? **[GST'21-22] [Ans: b]**
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 2 (d) 4

সমাধান: লব্ধির দিক একই বিধায়; $\left(\frac{\text{১ম বল}}{\text{২য় বল}}\right)_{\text{১ম ক্ষেত্র}} = \left(\frac{\text{১ম বল}}{\text{২য় বল}}\right)_{\text{২য় ক্ষেত্র}}$

$\therefore \frac{F}{2F} = \frac{2F}{2F+2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{F}{F+1} \Rightarrow F + 1 = 2F \Rightarrow F = 1$ একক।

03. কোনো বিন্দুতে P এবং 2P মানের দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথম বলটিকে দ্বিগুণ করে দ্বিতীয়টির মান 8 একক বৃদ্ধি করা হলে, তাদের লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান- **[DU'13-14] [Ans: c]**
(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 8

সমাধান: $\frac{P}{2P} = \frac{2P}{2P+8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2P}{2P+8} \Rightarrow 4P = 2P + 8 \Rightarrow 2P = 8 \Rightarrow P = 4$

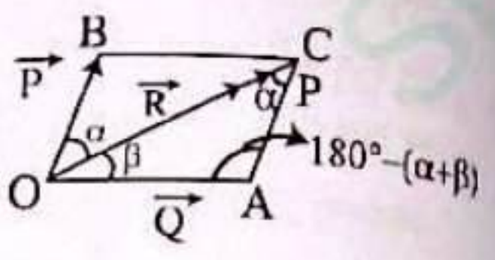
POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery.

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-05: ত্রিভুজের গুণাবলি সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

➢ ত্রিভুজের সাইন সূত্র বলের ক্ষেত্রে 'বলের সাইন সূত্র' হিসেবে ব্যবহৃত হয়: $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ হলে,



ΔOAC-এ, $\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\{180°-(\alpha+\beta)\}} \therefore \frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$

MCQ

01. ABC ত্রিভুজের AB, AC বাহু দ্বারা দুটি বলের মান, দিক ও ভাব সূচিত হলো। তাদের লব্ধি ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্রগামী হলে ত্রিভুজটি- **[JU'11-12] [Ans: c]**

(a) সমকোণী বা সমবাহু (b) বিষম বাহু (c) সমকোণী বা সমদ্বিবাহু (d) কোনটিই নয়

সমাধান: প্রমাণ: মনে করি, ΔABC এর পরিকেন্দ্র O এবং A বিন্দুগামী AD ব্যাস। C, D এবং B, D যোগ করি। তাহলে, $\angle CAD = \angle CBD = 90° - \angle CBA = 90° - B$. তদ্রুপ, $\angle BAD = 90° - C$. [$\because \angle ABD$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

বলের সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\frac{AB}{\sin CAD} = \frac{AC}{\sin BAD}$

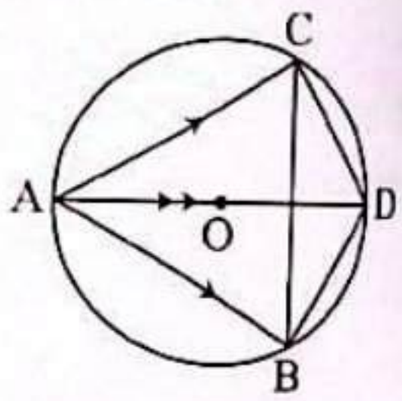
$\Rightarrow \frac{AB}{\sin(90°-B)} = \frac{AC}{\sin(90°-C)} \Rightarrow \frac{AB}{\cos B} = \frac{AC}{\cos C} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\cos B}{\cos C} \cdots$ (i)

আবার ΔABC-এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\cos B}{\cos C} = \frac{\sin C}{\sin B}$ [(i) হতে]

$\Rightarrow \sin B \cos B = \sin C \cos C \Rightarrow \sin 2B = \sin 2C \Rightarrow 2B = 2C \Rightarrow B = C \therefore AC = AB$

আবার, $\sin 2B = \sin 2C = \sin(180° - 2C) \Rightarrow 2B = 180° - 2C \therefore B + C = 90° = A$

সুতরাং, ABC ত্রিভুজটি সমকোণী বা সমদ্বিবাহু।



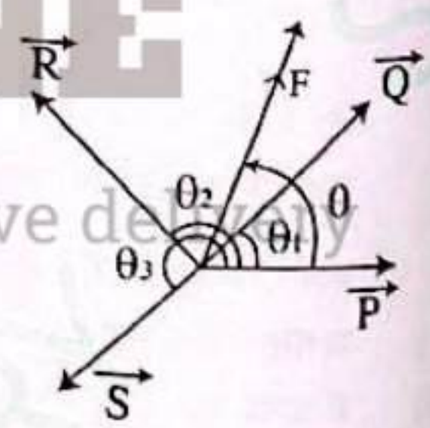
Type-06: দুই বা ততোধিক বলের লব্ধির মান সরাসরি নির্ণয়ের সূত্র এবং লম্বাংশ উপপাদ্য

➲ **Formula & Concept:**

দুই এর অধিক বলের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে লম্বাংশ উপপাদ্য ব্যবহার করতে হবে।

চিত্রের বলগুলোর লব্ধি F হলে, লম্বাংশ উপপাদ্য অনুযায়ী, $F_x = F\cos\theta = P\cos 0° + Q\cos\theta_1 + R\cos\theta_2 + S\cos\theta_3$ [$\vec{P}$ এর দিকে লম্বাংশ নিয়ে]

$F_y = F\sin\theta = P\sin 0° + Q\sin\theta_1 + R\sin\theta_2 + S\sin\theta_3$ [$\vec{P}$ এর লম্ব দিকে লম্বাংশ নিয়ে]



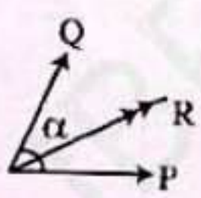
➢ $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

➢ $\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$

➢ দুই বা ততোধিক বলের লব্ধির মান সরাসরি নির্ণয়ের সূত্র:

(i) দুইটি বল থাকলে:

$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$



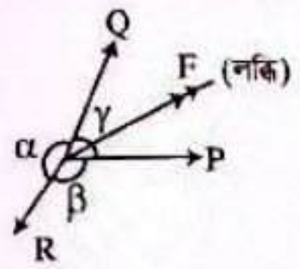
$\Rightarrow \vec{R}\cdot\vec{R} = (\vec{P}+\vec{Q})\cdot(\vec{P}+\vec{Q})$

$\Rightarrow R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha = P^2 + Q^2 + 2\cdot\vec{P}\cdot\vec{Q} = \sum P^2 + 2\vec{P}\cdot\vec{Q}$

POST MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery
Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

(ii) তিনটি বল থাকলে:

$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = \vec{F}$



$\Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{F} = (\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R}) \cdot (\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R})$

$\Rightarrow F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\gamma + 2QR\cos\alpha + 2PR\cos\beta$

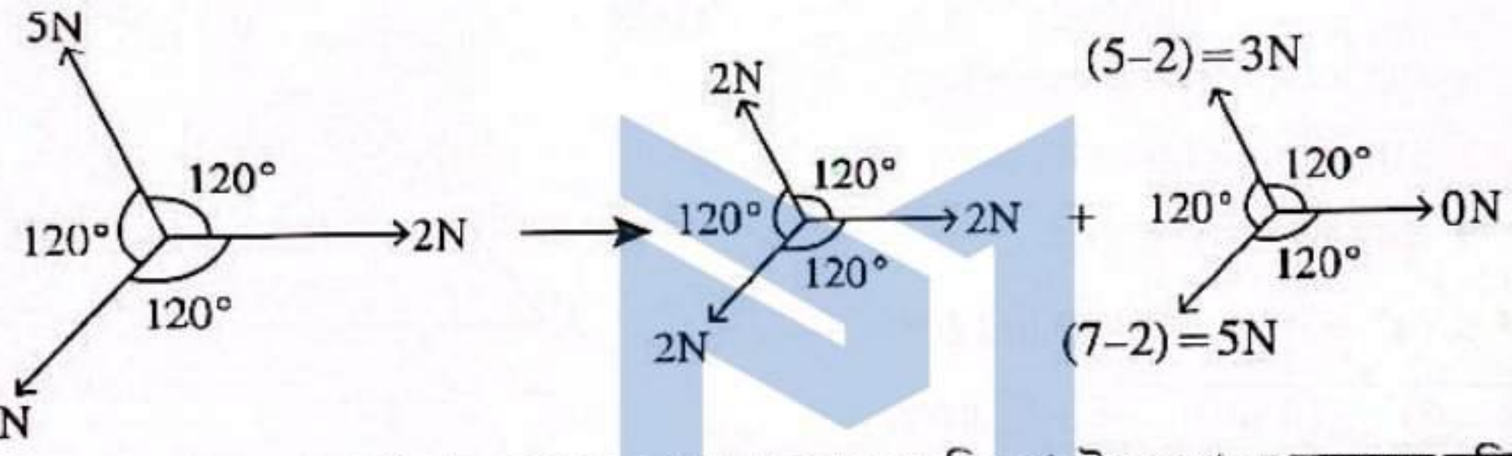
$= P^2 + Q^2 + R^2 + 2\vec{P} \cdot \vec{Q} + 2\vec{Q} \cdot \vec{R} + 2\vec{P} \cdot \vec{R} = \sum P^2 + 2\sum \vec{P} \cdot \vec{Q}$

(iii) n সংখ্যক বল থাকলে:

$P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots\ldots, P_n$ মানের বলগুলোর লব্ধি R হলে, $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \ldots\ldots\ldots + \vec{P}_n = \vec{R}$

$$\boxed{R^2 = \sum P_1^2 + 2\sum \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}$$

- যদি তিনটি সমমানের বল একটি বিন্দুতে এমনভাবে ক্রিয়া করে যেন যেকোনো দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণ $120°$ হয়, তবে বলত্রয়ের লব্ধি শূন্য।
- যদি চারটি সমমানের বল কোনো বিন্দুতে এমন ভাবে ক্রিয়া করে যেন পর পর দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণ $\frac{360°}{4} = 90°$ হয়, তবে বলগুলোর লব্ধি শূন্য।
- চিত্রের তিনটি অসম মানের বল যদি পরস্পর $120°$ কোণে ক্রিয়া করে, তবে তাদের লব্ধির মান নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে নির্ণয় করা সম্ভব।



এখন, শুধুমাত্র পরস্পর $120°$ কোণে ক্রিয়ারত 3N ও 5N মানের বলের লব্ধির মানই হবে প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধির মান।

- যদি অসম মানের তিনটি বল পরস্পর $120°$ কোণে ক্রিয়া করে (যেখানে বলগুলোর মানগুলো সমান্তর শ্রেণিভুক্ত) তাহলে বলত্রয়ের লব্ধি = সাধারণ অন্তর $\times \sqrt{3}$

POLL MACHINE

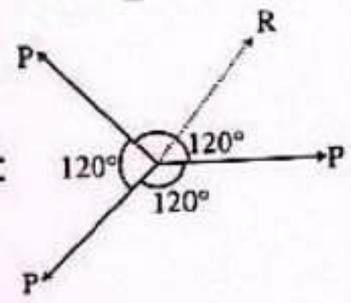
MCQ

01. সমপরিমাণ তিনটি বল পরস্পর $120°$ কোণে কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করলে লব্ধি বল হবে – **[CU'22-23] [Ans: c]**

(a) 3p (b) ∞ (c) 0 (d) কোনটিই নয়

Preparation and Practice are vital for effective delivery

সমাধান:



১ম ও ২য় বলের লব্ধি, $R = \sqrt{P^2 + P^2 + 2 \cdot P \cdot P\cos 120°} = \sqrt{2P^2 + 2P^2\left(\frac{-1}{2}\right)} = P$

১ম ও ২য় বলের লব্ধি বল এবং ৩য় বল পরস্পর সমান ও বিপরীতমুখী, তাই লব্ধি 0।

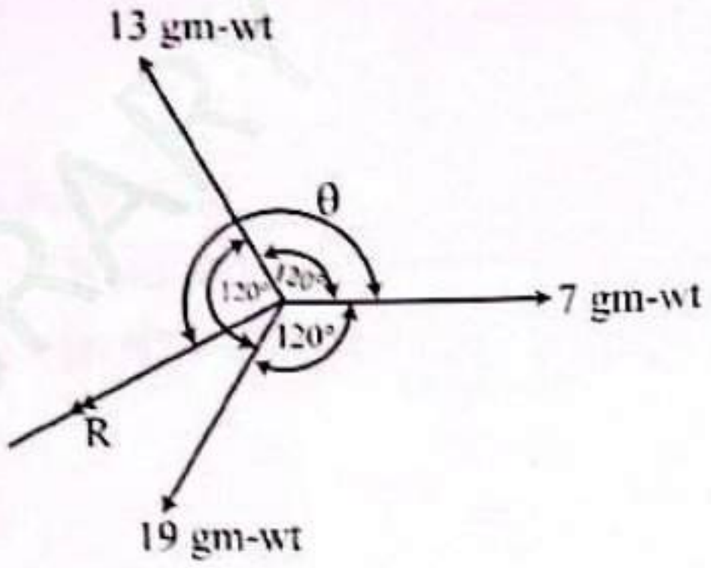
Shortcut: আমরা জানি, তিনটি সমান বল পরস্পর $120°$ কোণে একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত থাকলে লব্ধি 0 হবে।

02. 7, 13 ও 19 গ্রাম ওজনের বলত্রয় একইক্রমে পরস্পর $120°$ কোণে ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি প্রথম বলের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে?

(a) $30°$ (b) $210°$ (c) $60°$ (d) কোনটিই নয় **[RU'21-22] [Ans: b]**

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

সমাধান:



7 gm-wt বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $R\cos\theta = 7\cos 0° + 13\cos 120° + 19\cos 240° = -9$ ... ... (i)

7 gm-wt এর লম্ব দিকে লম্বাংশ নিয়ে পাই, $R\sin\theta = 7\sin 0° + 13\sin 120° + 19\sin 240°$

$= \frac{13\sqrt{3}}{2} - \frac{19\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3}$ ... ... (ii)

(ii) ÷ (i) করে পাই, $\tan\theta = \frac{-3\sqrt{3}}{-9} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta = \tan 30° \Rightarrow \tan\theta = \tan(180° + 30°)$

$\Rightarrow \theta = 210°$ [এখানে $\sin\theta, \cos\theta$ উভয়ই ঋণাত্মক যা তৃতীয় চতুর্ভাগেই একমাত্র সম্ভব। তাই θ তৃতীয় চতুর্ভাগে বের করা হয়েছে।]

03. ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB, AC ও BC বাহুগুলির সমান্তরাল গতিপথের কোনো একটি বিন্দুতে যথাক্রমে 4, 2 ও 1 একক মানের বলত্রয় ক্রিয়ারত হলে, এদের লব্ধির মান কত একক? **[RU'17-18] [Ans: a]**

(a) $3\sqrt{3}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) কোনটিই নয়

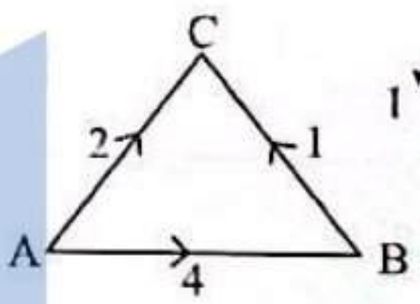
সমাধান: 4 একক মানের বলের দিকে লম্বাংশ নিয়ে পাই,

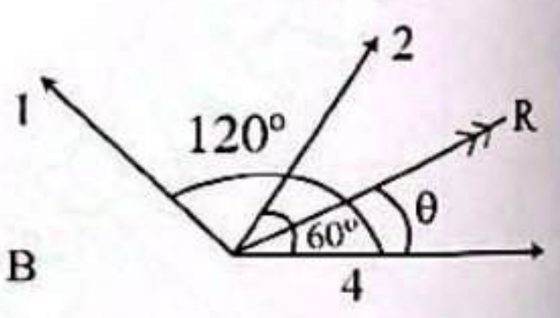
$R\cos\theta = 4\cos 0° + 2\cos 60° + 1\cos 120° = \frac{9}{2}$ একক

4 একক মানের বলের লম্ব দিকে লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\sin\theta = 4\sin 0° + 2\sin 60° + 1\sin 120° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ একক।

$R = \sqrt{(R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2} = 3\sqrt{3}$ একক





বিকল্প: লব্ধি; $R = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2 + 2\cdot 4\cdot 2\cos 60° + 2\cdot 2\cdot 1\cos 60° + 2\cdot 4\cdot 1\cos 120°}$

$= \sqrt{21 + 8 + 2 - 4} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ একক।

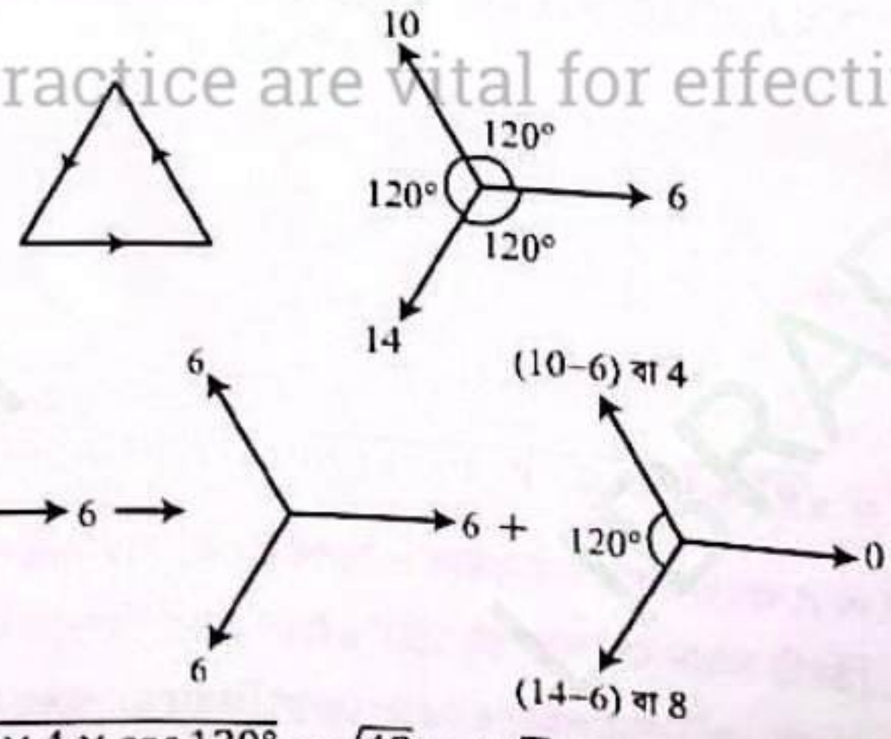
04. একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমান্তরালে একইক্রমে সমবিন্দুতে কার্যরত 6, 10, 14 একক মানের তিনটি বেগের লব্ধির মান হবে- **[DU'16-17] [Ans: a]**

(a) $4\sqrt{3}$ units (b) $7\sqrt{3}$ units (c) $10\sqrt{3}$ units (d) $15\sqrt{3}$units

POLL MACHINE

সমাধান:

Preparation and Practice are vital for effective delivery



∴ নির্ণেয় লব্ধি $= \sqrt{8^2 + 4^2 + 2\times 8\times 4\times\cos 120°} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ একক

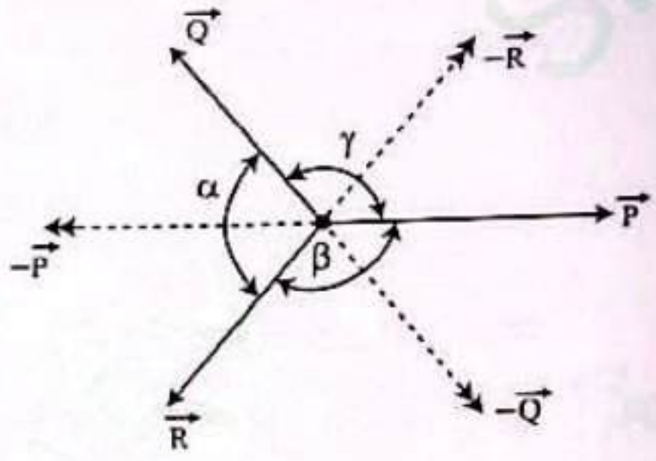
Shortcut: লব্ধি $= \sqrt{3}\times$ সাধারণ অন্তর $= 4\sqrt{3}$ একক

Scanned with OKEN Scanner

CamScanner

Type-07: তিনটি সমবিন্দু বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে তা হতে বলত্রয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত

Formula & Concept:



এখানে, $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}=0$

যেহেতু বল তিনটির লব্ধি $=0$ তাই যেকোনো দুইটি বলের লব্ধির মান তৃতীয় বলটির সমান এবং লব্ধির দিক তৃতীয় বলটির দিকের বিপরীত দিকে কার্যরত হবে।

$\therefore \vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লব্ধির মান $\vec{R}$ এর মানের সমান,

$\therefore R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\gamma \Rightarrow \boxed{\cos\gamma=\frac{R^2-P^2-Q^2}{2PQ}}$

অনুরূপভাবে $\boxed{\cos\alpha=\frac{P^2-Q^2-R^2}{2QR}}$ এবং $\boxed{\cos\beta=\frac{Q^2-P^2-R^2}{2PR}}$ এভাবে অন্য মধ্যবর্তী কোণগুলো নির্ণয় করা যাবে।

MCQ

01. S, T ও U বল তিনটি O বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় রয়েছে। তাদের মান যথাক্রমে 1, 1 ও $\sqrt{2}$ হলে, T ও U এর অন্তর্ভুক্ত কোণের মান হবে- **[CU'23-24] [Ans: b]**

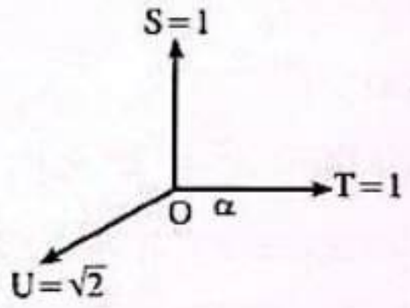
(a) 120° (b) 135° (c) 90° (d) 60°

সমাধান: $\because$ $\vec{S},\vec{T}$ ও $\vec{U}$ সাম্যাবস্থায় আছে।

$\therefore \vec{T}$ ও $\vec{U}$ এর লব্ধির মান $|-\vec{S}|=S$ এবং দিক কার্যকর $\vec{S}$ এর বিপরীত

$\therefore S=\sqrt{T^2+U^2+2TU\cos\alpha} \Rightarrow 1^2=1+2+2\sqrt{2}\cos\alpha \Rightarrow 1=3+2\sqrt{2}\cos\alpha \Rightarrow 2\sqrt{2}\cos\alpha=1-3=-2$

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=135°$



02. তিনটি বল P, $\sqrt{3}$P, P সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রথম দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণ- **[GST'23-24; RU'19-20] [Ans: d]**

(a) 60° (b) 90° (c) 120° (d) 150°

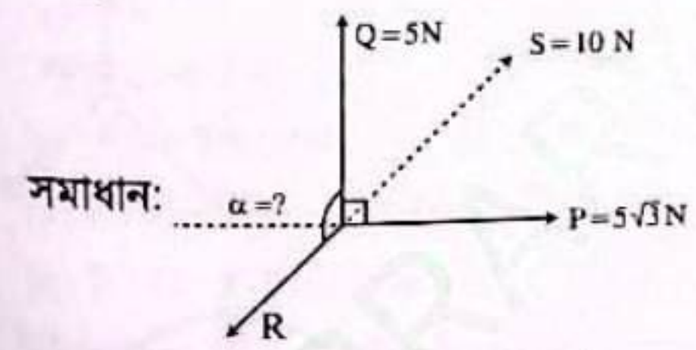
সমাধান: $P^2=(P)^2+\left(\sqrt{3}P\right)^2+2\cdot P\cdot\sqrt{3}P\cos\alpha \Rightarrow P^2=4P^2+2\sqrt{3}P^2\cos\alpha$

$\Rightarrow \frac{-3P^2}{2\sqrt{3}P^2}=\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \alpha=150°$

03. তিনটি সমতলীয় বল P, Q এবং R কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় আছে। যদি P এবং Q এর মান যথাক্রমে $5\sqrt{3}$N ও 5N এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ $\frac{\pi}{2}$ হয়, তাহলে, R, Q এর সঙ্গে কত কোণ তৈরি করবে? **[GST'22-23] [Ans: c]**

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{3\pi}{4}$

সমাধান:



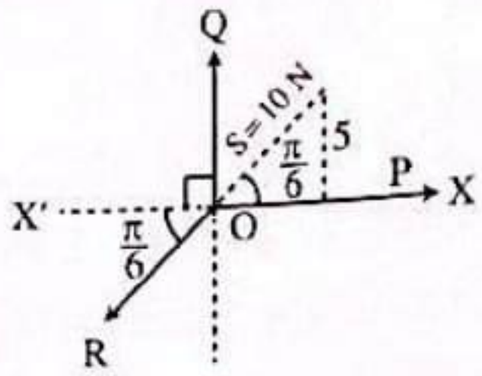
$S=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{75+25}=10\text{ N}$ $\because$ বলত্রয় (P, Q, R) সাম্যাবস্থায়। $\therefore R=S=10\text{N}$

লামির সূত্রানুসারে, $\frac{P}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{\sin\alpha}=\frac{10}{1} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{10} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi}{3}\left[\because \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right]$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

বিকল্প: P ও Q এর লব্ধি, $S = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2 + 2 \times 5 \times 5\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 10\ N$

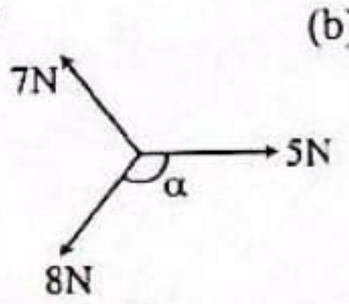


আবার, $P \wedge S = \sin^{-1}\left(\frac{5}{10}\right) = \frac{\pi}{6} \therefore \angle ROX' = \frac{\pi}{6}$ (বিপ্রতীপ কোণ) $\therefore$ R ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ $= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$

04. 5N, 7N এবং 8N বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করলে 8N ও 5N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[RU'22-23; 17-18] [Ans: a]**

(a) 120° (b) 60° (c) 30° (d) 20°

সমাধান:



5N ও 8N এর লব্ধির মান 7N হলে বলত্রয় ভারসাম্য সৃষ্টি করবে।

$\therefore 7^2 = 5^2 + 8^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8\cos\alpha \therefore \cos\alpha = \frac{7^2-5^2-8^2}{2\times 5\times 8} = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$

05. $2, \sqrt{5}$ এবং 3 মানের তিনটি বল কোনো এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত। এরা পরস্পর ভারসাম্য সৃষ্টি করলে প্রথম দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণ- **[RU'21-22, 19-20; JU'21-22; CU'13-14, 11-12, 03-04, 02-03] [Ans: d]**

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

সমাধান: $3^2 = 2^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{5}\cos\alpha \therefore \cos\alpha = \frac{3^2-4-5}{4\sqrt{5}} = 0 \ \therefore \alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$

[বলত্রয় ভারসাম্য সৃষ্টি করলে যেকোন দুটি বলের লব্ধি তৃতীয়টির সমান। এখানে 2 ও $\sqrt{5}$ এর লব্ধি 3]

06. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি সমান বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে এদের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[RU'15-16] [Ans: a]**

(a) 120° (b) 45° (c) 90° (d) 75°

সমাধান: ধরি, সমান বলগুলো P এবং মধ্যবর্তী কোণগুলো α

এখন, $P^2 = P^2 + P^2 + 2 \cdot P \cdot P\cos\alpha \Rightarrow -P^2 = 2P^2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$

Type-08: তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে তা থেকে বিভিন্ন অজানা রাশির মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

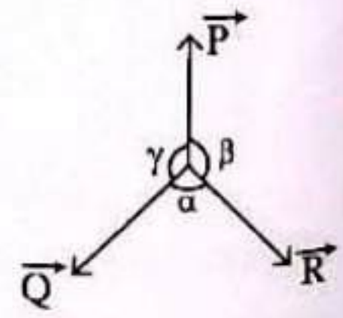
➲ **Formula & Concept:**

লামির সূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত: যদি কোনো বিন্দুতে তিনটি বল ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে, তাহলে যেকোনো একটি বল অপর বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের sine এর সমানুপাতিক।

একটি বিন্দুতে P, Q এবং R মানের তিনটি বল ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করলে, $(\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = \vec{0})$

লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$; যেখানে, $\alpha = \vec{Q} \wedge \vec{R}; \beta = \vec{P} \wedge \vec{R}; \gamma = \vec{P} \wedge \vec{Q}$

এবং '$\wedge$' মধ্যবর্তী কোণ নির্দেশ করে।

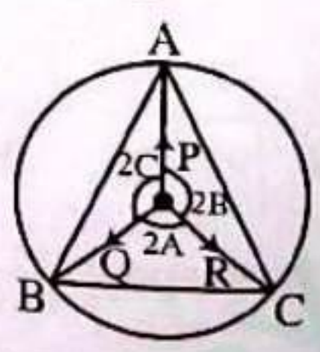


Shortcut:

➢ যদি P, Q, R মানের তিনটি বল ΔABC এর পরিকেন্দ্র O হতে OA, OB এবং OC বরাবর ক্রিয়ারত থেকে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে তাহলে,

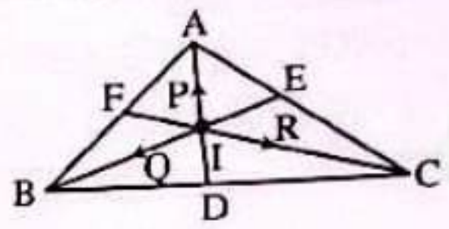
(a) $P: Q: R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

(b) $P: Q: R = a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(c^2 + a^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2)$



Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

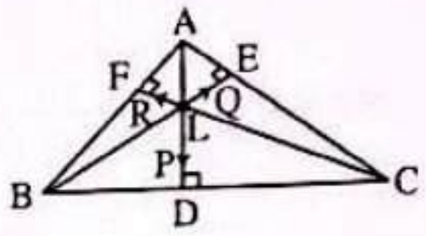
➢ যদি P, Q, R মানের তিনটি বল ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র I হতে IA, IB এবং IC বরাবর ক্রিয়ারত থেকে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে তাহলে,



(a) $P:Q:R = \cos\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}:\cos\frac{C}{2}$

(b) $P^2:Q^2:R^2 = a(b+c-a):b(c+a-b):c(a+b-c)$

➢ যদি P, Q, R মানের তিনটি বল ΔABC এর লম্ববিন্দু L হতে বিপরীত শীর্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত হয় তাহলে,



(a) $P:Q:R = \sin A:\sin B:\sin C$ (b) $P:Q:R = a:b:c$

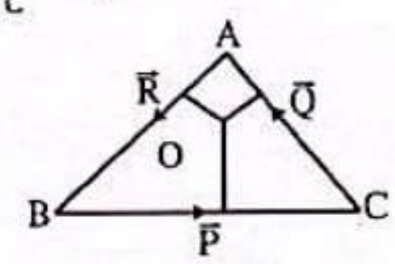
➢ ΔABC এর BC, CA, AB বাহু বরাবর $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ বল ক্রিয়া করলে এবং লব্ধি O বিন্দুগামী হলে, O বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক-নিয়ে পাই,

(i) O ভরকেন্দ্র হলে: $\frac{P}{\sin A}+\frac{Q}{\sin B}+\frac{R}{\sin C}=0$

(ii) O অন্তঃকেন্দ্র হলে: $P+Q+R=0$

(iii) O পরিকেন্দ্র হলে: $P\cos A+Q\cos B+R\cos C=0$

(iv) O লম্ববিন্দু হলে: $\frac{P}{\cos A}+\frac{Q}{\cos A}+\frac{R}{\cos C}=0$

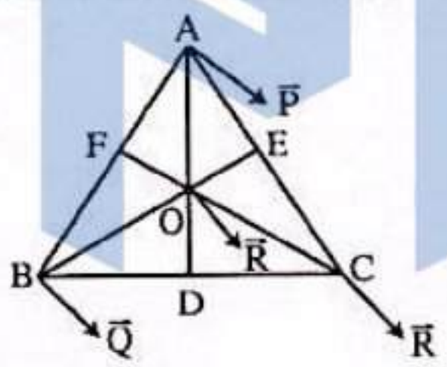


➢ ΔABC এর A, B, C তে তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ বল ক্রিয়া করলে এবং লব্ধি O বিন্দুগামী হলে:

(i) O ভরকেন্দ্র হলে: $\frac{P}{\sin A}+\frac{Q}{\sin B}+\frac{R}{\sin C}=0$

(ii) O অন্তঃকেন্দ্র হলে: $P:Q:R = \sin A:\sin B:\sin C$

(iii) O বিন্দু পরিকেন্দ্র হলে: $P:Q:R = \sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$



MCQ

01. ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ বিন্দুতে 2, 2, p তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। এদের লব্ধি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী হলে, p এর মান- **[Agri.'21-22] [Ans: a]**

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

সমাধান: ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুতে তিনটি সমান বল ক্রিয়াশীল হলে এদের লব্ধি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী।

∴ p এর মান হবে 2

02. কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে, যেখানে ১ম ও ২য় বলের অন্তর্গত কোণ 90° এবং ২য় ও ৩য় বলের অন্তর্গত কোণ 120°। তাহলে বল তিনটির অনুপাত কত? **[KU'14-15] [Ans: d]**

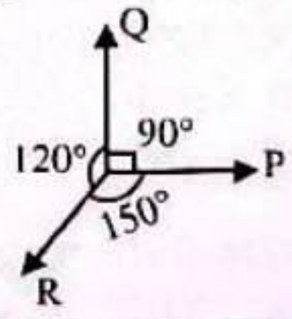
(a) $P:Q:R = \sqrt{2}:1:2$ (b) $P:Q:R = 2:1:\sqrt{2}$

(c) $P:Q:R = 3:1:\sqrt{2}$ (d) $P:Q:R = \sqrt{3}:1:2$

সমাধান: $\frac{P}{\sin(120°)}=\frac{Q}{\sin(150°)}=\frac{R}{\sin(90°)}$

$\Rightarrow \frac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{Q}{\frac{1}{2}}=\frac{R}{1} \Rightarrow \frac{P}{\sqrt{3}}=\frac{Q}{1}=\frac{R}{2}$

$\therefore P:Q:R = \sqrt{3}:1:2$



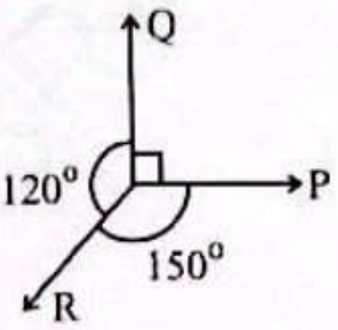
POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Written

01. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল P, Q এবং R ভারসাম্য (Balance) সৃষ্টি করে। P ও Q পরস্পর লম্ব এবং Q ও R এর মধ্যবর্তী কোণ 120° হলে, Q ও R এর অনুপাত কত? **[JnU'19-20]**

সমাধান: 120°



$P\hat{}R = 360° - 90° - 120° = 150°$ ∴ লামির সূত্রানুসারে, $\frac{P}{\sin(Q\hat{}R)} = \frac{Q}{\sin(P\hat{}R)} = \frac{R}{\sin(P\hat{}Q)}$

এখন, $\frac{Q}{\sin 150°} = \frac{R}{\sin 90°} \Rightarrow \frac{Q}{\sin(180°-30°)} = \frac{R}{1} \Rightarrow \frac{Q}{\sin 30°} = \frac{R}{1} \Rightarrow Q : R = 1 : 2$ **(Ans.)**

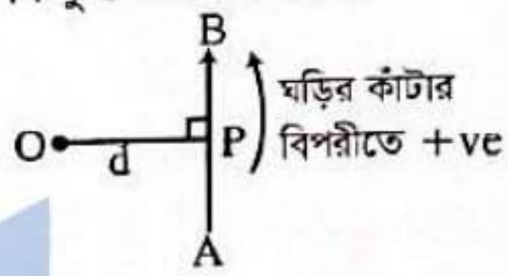
Type-09: বলের ভ্রামক সম্পর্কিত

➲ **Formula & Concept:**

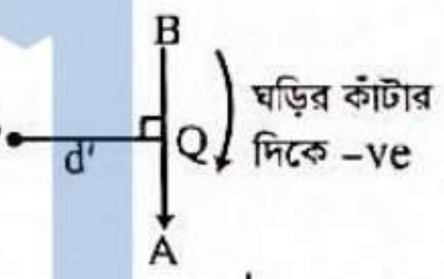
বলের ভ্রামক = বল × লম্ব দূরত্ব।

(i) P বলটি যদি AB রেখা দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত হয়, তবে যেকোনো বিন্দু O এর সাপেক্ষে,

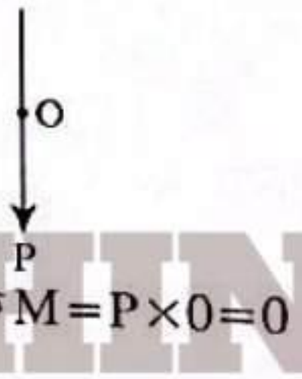
P বলের ভ্রামক = P এর মান × O থেকে AB এর লম্ব দূরত্ব = P × d



(ii) অনুরূপভাবে, O′ এর সাপেক্ষে Q বলের ভ্রামক = $-Q \cdot d'$



(iii) P বল O বিন্দুগামী হলে O এর সাপেক্ষে P এর ভ্রামক = P × 0 = 0



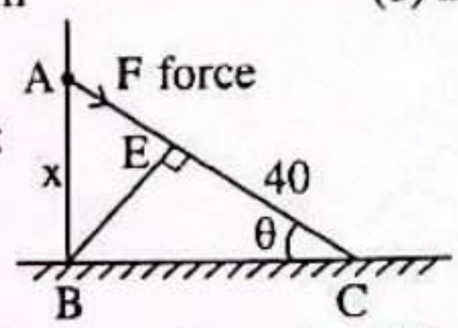
POLL MACHINE

MCQ

01. ভূমির উপর খাড়াভাবে দণ্ডায়মান একটি খুঁটির সাথে 40 m দীর্ঘ একটি শক্ত দড়ির একপ্রান্ত বাঁধা আছে এবং অপর প্রান্ত একটি লোক নির্দিষ্ট বল প্রয়োগে টানছে। খুঁটিটির কত উচ্চতায় দড়ি বাঁধলে লোকটির পক্ষে তা উল্টিয়ে ফেলা সহজ হবে? **[RU'18-19]**

(a) 20 m (b) $20\sqrt{2}$ m (c) $\sqrt{20}$ m (d) $10\sqrt{2}$ m **[Ans: b]**

সমাধান:



$AC = 40$; $BE = BC\sin\theta = AC\cos\theta\sin\theta = 40\cos\theta\sin\theta = 20\sin 2\theta$

উল্টিয়ে ফেলা সহজ যদি B এর সাপেক্ষে F বলের মোমেন্ট সর্বাধিক হয়।

B এর প্রেক্ষিতে F বলের মোমেন্ট = $F \cdot BE = 20\,F\sin 2\theta$; মোমেন্ট সর্বোচ্চ হবে যদি, $\sin 2\theta = 1$ হয় বা $\theta = 45°$ হয়।

$\theta = 45°$ হলে, $x = 40\sin 45° = 40 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$ m

Shortcut: সর্বদা খুঁটির যে উচ্চতায় বাঁধতে হবে তা হলো $\frac{\text{দড়ির দৈর্ঘ্য}}{\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$ m

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-10: সদৃশ ও বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি সংক্রান্ত

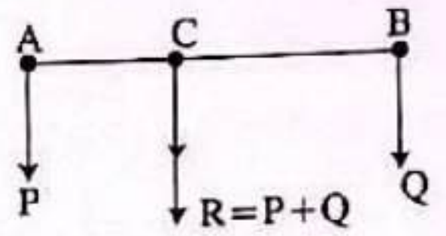
Formula & Concept:

➢ দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের ক্ষেত্রে,

(i) $R = P + Q$

(ii) $P \cdot AC = Q.BC$

(iii) $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AB}$

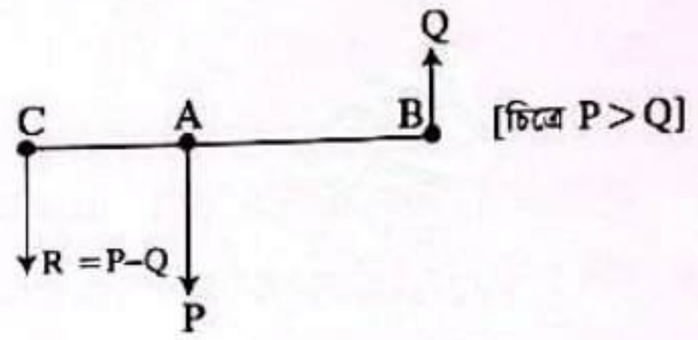


➢ দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বলের ক্ষেত্রে, ($P > Q$ হলে)

(i) $R = P - Q$

(ii) $P \cdot AC = Q \cdot BC$

(iii) $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P-Q}{AB}$



MCQ

01. 30 মিটার দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট AB দণ্ডের A প্রান্তে 20 kg ওজন ও B প্রান্তে P kg ওজন ঝুলানো আছে। এদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। AC এর দৈর্ঘ্য 20 মিটার হলে, P বলটির মান কত? **[JU'22-23]**

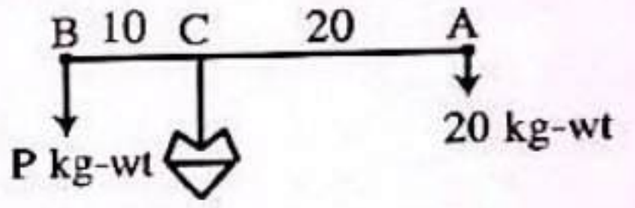
(a) 20N (b) 30N (c) 40 N (d) 50N

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $AB = 30m, AC = 20m$

$\therefore BC = (30 - 20)m = 10m; \therefore P \times 10 = 20 \times 20 \Rightarrow P = 40$kg-wt

$\therefore$ B এর ভর 40 kg $\therefore$ ওজন $= 40 \times 9.8N = 392N$

সুতরাং, উত্তর নাই তবে ভর 40 kg; যা অপশন (c), যদিও একক ভুল।



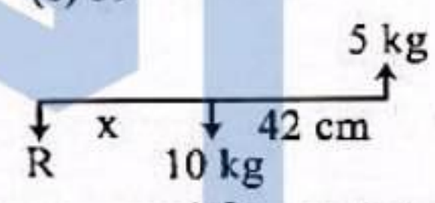
02. 42 সে.মি. ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে 10 kg ও 5 kg ওজনের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি বৃহত্তম বল থেকে কত সে.মি. দূরে ক্রিয়া করবে? **[RU'22-23] [Ans: d]**

(a) 24 (b) 84 (c) 39 (d) 42

সমাধান: ধরি, x cm দূরে ক্রিয়া করে।

প্রশ্নমতে, $x \times 10 = (42 + x)5$

$\Rightarrow 2x = 42 + x \Rightarrow x = 42$ cm



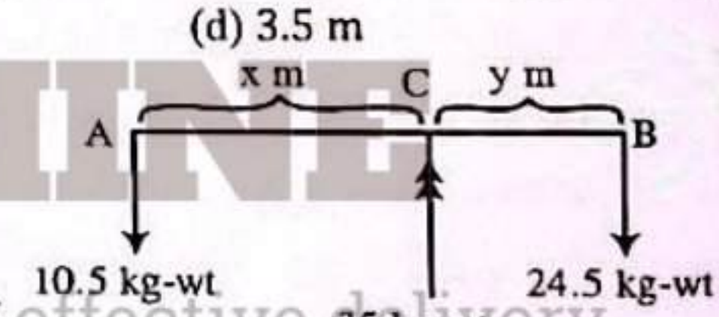
03. 5 m দীর্ঘ একটি হালকা রডের দুই প্রান্তে 10.5 kg ও 24.5 kg ওজনের দুইটি বস্তু ঝোলানো আছে। একজন লোক বস্তু দুইটি সমেত রডটি আনুভূমিক অবস্থায় বহন করতে চায়। সে রডটির কম ওজন ঝুলানো স্থান থেকে কত দূরত্বে ধরবে? **[RU' 21-22] [Ans: d]**

(a) 2 m (b) 2.5 m (c) 3 m (d) 3.5 m

সমাধান: ধরি, 10.5 kg থেকে লব্ধির দূরত্ব x m এবং 24.5 kg থেকে দূরত্ব y m

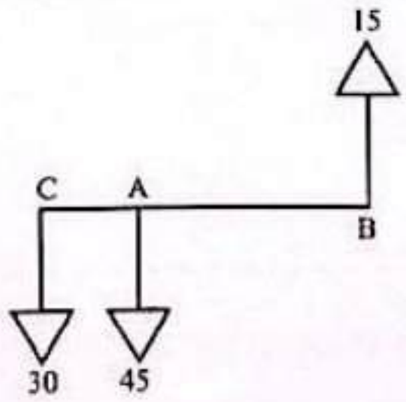
আমরা জানি, $10.5 \times x = 24.5 \times y \Rightarrow \frac{x}{24.5} = \frac{y}{10.5} = \frac{x+y}{24.5+10.5} = \frac{5}{35}$

$\Rightarrow x = \frac{24.5 \times 5}{35} = 3.5$ m



বিকল্প: রডটি আনুভূমিক অবস্থায় থাকলে যেকোনো অক্ষের সাপেক্ষে মোট মোমেন্ট শূন্য হবে। $\therefore \oplus \Sigma M_a = 0 \Rightarrow -35 \times x + 24.5 \times 5 = 0 \Rightarrow x = 3.5$ m

04. A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলের মান ও দিক নিচের চিত্রের মাধ্যমে দেয়া হলো। যদি লব্ধি বল C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং $AC = 5$ হয়, তবে AB এর মান কত? **[KU'13-14] [Ans: a]**



(a) 10 (b) 15 (c) 20 (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $5 \times 45 = BC \times 15 \Rightarrow BC = 15 \Rightarrow 5 + AB = 15 \Rightarrow AB = 10$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery
Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-11: সমান্তরাল বলের ক্ষেত্রে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দুর সরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

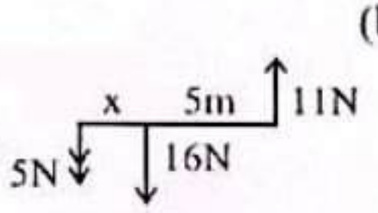
- একটি বস্তুর উপর A ও B বিন্দুতে কার্যরত দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q (P > Q) পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর যদি d দূরত্বে সরে যায়। তবে, $d = \frac{P-Q}{P+Q}AB$.
- P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল। P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুকে x দূরত্বে সরালে, এদের লব্ধি $\frac{Px}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে।
- P ও Q দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং P ও Q (P > Q) বল দুইটি যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে কার্যরত আছে। উভয় বলকে R পরিমাণে বৃদ্ধি করা হলে যদি এদের লব্ধি d দূরত্বে সরে যায় তবে, $d = \frac{R}{P-Q}AB$.
- যদি P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল একটি রেখায় ক্রিয়ারত থাকে এবং তাদের সাথে S মানের ২টি সমান বিসদৃশ সমান্তরাল বল b দূরত্বে যোগ করা হয় তাহলে লব্ধির সরণ হবে $\frac{bS}{P+Q}$

MCQ

01. 16 N ও 11 N বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় 5m দূরত্বে অবস্থিত। যদি পরবর্তীতে বলদ্বয় 18N ও 13N হয়, তাহলে লব্ধির সরণ কত m?
[KU'19-20] [Ans: b]

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

সমাধান:



$16 \times x = 11 \times (5 + x) \therefore x = 11m$

আবার, $18 \times x' = 13 \times (5 + x') \therefore x' = 13m$

$\therefore \Delta x = (13 - 11)m = 2m$

Shortcut: যেহেতু P ও Q বলদ্বয় R = 2N পরিমাণ বৃদ্ধি পেয়েছে এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব = AB = 5 m

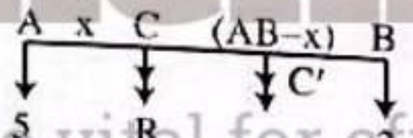
$\therefore$ লব্ধির সরণ $= \frac{R}{P-Q} \times AB = \frac{2}{16-11} \times 5 = 2$ m

02. কোনো বস্তুর A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 5 একক ও 3 একক মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত। যদি বলদ্বয় পরস্পর অবস্থান বিনিময় করে তবে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB রেখা বরাবর কতদূর সরে যাবে?
[RU'18-19] [Ans: b]

(a) $\frac{AB}{3}$ (b) $\frac{AB}{4}$ (c) $\frac{AB}{2}$ (d) $\frac{AB}{5}$

সমাধান: $5x = 3(AB - x) \Rightarrow 8x = 3AB$

$\therefore x = \frac{3AB}{8} = AC$



বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধি C′ বিন্দুতে যাবে। তখন $BC' = x = AC = \frac{3AB}{8}$ হবে।

অর্থাৎ, লব্ধির সরণ হবে $BC - BC' = AB - x - x$

$= AB - 2x = AB - 2 \times \frac{3AB}{8}$

$= AB\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{AB}{4}$

Shortcut: লব্ধির সরণ, $d = \frac{5-3}{5+3} \times AB = \frac{AB}{4}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

"যদি কেউ অবচেতনে একই চিন্তা বার বার করে তবে একদিন তা সত্যে রূপ নেয়।"
-Earl Nightingale

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

অধ্যায় ০৯

সমতলে বস্তুকণার গতি

➢ ভার্সিটি ভর্তি পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪	T-01	বেগের সামান্তরিক সূত্র সংক্রান্ত	2	-	JU'14-15; JnU'17-18	-
✪	T-02	বেগের উপাংশে বিভাজন	1	-	RU'23-24	-
✪	T-03	দূরত্ব নির্ণয় সংক্রান্ত	2	-	RU'14-15; KU'17-18	-
✪	T-04	গড় দ্রুতি/বেগ সংক্রান্ত	2	-	RU'17-18; JU'16-17,	-
✪✪✪	T-05	নদী পারাপার সংক্রান্ত	4	-	RU'17-18; CU' 20-21; JU'19-20; JnU'13-14	-
✪✪✪	T-06	গতির সূত্রাবলির ব্যবহার সংক্রান্ত	11	-	DU'18-19, 11-12; RU'17-18; CU'14-15; JU'16-17, 14-15; KU'17-18, 16-17; JnU'15-16, 14-15	-
✪	T-07	বাঘ-হরিণ, ইঁদুর-বিড়াল ধরা এবং বাস-যাত্রী, বাস-সাইকেল অতিক্রম করা সংক্রান্ত	1	-	KU'16-17	-
✪✪✪	T-08	বিশেষ এক সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব সংক্রান্ত	5	-	GST'23-24; RU'22-23; JU'22-23, 19-20,	-
✪	T-09	রেলগাড়ির সংঘর্ষ এড়ানোর শর্ত নির্ণয় সংক্রান্ত	1	-	KU'13-14	-
✪✪	T-10	বুলেটের তক্তা ভেদ সংক্রান্ত	2	1	RU'17-18; JU'22-23	DU'23-24
✪	T-11	আপেক্ষিক বেগ সংক্রান্ত	1	-	RU'11-12	-

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪✪	T-12	উল্লম্ব গতি সংক্রান্ত	15	-	DU'23-24, 20-21, 11-12, 10-11, 07-08, 06-07, 05-06; RU'19-20, 17-18, 14-15, 11-12; CU'22-23, 20-21; KU'18-19; JnU-16-17	-
✪	T-13	শব্দ শোনার সময় হিসেব করে গভীরতা নির্ণয় সংক্রান্ত	-	2	-	RU'17-18; KU'13-14
✪✪✪	T-14	প্রাস সংক্রান্ত	22	2	DU'22-23, 17-18, 16-17, 13-14; GST'23-24, 22-23; RU'23-24, 22-23, 20-21, 17-18, 13-14; CU' 22-23, 17-18, 16-17, 14-15; Agri.'19-20; KU'14-15, 09-10; JnU'19-20	RU'19-20; JnU'18-19
✪	T-15	ভূমি থেকে h উচ্চতা হতে ভূমির সমান্তরাল দিকে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের গতি সংক্রান্ত	1	-	JU'14-15	-

Type-01: বেগের সামান্তরিক সূত্র সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

α কোণে ক্রিয়ারত u ও v বেগদ্বয়ের লব্ধি (w), u এর দিকের সাথে θ কোণে ক্রিয়ারত থাকলে

লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$ এবং $\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha}$

(a) বৃহত্তম লব্ধি, $w_{max} = u + v$; $[\alpha = 0°]$

(b) ক্ষুদ্রতম লব্ধি, $w_{min} = u \sim v$; $[\alpha = 180°]$

(c) $\alpha = 90°$ হলে লব্ধি, $w = \sqrt{u^2 + v^2}$

(d) যদি $u = v$ হয়, তবে $w = 2u\cos\frac{\alpha}{2}$ এবং $\theta = \frac{\alpha}{2}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. কোনো কণার উপর একই সময়ে একই দিকে ক্রিয়াশীল দুইটি বেগ $12\ ms^{-1}$ এবং $5\ ms^{-1}$ হলে, তাদের লব্ধি বেগ কত?

(a) $12\ ms^{-1}$ (b) $16\ ms^{-1}$ (c) $17\ ms^{-1}$ (d) $10\ ms^{-1}$ **[JU'14-15][Ans: c]**

সমাধান: বেগদ্বয় একই দিকে ক্রিয়ারত বলে লব্ধি সর্বোচ্চ হবে; $w_{max} = 12 + 5 = 17\ ms^{-1}$

02. দুইটি সমান বেগের মধ্যবর্তী কোণ α এবং লব্ধি যেকোনো বেগের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে θ এর মান কোনটি? **[JnU'17-18]**

(a) $\frac{\alpha}{3}$ (b) α (c) $\frac{\alpha}{2}$ (d) 2α **[Ans: c]**

সমাধান: $\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P+P\cos\alpha} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \Rightarrow \tan\theta = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2} \therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$

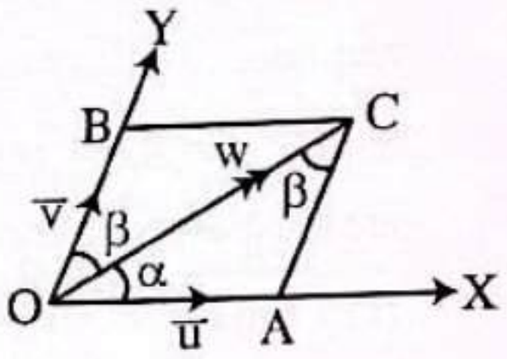
বিকল্প: $\alpha = \theta + \theta = 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{2}$

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-02: বেগের উপাংশে বিভাজন

Concept

মনে করি, একটি বেগ w কে মানে ও দিকে OC দ্বারা সূচিত করা হলো। OC এর উভয় পাশে নির্দিষ্ট α ও β কোণে দুইটি রশ্মি OX এবং OY অঙ্কন করি। OACB সামান্তরিক অঙ্কন করি যেখানে, $A \in OX$ এবং $B \in OY$।



তাহলে $\angle AOC = \alpha$ এবং $\angle COB = \angle OCA = \beta$

ধরি, $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ তাহলে OX ও OY বরাবর প্রদত্ত w এর অংশকদ্বয় হলো যথাক্রমে $\vec{u}$ এবং $\vec{v}$।

এখন ΔOAC এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\frac{OA}{\sin\angle OCA} = \frac{AC}{\sin\angle AOC} = \frac{OC}{\sin\angle OAC}$

$\Rightarrow \frac{u}{\sin\beta} = \frac{v}{\sin\alpha} = \frac{w}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\therefore u = \frac{w\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}; v = \frac{w\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \ldots\ldots\ldots$ (ii)

অতএব, (i) ও (ii) হলো OX ও OY বরাবর w বেগের উপাংশ সমূহ।

যদি $\alpha + \beta = 90°$ হয়। অর্থাৎ, $OY \perp OX$ হয় তবে $\vec{u} = \vec{w}\sin\beta = \vec{w}\sin(90-\alpha) = \vec{w}\cos\alpha$ এবং $\vec{v} = \vec{w}\sin\alpha$

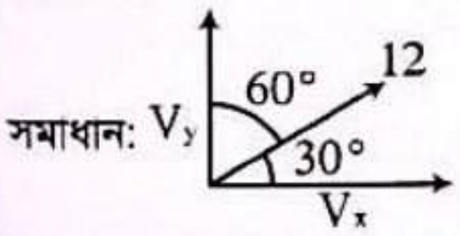
অর্থাৎ, w বেগের x অক্ষ বরাবর উপাংশের মান $w\cos\alpha$ এবং উলম্ব দিকে উপাংশ $w\sin\alpha$.

MCQ

01. $12\ ms^{-1}$ বেগের দুই পার্শ্বে 30° ও 60° কোণে ক্রিয়ারত অংশকদ্বয় কত ms^{-1}? **[RU' 23-24] [Ans: a]**

(a) $6\sqrt{3}, 6$ (b) $6, 6\sqrt{2}$ (c) $24, 24\sqrt{3}$ (d) $24\sqrt{2}, 24$

সমাধান:



$V_x = 12\cos 30° = 6\sqrt{3}\ ms^{-1}; V_y = 12\sin 30° = 6\ ms^{-1}$

POLL MACHINE
Repetition and Practice are vital for effective delivery

Type-03: দূরত্ব নির্ণয় সংক্রান্ত

Formula & Concept:

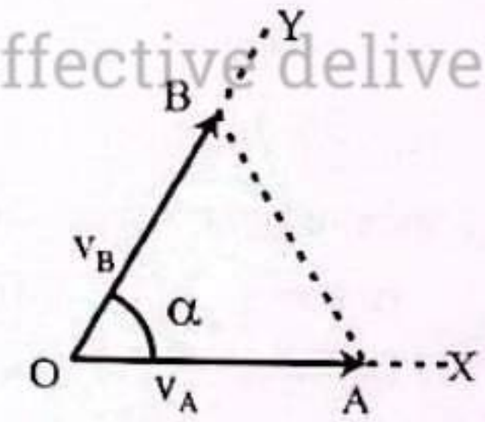
OX বরাবর ১ম ব্যক্তির বেগ $= v_A$; OY বরাবর ২য় ব্যক্তির বেগ $= v_B$

v_A ও v_B এর মধ্যবর্তী কোণ $= \alpha$

t সময় পর, OX বরাবর ১ম ব্যক্তির অতিক্রান্ত দূরত্ব $= OA = v_At$

OY বরাবর ২য় ব্যক্তির অতিক্রান্ত দূরত্ব $= OB = v_Bt$ [$s = vt$]

t সময় পর A ও B বিন্দুতে অবস্থিত দুই ব্যক্তির মধ্যবর্তী দূরত্ব AB.



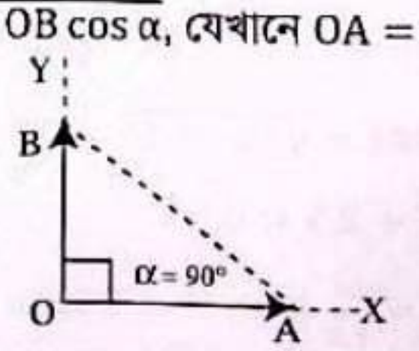
Cosine Law: $\cos\alpha = \frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2OA\cdot OB}$

$\therefore AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA\cdot OB\cos\alpha \therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA\cdot OB\cos\alpha}$, যেখানে $OA = v_At, OB = v_Bt$.

Special Case: $\alpha = 90°$

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AB^2 = OA^2 + OB^2$

$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2}$; [যেখানে $OA = v_At, OB = v_Bt$]



Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

MCQ

01. একটি বস্তুকণা 35 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধি বরাবর 10 সেকেন্ডে ব্যাসের একপ্রান্ত থেকে অপর প্রান্তে পৌঁছালে, তার গড়বেগ কত সে.মি./সে.? **[KU'17-18] [Ans: b]**

(a) 3.5 (b) 7 (c) 11 (d) 109

সমাধান: $v = \frac{\text{সরণ}}{\text{সময়}} = \frac{s}{t} = \frac{2r}{t} = \frac{2 \times 35}{10} = 7$

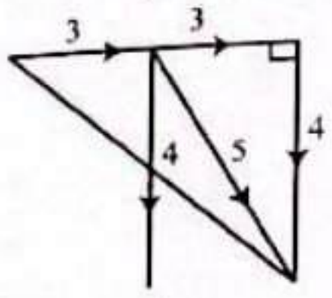
02. একটি কণা $3\ ms^{-1}$ বেগে পূর্ব দিকে চলছে। 1 সেকেন্ড পরে তার বেগের সঙ্গে দক্ষিণমুখী $4\ ms^{-1}$ বেগ সংযোজন করা হল। এর 1 সেকেন্ড পরে যাত্রাবিন্দু হতে তার দূরত্ব কত হবে? **[RU'14-15] [Ans: c]**

(a) 17 m (b) 15 m (c) $\sqrt{52}$ m (d) $\sqrt{916}$ m

সমাধান: পূর্ব দিকে 2s এ অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 3 \times 2 = 6m$

দক্ষিণ দিকে 1s এ অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 4 \times 1 = 4m$

$\therefore$ যাত্রাবিন্দু হতে দূরত্ব $= \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}m$



Type-04: গড় দ্রুতি/বেগ সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

এ ধরনের অঙ্কগুলোতে কোনো fixed সূত্র ব্যবহার না করে মোট দূরত্ব বের করে নিতে হবে এবং মোট সময় বের করে নিতে হবে। কোনো রাশির মান দেওয়া না থাকলে তাকে অজানা রাশি হিসেবে বিবেচনা করে সূত্রে কাজে লাগানো শ্রেয়।

অতঃপর, গড় দ্রুতি $= \frac{\text{মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{মোট সময়}}$; গড় বেগ, $\bar{v} = \frac{\text{সরণ}}{\text{মোট সময়}}$

Shortcut: এক ব্যক্তি n সংখ্যক সমান দূরত্ব যথাক্রমে $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots\ldots, v_n$ বেগ নিয়ে অতিক্রম করলে তার গড় দ্রুতি,

$$\bar{v} = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \cdots + \frac{1}{v_n}}$$

Note: অনেক সময় প্রশ্নে গড়বেগ বের করতে বলা হয়। কিন্তু প্রশ্নে বস্তুটি কোন দিকে গিয়েছে তা উল্লেখ করা থাকে না। সেক্ষেত্রে তোমাকে বুঝে নিতে হবে প্রশ্নে আসলে গড় দ্রুতির মান নির্ণয় করতে বলা হয়েছে।

MCQ

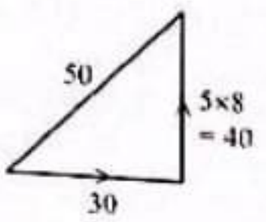
01. একজন সাইকেল চালক সোজাপথে 3 ঘণ্টায় 30 কি.মি. যাওয়ার পর প্রথম রাস্তার সাথে লম্বভাবে অপর একটি পথে 8 কি.মি./ঘ. বেগে 5 ঘন্টা চলল। তার গড়বেগ কত? **[RU'17-18] [Ans: a]**

(a) $6\frac{1}{4}$ কি.মি./ঘ. (b) $6\frac{1}{2}$ কি.মি./ঘ. (c) $6\frac{3}{4}$ কি.মি./ঘ. (d) কোনটিই নয়

সমাধান: লম্বভাবে চলল = 40 km

$\therefore$ মোট সরণ $= \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ km

$\therefore$ গড়বেগ $= \frac{50}{5+3} = 6\frac{1}{4}$ কি.মি./ঘ.



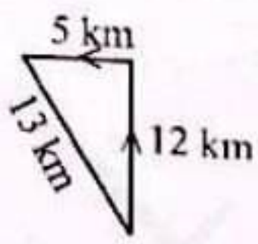
02. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 3 km বেগে উত্তর দিকে 12 km হাঁটার পর পশ্চিম দিকে 150 মিনিটে 5 km পথ হাঁটল। ব্যক্তিটির গড়বেগ কত? **[JU'16-17]**

(a) $\frac{14}{6}\ kmh^{-1}$ (b) $\frac{2}{3}\ kmh^{-1}$ (c) $2\ kmh^{-1}$ (d) $2.5\ kmh^{-1}$ **[Ans: c]**

সমাধান: সরণ $= \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ km,

সময় $= \frac{12}{3} + 2.5 = 6.5$ h

$\therefore$ গড়বেগ $= \frac{13}{6.5}\ kmh^{-1} = 2\ kmh^{-1}$

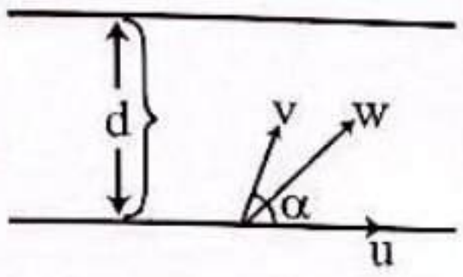
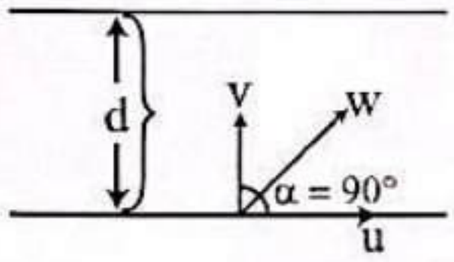
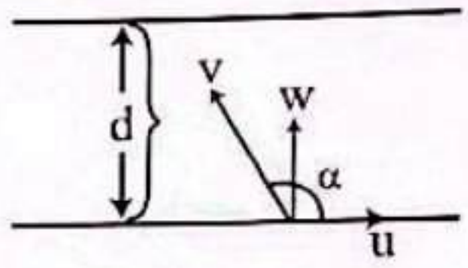


POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-05: নদী পারাপার সংক্রান্ত

১ **Formula & Concept:**

	কোনো শর্ত না দেওয়া থাকলে	সর্বনিম্ন সময়	সর্বনিম্ন দূরত্ব (সোজাসুজি নদী পার)
চিত্র			
সূত্র	$w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$ $d = v\sin\alpha\, t \Rightarrow t = \frac{d}{v\sin\alpha}$ $x = (u + v\cos\alpha)t$ $\frac{x}{d} = \frac{u+v\cos\alpha}{v\sin\alpha}$	$w = \sqrt{u^2 + v^2}$ $\alpha = 90°$ $d = v\,t_{min} \Rightarrow t_{min} = \frac{d}{v}$ $x = ut_{min}$ $\frac{x}{d} = \frac{u}{v}$	$w = \sqrt{v^2 - u^2}$ $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)$ $d_{min} = w\,t$ $\Rightarrow t = \frac{d_{min}}{w} = \frac{d_{min}}{\sqrt{v^2-u^2}}$ $x = 0$

নৌকার/সাতারুর বেগ = v, স্রোতের বেগ = u, লব্ধি বেগ = w।

Note: স্রোত থাকলে সর্বনিম্ন দূরত্বে নদী পারাপারের সময়, নদী পারাপারের সর্বনিম্ন সময় অপেক্ষা বেশি হবে।

MCQ

01. এক ব্যক্তি স্রোতের $\sqrt{2}$ গুণ বেগে সাঁতার কাটতে পারে। যাত্রা স্থান হতে নদীর ঠিক বিপরীত পাড়ে পৌঁছাতে হলে তাকে কোন দিকে সাঁতার দিতে হবে? **[CU'20-21; RU'17-18] [Ans: b]**

(a) 120° (b) 135° (c) 90° (d) 45°

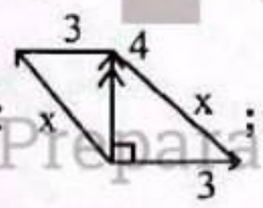
সমাধান: স্রোতের বেগ u হলে, ব্যক্তির বেগ $\sqrt{2}u$ ।

প্রশ্নমতে, $\sqrt{2}u\cos\alpha + u\cos0° = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-u}{\sqrt{2}u} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \alpha = 135°$

বিকল্প: $\alpha = \cos\left(-\frac{\text{স্রোতের বেগ}}{\text{ব্যক্তির বেগ}}\right) = \cos\left(-\frac{u}{\sqrt{2}u}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 135°$

02. নদীর স্রোতের বেগ 3 kmh^{-1}, নৌকার বেগ কত হলে নৌকাটি 4 kmh^{-1} বেগে সোজা পথে নদী পাড়ি দিতে পারবে? **[JU'19-20]**

(a) 4 kmh^{-1} (b) 5 kmh^{-1} (c) 4.5 kmh^{-1} (d) 6 kmh^{-1} **[Ans: b]**

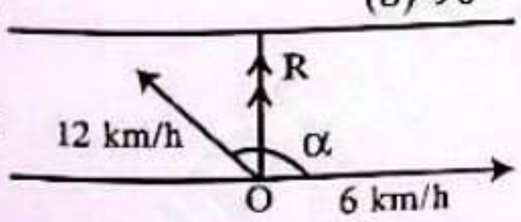
সমাধান:  ; $x^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow x = 5\ kmh^{-1}$

বিকল্প: $\tan 90° = \frac{x\sin\alpha}{3+x\cos\alpha} \Rightarrow 3 + x\cos\alpha = 0 \Rightarrow x\cos\alpha = -3$;

এখন, লব্ধি $= 4 \Rightarrow \sqrt{3^2 + x^2 + 2\cdot3\cdot x\cos\alpha} = 4 \Rightarrow 9 + x^2 + 6(-3) = 16 \therefore x = 5\ kmh^{-1}$

03. কোনো লঞ্চ 12 kmh^{-1} বেগে চলে 6 kmh^{-1} বেগে প্রবাহিত নদীর এক তীর থেকে কোন দিকে যাত্রা করলে অপর তীরে সোজাসুজি যেতে পারবে? **[JnU'13-14] [Ans: a]**

(a) 120° (b) 90° (c) 130° (d) 150°

সমাধান: 

নদীর প্রবাহের দিকে বেগের উপাংশ নিয়ে পাই, $12\cos\alpha + 6 = R\cos90° \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120°$

বিকল্প: $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{\text{স্রোতের বেগ}}{\text{লঞ্চের বেগ}}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{6}{12}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-06: গতির সূত্রাবলির ব্যবহার সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

(i) $v = u + ft$ (ii) $v^2 = u^2 + 2fs$ (iii) $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

(iv) $s = \frac{u+v}{2} \times t = \bar{v}\,t$ (v) $F = mf = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = m\frac{dv}{dt}$

এই সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে। ত্বরণ হলে f এর মান positive, মন্দন হলে f এর মান negative.

MCQ

01. একটি চলন্ত ট্রেনকে ব্রেক করে 10 সেকেন্ডে থামিয়ে দেওয়া হলো। ট্রেনটির গড় মন্দন $70\ ms^{-2}$ হলে এর গতিবেগ কত ছিল?

(a) $1000\ ms^{-1}$ (b) $800\ ms^{-1}$ (c) $700\ ms^{-1}$ (d) $500\ ms^{-1}$ **[DU'18-19] [Ans: d]**

সমাধান: $v = u - at \Rightarrow 0 = u - at \Rightarrow u = 70 \times 10 = 700\ ms^{-1}$

02. একটি চলমান বস্তুকণা $10\ ms^{-1}$ আদিবেগে এবং $-3\ ms^{-2}$ সুষম ত্বরণে সরলরেখা বরাবর যাত্রা করে 16 মিটার অতিক্রম শেষে বস্তুটির বেগ কত মিটার/সে হবে? **[RU'17-18] [Ans: d]**

(a) 196 (b) 14 (c) 4 (d) 2

সমাধান: $v^2 = v_0^2 + 2as \Rightarrow v = \sqrt{10^2 + 2 \cdot (-3) \cdot 16} = \sqrt{100 - 96} = \sqrt{4} = 2\ ms^{-1}$

03. 15 kg ভরের একটি গোলা 5.56 ft দীর্ঘ একটি কামানের নলের মুখ থেকে $4\ ms^{-1}$ বেগে নির্গত হয়। গোলাটির উপর প্রযুক্ত বলের মান কত? **[KU'17-18]**

(a) 60 N (b) 90 N (c) 120 N (d) 60 kg-wt

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $s = 5.56\ ft = (5.56 \times 0.3) = 1.7\ m$

$v^2 = v_0^2 + 2as \therefore a = \frac{4^2}{2\times1.7} = 4.7\ ms^{-2} \therefore F = ma = 15 \times 4.7 = 70\ N$ (প্রায়)

04. 36 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর কী পরিমাণ বল প্রয়োগ করলে এক মিনিটে এর বেগ ঘণ্টায় 15 km এ বৃদ্ধি পাবে?

(a) 1.5 N (b) 2.5 N (c) 3.6 N (d) 4.5 N **[KU'17-18] [Ans: b]**

সমাধান: $F = \frac{m\Delta v}{t} = \frac{36\times\frac{15}{36}}{60} = 2.5\ N$

05. একটি ট্রেন স্থিরাবস্থা হতে $4ft/sec^2$ ত্বরণে চলা শুরু করার পর ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে যেতে তার কত second লাগবে?

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 **[JU'16-17] [Ans: d]**

সমাধান: $v = 30\ miles\ hr^{-1} = \frac{30\times1760\times3}{3600} = 44ft/sec \therefore t = \frac{v}{a} = 11s$

06. স্থির অবস্থান থেকে সুষম ত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে কোন সম্পর্কটি সঠিক? **[KU'16-17] [Ans: a]**

(a) $s \propto t^2$ (b) $s \propto \sqrt{t}$ (c) $s \propto \sqrt{v}$ (d) $s \propto t$

07. একটি গাড়ি স্থিতিবস্থা হতে সমত্বরণ (uniform acceleration)-এ চলা শুরু করে 5 সেকেন্ডে $75\ ms^{-1}$ গতিবেগ প্রাপ্ত হল। গাড়িটির ত্বরণ (acceleration) কত? **[JnU'15-16] [Ans: d]**

(a) $18\ ms^{-2}$ (b) $12\ ms^{-2}$ (c) $15\ ms^{-2}$ (d) $7\ ms^{-2}$

সমাধান: $a = \frac{75}{5} = 15\ ms^{-2}$

08. একটি ধ্রুবক বল 40 কেজি ভরের একটি বস্তুর উপর স্থিরাবস্থা হতে 6 সেকেন্ড ক্রিয়া করে $18\ ms^{-1}$ বেগের সৃষ্টি করে। বলের পরিমাণ কত? **[JU'14-15] [Ans: a]**

(a) 120N (b) 110N (c) 210N (d) 100N

সমাধান: $a = \frac{v-u}{t} = \frac{18-0}{6} = 3ms^{-2} \therefore F = ma = 40 \times 3 = 120N$

09. একটি গাড়ি সমত্বরণে (uniform acceleration) $30\ kmh^{-1}$ আদিবেগে 100 km পথ অতিক্রম করে $50\ kmh^{-1}$ চূড়ান্ত বেগ প্রাপ্ত হয়। গাড়িটির ত্বরণ (acceleration) কত? **[JnU'14-15; DU'11-12] [Ans: a]**

(a) $8\ kmh^{-2}$ (b) $800\ kmh^{-2}$ (c) $16\ kmh^{-2}$ (d) $80\ kmh^{-2}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

সমাধান: দেওয়া আছে, $u = 30\ kmh^{-1}$; $v = 50\ kmh^{-1}$; $s = 100\ km$

আমরা জানি, $a = \frac{v^2-u^2}{2s} = \frac{50^2-30^2}{2\times100} = 8\ kmh^{-2}$

10. 4N এর একটি বল 2 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর ক্রিয়া করলে ত্বরণ- [CU'14-15] [Ans: c]

(a) $4\ ms^{-2}$ (b) $8\ ms^{-2}$ (c) $2\ ms^{-2}$ (d) $1\ ms^{-2}$

সমাধান: $F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{4}{2} = 2\ ms^{-2}$

Type-07: বাঘ-হরিণ, ইঁদুর-বিড়াল ধরা এবং বাস-যাত্রী, বাস-সাইকেল অতিক্রম করা সংক্রান্ত

Formula & Concept:

এই অঙ্কগুলোতে সাধারণত একপক্ষ সমবেগে এবং অপর পক্ষ সমত্বরণে চলে, সমবেগের জন্য $s = vt$ এবং সমত্বরণের জন্য-

(i) $s = ut + \frac{1}{2}at^2$; (ii) $v = u + at$ সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে। [এক্ষেত্রে s = সরণ, u = আদিবেগ, v = শেষবেগ, t = সময় ও a = ত্বরণ]

Note: বাঘ-হরিণ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব অবশ্যই সঠিকভাবে সমীকরণে বসাতে হবে।

MCQ

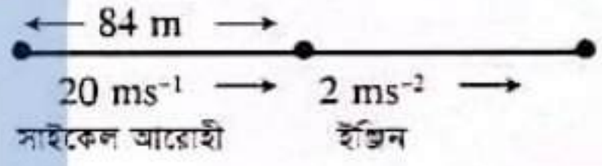
01. কোনো সাইকেল আরোহী একটি ইঞ্জিনের 84 মিটার পশ্চাৎ হতে $20ms^{-1}$ সমবেগে তার দিকে যাত্রা করল। একই সময় ইঞ্জিনটি $2ms^{-2}$ সমত্বরণে সম্মুখের দিকে যাত্রা করলে তারা কত সেকেন্ডে মিলিত হবে? [KU'16-17] [Ans: d]

(a) 9 এবং 18 (b) 8 এবং 16 (c) 7 এবং 15 (d) 6 এবং 14

সমাধান: ধরি, t সময়ের পর তারা মিলিত হয়।

$\therefore 20t = \frac{1}{2}\times 2 \times t^2 + 84 \Rightarrow t^2 - 20t + 84 = 0$

$\Rightarrow t^2 - (14+6)t + 84 = 0 \ \therefore t = 6, 14\ sec$



Type-08: বিশেষ এক সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব সংক্রান্ত

Formula & Concept:

আমরা জানি, t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s_{th} = u + \frac{1}{2}f(2t-1)$

এবং t সেকেন্ডে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$; ত্বরণ, $f = \frac{S_{mth}-S_{nth}}{t_m-t_n}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $20ms^{-1}$ বেগে ও $4ms^{-2}$ সমত্বরণে চলমান বস্তুকণার ৫-তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব কত হবে? [GST'23-24] [Ans: b]

(a) 36m (b) 38m (c) 42m (d) 48m

সমাধান: এখানে, $u = 20\ ms^{-1}, f = 4\ ms^{-2}, t = 5\ sec, S_{5th} = ?$

$S_{5th} = u + \frac{1}{2}f(2t-1) = 20 + \frac{1}{2}\times 4(2\times5-1)$

$\therefore s_{5th} = 38\ m$

02. মন্দনের ক্ষেত্রে গতির সমীকরণ কোনটি? [JU'22-23] [Ans: b]

(a) $s = u + \frac{1}{2}f(2t-1)$ (b) $s = u - \frac{1}{2}f(2t-1)$

(c) $s = ut - \frac{1}{2}f(t-1)$ (d) $s = u - \frac{1}{2}f(2t+1)$

03. একটি কণা স্থিরাবস্থা থেকে $2m/sec^2$ ধ্রুব ত্বরণে যাত্রা করে তৃতীয় সেকেন্ডে কত পথ অতিক্রম করবে? [JU'22-23] [Ans: b]

(a) 4m (b) 5m (c) 6m (d) 7m

সমাধান: $s_3 = u + \frac{1}{2}f(2t-1) = 0 + \frac{1}{2}\times2\times(2\times3-1) = 5m$

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

04. স্থির অবস্থা হতে একটি বস্তু $4ms^{-2}$ সমত্বরণে চলতে থাকলো। সপ্তম সেকেন্ডে এটি কত মিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে? [RU'22-23]
(a) 13 (b) 39 (c) 52 (d) 26 [Ans: d]
সমাধান: $s_7 = u + \frac{1}{2}f(2t-1) = 0 + \frac{1}{2} \times 4 \times (2 \times 7 - 1)\ m = 26\ m$

05. একটি কণা $60\ cms^{-2}$ সমত্বরণে চলে এগারো তম সেকেন্ডে 720 cm পথ অতিক্রম করে। কণাটির আদিবেগ কত? [JU'19-20]
(a) $72\ cms^{-1}$ (b) $80\ cms^{-1}$ (c) $90\ cms^{-1}$ (d) $120\ cms^{-1}$ [Ans: c]
সমাধান: $s_{11} = u + \frac{1}{2}f(2t-1) \Rightarrow 720 = u + \frac{1}{2} \times 60(2 \times 11 - 1)$
$\Rightarrow 720 = u + 30 \times 21 = u + 630 \therefore u = 90\ cms^{-1}$

Type-09: রেলগাড়ির সংঘর্ষ এড়ানোর শর্ত নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**
আমরা জানি, সমত্বরণে চলমান বস্তুর জন্য, $v^2 = u^2 + 2fs$
এখানে, u = আদিবেগ; v = শেষবেগ; f = ত্বরণ; s = অতিক্রান্ত দূরত্ব।
Note: FPS পদ্ধতিতে g এর মান, $g = 32\ fts^{-2}$
দুইটি রেলগাড়ি একই সরল রেলপথে u_1 ও u_2 গতিবেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব যখন x তখন তারা পরস্পরকে দেখতে পায়। ব্রেক প্রয়োগ করে রেলগাড়ি দুইটি যদি যথাক্রমে সর্বোচ্চ f_1 এবং f_2 মন্দন সৃষ্টি করে সেক্ষেত্রে,
(i) সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 \le 2f_1 f_2 x$ হয়।
(ii) কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 = 2f_1 f_2 x \Rightarrow \frac{u_1^2}{2f_1} + \frac{u_2^2}{2f_2} = x$ হয়।

MCQ

01. খুলনা ঢাকার মধ্যে একই লাইনে চলাচলকারী বিপরীত দিক থেকে আসা 50 কি.মি. /ঘ. বেগে চিত্রা ও 40 কি.মি. /ঘ. বেগে সুন্দরবন এক্সপ্রেস ট্রেন দুটি 10 কি.মি. দূরত্বে একে অন্যকে দেখতে পেল। চিত্রা এক্সপ্রেসটি 250 কি.মি. /ঘ.^{2} মন্দন সৃষ্টি করে। সুন্দরবন এক্সপ্রেস ট্রেনটি কত মন্দন সৃষ্টি করলে দুর্ঘটনা এড়ানো যাবে? [KU'13-14] [Ans: b]
(a) $250\ kmh^{-2}$ (b) $160\ kmh^{-2}$ (c) $350\ kmh^{-2}$ (d) $450\ kmh^{-2}$
সমাধান: মনে করি, চিত্রা এক্সপ্রেসটির বেগ = u_1, মন্দন = f_1 এবং সুন্দরবন এক্সপ্রেসটির বেগ = u_2, মন্দন = f_2
এখন দুর্ঘটনা এড়ানো যাবে যদি $\frac{u_1^2}{2f_1} + \frac{u_2^2}{2f_2} = 10\ km \Rightarrow \frac{50^2}{2 \times 250} + \frac{40^2}{2 \times f_2} = 10$
$\Rightarrow 5 + \frac{40 \times 40}{2f_2} = 10 \Rightarrow \frac{20 \times 40}{f_2} = 5 \therefore f_2 = 160\ kmh^{-2}$

POLL MACHINE

Type-10: বুলেটের তক্তা ভেদ সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**
ধরা হয়, ভেদ করার সময় সুষম মন্দনে বুলেটের বেগ হ্রাসপ্রাপ্ত হয়।

Preparation and Practice are vital for effective delivery

প্রধান সূত্র: $v^2 = u^2 + 2fs;\ [f < 0]$		
একটি বুলেট-	আরও অতিক্রম করবে	মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব
(i) s দূরত্ব অতিক্রম করার পর যদি বেগের $\frac{1}{n}$ অংশ হারায় (ii) একটি তক্তা ভেদ করার পর যদি বেগের $\frac{1}{n}$ অংশ হারায়	(i) $x = \frac{s(n-1)^2}{2n-1}$ (ii) $N = \frac{(n-1)^2}{2n-1} \approx \frac{n}{2} - 1$	(i) $x_t = \frac{s(n-1)^2}{2n-1} + s$ (ii) $N_t = \frac{(n-1)^2}{2n-1} + 1 \approx \frac{n}{2}$
(i) s দূরত্ব অতিক্রম করার পর যদি বেগ আদিবেগের $\frac{1}{n}$ অংশ হয় (ii) একটি তক্তা ভেদ করার পর যদি বেগ আদিবেগের $\frac{1}{n}$ অংশ হয়	(i) $x = \frac{s}{n^2-1}$ (ii) $N = \frac{1}{n^2-1}$	(i) $x_t = \frac{s}{n^2-1} + s$ (ii) $N_t = \frac{1}{n^2-1} + 1$
(i) নির্দিষ্ট পুরুত্বের একটি তক্তা ভেদ করতে পারলে, এর বেগ n গুণ করা হলে পূর্বের n^2 গুণ তক্তা ভেদ করতে পারবে। [অর্থাৎ, নির্দিষ্ট পুরুত্বের a সংখ্যক তক্তা ভেদ করতে পারলে, এর বেগ n গুণ করা হলে n^2a টি তক্তা ভেদ করতে পারবে।] (ii) বিপরীতক্রমে, ঐ পুরুত্বের m সংখ্যক তক্তা ভেদ করতে হলে বেগ $\sqrt{m}$ গুণ করতে হবে। [অর্থাৎ, a সংখ্যক তক্তা ভেদ করতে পারলে, ma সংখ্যক তক্তা ভেদ করাতে হলে বেগ $\sqrt{m}$ গুণ করতে হবে।]		

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

MCQ

01. একটি বুলেট কোনো লক্ষ্যবস্তুতে 3 cm ভেদ করে এর অর্ধেক বেগ হারায়। বুলেটটি আরও কতটুকু ভেদ করবে? **[JU'22-23]**

(a) 1 cm (b) 1.5 cm (c) 2 cm (d) 3 cm **[Ans: a]**

সমাধান: প্রথম ক্ষেত্রে, $v^2 = u^2 - 2fs \Rightarrow \left(\frac{u}{2}\right)^2 = u^2 - 2fs$

$\Rightarrow 2 \times f \times 3 = u^2\left(1 - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow 2f \times 3 = \frac{3}{4}u^2 \therefore 2f = \frac{1}{4}u^2 \ldots\ldots\ldots (i)$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $0^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 - 2 \cdot f \cdot s' \Rightarrow \frac{u^2}{4} = \frac{1}{4}u^2 \times s' \therefore s' = 1\text{ cm}$

Shortcut: $\frac{1}{n}$ অংশ বেগ থাকলে, আরো যাবে $= \frac{s}{n^2-1} = \frac{3\text{cm}}{2^2-1} = 1\text{cm}$

02. একটি তীর একটি মাটির দেয়ালের ভিতর 3 ইঞ্চি ঢুকবার পর তার অর্ধেক বেগ হারায়। তীরটির বেগ শূন্য হওয়ার পূর্বে দেয়ালের ভিতর আর কত ইঞ্চি ঢুকবে? **[RU'17-18] [Ans: a]**

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

সমাধান: তীরটি s পরিমাণ ঢুকে বেগ $\frac{1}{n}$ অংশ হলে, তীরটি আরও ঢুকবে $= \frac{s}{n^2-1} = \frac{3}{2^2-1} = 1$ ইঞ্চি।

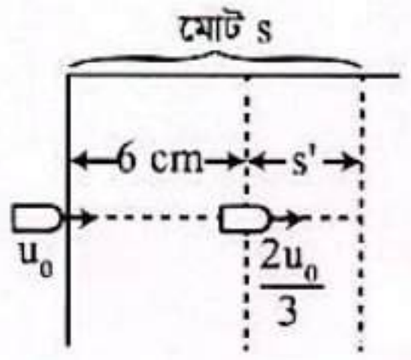
Written

01. একটি বুলেট বালির বস্তা 6 cm ভেদ করার পর $\frac{1}{3}$ বেগ হারায়। বুলেটটি বালির বস্তার মধ্যে কত সেন্টিমিটার প্রবেশ করে থেমে যাবে? **[DU'23-24]**

সমাধান: বুলেট $\frac{1}{3}$ অংশ বেগ হারাবার পূর্বে, $u = u_0; v = u_0 - \frac{1}{3}u_0 = \frac{2u_0}{3}$

$s = 6\text{ cm} \therefore f = \frac{v^2-u^2}{2s} = \frac{\left(\frac{4}{9}-1\right)u_0^2}{2\times 6} = \frac{-5}{108}u_0^2$

এখন, $u = u_0; v = 0; f = \frac{-5u_0^2}{108} \therefore s = \frac{v^2-u^2}{2a} = \frac{0^2-u_0^2}{2\times\frac{-5}{108}u_0^2} = \frac{54}{5}\text{ cm}$



Shortcut: বেগ আছে, $\left(1 - \frac{1}{3}\right)$ অংশ $= \frac{2}{3}$ অংশ $= \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}$ অংশ $\therefore x = \frac{3}{2}$

$\therefore$ মোট যাবে $= \left\{\frac{6}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-1} + 6\right\}\text{ cm} = 6 \times \left(1 + \frac{1}{\frac{9}{4}-1}\right)\text{cm} = 6 \times \left(1 + \frac{4}{5}\right)\text{cm} = 6 \times \frac{9}{5}\text{cm} = \frac{54}{5}\text{ cm}$

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-11: আপেক্ষিক বেগ সংক্রান্ত

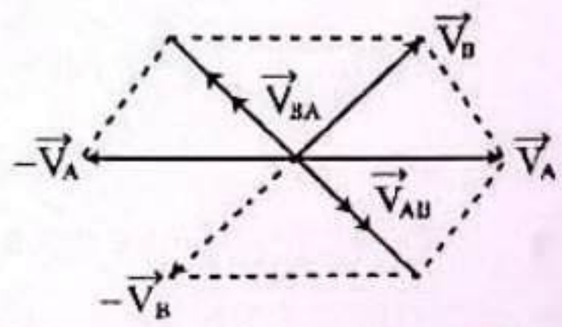
➲ **Formula & Concept:**

v_A ও v_B বেগদ্বয়ের জন্য:

(i) একই দিকে গেলে আপেক্ষিক বেগ হবে তাদের বেগের অন্তরফল।

(ii) বিপরীত দিকে গেলে আপেক্ষিক বেগ হবে তাদের বেগের যোগফল।

(iii) আপেক্ষিক বেগ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে যার সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করতে হবে তার বিপরীত বেগ নিয়ে অপর বেগের সাথে সামান্তরিক গঠন করলে সামান্তরিকের বেগদ্বয়ের ক্রিয়া বিন্দুগামী কর্ণই আপেক্ষিক বেগের মান ও দিক নির্দেশ করে।



B এর সাপেক্ষে A এর বেগ, $\vec{v}_{AB} = v_A - v_B$ এবং A এর সাপেক্ষে B এর বেগ, $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

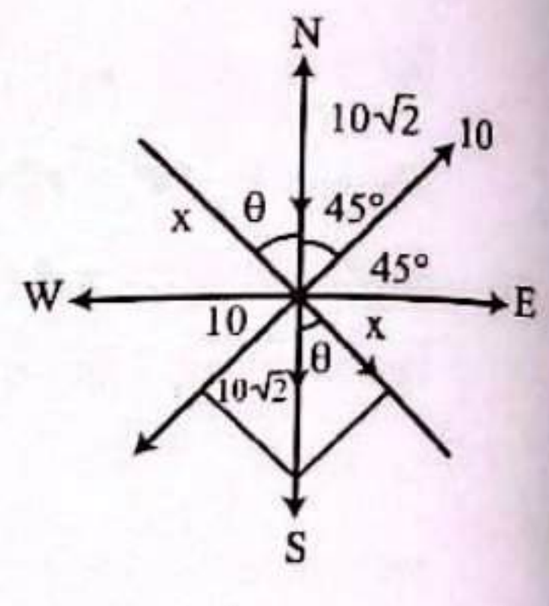
Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

MCQ

01. উত্তর-পূর্ব দিকে $10\ kmh^{-1}$ বেগে অগ্রসরমান একটি জাহাজের যাত্রীর কাছে মনে হয় যে বাতাস উত্তর দিক থেকে $10\sqrt{2}\ kmh^{-1}$ বেগে প্রবাহিত হচ্ছে। বাতাসের সঠিক গতিবেগ এবং দিক কোনটি? **[RU'11-12] [Ans: a]**

(a) $10\ kmh^{-1}$ দক্ষিণ-পূর্ব
(b) $11\ kmh^{-1}$ দক্ষিণ-পশ্চিম
(c) $10\sqrt{3}\ kmh^{-1}$ উত্তর-পশ্চিম
(d) $9\sqrt{2}\ kmh^{-1}$ দক্ষিণ-পূর্ব

সমাধান: ধরি, বাতাসের সঠিক গতিবেগ x।



সাইন সূত্রানুসারে, $\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{10}{\sin\theta} = \frac{10\sqrt{2}}{\sin(45^\circ+\theta)}$

এখন, $\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{10}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\theta = \frac{5\sqrt{2}}{x}$ ..... (i)

আবার, $\frac{10}{\sin\theta} = \frac{10\sqrt{2}}{\sin(45^\circ+\theta)} \Rightarrow \frac{x}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta) = \frac{10}{x}$

$\Rightarrow \cos\theta + \frac{5\sqrt{2}}{x} = \frac{10\sqrt{2}}{x}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{5\sqrt{2}}{x} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{50}{x^2} \Rightarrow 1 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{x}\right)^2 = \frac{50}{x^2} \Rightarrow 1 = 2\times\frac{50}{x^2} \Rightarrow x^2 = 100$

$\therefore x = 10\ km/h$; (i) $\Rightarrow \sin\theta = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \therefore \theta = 45^\circ$

অর্থাৎ $90^\circ + 45^\circ$ বা 135° কোণে উত্তর-পশ্চিম হতে দক্ষিণ-পূর্বে বাতাস প্রবাহিত হবে।

বিকল্প: $\vec{v}_s = (10\cos 45^\circ)\hat{i} + (10\sin 45^\circ)\hat{j} \Rightarrow \vec{v}_s = \frac{1}{\sqrt{2}}[(10\hat{i}) + (10\hat{j})]$

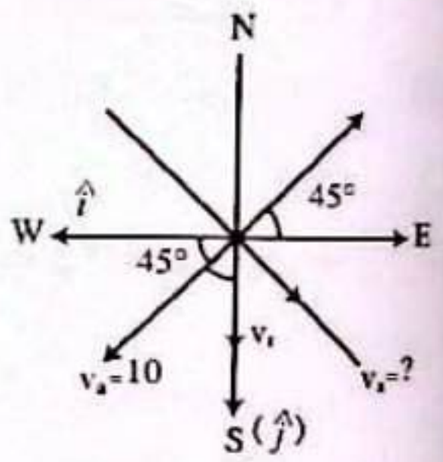
$\therefore \vec{v}_s = 5\sqrt{2}(\hat{i}+\hat{j})$ ..... (i)

এবং $\vec{v}_r = 10\sqrt{2}\,\hat{j}$ ..... (ii)

এখন, $\vec{v}_a + \vec{v}_s = \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_a = \vec{v}_r - \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_a = 10\sqrt{2}\,\hat{j} - [5\sqrt{2}(\hat{i}+\hat{j})]$

$\therefore \vec{v}_a = -5\sqrt{2}\hat{i} + 5\sqrt{2}\hat{j}$ অর্থাৎ $|\vec{v}_a| = \sqrt{(-5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{25\times2+25\times2}$

$= 10\ kmh^{-1}$; দিক: দক্ষিণ-পূর্ব।



Type-12: উল্লম্ব গতি সংক্রান্ত

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

➲ **Formula & Concept:**

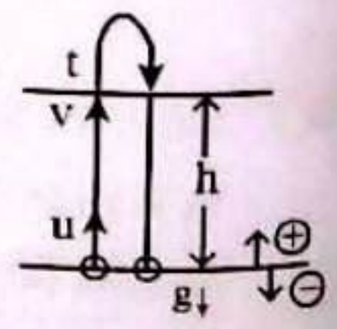
গতির আদিবিন্দু বা নিক্ষেপণ বিন্দুকে অক্ষ ব্যবস্থার মূলবিন্দু ধরে যে সকল রাশির দিক উপরের দিকে (y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে) তাদেরকে Positive ও যেসকল রাশির দিক নিচের দিকে (y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে) তাদেরকে negative ধরে গতির সূত্রে বসাতে হবে (অথবা প্রয়োজনে বিপরীত চিহ্ন ধরা যেতে পারে)।

- উর্ধ্বে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে: ↑ (+) [উপরের দিক +ve]

(i) $v = u - gt$ (ii) $v^2 = u^2 - 2gh$ (iii) $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$

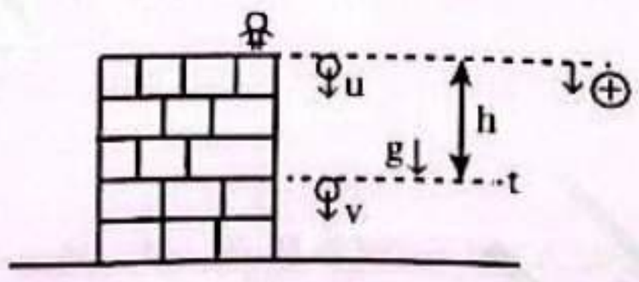
(iv) $h_{th} = u + \frac{1}{2}g(2t-1)$ (v) $h = \frac{u+v}{2}\times t$ (vi) $h_m = \frac{u^2}{2g}$

(vii) $t_m = \frac{u}{g}$ (viii) $T = \frac{2u}{g}$



- মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে: ↓ (+) [নিচের দিক +ve]

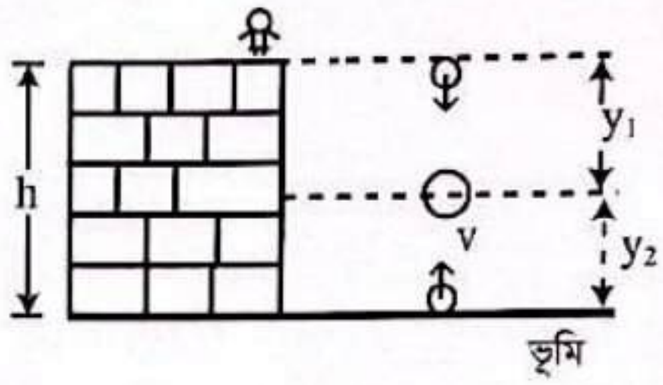
(i) $v = u + gt$
(ii) $v^2 = u^2 + 2gh$
(iii) $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$
(iv) $h = \frac{u+v}{2}\times t$



Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

❖ **Shortcut:**

➢ h উচ্চতা হতে একটি বস্তু নিচে ফেলা হল এবং একই সময়ে ভূমি হতে অপর একটি বস্তু v বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো-



(a) বস্তুদ্বয়ের মিলিত হবার সময়, $t = \frac{h}{v}$

(b) যে উচ্চতায় মিলিত হবে তার মান-

(i) h উচ্চতা হতে $y_1 = \frac{1}{2}g\left(\frac{h}{v}\right)^2$

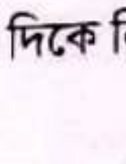
(ii) ভূমি হতে $y_2 = h - y_1 = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{h}{v}\right)^2$

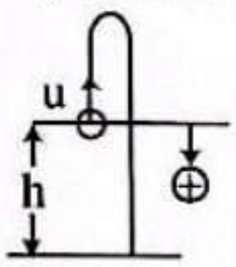
➢ ভূমি হতে একটি বস্তুকে u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো এবং ভূমির উপর h উচ্চতা হতে অপর একটি বস্তু v বেগে ছেড়ে দেয়া হলো। এরা t সময় পরে মিলিত হলে, $t = \frac{h}{u+v}$

➢ মোট বিচরণ কাল, $T = \frac{2u}{g}$ [u = নিক্ষেপণ বেগ]

সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2}{2g}$ [সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠতে সময়, $t_{max} = \frac{u}{g}$]

➢ চিন্তা করো, সমবেগে (u বেগে) ঊর্ধ্বগামী রকেট থেকে যদি কোনো বস্তু ছেড়ে দেওয়া হয় তাহলে সেই বস্তুটিরও u বেগ থাকবে। এই u বেগের জন্য বস্তুটি কিছু সময় উপরে যাবে এবং এর পর তার বেগ এক সময় শূন্য হবে (অভিকর্ষের জন্য) এর পর বস্তুটি নিচে পড়া শুরু করবে।





যেখান থেকে রকেটটি বস্তুটিকে ছেড়ে দেয়।

সূত্র: $\underset{\uparrow}{h} = -ut + \frac{1}{2}gt^2$
বস্তুটির নিট সরণ
(বস্তুটিকে যে উচ্চতা হতে ফেলা হয়েছিল।)

∴ বস্তুটি ভূমিতে আঘাত করার মুহূর্তে রকেটের উচ্চতা $= \frac{1}{2}gt^2$

MCQ

01. মুক্তভাবে পড়ন্ত কোনো বস্তু চতুর্থ সেকেন্ডে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? **[DU'23-24] [Ans: d]**

(a) 78.4 m (b) 44.1 m (c) 39. 2 m (d) 34.3 m

সমাধান: এখানে, $s_{th} = u + \frac{1}{2}f(2t-1) \therefore s_{4th} = 0 + \frac{1}{2}g(2\times 4-1) = \frac{7}{2}g = \frac{7}{2}\times 9.8 = 7\times 4.9 = 34.3m$

02. 2u আদিবেগ এবং আনুভূমির সাথে লম্বভাবে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতা হবে- **[CU'22-23; DU'20-21] [Ans: b]**

(a) $\frac{u^2}{2g}$ (b) $\frac{2u^2}{g}$ (c) $\frac{u^2}{2g}\sin\alpha$ (d) $\frac{u^2}{2g}\cos\alpha$

সমাধান: $0^2 = (2u)^2 - 2gH \Rightarrow H = \frac{4u^2}{2g} = \frac{2u^2}{g}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

03. একটি বস্তু ছাদ হতে মুক্তভাবে 4 সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হয়। শেষ 2 সেকেন্ডে বস্তুটি কত দূরত্ব অতিক্রম করল? **[CU'20-21; JnU'16-17] [Ans: d]**

(a) 128 ফুট (b) 16 ফুট (c) 96 ফুট (d) 192 ফুট

সমাধান: প্রথম 2s পর বেগ, $v = g\times 2 = 2g$; শেষ 2 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= v\times 2 + \frac{1}{2}\times g\times 2^2$

$= 2\times 2g + 2g = 6g = (6\times 32) = 192$ ফুট।

বিকল্প: শেষ 2 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব = 4 সেকেন্ডে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব – প্রথম 2 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$= \frac{1}{2}g(4^2 - 2^2) = \frac{1}{2}\times 32\times 12 = 192$ ফুট

04. $10\ ms^{-1}$ বেগে ঊর্ধ্বগামী কোনো বেলুন হতে একটি পাথরের টুকরো ফেলে দেয়ার 10 sec পর মাটিতে পড়ে। পাথরটি ফেলে দেয়ার সময় বেলুনের উচ্চতা কত ছিল? **[RU'19-20] [Ans: b]**

(a) 590 m (b) 390 m (c) 49 m (d) 490 m

সমাধান: $h = \left\{-10\times 10 + \frac{1}{2}\times 9.8\times (10)^2\right\} = -100 + \frac{980}{2} = 390\ m$

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

05. একটি বস্তু উল্লম্বভাবে নিক্ষিপ্ত হলে সর্বাধিক উচ্চতা ও ঐ উচ্চতায় পৌঁছাবার সময় কত হবে? **[KU'18-19] [Ans: b]**

(a) $\frac{u^2}{2g}, \frac{u}{2g}$ (b) $\frac{u^2}{2g}, \frac{u}{g}$ (c) $\frac{u^2}{g}, \frac{u}{g}$ (d) $\frac{u^2}{g}, \frac{2u}{g}$

06. একটি শূন্য কূপের মধ্যে একখণ্ড পাথরের টুকরা ছেড়ে দেয়ার পর তা $19.6\ ms^{-1}$ বেগে কূপের তলদেশে পতিত হয়। কূপের গভীরতা কত মিটার? **[RU'17-18] [Ans: d]**

(a) 9.8 (b) 32.0 (c) 16.5 (d) 19.6

সমাধান: $h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(19.6)^2}{2\times9.8} = 19.6\ m$

07. $20\ ms^{-1}$ বেগে ঊর্ধ্বগামী কোনো বেলুন থেকে পতিত এক টুকরা পাথর 20 সেকেন্ড পরে মাটিতে পড়ল। পাথরের টুকরা পতিত হওয়ার সময় বেলুনের উচ্চতা কত ছিল? **[RU'14-15; DU'10-11] [Ans: d]**

(a) 390 m (b) 560 m (c) 12580 m (d) 1560 m

সমাধান: $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = -20\times20 + \frac{1}{2}\times9.8\times20^2 = -400 + 4.9\times4\times100$

$= -400 + 490\times4 = 1560\ m$

08. কোনো স্তম্ভের শীর্ষ হতে $19.5\ ms^{-1}$ বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত কোনো কণা 5 সেকেন্ড পরে স্তম্ভের পাদদেশে পতিত হলে স্তম্ভের উচ্চতা- **[DU'11-12, 07-08, 06-07, 05-06; RU'11-12] [Ans: b]**

(a) 20 m (b) 25 m (c) 30 m (d) 50 m

সমাধান: $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2 = -19.5\times5 + \frac{1}{2}\times9.8\times5^2 = 25\ m$

Type-13: শব্দ শোনার সময় হিসেব করে গভীরতা নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

গতিবিদ্যার মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর সূত্র, $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$

$v = u + gt$ ইত্যাদি ব্যবহার করতে হবে [পড়ন্ত বস্তুটির জন্য]

যেখানে, u = আদিবেগ, v = শেষবেগ, g = অভিকর্ষজ ত্বরণ

কূপে মুক্তভাবে পতনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে (বায়ুর বাধা অগ্রাহ্য করে):

একটি পাথর কুয়ার ভিতর ফেলার t সময় পরে পানিতে এর পতনের শব্দ শোনা গেলো। শব্দের বেগ v এবং কুয়ার গভীরতা h হলে,

$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}$

শব্দের জন্য:

$h = v_s t$ ব্যবহার করতে হবে। [শব্দ সমবেগে চলে]

v_s = শব্দের বেগ

Written

01. একটি শূন্য কুয়ার মধ্যে অবাধে পড়ন্ত একখণ্ড পাথর $19.6\ ms^{-1}$ গতিবেগে এর তলদেশে পতিত হলো। পাথর ফেলার $2\frac{2}{35}$ সেকেন্ড পর এর পতনের শব্দ শোনা গেলে শব্দের গতিবেগ এবং কুয়ার গভীরতা নির্ণয় কর। **[RU'17-18]**

সমাধান: মনে করি, কূপের গভীরতা h মি. এবং পাথর খণ্ডটি কূপের তলদেশে পৌঁছে t সেকেন্ডে।

তাহলে তলদেশে সৃষ্ট পতন শব্দ $\left(2\frac{2}{35} - t\right) = \left(\frac{72}{35} - t\right)$ সেকেন্ডে কূপের উপরে আসে।

পাথর পতনের ক্ষেত্রে: $v^2 = u^2 + 2gh$ সূত্র হতে পাই, $(19.6)^2 = 0 + 2\times9.8h \Rightarrow h = 19.6\ m$ **(Ans.)**

$v = u + gt$ সূত্র হতে পাই, $19.6 = 0 + 9.8t \Rightarrow t = 2$ sec.

শব্দের বেগ v মি./সে. হলে, $h = v\left(\frac{72}{35} - t\right) \Rightarrow 19.6 = v\left(\frac{72}{35} - 2\right) = \frac{2}{35}v \Rightarrow v = 343\ ms^{-1}$

∴ শব্দের গতিবেগ 343 মি./সে.। **(Ans.)**

02. বিল্ডিং এর ছাদের উপর থেকে একটি পাথর ফেলা হলো এবং 3.5 সেকেন্ড পরে পাথরটি ভূমিতে পড়ার শব্দ শোনা গেল। বিল্ডিংটির উচ্চতা কত? [$g = 9.81$ মি./সে^{2}, শব্দের বেগ 327 মি./সে.]। **[KU'13-14]**

সমাধান: মনে করি, বিল্ডিং এর উচ্চতা = h ; ভূমিতে পড়তে সময় = $\sqrt{\frac{2h}{g}}$, শব্দ যাওয়ার সময় = $\frac{h}{327}$

∴ $\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{327} = 3.5$ সমাধান করে পাই, $h = 54.5\ m$ **(Ans.)**

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

Type-14: প্রাস সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:** প্রাসের গতিপথ একটি পরাবৃত্ত। α কোণে ভূমি থেকে u বেগে নিক্ষিপ্ত প্রাসের ক্ষেত্রে, গতিসূত্র:

(i) $v_x = u_x = u\cos\alpha$

(ii) $v_y = u_y - gt = u\sin\alpha - gt$

(iii) $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$; $\theta_v = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x}$

(iv) $x = u_x t = u\cos\alpha\, t$

(v) $y = u_y t - \frac{1}{2}gt^2 = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$

(vi) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\theta_r = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

চলরেখার সমীকরণ: $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

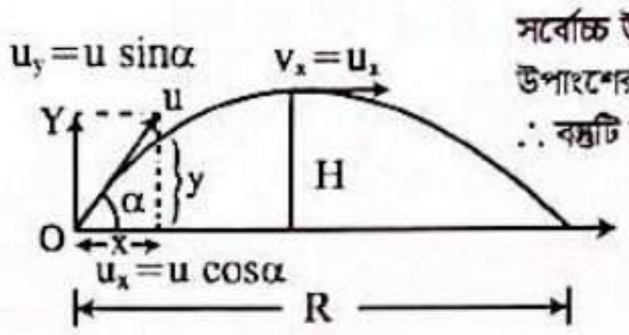
সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠতে সময়, $t_{max} = \frac{u\sin\alpha}{g}$

বিচরণকাল, $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$;

আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$; $\tan\alpha = \frac{4H}{R}$

সর্বোচ্চ আনুভূমিক পাল্লা, $R_{max} = \frac{u^2}{g}$ [যখন $\alpha = 45°$]

এখন, $R = \frac{u^2}{g}\sin 2\alpha \therefore \boxed{R = R_{max}\sin 2\alpha}$



সর্বোচ্চ উচ্চতায় বেগের উল্লম্ব উপাংশের মান $v_y = u\sin\alpha - gt = 0$
∴ বস্তুটি আনুভূমিকভাবে যায়।

❖ **Shortcut:**

➢ α কোণে u আদি বেগে নিক্ষিপ্ত কোনো কণা t সময় পর কণাটির আদিবেগ u এর দিকের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করলে, $t = \frac{u}{g\sin\alpha}$

➢ কোনো বস্তুকে একই আদিবেগে α এবং $\frac{\pi}{2} - \alpha$ কোণে নিক্ষেপ করলে তারা একই আনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রম করে।

MCQ

01. একটি বস্তু 15 ms^{-1} বেগে আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে নিক্ষিপ্ত হলে, বস্তুটির ভ্রমণকাল কত? **[RU'23-24, 20-21] [Ans: b]**

(a) 1.4 s (b) 1.53 s (c) 2.53 s (d) 2.4 s

সমাধান: $T = \frac{2u\sin 30°}{g} = \frac{2\times 15\times\frac{1}{2}}{10} = 1.53 \text{ sec} \approx 1.53 \text{ s}$

02. একটি প্রক্ষেপকের আনুভূমিক পাল্লা এর সর্বোচ্চ উচ্চতার চার গুণ হলে নিক্ষেপণ কোণ বের করো।
[GST'23-24; Agri.'19-20] [Ans: b]

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 80°

সমাধান: আনুভূমিক পাল্লা সর্বোচ্চ উচ্চতার চারগুণ $\Rightarrow R = 4H \Rightarrow \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = 4\times\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

$\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin^2\alpha \Rightarrow \tan\alpha = 1 ; \alpha = 45°$

Shortcut: $\tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{R}{R} = 1 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(1) = 45°$

03. যদি H সর্বোচ্চ উচ্চতা এবং R আনুভূমিক পাল্লা হয়, তবে একটি বস্তুকে ভূমির সাথে 30° কোণে নিক্ষেপ করা হলে নিচের কোনটি সঠিক? **[DU'22-23] [Ans: c]**

(a) $R = \sqrt{3}H$ (b) $R = 4H$ (c) $R = 4\sqrt{3}H$ (d) $R = 3\sqrt{2}H$

সমাধান: $\tan\alpha = \frac{4H}{R} \Rightarrow \tan 30° = \frac{4H}{R} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4H}{R} \therefore R = 4\sqrt{3}H$

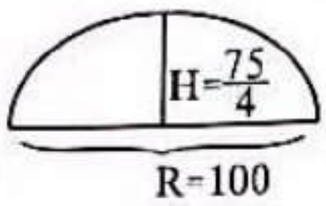
POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

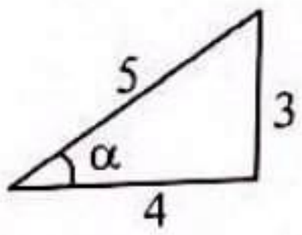
04. ভূমি থেকে শূন্যে নিক্ষিপ্ত একটি বল 100 মিটার দূরে ভূমিতে ফিরে আসে। সেটার বিচরণপথের সর্বাধিক উচ্চতা $\frac{75}{4}$ মিটার হলে নিক্ষেপণ কোণ কত? **[GST'22-23] [Ans: b]**

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ (c) $\sin^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$ (d) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

সমাধান: $\therefore \tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{4\times\frac{75}{4}}{100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$



$\therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4} = \sin^{-1}\frac{3}{5} = \cos^{-1}\frac{4}{5}$ ∴ অপশন অনুযায়ী উত্তর: $\cos^{-1}\frac{4}{5}$



05. শূন্যে নিক্ষিপ্ত একটি পাথর খণ্ডের সর্বাধিক পাল্লার মান 40 মিটার। পাথরের সর্বাধিক উচ্চতা কত মিটার? **[RU'22-23] [Ans: b]**

(a) 20.1 (b) 20 (c) 21 (d) 21.5

সমাধান: $R_{max} = \frac{u^2}{g} = 40$ এবং $H_{max} = \frac{u^2}{2g}[\alpha = 90°] = \frac{1}{2}\times\frac{u^2}{g} = \frac{1}{2}\times 40 = 20\text{ m}$

06. বাংলাদেশের গোল রক্ষক যদি ১ কি. মি /ঘণ্টা বেগে বল কিক করে তবে সর্বাধিক উচ্চতায় বলের ত্বরণ কত? **[CU'22-23]**

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) -1 (d) 0

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); সর্বাধিক উচ্চতায় কোনো আনুভূমিক ত্বরণ থাকে না; শুধুমাত্র অভিকর্ষজ ত্বরণ $g = 9.8\text{ ms}^{-2}$ ক্রিয়াশীল।

07. একটি ক্রিকেট বলকে 40 ms^{-1} বেগে এবং ভূমির সাথে $60°$ কোণে ব্যাট দ্বারা আঘাত করলে সর্বোচ্চ উচ্চতায় বলটির বেগ কত?

(a) 0 (b) 20 ms^{-1} (c) 30 ms^{-1} (d) 40 ms^{-1} **[JU'19-20] [Ans: b]**

সমাধান: সর্বোচ্চ উচ্চতায় উল্লম্ব বেগ শূন্য। $\therefore v = (40\cos 60°)\text{ ms}^{-1} = 20\text{ ms}^{-1}$

08. যদি u বেগে আনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তু T সময়ে তার গতিপথের সর্বোচ্চ উচ্চতা H এ পৌঁছায়, তবে $\frac{H}{T^2}$ হবে-

(a) $\frac{2}{g}$ (b) $\frac{g}{2}$ (c) g (d) $\frac{1}{g}$ **[DU'17-18] [Ans: b]**

সমাধান: $\frac{H}{T^2} = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}\times\frac{g^2}{u^2\sin^2\theta} = \frac{g}{2}$

09. কোনো নিক্ষিপ্ত বস্তুর আনুভূমিক পাল্লা বৃহত্তম পাল্লার অর্ধেক হলে, নিক্ষেপণ কোণ কত? **[RU'17-18] [Ans: c]**

(a) $120°$ (b) $90°$ (c) $15°$ অথবা $75°$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $\frac{R}{R_{max}} = \sin 2\alpha \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{1} = \sin\alpha \Rightarrow 2\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ $\therefore \alpha = 15°$ আবার, $90° - \alpha = 75°$

10. 32 fts^{-1} আদিবেগ এবং ভূমির সাথে $15°$ কোণে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলো। ইহার আনুভূমিক পাল্লা কত হবে? **[JnU'17-18]**

(a) 16 ft (b) $16\sqrt{3}$ ft (c) 32 ft (d) $32\sqrt{3}$ ft **[Ans: a]**

সমাধান: $g = 32\text{ fts}^{-1}$ $\therefore R = \frac{u^2}{g}\sin 2\theta = \frac{32\times32}{32}\times\sin 30° = 32\times\frac{1}{2} = 16\text{ft}$

11. u বেগে আনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণার সর্বোচ্চ উচ্চতা কত হবে? **[CU'17-18] [Ans: c]**

(a) $\frac{u^2}{2g}$ (b) $\frac{u^2}{4g}$ (c) $\frac{u^2}{8g}$ (d) $\frac{u^2}{16g}$

সমাধান: $H_{max} = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{u^2\times\sin^2 30°}{2g} = \frac{u^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2g} = \frac{u^2}{4\times2g} = \frac{u^2}{8g}$

12. 32 fts^{-1} আদিবেগে এবং ভূমির সাথে $30°$ কোণে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলো। ইহার ভ্রমণকাল- **[DU'16-17, 13-14] [Ans: b]**

(a) 0.5 s (b) 1 s (c) 1.5 s (d) 2 s

সমাধান: $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2\times32\times\sin 30°}{32} = 1\text{ s}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

13. একজন বালক একটি বলকে উল্লম্বভাবে 68 মিটার নিক্ষেপ করতে পারে। সে তা ভূমির সমতলে কত দূরে নিক্ষেপ করতে পারবে?

(a) 136 m (b) 204 m (c) 135.8 m (d) 150 m **[CU'16-17] [Ans: a]**

সমাধান: $H_{max} = \frac{u^2_{max}}{2g} \Rightarrow 68 = \frac{u^2_{max}}{2\times10} \Rightarrow u^2_{max} = 1360\ ms^{-1}$

$R_{max} = \frac{u^2_{max}}{g} = \frac{1360}{10} = 136\ m$

14. বায়ুশূন্য স্থানে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণার গতিপথ কেমন হবে? **[CU'14-15] [Ans: c]**

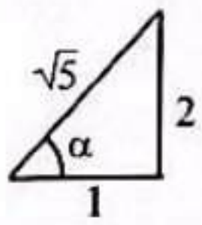
(a) রৈখিক (b) বৃত্তাকার (c) পরাবৃত্তাকার (d) অধিবৃত্তাকার

15. একটি কণা v বেগে নিক্ষিপ্ত হলে যদি তার আনুভূমিক পাল্লা বৃহত্তম উচ্চতার দ্বিগুণ হয়, তবে তার আনুভূমিক পাল্লা- **[KU'14-15, 09-10]**

(a) $\frac{8v^2}{5g}$ (b) $\frac{v^2}{5g}$ (c) $\frac{2v^2}{5g}$ (d) $\frac{4v^2}{5g}$ **[Ans: d]**

সমাধান: $R = 2H \Rightarrow 2 \times \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g} \Rightarrow \frac{v^2\sin^2\alpha}{g} = \frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$

$\Rightarrow \sin\alpha = 2\cos\alpha$



$\therefore \tan\alpha = 2 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ও $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \therefore R = \frac{v^2\times2\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}}{g} = \frac{4v^2}{5g}$

Shortcut: $\tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{4H}{2H} = 2 \therefore \tan\alpha = 2\ ;\ \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \therefore R = \frac{v^2\sin(2\alpha)}{g} = \frac{v^2\times\frac{2\times2}{1+4}}{g} = \frac{4v^2}{5g}$

16. প্রদত্ত R পাল্লার ক্ষেত্রে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর দুইটি গমন পথে সর্বাধিক উচ্চতা h ও h′ হলে, নিচের কোনটি সঠিক? **[KU'14-15] [Ans: a]**

(a) $R = 4\sqrt{hh'}$ (b) $R = \sqrt{hh'}$ (c) $R^2 = 4\sqrt{hh'}$ (d) $R = 4hh'$

সমাধান: ধরি, বস্তুটির বেগ v ও তাদের α ও α' কোণে প্রক্ষিপ্ত করা হয়।

$\therefore h = \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}\ \therefore h' = \frac{v^2\sin^2(90°-\alpha)}{2g} = \frac{v^2\cos^2\alpha}{2g}$

$\therefore\ R = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g} = 4\times\sqrt{\frac{v^4\sin^2 2\alpha}{16g^2}} = 4\times\sqrt{\frac{(v^2)^2.(2\sin\alpha.\cos\alpha)^2}{16g^2}} = 4\times\sqrt{\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}\frac{v^2\cos^2\alpha}{2g}} = 4\sqrt{hh'}$

17. u বেগে আনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত কণার বিচরণকাল কোনটি হবে? **[RU'13-14] [Ans: a]**

(a) $\frac{2u\sin\alpha}{g}$ (b) $2u\sin\alpha$ (c) $\frac{u}{g}$ (d) $\frac{\sin\alpha}{g}$

18. ভূমির সাথে 30° কোণে 196.2 ms^{-1} বেগে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তুর সর্বাধিক উচ্চতা কত হবে? **[RU'13-14] [Ans: a]**

(a) 491 মি. (b) 490.5 মি. (c) 494.5 মি. (d) 395 মি.

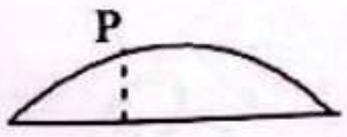
সমাধান: $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{196.2\times196.2\times\frac{1}{4}}{2\times9.8} = 491$ মি.

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Written

01. t সেকেন্ডে একটি প্রক্ষেপক তার বিচরণপথের P বিন্দুতে পৌঁছে। আরো t′ সেকেন্ড সময় শেষে ঐ প্রক্ষেপকটি P বিন্দু থেকে প্রক্ষেপণ বিন্দুর সমতলে ফিরে আসে। দেখাও যে, ঐ তল থেকে P বিন্দুর উচ্চতা $\frac{1}{2}gtt'$। **[RU'19-20]**

সমাধান:



এখানে, $(t+t') = \frac{2u}{g} \Rightarrow \frac{g(t+t')}{2} = u$ ..... (i)

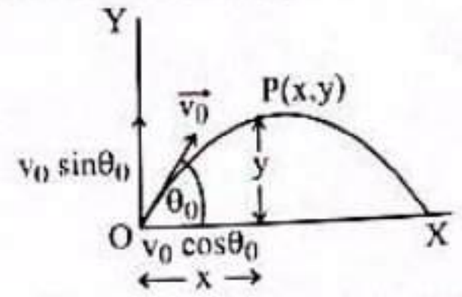
$h = ut - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{g}{2}(t+t')t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}gtt' - \frac{1}{2}gt^2 \therefore h = \frac{1}{2}gtt'$ (দেখানো হলো)

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner

[JnU'18-19]

02. প্রমাণ কর যে, উল্লম্ব তলে প্রক্ষিপ্ত কণার গতিপথ একটি পরাবৃত্ত (parabola)।

সমাধান: কোনো বিন্দুর চলরেখার সমীকরণ হচ্ছে যে কোনো মুহূর্তে তার স্থানাঙ্কগুলির সম্পর্ক নির্দেশক সমীকরণ।



ধরা যাক, প্রসঙ্গ কাঠামোর মূলবিন্দু O থেকে আনুভূমিক x অক্ষের সাথে θ_0 কোণে XY তলে $\vec{v}_0$ বেগে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলো।

সুতরাং, x ও y অক্ষ বরাবর এর আদি বেগের উপাংশগুলি যথাক্রমে, $v_{x_0} = v_0\cos\theta_0$ এবং $v_{y_0} = v_0\sin\theta_0$।

বস্তুটি মূলবিন্দু থেকে নিক্ষেপ করায় $x_0 = 0$ এবং $y_0 = 0$। বস্তুটির উপর শুধুমাত্র অভিকর্ষজ ত্বরণ g খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে।

সুতরাং $a_x = 0$ এবং $a_y = -g$। t সময় পরে বস্তুটির স্থানাঙ্ক P(x,y) হলে, $x = (v_0\cos\theta_0)t$ ..... (i)

$y = (v_0\sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$ ..... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ দুটি হতে t অপসারণ করে পাই, $y = (v_0\sin\theta_0) \times \frac{x}{v_0\cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta_0}\right)^2$

$y = (\tan\theta_0)x - \frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}x^2$ ..... (iii)

v_0, θ_0 এবং g ধ্রুবক বলে (iii) নং সমীকরণটি $y = ax - bx^2$ আকারের একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

অতএব, প্রাসের গতিপথ হচ্ছে একটি পরাবৃত্ত। (প্রমাণিত)

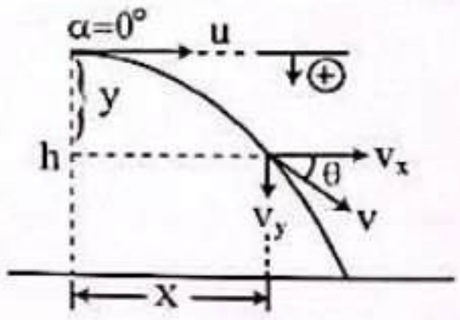
Type-15: ভূমি থেকে h উচ্চতা হতে ভূমির সমান্তরাল দিকে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের গতি সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

নিচের দিককে ধনাত্মক (+ve) বিবেচনা করলে,

$u_x = u,\ u_y = 0$

$a_x = 0,\ a_y = +g$



$v_x = u_x = u; v_y = u_y + gt = gt$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x}$$

$x = u_x t = ut\ ;\ y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$

MCQ

01. একটি স্তম্ভের চূড়া হতে $5\ ms^{-1}$ বেগে আনুভূমিক দিকে নিক্ষিপ্ত একটি বল স্তম্ভের পাদদেশ হতে 20 মিটার দূরে মাটিতে পড়ে। স্তম্ভের উচ্চতা কত? [JU'14-15] [Ans: a]

(a) 78.4 m (b) 78.0 m (c) 68.4 m (d) 80.4 m

সমাধান: $5\cos(0)\,t = 20 \Rightarrow t = \frac{20}{5} = 4s;\ h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = 4.9\times4^2 = 78.4$ m

বিকল্প: $-y = (\tan\theta_0)x - \frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}x^2 \Rightarrow -y = -\frac{9.8}{2\times5^2\times1^2}\times(20)^2$ $[\because \tan 0° = 0]$

$\therefore y = \frac{4.9\times20\times20}{25} = \frac{49\times40}{25} = 78.4$ m

> জীবনে কী ঘটে সেটা গুরুত্বপূর্ণ নয়। বরং তুমি সেখান থেকে কী শিখেছ এবং কীভাবে মনে রেখেছো সেটাই মুখ্য।
>
> -Gabriel Garcia Marquez

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with OKEN Scanner
CamScanner