উচ্চতর গণিত

১ম পত্র

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

অধ্যায় ০১

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

➤ ভার্সিটি ভর্তি পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪	T-01	ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ সংক্রান্ত	11	-	DU'17-18; RU'23-24, 21-22, 20-21, 19-20, 17-18; CU'22-23; JU'23-24, 22-23, 18-19; KU'18-19	-
✪	T-02	ম্যাট্রিক্সের ট্রেস সংক্রান্ত	2	-	JU'20-21, 19-20	-
✪✪	T-03	ম্যাট্রিক্সের সমতা সংক্রান্ত	2	-	RU'23-24; CU'16-17	-
✪✪✪	T-04	ম্যাট্রিক্সের যোগ, বিয়োগ ও গুণ সংক্রান্ত	28	1	DU'20-21, 12-13, 04-05; GST'22-23, 21-22; RU'23-24, 22-23, 17-18, 14-15, 08-09; CU'23-24, 21-22,18-19, 13-14; JU'22-23, 21-22, 17-18, 14-15; KU'19-20, 13-14; BAU'18-19	RU'19-20
✪	T-05	ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি নির্ণয় সংক্রান্ত	-	1	-	DU'21-22
✪✪	T-06	নির্ণায়কের অনুরাশি ও সহগুণক সংক্রান্ত সমস্যা	4	-	GST'23-24; RU'23-24; JU'23-24	-
✪✪✪	T-07	ব্যতিক্রমী, অব্যতিক্রমী এবং ইনভার্স/ বিপরীত ম্যাট্রিক্স	20	-	DU'23-24, 21-22, 13-14, 10-11; RU'23-24, 22-23, 20-21, 18-19, 17-18; CU'20-21, 16-17; JU'23-24, 21-22, 19-20, 17-18, 14-15; JnU'17-18, 12-13	-
✪✪	T-08	অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান সংক্রান্ত	2	-	DU'19-20; JU'23-24	-
✪✪✪	T-09	নির্ণায়কের মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা	12	-	DU'17-18, 14-15; GST'20-21; RU'22-23, 18-19; CU'23-24; JU'23-24, 21-22, 19-20, 18-19	-
✪✪	T-10	বহুচলকবিশিষ্ট সমীকরণজোটের সমাধান	4	-	GST'23-24; RU'21-22; CU'16-17; JU'18-19	-

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-01: ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ সংক্রান্ত

Formula & Concept:

এখানে বিভিন্ন প্রকার ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা ও বৈশিষ্ট্যগুলো ব্যবহার করতে হবে।

MCQ

01. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে Adj A হবে- **[RU'23-24] [Ans: b]**

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

সমাধান: $A\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হলে, $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \therefore \text{Adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

02. A ও B দুইটি 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে $|A - B| = 0$ এর সমার্থক কোনটি? **[JU'23-24] [Ans: d]**

(a) $A = 0$ বা $B = 0$ (b) $|A| = 0$ বা $|B| = 0$ (c) $|A| = 0$ এবং $|B| = 0$ (d) $A = 0$ এবং $B = 0$

সমাধান:A ও B ম্যাট্রিক্স দুটির উপর নির্ভর করে যেকোনো Option-ই Correct হতে পারে। কিন্তু সাধারণ দুটি ম্যাট্রিক্স এর বিয়োগফল এর নির্ণায়ক শূন্য হতে হলে দুটি ম্যাট্রিক্সের একই অবস্থানের ভুক্তিগুলো সমান অথবা প্রতিটি ভুক্তি শূন্য হতে হবে। তাই সঠিক উত্তর $A = 0$ এবং $B = 0$

03. নিচের কোনটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স? **[JU'22-23, RU'17-18] [Ans: b]**

(a) $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} b & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & b \end{bmatrix}$

সমাধান: M প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে, $M = M^T$

$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \therefore A^T = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \neq A$; $B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \therefore B^T = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} = B$

$C = \begin{bmatrix} b & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix} \therefore C^T = \begin{bmatrix} b & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq C$; $D = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & b \end{bmatrix} \therefore D^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & b \end{bmatrix} \neq D$

04. Idempotent ম্যাট্রিক্সের শর্ত হল – **[CU'22-23] [Ans: d]**

(a) $A^2 = 1$ (b) $A \times 1 = 1$ (c) $A^2 = B$ (d) $A^2 = A$

সমাধান: Idempotent বা সমঘাতি Matrix এ, $A^2 = A$ হবে

05. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ কোন ধরনের ম্যাট্রিক্স? **[RU'21-22] [Ans: a]**

(a) শূন্যঘাতি (b) প্রতিসম (c) অভেদঘাতি (d) সমঘাতি

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ A একটি শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স।

06. নিচের কোনটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স? **[RU'20-21] [Ans: c]**

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

সমাধান: বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে $A = -A^T$ হবে। অর্থাৎ $[a_{ij}] = -[a_{ji}]$ এবং মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলো শূন্য হবে। উপরোক্ত শর্তগুলো মেনে অপশন (c) হবে সঠিক উত্তর।

07. নিচের কোনটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স? **[RU'20-21] [Ans: b]**

(a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

সমাধান: A একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স হলে, $A^2 = A$, শুধুমাত্র (b) এর জন্য

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 & 2-1 \\ -4+2 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with CamScanner

[RU'19-20] [Ans: c]

08. A ও B দুইটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে AB − BA একটি-

(a) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (b) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (c) বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (d) শূন্য ম্যাট্রিক্স

সমাধান: ধরি, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ $\therefore AB = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+bq & aq+br \\ bp+cq & bq+cr \end{bmatrix}$

$\therefore BA = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+qb & bp+cq \\ aq+br & bq+cr \end{bmatrix}$

$\therefore AB - BA = \begin{bmatrix} 0 & aq+br-bp-cq \\ bp+cq-aq-br & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore$ AB − BA একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

[JU'18-19] [Ans: a]

09. যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের অশূন্য ভুক্তিগুলি সমান হয়, তাকে_____বলে।

(a) স্কেলার ম্যাট্রিক্স (b) আয়তাকার ম্যাট্রিক্স (c) অভেদক ম্যাট্রিক্স (d) শূন্য ম্যাট্রিক্স

[KU'18-19] [Ans: d]

10. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ একটি-

(i) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (ii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স (iii) অভেদক ম্যাট্রিক্স

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সত্য?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

[DU'17-18] [Ans: b]

11. $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 5 \\ -2 & b & -3 \\ -5 & 3 & c \end{bmatrix}$ একটি বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হল a, b, c এর মানগুলো-

(a) −2, −5, 3 (b) 0, 0, 0 (c) 1, 1, 1 (d) 2, 5, 3

সমাধান: বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের জন্য, $A^T = -A$ $\therefore a = b = c = 0$ হবে।

Type-02: ম্যাট্রিক্সের ট্রেস সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

ম্যাট্রিক্সের ট্রেস (Trace of a matrix): কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলোর যোগফলকে ট্রেস বলে। যেমন,

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ (3×3, মুখ্য কর্ণ)

A একটি ম্যাট্রিক্স হলে, A ম্যাট্রিক্সের ট্রেস; Trace (A) = a + e + i

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স এর ট্রেস (Trace) কোনটি?

[JU'20-21] [Ans: a]

(a) $\frac{9}{8}$ (b) $\frac{8}{9}$ (c) 8 (d) 9

সমাধান: বিপরীত ম্যাট্রিক্স $= \frac{1}{20-12}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$ $\therefore$ ট্রেস $= \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$

02. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & a \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ট্রেস (Trace) এর মান 8 হলে, a এর মান কোনটি?

[JU'19-20] [Ans: b]

(a) 5 (b) 3 (c) 2 (d) 4

সমাধান: $1 + 4 + a = 8$ $\therefore a = 3$

CamScanner

Type-03: ম্যাট্রিক্সের সমতা সংক্রান্ত

১ **Formula & Concept:**

দুইটি ম্যাট্রিক্স তখনই সমান হবে যখন তাদের ক্রম সমান হবে এবং অনুরূপ ভুক্তিগুলো সমান হবে। উল্টোভাবে বলা যায়, দুইটি একই ক্রমের ম্যাট্রিক্স সমান হলে তাদের অনুরূপ ভুক্তিগুলো পরস্পর সমান হবে।

MCQ

01. $\begin{bmatrix} 8 & x \\ y-2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2+y \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ হলে (x, y) কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: d]**

(a) $(8,2)$ (b) $(6,2)$ (c) $(6,8)$ (d) $(8,6)$

সমাধান: $\begin{bmatrix} 8 & x \\ y-2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2+y \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \therefore y-2=4 \Rightarrow y=6$

$\therefore x = 2+y \Rightarrow x = 2+6 \Rightarrow x = 8 \therefore (x,y) = (8,6)$

02. $\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ হলে, x ও y এর মান কত? **[CU'16-17]**

(a) $x = y = 0$ (b) $x \neq 0, \frac{1}{5}(1+2i)$ (c) $x \neq 0, \frac{1}{5}(1-2i)$ (d) $x = 0, y = \frac{(1+i\cdot 2)(1+2i)}{5}$

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+2i)x \\ (1-2i)y \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} (1+2i)x \\ (1-2i)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \therefore (1+2i)x = 0, x = 0$

আবার, $(1-2i)y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{1-2i} = \frac{(1+2i)}{1-(2i)^2} \therefore y = \frac{1+2i}{5}$

Type-04: ম্যাট্রিক্সের যোগ, বিয়োগ ও গুণ সংক্রান্ত

২ **Formula & Concept:**

- দুইটি ম্যাট্রিক্স যোগ-বিয়োগ করা যাবে যদি ম্যাট্রিক্স দুটির ক্রম (order) সমান থাকে। দুটি ম্যাট্রিক্সের একই স্থানের ভুক্তিগুলো যোগ বা বিয়োগ করে ম্যাট্রিক্সের যোগফল বা বিয়োগফল নির্ণয় করা হয়।
- একটি ম্যাট্রিক্সের সাথে কোনো সংখ্যা গুণ করা হলে, ম্যাট্রিক্সের সবগুলো ভুক্তির সাথে সংখ্যাটি গুণ হয়ে যাবে।

$$k\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}$$

- দুটি ম্যাট্রিক্স গুণ করা যাবে যদি প্রথমটির কলাম সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারি সংখ্যার সমান হয়। A এর ক্রম $m \times n$ এবং B এর ক্রম $n \times p$ হলে, AB নির্ণয়যোগ্য কিন্তু BA নির্ণয়যোগ্য নয়। AB গুণফল ম্যাট্রিক্সটির ক্রম হবে $= m \times p$

$A \times B = C$

A এর Column সংখ্যা = B এর Row সংখ্যা (গুণের শর্ত)

$m \times \boxed{n \quad n} \times p$

$m \times p$ (C এর ক্রম)

- A এবং I এর গুণফল নির্ণয়যোগ্য হলে, $AI = IA = A$.
- অভেদক ম্যাট্রিক্স I এর ক্ষেত্রে, $I^n = I$
- $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ হলে, $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$ হলে, $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$ যখন, n ধনাত্মক জোড় পূর্ণসংখ্যা এবং $A^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^n \\ 0 & a^n & 0 \\ a^n & 0 & 0 \end{bmatrix}$ যখন, n ধনাত্মক বিজোড় পূর্ণসংখ্যা।

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with CamScanner

MCQ

01. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x - 3$ হলে $f(A) =$ কোনটি? [RU'23-24] [Ans: a]

(a) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$f(x) = x - 3 \therefore f(A) = A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

02. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ হলে, $A^3 - 7I_3 = ?$ [CU'23-24] [Ans: a]

(a) I_3 (b) $2I_3$ (c) A (d) $2A$

সমাধান: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore A^3 - 7I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^3 - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ [কারণ A এক প্রকার কর্ণ Matrix]

$= \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$

03. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ হয়, তবে $A^2 + 3A - 10I$ হবে একটি [CU'23-24] [Ans: c]

(a) অভেদক ম্যাট্রিক্স (b) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (c) শূন্য ম্যাট্রিক্স (d) কোনোটিই নয়

সমাধান: $A^2 + 3A - 10I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ যা একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

বিকল্প: $A^2 + 3A - 10I = A^2 + 5A - 2A - 10I = A(A + 5I) - 2I(A + 5I) = (A + 5I)(A - 2I)$

$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+6 & 12-12 \\ -3+3 & 6-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

যা একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

Shortcut: 2×2 ম্যাট্রিক্স এর Characteristic equation হতে পাই, $f(A) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$

তখন, $f(A) = 0 \Rightarrow A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = [0]_{2\times 2}$

$\Rightarrow A^2 - (1-4)A + (-4-6)I_2 = [0]_{2\times 2} \Rightarrow A^2 + 3A - 10I = [0]_{2\times 2}$ যা একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

04. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $A - 2I$ এর মান কোনটি? [JU'22-23] [Ans: b]

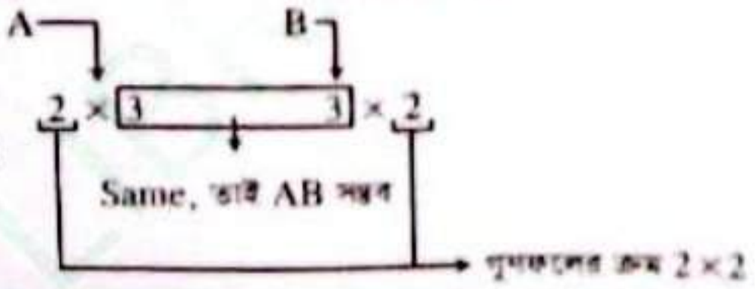
(a) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

সমাধান: $A - 2I = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

05. A ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×3 এবং B ম্যাট্রিক্সের ক্রম 3×2 হলে, AB এর ক্রম কোনটি? [JU'22-23] [Ans: a]

(a) 2×2 (b) 2×3 (c) 3×2 (d) 3×3

সমাধান:



POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

06. $P+Q=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ এবং $P-Q=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$ হলে, P = কত? **[RU'22-23] [Ans: b]**

(a) $\begin{bmatrix}-4 & 2\\ -6 & 4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}5 & -6\\ 5 & -8\end{bmatrix}$

সমাধান: $P+Q+P-Q=2P=\begin{bmatrix}1+5 & 2+6\\ 3+7 & 4+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{bmatrix}\therefore P=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$

07. A এবং $(A^T+B)C$ ম্যাট্রিক্স দুইটির ক্রম যথাক্রমে 4×5 এবং 5×2 হলে C ম্যাট্রিক্স এর ক্রম কী হবে? **[GST'22-23] [Ans: a]**

(a) 4×2 (b) 4×3 (c) 4×4 (d) 4×5

সমাধান: এখানে A এর ক্রম $4\times5\ \therefore A^T$ এর ক্রম $5\times4\ \because A^T$ ও B কে যোগ করা হয়েছে $\therefore$ B এর ক্রম 5×4 [যোগের শর্ত]
আবার $(A^T+B)C$ এর ক্রম $5\times2\ \because (A^T+B)$ এর ক্রম $5\times4\ \therefore$ C এর ক্রম অবশ্যই 4×2 হতে হবে।

08. 3×2 এবং 2×3 ক্রম বিশিষ্ট দুটি ম্যাট্রিক্স যথাক্রমে A এবং B এর ভুক্তি 0 বা 1 হলে Tr(BA) এর সর্বোচ্চ মান হবে- **[GST'21-22]**

(a) 0 (b) 1 (c) 6 (d) 9 **[Ans: c]**

সমাধান: A ও B যথাক্রমে 3×2 ও 2×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স বলে, BA একটি 2×2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স হবে। আবার, AB এর ভুক্তিগুলো 0 হলে, $BA=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$; এক্ষেত্রে, Trace সর্বনিম্ন হবে। A, B এর সকল ভুক্তিগুলো 1 হলে, $BA=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}$; এক্ষেত্রে Trace সর্বোচ্চ হবে। $\therefore$ Trace এর সর্বোচ্চ মান $=3+3=6$

09. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ এবং $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ হলে A + B =? **[JU'21-22] [Ans: d]**

(a) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 6 & 8 & 6\\ 11 & 13 & 9\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 7 & 9\\ 7 & 12 & 14\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 6 & 8\\ 7 & 8\end{pmatrix}$ (d) অসম্ভব

সমাধান: A এর মাত্রা 3×3; B এর মাত্রা 3×2 তাই A + B অসম্ভব। যোগের ক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্সের ক্রম সমান হতে হবে।

10. $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$ এবং $B=(4\quad 5\quad 6)$ হলে AB = ? **[JU'21-22] [Ans: c]**

(a) $(4\quad 10\quad 18)$ (b) $\begin{pmatrix}4\\ 10\\ 18\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 8 & 10 & 12\\ 12 & 15 & 18\end{pmatrix}$ (d) অসম্ভব

সমাধান: $AB=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}(4\quad 5\quad 6)=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 8 & 10 & 12\\ 12 & 15 & 18\end{pmatrix}$

বিকল্প: $A_{3\times1}\times B_{1\times3}\ \therefore$ AB এর ক্রম হবে $3\times3\ \therefore$ Option (c) সঠিক।

11. যদি $X=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$ এবং $Y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ দুটি ম্যাট্রিক্স হয়, তাহলে XY এর মান কত? **[CU'21-22] [Ans: c]**

(a) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$ (c) X (d) Y

সমাধান: $X=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$ এবং $Y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ এখানে Y হলো অভেদক ম্যাট্রিক্স $\therefore XY=XI=X$

12. যদি A, B, C ম্যাট্রিক্স তিনটির আকার যথাক্রমে $4\times5, 5\times4$ এবং 4×2 হয়, তবে $(A^T+B)C$ ম্যাট্রিক্সটির আকার কি?

(a) 4×2 (b) 5×4 (c) 2×5 (d) 5×2 **[DU'20-21] [Ans: d]**

সমাধান: A এর ক্রম $4\times5\ \therefore A^T$ এর ক্রম 5×4, B এর ক্রম 5×4, (A^T+B) এর ক্রম 5×4, C এর ক্রম 4×2
$\therefore (A^T+B)C$ এর ক্রম $=5\times2$

13. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$ এবং $A^2+2A-11x=0$ হলে x এর মান কত? **[KU'19-20] [Ans: b]**

(a) $\begin{pmatrix}11 & 0\\ 0 & 11\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}13 & 0\\ 0 & 13\end{pmatrix}$

সমাধান: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}\ \therefore 2A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 8 & -6\end{pmatrix}\ \therefore 2A+A^2=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 8 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 0\\ 0 & 11\end{pmatrix}$
$\therefore \begin{pmatrix}11 & 0\\ 0 & 11\end{pmatrix}-11x=0\Rightarrow 11x=11\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\therefore x=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

14. BA এর মান নির্ণয় কর, যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$ ও $i = \sqrt{-1}$ হয়। **[CU'18-19; RU'17-18; DU'12-13]**

(a) $\begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2i & -2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix}$ **[Ans: d]**

সমাধান: $BA = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i+i & i^2-1 \\ -1+i^2 & -i-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & -2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix}$

15. ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ হলে, A^2 এর মান কত? **[CU'18-19; RU'17-18] [Ans: d]**

(a) $-A$ (b) 0 (c) $2A$ (d) A

সমাধান: $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$

16. $[1 \quad 3]\begin{bmatrix} y & x \\ 5 & x \end{bmatrix} = [12 \quad 4]$ হলে (x, y) এর মান কত? **[BAU'18-19] [Ans: d]**

(a) $(-3,-1)$ (b) $(-3,1)$ (c) $(1,1)$ (d) $(1,-3)$

সমাধান: $[1 \quad 3]\begin{bmatrix} y & x \\ 5 & x \end{bmatrix} = [12 \quad 4] \Rightarrow [y+15 \quad 4x] = [12 \quad 4]$

অর্থাৎ, $y + 15 = 12 \Rightarrow y = -3$ এবং $4x = 4 \Rightarrow x = 1$

17. $A\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times B\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = C[C_{ij}]$ হলে C_{32} এর মান কত? **[JU'17-18] [Ans: c]**

(a) 7 (b) 3 (c) 5 (d) 4

সমাধান: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \therefore C_{32} = 5$

18. যদি A, B ও C ম্যাট্রিক্সগুলো যোগ ও গুণনের জন্য যোগ্য হয়; তবে নিচের কোনটি সঠিক? **[RU'14-15] [Ans: d]**

(a) $A(B + C) = AB + AC$ (b) $(A + B)C = AC + BC$

(c) $A(BC) = (AB)C$ (d) সবগুলোই সঠিক

19. A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে, AI =? **[RU'14-15] [Ans: b]**

(a) I (b) A (c) A^{-1} (d) কোনটিই নয়

20. যদি $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ হয়, তবে A^2 মান- **[JU'14-15; RU'08-09; DU'04-05] [Ans: d]**

(a) $\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$

সমাধান: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \therefore A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-9 & -6-6 \\ 6+6 & -9+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$

21. $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ হলে $S\alpha^2$ হবে - **[CU'13-14] [Ans: c]**

(a) $S^2\alpha$ (b) $\alpha^3 S$ (c) $-S$ (d) α (e) S

সমাধান: $\alpha^2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; S\alpha^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -S$

22. $P = [2 \quad 1]$ এবং $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ হলে PQ এর মান কত? **[KU'13-14] [Ans: b]**

(a) $[6 \quad -1 \quad 3]$ (b) $[6 \quad 1 \quad -3]$ (c) $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

সমাধান: $[2+4 \quad -4+5 \quad 0-3] = [6 \quad 1 \quad -3]$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Written

01. যদি $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ হয়, তাহলে α এর মান কত হলে $A + A^T = I$ হবে? **[RU'19-20]**

সমাধান: $A + A^T = I \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 2\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \therefore 2\cos\alpha = 1 \therefore \cos\alpha = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \therefore \alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3};\ [n \in \mathbb{Z}]$ **(Ans.)**

Type-05: ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

যদি অজানা ম্যাট্রিক্সের মাত্রা দেয়া না থাকে তাহলে প্রথমে মাত্রা বের করে নিতে হবে। এরপর x, y, z ইত্যাদি বসিয়ে ঐ মাত্রার অজানা ম্যাট্রিক্স গঠন করতে হবে। এরপর প্রশ্নে উল্লিখিত শর্ত অনুসারে সমাধান করে x, y, z ইত্যাদির মান বের করে ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় করতে হবে। অথবা বর্গ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে বিপরীত ম্যাট্রিক্স এর Concept ব্যবহার করা যেতে পারে।

Written

01. $A = [1 \quad 2 \quad 3], BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে B ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। **[DU'21-22]**

সমাধান: $A = [1 \quad 2 \quad 3]_{1\times3}$

$BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$ $\therefore$ B একটি 3×1 ক্রমের ম্যাট্রিক্স হবে।

ধরি, $B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times1}$ $\therefore BA = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}[1 \quad 2 \quad 3] = \begin{bmatrix} x & 2x & 3x \\ y & 2y & 3y \\ z & 2z & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \therefore x = 2, y = 3, z = 1 \therefore B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

Type-06: নির্ণায়কের অনুরাশি ও সহগুণক সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

- একটি নির্ণায়কে কোনো ভুক্তি যে সারি ও কলামে অবস্থিত, সেই সারি ও কলামকে বাদ দিয়ে যে নির্ণায়কটি পাওয়া যায়, তাকে ঐ ভুক্তির অনুরাশি (Minor) বলে।
- কোনো ভুক্তির সহগুণক = $(-1)^{r+c} \times$ অনুরাশি
- $a_{11}, b_{12}, c_{13}, a_{21}$ ..... এর সহগুণককে সাধারণত $A_{11}, B_{12}, C_{13}, A_{21}$ ..... দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

MCQ

01. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 0 & 3 & x \\ 1 & 3 & 1-x \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক 9 হলে x -এর মান কত? **[GST'23-24] [Ans: a]**

(a) 2 (b) 1.5 (c) 0.5 (d) 0

সমাধান: (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক $= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & x \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = 9$

$\Rightarrow -[3 - 3x - 3x] = 9 \Rightarrow 3 - 6x = -9 \Rightarrow 6x = 12 \therefore x = 2$

02. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির ২য় সারির উপাদানগুলার সহগুণক যথাক্রমে A_2, B_2 এবং C_2 হলে, $a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 = ?$

(a) -1 (b) 1 (c) 0 (d) 2 **[RU'23-24] [Ans: c]**

সমাধান: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; A_2 = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; B_2 = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}; C_2 = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$A_2 = -(b_1c_3 - c_1b_3); B_2 = a_1c_3 - c_1a_3;\ C_2 = -(a_1b_3 - b_1a_3)$

$\therefore a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 = -a_3b_1c_3 + a_3c_1b_3 + a_1b_3c_3 - a_3b_3c_1 - a_1b_3c_3 + a_3b_1c_3 = 0$

POLE MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

03. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ এর (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক কোনটি? [JU'23-24] [Ans: c]

(a) -2 (b) -2 (c) 2 (d) 4

সমাধান: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ এর (1,2) তম ভুক্তির সহগুণক $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$

Type-07: ব্যতিক্রমী, অব্যতিক্রমী এবং ইনভার্স/ বিপরীত ম্যাট্রিক্স সংক্রান্ত

Formula & Concept:

কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান non-Zero [$|A| \neq 0$; Non-singular (অব্যতিক্রমী) Matrix] হলেই বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করা যাবে। $A \cdot \text{Adj}(A) = |A|I \Rightarrow A \cdot \text{Adj}(A) = |A|\, A \cdot A^{-1} \therefore A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|}$

❖ **Note:** যে ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান 0 তাকে ব্যতিক্রমী (singular) এবং অশূন্য তাকে অব্যতিক্রমী (Non-singular) ম্যাট্রিক্স বলে।

➢ 2×2 ম্যাট্রিক্সের Adjoint নির্ণয়ের জন্য একটি সহজ কৌশল মনে রাখবে- মুখ্য কর্ণ বরাবর ভুক্তি exchange এবং গৌণ কর্ণ বরাবর চিহ্ন Change, এরপর এই Adjoint matrix কে নির্ণায়কের মান দ্বারা ভাগ করবে।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; Adj A ম্যাট্রিক্স হলো $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; একে A ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়কের মান (ad – bc) দ্বারা ভাগ করতে হবে বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করার জন্য।

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

MCQ

01. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & P \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে P এর মান কত? [DU'23-24] [Ans: a]

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) $\frac{3}{5}$

সমাধান: ধরি, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & P \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

$\therefore |A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & P \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow C_2$ বরাবর বিস্তৃতি করে পাই, $-3(2P-3) + 0 - (-1)(3-4) = 0$

$\Rightarrow -6P + 9 - 1 = 0 \Rightarrow 6P = 8 \therefore P = \frac{4}{3}$

[নোট: এখানে যে কোনো সারি বা কলাম বরাবর বিস্তৃতি করলে একই মান পাওয়া যাবে]

02. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $AB = I$, যেখানে I একক ম্যাট্রিক্স হলে, B ম্যাট্রিক্স কোনটি? [RU'23-24] [Ans: b]

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = I \therefore B = A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}}{-2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

03. $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ হলে $A^{-1} =$ কত? [JU'23-24] [Ans: c]

(a) $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \therefore A^{-1} = \frac{1}{32-30}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$\because A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হলে, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

04. $\begin{bmatrix} m-2 & 6 \\ 2 & m-3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান না থাকলে m = কত? |RU'22-23| |Ans: c|

(a) $-1, 6$ (b) $1, -6$ (c) $6, -1$ (d) $-1, -6$

সমাধান: $(m-2)(m-3) - 12 = 0 \Rightarrow m^2 - 5m - 6 = 0 \Rightarrow m = 6, -1$

05. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স কোনটি? |RU'22-23| |Ans: a|

(a) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \therefore |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3 \therefore A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

06. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ হলে $\det(AA^{-1})$ -এর মান কত? |DU'21-22| |Ans: a|

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $-\frac{1}{2}$

সমাধান: $AA^{-1} = I \therefore \det(AA^{-1}) = \det(I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1^2 - 0 = 1$

07. k এর কোন মানের জন্য $\begin{pmatrix} k-1 & -2 \\ -2 & k-2 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতকরণযোগ্য নয়? |JU'21-22| |Ans: b|

(a) 2 (b) $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ (c) 1 (d) $\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}$

সমাধান: $|A| = 0 \Rightarrow (k-1)(k-2) - 4 = 0 \Rightarrow k^2 - 3k - 2 = 0 \therefore k = \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

08. k এর কোন মানের জন্য $\begin{pmatrix} k-2 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি অব্যতিক্রমী নয়? |JU'21-22| |Ans: a|

(a) $\frac{10}{3}$ (b) 30 (c) 3 (d) $\frac{9}{4}$

সমাধান: $\begin{pmatrix} k-2 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 9(k-2) - 12 = 0 \Rightarrow 9k = 30 \Rightarrow k = \frac{30}{9}; \therefore k = \frac{10}{3}$

09. যদি $A = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ x & x \end{bmatrix}$ এবং $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ হয়, তাহলে x এর মান কত? |RU'20-21| |Ans: d|

(a) 2 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: $A^{-1} = \frac{1}{2x^2-0}\begin{bmatrix} x & 0 \\ -x & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \therefore x = \frac{1}{2}$

10. নিচের কোনটি ব্যতিক্রমী (singular) ম্যাট্রিক্স? |CU'20-21| |Ans: d|

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

সমাধান: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স কারণ, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - (3 \times 4) = 12 - 12 = 0$

11. ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স এর ক্ষেত্রে $\beta = 3, -5$ হলে, তা নিচের কোন ম্যাট্রিক্স এর জন্য সত্য? |JU'19-20| |Ans: d|

(a) $\begin{bmatrix} \beta+2 & -3 \\ 5 & \beta \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \beta+2 & 4 \\ 5 & \beta \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \beta-2 & 3 \\ 5 & \beta \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \beta+2 & 3 \\ 5 & \beta \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} a+3 & 6 \\ 4 & a-2 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স এবং $f(x) = (x+1)^2$ ও $a > 0$ হলে, f(a) এর মান কত? |RU'18-19| |Ans: b|

(a) 25 (b) 36 (c) 16 (d) 9

সমাধান: $(a+3)(a-2) = 4 \times 6 \Rightarrow a^2 + a - 30 = 0 \Rightarrow a = 5, -6 \therefore f(a) = f(5) = (5+1)^2 = 36;$ [$\because a > 0$]

13. কোনটি বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য নয়? |RU'17-18| |Ans: b|

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$ (b) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ (c) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (d) $(BA)A^{-1} = B$

14. ম্যাট্রিক্স $M = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স কোনটি? |JU'17-18| |Ans: b|

(a) $\begin{bmatrix} \frac{4}{14} & \frac{-2}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{-2}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{-3}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{-4}{14} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{-1}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}$

সমাধান: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স হচ্ছে; $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\therefore M = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $= \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{-2}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}$; [$\because |M| = 12 + 2 = 14$]

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

15. যদি $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ হয় তবে A. (AdjA) =? যেখানে Adj(A) হলো A এর সহগুণক ম্যাট্রিক্স। **[JnU'17-18] [Ans: b]**

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

সমাধান: $A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} \Rightarrow AA^{-1}|A| = A \cdot Adj(A) \therefore A.Adj(A) = I|A| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times (9 \times 3 - 4 \times 6) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

16. p এর কোন মানের জন্য $M = \begin{bmatrix} p & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ এর M^{-1} থাকবে না? **[CU'16-17] [Ans: d]**

(a) 0 (b) -1 (c) 2 (d) 1

সমাধান: M^{-1} থাকবে না যদি $|M| = 0 \Rightarrow p(45-48) - 2(36-42) + 3(32-35) = 0 \Rightarrow 3p = 3 \Rightarrow p = 1$

$|M| = 0$ হবে যদি $p = 1$

17. যদি $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ হয় তবে A^{-1} সমান - **[JU'14-15; DU'10-11] [Ans: d]**

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

সমাধান: $A^{-1} = \frac{1}{(-2)\left(\frac{-1}{2}\right)-\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স- **[DU'13-14] [Ans: c]**

(a) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

সমাধান: $A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} \times \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

19. কোন ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নেই? **[JnU'12-13] [Ans: b]**

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

সমাধান: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ এর মান $= 2 \times 2 - 4 \times 1 = 0$; তাই এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নেই।

POLL MACHINE

Type-08: অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান সংক্রান্ত

Preparation and Practice are vital for effective delivery

➲ **Formula & Concept:**

যদি A একটি $n \times n$ ক্রমের বর্গ matrix হয় যেখানে $|A| \neq 0$

তাহলে, (i) $|(pA)| = p^n|A|$ (ii) $|(pA)^{-1}| = \frac{1}{p^n|A|}$ (iii) $|(pA^{-1})| = \frac{p^n}{|A|}$ (iv) $|(pA^{-1})^{-1}| = \frac{|A|}{p^n}$ **[Note:** $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$]

[Note: অনেকে চিন্তা করছো যে যদি Matrix $n \times n$ ক্রমের না হয়ে $m \times n$ ক্রমের হয় $(m \neq n)$ তাহলে $|(PA)| =$ কত হবে। উত্তর হলো: যদি ম্যাট্রিক্স $m \times n$ ক্রমের হয় $(m \neq n)$ তাহলে ঐ Matrix এর নির্ণায়কের মান নির্ণয় করা সম্ভব নয় কারণ শুধুমাত্র বর্গ Matrix এরই নির্ণায়ক বের করা সম্ভব।

MCQ

01. A একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স এবং $|A| = -7$ হলে $|(2A)^{-1}|$ এর মান কত? **[JU'23-24] [Ans: b]**

(a) $\frac{-1}{14}$ (b) $\frac{-1}{56}$ (c) $\frac{-8}{7}$ (d) $\frac{-2}{7}$

সমাধান: $|(2A)^{-1}| = \frac{1}{|2A|} = \frac{1}{2^3|A|} = \frac{1}{8\times(-7)} = \frac{-1}{56}$

CamScanner

02. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ হলে $\det(2A^{-1})$ এর মান হলো- **[DU'19-20] [Ans: b]**

(a) $\frac{1}{4}$ (b) -4 (c) 4 (d) $-\frac{1}{4}$

সমাধান: $|A| = -9 + 8 = -1 \therefore A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \therefore |2A^{-1}|$ or, $\det(2A^{-1}) = -36 + 32 = -4$

বিকল্প: $|A| = 3 \times (-3) - (-4) \times 2 = -1$; $\det(2A^{-1}) = |2A^{-1}| = \frac{2^2}{|A|} = \frac{4}{-1} = -4$ **(Ans.)**

Type-09: নির্ণায়কের মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

Formula & Concept:

ধরি, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের বিস্তৃতি যেকোনো একটি কলাম বা সারি বরাবর করতে হবে।

$D = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$ [১ম সারি বরাবর করলে]
$D = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$ [১ম কলাম বরাবর করলে]
} যেখানে, a_i, b_i, c_i এর সহগুণকগুলো হবে A_i, B_i, C_i

এভাবে যেকোনো সারি বা কলাম বরাবর বিস্তৃতি করা যায়।

নির্ণায়ক সম্বলিত অভেদ	উদাহরণ
➢ কোনো নির্ণায়কের সারিগুলো এদের অনুরূপ কলামসমূহে পরিবর্তিত হলে এবং কলামগুলো ইহাদের অনুরূপ সারিসমূহে পরিবর্তিত হলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।	অর্থাৎ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ বা, $\lvert A\rvert = \lvert A^T\rvert$
➢ কোনো নির্ণায়কের একটি সারি অথবা কলামের সবগুলো উপাদান শূন্য হলে নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে।	যেমন: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ এবং $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$
➢ কোনো নির্ণায়কে পাশাপাশি দুইটি সারি অথবা কলাম পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের চিহ্ন বদলে যায়।	যেমন: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; [$r_1$ ও r_2 এর স্থান বিনিময়]
➢ কোনো নির্ণায়কের দুটি সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলো অভিন্ন হলে এর মান শূন্য হবে।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$ কারণ, $r_1 = r_3$ এবং $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ কারণ $c_1 = c_2$.
➢ কোনো নির্ণায়কের যে কোনো সারি অথবা কলামের প্রত্যেক উপাদানকে একই রাশি দ্বারা গুণ করলে নির্ণায়কটির মানও ঐ রাশি দ্বারা গুণ হয়।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
➢ নির্ণায়কের কোনো সারি অথবা কলামের উপাদানগুলো অপর একটি সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলোর সমানুপাতিক হলে নির্ণায়কটির মান শূন্য।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & b_1 \\ a_2 & ka_2 & b_2 \\ a_3 & ka_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$
➢ নির্ণায়কটির কোনো সারি অথবা কলামের প্রতিটি উপাদান দুইটি রাশির সমষ্টি হিসেবে প্রকাশিত হলে, নির্ণায়কটিকে একই ক্রমের দুটি পৃথক নির্ণায়কের যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা হয়।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

POLL MACHINE
Proper Planned Practice are vital for effective delivery

CamScanner

➢ যদি দুইটি নির্ণায়ক এরূপ হয় যে, এদের প্রত্যেকের একটি মাত্র সারি অথবা কলামের উপাদানগুলো ভিন্ন হয়, তবে এই ভিন্ন সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলো একত্রে যোগ করে নির্ণায়ক দুটির সমষ্টি পাওয়া যায়।	ধরি, $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ও $D_2 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এদের শুধু প্রথম কলাম ভিন্ন তাহলে, $D_1 + D_2 = \begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
➢ কোনো নির্ণায়কে কোনো সারি অথবা কলামের উপাদানগুলো একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করে অপর কোনো সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলোর সাথে যোগ/বিয়োগ করলে, নির্ণায়কটির মানের পরিবর্তন হয় না।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm xb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm xb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm xb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; [c_1' = c_1 \pm xc_2]$
➢ কোনো নির্ণায়কের পাশাপাশি 2টি করে সারি বা কলামের ভুক্তিগুলো যদি সমান্তর প্রগমনে থাকে, তাহলে উক্ত নির্ণায়কের মান 0 হবে।	$\begin{vmatrix} a & a+d & a+2d \\ b & b+d & b+2d \\ c & c+d & c+2d \end{vmatrix} = 0$ এবং $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+p & c+p \\ a+2p & b+2p & c+2p \end{vmatrix} = 0$

MCQ

01. এককের কাল্পনিক মূল ω হলে, $\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0$ এর সমাধান কোনটি? **[CU'23-24] [Ans: c]**

(a) $x = \omega$ (b) $x = 1$ (c) $x = 0$ (d) $x = \omega^2$

সমাধান: $\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ \omega+x+\omega^2+1 & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2+1+x+\omega & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0;\ [c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+0 & \omega & \omega^2 \\ x+0 & x+\omega^2 & 1 \\ x+0 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & x+\omega^2 & 1 \\ 1 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$\Rightarrow x \begin{vmatrix} 0 & \omega-x-\omega^2 & \omega^2 \\ 0 & x+\omega^2-1 & 1 \\ 1 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \begin{vmatrix} \omega-x-\omega^2 & \omega^2 \\ x+\omega^2-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \begin{vmatrix} \omega-x & \omega^2 \\ x+\omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ [c_1' = c_1 + c_2]$

$\Rightarrow x\{(\omega-x)-\omega^2(x+\omega^2)\} = 0 \Rightarrow x(\omega-x-\omega^2x-\omega^4) = 0$

$\Rightarrow x\{\omega-\omega-(-\omega)x\} = 0 \Rightarrow x^2\omega = 0 \therefore \omega \neq 0 \therefore x = 0$

02. $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & x \\ \beta & \beta & \beta \\ \theta & x & \theta \end{vmatrix} = 0$ হলে, $x = ?$ **[JU'23-24; DU'14-15] [Ans: b]**

(a) α, β, θ (b) α, θ (c) β, θ (d) α, β

সমাধান: $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & x \\ \beta & \beta & \beta \\ \theta & x & \theta \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & x \\ 1 & 1 & 1 \\ \theta & x & \theta \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} 0 & \alpha & x-\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta-x & x & \theta-x \end{vmatrix}\ [c_1' = c_1 - c_2,\ c_3' = c_3 - c_2]$

$= -\beta(\theta-x)(x-\alpha) = \beta(x-\alpha)(x-\theta) = 0 \quad \therefore x = \alpha \text{ or, } x = \theta$

বিকল্প: MCQ এর জন্য Option এর মানগুলো বসিয়ে Check করলেই হবে।

$x = \alpha$ হলে, $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ \theta & \alpha & \theta \end{vmatrix} = \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \theta & \alpha & \theta \end{vmatrix} = 0$; $x = \theta$ হলে, $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \theta \\ \beta & \beta & \beta \\ \theta & \theta & \theta \end{vmatrix} = \beta\theta \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \theta \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$x = \beta$ হলে, $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta \\ \theta & \beta & \theta \end{vmatrix} = \beta(\beta-\alpha)(\beta-\theta) \neq 0 \therefore x = \alpha \text{ or, } x = \theta$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

03. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, x-এর কোন মানের জন্য $|A| = |B|$ হবে? **[RU'22-23] [Ans: a]**

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) 2

সমাধান: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6$ এবং $|B| = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = x(4 + 2) = 6x$

প্রশ্নমতে, $|A| = |B| \Rightarrow 6x = 6 \therefore x = 1$

04. P এর কোন মানের জন্য $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & P \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে? **[RU'22-23] [Ans: d]**

(a) $-\frac{3}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) -3 (d) 3

সমাধান: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & P \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times (4 - 6) - P(4 - 6) = -6 + 2P \therefore 2P - 6 = 0 \Rightarrow P = 3$

বিকল্প: এটা আসলে বিস্তার না করেই বলা যায়। লক্ষ কর, P এর মান 3 হলে, ১ম এবং ২য় সারি অভিন্ন হয়ে যায় তাই ম্যাট্রিক্স এর মান 0 হয়।

05. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 - bc & b^2 - ca & c^2 - ab \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান কত? **[JU'21-22] [Ans: c]**

(a) 2 (b) abc (c) 0 (d) $a^2b^2c^2$

সমাধান: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 - bc & b^2 - ca & c^2 - ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a - b & b - c & c \\ a^2 - b^2 + c(a - b) & b^2 - c^2 + a(b - c) & c^2 - ab \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a - b & b - c \\ (a - b)(a + b + c) & (b - c)(a + b + c) \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

বিকল্প: $a = 1, b = 2$ ও $c = 3$ ধরলে পাই, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 3 - (7 + 15) + 1 + 10 = 0$

06. $i^2 = -1$ হলে $\begin{vmatrix} i & i^3 & i + i^3 \\ i^3 & i^5 & i^3 + i^5 \\ i^5 & i^7 & i^5 + i^7 \end{vmatrix} = ?$ **[GST'20-21] [Ans: b]**

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) i

সমাধান: $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^7 = -i$; $\begin{vmatrix} i & i^3 & i + i^3 \\ i^3 & i^5 & i^3 + i^5 \\ i^5 & i^7 & i^5 + i^7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & -i & 0 \\ -i & i & 0 \\ i & -i & 0 \end{vmatrix} = 0$

07. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ হলে, $|A|$ এর মান কোনটি? **[JU'19-20] [Ans: c]**

(a) 5 (b) 5^2 (c) 5^3 (d) 0

সমাধান: $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5(25 - 0) = 125 = 5^3$

08. যদি $\begin{vmatrix} \beta - 2 & 1 \\ -5 & \beta + 4 \end{vmatrix} = 0$ হয়, β এর মান কোনটি? **[JU'19-20] [Ans: d]**

(a) 5 অথবা, 0 (b) 6 অথবা, 2 (c) 5 অথবা, -3 (d) 1 অথবা, -3

সমাধান: $(\beta - 2)(\beta + 4) + 5 = 0 \Rightarrow \beta^2 + 2\beta - 3 = 0 \therefore \beta = 1, -3$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with CamScanner

09. $\begin{vmatrix} 1 & -\omega & \omega^2 \\ -\omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix}$ = কত? [RU'18-19] [Ans: a]

(a) -4 (b) 4 (c) 8 (d) ω

সমাধান: $-\omega^3 - 1 + \omega(\omega^2 - \omega^2) + \omega^2(-\omega - \omega^4) = -1 - 1 - \omega^3 - (\omega^3)^2$

$= -2 - 1 - (1)^2 = -4$; $[\because \omega^3 = 1]$

10. নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ এর মান কোনটি? [JU'18-19] [Ans: c]

(a) $a+b+c$ (b) $(a+b+c)^2$ (c) 0 (d) $1+a+b+c$

সমাধান: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \times 0 = 0$

11. k এর কোন মানের জন্য $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k^2 & k^4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে না? [DU'17-18] [Ans: c]

(a) $k = 1$ (b) $k = -1$ (c) $k = 3$ (d) $k = 0$

সমাধান: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-k & k(1-k) & k^2 \\ 1-k^2 & k^2(1-k^2) & k^4 \end{vmatrix} = k(1-k)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k^2 \\ 1+k & k(1+k) & k^4 \end{vmatrix}$

$= k(1-k)^2(1+k)(k-1) \therefore k = 0, 1, -1$ এর জন্য নির্ণায়কের মান 0।

Type-10: বহুচলকবিশিষ্ট সমীকরণজোটের সমাধান

➲ **Formula & Concept:**

ক্রেমারের (Cramer) সূত্রের সাহায্যে:

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, a_2x + b_2y + c_2z = d_2, a_3x + b_3y + c_3z = d_3$, (ক্রেমারের সূত্রানুসারে উপরোক্ত সমীকরণগুলো সমাধান করার জন্য নিম্নলিখিত নির্ণায়কগুলো তৈরি করতে হবে।)

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \therefore x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$ এবং $z = \frac{D_z}{D}$

Inverse ম্যাট্রিক্সের ধারণা ব্যবহার করে:

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$
$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

ধরি, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

এখানে, $\boxed{AX = B} \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$

MCQ

01. যদি $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ এবং $AX = B$ হয়, তাহলে ক্রেমারের সূত্র মতে x ও y এর মান কত? [GST'23-24]

(a) $2, -1$ (b) $3, -1$ (c) $-1, 3$ (d) $-1, 1$ [Ans: a]

সমাধান: এখানে, $AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$

এখানে, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A) = \frac{1}{20-6}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

তাহলে, $X = A^{-1}B = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 28 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \therefore (x, y) = (2, -1)$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

বিকল্প: $AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix}4 & 2\\3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}4x+2y\\3x+5y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}$

সমীকরণদ্বয়, $4x + 2y = 6 \Rightarrow 2x + y - 3 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $3x + 5y = 1 \Rightarrow 3x + 5y - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

$\therefore$ (i) $\times$ 5 $-$ (ii) হতে পাই, $x = 2$ এবং $y = -1$

$\therefore (x, y) = (2, -1)$

02. $A = \begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ এবং $AX = B$ হলে, $(x, y) =$ কত? **[RU'21-22] [Ans: b]**

(a) $(2, 2)$ (b) $(2, 0)$ (c) $(2, 4)$ (d) $(4, -3)$

সমাধান: $A = \begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \therefore AX = \begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3x+y\\2x\end{bmatrix} = B = \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$

$\therefore 3x + y = 6 \ldots\ldots\ldots$ (i) এবং $2x = 4 \therefore x = 2 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

$\therefore x$ এর মান (i) এ বসিয়ে পাই, $6 + y = 6 \therefore y = 0 \therefore (x, y) \equiv (2, 0)$

বিকল্প: $X = A^{-1} \times B = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix}0 & -1\\-2 & 3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \times \begin{bmatrix}-4\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \therefore (x, y) \equiv (2, 0)$

03. $5x - 3y = 32$ এবং $2x + 5y = 19$ হলে x এবং y এর মান কত? **[JU'18-19] [Ans: c]**

(a) $x = -2, y = 3$ (b) $x = 3, y = -2$ (c) $x = 7, y = 1$ (d) $x = 2, y = -3$

সমাধান: $5x - 3y = 32 \ldots\ldots\ldots$ (i) এবং $2x + 5y = 19 \ldots\ldots$ (ii)

এখন, (i) $\times 5 \Rightarrow 25x - 15y = 160 \ldots\ldots\ldots$ (iii) আবার, (ii) $\times 3 \Rightarrow 6x + 15y = 57 \ldots\ldots\ldots$ (iv)

তাহলে, (iii) + (iv) $\Rightarrow 31x = 217 \therefore x = 7 \therefore y = 1 ; (x, y) \equiv (7, 1)$

বিকল্প: $D = \begin{vmatrix}5 & -3\\2 & 5\end{vmatrix} = 25 + 6 = 31;$

$D_x = \begin{vmatrix}32 & -3\\19 & 5\end{vmatrix} = 160 + 57 = 217; D_y = \begin{vmatrix}5 & 32\\2 & 19\end{vmatrix} = 95 - 64 = 31$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{217}{31} = 7;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{31}{31} = 1 \therefore (x, y) \equiv (7, 1)$

04. $X = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix}-a\\b\\c\end{bmatrix}$ এবং $Z = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -3\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সগুলো যদি $ZX = Y$, ম্যাট্রিক্স সমীকরণটি সিদ্ধ করে, তাহলে $X =$?

[CU'16-17] [Ans: a]

(a) $\begin{bmatrix}a\\\frac{b}{2}\\-\frac{c}{3}\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-a\\\frac{b}{2}\\\frac{c}{3}\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}a\\-\frac{b}{2}\\\frac{c}{3}\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}-a\\-b\\-c\end{bmatrix}$ (e) $-\begin{bmatrix}-a\\2b\\\frac{c}{3}\end{bmatrix}$

সমাধান: $ZX = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x\\2y\\-3z\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-x\\2y\\-3z\end{bmatrix} = Y = \begin{bmatrix}-a\\b\\c\end{bmatrix}$

$\therefore x = a, y = \frac{b}{2}, z = \frac{c}{-3} \therefore X = \begin{bmatrix}a\\\frac{b}{2}\\-\frac{c}{3}\end{bmatrix}$

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

অধ্যায় ০৩

সরলরেখা

➤ ভার্সিটি ভর্তি পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪✪	T-01	স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার পরিবর্তন সম্পর্কিত সমস্যা	18	-	DU'21-22, 18-19, 15-16; GST'21-22; RU'17-18, 15-16, 14-15; CU'14-15; JU' 22-23, 18-19, 14-15, 09-10; Agri.'21-22, 19-20; KU' 16-17; BAU'18-19	-
✪✪✪	T-02	দূরত্ব নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা	21	-	DU'21-22; GST'21-22; RU'17-18, 15-16, 07-08; CU'21-22, 20-21, 16-17, 14-15,13-14, 12-13, 10-11, 09-10, 02-03; JU'23-24, 22-23, 21-22, 18-19, 17-18, 11-12; SUST'19-20	-
✪✪	T-03	দুইটি বিন্দুর সংযোগ রেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তিকরণ সম্পর্কিত সমস্যা	8	-	DU'14-15; 13-14, 10-11; RU'23-24; JU'18-19, 15-16, 14-15, 09-10	-
✪✪	T-04	ত্রিভুজের বিভিন্ন কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয়	3	-	RU'21-22, 19-20; KU'16-17	-
✪✪✪	T-05	ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা	19	-	DU'18-19, 14-15, 03-04, 01-02; RU'21-22, 17-18, 14-15, 13-14, 06-07; CU'23-24, 20-21, 12-13; JU'23-24, 19-20, 17-18; KU'18-19, 13-14; JnU' 16-17	-
✪✪	T-06	সামান্তরিকের চতুর্থ শীর্ষ এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয়	4	-	DU'17-18; RU'22-23; JU'19-20; KU'14-15	-
✪	T-07	সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত	3	-	GST'20-21; JU'23-24, 10-11	-

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
০০০	T-08	ঢাল নির্ণয় সংক্রান্ত	15	-	DU'22-23, 14-15, 11-12; GST'22-23; RU'15-16, 10-11; CU'23-24, 22-23; JU'19-20, 17-18, 15-16, 14-15; Agri.'21-22; KU'16-17; JnU'15-16	-
✪✪✪	T-09	বিভিন্ন শর্তের সাপেক্ষে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়	25	1	DU'22-23; RU'22-23, 21-22, 18-19, 15-16, 09-10, 08-09; CU'16-17, 14-15, 11-12; JU'20-21, 19-20, 18-19, 17-18, 16-17, 14-15, 11-12; Agri.'19-20; SUST'19-20; KU'19-20; BAU'18-19	DU'19-20
✪✪	T-10	দুইটি সমীকরণ একই সরলরেখা নির্দেশ করার শর্ত	4	1	DU'16-17; CU'14-15; JU'17-18; KU'12-13	RU'19-20
✪	T-11	তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়া সম্পর্কিত সমস্যা	1	-	DU'14-15	-
✪✪✪	T-12	সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়	6	-	RU'22-23, 16-17; JU'21-22, 18-19, 14-15; JnU'17-18	-
✪✪✪	T-13	লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয়	18	-	DU'23-24,16-17,10-11; RU'23-24, 22-23, 21-22, 09-10; CU'22-23, 20-21, 15-16; JU'23-24, 22-23, 21-22; JnU'16-17, 12-13	-
✪✪	T-14	দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ সংক্রান্ত	6	-	DU'22-23, 17-18, 13-14; RU'23-24; CU'22-23; KU'14-15	-
✪✪	T-15	বহিঃস্থ বিন্দু হতে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব সম্পর্কিত সমস্যা	7	-	GST'23-24; RU'17-18; JU'23-24, 21-22, 19-20, 18-19, 17-18	-
✪✪✪	T-16	সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব সম্পর্কিত সমস্যা	11	-	DU'18-19; GST'22-23; RU'23-24, 22-23, 21-22; JU'21-22, 19-20, 14-15; Agri.'21-22, 20-21; KU' 17-18	-
✪✪✪	T-17	দুইটি রেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা	10	2	DU'18-19, 16-17, 08-09; GST'23-24; RU'16-17, 10-11; JU'18-19; Agri.'20-21, 19-20; JnU' 15-16	DU'23-24; RU'19-20
✪	T-18:	কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ সম্পর্কিত সমস্যা	1	-	KU'13-14	-

PDF MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-01: স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার পরিবর্তন সম্পর্কিত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

(i) বিন্দুর স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় থেকে পোলারে পরিবর্তন: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

➢ $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [১ম চতুর্ভাগ]

➢ $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [২য় চতুর্ভাগ]

➢ $\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (ঋণাত্মক কোণ) অথবা, $\theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (ধনাত্মক কোণ) [৩য় চতুর্ভাগ]

➢ $\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (ঋণাত্মক কোণ) অথবা, $\theta = 2\pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (ধনাত্মক কোণ) [৪র্থ চতুর্ভাগ]

(ii) বিন্দুর স্থানাঙ্ককে পোলার থেকে কার্তেসীয়তে পরিবর্তন: $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$

(iii) কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলার সমীকরণে পরিবর্তন:

➢ x এর স্থলে $r\cos\theta$ এবং y এর স্থলে $r\sin\theta$ বসাতে হবে।

➢ $x^2 + y^2$ এর স্থলে r^2 বসাতে হবে।

(iv) পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে পরিবর্তন:

➢ r^2 এর স্থলে $x^2 + y^2$ বসাতে হবে।

➢ $r\cos\theta$ ও $r\sin\theta$ এর স্থলে যথাক্রমে x ও y বসাতে হবে।

MCQ

01. কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(-1, \sqrt{3})$ হলে, ঐ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি? **[JU'22-23] [Ans: a]**

(a) $(2, 120°)$ (b) $(4, 240°)$ (c) $(1, 60°)$ (d) $(0, 0°)$

সমাধান: $(x, y) = (-1, \sqrt{3}) \therefore r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \therefore x < 0, y > 0 \therefore$ বিন্দুটি ২য় চতুর্ভাগে।

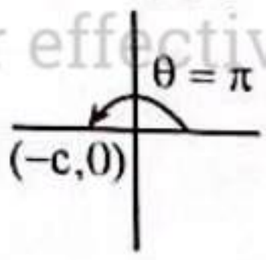
$\therefore \theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \pi - \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} = 120° \therefore (r, \theta) = (2, 120°)$

02. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (c, π) হলে বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক কত? **[DU'21-22] [Ans: b]**

(a) $(-1, 0)$ (b) $(-c, 0)$ (c) $(c, -c)$ (d) $(-c, c)$

সমাধান: $x = r\cos\theta = c\cos\pi = -c$

$y = r\sin\theta = c\sin\pi = 0 \therefore$ বিন্দুটি $(-c, 0)$



03. $r(1 + \cos\theta) = 2$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ- **[GST'21-22] [Ans: d]**

(a) $x^2 + y^2 + x - 2 = 0$ (b) $y^2 - 4x = 4$ (c) $x^2 + 4x = 2$ (d) $y^2 + 4x = 4$

সমাধান: $r(1 + \cos\theta) = 2$

$\Rightarrow r = 2 - r\cos\theta \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 + x^2 - 4x \therefore y^2 + 4x = 4$

04. $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক কত হবে? **[Agri.'21-22] [Ans: d]**

(a) $(3, \sqrt{3})$ (b) $(2, \sqrt{2})$ (c) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

সমাধান: $x = r\cos\theta = \sqrt{3} \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

আবার, $y = r\sin\theta = \sqrt{3} \times \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \therefore$ বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

05. $r\cos^2\theta + \cos\theta - r = 0$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত বক্ররেখা একটি- **[Agri.'19-20] [Ans: d]**

(a) বৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) অর্ধবৃত্ত (d) পরাবৃত্ত

সমাধান: $r\cos^2\theta + \cos\theta - r = 0 \Rightarrow r.\frac{x^2}{r^2} + \frac{x}{r} - r = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{r} + \frac{x}{r} = r \Rightarrow \frac{x^2+x}{r} = r$

$\Rightarrow x^2 + x = r^2 \Rightarrow x^2 + x = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow y^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x$; [যা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ] [$y^2 = 4ax$]

06. $2r\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ- **[DU'18-19] [Ans: a]**

(a) $y^2 = 1 + 2x$ (b) $y^2 = 4(1 - x)$ (c) $y^2 = 4(1 + x)$ (d) $x^2 = 4(1 + y)$

সমাধান: $r(1 - \cos\theta) = 1 \Rightarrow r - r\cos\theta = 1 \Rightarrow 1 + r\cos\theta = r \Rightarrow r^2 = (1 + r\cos\theta)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = (1 + x)^2 \Rightarrow y^2 = 1 + 2x$

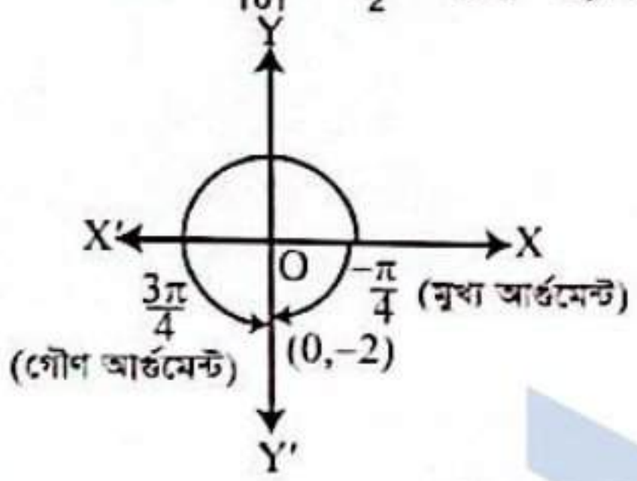
07. কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(0, -2)$ হলে, বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক কত? **[BAU'18-19; JU'18-19] [Ans: d]**

(a) $(2, 70°)$ (b) $(2, 170°)$ (c) $(1, 270°)$ (d) $(2, 270°)$

সমাধান: $(0, -2)$ বিন্দুর জন্য $r = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = 2$ এবং $\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{2}{0}\right| = -\frac{\pi}{2}$

অথবা, $\theta = 2\pi - \tan^{-1}\left|\frac{2}{0}\right| = \frac{3\pi}{2}$ $\therefore (0, -2)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $= (2, -\frac{\pi}{2})$ বা $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right) = (2, -90°)$ বা $(2, 270°)$

Shortcut:



চিত্র হতে: $r = |-2| = 2$ এবং $\theta = \frac{-\pi}{2}$ অথবা $\frac{3\pi}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় পোলার স্থানাঙ্ক $\equiv (2, 270°)$

08. $r\cos(\theta - \alpha) = k$, সমীকরণটির কার্তেসীয় সমীকরণ কোনটি? **[RU'17-18] [Ans: b]**

(a) $x\cos\theta + y\sin\theta = k$ (b) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = k$

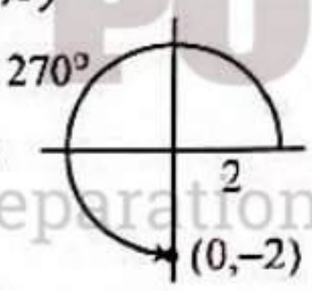
(c) $x\cos\alpha - y\sin\alpha = k$ (d) $x\cos\alpha - y\sin\alpha - k = 0$

সমাধান: $r\cos\theta\cos\alpha + r\sin\theta\sin\alpha = k$ $\therefore x\cos\alpha + y\sin\alpha = k$

09. $(2, 270°)$ বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক কত? **[KU'16-17] [Ans: b]**

(a) $(-2, 0)$ (b) $(0, -2)$ (c) $(2, -2)$ (d) $(0, 0)$

সমাধান:



10. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(3, 150°)$ হলে, ঐ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক- **[DU'15-16; JU'14-15] [Ans: c]**

(a) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ (c) $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (d) $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

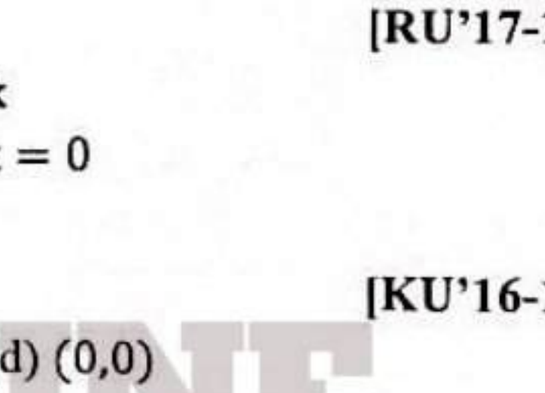
সমাধান: $x = r\cos\theta = 3\cos 150° = 3(-\sin 60°) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$y = r\sin\theta = 3\sin 150° = 3\cos 60° = \frac{3}{2}$

Shortcut: চিত্র হতে প্রদত্ত বিন্দু $(3, 150°)$ ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore$ ২য় চতুর্ভাগে ভুজ; $x < 0$ $(-ve)$ এবং কোটি; $y > 0(+ve)$

এখন প্রদত্ত Option-এর মধ্যে কেবলমাত্র (c) Option-এ এই শর্ত খাটে।



11. পোলার স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে পোল এর স্থানাঙ্ক কত? **[RU'15-16]**

(a) $(0, 0)$ (b) $(0, \pi)$ (c) $(0, -\pi)$ (d) $(0, 2\pi)$

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $r = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{0}{0}$ যা অসংজ্ঞায়িত। অতএব, পোল এর জন্য পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

12. $6r^3\sin\theta = 4 - \cos\theta$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ কী? [RU'15-16] [Ans: a]

(a) $6y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 4\sqrt{x^2+y^2} - x$ (b) $3y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 2x$

(c) $4y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 6\sqrt{x^2+y^2} - x$ (d) $2y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 3\sqrt{x^2+y^2}$

সমাধান: $6r^3\sin\theta = 4 - \cos\theta \Rightarrow 6r^4\sin\theta = 4r - r\cdot\cos\theta \Rightarrow 6y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 4\sqrt{x^2+y^2} - x$

13. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$ হলে, বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক- [RU'14-15; JU'09-10] [Ans: c]

(a) $(3\sqrt{3}, 3)$ (b) $(3, \sqrt{3})$ (c) $(3, 3\sqrt{3})$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $x = r\cos\theta = 6\cos\frac{\pi}{3} = 6\times\frac{1}{2} = 3$; $y = r\sin\theta = 6\sin\frac{\pi}{3} = 6\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

14. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ সমীকরণটির পোলার সমীকরণ হবে — [CU'14-15] [Ans: a]

(a) $r = 2a\cos\theta$ (b) $r^2 = 2a\cos\theta$ (c) $r = 2a\sin\theta$ (d) $r^2 = 2a\sin\theta$

সমাধান: $x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow r^2 = 2ar\cos\theta \Rightarrow r = 2a\cos\theta$

15. পোলার সমীকরণ $r^2\sin2\theta = 2a^2$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ কত? [JU'14-15] [Ans: b]

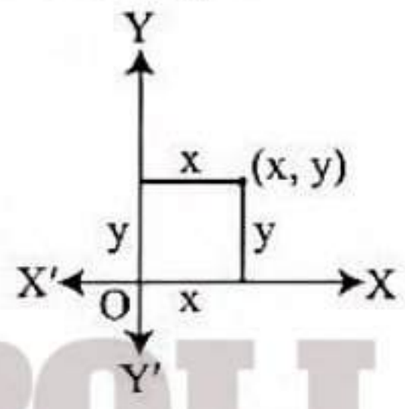
(a) $2xy = a^2$ (b) $xy = a^2$ (c) $xy = 2a^2$ (d) $xy = a$

সমাধান: $r^2\sin2\theta = 2a^2 \Rightarrow 2(r\sin\theta)(r\cos\theta) = 2a^2 \Rightarrow y\cdot x = a^2 \Rightarrow xy = a^2$

Type-02: দূরত্ব নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

➢



(x, y) বিন্দুর জন্য,

x-অক্ষ থেকে দূরত্ব $= |y|$

y-অক্ষ থেকে দূরত্ব $= |x|$

➢ (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

➢ (r_1, θ_1) ও (r_2, θ_2) পোলার বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 \sim \theta_1)}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $x - 3y - 2 = 0$ রেখার ওপর অবস্থিত P বিন্দুটি (2, 3) এবং (6, −5) হতে সমদূরবর্তী হলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [JU'23-24; DU'21-22] [Ans: c]

(a) (4, 14) (b) (−10, 4) (c) (14, 4) (d) (4, −10)

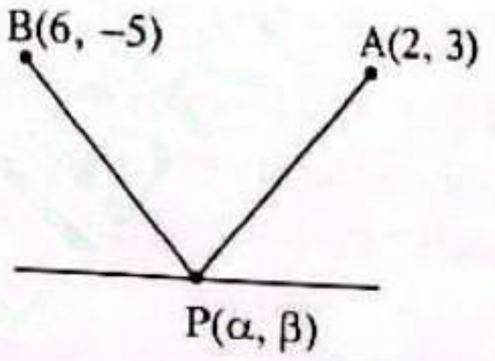
সমাধান: $x - 3y - 2 = 0$

$\alpha - 3\beta - 2 = 0$ ..... (i)

$PA^2 = PB^2 = (\alpha - 6)^2 + (\beta + 5)^2 = (\alpha - 2)^2 + (\beta - 3)^2$

$\Rightarrow -8\alpha + 16\beta + 48 = 0 \Rightarrow \alpha - 2\beta - 6 = 0$ ..... (ii)

(i) ও (ii) নং সমাধান করে পাই, P(14, 4)



বিকল্প: Option Check; কেবল (14, 4) বিন্দুর জন্য $x - 3y - 2 = 0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

CamScanner

02. x-অক্ষ এবং $(-5,-7)$ থেকে $(4,k)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে k-এর মান কোনটি?
[JU'22-23, 18-19, 11-12; RU'17-18, 07-08; CU'14-15, 10-11] [Ans: d]

(a) $\frac{7}{65}$ (b) $\frac{-65}{70}$ (c) $\frac{65}{7}$ (d) $\frac{-65}{7}$

সমাধান: x-অক্ষ হতে $(4,k)$ এর দূরত্ব $= |k|$

$(-5,-7)$ হতে $(4,k)$ এর দূরত্ব $= \sqrt{(-5-4)^2+(-7-k)^2} = \sqrt{81+\{(-1)(k+7)\}^2} = \sqrt{(k+7)^2+81}$

প্রশ্নমতে, $|k| = \sqrt{(k+7)^2+81} \Rightarrow k^2 = (k+7)^2+81 \Rightarrow k^2 = k^2+14k+49+81$

$\Rightarrow k^2+14k+130-k^2 = 0 \Rightarrow 14k+130 = 0 \Rightarrow 14k = -130 \therefore k = \frac{-130}{14} = \frac{-65}{7}$

03. একটি চলমান বিন্দুর ভুজ ও কোটি সমান হলে বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ- **[GST'21-22] [Ans: b]**

(a) $x+y=0$ (b) $x-y=0$ (c) $x-y=1$ (d) $x+y=1$

সমাধান: চলমান বিন্দুর ভুজ x এবং কোটি y হলে প্রশ্নমতে, $x = y \therefore x-y=0$

04. y- অক্ষ ও $(7,2)$ বিন্দু থেকে $(a,5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে a এর মান কোনটি?
[CU'21-22, 13-14, 12-13, 09-10, 02-03] [Ans: b]

(a) $\frac{23}{7}$ (b) $\frac{29}{7}$ (c) $\frac{31}{5}$ (d) $\frac{31}{3}$

সমাধান: $|a| = \sqrt{(7-a)^2+(2-5)^2} \Rightarrow a^2 = (7-a)^2+9 \Rightarrow 0 = -14a+58 \Rightarrow a = \frac{58}{14} \therefore a = \frac{29}{7}$

05. x -অক্ষ এবং $(2,2)$ বিন্দু হতে $(5,k)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে k এর মান কত? **[JU'21-22] [Ans: d]**

(a) $\frac{4}{13}$ (b) $\frac{4}{7}$ (c) $\frac{7}{4}$ (d) $\frac{13}{4}$

সমাধান: $\sqrt{(5-2)^2+(k-2)^2} = |k| \Rightarrow 9+(k-2)^2 = k^2 \Rightarrow 9+k^2-4k+4 = k^2 \Rightarrow k = \frac{13}{4}$

06. $(5,6)$ বিন্দু হতে 4 একক দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুর কোটি 6 হলে ভুজ কত? **[CU'20-21] [Ans: a]**

(a) 9 অথবা 1 (b) 1 অথবা 2 (c) 9 অথবা 2 (d) 7 অথবা 1

সমাধান: মনে করি, বিন্দুটির ভুজ x। প্রশ্নমতে, $\sqrt{(5-x)^2+(6-6)^2} = 4 \Rightarrow (5-x)^2 = 16$

$\Rightarrow 5-x = \pm 4 \Rightarrow x = 5 \pm 4 \therefore x = 9$ অথবা, 1

07. দুটি বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(2\sqrt{3}, 90^\circ)$ এবং $(2\sqrt{5}, 180^\circ)$ হলে, বিন্দু দুটির দূরত্ব কত? **[SUST'19-20] [Ans: b]**

(a) $4\sqrt{3}$ (b) $4\sqrt{2}$ (c) $4\sqrt{5}$ (d) $2\sqrt{3}$ (e) 0

সমাধান: প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়, $A(r_1,\theta_1) \equiv A(2\sqrt{3}, 90^\circ)$ এবং $B(r_2,\theta_2) \equiv (2\sqrt{5}, 180^\circ)$ হলে সূত্রানুসারে পাই,

$AB = \sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{5})^2+2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{5}\cos(90^\circ-180^\circ)}$

$= \sqrt{12+20+0} = 4\sqrt{2}$

08. $A(3,4)$, $B(-3,-4)$ এবং $C(0,0)$ তিনটি বিন্দু হলে, মূলবিন্দু থেকে B বিন্দুর দূরত্ব কত? **[JU'17-18] [Ans: a]**

(a) 5 (b) 2 (c) 1 (d) 0

সমাধান: $BC = \sqrt{(0+3)^2+(0+4)^2} = 5$

09. একটি বিন্দুর ভুজ 2 এবং বিন্দুটি $(-6,1)$ হতে 10 একক দূরে আছে, বিন্দুটির কোটি কত? **[CU'16-17] [Ans: d]**

(a) -7 অথবা, 5 (b) 5 (c) -7 (d) 7 অথবা, -5

সমাধান: ধরি, কোটি $\alpha \therefore \sqrt{(2+6)^2+(\alpha-1)^2} = 10 \Rightarrow \alpha^2-2\alpha-35 = 0 \Rightarrow \alpha^2-(7-5)\alpha-35 = 0$

$\therefore \alpha = 7, -5$

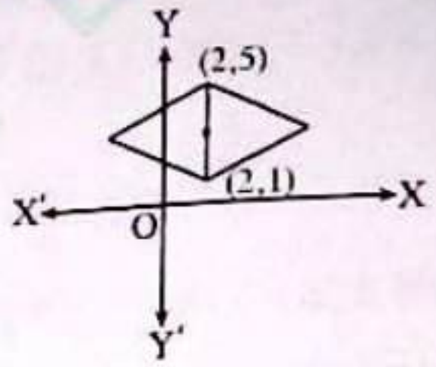
10. একটি সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2,1)$ এবং $(2,5)$ হলে, তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? **[RU'15-16] [Ans: a]**

(a) $(2+2\sqrt{3}, 3)$ (b) $(2+\sqrt{3}, 3)$ (c) $(3+2\sqrt{3}, 3)$ (d) $(3+\sqrt{3}, 3)$

সমাধান: $(2,1)$ এবং $(2,5)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 4$ একক। একমাত্র অপশন (a) এর $(2+2\sqrt{3}, 3)$ বিন্দুটি থেকেই $(2,1)$ এবং $(2,5)$ উভয় বিন্দুর দূরত্ব 4 একক হয়। তাই, চারটি option এর মধ্যে option (a) ই সঠিক।

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner



বিকল্প: সমবাহু ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2-2)^2+(5-1)^2} = 4$

(2,5) ও (2,1) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু $\left(2, \frac{5+1}{2}\right)$ বা (2,3)

$\therefore$ মধ্যমা $= \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$

$\therefore$ তৃতীয় শীর্ষ $(2 \pm 2\sqrt{3}, 3)$

অপশন (a) তে $(2+2\sqrt{3}, 3)$ আছে তাই এটিই হবে সঠিক উত্তর।

Shortcut: সমবাহু ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষ; {(ভুজের গড় $\pm\sqrt{3}$ (কোটির বিয়োগের গড়), (কোটির গড় $\pm\sqrt{3}$ (ভুজের বিয়োগের গড়)} $\equiv \left\{\frac{2+2}{2} \pm \sqrt{3}\left(\frac{1-5}{2}\right), \frac{1+5}{2} \pm \sqrt{3}\left(\frac{2-2}{2}\right)\right\} \equiv (2 \pm 2\sqrt{3}, 3)$

Type-03: দুইটি বিন্দুর সংযোগ রেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তিকরণ সম্পর্কিত সমস্যা

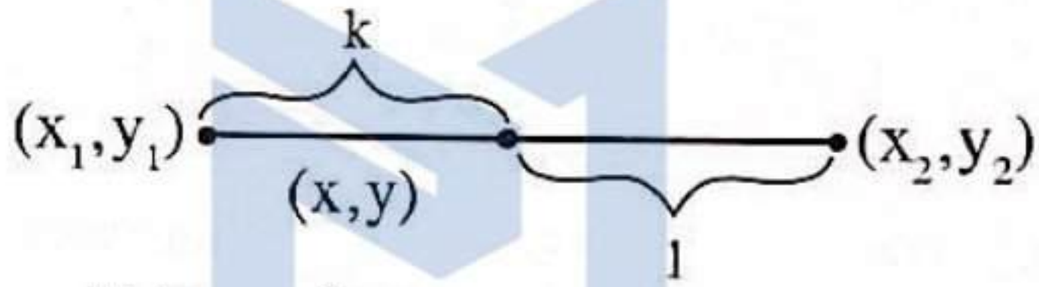
➲ **Formula & Concept:**

➢ (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) এর সংযোজক রেখাংশকে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক,

$$(x, y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $(x, y) = \left(\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$

➢ কোনো একটি বিন্দু, দুইটি বিন্দুর [(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)] সংযোজক রেখাংশকে কী অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয়ের জন্য অনুপাত $k : 1$ ধরে নিতে হবে।



$x = \frac{kx_2+x_1}{k+1}; y = \frac{ky_2+y_1}{k+1}$ [এখান থেকে k এর মান নির্ণয় করতে হবে।]

k এর মান +ve হলে, $k : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

k এর মান −ve হলে, $k : 1$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়।

❖ **Shortcut:** যেকোনো লিখিত পরীক্ষায়ও নিম্নবর্ণিত নিয়মটি ব্যবহার করা যাবে।

♦ (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে-

➢ x-অক্ষ $\left|\frac{y_1}{y_2}\right|$ অনুপাতে বিভক্ত করে। [$\frac{y_1}{y_2}$ ধনাত্মক (+ve) হলে বহির্বিভক্ত এবং ঋণাত্মক (−ve) হলে অন্তর্বিভক্ত]

➢ y-অক্ষ $\left|\frac{x_1}{x_2}\right|$ অনুপাতে বিভক্ত করে। [$\frac{x_1}{x_2}$ ধনাত্মক (+ve) হলে বহির্বিভক্ত এবং ঋণাত্মক (−ve) হলে অন্তর্বিভক্ত]

➢ $ax + by + c = 0$ রেখাটি $\frac{|ax_1+by_1+c|}{|ax_2+by_2+c|}$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

[$\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$ ধনাত্মক (+ve) হলে বহির্বিভক্ত এবং ঋণাত্মক (−ve) হলে অন্তর্বিভক্ত]

POTE MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $(-2, 4)$ ও $(4, -2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x অক্ষরেখা কী অনুপাত বিভক্ত করে? **[RU'23-24] [Ans: a]**

(a) 2:1 (b) 1:2 (c) 3:4 (d) 4:3

সমাধান: $(-2, 4), (4, -2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা x-অক্ষের দ্বারা বিভক্তকরণের ক্ষেত্রে, $\frac{m_1}{m_2} = \left|\frac{y_1}{y_2}\right| = \left|\frac{4}{-2}\right| = 2 : 1$

02. $(3, -1)$ এবং $(5, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী সরলরেখাকে 3: 4 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক- **[Ans: d]**

(a) $\left(\frac{17}{3}, 3\right)$ (b) $\left(\frac{27}{7}, \frac{2}{7}\right)$ (c) $\left(\frac{27}{4}, \frac{4}{3}\right)$ (d) None **[JU' 18-19, 09-10; DU'13-14]**

সমাধান: বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করায়, $x = \frac{3\times5-4\times3}{3-4} = -3$; $y = \frac{3\times2-4\times(-1)}{3-4} = -10$

Scanned with CamScanner

03. $(1,-1)$এবং $(8,6)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি 3: 4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এর স্থানাঙ্ক কত? **[JU'15-16, 14-15; DU'14-15, 10-11] [Ans: d]**

(a) $(4,-2)$ (b) $(-4,-2)$ (c) $(-4,2)$ (d) $(4,2)$

সমাধান: ধরি, 3: 4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x,y)

তাহলে, $x=\frac{3\times8+4\times1}{3+4}=4$ এবং $y=\frac{3\times6+4(-1)}{3+4}=2$; সুতরাং, নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv(4,2)$

Type-04: ত্রিভুজের বিভিন্ন কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয়

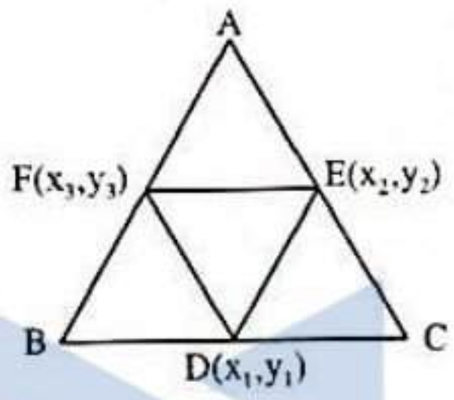
➲ **Formula & Concept:**

$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$ বিন্দু দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $\equiv\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ এবং

অন্তঃকেন্দ্র $\equiv\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$ [যেখানে, BC = a, CA = b এবং AB = c]

♦ যদি ΔABC এর BC, CA এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $D(x_1,y_1), E(x_2,y_2)$ ও $F(x_3,y_3)$ হয়, তবে A, B ও C শীর্ষবিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক হবে যথাক্রমে-

$A=(x_2+x_3-x_1, y_2+y_3-y_1)$
$B=(x_1+x_3-x_2, y_1+y_3-y_2)$
$C=(x_1+x_2-x_3, y_1+y_2-y_3)$



❖ অর্থাৎ, যে শীর্ষের স্থানাঙ্ক বের করা হচ্ছে সর্বদা তার বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক বিয়োগ করতে হবে।

♦ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র এর মধ্যমাকে সর্বদা 2: 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

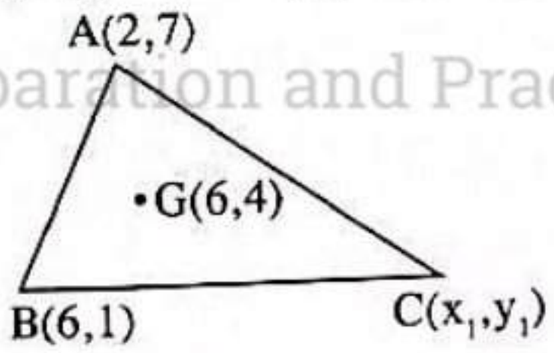
♦ $\Delta ABC = 4\Delta DEF$

MCQ

01. একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (2, 7) ও (6, 1) এবং ভরকেন্দ্র (6, 4)। তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? **[RU'21-22]**

(a) $(-10,-4)$ (b) $(10,-4)$ (c) $(10,4)$ (d) $(4,10)$ **[Ans: c]**

সমাধান:



মনে করি, তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $C(x_1,y_1)$ $\therefore \frac{2+6+x_1}{3}=6\Rightarrow x_1=10; \frac{7+1+y_1}{3}=4\Rightarrow y_1=4 \therefore C(10,4)$

02. ABC ত্রিভুজের একটি বিন্দু A(8, 2) এবং BC বাহুর মধ্যবিন্দু D(5, 2) হলে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি? **[RU'19-20]**

(a) (9, 3) (b) (3, 9) (c) (2, 6) (d) (6, 2) **[Ans: d]**

সমাধান: A(8,2) G(x,y) D(5,2)
2 : 1

$x=\frac{8\times1+5\times2}{2+1}=6$; $y=\frac{2\times1+2\times2}{2+1}=2$ $\therefore G(x,y)=(6,2)$; [A(8, 2) বিন্দুটিকে ΔABC এর শীর্ষ হিসেবে বিবেচনা করা হয়েছে]

03. ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুকে কী বলা হয়? **[KU'16-17] [Ans: b]**

(a) অন্তঃকেন্দ্র (b) পরিকেন্দ্র (c) ভরকেন্দ্র (d) লম্বকেন্দ্র

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-05: ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

➢ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

➢ একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 0 হলে, ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি বিন্দু সমরেখ হবে (বা আসলে কোনো ত্রিভুজ গঠিত হবে না)।

MCQ

01. 16 বর্গ একক ক্ষেত্রফলের একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক $A(-4, 6), B(-1, -2)$ এবং $C(a, -2)$ হলে a এর মান কত? **[CU'23-24] [Ans: d]**

(a) -1 (b) 2 (c) -3 (d) 3

সমাধান: প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -4 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ a & -2 & 1 \end{vmatrix}\right| = 16 \Rightarrow \frac{1}{2}\{(-4)(-2+2) - 6(-1-a) + 1(2+2a)\} = \pm 16$

$\Rightarrow 6 + 6a + 2 + 2a = \pm 32 \Rightarrow 8a = \pm 32 - 8$

$\therefore a = \pm 4 - 1 = 3, -5$

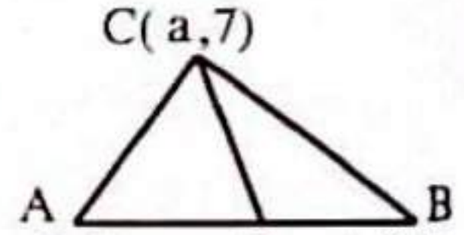
02. $A(1, 3), B(-3, 5)$ ও $C(a, 7)$ বিন্দু তিনটি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 5 বর্গএকক হলে C বিন্দুগামী মধ্যমার দৈর্ঘ্য কোনটি? **[JU'23-24] [Ans: c]**

(a) $\sqrt{110}$ (b) $\sqrt{127}$ (c) $\sqrt{130}$ (d) $\sqrt{147}$

সমাধান: $A(1, 3), B(-3, 5), C(a, 7)$

$\Delta ABC = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & -3 & a & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 3 \end{vmatrix}\right| = 5 \Rightarrow (5 - 21 + 3a + 9 - 5a - 7) = \pm 10$

$\Rightarrow (-2a - 14) = \pm 10 \Rightarrow -2a = \pm 10 + 14 \therefore a = -2, -12$



A ও B এর মধ্যবিন্দু, $D = \left(\frac{1-3}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (-1, 4)$

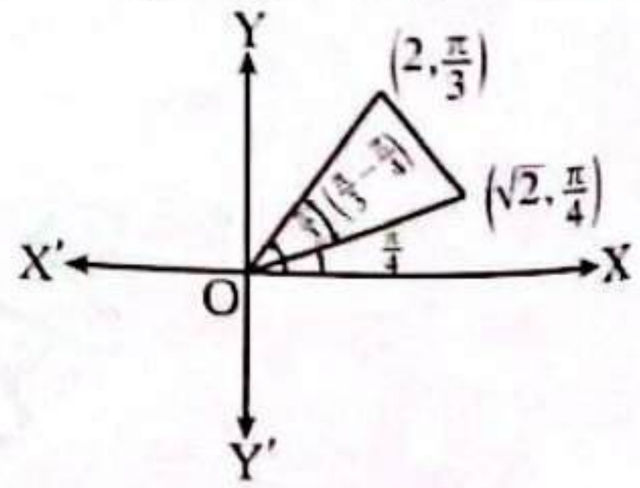
$\therefore C(-12, 7)$ বিন্দুগামী মধ্যমার দৈর্ঘ্য, $CD = \sqrt{(-1+12)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{11^2 + 3^2} = \sqrt{121 + 9} = \sqrt{130}$ একক; যা Option-এ আছে।

এবং $C(-2, 7)$ বিন্দুগামী মধ্যমার দৈর্ঘ্য, $CD = \sqrt{(-1+2)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{10}$ যা Option-এ নেই।

03. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহের পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে পোল, $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ও $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

(a) $\frac{1}{2}(-\sqrt{3} + 2)$ (b) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$ (c) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$ (d) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2)$ **[JU'23-24; RU'21-22] [Ans: c]**

সমাধান: একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে পোল $(0, 0), (r_1, \theta_1)$ এবং (r_2, θ_2) হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_1 \sim \theta_2)$। এখানে শীর্ষবিন্দুগুলো পোল $(0, 0), \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ও $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$



$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

$= \sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$ বর্গ একক

বিকল্প: বিন্দুগুলোর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, 0), \left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)$ বা $(1, 1)$ এবং $\left(2\cos\frac{\pi}{3}, 2\sin\frac{\pi}{3}\right)$ বা $(1, \sqrt{3})$

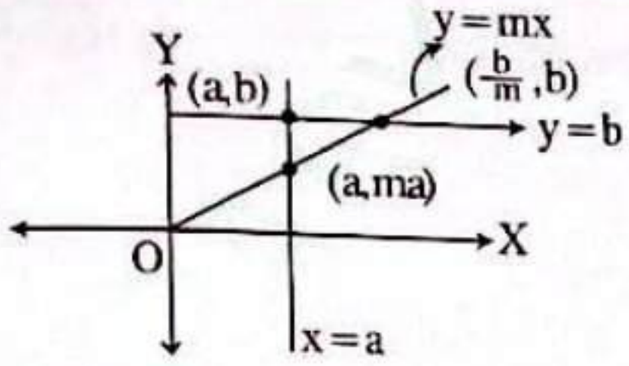
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক $= \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$ বর্গ একক।

04. $x = a, y = b, y = mx$ রেখা তিনটি যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল কোনটি? **[CU'20-21] [Ans: b, c]**

(a) $\frac{1}{2}(b - ma)^2$ (b) $\frac{1}{2m}(b - ma)^2$ (c) $\frac{1}{2m}(ma - b)^2$ (d) $\frac{1}{2m}(b - ma)$

POLY MACHINE
Preparation is Practice & Vital for effective delivery
CamScanner

সমাধান:



ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & a & \frac{b}{m} & a \\ b & ma & b & b \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\left(ma^2 + ab + \frac{b^2}{m}\right) - (ab + ab + ab)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{m^2a^2+b^2-2abm}{m}\right\} = \frac{1}{2m}\{(ma)^2 - 2 \cdot ma \cdot b + (b)^2\}$

$= \frac{1}{2m}(b - ma)^2 = \frac{1}{2m}(ma - b)^2$; প্রকৃতপক্ষে (b) ও (c) দুটোই সঠিক।

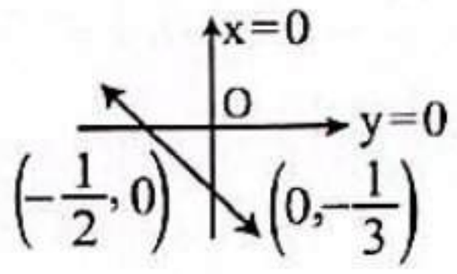
05. $2x + 3y + 1 = 0, x = 0, y = 0$ রেখা তিনটি দ্বারা আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল কত? **[JU'19-20] [Ans: a]**

(a) $\frac{1}{12}$ (b) 12 (c) $\frac{1}{6}$ (d) 6

সমাধান: $2x + 3y + 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{x}{-\frac{1}{2}} + \frac{y}{-\frac{1}{3}} = 1$; $\Delta = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{12}$ বর্গ একক।



06. $y = 2$ এবং $y = |x|$ রেখাগুলো দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল- **[DU'18-19] [Ans: b]**

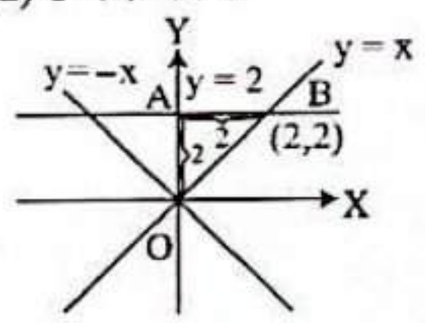
(a) 2 বর্গ একক (b) 4 বর্গ একক (c) 6 বর্গ একক (d) 8 বর্গ একক

সমাধান:

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 2 \times \Delta OAB$

$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2\right)$

$= 4$ বর্গ একক



07. আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলিকে 20% বর্ধিত করলে এর ক্ষেত্রফল কত শতাংশ বৃদ্ধি পাবে? **[KU'18-19] [Ans: c]**

(a) 40% (b) 42% (c) 44% (d) 46%

সমাধান: মনে করি, আদি দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে a ও b; 20% বর্ধিত করায় নতুন দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 1.2a ও 1.2b

$\therefore \Delta A = \frac{(1.2a)(1.2b)-ab}{ab} \times 100\% = 44\%$

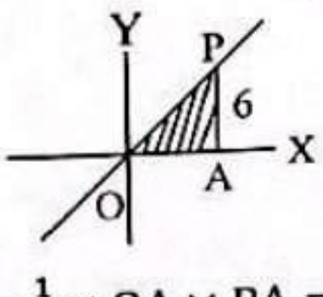
08. তিনটি বিন্দু যথাক্রমে $P(a_1, b_1, c_1)$, $Q(a_2, b_2, c_2)$ এবং $R(a_3, b_3, c_3)$ দেওয়া আছে। PQR- এর ক্ষেত্রফল শূন্য হলে বিন্দু তিনটি কোথায় অবস্থিত? **[RU'17-18][Ans: d]**

(a) ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর উপর (b) বৃত্তের উপর (c) উপবৃত্তের উপর (d) সরলরেখার উপর

09. $3y = 9x$ রেখাটির P বিন্দু থেকে x অক্ষের উপর A বিন্দুতে লম্বের দৈর্ঘ্য 6 হলে, ΔAOP এর ক্ষেত্রফল কত? **[JU'17-18] [Ans: d]**

(a) 2 (b) 9 (c) 12 (d) 6

সমাধান:



; $9x - 3y = 0$; $P(x, y)$ বিন্দুতে, $y = 6 \therefore x = \frac{3\times6}{9} = 2 \therefore OA = 2$

$\Delta OPA = \frac{1}{2} \times OA \times PA = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$ বর্গ একক।

10. যদি $(-5, 1), (4, 5)$ এবং $(7, -4)$ একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হয় তাহলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত? **[JU'17-18; DU'14-15, 03-04, 01-02; CU'12-13; RU'06-07] [Ans: b]**

(a) $48\frac{1}{2}$ (b) $46\frac{1}{2}$ (c) 50 (d) $71\frac{1}{2}$

সমাধান: $\Delta = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}[-5(5+4) - 1(4-7) + (-16-35)]\right| = \left|\frac{1}{2}(-93)\right| = 46\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

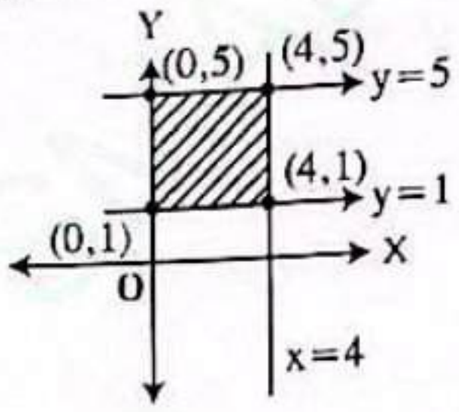
POLL MACHINE
Preparation and Practice Portal for effective delivery

CamScanner

11. $x = 0, x = 4, y = 1$ ও $y = 5$ রেখাগুলো দ্বারা আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক হবে? **[JnU'16-17] [Ans: d]**

(a) 20 (b) 24 (c) 15 (d) 16

সমাধান: $\Delta =$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $= 4 \times 4 = 16$ বর্গ একক



12. $ax + y = a$ সরলরেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যে, মূলবিন্দু O হলে, $4OA = 3OB$ হয়। AOB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত? **[RU'14-15] [Ans: c]**

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{8}{3}$

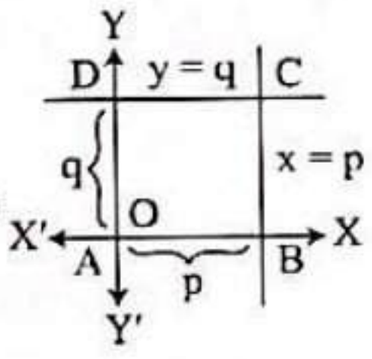
সমাধান: $ax + y = a \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{a} = 1$; $A \equiv (1,0), B \equiv (0,a)$; $OA = 1$ ও $OB = a$

এখন, $4 \times 1 = 3 \times a \Rightarrow a = \frac{4}{3} \therefore \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3}$

13. x অক্ষ, y অক্ষ, $x = p$ ও $y = q$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? **[RU'13-14] [Ans: c]**

(a) $\frac{1}{2}pq$ (b) p^2q^2 (c) pq (d) $2pq$

সমাধান:



; ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = pq

14. $(P, P-2), (P+3, P)$ এবং $(P+2, P+2)$ বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কোনটি? **[KU'13-14] [Ans: a]**

(a) 4 বর্গ একক (b) 4P বর্গ একক (c) $4P^2$ বর্গ একক (d) সবগুলো

সমাধান: $\Delta = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} P & P-2 & 1 \\ P+3 & P & 1 \\ P+2 & P+2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} P & P-2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\right|$; $\begin{bmatrix} r_2' = r_2 - r_1 \\ r_3' = r_3 - r_2 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}|[3 \times 2 - (-1) \times 2]| = 4$ বর্গ একক

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

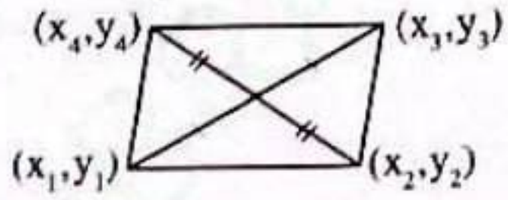
Type-06: সামান্তরিকের চতুর্থ শীর্ষ এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

➢ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ $D(x_4, y_4)$ দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজ ABCD এর ক্ষেত্রফল,

$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

➢ যেই চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান ও সমান্তরাল তাকে সামান্তরিক বলে। আয়ত, বর্গ, রম্বস এরা সবই সামান্তরিক। সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। সামান্তরিকের তিনটি শীর্ষবিন্দু দেওয়া থাকলে এই concept এর মাধ্যমে চতুর্থ শীর্ষবিন্দু নির্ণয় করা যায়।



ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right) \equiv \left(\frac{x_2+x_4}{2}, \frac{y_2+y_4}{2}\right)$

$\therefore x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \mid y_1 + y_3 = y_2 + y_4$

$\therefore x_4 = x_1 + x_3 - x_2 \mid y_4 = y_1 + y_3 - y_2$

❖ অর্থাৎ, নির্ণেয় শীর্ষের বিপরীত শীর্ষের স্থানাঙ্ক অপর শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্কের সমষ্টি থেকে বিয়োগ করতে হবে।

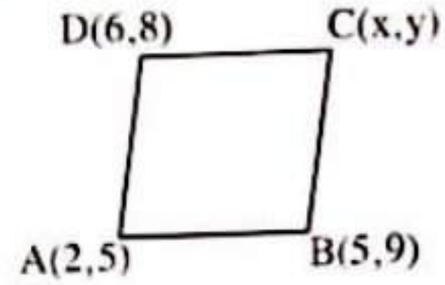
CamScanner

MCQ

01. A(2,5), B(5,9) এবং D(6,8) বিন্দুত্রয় ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু হলে, চতুর্থ বিন্দু C এর স্থানাঙ্ক কোনটি? **[RU'22-23; DU'17-18; KU'14-15] [Ans: b]**

(a) (4,3) (b) (9,12) (c) (4,7) (d) (7,9)

সমাধান: এক্ষেত্রে শীর্ষ C এর স্থানাঙ্ক পেতে B ও D এর সংশ্লিষ্ট স্থানাঙ্কের সমষ্টি থেকে বিপরীত শীর্ষ A এর সংশ্লিষ্ট স্থানাঙ্ক বিয়োগ করতে হবে।



ধরি, $C \equiv (x,y)$

$x = 6 + 5 - 2 = 9; y = 8 + 9 - 5 = 12$

অর্থাৎ $C \equiv (9,12)$

02. যদি $(0,0), (a,-4), (4,b)$ এবং $(5,0)$ একটি রম্বসের শীর্ষবিন্দু হয়, তাহলে রম্বসের কর্ণ দুটির ছেদবিন্দু কত? **[JU'19-20] [Ans: d]**

(a) $(1,-1)$ (b) $(-2,\ 1)$ (c) $(-2,\ 2)$ (d) $(2,-2)$

সমাধান: কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু: $\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+b}{2}\right) \equiv \left(\frac{a+5}{2}, -\frac{4}{2}\right)$

$\therefore 4 = a + 5 \therefore a = -1$

$\frac{b}{2} = -2 \therefore b = -4 \therefore$ কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(2,-2)$

Type-07: সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

বিন্দু দুই রকম হতে পারে- স্থির বিন্দু এবং চলমান বিন্দু। স্থির বিন্দুর স্থানাঙ্ক স্থির থাকে। আর চলমান বিন্দু কোনো শর্ত সাপেক্ষে চলতে থাকবে। এই চলমান বিন্দুর চলার পথকে গাণিতিকভাবে প্রকাশ করলেই সঞ্চারপথ পাওয়া যায়। তাই সঞ্চারপথ নির্ণয় করতে বললে শর্ত বুঝে সমীকরণ নির্ণয় করবে।

MCQ

01. $(1,0)$ বিন্দু এবং $x + 1 = 0$ সরলরেখা থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সেট যে সঞ্চারপথ গঠন করে তার সমীকরণ হবে- **[JU'23-24] [Ans: b]**

(a) $x^2 = 2y$ (b) $y^2 = 4x$ (c) $x^2 = 4y$ (d) $y^2 = 2x$

সমাধান: শর্তমতে লেখা যায়, $\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \left|\frac{x+1}{\sqrt{1^2+0^2}}\right|$

$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow y^2 = 4x$

02. $(0,-1)$ বিন্দু এবং $y = 1$ সরলরেখা থেকে সমান দূরত্বের বিন্দুর সঞ্চারপথ কোনটি? **[GST'20-21] [Ans: c]**

(a) $y^2 + 4x = 0$ (b) $y^2 - 4x = 0$ (c) $x^2 + 4y = 0$ (d) $x^2 - 4y = 0$

সমাধান: ধরি, সঞ্চারপথের বিন্দু (x,y)। $\sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2} = |y-1|$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow x^2 + 4y = 0$

03. (x,y) বিন্দুটি $(a,0)$ বিন্দু ও $x + a = 0$ রেখা হতে সমদূরবর্তী; বিন্দুটির সঞ্চারপথ- **[JU'10-11] [Ans: a]**

(a) একটি পরাবৃত্ত (b) একটি উপবৃত্ত (c) একটি বৃত্ত (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = |x + a| \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = x^2 + a^2 + 2ax$

$\Rightarrow y^2 = 4 \cdot a \cdot x$ যা একটি পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।

Shortcut: কোনো বিন্দু (x, y) থেকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও রেখার লম্ব দূরত্ব সমান হলে, এর সঞ্চারপথ একটি পরাবৃত্ত হবে।

[$\because SP = e \cdot PM$ এবং পরাবৃত্তের জন্য $e = 1 \therefore SP = PM$]

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-08: ঢাল নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

কোনো সরলরেখা (যা x-অক্ষের উপর লম্ব নয়) x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণের ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্টের মানকে রেখাটির ঢাল বলে।

ঢালকে সাধারণত m দ্বারা সূচিত করা হয়। AB সরলরেখা x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\theta(0° \le \theta < 180° ; \theta \neq 90°)$ কোণ উৎপন্ন করলে তার ঢাল $m = \tan\theta$। ভুজ এর প্রতি একক পরিবর্তনের সাথে সাথে কোটির পরিবর্তনের হারই ঢাল।

(i) (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল, $m = \frac{(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)} = \frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)} = \frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}}$

(ii) $ax + by + c = 0$ সরলরেখার ঢাল, $m = -\frac{a}{b} = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}}$

(iii) x অক্ষ বা x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার ঢাল শূন্য।

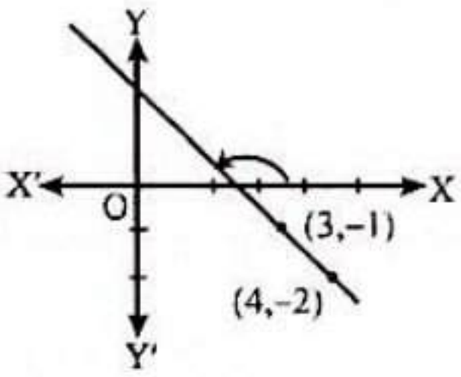
(iv) y অক্ষ বা y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার ঢাল অসংজ্ঞায়িত।

MCQ

01. $(3, -1)$ এবং $(4, -2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখা x অক্ষের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করবে? **[CU'23-24] [Ans: d]**

(a) 30° (b) 75° (c) 105° (d) 135°

সমাধান: $\theta_x = \tan^{-1} m = \tan^{-1}\frac{(-2)-(-1)}{4-3} = \tan^{-1}\left(\frac{-2+1}{4-3}\right) = \tan^{-1}(-1) = 180° - 45° \Rightarrow 135°$

বিকল্প: 

অপশনে স্থূলকোণ শুধুমাত্র 135°

02. $(0, 2)$ এবং $(-2, 0)$ বিন্দুগামী সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কী কোণ উৎপন্ন করে? **[DU'22-23] [Ans: b]**

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 120°

সমাধান: $(0, 2)$ এবং $(-2, 0)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল, $\tan\theta = \frac{2-0}{0+2} = 1 = \tan 45° \therefore \theta = 45°$

03. $A(-1, 3)$ এবং $B(-2, 1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার উপরিস্থিত $P(a, a)$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? **[GST'22-23] [Ans: b]**

(a) (5,5) (b) (−5,−5) (c) (4,4) (d) (−4,−4)

সমাধান: $A(-1, 3), B(-2,\ 1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার উপরিস্থিত $P(a,\ a)$ বিন্দু

$\therefore$ AP এর ঢাল = AB এর ঢাল, $\frac{a-3}{a+1} = \frac{3-1}{-1-(-2)} \Rightarrow \frac{a-3}{a+1} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow a - 3 = 2a + 2 \Rightarrow -5 = a \therefore P(-5, -5)$

04. $\left(\frac{a}{b}, 0\right), \left(0, \frac{b}{a}\right), (2, 2)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, $(a + b)$ এর মান নিচের কোনটি? **[CU'22-23] [Ans: c]**

(a) $\sqrt{\frac{1}{2}ab}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{ab}}$ (c) $\sqrt{\frac{5}{2}ab}$ (d) $\frac{5}{2\sqrt{ab}}$

সমাধান: বিন্দুত্রয় সমরেখ $\therefore \begin{vmatrix} \frac{a}{b} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b}{a} & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b}\left(\frac{b}{a} - 2\right) - 2\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2a}{b} - \frac{2b}{a} = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 1$

$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(a+b)^2-2ab}{ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow (a + b)^2 = \frac{ab}{2} + 2ab \Rightarrow (a + b)^2 = \frac{5ab}{2}$

$\therefore (a + b) = \pm\sqrt{\frac{5ab}{2}} \therefore (a + b)$ এর মান $\sqrt{\frac{5}{2}ab}$ অথবা, $-\sqrt{\frac{5}{2}ab}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

বিকল্প: $\frac{\frac{b}{a}-0}{0-\frac{a}{b}} = \frac{2-\frac{b}{a}}{2-0} \Rightarrow \frac{-b^2}{a^2} = \frac{2a-b}{2a} \Rightarrow \frac{-b^2}{a} = \frac{2a-b}{2} \Rightarrow -2b^2 = 2a^2 - ab$

$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + 2ab) = ab + 4ab = 5ab \Rightarrow 2(a+b)^2 = 5ab \Rightarrow (a+b)^2 = \frac{5ab}{2}$

$\therefore a + b = \pm\sqrt{\frac{5ab}{2}}$

05. $x - \sqrt{3}y = 7$ হলে সরলরেখার ঢাল কত? **[Agri.'21-22] [Ans: c]**

(a) $-\sqrt{3}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$

সমাধান: $x - \sqrt{3}y = 7 \Rightarrow \sqrt{3}y = x - 7 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{7}{\sqrt{3}}$ $\therefore y = mx + c$ অনুসারে ঢাল, $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$

06. AB সরলরেখাটি $P(5,0)$ এবং $Q(0,-5)$ বিন্দু দুইটি দ্বারা সমত্রিখণ্ডিত হয়। রেখাটি x- অক্ষের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করেছে? **[JU'19-20] [Ans: a]**

(a) 45° (b) 135° (c) 60° (d) 150°

সমাধান: P, Q বিন্দুদ্বয় AB রেখার উপর অবস্থিত। $\therefore$ রেখাটির ঢাল, $\tan\theta = \frac{0+5}{5-0} = 1 \therefore \theta = 45°$

07. $(a,0),(0,b),(1,1)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবার শর্ত কোনটি? **[JU'17-18; RU'15-16, 10-11] [Ans: a]**

(a) $a + b = ab$ (b) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 1$ (c) $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = 1$ (d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$

সমাধান: বিন্দুত্রয় সমরেখ হবার শর্ত হচ্ছে, $\frac{a-0}{0-b} = \frac{0-1}{b-1} \Rightarrow ab - a = b \therefore a + b = ab$

08. মূলবিন্দুগামী কোনো সরলরেখার উপরস্থ একটি বিন্দু (10, 5) হলে, রেখাটির ঢাল কত? **[KU'16-17] [Ans: c]**

(a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

সমাধান: $m = \frac{5-0}{10-0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

09. $P(2,7)$ ও $Q(6,-3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল কত? **[JU'15-16] [Ans: b]**

(a) 0.4 (b) −2.5 (c) 2.5 (d) −0.4

সমাধান: নির্ণেয় ঢাল $= \frac{-3-7}{6-2} = \left(-\frac{10}{4}\right) = -2.5$

10. যদি (x, y), $(2, 3)$ এবং $(5, -1)$ একই সরলরেখায় অবস্থিত হয়, তবে নিচের কোনটি সঠিক? **[JnU'15-16] [Ans: b]**

(a) $3x + 4y + 17 = 0$ (b) $4x + 3y - 17 = 0$ (c) $4x - 3y - 17 = 0$ (d) $3x + 4y - 17 = 0$

সমাধান: $\frac{y+1}{x-5} = \frac{3-(-1)}{2-5} = \frac{-4}{3} \Rightarrow 3y + 3 = -4x + 20 \Rightarrow 4x + 3y - 17 = 0$

11. $y = -5x + 9$ রেখার সাথে লম্ব রেখার নতি- **[DU'14-15] [Ans: c]**

(a) 5 (b) −5 (c) $\frac{1}{5}$ (d) $-\frac{1}{5}$

সমাধান: $y = -5x + 9; m_1 = -5;\ m_1m_2 = -1 \therefore m_2 = \frac{1}{5}$

12. $(2,-1),(a+1,a-3)$ ও $(a+2,a)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে, a এর মান - **[JU'14-15; DU'11-12] [Ans: d]**

(a) 4 (b) 2 (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: $(2,-1),(a+1,a-3)$ ও $(a+2,a)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ।

$\therefore \frac{(a+1)-2}{(a-3)-(-1)} = \frac{(a+2)-(a+1)}{a-(a-3)} \Rightarrow \frac{a-1}{a-2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a - 3 = a - 2 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

বিকল্প: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a+1 & a-3 & 1 \\ a+2 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & a-3 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \ [c_1' = c_1 - c_2]$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & a-2 & 1 \\ -1 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - 3c_3 \\ c_2' = c_2 + c_3 \end{bmatrix} \Rightarrow a + 1 + a - 2 = 0 \Rightarrow 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

PULL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-09: বিভিন্ন শর্তের সাপেক্ষে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

❖ **Case-01:** সরলরেখা যে কোনো অক্ষের সমান্তরাল ও একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হলে-

➲ **Concept:** y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $\boxed{x = a}$ এবং x অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $\boxed{y = b}$

❖ **Shortcut:** মনে রাখবে, x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণে কোনো x সংশ্লিষ্ট পদ থাকবে না আর y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণে কোনো y সংশ্লিষ্ট পদ থাকবে না।

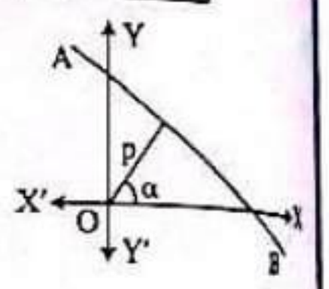
➲ **Concept:** কোনো সরলরেখার ঢাল m এবং y অক্ষ থেকে কর্তিত অংশ c হলে সরলরেখাটির সমীকরণ, $\boxed{y = mx + c}$

➲ **Concept:** (x_1, y_1) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল m হলে, সরলরেখাটির সমীকরণ, $\boxed{(y - y_1) = m(x - x_1)}$

➲ **Concept:** একটি সরলরেখা (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী হলে সরলরেখাটির সমীকরণ, $\boxed{\frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}}$

➲ **Concept:** একটি সরলরেখার x অক্ষের কর্তিতাংশ a এবং y অক্ষের কর্তিতাংশ b হলে সরলরেখাটির সমীকরণ, $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

সরলরেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশ অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|ab|$



➲ **Concept:** মূলবিন্দু থেকে একটি সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং উক্ত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ তৈরি করলে সরলরেখাটির সমীকরণ: $\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha = p}$

MCQ

01. $y = 1 + \frac{1}{2+x}$ বক্ররেখা x-অক্ষকে A বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করলে AB সরলরেখার সমীকরণ নিচের কোনটি? **[DU'22-23] [Ans: c]**

(a) $x + 2y + 3 = 0$ (b) $x + 2y - 3 = 0$ (c) $x - 2y + 3 = 0$ (d) $x - 2y - 3 = 0$

সমাধান: $y = 1 + \frac{1}{2+x}$

x অক্ষের উপর $y = 0 \Rightarrow 0 = 1 + \frac{1}{2+x} \Rightarrow -1 = \frac{1}{2+x} \Rightarrow -1 = 2 + x \therefore x = -3$ এবং $A(-3, 0)$

আবার, y অক্ষের উপর $x = 0 \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{2+0} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \therefore B\left(0, \frac{3}{2}\right)$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{2y}{3} = 1 \Rightarrow \frac{-x+2y}{3} = 1 \Rightarrow -x + 2y = 3 \therefore x - 2y + 3 = 0$

02. মূলবিন্দু হতে যে সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন করে, তার সমীকরণ কোনটি? **[RU'22-23] [Ans: b]**

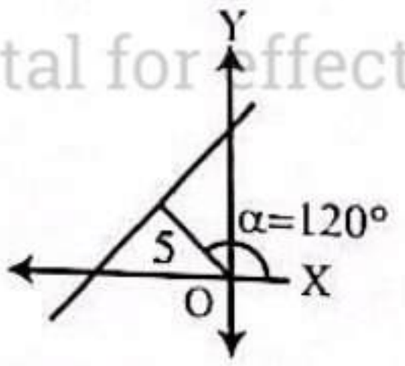
(a) $x + \sqrt{3}y + 10 = 0$ (b) $x - \sqrt{3}y + 10 = 0$ (c) $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$ (d) $\sqrt{3}x + y + 10 = 0$

সমাধান: $x\cos 120° + y\sin 120° = 5$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 5$

$\Rightarrow \sqrt{3}y - x = 10$

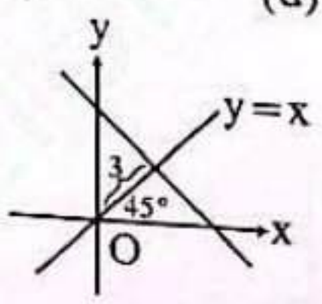
$\therefore x - \sqrt{3}y + 10 = 0$



03. একটি সরলরেখা মূলবিন্দু থেকে $y - x = 0$ রেখাকে 3 একক দূরত্বে লম্বভাবে ছেদ করে। রেখাটির সমীকরণ কোনটি? **[RU'22-23] [Ans: a]**

(a) $x + y = 3\sqrt{2}$ (b) $x - y = 3$ (c) $2x + y = 3$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $y - x = 0 \Rightarrow y = x$ রেখার ঢাল $= \tan\alpha = 1 \therefore \alpha = 45°$



$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P \Rightarrow x\cos 45° + y\sin 45° = 3 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 3$

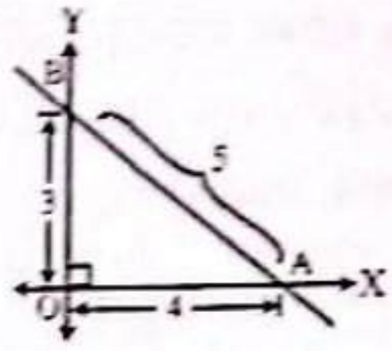
$\therefore x + y = 3\sqrt{2}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

04. $3x + 4y - 12 = 0$ সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার পরিসীমা কত একক? [RU'21-22] [Ans: a]

(a) 12 (b) 13 (c) 16 (d) 24



সমাধান: $3x + 4y - 12 = 0 \Rightarrow 3x + 4y = 12 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

$\therefore$ OA = 4 একক এবং OB = 3 একক।

ΔOAB সমকোণী ত্রিভুজ $\therefore AB^2 = OA^2 + OB^2 = 3^2 + 4^2$

$\therefore$ AB = 5 একক $\therefore$ পরিসীমা = 3 + 4 + 5 = 12 একক

05. $x + 2y = 10$ রেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী মধ্যবিন্দু ও মূলবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ কোনটি? [RU'21-22] [Ans: b]

(a) $2x - y = 0$ (b) $x - 2y = 0$ (c) $2x + y = 0$ (d) $x + 2y = 0$

সমাধান: $x + 2y = 10 \Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$

$\therefore$ x ও y অক্ষের ছেদবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে A (10, 0) ও B (0, 5)

A (10, 0) ও B (0, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু, $C \equiv \left(\frac{10+0}{2}, \frac{5+0}{2}\right) \equiv \left(5, \frac{5}{2}\right)$

$\therefore$ O (0, 0) ও $C\left(5, \frac{5}{2}\right)$ বিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ, $y = \frac{y_1}{x_1}x \Rightarrow y = \frac{\frac{5}{2}}{5}x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x \therefore x - 2y = 0$

06. x- অক্ষ এবং y-অক্ষ হতে কোনো সরলরেখা দ্বারা খণ্ডিত অংশদ্বয়ের যোগফল 8 হলে রেখাটির সমীকরণ নিচের কোনটি?

(a) $5x + 3y = 15$ (b) $x + y = 8$ (c) $5x + 3y = 1$ (d) $5x + 3y = 8$ [JU'20-21] [Ans: a]

সমাধান: $5x + 3y = 15 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1 ; 3 + 5 = 8$

07. $3x - 2y + 6 = 0$ সরলরেখা দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ কত একক? [JU'19-20] [Ans: b]

(a) -5 (b) -2 (c) 4 (d) 3

সমাধান: $3x - 2y = -6 \Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1 \therefore x$ অক্ষের খণ্ডিতাংশ -2 একক।

08. $x - y + \sqrt{3} = 0$ সমীকরণটির বৈশিষ্ট্য নিচের কোনটি? [JU'19-20] [Ans: b]

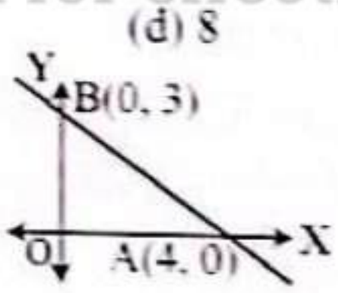
(a) x- অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে (b) উভয় অক্ষের খণ্ডিত অংশ সমান

(c) y-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে (d) কোনোটিই নয়

সমাধান: $x - y = -\sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{-\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 1 \therefore$ উভয় অক্ষের খণ্ডিত অংশ $= |-\sqrt{3}| = |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ একক

09. $3x + 4y = 12$ রেখাটি X অক্ষকে A এবং Y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। AB এর দৈর্ঘ্য কোনটি? [Agri.'19-20] [Ans: a]

(a) 5 (b) 4 (c) 6 (d) 8



সমাধান: $3x + 4y = 12$

$\Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

$\therefore$ AB রেখাংশের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$

10. $y = 2$ রেখার উপর লম্ব এবং (h, k) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কোনটি? [SUST'19-20] [Ans: a]

(a) $x - h = 0$ (b) $x - h = 2$ (c) $y - k = 2$ (d) $y - k = 0$ (e) $x - h = y - k$

সমাধান: $y = 2$ রেখার উপর লম্ব $x = h$ যা (h, k) বিন্দুগামী। $\therefore x - h = 0$

11. $y = mx + c$ সরলরেখাটির ক্ষেত্রে- [KU'19-20] [Ans: b]

(i) রেখাটি মূল বিন্দুগামী (ii) m হলো রেখার ঢাল (iii) c হলো y- অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: মূল বিন্দুগামী রেখায় $c = 0$ হয়।

POLE MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery
CamScanner

12. একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে $\frac{50}{\sqrt{3}}$ বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু হতে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্ব x অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটির সমীকরণ কোনটি? **[RU'18-19] [Ans: a]**

(a) $\sqrt{3}x + y = 10$ (b) $x + \sqrt{3}y = 10$ (c) $10x + y = \sqrt{3}$ (d) $x + 10y = \sqrt{3}$

সমাধান: আমরা পাই, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p = \sqrt{\Delta\sin 2\alpha}$; এখানে $\alpha = 30°, \Delta = \frac{50}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখা: $x\cos 30° + y\sin 30° = \sqrt{\frac{50}{\sqrt{3}}\cdot\sin 60°} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 5 \Rightarrow \sqrt{3}x + y = 10$

13. যে সরলরেখা $(-1,3)$ ও $(4,-2)$ বিন্দু দিয়ে যায়, তার সমীকরণ নির্ণয় করে অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য বের করলে তা কোনটি হবে? **[JU'18-19] [Ans: a]**

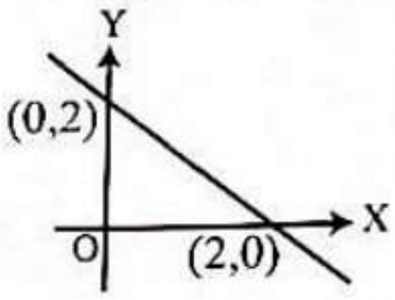
(a) $x + y = 2; 2\sqrt{2}$ (b) $x + y = 1; \sqrt{2}$ (c) $x - y = 1; 2\sqrt{2}$ (d) $x + y = 1; -2\sqrt{2}$

সমাধান: $\frac{x+1}{-1-4} = \frac{y-3}{3+2}$

$\Rightarrow -x - 1 = y - 3$

$\Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$

$\therefore d = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$



14. মূলবিন্দু থেকে $x\sin\alpha + y\cos\alpha = p$ রেখার উপর লম্ব অঙ্কিত হলো। এ লম্ব রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার মান কত? **[BAU'18-19] [Ans: b]**

(a) α (b) $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (c) $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (d) $\pi + \alpha$

সমাধান: প্রদত্ত রেখা: $x\sin\alpha + y\cos\alpha = p \Rightarrow x\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + y\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = p$ এই রেখাকে সরলরেখার আদর্শ সমীকরণ $x\sin\alpha + y\cos\alpha = p$ এর সাথে তুলনা করে বলা যায় যে, নির্ণেয় কোণটি; $\frac{\pi}{2} - \alpha$

15. একটি রেখা দ্বারা উভয় অক্ষ থেকে কর্তিত অংশের পরিমাণ সমান এবং রেখাটি $(-2,1)$ বিন্দু দিয়ে যায়, রেখাটির সমীকরণ কী?

(a) $x = -2y$ (b) $x + y = 0$ (c) $x + y = 1$ (d) $x + y = -1$ **[JU'17-18] [Ans: d]**

সমাধান: $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x + y = a$, রেখাটি $(-2,1)$ বিন্দুগামী হলে, $a = -1$

অতএব, রেখাটির সমীকরণ: $x + y = -1$

16. $y = mx + c$ রেখাটির যে কোনো বিন্দু থেকে $(0, 3)$ এবং $(0, -4)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে রেখাটির জন্য নিচের কোনটি সত্য?

(a) y অক্ষের সমান্তরাল (b) $m = 1$ (c) $c = 1$ (d) x অক্ষের সমান্তরাল **[JU'17-18] [Ans: d]**

সমাধান: ধরি, রেখাটির উপর একটি বিন্দু $P(x,y)$

শর্তমতে, $\sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+4)^2} \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = y^2 + 8y + 16$

$\therefore y = \frac{-1}{2}$; যা x অক্ষের সমান্তরাল।

17. $\sqrt{3}y + x = 7$ সরলরেখাটি x অক্ষের যোগবোধক দিকের সাথে যে কোণটি উৎপন্ন করে তার মান এবং y অক্ষ হতে খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য কত? **[CU'16-17] [Ans: c]**

(a) $120°, 7$ (b) $30°, \frac{7}{3}$ (c) $150°, \frac{7}{\sqrt{3}}$ (d) $150°, \frac{7}{3}$

সমাধান: $\sqrt{3}\,y + x = 7$ বা, $y = \frac{-1}{\sqrt{3}}x + \frac{7}{\sqrt{3}}$ কে $y = mx + c$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $c = \frac{7}{\sqrt{3}} = y$ অক্ষের খণ্ডিতাংশ; $m = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \tan\theta \ \therefore \theta = 150°$

18. $(6,9)$ ও $(4, 3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?

(a) $3x + y - 9 = 0$ (b) $3x - y - 27 = 0$ (c) $3x - y - 9 = 0$ (d) $3x + y - 27 = 0$ **[JU'16-17] [Ans: c]**

সমাধান: $\frac{x-6}{6-4} = \frac{y-9}{9-3} \Rightarrow 3x - y - 9 = 0$

19. যে সরলরেখা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যে $OA - OB = 2$ হয়, যদি O মূলবিন্দু হয়, তবে সরলরেখাটির সমীকরণ কি?

(a) $2x + 3y = 12$ (b) $3x + 2y = 12$ (c) $x + y = 12$ (d) $2x + 5y = 2$ **[RU'15-16] [Ans: a]**

PDF MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery
CamScanner

সমাধান: ধরি, সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{OA}+\frac{y}{OB}=1 \Rightarrow \frac{x}{2+OB}+\frac{y}{OB}=1$

$\Rightarrow \frac{3}{2+OB}+\frac{2}{OB}=1 \Rightarrow 3\cdot OB+4+2\cdot OB=OB^2+2\cdot OB \Rightarrow OB^2-3\cdot OB-4=0$

$\therefore OB=4$ অথবা, $OB=-1 \ \therefore OA=6$ অথবা, $OA=1$

সুতরাং, নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $2x+3y=12$ অথবা $x-y=1$

20. কোনো সরলরেখা $(3,5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং অক্ষ দুটি থেকে বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। সরলরেখাটির সমীকরণ হবে– **[RU'09-10; JU'14-15] [Ans: d]**

(a) $x+y+2=0$ (b) $x-y+1=0$ (c) $x-y=2$ (d) $x-y+2=0$

সমাধান: $x-y=a \Rightarrow 3-5=a=-2 \Rightarrow$ সরলরেখা, $x-y=-2 \Rightarrow x-y+2=0$

21. মূলবিন্দুগামী এবং x -অক্ষের সাথে $135°$ কোণ উৎপন্নকারী সরলরেখার সমীকরণ- **[CU'14-15] [Ans: d]**

(a) $x-\sqrt{3y}=0$ (b) $x=0$ (c) $y=0$ (d) $x+y=0$

সমাধান: $m=\tan(135°)=-1 \ \therefore$ রেখাটি $y=mx \Rightarrow y=-x \Rightarrow x+y=0$

22. সরলরেখার সমীকরণ কোনটি যে y অক্ষকে -8 বিন্দুতে ছেদ করে এবং x অক্ষের সাথে $45°$ হেলানো অবস্থায় আছে? **[CU'11-12]**

(a) $x+y+8=0$ (b) $3x=8y=1$ (c) $x-y=8$ (d) $y=8$ (e) $x=8$ **[Ans: c]**

সমাধান: $m=\tan 45°=1; c=-8 \therefore y=x-8 \therefore x-y=8$

23. $(4,-5)$ বিন্দুগামী x- অক্ষের উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ- **[JU'11-12] [Ans: b]**

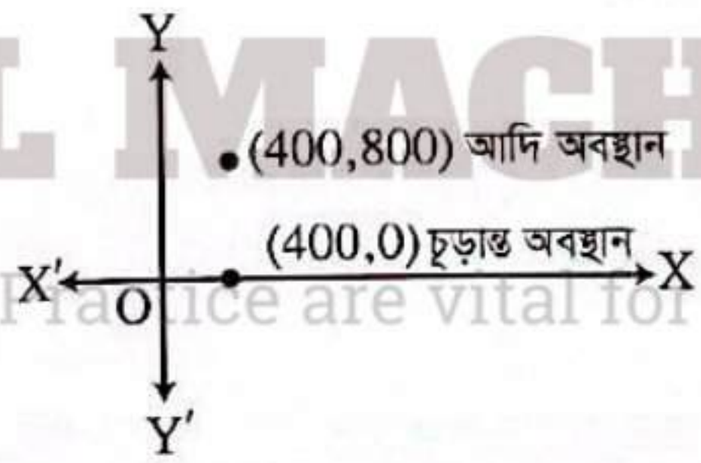
(a) $y+5=0$ (b) $x-4=0$ (c) $y-5=0$ (d) $x+4=0$

সমাধান: $x=a$; $(4,-5)$ বিন্দু দিয়ে যায় বলে, $x=4 \therefore x-4=0$

24. একটি বিমান অবতরণকালে কোনো এক সময়ে $(400,800)$ বিন্দুতে অবস্থান করে এবং কিছুক্ষণের মধ্যে বিমানটি $(400,0)$ বিন্দুতে অবস্থান করে। তাহলে বিমানটি কি হবে? **[RU'08-09] [Ans: b]**

(a) বিধ্বস্ত হবে না (b) বিধ্বস্ত হবে (c) আরও উর্ধ্বমুখী হবে (d) কোনটি হবে না

সমাধান:



বুঝাই যাচ্ছে, যেহেতু চূড়ান্ত অবস্থান ভূমিতে তাই অতি অল্প সময় ব্যবধানে এরূপ অবস্থান পরিবর্তনে বিমানটি বিধ্বস্ত হবে।

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Written

01. $x=2, x=4, y=4$ এবং $y=6$ রেখা দ্বারা গঠিত বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ বের কর। **[DU'19-20]**

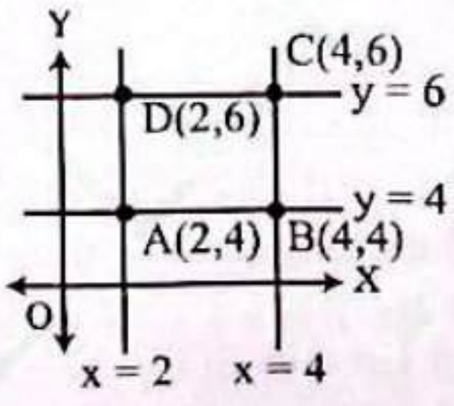
সমাধান: AC রেখার সমীকরণ: $\frac{y-6}{6-4}=\frac{x-4}{4-2} \Rightarrow y-6=x-4$

$\Rightarrow x-y+2=0$

BD রেখার সমীকরণ: $\frac{y-6}{6-4}=\frac{x-2}{2-4}$

$\Rightarrow y-6=2-x$

$\Rightarrow x+y-8=0$ **(Ans.)**



CamScanner

Type-10: দুইটি সমীকরণ একই সরলরেখা নির্দেশ করার শর্ত

➲ **Formula & Concept:**

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সরলরেখাদ্বয় একই সরলরেখা নির্দেশ করলে, $\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$

MCQ

01. $2x - 5y + 9 = 0$ ও $5ax + 8by = 15$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে a ও b এর মান কত? **[JU'17-18] [Ans: a]**

(a) $a = -\frac{2}{3}, b = \frac{25}{24}$ (b) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{25}{24}$
(c) $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{25}{24}$ (d) $a = -\frac{3}{2}, b = -\frac{25}{24}$

সমাধান: $\frac{2}{5a} = \frac{-5}{8b} = \frac{9}{-15} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}, b = \frac{25}{24}$

02. $2x + 3y - 4 = 0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান- **[DU'16-17] [Ans: d]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ (d) $\frac{4}{\sqrt{13}}$

সমাধান: $\frac{\cos\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{3} = \frac{p}{4}, \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \ \therefore \frac{p^2}{4} + \frac{9p^2}{16} = 1 \Rightarrow p = \frac{4}{\sqrt{13}}$

03. $3x + 7y = 21$ এবং $2ax - 3by + 6 = 0$ সমীকরণদ্বয় একই সরলরেখা সূচিত করলে a এবং b এর মান হবে যথাক্রমে-

(a) 3, 5 (b) $\frac{3}{7}, \frac{2}{4}$ (c) $\frac{3}{7}, -\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{3}{7}, \frac{2}{3}$ **[CU'14-15; KU'12-13] [Ans: d]**

সমাধান: $3x + 7y = 21$ এবং $2ax - 3by = -6$ এখন, $\frac{2a}{3} = \frac{-3b}{7} = \frac{-6}{21} = -\frac{2}{7}$

$\Rightarrow \frac{2a}{3} = -\frac{2}{7} \Rightarrow a = -\frac{2}{7} \times \frac{3}{2} \therefore a = \frac{-3}{7}; \frac{-3b}{7} = -\frac{2}{7} \Rightarrow 3b = 2 \therefore b = \frac{2}{3}$

Written

01. $3x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা হলে α এবং p এর মান নির্ণয় কর। **[RU'19-20]**

সমাধান: $3x + \sqrt{3}y + 2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{\frac{-2}{3}} + \frac{y}{\frac{-2}{\sqrt{3}}} = 1 \ldots\ldots\ldots$ (i)

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \Rightarrow \frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}} = 1 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

$\frac{p}{\cos\alpha} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3p}{2} \ldots\ldots\ldots$ (iii)

$\frac{p}{\sin\alpha} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}p}{-2} \ldots\ldots\ldots$ (iv)

$(iii)^2 + (iv)^2 \Rightarrow 1 = p^2\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right) \Rightarrow 1 = p^2\left(\frac{12}{4}\right) \Rightarrow 1 = p^2 \times 3 \therefore p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

(iv) ÷ (iii) আমরা পাই, $\tan\alpha = \frac{-\sqrt{3}p}{2} \times \frac{2}{-3p} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\alpha = \tan 30^\circ$

$\Rightarrow \tan\alpha = \tan(180^\circ + 30^\circ) \therefore \alpha = 210^\circ$ [∵ ৩য় চতুর্ভাগে sine ও cosine উভয়ে ঋণাত্মক]

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-11: তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়া সম্পর্কিত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

$a_1x + b_1y + c_1 = 0; a_2x + b_2y + c_2 = 0; a_3x + b_3y + c_3 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে যদি, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ হয়।

MCQ

01. $3x + 5y = 2, 2x + 3y = 0, ax + by + 1 = 0$ সমবিন্দুগামী হলে a এবং b এর সম্পর্ক- **[DU'14-15] [Ans: c]**

(a) $4a - 6b = 1$ (b) $4a - 6b = 2$ (c) $6a - 4b = 1$ (d) $6a - 4b = 2$

সমাধান: ছেদবিন্দুটি হল $(-6, 4) \ \therefore -6a + 4b + 1 = 0 \Rightarrow 6a - 4b = 1$

বিকল্প: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(3 - 0) - 5(2 - 0) - 2(2b - 3a) \Rightarrow -1 - 4b + 6a = 0 \Rightarrow 6a - 4b = 1$

CamScanner

Type-12: সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়

Formula & Concept:

➢ দুটি সরলরেখা সমান্তরাল হবে যদি তাদের ঢাল সমান থাকে। সরলরেখাদ্বয়ের ঢাল m_1 ও m_2 হলে, $m_1 = m_2$

➢ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

➢ কোনো সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ বের করতে বললে, x ও y উভয়ের সহগই একই রেখে নতুন ধ্রুবক যোগ করতে হবে। যেমন: $ax + by + c = 0$ এর সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $\boxed{ax + by + k = 0}$

❖ Shortcut:

➢ (x_1, y_1) বিন্দুগামী $ax + by + c = 0$ এর সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $\boxed{ax + by = ax_1 + by_1}$

➢ (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) এর সংযোগ সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ -

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}(x - x_1)}$$

MCQ

01. k-এর মান কত হলে, $5x + 4y - 6 = 0$ এবং $2x + ky + 9 = 0$ রেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হবে? **[RU'22-23] [Ans: c]**

(a) 1 (b) $\frac{5}{8}$ (c) $\frac{8}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: $m_1 = m_2 \Rightarrow -\frac{5}{4} = -\frac{2}{k} \Rightarrow k = \frac{8}{5}$

02. $(-8,3)$ এবং $(2,1)$ বিন্দুগামী সরলরেখা $(11, -1)$ এবং $(k, 0)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমান্তরাল হলে k এর মান কত? **[JU'21-22]**

(a) 6 (b) 5 (c) 7 (d) 8 **[Ans: a]**

সমাধান: $\frac{3-1}{-8-2} = \frac{-1-0}{11-k} \therefore k = 6$

03. $3x - 2y + 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ কোনটি? **[JU'18-19] [Ans: a]**

(a) $3x - 2y = 0$ (b) $2x - 3y = 0$ (c) $2x - 3y - 1 = 0$ (d) $2x + 3y = 0$

সমাধান: $3x - 2y = 3(0) - 2(0) = 0$

04. $(1,2)$ বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ- **[JnU'17-18] [Ans: a]**

(a) $3x - 4y + 5 = 0$ (b) $3x - 4y + 7 = 0$ (c) $3x - 4y - 5 = 0$ (d) $3x - 4y - 7 = 0$

সমাধান: $3x - 4y = 3 \times 1 - 4 \times 2 = -5$

05. α এর কোন মানের জন্য $(\alpha - 1)x + (\alpha + 1)y - 7 = 0$ রেখাটি $3x + 5y + 7 = 0$ রেখার সমান্তরাল হবে? **[RU'16-17]**

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 **[Ans: b]**

সমাধান: $-\frac{\alpha-1}{\alpha+1} = -\frac{3}{5} \Rightarrow 3\alpha + 3 = 5\alpha - 5 \Rightarrow 2\alpha = 8 \therefore \alpha = 4$

06. দুইটি সরলরেখা $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ার শর্ত কী? **[JU'14-15] [Ans: b]**

(a) $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ (b) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (c) $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$ (d) $a_1a_2 - b_1b_2 = 0$

সমাধান: সমান্তরাল হলে, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-13: লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয়

Formula & Concept:

➢ দুটি সরলরেখার ঢাল m_1 ও m_2 হলে, রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি $m_1 . m_2 = -1$ হয়।

➢ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

➢ কোনো সরলরেখার উপরে লম্বরেখার সমীকরণ বের করতে বললে x ও y এর সহগদ্বয় interchange করবে এবং যেকোনো একটি সহগের চিহ্ন change করবে এবং একটি নতুন ধ্রুবক যোগ করবে। যেমন: $ax + by + c = 0$ এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $\boxed{bx - ay + k = 0}$

CamScanner

❖ **Shortcut:**

➢ (x_1, y_1) বিন্দুগামী $ax + by + c = 0$ এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $\boxed{bx - ay = bx_1 - ay_1}$

➢ (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার লম্ব সরলরেখার সমীকরণ

$\boxed{y - y_1 = -\frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}(x - x_1)}$

MCQ

01. (1,1) বিন্দুগামী ও $2x - 3y - 5 = 0$ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ কোনটি? **[DU'23-24] [Ans: a]**

(a) $3x + 2y - 5 = 0$ (b) $3x + 2y + 5 = 0$ (c) $3x - 2y - 1 = 0$ (d) $-2x + 3y + 1 = 0$

সমাধান:

∴ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $3x + 2y = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \therefore 3x + 2y - 5 = 0$

Shortcut: নির্ণেয় রেখা: $3x + 2y = 3(1) + 2(1) \Rightarrow 3x + 2y - 5 = 0$

02. $5x - 3y + 5 = 0$, রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: c]**

(a) 5 (b) -3 (c) $-\frac{3}{5}$ (d) $\frac{3}{5}$

সমাধান: $5x - 3y + 5 = 0$ এর ঢাল $= \frac{5}{3}$ ∴ লম্বরেখার ঢাল $= -\frac{3}{5}$

03. $3x - py - 3 = 0$ রেখাটি $\frac{5}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখার উপর লম্ব হলে p এর মান কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: a]**

(a) -5 (b) -3 (c) 5 (d) 3

সমাধান: $3x - py - 3 = 0$ রেখার ঢাল $= \frac{-3}{-p} = \frac{3}{p} \therefore \frac{3}{p} \times \frac{5}{3} = -1 \therefore p = -5; [\because m_1 \times m_2 = -1]$

04. $5x - 7y - 15 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব এবং $(2, -3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হবে– **[JU'23-24; DU'16-17, 10-11; JnU'16-17; CU'15-16] [Ans: d]**

(a) $7x - 5y - 29 = 0$ (b) $5x - 7y - 31 = 0$ (c) $5x + 7y + 11 = 0$ (d) $7x + 5y + 1 = 0$

সমাধান: $7x + 5y + k = 0$, $(2, -3)$ বিন্দুগামী বলে, $7 \cdot 2 + 5(-3) + k = 0 \Rightarrow k = 1 \therefore 7x + 5y + 1 = 0$

05. k-এর মান কত হলে, $2x - y - 7 = 0$ ও $3x + ky - 5 = 0$ রেখা দুটি পরস্পর লম্ব হবে? **[RU, CU'22-23; JU'22-23] [Ans: b]**

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 3

সমাধান: $m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow 2 \times \left(-\frac{3}{k}\right) = -1 = k = 6$

বিকল্প: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ পরস্পর লম্ব হলে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ হয়।

$\therefore 2 \times 3 + (-1)(k) = 0 \Rightarrow k = 6$

06. A (2, 1) ও B (5, 2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ কোনটি? **[RU'21-22] [Ans: b]**

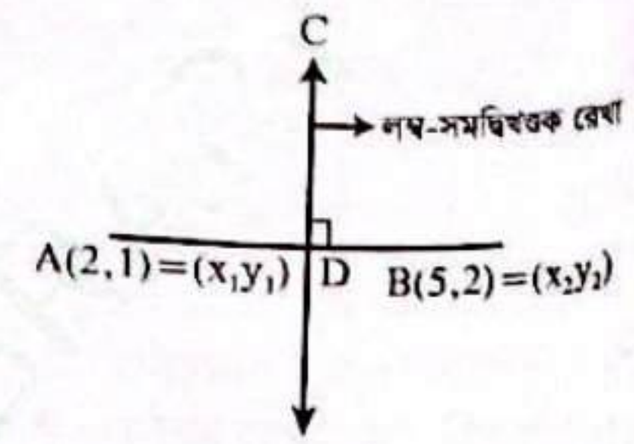
(a) $3x + 2y = 12$ (b) $3x + y = 12$ (c) $6x + 2y = 12$ (d) $3x - y = 12$

সমাধান: A (2, 1) ও B (5, 2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখার সমীকরণ, $\frac{y-1}{1-2} = \frac{x-2}{2-5}$

$\Rightarrow \frac{y-1}{-1} = \frac{x-2}{-3} \Rightarrow 3y - 3 = x - 2 \Rightarrow x - 3y + 1 = 0$

A(2, 1) ও B (5, 2) সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু, $C \equiv \left(\frac{2+5}{2}, \frac{1+2}{2}\right) \equiv \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

∴ লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $3x + y = \frac{3 \cdot 7}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow 3x + y = 12$



Shortcut: A (2, 1) ও B (5, 2) এর সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y = \frac{1}{2}[x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2]$

$\Rightarrow (2 - 5)x + (1 - 2)y = \frac{1}{2}[2^2 + 1^2 - 5^2 - 2^2] \Rightarrow -3x - y = -12 \therefore 3x + y = 12$

07. একটি সরলরেখা কর্তৃক y অক্ষের খণ্ডিতাংশ 3 এবং রেখাটি $2x + 3y = 5$ এর উপর লম্ব। রেখাটির সমীকরণ কোনটি? **[JU'21-22] [Ans: a]**

(a) $3x - 2y + 6 = 0$ (b) $3x - 2y - 5 = 0$ (c) $3x - 2y + 5 = 0$ (d) $3x + 2y + 13 = 0$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

সমধান: $2x + 3y = 5$ রেখার লম্বরেখার সমীকরণ, $3x - 2y + k = 0$ ... ... (i)

এখন, (i) $3x - 2y = -k \therefore \frac{x}{\frac{-k}{3}} + \frac{y}{\frac{k}{2}} = 1$

প্রশ্নমতে, y অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $\frac{k}{2} = 3 \therefore k = 6$

(i) $\Rightarrow$ সরলরেখাটির সমীকরণ, $3x - 2y + 6 = 0$

বিকল্প: প্রদত্ত রেখার ঢাল $= -\frac{2}{3} \therefore$ লম্ব রেখার ঢাল, $m = \frac{3}{2}$ এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $c = 3$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $y = mx + c \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow 3x - 2y + 6 = 0$

08. $2x + 3y + 4 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং $(3, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নিচের কোনটি? **[JU'21-22] [Ans: d]**

(a) $2x + 3y + 13 = 0$ (b) $2x + 3y - 12 = 0$ (c) $3x - 2y + 4 = 0$ (d) $3x - 2y - 13 = 0$

সমাধান: ঢাল, $m = -\frac{2}{3} \therefore$ লম্বের ঢাল $= \frac{3}{2}$; $\therefore$ সমীকরণ হলো $(y + 2) = \frac{3}{2}(x - 3)$;

$\Rightarrow y + 2 = \frac{3x}{2} - \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{3x}{2} - y - \frac{13}{2} = 0 \therefore 3x - 2y - 13 = 0$

09. $2x - y + 7 = 0$ এবং $3x - ay - 5 = 0$ রেখা দুইটি লম্ব হলে 'a' এর মান কোনটি? **[CU'20-21] [Ans: c]**

(a) $-\frac{3}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) -6 (d) 6

সমাধান: $2x - y + 7 = 0 \Rightarrow y = 2x + 7 ; m_1 = 2$

$3x - ay - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{a}x - \frac{5}{a} ; m_2 = \frac{3}{a}$; লম্ব হলে, $m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \frac{6}{a} = -1 \therefore a = -6$

10. দুইটি সরলরেখা $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত কোনটি? **[JnU'14-15, 12-13; RU'09-10] [Ans: a]**

(a) $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ (b) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ (c) $a_1a_2 - b_1b_2 = 0$ (d) $a_1a_2 = b_1b_2$

Type-14: দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

এই সমস্যাগুলোতে দুইটি সরলরেখার সমীকরণ দেওয়া থাকে। তাদের ছেদবিন্দুগামী (এবং অপর একটি শর্তের সাপেক্ষে) আরেকটি সরলরেখার সমীকরণ বের করতে বলা হয়।

এই পদ্ধতিতে প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয় করতে হয়। এরপর, ঐ ছেদবিন্দুগামী এবং অপর শর্তটি মেনে চলা সরলরেখার সমীকরণই নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

আবার শর্তসাপেক্ষে তৃতীয় সমীকরণ ধরে নিয়ে রেখাত্রয় একই বিন্দু দিয়ে গমন করে বলে তাদের x ও y এর সহগ এবং ধ্রুবক নিয়ে গঠিত নির্ণায়কের মান শূন্য। পরবর্তীতে অজানা রাশির মান নির্ণয় করে তৃতীয় সমীকরণ নির্ণয় করা যায়।

আবার, k এর যে কোনো অশূন্য মানের জন্য $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b^2y + c_2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হবে, $a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b^2y + c_2) = 0$ বা $L_1 + kL_2 = 0$

MCQ

01. y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $y = 5 - x$ ও $y - x - 3 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: c]**

(a) $2y + 1 = 0$ (b) $y - 1 = 0$ (c) $x - 1 = 0$ (d) $x = 0$

সমাধান: $y = 5 - x$; $y - x - 3 = 0 \Rightarrow y = x + 3$;

$\therefore x + 3 = 5 - x \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \therefore y = 4$, ছেদবিন্দুটি হবে $(1,4)$

$\therefore$ y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $(1, 4)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $x = 1 \therefore x - 1 = 0$

বিকল্প: প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ হবে; $x + y - 5 + k(x - y + 3) = 0$ ... ... (i) [$\because L_1 + kL_2 = 0$]

$\Rightarrow (1 + k)x + (1 - k)y + 3k - 5 = 0$; শর্তে ইহা y-অক্ষের সমান্তরাল হবে বলে y এর সহগ $1 - k = 0$ হবে $\Rightarrow k = 1$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $x + y - 5 + x - y + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$

POLE MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

02. y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x-7y+11=0$ ও $x+3y=8$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ-

(a) $13x-23=0$ (b) $3x-7=0$ (c) $7x-3=0$ (d) $23x-13=0$ **[DU'22-23, 17-18] [Ans: a]**

সমাধান: এখানে, $2x-7y+11=0$ ..... (i)

এবং $x+3y=8 \Rightarrow x=8-3y$

$\therefore x=8-\frac{81}{13}$; [$y=\frac{27}{13}$ বসিয়ে] $=\frac{23}{13}$

$\therefore$ সমীকরণ: $x=\frac{23}{13} \Rightarrow 13x-23=0$

(i) নং সমীকরণে x এর মান বসাই,

$2(8-3y)-7y+11=0$

$\Rightarrow 16-6y-7y+11=0 \Rightarrow y=\frac{27}{13}$

বিকল্প: প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ হবে; $2x-7y+11+k(x+3y-8)=0$ ..... (i)

$[\because L_1+kL_2=0]$

$\Rightarrow (2+k)x+(3k-7)y+11-8k=0$; শর্তে ইহা y-অক্ষের সমান্তরাল হবে বলে y এর সহগ $3k-7=0$ হবে $\Rightarrow k=\frac{7}{3}$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $2x-7y+11+\frac{7}{3}(x+3y-8)=0 \Rightarrow 13x-23=0$

03. $x-y-6=0$ এবং $3x-8y+3=0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী যা মূলবিন্দু দিয়ে যায়, এরূপ রেখার সমীকরণ হল- **[CU'22-23]**

(a) $x-y$ (b) $3x-8y=0$ (c) $y=mx+c$ (d) $7x-17y=0$ **[Ans: d]**

সমাধান: সমীকরণদ্বয় সমাধান করে পাই, $x=\frac{51}{5}, y=\frac{21}{5}$ | $\frac{x}{-51}=\frac{y}{-21}=\frac{7}{-5}$ | $1x-1y-6=0$, $3x-8y+3=0$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ: $y=\frac{\frac{21}{5}}{\frac{51}{5}}x$ বা, $21x-51y=0$ বা, $7x-17y=0$

বিকল্প: প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ হবে; $x-y-6+k(3x-8y+3)=0$ ..... (i)

$\Rightarrow (1+3k)x-(1+8k)y+3k-6=0$; শর্তে ইহা মূলবিন্দুগামী হবে $\therefore 0-0+3k-6=0 \therefore k=2$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $x-y-6+2(3x-8y+3)=0 \Rightarrow 7x-17y=0$

04. $5x+4y-3=0$ এবং $7y-6x-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $x+y-3=0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ-

[KU'14-15] [Ans: a]

(a) $59x-59y+42=0$ (b) $58x-61y+42=0$

(c) $59x+59y+42=0$ (d) $58x+61y+42=0$

সমাধান: ধরি, $x+y-3=0$ এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $x-y+k=0$ $\because$ রেখাত্রয় একই বিন্দুগামী।

$\therefore \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 5 & 4 & -3 \\ -6 & 7 & -5 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 1-43+59k=0 \Rightarrow k=\frac{42}{59} \therefore x-y+\frac{42}{59}=0 \Rightarrow 59x-59y+42=0$

বিকল্প: প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ হবে; $5x+4y-3+k(6x-7y+5)=0$ ..... (i)

$\Rightarrow (5+6k)x+(4-7k)y+5k-3=0$; যার ঢাল $m_1=-\frac{5+6k}{4-7k}$ এবং প্রদত্ত অপর রেখার ঢাল $m_2=-1$

$\therefore$ শর্তে; $m_1m_2=-1 \Rightarrow -\left(\frac{5+6k}{4-7k}\right)(-1)=-1 \Rightarrow 5+6k=-4+7k \Rightarrow k=9$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখা: $5x+4y-3+9(6x-7y+5)=0 \Rightarrow 59x-59y+42=0$

05. $x+y=3$ এবং $y-x=1$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ-**[DU'13-14] [Ans: a]**

(a) $y=2$ (b) $2y=3$ (c) $x=1$ (d) $x+3=0$

সমাধান: $x+y=3$ ..... (1); $y-x=1$ ..... (2)

(1) ও (2) নং সমাধান করে $x=1, y=2 \therefore$ x অক্ষের সমান্তরাল বলায় রেখার সমীকরণ $y=2$

বিকল্প: প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখা হবে; $L_1+kL_2=0 \Rightarrow x+y-3+k(x-y+1)=0$ ..... (i)

$\Rightarrow (1+k)x+(1-k)y+k-3=0$; যা x অক্ষের সমান্তরাল হবে বলে, x-এর সহগ $(1+k)=0$ হবে $\therefore k=-1$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $x+y-3-(x-y+1)=0 \Rightarrow y=2$

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-15: বহিঃস্থ বিন্দু হতে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব সম্পর্কিত সমস্যা

Formula & Concept:

(x_1, y_1) বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব দূরত্ব, $d = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

MCQ

01. $3x + 4y = 12$ রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করলে, মূলবিন্দু হতে AB রেখার উপর লম্ব দুরত্ব কত? **[GST'23-24] [Ans: a]**

(a) $\frac{12}{5}$ (b) $\frac{5}{12}$ (c) $\frac{12}{25}$ (d) $\frac{7}{5}$

সমাধান: মূলবিন্দু (0,0) হতে $3x + 4y - 12 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব, $d = \frac{|3.0+4.0-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{12}{5}$ একক

02. $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c + 3)$ রেখাদ্বয় মূলবিন্দু হতে সমদূরবর্তী হলে c এর মান কত? **[JU'23-24] [Ans: a]**

(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 8

সমাধান: প্রশ্নমতে, $\left|\frac{-c}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \left|\frac{-2(c+3)}{\sqrt{12^2+5^2}}\right| \Rightarrow \frac{c}{5} = \frac{\pm 2(c+3)}{13}$

(+) নিয়ে, $\frac{c}{5} = \frac{2(c+3)}{13}$
$\Rightarrow 13c = 10c + 30 \therefore c = 10$

(−) নিয়ে, $\frac{c}{5} = \frac{-2(c+3)}{13}$
$\Rightarrow 13c = -10c - 30 \Rightarrow 23c = -30 \therefore c = \frac{-30}{23}$

03. মূলবিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব কত? **[JU'21-22] [Ans: b]**

(a) 5 (b) 1 (c) 3 (d) 4

সমাধান: মূলবিন্দু(0,0) হতে $3x - 4y + 5 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব, $d = \frac{|3.0-4.0+5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|5|}{5} = 1$ একক

04. $(-2,3)$ বিন্দু হতে $x - y = 5$ রেখার লম্ব দূরত্ব কত? **[JU'19-20] [Ans: b]**

(a) $2\sqrt{5}$ (b) $5\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{5}$

সমাধান: $d = \frac{|-2-3-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

05. যে সরলরেখা (3,6) বিন্দু দিয়ে যায় এবং মূলবিন্দু থেকে যার দূরত্ব 6 একক তার সমীকরণ কোনটি হবে? **[JU'18-19] [Ans: a]**

(a) $4x + 3y - 30 = 0$ (b) $4x - 3y - 30 = 0$
(c) $4x - 3y + 30 = 0$ (d) $-4x + 3y - 30 = 0$

সমাধান: $y - 6 = m(x - 3) \Rightarrow mx - y + 6 - 3m = 0 \therefore d = \frac{6-3m}{\sqrt{m^2+1}} = \pm 6$

$\frac{2-m}{\sqrt{m^2+1}} = \pm 2 \Rightarrow \frac{4+m^2-4m}{m^2+1} = 4 \Rightarrow 4 + m^2 - 4m = 4m^2 + 4 \Rightarrow 3m^2 + 4m = 0 \Rightarrow m = 0, \frac{-4}{3}$

$y - 6 = -\frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y - 18 = -4x + 12 \therefore 4x + 3y - 30 = 0$

বিকল্প: অপশন (a) এর রেখাটি কেবল (3, 6) বিন্দুগামী অর্থাৎ সঠিক উত্তর (a)।

06. মূলবিন্দু থেকে 4 একক দূরবর্তী এবং –1 ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ কোনটি? **[RU'17-18] [Ans: a]**

(a) $y + x \pm 4\sqrt{2} = 0$ (b) $y - x \pm 4\sqrt{2} = 0$
(c) $y + 4\sqrt{2}x = 0$ (d) $4\sqrt{2}x - y = 0$

সমাধান: $y = mx + c \because m = -1 \therefore x + y - c = 0$

(0,0) বিন্দু হতে, $\left|\frac{c}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = 4 \therefore c = \pm 4\sqrt{2} \therefore x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$

07. (0,0) বিন্দু থেকে $x + y = 1$ রেখার সর্বনিম্ন দূরত্ব কত? **[JU'17-18] [Ans: c]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) 1

সমাধান: সর্বনিম্ন দূরত্ব = লম্ব দূরত্ব = $\left|\frac{0+0-1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ একক

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with CamScanner

Type-15: বহিঃস্থ বিন্দু হতে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব সম্পর্কিত সমস্যা

Formula & Concept:

(x_1, y_1) বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব দূরত্ব, $d = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

MCQ

01. $3x + 4y = 12$ রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করলে, মূলবিন্দু হতে AB রেখার উপর লম্ব দুরত্ব কত? **[GST'23-24] [Ans: a]**

(a) $\frac{12}{5}$ (b) $\frac{5}{12}$ (c) $\frac{12}{25}$ (d) $\frac{7}{5}$

সমাধান: মূলবিন্দু (0,0) হতে $3x + 4y - 12 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব, $d = \frac{|3\cdot0+4\cdot0-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{12}{5}$ একক

02. $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c + 3)$ রেখাদ্বয় মূলবিন্দু হতে সমদূরবর্তী হলে c এর মান কত? **[JU'23-24] [Ans: a]**

(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 8

সমাধান: প্রশ্নমতে, $\left|\frac{-c}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \left|\frac{-2(c+3)}{\sqrt{12^2+5^2}}\right| \Rightarrow \frac{c}{5} = \frac{\pm2(c+3)}{13}$

(+) নিয়ে, $\frac{c}{5} = \frac{2(c+3)}{13}$
$\Rightarrow 13c = 10c + 30 \therefore c = 10$

(−) নিয়ে, $\frac{c}{5} = \frac{-2(c+3)}{13}$
$\Rightarrow 13c = -10c - 30 \Rightarrow 23c = -30 \therefore c = \frac{-30}{23}$

03. মূলবিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব কত? **[JU'21-22] [Ans: b]**

(a) 5 (b) 1 (c) 3 (d) 4

সমাধান: মূলবিন্দু(0,0) হতে $3x - 4y + 5 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব, $d = \frac{|3.0-4.0+5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|5|}{5} = 1$ একক

04. $(-2,3)$ বিন্দু হতে $x - y = 5$ রেখার লম্ব দূরত্ব কত? **[JU'19-20] [Ans: b]**

(a) $2\sqrt{5}$ (b) $5\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{5}$

সমাধান: $d = \frac{|-2-3-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

05. যে সরলরেখা (3, 6) বিন্দু দিয়ে যায় এবং মূলবিন্দু থেকে যার দূরত্ব 6 একক তার সমীকরণ কোনটি হবে? **[JU'18-19] [Ans: a]**

(a) $4x + 3y - 30 = 0$ (b) $4x - 3y - 30 = 0$
(c) $4x - 3y + 30 = 0$ (d) $-4x + 3y - 30 = 0$

সমাধান: $y - 6 = m(x - 3) \Rightarrow mx - y + 6 - 3m = 0 \therefore d = \frac{6-3m}{\sqrt{m^2+1}} = \pm6$

$\frac{2-m}{\sqrt{m^2+1}} = \pm2 \Rightarrow \frac{4+m^2-4m}{m^2+1} = 4 \Rightarrow 4 + m^2 - 4m = 4m^2 + 4 \Rightarrow 3m^2 + 4m = 0 \Rightarrow m = 0, \frac{-4}{3}$

$y - 6 = -\frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y - 18 = -4x + 12 \therefore 4x + 3y - 30 = 0$

বিকল্প: অপশন (a) এর রেখাটি কেবল (3, 6) বিন্দুগামী অর্থাৎ সঠিক উত্তর (a)।

06. মূলবিন্দু থেকে 4 একক দূরবর্তী এবং –1 ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ কোনটি? **[RU'17-18] [Ans: a]**

(a) $y + x \pm 4\sqrt{2} = 0$ (b) $y - x \pm 4\sqrt{2} = 0$
(c) $y + 4\sqrt{2}x = 0$ (d) $4\sqrt{2}x - y = 0$

সমাধান: $y = mx + c \because m = -1 \therefore x + y - c = 0$

(0,0) বিন্দু হতে, $\left|\frac{c}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = 4 \therefore c = \pm4\sqrt{2} \therefore x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$

07. (0,0) বিন্দু থেকে $x + y = 1$ রেখার সর্বনিম্ন দূরত্ব কত? **[JU'17-18] [Ans: c]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) 1

সমাধান: সর্বনিম্ন দূরত্ব = লম্ব দূরত্ব = $\left|\frac{0+0-1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ একক

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-16: সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব সম্পর্কিত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

দুটি সমান্তরাল সরলরেখা $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

MCQ

01. $3x - 4y - 3 = 0$ সরলরেখার 3 একক দূরবর্তী সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: d]**

(a) $3x - 4y - 3 = 0$ (b) $3x - 4y + 18 = 0$ (c) $3x - 4y - 2 = 0$ (d) $3x - 4y + 12 = 0$

সমাধান: $3x - 4y - 3 = 0; 3x - 4y + k = 0$

$\therefore \left|\frac{k+3}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 3 \Rightarrow k + 3 = \pm 15 \Rightarrow k = 12; k = -18$ | $\therefore 3x - 4y + 12 = 0$ ও $3x - 4y - 18 = 0$

02. $4y - 3x + 12 = 0$ এবং $4y - 3x + 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত একক? **[GST'22-23; Agri.'21-22; JU'19-20] [Ans: a]**

(a) $\frac{9}{5}$ (b) $\frac{12}{5}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{6}{5}$

সমাধান: $4y - 3x + 12 = 0$ এবং $4y - 3x + 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|12-3|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{9}{5}$

03. $2x + 6y + 4 = 0$ এবং $3x + 9y - 4 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব কত একক? **[RU'22-23] [Ans: b]**

(a) 8 (b) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ (c) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $2x + 6y + 4 = 0 \Rightarrow x + 3y + 2 = 0$ এবং $3x + 9y - 4 = 0 \Rightarrow x + 3y - \frac{4}{3} = 0$

$\therefore$ লম্ব দূরত্ব $= \frac{\left|2 + \frac{4}{3}\right|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

04. α সূক্ষ্মকোণ হলে, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 5$ এবং $4x + 3y = 5$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত একক? **[RU'21-22]**

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 **[Ans: d]**

সমাধান: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - 5 = 0$ এবং $4x + 3y - 5 = 0$ সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে, মূলবিন্দু হতে রেখাদ্বয়ের দূরত্বের পার্থক্যই হবে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব।

$\therefore$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{|0+0-5|}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}} - \frac{|0+0-5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{5}{1} - \frac{5}{5} = 5 - 1 = 4$ একক

05. $3x + 4y + 2 = 0$ এবং $3x + 4y + 5 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? **[JU'21-22] [Ans: a]**

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{3}{25}$ (c) 3 (d) $\frac{5}{3}$

সমাধান: দূরত্ব $= \left|\frac{2-5}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \frac{3}{5}$

POLE MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

06. $y = x + 4$ এবং $y = x$ রেখাদ্বয়ের লম্ব দূরত্ব- **[Agri.'20-21; DU'18-19] [Ans: b]**

(a) 4 একক (b) $2\sqrt{2}$ একক (c) 2 একক (d) $4\sqrt{2}$ একক

সমাধান: রেখাদ্বয় $x - y + 4 = 0$ ও $x - y + 0 = 0$; $d = \frac{|4-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \left|\frac{4}{\sqrt{2}}\right| = 2\sqrt{2}$

07. $3x + 6y + 3 = 0$ এবং $3x + 6y + 6 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত হবে? **[KU'17-18] [Ans: a]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (d) $\sqrt{5}$

সমাধান: $\frac{6-3}{\sqrt{3^2+6^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

08. $12x - 5y - 7 = 0$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল একটি রেখার সমীকরণ কি? **[JU'14-15] [Ans: a]**

(a) $12x - 5y + 19 = 0$ (b) $12x - 5y + 33 = 0$ (c) $12x - 5y + 11 = 0$ (d) $12x - 5y + 1 = 0$

সমাধান: $12x - 5y - 7 = 0$ এর সমান্তরাল রেখা: $12x - 5y + c = 0$

এখন, $\frac{|c-(-7)|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|c+7|}{13} = 2 \Rightarrow c = \pm 26 - 7 \Rightarrow c = 19, -33$

$\therefore$ রেখাটি: $12x - 5y + 19 = 0; 12x - 5y - 33 = 0$

CamScanner

Type-17: দুইটি রেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা

Formula & Concept:

- দুইটি সরলরেখার ঢাল m_1 ও m_2 হলে এবং যদি তাদের মধ্যবর্তী কোণ যদি θ হয় তবে, $\boxed{\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}}$
- $\tan\theta$ এর +ve মান নিয়ে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ পাওয়া যায়।
- $\tan\theta$ এর −ve মান নিয়ে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী স্থূলকোণ পাওয়া যায়।

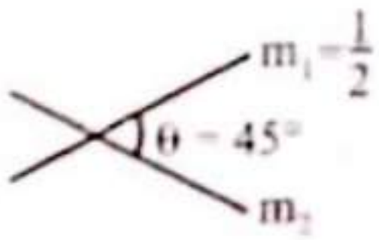
MCQ

01. দুইটি সরলরেখার মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ $45°$ এবং একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{1}{2}$ হলে, অপর সরলরেখার নতি কত? **[GST'23-24]**

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$ **[Ans: b]**

সমাধান: এখানে, $m_1 = \frac{1}{2}, \theta = 45°, m_2 = ?$

$\tan 45° = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow 1 = \pm\frac{\frac{1}{2} - m_2}{1 + \frac{1}{2}m_2} \Rightarrow 1 = \pm\frac{1 - 2m_2}{2 + m_2} \Rightarrow 2 + m_2 = \pm(1 - 2m_2)$



(+) নিয়ে $\Rightarrow 2 + m_2 = 1 - 2m_2 \Rightarrow 3m_2 = -1 \therefore m_2 = -\frac{1}{3}$

(−) নিয়ে $\Rightarrow 2 + m_2 = -1 + 2m_2 \therefore m_2 = 3$

02. $y = 2$ এবং $2x - 2y + 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ কত? **[Agri.'20-21] [Ans: d]**

(a) $30°$ (b) $0°$ (c) $60°$ (d) $45°$

সমাধান: $y = 2, m_1 = 0$; $2x - 2y + 3 = 0, m_2 = -\frac{2}{-2} = 1$

$\therefore \tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm\frac{0 - 1}{1 + 0 \times 1}$

$\therefore \theta = 135°, 45°$ ∴ অন্তর্গত কোণ, $45°$ [স্থূলকোণ Option এ নেই]

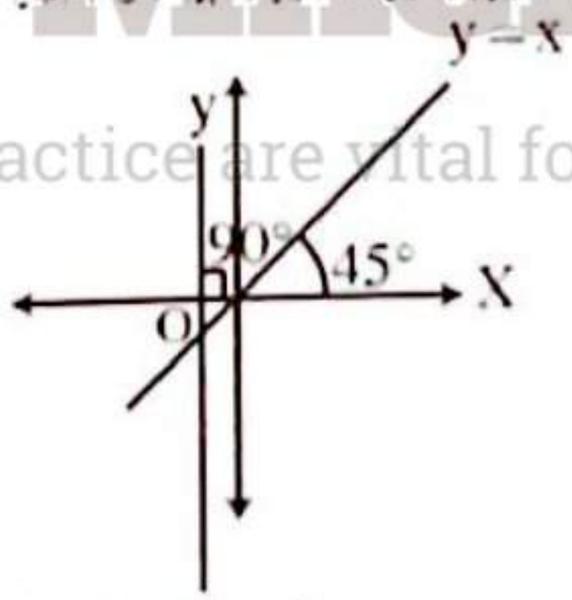
03. $y = x$ এবং $2x + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ কোনটি? **[Agri.'19-20] [Ans: b]**

(a) $0°$ (b) $45°$ (c) $60°$ (d) $90°$

সমাধান: $y = x$ রেখার ঢাল, $\tan\theta_1 = 1$

∴ রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\theta_1 = \tan^{-1}(1) = 45°$ কোণ উৎপন্ন করে। $2x + 1 = 0$ রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল।

অর্থাৎ x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $90°$ কোণ উৎপন্ন করে। ∴ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $= 90° - 45° = 45°$



$2x + 1 = 0$

04. $y = b$ এবং $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের মান- **[DU'18-19] [Ans: c]**

(a) $30°$ (b) $45°$ (c) $60°$ (d) $90°$

সমাধান: $y = b$, x-অক্ষের সমান্তরাল তাই ঢাল 0, দ্বিতীয় রেখার জন্য $\tan 0 =$ ঢাল $= \sqrt{3} = 60°$

∴ নির্ণেয় সূক্ষ্মকোণ $(60° - 0°) = 60°$

05. $2x + 3y - 1 = 0$ এবং $x - 2y + 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ কত? **[JU'18-19]**

(a) $\tan^{-1}\left(\pm\frac{7}{4}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\pm\frac{3}{4}\right)$ (c) $\tan^{-1}\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\pm\frac{2}{3}\right)$

POTE MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $2x+3y-1=0$ রেখার ঢাল $=-\frac{2}{3}$; $x-2y+3=0$ রেখার ঢাল $=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$

এখানে, $m_1=\frac{1}{2}, m_2=-\frac{2}{3}$

∴ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ, $\theta=\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{3}\right)}{1+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}=\tan^{-1}\frac{7}{4}$

[যদি বলা থাকতো, অন্তর্ভুক্ত কোণ কত, তাহলে উত্তর হতো $\tan^{-1}\left(\pm\frac{7}{4}\right)$]

06. $x=a$ এবং $\sqrt{3}x-y+1=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের মান- **[DU'16-17] [Ans: a]**

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 75°

সমাধান: $\sqrt{3}x-y+1=0 \Rightarrow y=\sqrt{3}x-1$

∴ রেখাটি x অক্ষের সাথে 60° কোণ এবং y অক্ষ বা y অক্ষের সমান্তরাল যেকোনো রেখা $x=a$ এর সাথে $(90^\circ-60^\circ)=30^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে।

07. একটি বর্গক্ষেত্রের একটি কর্ণের সমীকরণ $8x-15y+22=0$। উক্ত কর্ণের উপর একটি শীর্ষবিন্দু A(1,2)। A বিন্দুগামী বর্গক্ষেত্রের বাহু দুইটির সমীকরণ কত? **[RU'16-17] [Ans: d]**

(a) $7x-23y=0, 7x+23y=0$ (b) $2x-7y=0, 2x+7y=0$

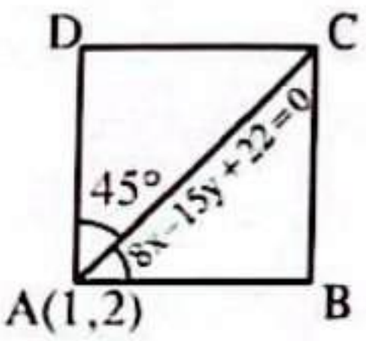
(c) $5x+3y=0, 5x-3y=0$ (d) $23x-7y-9=0, 7x+23y-53=0$

সমাধান: ধরি, A বিন্দুগামী বর্গের বাহুদ্বয়ের সমীকরণ: $y-2=m(x-1)$ ..... (i)

প্রদত্ত কর্ণের ঢাল $=\frac{8}{15}$

অর্থাৎ $\tan 45^\circ=\left|\frac{m-\frac{8}{15}}{1+m\times\frac{8}{15}}\right| \Rightarrow \pm 1=\frac{15m-8}{15+8m} \Rightarrow m=\frac{23}{7}, \frac{-7}{23}$

∴ বাহুদ্বয় যথাক্রমে $23x-7y-9=0$ ও $7x+23y-53=0$



বিকল্প: A বিন্দুগামী বর্গের বাহুদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব হবে।

∴ রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয়ের গুণফল -1 হবে, যা শুধুমাত্র (D) এর জন্য প্রযোজ্য।

08. $y=3x+7$ এবং $3y-x=8$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের মান কত? **[JnU'15-16; DU'08-09] [Ans: a]**

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (c) $\tan^{-1}(1)$ (d) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

সমাধান: $y=3x+7$; $y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$ ∴ $\theta=\tan^{-1}\frac{3-\frac{1}{3}}{1+3.\frac{1}{3}}=\tan^{-1}\frac{4}{3}$

09. $px+qy+12=0$ এবং $px+qy+20=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ কত? **[RU'10-11] [Ans: c]**

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) কোনোটিই নয়

সমাধান: ১ম সরলরেখার ঢাল, $m_1=-\frac{p}{q}$; ২য় সরলরেখার ঢাল, $m_2=-\frac{p}{q}$

∴ $m_1=m_2$ ∴ রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল ∴ মধ্যবর্তী কোণ 0^c বা π^c

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Written

01. $(-1,2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x-y+7=0$ রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[DU'23-24]**

সমাধান: প্রদত্ত রেখার ঢাল, $m_1=-\frac{3}{-1}=3$

মনে করি, নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $y-2=m_2(x+1)$ ..... (i)

এদের মধ্যবর্তী কোণ 45° ∴ $\tan 45^\circ=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm\frac{3-m_2}{1+3m_2}$

$\Rightarrow 1=\pm\frac{3-m_2}{1+3m_2} \Rightarrow 1+3m_2=\pm(3-m_2)$

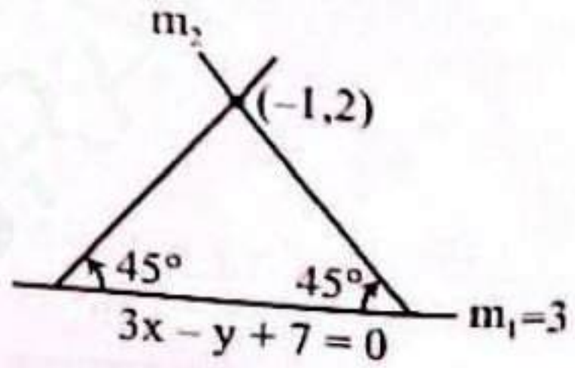
(+) নিয়ে পাই, $1+3m_2=3-m_2 \Rightarrow m_2=\frac{1}{2}$

(−) নিয়ে পাই, $1+3m_2=-3+m_2 \Rightarrow m_2=-2$

(i) নং-এ m_2 এর মান বসিয়ে পাই,

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $y-2=\frac{1}{2}(x+1)$ ∴ $x-2y+5=0$ **(Ans.)**

এবং $y-2=-2(x+1)$ ∴ $2x+y=0$ **(Ans.)**



CamScanner

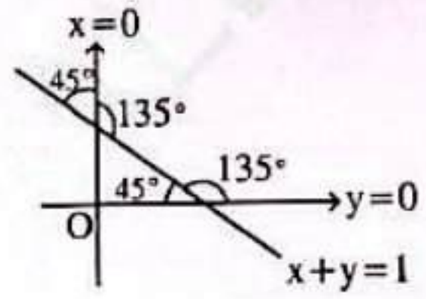
02. $x+y=1$ এবং $x=0$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ কত হবে? **[RU'19-20]**

সমাধান: $y=-x+1\,;\, m=-1$

$\Rightarrow \tan\theta=-1$

$\therefore \theta=135°$

$\therefore$ উৎপন্ন কোণ $135°$ অথবা $45°$। **(Ans.)**



Type-18: কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ সম্পর্কিত সমস্যা

Formula & Concept:

$a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখা দুটির অন্তর্গত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$\Rightarrow \frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

➢ $a_1a_2+b_1b_2=0$ হলে রেখাদ্বয় লম্ব।

➢ $a_1a_2+b_1b_2>0$ (+ve) হলে, (+ve) নিয়ে স্থূলকোণের এবং −ve নিয়ে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যায়।

➢ $a_1a_2+b_1b_2<0$ (−ve) হলে, (−ve) নিয়ে স্থূলকোণের এবং +ve নিয়ে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যায়।

➢ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় সর্বদা পরস্পর লম্ব হবে।

➢ $f_1(x,y)=a_1x+b_1y+c_1$ এবং $f_2(x,y)=a_2x+b_2y+c_2$ এবং (α,β) একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হলে,

$f_1(\alpha,\beta)=a_1\alpha+b_1\beta+c_1$ এবং $f_2(\alpha,\beta)=a_2\alpha+b_2\beta+c_2$

এখন, $f_1(\alpha,\beta)\times f_2(\alpha,\beta)>0$ (+ve) হলে, (+ve) চিহ্ন নিলে প্রাপ্ত সমীকরণ (α,β) বিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

এবং $f_1(\alpha,\beta)\times f_2(\alpha,\beta)<0$ (−ve) হলে, (−ve) চিহ্ন নিলে প্রাপ্ত সমীকরণ (α,β) বিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ।

➢ c_1 ও c_2 বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হলে → (−ve) চিহ্ন নিলে প্রাপ্ত সমীকরণ মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হবে।

➢ c_1 ও c_2 একই চিহ্নবিশিষ্ট হলে → (+ve) চিহ্ন নিলে প্রাপ্ত সমীকরণ মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হবে।

POTT MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $y=2x+1$ ও $2y-x=4$ রেখা দুইটির অন্তর্বর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক y অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দৈর্ঘ্য কত?

(a) 4 (b) 2 (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$ **[KU'13-14] [Ans: c]**

সমাধান: $y-2x-1=0$ ও $2y-x-4=0$ রেখা দুইটির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় হচ্ছে, $\frac{y-2x-1}{\sqrt{1^2+2^2}}=\pm\frac{2y-x-4}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$\therefore y+x-3=0$ এবং $3y-3x-5=0$; y-অক্ষের ছেদবিন্দুদ্বয় হচ্ছে $(0,3)$ ও $\left(0,\frac{5}{3}\right)$; $PQ=3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$

"মেধা হচ্ছে সঠিক উত্তর জানা; আর প্রজ্ঞা হচ্ছে স্থান-কাল-পাত্র ভেদে তার প্রয়োগ জানা"

-Tim Fargo

CamScanner

অধ্যায় ০৪

বৃত্ত

➢ ভার্সিটি ভর্তি পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪	T-01	বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করার শর্ত	1	-	RU'11-20, JU'23-24; Agri.'20-21	-
✪✪✪	T-02	বৃত্তের কেন্দ্র, ব্যাসার্ধ, খণ্ডিত অংশ ও ক্ষেত্রফল নির্ণয়	13	-	RU'22-23, 21-22, 12-13, 08-09; CU'16-17, 14-15, JU'23-24, 22-23, 20-21; JnU'14-15, 13-14	-
✪✪	T-03	বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ থেকে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয়	-	3	-	DU'20-21; CU'22-23; JnU'15-16
✪✪✪	T-04	শর্ত সাপেক্ষে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়	21	-	DU'17-18, 16-17, 15-16, 14-15; RU'23-24, 22-23, 20-21, 19-20, 17-18; CU'13-14, 10-11, 08-09; JU'23-24, 19-20, 18-19, 17-18; Agri.'19-20	-
✪✪	T-05	বৃত্তের ব্যাসের একটি প্রান্তবিন্দু দেওয়া থাকলে অপর প্রান্তবিন্দু নির্ণয়	3	-	GST'21-22; RU'17-18; JU'15-16	-
✪✪	T-06	ছেদবিন্দুগামী বৃত্ত সংক্রান্ত	3	-	RU'22-23, 19-20; JU'23-24	-
✪✪✪	T-07	সরলরেখা বৃত্তকে স্পর্শ করা সম্পর্কিত	16	-	DU'21-22, 19-20, 18-19; GST'23-24; RU'23-24, 22-23, 21-22, 20-21, 17-18, 09-10, 08-09; CU'20-21; JU'10-11, 11-12; KU'15-16	-
✪✪	T-08	বৃত্তের জ্যা-এর দৈর্ঘ্য/সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত	4	-	GST'22-23, 20-21; JU'22-23; KU'10-11	-

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪	T-09	বৃত্তের সাপেক্ষে বিন্দুর অবস্থান	2	-	RU'21-22; KU'16-17	-
✪	T-10	বৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়	2	-	CU'11-12; JU'22-23	-
✪✪	T-11	বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা	3	-	RU'23-24; JU'19-20, 16-17	-
✪✪	T-12	দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ বা ছেদ করা সংক্রান্ত সমস্যা	5	-	DU'15-16; RU'23-24, 22-23, 16-17; Agri.'21-22	-
✪✪	T-13	সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয়	2	-	CU'23-24, 14-15	-
✪✪	T-14	বৃত্তের পোলার সমীকরণ সম্পর্কিত	6	-	DU'23-24, 20-21; GST'22-23; CU'22-23; JU'22-23; JnU'15-16	-

Type-01: বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করার শর্ত

Formula & Concept:

$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ এটি x ও y এর সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ। বৃত্তের সমীকরণ হতে হলে উক্ত দ্বিঘাত সমীকরণে x^2, y^2 এর সহগ সমান হতে হবে এবং xy এর সহগ শূন্য হতে হবে অর্থাৎ xy সম্বলিত পদ থাকা যাবে না।

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. k এর কোন মানের জন্য $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত হবে? **[JU'23-24; Agri.'20-21]**

(a) 1 (b) -1 (c) -2 (d) 2 **[Ans: d]**

সমাধান: $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 9 - 2xy + 6x - 6y + kxy - kx + 2y - 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (6 - k)x - 4y + (k - 2)xy + 7 = 0$

বৃত্তের জন্য, xy এর সহগ $= 0 \therefore k - 2 = 0 \therefore k = 2$

Shortcut: $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0 \Rightarrow -2xy + kxy = 0 \therefore k = 2$

02. $4x^2 + 4y^2 = 3$ সমীকরণটি কিসের? **[RU'11-12] [Ans: b]**

(a) পরাবৃত্ত (b) বৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) সরলরেখা

সমাধান: $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$; x^2 এর সহগ $= y^2$ এর সহগ হলে সমীকরণটি বৃত্ত নির্দেশ করে যেখানে xy এর সহগ $= 0$।

CamScanner

Type-02: বৃত্তের কেন্দ্র, ব্যাসার্ধ, খণ্ডিত অংশ ও ক্ষেত্রফল নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

বৃত্তের সমীকরণ যেভাবেই দেওয়া থাকুক না কেন, তা আদর্শরূপে নিয়েই সব সূত্রের প্রয়োগ করতে হবে। যেমন, $2x^2 + 2y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$ আকারে সমীকরণ দেওয়া থাকলে $x^2 + y^2 + 3x + 2y - 6 = 0$ আকারে নিয়ে সূত্রের প্রয়োগ করতে হবে অন্যথায় ভুল উত্তর আসবে। (অর্থাৎ x^2, y^2 এর সহগ 1 বানাতে হবে)

(i) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f) \equiv \left(\frac{x \text{ এর সহগ}}{-2}, \frac{y \text{ এর সহগ}}{-2}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

x অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c}$ একক; y অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{f^2 - c}$ একক

(ii) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) এবং ব্যাসার্ধ $= r$

x অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{r^2 - k^2}$; y অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{r^2 - h^2}$

(iii) $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= r$

(iv) বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

(v) বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ শূন্য। [উদাহরণ: $x^2 + y^2 = 0^2$]

MCQ

01. কোনো বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ $2x - 4y - 9 = 0$ এবং $6x - 12y + 7 = 0$ হলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত? **[JU'23-24] [Ans: d]**

(a) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (b) $\frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{5}}$ (c) $\frac{17}{5\sqrt{3}}$ (d) $\frac{17}{6\sqrt{5}}$

সমাধান: $2x - 4y - 9 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i) এবং $6x - 12y + 7 = 0 \Rightarrow 2x - 4y + \frac{7}{3} = 0 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

$\therefore$ ব্যাস $= \left|\frac{\frac{7}{3}+9}{\sqrt{2^2+4^2}}\right| = \frac{\frac{34}{3}}{\sqrt{20}} = \frac{34}{3\times 2\sqrt{5}} = \frac{17}{3\sqrt{5}}$ $\therefore$ ব্যাসার্ধ $= \frac{17}{3\sqrt{5}\times 2} = \frac{17}{6\sqrt{5}}$

02. $x^2 + y^2 - gx = 0$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? **[JU'22-23] [Ans: b]**

(a) $\frac{1}{8}\pi g^2$ (b) $\frac{1}{4}\pi g^2$ (c) $\frac{1}{2}\pi g^2$ (d) πg^2

সমাধান: $x^2 + y^2 - gx = 0 \Rightarrow x^2 - 2x.\frac{g}{2} + \left(\frac{g}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{g}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{g}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{g}{2}\right)^2 = 0$

$\therefore \left(x - \frac{g}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{g}{2}\right)^2$ $\therefore$ কেন্দ্র $\left(\frac{g}{2}, 0\right)$, ব্যাসার্ধ, $r = \frac{g}{2}$ $\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = \pi\left(\frac{g}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi g^2$ বর্গ একক

বিকল্প: $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2} = \frac{g}{2}$ $\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi g^2$ বর্গ একক

03. $x^2 + y^2 - 5x = 0$ ও $x^2 + y^2 + 3x = 0$ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? **[RU'22-23] [Ans: d]**

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

সমাধান: $x^2 + y^2 - 5x = 0$ এর কেন্দ্র $\equiv \left(\frac{5}{2}, 0\right)$

$x^2 + y^2 + 3x = 0$ এর কেন্দ্র $\equiv \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ $\therefore$ কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{5}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right) = 4$ একক।

04. c- এর মান কত হলে, $x^2 + y^2 + 8x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি একটি বিন্দুবৃত্ত হবে? **[RU'21-22] [Ans: b]**

(a) 15 (b) 25 (c) $\sqrt{15}$ (d) 5

সমাধান: $x^2 + y^2 + 8x - 6y + c = 0$ কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g = 4$, $f = -3$

বৃত্তটি বিন্দুবৃত্ত হলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $\sqrt{g^2 + f^2 - c} = 0 \Rightarrow g^2 + f^2 - c = 0 \Rightarrow 4^2 + (-3)^2 - c = 0 \therefore c = 25$

বিকল্প: $x^2 + y^2 + 8x - 6y + c = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 16 + 9 - c$

$\Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25 - c = \left(\sqrt{25 - c}\right)^2$

বৃত্তটি বিন্দুবৃত্ত হলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{25 - c} = 0 \Rightarrow 25 - c = 0 \therefore c = 25$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

05. $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ কত? [RU'21-22] [Ans: a]

(a) (1, 2), 3 (b) (4, 2), 4 (c) (2, 4), 4 (d) (1, 2), 9

সমাধান: $x^2+y^2-2x-4y-4=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+2(-1)x+2(-2)y-4=0$; আবার, $g=-1, f=-2, c=-4$ $\therefore$ কেন্দ্র $(-g,-f)\equiv(1,2)$

$\therefore r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+4}=3$ একক

06. $2x^2+2y^2-3x+4y=0$ বৃত্তের কেন্দ্র কত? [JU'20-21] [Ans: a]

(a) $\left(\frac{3}{4},-1\right)$ (b) $\left(\frac{3}{4},1\right)$ (c) $\left(-\frac{3}{4},1\right)$ (d) $\left(-\frac{3}{4},-1\right)$

সমাধান: $2x^2+2y^2-3x+4y=0 \Rightarrow x^2+y^2-\frac{3}{2}x+2y=0$

$2g=\frac{-3}{2}\Rightarrow g=\frac{-3}{4}$; $2f=2\Rightarrow f=1$ $\therefore$ কেন্দ্র $=(-g,-f)=\left(\frac{3}{4},-1\right)$

07. $2x^2+2y^2+6x+10y-1=0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত? [JU'19-20] [Ans: b]

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5

সমাধান: $x^2+y^2+3x+5y-\frac{1}{2}=0$ $\therefore r=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{25}{4}+\frac{2}{4}}=\sqrt{\frac{36}{4}}=\sqrt{9}=3$ একক

08. 3 টি বৃত্তের (Circle) কেন্দ্র $(0,0)$। ১ম বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\sqrt{2}$, ২য় বৃত্তের ব্যাস 16 এবং ৩য় বৃত্তের ব্যাস 36। নিচের কোনটি সঠিক?

(a) ১ম বৃত্ত $\subset$ ২য় বৃত্ত (b) ২য় বৃত্ত $\subset$ ৩য় বৃত্ত [CU'16-17] [Ans: e]

(c) ১ম বৃত্ত $\cup$ ২য় বৃত্ত $\cup$ ৩য় বৃত্ত = ৩য় বৃত্ত (d) ১ম বৃত্ত $\cap$ ২য় বৃত্ত $\cap$ ৩য় বৃত্ত $=\{(0,0)\}$

(e) ১ম বৃত্ত $\cap$ ২য় বৃত্ত $\cap$ ৩য় বৃত্ত $=\phi$

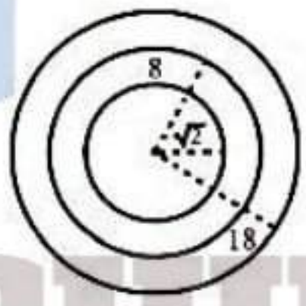
সমাধান: বৃত্ত বলতে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করে নির্দিষ্ট দূরত্বের চলমান বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ বা সেটকে বোঝায়। তাই বৃত্তের অংশ বলতে কেবল পরিধির উপরের বিন্দুগুলোর সেট কে বোঝায় (কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ বৃত্তের বৈশিষ্ট্য, সেটের উপাদান নয়।

এখানে প্রতিটি বৃত্তের কেন্দ্র $(0,0)$

১ম বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r_1=\sqrt{2}$ একক

২য় বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r_2=\frac{16}{2}=8$ একক

৩য় বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r_3=\frac{36}{2}=18$ একক



$\therefore$ ১ম বৃত্ত, ২য় বৃত্ত, ৩য় বৃত্তের কোনো উপাদান কমন নয়। কারন কোনো বৃত্তই পরস্পরকে ছেদ করে না।

$\therefore$ ১ম বৃত্ত $\cap$ ২য় বৃত্ত $\cap$ ৩য় বৃত্ত $=\phi$

09. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0, (g^2>c, f^2>c)$ বৃত্তটি দ্বারা x –অক্ষের কর্তিত অংশ কত? [CU'14-15] [Ans: b]

(a) $2\sqrt{f^2-c}$ (b) $2\sqrt{g^2-c}$ (c) $\sqrt{g^2-c}$ (d) $\sqrt{f^2-c}$

10. $x^2+y^2-8x+6y+16=0$ সমীকরণবিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত? [JnU'14-15] [Ans: b]

(a) 9.43 sq. unit (b) 9π sq. unit (c) 1620 sq. unit (d) 4π sq. unit

সমাধান: $x^2+y^2-8x+6y+16=0$

এখানে, $g=-4,\ f=3,\ c=16$ $\therefore r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{16+9-16}=3$ unit

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi r^2=\pi\times3^2=9\pi$ sq unit

11. $(x-2)^2+(y+1)^2=12$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত? [JnU'13-14] [Ans: b]

(a) (2, 1) (b) (2, – 1) (c) (1, 2) (d) (2, 1)

সমাধান: প্রদত্ত বৃত্ত: $(x-2)^2+(y+1)^2=12\Rightarrow(x-2)^2+\left(y-(-1)\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$ কে বৃত্তের আদর্শ সমীকরণ, $(x-h)^2+(y-k)^2=x^2$ যার কেন্দ্র $\equiv(h,k)$ এবং ব্যাসার্ধ r এর সাথে তুলনা করে আমরা প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হবে $(2,-1)$

12. বিন্দু বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? [RU'12-13, 08-09] [Ans: a]

(a) $x^2+y^2=0$ (b) $x^2+y^2=1$ (c) $x^2-y^2=0$ (d) $x^2-y^2=1$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-03: বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ থেকে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয়

Concept

- বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ, $x = h + r\cos\theta\,; y = k + r\sin\theta$ [θ পরামিতিক]
- বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ থেকে কার্তেসীয় সমীকরণ, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$
  যেখানে, কেন্দ্র $C \equiv (h, k)$ এবং ব্যাসার্ধ $= r$

Written

01. $x = a\cos\theta + b\sin\theta, y = a\sin\theta - b\cos\theta$ কোন কনিকের সমীকরণ? **[DU'20-21; CU'22-23]**

সমাধান: $x = a\cos\theta + b\sin\theta\ ;\ y = a\sin\theta - b\cos\theta\ ;\ x^2 + y^2 = (a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (a\sin\theta - b\cos\theta)^2$
$= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\ \sin\theta\cos\theta - 2ab\ \sin\theta\cos\theta$
$= a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = a^2 + b^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ যা বৃত্তের সমীকরণ **(Ans.)**

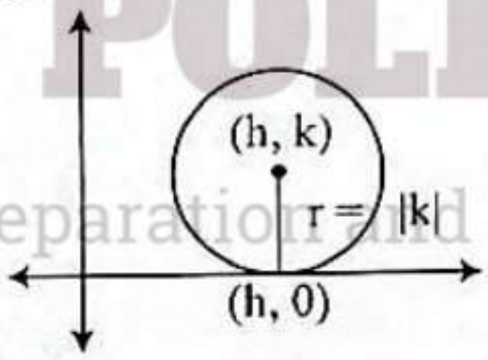
02. একটি বৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক, $x = 2 + 3\cos\theta$ এবং $y = -3 + 3\sin\theta$। বৃত্তের সমীকরণ, কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। **[JnU'15-16]**

সমাধান: $x = 2 + 3\cos\theta \Rightarrow (x-2) = 3\cos\theta$ ..... (i); $y = -3 + 3\sin\theta \Rightarrow (y+3) = 3\sin\theta$ ..... (ii)
এখন, $(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = (3\cos\theta)^2 + (3\sin\theta)^2 = 3^2$
$\therefore (x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$; একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র, $C \equiv (2, -3)$, ব্যাসার্ধ $= 3$ একক **(Ans.)**

Type-04: শর্ত সাপেক্ষে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়

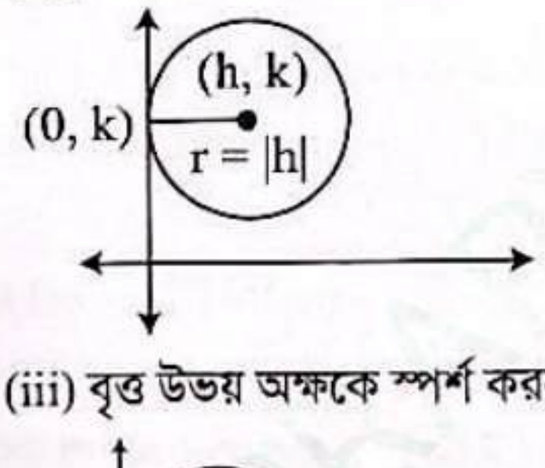
➲ **Formula & Concept:** বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) এবং ব্যাসার্ধ $= r$ হলে, বৃত্তের সমীকরণ: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
বৃত্তের কেন্দ্র **(h, k)** দেওয়া থাকলে এবং বৃত্তটি একটি নির্দিষ্ট (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে:
বৃত্তের সমীকরণ: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = (x_1-h)^2 + (y_1-k)^2$

(i) x -অক্ষকে স্পর্শ করলে-



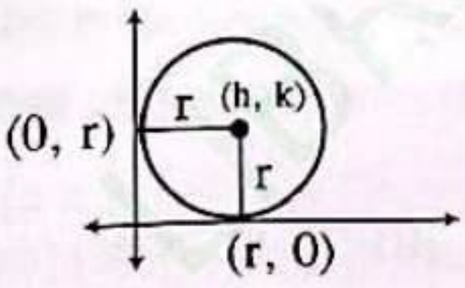
$r = |k|$; [বৃত্তের কেন্দ্রের কোটির পরমমান বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান]
বৃত্তের সমীকরণ: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = k^2$
x অক্ষের স্পর্শবিন্দু $(h, 0)$
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করলে, $c = g^2 = h^2$

(ii) y-অক্ষকে স্পর্শ করলে-



$r = |h|$; [বৃত্তের কেন্দ্রের ভুজের পরমমান বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান]
বৃত্তের সমীকরণ $\Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = h^2$
y-অক্ষের স্পর্শবিন্দু $(0, k)$
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করলে, $c = f^2 = k^2$

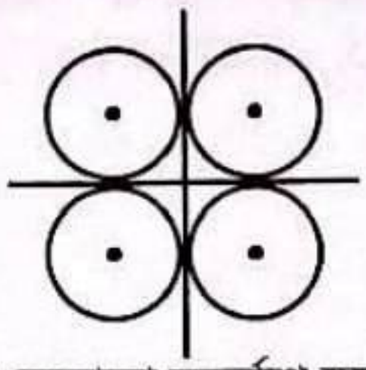
(iii) বৃত্ত উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে-



$r = |h| = |k|$; [বৃত্তের কেন্দ্রের ভুজ এবং কোটি উভয়ই ব্যাসার্ধের সমান]
বৃত্তের সমীকরণ $\Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = h^2$
x অক্ষের স্পর্শবিন্দু $(h, 0)$; y অক্ষের স্পর্শবিন্দু $(0, k)$
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে, $c = f^2 = k^2 = g^2 = h^2$

বৃত্তের কেন্দ্র থেকে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান।

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery
CamScanner



(কেন্দ্র যেকোনো চতুর্ভাগে হতে পারে)

Concept: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য,

(i) ধরি, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

(ii) (1) নং বৃত্তটি A, B, C বিন্দুগুলো দিয়ে যায় তাই বিন্দুগুলো দ্বারা সিদ্ধ করলে g, f এবং c যুক্ত 3 টি সমীকরণ পাওয়া যাবে।

(iii) উক্ত সমীকরণগুলো সমাধান করলে g, f, c এর মান নির্ণয় করা যাবে।

(iv) g, f এবং c এর মান (1) নং সমীকরণে বসালে বৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

Shortcut: (MCQ) Option এ প্রতিটি বিন্দু বসিয়ে যদি শর্তসিদ্ধ হয় তবে সেটাই উত্তর হবে।

Concept:

- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর থাকলে $f = 0$ (কেন্দ্রের y স্থানাঙ্ক শূন্য হয়)
- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর থাকলে $g = 0$ (কেন্দ্রের x স্থানাঙ্ক শূন্য হয়)
- বৃত্ত মূলবিন্দুগামী হলে, $c = 0$
- কোনো বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) দেয়া থাকলে, বৃত্তের সমীকরণ হবে:

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

MCQ

01. একটি বৃত্ত y-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে যায়, তাহলে বৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: d]**

(a) $x^2 + y^2 - 25x = 0$ (b) $3x^2 + 3y^2 - 25y = 0$ (c) $x^2 + y^2 + 25x = 0$ (d) $3x^2 + 3y^2 - 25x = 0$

সমাধান: y-অক্ষকে স্পর্শ করায় $f^2 = c$; মূলবিন্দু দিয়ে গমন করায়, $c = 0 \therefore f = 0$

ধরি, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \therefore x^2 + y^2 + 2gx = 0$ যা

$(3, -4)$ বিন্দুগামী, $9 + 16 + 6g = 0 \Rightarrow 6g = -25 \Rightarrow g = -\frac{25}{6}$

$\therefore x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{25}{6}\right)x = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{25x}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 25x = 0$

02. x-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? **[JU'23-24]**

(a) $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$ **[Ans: a]**

(c) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$

সমাধান: কেন্দ্র x-অক্ষের উপর হওয়ায় $f = 0 \therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$

$(3, 5)$ বিন্দু বসিয়ে, $3^2 + 5^2 + 6g + c = 0 = 6g + c + 34 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$(6, 4)$ বিন্দু বসিয়ে, $6^2 + 4^2 + 12g + c = 0 = 12g + c + 52 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i)-(ii) $\Rightarrow -6g - 18 = 0 \therefore g = -3$

(i) নং এ $g = -3$ বসিয়ে পাই, $-18 + c + 34 = 0 \quad \therefore c = -16$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$

03. $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(1, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $y = 3x - 7$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? **[JU'23-24] [Ans: d]**

(a) $x^2 + y^2 + 5x + y + 4 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 4 = 0$

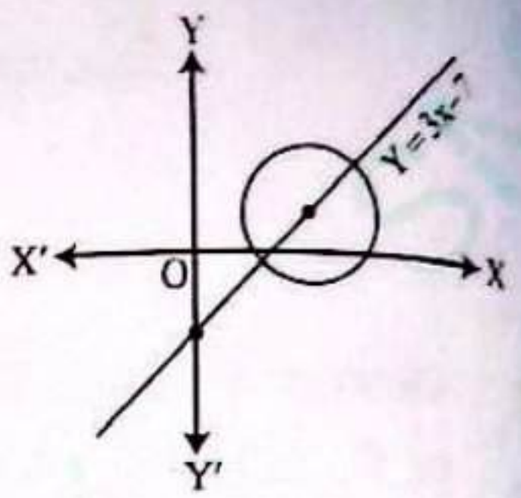
(c) $x^2 + y^2 - 5x + y + 4 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

সমাধান: এখানে ধরি, বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) যা $y = 3x - 7$ রেখার উপর অবস্থিত। $\therefore k = 3h - 7$



$\because$ বৃত্তটি (1,1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$ একক

$\therefore$ কেন্দ্র হতে (1,1) বিন্দুর দূরত্ব = ব্যাসার্ধ

$\Rightarrow (h-1)^2 + (k-1)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 - 2h + 1 + (3h-8)^2 = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 2(h^2 - 2h + 1 + 9h^2 - 48h + 64) - 5 = 0$

$\Rightarrow 20h^2 - 100h + 125 = 0 \Rightarrow 4h^2 - 20h + 25 = 0$

$\Rightarrow (2h-5)^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{5}{2} \therefore k = \frac{3\times5}{2} - 7 = \frac{1}{2}$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ: $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{10}{4}$

$\Rightarrow 4x^2 - 20x + 25 + 4y^2 - 4y + 1 - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$

Shortcut: Option test. একমাত্র Option (d) ই (1,1) বিন্দুগামী। তাই উত্তর (d) হবে।

04. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে গমনকারী বৃত্তের কেন্দ্র (4, 5) হলে, তার সমীকরণ কোনটি? **[RU'22-23] [Ans: c]**

(a) $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 59 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 59 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 59 = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 59 = 0$

সমাধান: $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $\equiv \left(\frac{4}{-2}, \frac{6}{-2}\right) \equiv (-2, -3)$,

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ= $\sqrt{(-2-4)^2 + (-3-5)^2} = 10$ একক

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 + 25 - 100 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 8x - 10y - 59 = 0$

05. $x^2 + y^2 + 8x + 2ky + c = 0$ বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে k এবং c এর মান কত? **[RU'20-21] [Ans: c]**

(a) $k = 8, c = 4$ (b) $k = 8, c = 16$ (c) $k = \pm4, c = 16$ (d) $k = \pm4, c = 4$

সমাধান: বৃত্ত উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে, $g^2 = f^2 = c$ হয় এক্ষেত্রে, $g = 4, f = k \therefore 4^2 = k^2 = c$ পাওয়া যায়,

অর্থাৎ $c = 16$ এবং $k = \pm4$

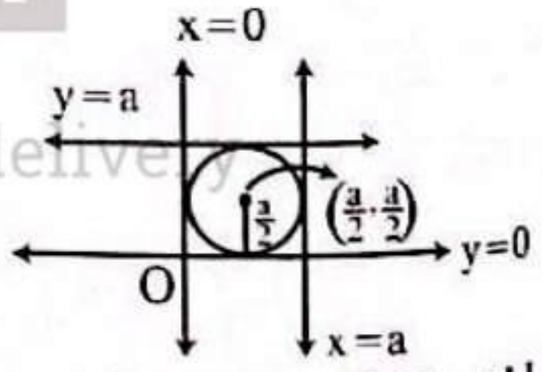
06. একটি বৃত্ত $x = 0, y = 0, x = a$ এবং $y = a$ সমীকরণগুলিকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ- **[RU'19-20] [Ans: d]**

(a) $x^2 + y^2 - ax - ay = 0$ (b) $x^2 + y^2 = a^2$

(c) $4(x^2 + y^2) = a^2$ (d) $4(x^2 + y^2) - 4a(x + y) + a^2 = 0$

সমাধান: বৃত্তটি $x = 0, x = a$ উভয়কে স্পর্শ করে তাই কেন্দ্রের x ভুজ $= \frac{0+a}{2} = \frac{a}{2}$

$y = 0, y = a$ উভয়কে স্পর্শ করে তাই কেন্দ্রের y কোটি $= \frac{0+a}{2} = \frac{a}{2}$, ব্যাসার্ধ $= \frac{a-0}{2} = \frac{a}{2}$



$\therefore \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - ax - ay + \frac{a^2}{4} = 0$

$\therefore 4(x^2 + y^2) - 4a(x + y) + a^2 = 0$

07. যদি $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে তবে- **[Agri.'19-20] [Ans: b]**

(a) $g^2 = c$ (b) $f^2 = c$ (c) $g^2 - f^2 = c$ (d) $g^2 + f^2 = c$

08. (3, 1) এবং (−4, 1) বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের কেন্দ্র y অক্ষের উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? **[JU'19-20] [Ans: d]**

(a) $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 8y - 6 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 8y - 6 = 0$ (d) কোনোটিই নয়

সমাধান: বৃত্তটির কেন্দ্র y অক্ষের উপর অবস্থিত। $\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2fy + c = 0$ ..... (i)

(i) নং সমীকরণে (3, 1) এবং (−4, 1) বিন্দু দুটি বসিয়ে পাই,

$9 + 1 + 2f + c = 0 \Rightarrow 2f + c + 10 = 0$ ..... (ii)

$16 + 1 + 2f + c = 0 \Rightarrow 2f + c + 17 = 0$ ..... (iii)

(ii) ও (iii) নং সমীকরণ দুটির কোনো সমাধান নেই। [$\because$ সমীকরণ দুটি পরস্পর সমান্তরাল দুটি রেখা নির্দেশ করে]

অর্থাৎ (−4,1) ও (3,1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং y অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্ত সম্ভব নয়।

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery
CamScanner

09. (3,5) কেন্দ্রবিশিষ্ট ও y অক্ষকে স্পর্শ করে এমন বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? **[JU'18-19] [Ans: a]**

(a) $x^2+y^2-6x-10y+25=0$ (b) $x^2+y^2-6x-10y-25=0$
(c) $x^2+y^2-6x-10y+9=0$ (d) $x^2+y^2-10x-6y+9=0$

সমাধান: $g=-3, f=-5$ এবং $c=f^2=25$ ∴ সমীকরণ: $x^2+y^2-6x-10y+25=0$

10. মূলবিন্দুগামী একটি বৃত্ত ধনাত্মক x-অক্ষ হতে 4 একক এবং ধনাত্মক y-অক্ষ হতে 2 একক অংশ কর্তন করলে, এর সমীকরণ হবে - **[DU'17-18] [Ans: a]**

(a) $x^2+y^2-4x-2y=0$ (b) $x^2+y^2+4x+2y=0$
(c) $x^2+y^2+2x+4y=0$ (d) $x^2+y^2-2x-4y=0$

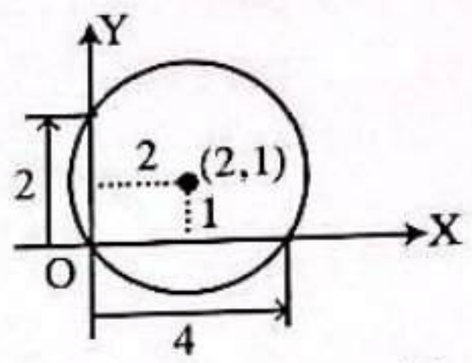
সমাধান: মূল বিন্দুগামী হলে $c=0$; কেন্দ্র $(2,1)$

∴ সমীকরণ: $x^2+y^2-2\cdot 2x-2\cdot 1y+0=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x-2y=0$

Shortcut: x^2+y^2 −(চিহ্নসহ x অক্ষের কর্তিত অংশ) x − (চিহ্নসহ y অক্ষের কর্তিত অংশ) $y=0$

∴ প্রদত্ত ক্ষেত্রে যা হবে; $x^2+y^2-4x-2y=0$



11. k এর কোন মানের জন্য $x^2+y^2-6x-4y+k=0$ বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে? **[RU'17-18] [Ans: b]**

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8

সমাধান: y-অক্ষকে স্পর্শ করলে, $k=c=f^2=(-2)^2=4$; $\left[\because f=\frac{y\text{ এর সহগ}}{2}=-2\right]$

12. $x^2+y^2-4x-8y+P=0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে। P এর মান কত? **[RU'17-18; JU'17-18] [Ans: a]**

(a) 4 (b) 5 (c) 7 (d) 11

সমাধান: x-অক্ষকে স্পর্শ করলে, $P=c=g^2=(-2)^2=4$; $\left[\because g=\frac{x\text{ এর সহগ}}{2}=-2\right]$

13. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(0,2)$এবং বৃত্তটি মূলবিন্দু দিয়ে যায় বৃত্তটির সমীকরণ কী? **[JU'17-18]**

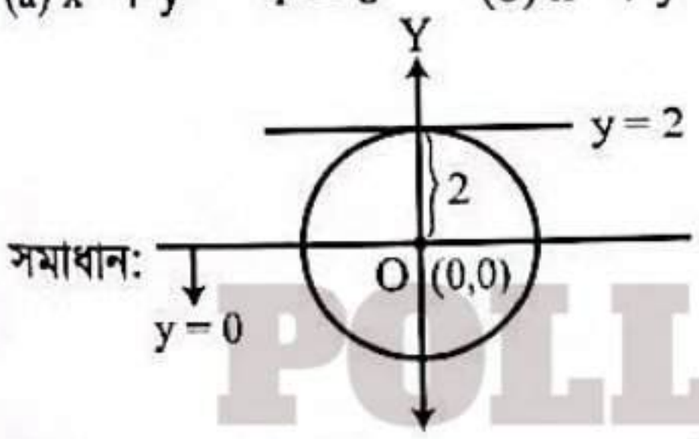
(a) $x^2+y^2-2y=4$ (b) $x^2+y^2-2y=0$ (c) $x^2+y^2+2y=0$ (d) $x^2+y^2-2y-3=0$

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $(x-0)^2+(y-2)^2=2^2\Rightarrow x^2+y^2-4y=0$

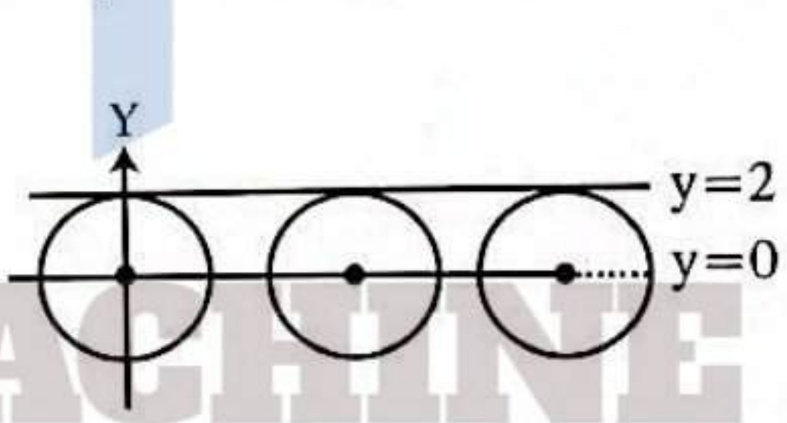
14. সমীকরণ $y=0$ বৃত্তের একটি ব্যাস এবং কেন্দ্র থেকে $y-2=0$ স্পর্শকের দূরত্ব 2 হলে, বৃত্তটির সমীকরণ কী? **[JU'17-18]**

(a) $x^2+y^2-4=0$ (b) $x^2+y^2+4=0$ (c) $x^2+y^2-1=0$ (d) $x^2+y^2-2=0$ **[Ans: a]**

সমাধান:



$y=0$ বা x-অক্ষ



ধরি, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (h, k); কেন্দ্র থেকে স্পর্শকের দূরত্ব $=\frac{|k-2|}{\sqrt{1^2}}=2$ ∴ $k=0,4$। কিন্তু x-অক্ষ বৃত্তের ব্যাস হওয়ায় $k=0$ গ্রহণযোগ্য।

∴ বৃত্তের সমীকরণ: $(x-h)^2+(y-0)^2=2^2\Rightarrow x^2+y^2-2hx+h^2-4=0$ যা h এর যেকোনো মানের জন্য সত্য।

কারণ কেন্দ্র $(h,0)$, x-অক্ষের যেকোনো বিন্দুতে থাকতে পারে। $h=0$ ধরে নিলে, অপশন (a) সঠিক।

15. y অক্ষকে $(0,4)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং কেন্দ্র $5x-7y-2=0$ রেখার উপর অবস্থিত, এরূপ বৃত্তের সমীকরণ হবে- **[DU'16-17] [Ans: c]**

(a) $x^2+y^2+12x-8y+16=0$ (b) $x^2+y^2-8x-6y+8=0$
(c) $x^2+y^2-12x-8y+16=0$ (d) $x^2+y^2+8x+6y-40=0$

সমাধান: ব্যাসার্ধ r হলে, কেন্দ্র (r, 4); [চিত্র হতে]

∴ $5r-7\cdot 4-2=0\Rightarrow r=6$

∴ কেন্দ্র (6,4) ও ব্যাসার্ধ 6 ; $(x-6)^2+(y-4)^2=6^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-12x-8y+16=0$

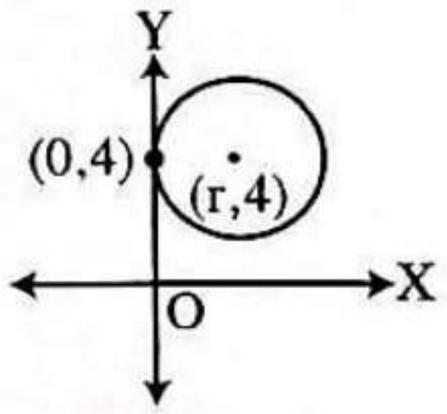
বিকল্প: y অক্ষকে $(0,4)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

∴ $(0,-f)\equiv(0,4)$ ∴ $f=-4$ ∴ $c=f^2=16$

কেন্দ্র $(-g,-f)$; $5x-7y-2=0$ রেখায় অবস্থিত।

∴ $-5g+7f-2=0\Rightarrow -5g-28-2=0\Rightarrow 5g=-30$ ∴ $g=-6$

∴ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2-12x-8y+16=0$



POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

16. $(-4,3)$ এবং $(12,-1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ- **[DU'15-16] [Ans: d]**

(a) $x^2+y^2+8x-2y+51=0$ (b) $x^2+y^2-8x-2y+51=0$

(c) $x^2+y^2+8x+2y-51=0$ (d) $x^2+y^2-8x-2y-51=0$

সমাধান: $(x+4)(x-12)+(y-3)(y+1)=0 \Rightarrow x^2+4x-12x-48+y^2+y-3y-3=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-8x-2y-51=0$

বিকল্প: কেন্দ্র $(-g,-f)$ = ব্যাসের প্রান্তবিন্দুর মধ্যবিন্দু $\left\{\frac{-4+12}{2},\frac{3+(-1)}{2}\right\}=(4,1)$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্ত: $(x-4)^2+(y-1)^2=r^2=[4-(-4)]^2+[1-3]^2=64+4 \Rightarrow x^2+y^2-8x-2y-51=0$

17. নিম্নের কোন বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে? **[DU'14-15] [Ans: c]**

(a) $x^2+y^2-2x+6y+4=0$ (b) $x^2+y^2-4x+6y+5=0$

(c) $x^2+y^2-2x+6y+1=0$ (d) $2x^2+2y^2-2x+6y+3=0$

সমাধান: $x^2+y^2-2x+6y+1=0$; x –অক্ষকে স্পর্শ করলে, $g^2=c$; অপশন c এর জন্য কেবল শর্তটি খাটে,

$c=1 \therefore g=\pm 1$

18. $(3,0)$ এবং $(-4,1)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের কেন্দ্র y অক্ষের উপর অবস্থিত হলে, বৃত্তটির সমীকরণ – **[Ans: d]**

(a) $x^2+y^2-8y-1=0$ (b) $x^2+y^2-6y-1=0$ **[CU'13-14, 10-11, 08-09]**

(c) $x^2+y^2-5y-7=0$ (d) $x^2+y^2-8y-9=0$

(e) $x^2+y^2-5y+9=0$

সমাধান: বৃত্তটির কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত। $\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2+2fy+c=0$ .... (i)

(i) নং সমীকরণে (3,0) এবং (−4,1) বিন্দু দুটি বসিয়ে পাই,

$9+0+2f+0+c=0 \therefore c=-9$

এবং $16+1+2f+c=0 \Rightarrow 2f=-17-c \therefore f=\frac{-17+9}{2}=-4$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2-8y-9=0$

বিকল্প: যেহেতু বৃত্তটির কেন্দ্র y অক্ষের উপর অবস্থিত তাই বৃত্তের সমীকরণে x বিশিষ্ট পদটি অনুপস্থিত। যেহেতু সবগুলো অপশনেই x-পদ অনুপস্থিত তাই সঠিক উত্তর হবে সেই বৃত্তটি, যার সমীকরণ (3,0) ও (−4,1) বিন্দু দুইটি দিয়ে সিদ্ধ হয়।

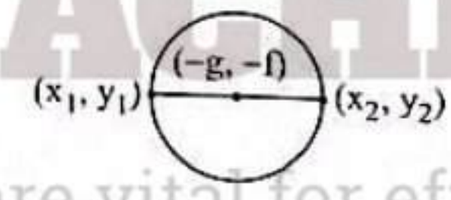
Type-05: বৃত্তের ব্যাসের একটি প্রান্তবিন্দু দেওয়া থাকলে অপর প্রান্তবিন্দু নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $\equiv(-g,-f)$। বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) হলে,

$\frac{x_1+x_2}{2}=-g \therefore x_2=-2g-x_1$

$\frac{y_1+y_2}{2}=-f \therefore y_2=-2f-y_1$



POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. (4, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসের এক প্রান্তের স্থানাঙ্ক (3, 1) হলে অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক কোনটি? **[GST'21-22] [Ans: d]**

(a) (4, 0) (b) (5, −5) (c) (4, 7) (d) (5, 5)

সমাধান: ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক (x_1,y_1) হলে, $\frac{x_1+3}{2}=4 \Rightarrow x_1=8-3=5$

এবং $\frac{y_1+1}{2}=3 \Rightarrow y_1=6-1=5 \therefore$ অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক $(x_1,y_1)\equiv(5,5)$

Shortcut: 2 × কেন্দ্র – একটি প্রান্তবিন্দু = অপর প্রান্তবিন্দু

অর্থাৎ, $(2\times4-3,\ 2\times3-1)$ বা $(5,5)$

02. কোনো একটি বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (3,5) এবং এর একটি ব্যাসের এক প্রান্তের স্থানাঙ্ক (7,3) হলে, উক্ত ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক কত? **[RU'17-18] [Ans: c]**

(a) (3,2) (b) (4,1) (c) (−1,7) (d) (2, −5)

সমাধান: $\frac{x+7}{2}=3 \ \therefore x=-1$; $\frac{y+3}{2}=5 \ \therefore y=7 \ \therefore (x,y)\equiv(-1,7)$

Shotcut: $(2\times3-7, 2\times5-3)$ বা $(-1,7)$

CamScanner

03. P(4,7) ও B(−8, 3) বিন্দুদ্বয় একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু, বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত? **[JU'15-16] [Ans: c]**

(a) (0,0) (b) (2, −5) (c) (−2, 5) (d) (−2, −5)

সমাধান: কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{-8+4}{2}, \frac{7+3}{2}\right) \equiv (-2, 5)$

Type-06: ছেদবিন্দুগামী বৃত্ত সংক্রান্ত

Formula & Concept:

A.R. Khalifa এর নিয়মানুযায়ী-

➢ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্ত এবং $ax + by + c = 0$ সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ:

$(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c) + k(ax + by + c) = 0$

➢ দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ বললে, আগে সাধারণ জ্যা (x^2 ও y^2 এর সহগদ্বয়কে 1 রেখে বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ বিয়োগ করলে সাধারণ জ্যায়ের সমীকরণ পাওয়া যাবে) এর সমীকরণ বের করে নিতে হবে। এরপর A.R. Khalifa এর নিয়ম apply করলে সমস্যা সমাধান সহজ হয়।

অথবা, ১ম বৃত্তের সমীকরণ $+ k$ (২য় বৃত্তের সমীকরণ) $= 0$ দ্বারাও সমস্যা সমাধান করা যায়।

Special Case:

(i) (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং বৃত্ত (C) ও সরলরেখা (L)-এর ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ: $\frac{C}{C(x_1, y_1)} = \frac{L}{L(x_1, y_1)}$

(ii) (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং দুইটি বৃত্তের $(C_1 = 0, C_2 = 0)$ ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $\frac{C_1}{C_2} = \frac{c_1(x_1, y_1)}{c_2(x_2, y_2)}$ বা, $\frac{C_1}{c_1(x_1, y_1)} = \frac{C_2}{c_2(x_2, y_2)}$

MCQ

01. মূলবিন্দু এবং $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্ত ও $2x + 3y + 1 = 0$ রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করা বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? **[JU'23-24] [Ans: b]**

(a) $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 3x - 3y = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$

সমাধান: নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ: $C_1 + kL = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 + k(2x + 3y + 1) = 0$ ... ... (i)

(i) নং বৃত্ত (0,0) বিন্দুগামী

$\therefore -4 + k(1) = 0 \therefore k = 4$

k এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 + 8x + 12y + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$

02. নিচের কোন বৃত্তটি $x^2 + y^2 = 2ax$ এবং $x^2 + y^2 = 2by$ বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র $bx - ay = 2ab$ রেখার উপর অবস্থিত? **[RU'22-23] [Ans: b]**

(a) $x^2 + y^2 + 3ax + by = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 3ax + by = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 3ax - by = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 3ax - by = 0$

সমাধান: $x^2 + y^2 = 2ax$ ... ... (i) এবং $x^2 + y^2 = 2by$ ... ... (ii)

এখন, (i) - (ii) $\Rightarrow 2ax - 2by = 0 \therefore ax - by = 0$

এখন, নির্ণেয় বৃত্ত: $x^2 + y^2 - 2ax + k(ax - by) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + (ak - 2a)x - bky = 0$ ... ... (iii)

$\therefore$ কেন্দ্র $\equiv \left(-\frac{ak-2a}{2}, \frac{bk}{2}\right) \equiv \left(\frac{2a-ak}{2}, \frac{bk}{2}\right)$ বিন্দুটি $bx - ay = 2ab$ এর উপর অবস্থিত। $\therefore b \cdot \frac{2a-ak}{2} - a \cdot \frac{bk}{2} = 2ab$

$\Rightarrow 2ab - abk - abk - 4ab = 0 \Rightarrow k = -1$

$k = -1$, (iii) এ বসিয়ে, $x^2 + y^2 + (-a - 2a)x + by = 0 \therefore x^2 + y^2 - 3ax + by = 0$

03. $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্তে $x + y - 1 = 0$ সরলরেখা দ্বারা খণ্ডিত জ্যা-কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ হবে- **[RU'19-20] [Ans: b]**

(a) $x^2 + y^2 + x - y = 0$ (b) $x^2 + y^2 - x - y = 0$

(c) $x^2 + y^2 - x + y = 0$ (d) $x^2 + y^2 + x + y = 0$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with CamScanner

সমাধান: মনে করি, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 1 + k(x + y - 1) = 0$ .... (i)

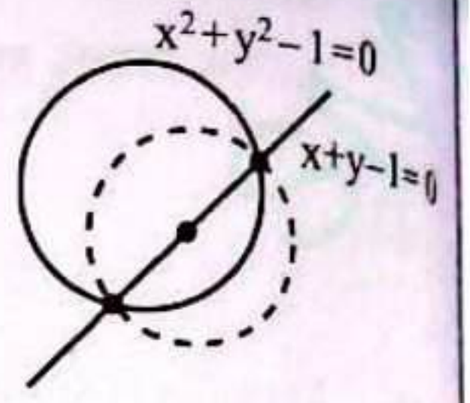
$\Rightarrow x^2 + y^2 + kx + ky - k - 1 = 0$ .... (ii)

(ii) বৃত্তের কেন্দ্র $\left(-\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}\right)$, $x + y - 1 = 0$ ব্যাসের উপর অবস্থিত।

$\therefore -\frac{k}{2} - \frac{k}{2} - 1 = 0 \therefore k = -1$

(i)-এ k এর মান বসালে পাই, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 1 + (-1)(x + y - 1) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 1 - x - y + 1 = 0 \therefore x^2 + y^2 - x - y = 0$



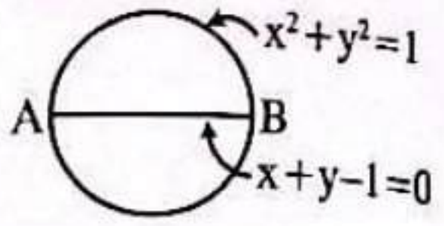
বিকল্প: $x^2 + y^2 = 1$ .... (i)

$x + y - 1 = 0$; $y = 1 - x$ .... (ii)

y এর মান (i) নং বসিয়ে পাই,

$(x)^2 + (1 - x)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow 2x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$



এখন, $x = 0$ হলে, $y = 1$ এবং $x = 1$ হলে, $y = 0 \therefore A \equiv (0, 1)$; $B \equiv (1, 0)$ [ব্যাসের প্রান্তবিন্দু]

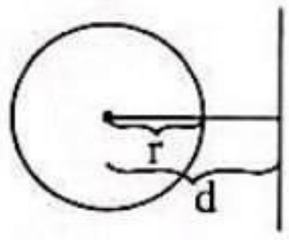
$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 0)(x - 1) + (y - 1)(y - 0) = 0 \Rightarrow x^2 - x + y^2 - y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0$

Shortcut: প্রতিটি বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করে ব্যাসের সমীকরণে বসানো যেতে পারে। যদি কেবল একটি অপশন সত্যি হয় তবে তা উত্তর। দেখা যাচ্ছে, কেবল অপশন b এর কেন্দ্র $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ বসালে $x + y - 1 = 0$ সত্যি হয়।

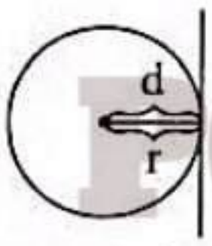
Type-07: সরলরেখা বৃত্তকে স্পর্শ করা সম্পর্কিত

➲ **Formula & Concept:**

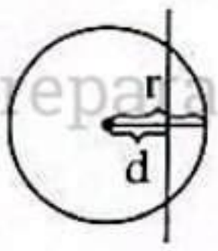
কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং কেন্দ্র থেকে কোনো সরলরেখার লম্ব দূরত্ব d হলে-

➢ 

$r < d$ হলে, রেখাটি বৃত্তের বাহিরে অবস্থিত।

➢ 

$r = d$ হলে, রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক।

➢ 

$r > d$ হলে, রেখাটি বৃত্তের ছেদক।

➢ $y = mx + c$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে, $c^2 = r^2(1 + m^2)$ বা, $c = \pm r\sqrt{1 + m^2}$

MCQ

01. $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তের স্পর্শক x-অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে, স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? **[GST'23-24; RU'22-23]**

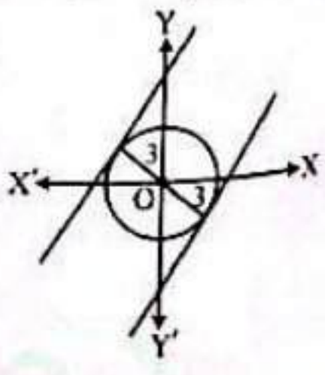
(a) $x + y \pm 3\sqrt{2} = 0$ (b) $x - y \pm 3\sqrt{2} = 0$ (c) $x + y \pm 2\sqrt{3} = 0$ (d) $x - y \pm 2\sqrt{3} = 0$ **[Ans: b]**

সমাধান: ধরি, সরলরেখার সমীকরণ, $y = mx + c$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তটির স্পর্শক হওয়ার শর্ত, $c = \pm 3\sqrt{1 + m^2}$

এখানে, $m = \tan 45° = 1$ [$\because$ x অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে]

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $y = 1 \cdot x \pm 3\sqrt{1 + 1^2} = 0$

$\Rightarrow x - y \pm 3\sqrt{2} = 0$



ROLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

02. $(4, 3)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট এবং $5x - 12y + 3 = 0$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে এমন বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? **[RU'23-24; DU'19-20] [Ans: b]**

(a) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 24 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 24 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 24 = 0$

সমাধান: $r = \left|\frac{5(4)-12(3)+3}{\sqrt{5^2+12^2}}\right| = \left|\frac{-13}{13}\right| = 1 \therefore (x-4)^2 + (y-3)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$

03. y-অক্ষের সমান্তরাল $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ বৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: c]**

(a) $x - 1 = 0,\ x + 7 = 0$ (b) $x + 1 = 0,\ x + 7 = 0$
(c) $x + 1 = 0,\ x - 7 = 0$ (d) $x - 1 = 0,\ x - 7 = 0$

সমাধান: $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$; কেন্দ্র $(3, 4)$; ব্যাসার্ধ $= \sqrt{3^2 + 4^2 - 9} = 4$

ধরি, y-অক্ষের সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ, $x = a \Rightarrow x - a = 0$

$\therefore$ কেন্দ্র হতে লম্ব দূরত্ব = ব্যাসার্ধ $\Rightarrow \left|\frac{3-a}{\sqrt{1^2}}\right| = 4 \Rightarrow |3 - a| = 4 \Rightarrow 3 - a = \pm 4 \Rightarrow a = -1, 7$

$\therefore$ সরলরেখাটি হবে, $x - 7 = 0$ অথবা, $x + 1 = 0$

04. $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। k -এর মান কত? **[DU' 21-22; CU'20-21] [Ans: c]**

(a) $8, -30$ (b) $-8, 30$ (c) $-10, 40$ (d) $10, -40$

সমাধান: $x^2 + y^2 - 10x = 0$ বৃত্তটির কেন্দ্র $\left(\frac{-10}{-2}, 0\right) = (5, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = 5$

কেন্দ্র হতে রেখাটির লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\Rightarrow \frac{|3\cdot5+4\cdot0-k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5 \Rightarrow |-k + 15| = 25$ বা, $|k - 15| = 25$

$\Rightarrow k - 15 = \pm 25 \therefore k = 15 \pm 25 = 40, -10$

05. $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তে x-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্নকারী স্পর্শকের সমীকরণ কী? **[RU' 21-22] [Ans: c]**

(a) $y = \frac{(x\pm2)}{\sqrt{3}}$ (b) $y = \frac{(x\pm1)}{\sqrt{3}}$ (c) $y = \frac{(x\pm6)}{\sqrt{3}}$ (d) $y = \frac{(x\pm3)}{\sqrt{3}}$

সমাধান: ধরি, সরলরেখা সমীকরণ, $y = mx + c$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত, $c = \pm 3\sqrt{1 + m^2}$

এখন, $m = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$; [$\because$ x অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে]

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \pm 3\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{3}} \pm \frac{6}{\sqrt{3}} \therefore y = \frac{(x\pm6)}{\sqrt{3}}$

06. $2x + ky - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে, k এর মান কত? **[RU'20-21] [Ans: d]**

(a) $\frac{6}{5}$ (b) $-\frac{6}{5}$ (c) $\frac{5}{6}$ (d) $-\frac{5}{6}$

সমাধান: কেন্দ্র $(2,1), c = 4 \therefore$ ব্যাসার্ধ$= \sqrt{4 + 1 - 4} = 1$ একক।

$\frac{|4+k-1|}{\sqrt{4+k^2}} = 1 \Rightarrow (3 + k)^2 = 4 + k^2 \Rightarrow 9 + k^2 + 6k = 4 + k^2 \therefore k = -\frac{5}{6}$

07. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক- **[DU'18-19] [Ans: a]**

(a) $x = 0$ (b) $x = 2$ (c) $y = 2$ (d) $y = 4$

সমাধান: কেন্দ্র $C \equiv (-1,2),\ r = \sqrt{1^2 + 2^2 - 4} = 1$

স্পর্শক হবার শর্ত: কেন্দ্র থেকে দূরত্ব = ব্যাসার্ধ; a অপশন এর জন্য কেন্দ্র থেকে দূরত্ব $= \left|\frac{1}{\sqrt{1}}\right| = r = 1$ একক

আবার, $y - 3x = 0$ রেখাটি মূলবিন্দুগামী রেখা অর্থাৎ, $x^2 + y^2 = 10$ বৃত্তের কেন্দ্র $(0,0)$ দিয়ে যায়।

08. $3x + by - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে b এর মান নির্ণয় কর।
[RU'17-18, 09-10, 08-09; KU'15-16; JU' 11-12, 10-11] [Ans: a]

(a) 2 (b) 1 (c) 5 (d) 10

সমাধান: $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $\equiv (4,1)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{16 + 1 - 4} = \sqrt{13}$ একক

এখন, $3x + by - 1 = 0$ রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করায়, বৃত্তের কেন্দ্র হতে রেখাটির লম্ব দূরত্ব = বৃত্তটির ব্যাসার্ধ হবে।

অর্থাৎ, $\frac{|3\times4+b\times1-1|}{\sqrt{3^2+b^2}} = \sqrt{13} \Rightarrow (b + 11)^2 = 13(9 + b^2) \Rightarrow b^2 + 22b + 121 = 117 + 13b^2$

$\Rightarrow 12b^2 - 22b - 4 = 0 \Rightarrow (b - 2)\left(b + \frac{1}{6}\right) = 0 \therefore b = 2$ অথবা $b = -\frac{1}{6}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-08: বৃত্তের জ্যা-এর দৈর্ঘ্য/সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

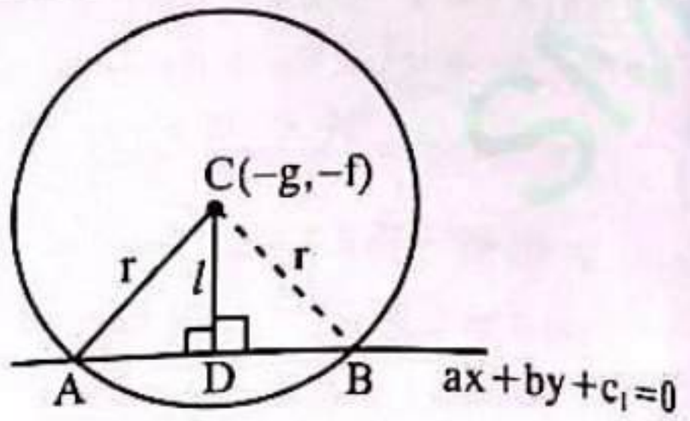
বৃত্তের জ্যা-এর সমীকরণ দেওয়া থাকলে জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়:

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র $C(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

∴ বৃত্তের কেন্দ্র C থেকে জ্যা-এর লম্ব দূরত্ব, $CD = l = \frac{|-ag-bf+c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

জ্যা-এর সমীকরণ $ax + by + c_1 = 0$



এখন, $AD = \sqrt{r^2 - l^2}$ তাহলে জ্যা-এর দৈর্ঘ্য, $\boxed{AB = 2AD = 2\sqrt{r^2 - l^2}}$

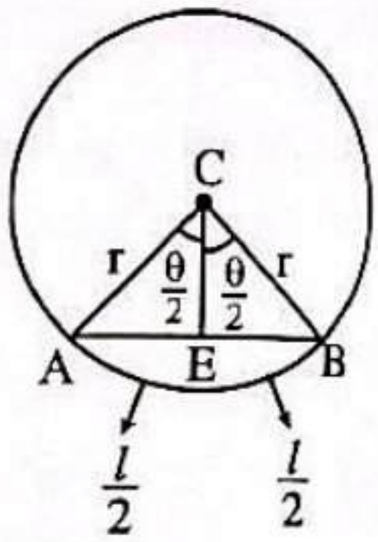
বৃত্তের জ্যা কর্তৃক উৎপন্ন কোণ দেয়া থাকলে জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়:

আমরা জানি, কোনো বৃত্তের কেন্দ্র থেকে জ্যায়ের উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

এক্ষেত্রে, $AB = l$ বিধায় $AE = BE = \frac{l}{2}$ হবে।

আবার $\angle ACE = \angle BCE = \frac{\theta}{2}$ [∵ ΔACE ও ΔBCE ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম এবং $\angle ACB = \theta$]

এখন, সমকোণী ΔACE হতে, $\frac{AE}{AC} = \frac{\frac{l}{2}}{r} = \sin\frac{\theta}{2} \therefore l = 2r\sin\frac{\theta}{2}$ এবং $r = \frac{\frac{l}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$



বিকল্প: AB জ্যা-টি বৃত্তের কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে, $\cos\theta = \frac{r^2+r^2-l^2}{2\cdot r\cdot r}$ [ত্রিভুজের Cosine Law]

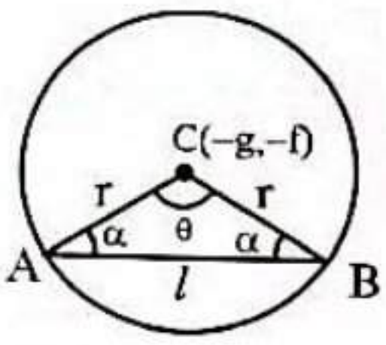
$\Rightarrow l^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\theta = 2r^2(1-\cos\theta) \Rightarrow l^2 = 2r^2 \cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2} \therefore l = 2r\sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore r = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

বিকল্প: $\alpha + \alpha + \theta = 180° \Rightarrow \alpha = 90° - \frac{\theta}{2}$

লামির সূত্রানুযায়ী, $\frac{l}{\sin\theta} = \frac{r}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{l}{\sin\theta} = \frac{r}{\sin\left(90°-\frac{\theta}{2}\right)}$

$\Rightarrow \frac{l}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{r}{\cos\frac{\theta}{2}} \Rightarrow l = 2r\sin\frac{\theta}{2}$



সমীকরণ নির্ণয়: সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের সাথে অপর একটি শর্ত জানা থাকা লাগবে। [Example দেখলে বিষয়টি পরিষ্কার হবে]

POLL MACHINE

MCQ

01. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ বৃত্তের একটি জ্যা কেন্দ্রে $\frac{\pi}{2}$ কোণ তৈরি করে। জ্যাটির দৈর্ঘ্য কত একক? **[GST'22-23] [Ans: c]**

Preparation and Practice are vital for effective delivery

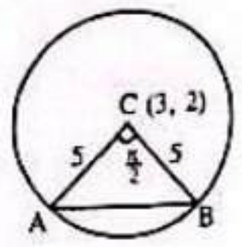
(a) $5\sqrt{3}$ (b) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (c) $5\sqrt{2}$ (d) $7\sqrt{3}$

সমাধান: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25 = 5^2$; বৃত্তের কেন্দ্র C(3, 2) এবং ব্যাসার্ধ, $r = 5$ একক

এখানে কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$

∴ ΔABC সমকোণী এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = 5$ একক

∴ $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 2 \times 5^2 \therefore AB = 5\sqrt{2}$ একক।



02. $y = x + 2$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তে যে জ্যা উৎপন্ন করে তার দৈর্ঘ্য কত? **[JU'22-23] [Ans: b]**

(a) $\sqrt{14}$ (b) $2\sqrt{14}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{7}$

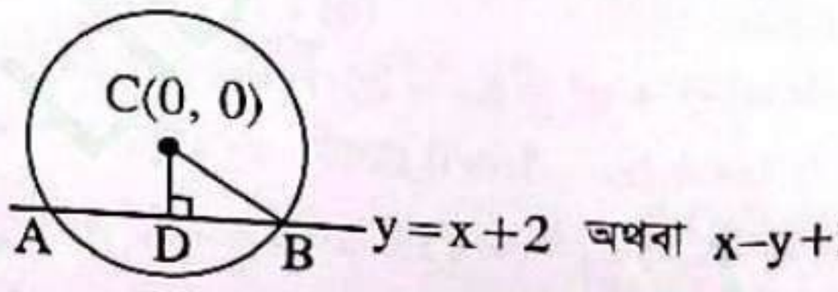
সমাধান: $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের কেন্দ্র C(0,0), ব্যাসার্ধ, $r = 4$ একক

CD(0,0) হতে $x - y + 2 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|0-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ একক

$\therefore AB = 2 \times DB = 2 \times \sqrt{CB^2 - CD^2} = 2\sqrt{4^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}$

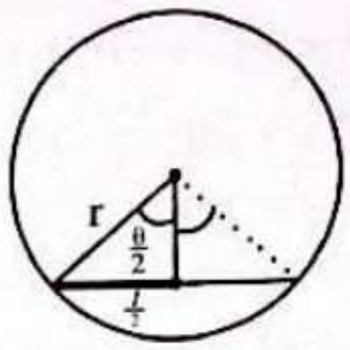
$= 2\sqrt{16-2} = 2\sqrt{14}$ একক



CamScanner

03. $\sqrt{3}$ একক দৈর্ঘ্যের একটি জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে $\frac{\pi}{3}$ কোণ উৎপন্ন করলে বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? **[GST'20-21] [Ans: b]**

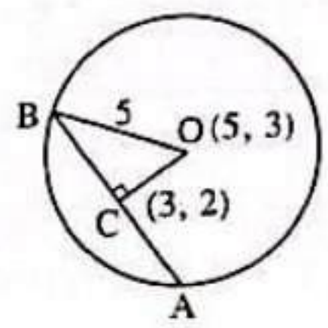
(a) π (b) 3π (c) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}\pi$



সমাধান: $r = \frac{\frac{l}{2}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \therefore \Delta = \pi r^2 = \pi \cdot 3 = 3\pi$ বর্গ একক

04. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (5, 3) এর যে জ্যা (3, 2) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য কত? **[KU'10-11] [Ans: b]**

(a) $4\sqrt{3}$ (b) $4\sqrt{5}$ (c) $4\sqrt{7}$ (d) $4\sqrt{8}$



সমাধান:

$OB = 5$ একক; $C(3, 2)$; $AB = 2BC = 2\sqrt{OB^2 - OC^2}$

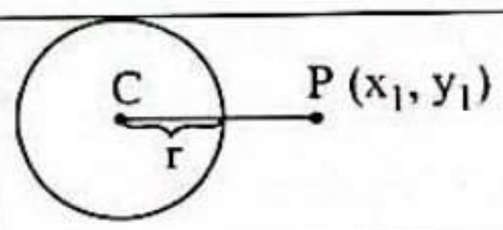
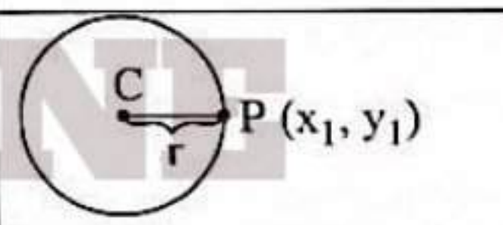
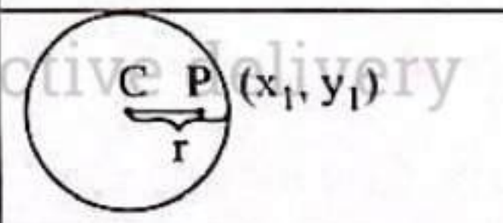
$= 2\sqrt{5^2 - (5-3)^2 - (3-2)^2}$

$= 4\sqrt{5}$ একক

Type-09: বৃত্তের সাপেক্ষে বিন্দুর অবস্থান

➲ **Formula & Concept:**

কোনো বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$; এর ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ ও কেন্দ্র $C(-g, -f)$ হলে, কোনো বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এর অবস্থান-

➢ বৃত্তের বাইরে যখন $CP > r$ বা, $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c > 0$	
➢ বৃত্তের উপরে যখন $CP = r$ বা, $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$	
➢ বৃত্তের ভিতরে যখন $CP < r$ বা, $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c < 0$	

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. কোন শর্ত সাপেক্ষে $(-1, 2)$ বিন্দুটি $x^2 + y^2 - 2x + 2y + c = 0$ বৃত্তের ভিতরে অবস্থান করবে? **[RU'21-22] [Ans: d]**

(a) $c = 11$ (b) $c = 0$ (c) $c = -11$ (d) $c < -11$

সমাধান: বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 2x + 2y + c = 0$

$(-1, 2)$ বিন্দুটি বৃত্তের ভিতরে অবস্থান করবে যদি $(-1)^2 + (2)^2 - 2(-1) + 2(2) + c < 0$ হয়। $\therefore c < -11$

02. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ হলে, নিচের কোন বিন্দুটি বৃত্তের বাহিরে অবস্থিত? **[KU'16-17] [Ans: b]**

(a) $(1, 1)$ (b) $(-2, 2)$ (c) $(3, 3)$ (d) $(7, -5)$

সমাধান: $P(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12$

$\therefore P(-2, 2)$ বিন্দুর জন্য $(-2)^2 + 2^2 - 6(-2) + 4 \times 2 - 12 = 16 > 0$

CamScanner

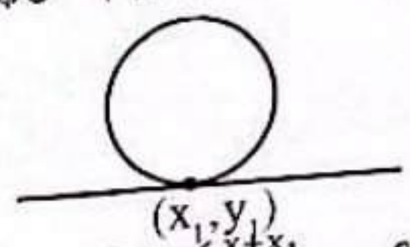
Type-10: বৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

$xx_1 + yy_1 + 2g\left(\frac{x+x_1}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+y_1}{2}\right) + c = 0$

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$



সব ধরনের কনিক-এর জন্য এই সূত্রটি প্রযোজ্য।

❖ **Shortcut:** x^2 এর পরিবর্তে xx_1, y^2 এর পরিবর্তে yy_1, x এর পরিবর্তে $\frac{x+x_1}{2}$, y এর পরিবর্তে $\frac{y+y_1}{2}$ বসাতে হবে। সমীকরণে xy থাকলে (i.e. কনিক) এর পরিবর্তে $\frac{xy_1+yx_1}{2}$ বসাতে হবে।

MCQ

01. $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$ বৃত্তের উপরস্থ (1, 2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? **[JU'22-23] [Ans: c]**

(a) $x - 5y + 3 = 0$ (b) $5x - 2y - 3 = 0$ (c) $5x - y - 3 = 0$ (d) $2x - 5y + 3 = 0$

সমাধান: (1,2) বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক: $x \times 1 + y \times 2 + 3 \times \frac{x+1}{2} - 5 \times \frac{y+2}{2} + 2 = 0$

$\Rightarrow x + 2y + \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} - \frac{5y}{2} - 5 + 2 = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} - \frac{y}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 5x - y - 3 = 0$

বিকল্প: বৃত্তটির কেন্দ্র $\left(\frac{3}{-2}, \frac{-5}{-2}\right)$ বা $\left(\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}\right)$; কেন্দ্র ও উক্ত বিন্দুর সংযোগকারী রেখার ঢাল $= \frac{2-\frac{5}{2}}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{-1}{5}$

$\therefore$ স্পর্শকের ঢাল $= \frac{-1}{\frac{-1}{5}} = 5$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ: $y - 2 = 5(x - 1) \Rightarrow 5x - y - 3 = 0$

02. $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$ বৃত্তের (4, −11) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে – **[CU'11-12] [Ans: b]**

(a) $3x - 4y - 22 = 0$ (b) $5x - 12y - 152 = 0$
(c) $-5x - 12y + 152 = 0$ (d) $-2x + 2y + 55 = 0$

সমাধান: $g = \frac{-3}{2}; f = \frac{10}{2} = 5$; $(x_1, y_1) = (4, -11)$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ: $4(x) + (-11)(y) - \frac{3}{2}(x + 4) + 5(y - 11) - 15 = 0 \therefore 5x - 12y - 152 = 0$

অপশন চেক করলেও উত্তর বলা যায় যদি কেবল একটি অপশন শর্ত সিদ্ধ করে। এখানে (4, −1) বিন্দু দিয়ে কেবল Option B এর সরলরেখা অতিক্রম করে।

বিকল্প: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{3}{2}, -5\right)$; কেন্দ্র ও (4, −11) বিন্দুর সংযোগকারী রেখাল ঢাল $= \frac{-5-(-11)}{\frac{3}{2}-4} = \frac{6}{\frac{-5}{2}} = \frac{-12}{5}$

$\therefore$ স্পর্শকের ঢাল $= \frac{-1}{\frac{-12}{5}} = \frac{5}{12}$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ: $y - (-11) = \frac{5}{12}(x - 4) \Rightarrow y + 11 = \frac{5x-20}{12} \Rightarrow 5x - 12y - 152 = 0$

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-11: বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

দৈর্ঘ্য নির্ণয়:

➢ বৃত্তের বহিঃস্থ (x_1, y_1) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$

➢ আদর্শ রূপে দেয়া না থাকলে অবশ্যই আদর্শ রূপে এনে সূত্র প্রয়োগ করতে হবে। [অর্থাৎ x^2 এবং y^2 এর সহগ 1 বানাতে হবে]

সমীকরণ নির্ণয়:

➢ বহিঃস্থ বিন্দুগামী m ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ লিখতে হবে। বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) হলে স্পর্শকের সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

➢ রেখাটি স্পর্শক হবে যদি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে রেখার লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ হয়।

Scanned with CamScanner

MCQ

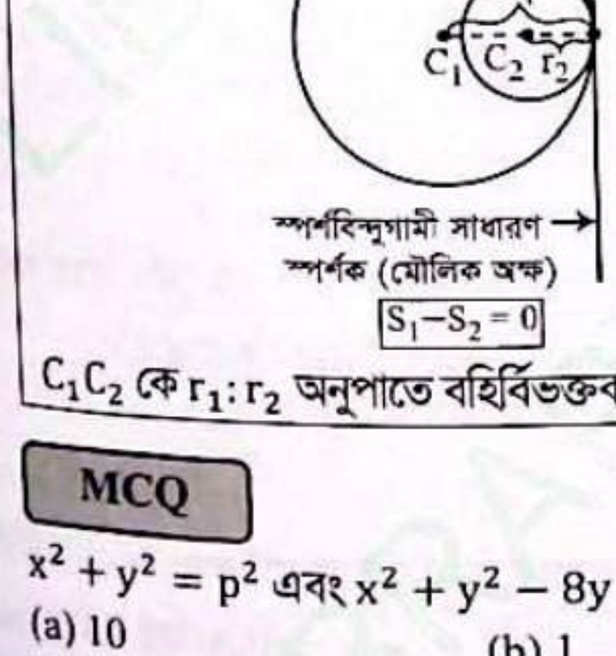
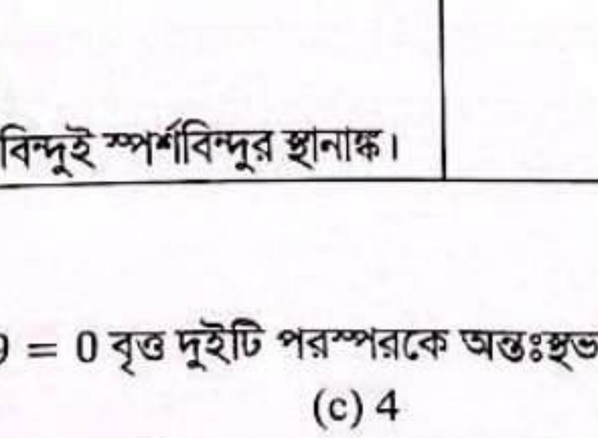
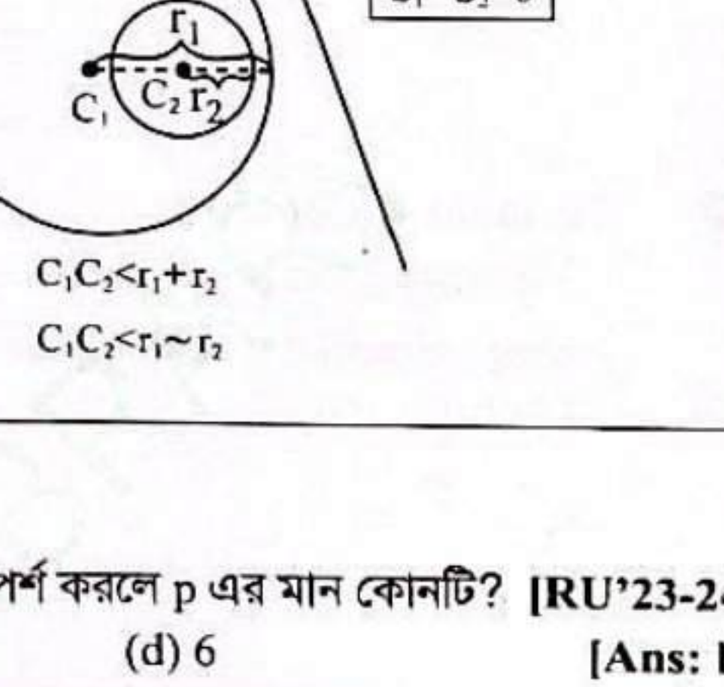
01. $(4,6)$ বিন্দু হতে $2x^2+2y^2-4x-6y+20=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: c]**
(a) $13\sqrt{3}$ (b) $6\sqrt{2}$ (c) 6 (d) 13
সমাধান: $2x^2+2y^2-4x-6y+20=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x-3y+10=0$
$\therefore$ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য, $L=\sqrt{4^2+6^2-2\times4-3\times6+10}=\sqrt{16+36-8-18+10}=6$ একক

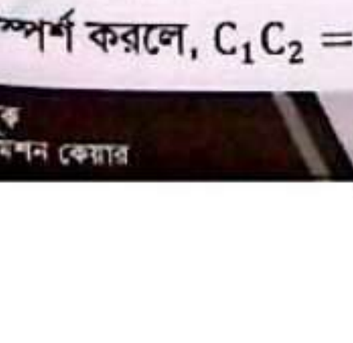
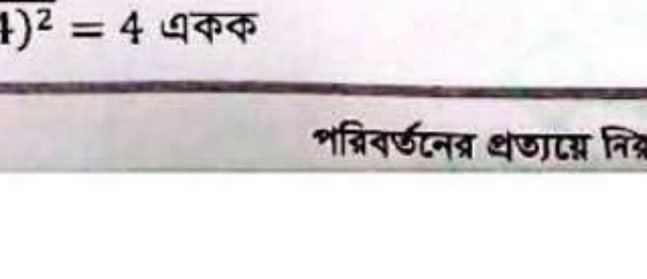
02. বৃত্তের কেন্দ্র $(1,2)$ এবং মূলবিন্দু থেকে বৃত্তটির উপর অঙ্কিত একটি স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2 একক হলে নিচের কোনটি সত্য? **[JU'19-20]**
(a) বৃত্ত y অক্ষকে স্পর্শ করে (b) ব্যাসার্ধ $=1.5$ (c) ব্যাসার্ধ $=2$ (d) বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে **[Ans: a]**
সমাধান: মূলবিন্দু হতে বৃত্তটির উপর অঙ্কিত স্পর্শক এর দৈর্ঘ্য, $d=\sqrt{x^2+y^2+2gx+2fy+c}$ একক
$\Rightarrow 2=\sqrt{0+0+0+0+c} \therefore c=4; f=-2 \therefore f^2=c \therefore y$ অক্ষকে স্পর্শ করে।

03. $(1,3)$ বিন্দু থেকে $x^2+y^2=3$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত? **[JU'16-17] [Ans: c]**
(a) 7 একক (b) $\sqrt{13}$ একক (c) $\sqrt{7}$ একক (d) 13 একক
সমাধান: $L=\sqrt{x_1^2+y_1^2-3}=\sqrt{1+9-3}=\sqrt{7}$ একক

Type-12: দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ বা ছেদ করা সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**
বিভিন্ন ক্ষেত্রে মৌলিক অক্ষ:

(i) স্পর্শ বা ছেদ করে না:	(ii) বহিঃস্পর্শ	(iii) ছেদ করে:
	 C_1C_2 কে $r_1:r_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দু স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে।	

(iv) অন্তঃস্পর্শ:	(v) বৃত্তের ভিতরে বৃত্ত:
 C_1C_2 কে $r_1:r_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুই স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক।	 $C_1C_2<r_1+r_2$ $C_1C_2<r_1\sim r_2$

POLYMACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $x^2+y^2=p^2$ এবং $x^2+y^2-8y-9=0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে p এর মান কোনটি? **[RU'23-24]**
(a) 10 (b) 1 (c) 4 (d) 6 **[Ans: b]**
সমাধান: $x^2+y^2=p^2$; কেন্দ্র $C_1(0,0)$; ব্যাসার্ধ, $r_1=p$ এবং $x^2+y^2-8y-9=0$; বৃত্তের কেন্দ্র $C_2(0,4)$; ব্যাসার্ধ, $r_2=\sqrt{4^2+9}=5$ একক
$\therefore$ অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে, $C_1C_2=r_1\sim r_2$; $C_1C_2=\sqrt{(0-0)^2+(0-4)^2}=4$ একক

CamScanner

Case-1	Case-2
$C_1C_2 = r_1 - r_2$	$C_1C_2 = r_2 - r_1$ $(r_2 > r_1)$
$4 = p - 5$ $(r_1 > r_2)$	$4 = 5 - p$
$p = 9$ (Option এ নাই)	$p = 1$

(অপশন b সঠিক)

02. $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (3,4) হলে, বৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? [RU'22-23] [Ans: d]

(a) $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 21 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 21 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

সমাধান: কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$ একক

প্রশ্নমতে, $3 + r = 5 \Rightarrow 3 + \sqrt{3^2 + 4^2 - c} = 5 \Rightarrow 25 - c = 4 \Rightarrow c = 21$

বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

03. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (4,3) যা $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত? [Agri.'21-22] [Ans: a]

(a) 2 (b) 5 (c) 8 (d) 3

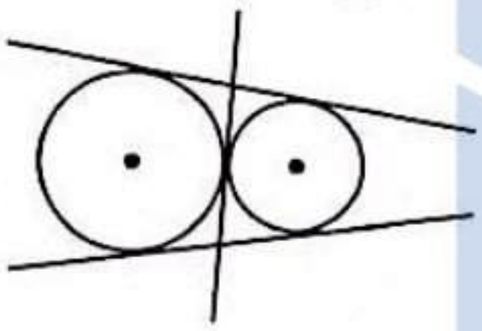
সমাধান: $x^2 + y^2 = 9$; বৃত্তের কেন্দ্র $C \equiv (0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{9} = 3$ একক

(4,3) এবং (0,0) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ∴ অপর বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= 5 - 3 = 2$ একক।

04. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে, তাদের কয়টি সাধারণ স্পর্শক বিদ্যমান? [RU'16-17] [Ans: c]

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

সমাধান:



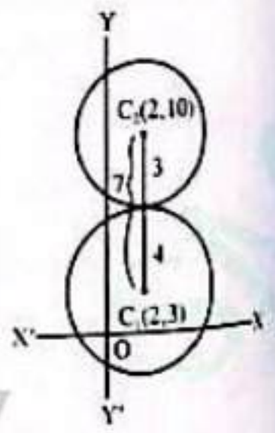
05. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ এবং $(x-2)^2 + (y-10)^2 = 9$ বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক- [DU'15-16] [Ans: d]

(a) (2, 3) (b) (16, 9) (c) (2, 10) (d) (2, 7)

সমাধান: ∴ স্পর্শবিন্দু $(2, 3+4) \equiv (2,7)$; [চিত্র হতে]

বিকল্প: $C_1(2,3), r_1 = 4$; $C_2(2,10), r_2 = 3$; C_1 ও C_2 কে $r_1 : r_2$ বা 4: 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুই স্পর্শবিন্দু।

∴ স্পর্শবিন্দু $= \left(\frac{4\times2+3\times2}{4+3}, \frac{4\times10+3\times3}{4+3}\right) = (2,7)$



POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-13: সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

দুটি বৃত্তের সমীকরণ দেওয়া থাকলে একটি থেকে অপরটি বিয়োগ করলেই সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ পাওয়া যায় (যদি তারা পরস্পরকে ছেদ করে থাকে)। এই ক্ষেত্রে বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণদ্বয়কে আদর্শরূপে নিয়ে (x^2 ও y^2 এর সহগ 1 রেখে) বিয়োগ করতে হবে।

MCQ

01. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 11 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 12 = 0$ বৃত্ত দুটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নিচের কোনটি? [CU'23-24] [Ans: a]

(a) $2x + 1 = 0$ (b) $2x + y = 0$ (c) $x + y = 0$ (d) $x + 2y = 0$

সমাধান: সাধারণ জ্যা: $S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2 + 4x + 3y + 12) - (x^2 + y^2 + 2x + 3y + 11) = 0$

$\Rightarrow 2x + 1 = 0$

CamScanner

Case-1	Case-2
$C_1C_2 = r_1 - r_2$	$C_1C_2 = r_2 - r_1\ (r_2 > r_1)$
$4 = p - 5\ (r_1 > r_2)$	$4 = 5 - p$
$p = 9$ (Option এ নাই)	$p = 1$

(অপশন b সঠিক)

02. $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (3,4) হলে, বৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? [RU'22-23] [Ans: d]

(a) $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 21 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 21 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

সমাধান: কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$ একক

প্রশ্নমতে, $3 + r = 5 \Rightarrow 3 + \sqrt{3^2 + 4^2 - c} = 5 \Rightarrow 25 - c = 4 \Rightarrow c = 21$

বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

03. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (4,3) যা $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত? [Agri.'21-22] [Ans: a]

(a) 2 (b) 5 (c) 8 (d) 3

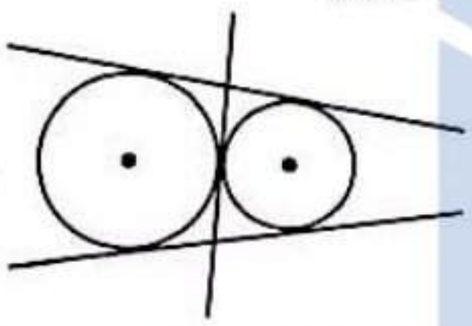
সমাধান: $x^2 + y^2 = 9$; বৃত্তের কেন্দ্র $C \equiv (0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{9} = 3$ একক

(4,3) এবং (0,0) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ∴ অপর বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= 5 - 3 = 2$ একক।

04. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে, তাদের কয়টি সাধারণ স্পর্শক বিদ্যমান? [RU'16-17] [Ans: c]

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

সমাধান:



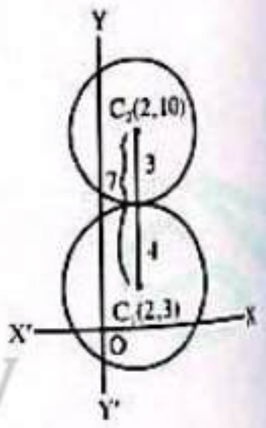
05. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ এবং $(x-2)^2 + (y-10)^2 = 9$ বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক- [DU'15-16] [Ans: d]

(a) (2, 3) (b) (16, 9) (c) (2, 10) (d) (2, 7)

সমাধান: ∴ স্পর্শবিন্দু $(2, 3+4) \equiv (2,7)$; [চিত্র হতে]

বিকল্প: $C_1(2,3), r_1 = 4$; $C_2(2,10), r_2 = 3$; C_1 ও C_2 কে $r_1 : r_2$ বা 4: 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুই স্পর্শবিন্দু।

∴ স্পর্শবিন্দু $= \left(\frac{4\times2+3\times2}{4+3}, \frac{4\times10+3\times3}{4+3}\right) = (2,7)$



POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-13: সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

দুটি বৃত্তের সমীকরণ দেওয়া থাকলে একটি থেকে অপরটি বিয়োগ করলেই সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ পাওয়া যায় (যদি তারা পরস্পরকে ছেদ করে থাকে)। এই ক্ষেত্রে বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণদ্বয়কে আদর্শরূপে নিয়ে (x^2 ও y^2 এর সহগ 1 রেখে) বিয়োগ করতে হবে।

MCQ

01. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 11 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 12 = 0$ বৃত্ত দুটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নিচের কোনটি? [CU'23-24] [Ans: a]

(a) $2x + 1 = 0$ (b) $2x + y = 0$ (c) $x + y = 0$ (d) $x + 2y = 0$

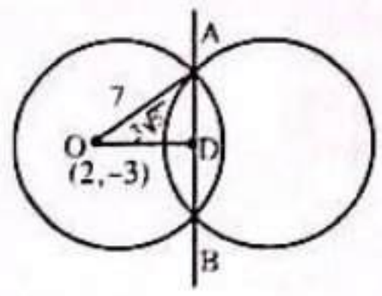
সমাধান: সাধারণ জ্যা: $S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2 + 4x + 3y + 12) - (x^2 + y^2 + 2x + 3y + 11) = 0$

$\Rightarrow 2x + 1 = 0$

Scanned with CamScanner

02. $x^2+y^2-4x+6y-36=0$ এবং $x^2+y^2-5x+8y-43=0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য কত একক?
(a) 2 (b) 4 (c) 1 (d) কোনটিই নয় **[CU'14-15] [Ans: b]**

সমাধান: সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $(x^2+y^2-4x+6y-36)-(x^2+y^2-5x+8y-43)=0$
$\Rightarrow x-2y+7=0$
প্রথম বৃত্ত, $x^2+y^2-4x+6y-36=0$ এর কেন্দ্র $(2,-3)$
ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{2^2+3^2+36}=7$



$(2,-3)$ থেকে সাধারণ জ্যা-এর দূরত্ব $=\frac{|2-2(-3)+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=3\sqrt{5}$ একক
এখন, $OD\perp AB$। $\therefore AD^2=7^2-\left(3\sqrt{5}\right)^2=4\Rightarrow AD=2\therefore AB=2AD=4$ একক

Type-14: বৃত্তের পোলার সমীকরণ সম্পর্কিত

Formula & Concept:
বৃত্তের পোলার সমীকরণ $r^2+2r(g\cos\theta+f\sin\theta)+c=0$, এক্ষেত্রে বৃত্তের কেন্দ্রের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(-g,-f)$ এবং পোলার স্থানাঙ্ক $\left(\sqrt{g^2+f^2},\tan^{-1}\left(\frac{-f}{-g}\right)\right)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$

Note: এই সমস্যাগুলোতে $r^2=x^2+y^2$, $r\cos\theta=x$ এবং $r\sin\theta=y$ বসিয়ে কার্তেসীয় সমীকরণে রূপান্তর করে সমাধান করাই উত্তম।

MCQ

01. $r=\sin\theta$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ কত হবে? **[DU'23-24] [Ans: d]**
(a) $\left(\frac{1}{2},0\right),\frac{1}{2}$ (b) $(0,2),\frac{1}{2}$ (c) $\left(0,\frac{1}{2}\right),2$ (d) $\left(0,\frac{1}{2}\right),\frac{1}{2}$

সমাধান: $r=\sin\theta\Rightarrow r\cdot r=r\sin\theta\Rightarrow r^2=r\sin\theta\Rightarrow x^2+y^2=y\Rightarrow x^2+y^2-y=0$
এখানে, কেন্দ্র $C\left(\frac{x\text{ এর সহগ}}{-2},\frac{y\text{ এর সহগ}}{-2}\right)\equiv\left(\frac{0}{-2},\frac{-1}{-2}\right)\equiv\left(0,\frac{1}{2}\right)$
ব্যাসার্ধ $=\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-0}=\frac{1}{2}$ একক।

02. $r=8\cos\theta+6\sin\theta$ কনিক দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য কত একক? **[GST'22-23] [Ans: a]**
(a) 8 (b) 6 (c) 4 (d) 3

সমাধান: $r=8\cos\theta+6\sin\theta\Rightarrow r^2=8r\cos\theta+6r\sin\theta\Rightarrow x^2+y^2=8x+6y\Rightarrow x^2+y^2-8x-6y=0$
এখানে, $g=-4,f=-3,c=0\therefore x$ অক্ষের খণ্ডিতাংশ $=2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{(-4)^2-0}=2\sqrt{4^2-0}=8$ একক।

03. $r^2-2\sqrt{3}r\cos\theta-8r\sin\theta+15=0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত একক? **[CU'22-23; JU'22-23] [Ans: b]**
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

সমাধান: $r^2-2\sqrt{3}r\cos\theta-8r\sin\theta+15=0\Rightarrow(x^2+y^2)-2\sqrt{3}x-8y+15=0$
$\therefore x^2+y^2+2\underbrace{(-\sqrt{3})}_{g}x+2\underbrace{(-4)}_{f}y+\underbrace{15}_{c}=0$
$\therefore r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{3+16-15}=\sqrt{4}=2$ একক

04. পোলার স্থানাঙ্কে $r^2-2r\sin\theta=3$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ হবে- **[DU'20-21] [Ans: a]**
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 6

সমাধান: $r^2-2r\sin\theta=3\Rightarrow x^2+y^2-2y-3=0\therefore g=0,f=-1,c=-3$
$\therefore r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{0+1-(-3)}=2$ একক

05. $x^2+y^2-by=0$ বৃত্ত (circle) এর সমীকরণ পোলার স্থানাঙ্ক (polar coordinate) এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে সমীকরণটি হবে- **[JnU'15-16]**
(a) $r=b\sin\theta$ (b) $r=b\cos\theta$ (c) $x=y\sin\theta$ (d) $r=b$ **[Ans: a]**

সমাধান: $x^2+y^2-by=0\Rightarrow r^2-b.r\sin\theta=0\Rightarrow r=b\sin\theta$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

অধ্যায় ০৭
সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

➢ ভার্সিটি ভর্তি পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪✪	T-01	সংযুক্ত কোণ সম্বলিত ত্রিকোণমিতিক রাশি	10	-	GST'22-23; RU'23-24; CU'22-23, 16-17; JU'23-24, 19-20, 16-17, 14-15; KU'14-15	-
✪	T-02	ধারা সংক্রান্ত	1	1	Agri.'19-20	RU'09-10
✪✪✪	T-03	যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	15	-	DU'23-24, 17-18, 15-16, 13-14; RU'17-18, 14-15, 12-13, 11-12; JU'19-20, 18-19, 14-15	-
✪✪✪	T-04	সংযুক্ত এবং গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত	41	2	DU'22-23, 18-19, 16-17, 11-12, 04-05; GST'23-24; RU'23-24, 22-23, 20-21, 17-18, 15-16, 14-15, 13-14; CU'20-21, 05-06; JU' 22-23, 19-20, 18-19, 15-16, 14-15, 10-11; Agri.'20-21; KU'18-19, 17-18, 11-12; JnU'17-18, 16-17, 10-11,	DU'22-23, JU'09-10
✪✪✪	T-05	উপগুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত	4	1	RU'06-07; CU'17-18, 11-12; JU'14-15, 10-11	JU'10-11
✪	T-06	বিশেষ ধরনের ত্রিকোণমিতিক অভেদ	1	1	DU'15-16	DU'10-11
✪✪	T-07	ত্রিভুজের প্রকৃতি নির্ণয় সংক্রান্ত	2	-	JU, KU'19-20	-
✪✪✪	T-08	কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত	4	-	DU'15-16, 14-15; RU'15-16; BAU'18-19	-
✪✪✪	T-09	ত্রিভুজের বিভিন্ন অজানা রাশির মান নির্ণয়	10	2	DU'13-14; RU'22-23, 19-20, 17-18; CU'22-23, 14-15; JU'19-20, 17-18; KU'18-19	KU'15-16; JnU'10-11

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-01: সংযুক্ত কোণ সম্বলিত ত্রিকোণমিতিক রাশি

Formula & Concept:

এক্ষেত্রে, $TF\left(n \times \frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$ বা $TF\,(n \times 90^\circ \pm \theta)$ এর জন্য নিম্নলিখিত প্রয়োজনীয় শর্তসমূহ বসিয়ে মান নির্ণয় করতে হবে।

যেখানে, TF = Trigonometric Function; [যেমন, sin, cos, tan, cot, sec, cosec ইত্যাদি]

শর্তসমূহ:

♦ $(-\theta)$ আকারের সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\text{cosec}\,(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

♦ $\left\{n \times \left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \theta\right\}$ বা $(n \times 90^\circ \pm \theta)$ আকারের সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

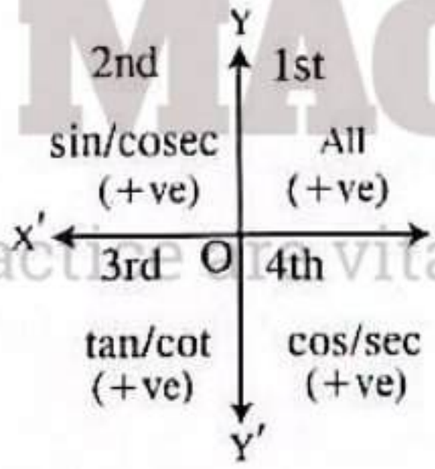
$\left\{n \times \left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \theta\right\}$ বা $(n \times 90^\circ \pm \theta)$ আকারের সংযুক্ত কোণের ক্ষেত্রে, n এর মানের উপর অনুপাত এবং Quadrant এর উপর চিহ্ন নির্ভর করে।

(i) n বিজোড় হলে বা 90° এর বিজোড় গুণিতকের জন্য

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	ব্যাখ্যা
sine ⇌ cosine	sin পরিবর্তিত হয়ে cos এবং cos পরিবর্তিত হয়ে sin -এ পরিণত হবে।
tangent ⇌ cotangent	tan পরিবর্তিত হয়ে cot এবং cot পরিবর্তিত হয়ে tan -এ পরিণত হবে।
secant ⇌ cosecant	sec পরিবর্তিত হয়ে cosec এবং cosec পরিবর্তিত হয়ে sec -এ পরিণত হবে।

(ii) n জোড় হলে বা 90° এর জোড় গুণিতকের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর কোনো পরিবর্তন হয় না।

চিহ্ন:



POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $\tan\theta = \frac{3}{4}$ হলে, $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ এর মান কোনটি? **[RU'23-24; CU'22-23] [Ans: c]**

(a) 7 (b) $\frac{1}{7}$ (c) $-\frac{1}{7}$ (d) -7

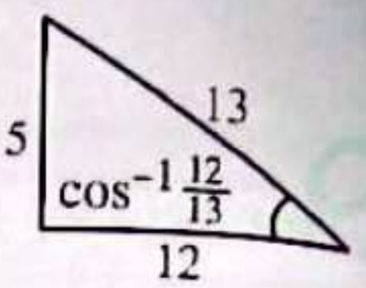
সমাধান: $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta}} = \frac{\tan\theta - 1}{\tan\theta + 1} = \frac{\frac{3}{4} - 1}{\frac{3}{4} + 1} = \frac{3-4}{3+4} = \frac{-1}{7}$

02. $\cos\theta = \frac{12}{13}$ হলে $\tan\theta$ এর মান কত? **[JU'23-24] [Ans: b]**

(a) $\pm\frac{13}{12}$ (b) $\pm\frac{5}{12}$ (c) $\frac{13}{12}$ (d) $\frac{25}{144}$

CamScanner

সমাধান: $\cos\theta = \frac{12}{13}$ [$\cos\theta$ ধনাত্মক হওয়ায় θ, ১ম বা চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত হবে।]



$\therefore \tan\theta = \frac{5}{12}$

θ, ১ম চতুর্ভাগে হলে, $\tan\theta = \frac{5}{12}$

আবার, θ চতুর্থ চতুর্ভাগে হলে, $\tan\theta = \frac{-5}{12} \therefore \tan\theta = \pm\frac{5}{12}$

03. $g(\theta) = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ হলে $g\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ এর মান কোনটি? [JU'23-24] [Ans: d]

(a) $\sin\theta$ (b) $\cos\theta$ (c) $\sec\theta$ (d) $\tan\theta$

সমাধান: $g(\theta) = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} \therefore g\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$

$= \frac{1-\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)}{1+\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)}$; $\left[\because \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan\theta}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\theta} = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right]$

$= \frac{1+\tan\theta-1+\tan\theta}{1+\tan\theta+1-\tan\theta} = \tan\theta$

বিকল্প: $g(\theta) = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) \therefore g\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \tan\left\{\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\} = \tan\theta$

04. $\operatorname{cosec} x = 2$ এবং $\cot x = -\sqrt{3}$ হলে কোনটি সত্য? [JU'23-24] [Ans: c]

(a) $\sin x = -\frac{1}{2}$ (b) $\sec x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (d) $\operatorname{cosec} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

সমাধান:

$\operatorname{cosec} x = 2; \sin x = \frac{1}{2}$; যা অপশনে নেই | $\cot x = -\sqrt{3}; \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ∴ Option (c) সঠিক।

05. $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)$ এর মান কত? [GST'22-23] [Ans: b]

(a) -1 (b) 0 (c) $-\cos\alpha$ (d) $\sqrt{3}\sin\alpha$

সমাধান: $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\pi+\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) = 0$

POLL MACHINE

06. যদি $\sin A = \frac{1}{2}$ এবং $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$, হয়, তবে $\tan A \tan B$ এর মান কত? [JU'19-20] [Ans: c]

Preparation and Practice are vital for effective delivery

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

সমাধান: $\tan A \tan B = \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{3}}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

07. $\sec(-405°) = ?$ [CU'16-17] [Ans: c]

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $-\sqrt{2}$ (e) 2

সমাধান: $\sec(-405°) = \sec(405°) = \sec(360° + 45°) = \sec 45° = \sqrt{2}$

08. যদি n একটি পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে $\sin\left\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$ এর মান- [JU, KU'14-15] [Ans: c]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) 1

সমাধান: n = 1 বসিয়ে পাই, $\sin\left\{\pi + (-1)^1 \times \frac{\pi}{4}\right\} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

এভাবে n অন্য যেকোনো পূর্ণসংখ্যা হলেও উত্তর $\frac{1}{\sqrt{2}}$ হবে।

Type-02: ধারা সংক্রান্ত

Formula & Concept:

সমান্তর ধারার n তম পদ, $T_n = a + (n-1)d$; এখানে, a = ১ম পদ, d = সাধারণ অন্তর। সাধারণত ধারা সংশ্লিষ্ট দুই ধরনের সমস্যা পরীক্ষায় আসতে দেখা যায়।

(i) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর বর্গের বীজগাণিতিক সমষ্টি আকৃতি।

(ii) tangent অথবা cotangent অনুপাতগুলোর গুণ আকৃতি।

(i) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর বর্গের বীজগাণিতিক সমষ্টি আকৃতি:

এক্ষেত্রে, $\sin^2 A_1 + \sin^2 A_2 + \sin^2 A_3 + \ldots\ldots\ldots + \sin^2 A_n$]
বা, $\cos^2 A_1 + \cos^2 A_2 + \cos^2 A_3 + \ldots\ldots\ldots + \cos^2 A_n$]

(যেখানে, $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots A_n$ সমান্তর প্রগমনভুক্ত) এভাবে ধারা দেওয়া থাকে এবং মান নির্ণয় করতে বলা হয়।

এক্ষেত্রে, প্রয়োজনীয় সূত্র হলো, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ এবং অন্যান্য অনুপাতগুলোর ক্ষেত্রে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ এবং $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

এক্ষেত্রে, $\sin^2 A_1$ এর সাথে ধারার অন্য কোনো পদের যোগ করে 1 বানানোর জন্য একটি পদকে $\sin^2\left\{(2m+1)\frac{\pi}{2} \pm A_1\right\}$ আকৃতিতে প্রকাশ করে $\cos^2 A_1$ বানিয়ে নিতে হয় (যেখানে $m \in \mathbb{Z}$)।

Shortcut: $\sin^2 A_1 + \sin^2 A_2 + \ldots\ldots\ldots + \sin^2 A_n$ বা $\cos^2 A_1 + \cos^2 A_2 + \ldots\ldots\ldots + \cos^2 A_n$ এর জন্য যদি $A_1 + A_n = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ $[m \in \mathbb{Z}]$ হয় তাহলে উত্তর হবে $\frac{n}{2}$ [যেখানে, n হলো পদ সংখ্যা]

(ii) tangent অথবা cotangent অনুপাতগুলোর গুণ আকৃতি:

এক্ষেত্রে $\tan A_1 . \tan A_2 . \tan A_3 \ldots\ldots\ldots \tan A_n$ বা $\cot A_1 . \cot A_2 . \cot A_3 \ldots\ldots\ldots \cot A_n$

এভাবে ধারা দেওয়া থাকে এবং মান নির্ণয় করতে হয়। এক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় সূত্র হলো, $\tan\theta . \cot\theta = \tan\theta . \frac{1}{\tan\theta} = 1$

এক্ষেত্রে $\tan A_1$ এর সাথে ধারার অন্য কোনো পদ গুণ করে 1 বানানোর জন্য একটি পদকে $\tan\left((2m+1)\frac{\pi}{2} \pm A_1\right)$ $[m \in \mathbb{Z}]$ আকৃটিতে প্রকাশ করে $\cot A_1$ বা $(-\cot A_1)$ বানিয়ে নিতে হয়।

Shortcut:

(i) $4n\theta = \pi$ হলে, $\tan\theta \cdot \tan 2\theta \cdot \tan 3\theta \ldots\ldots\ldots \tan(2n-1)\theta = \cot\theta \cdot \cot 2\theta \cdot \cot 3\theta \ldots\ldots\ldots \cot(2n-1)\theta = 1$

(ii) $2n\theta = \pi$ হলে, $\tan\theta \cdot \tan 2\theta \cdot \tan 3\theta \ldots\ldots\ldots \tan(n-1)\theta \cdot \tan(n+1)\theta \ldots\ldots\ldots \tan(2n-1)\theta = (-1)^{n-1}$

এবং $\cot\theta \cdot \cot 2\theta \cdot \cot 3\theta \ldots \ldots \cot(n-1)\theta \cdot \cot(n+1)\theta \ldots\ldots \cot(2n-1)\theta = \frac{1}{(-1)^{n-1}}$

(iii) $2n\theta = \pi$ হলে, $\tan\theta \cdot \tan 3\theta \cdot \tan 5\theta \ldots\ldots\ldots \tan(2n-1)\theta = (-1)^{\frac{n}{2}}$

এবং $\cot\theta \cdot \cot 3\theta \cdot \cot 5\theta \ldots\ldots\ldots \cot(2n-1)\theta = \frac{1}{(-1)^{\frac{n}{2}}}$

(iv) $2n\theta = \pi$ হলে, $\tan\theta \cdot \tan 3\theta \cdot \tan 5\theta \ldots\ldots\ldots \tan(n-1)\theta = \cot\theta \cdot \cot 3\theta \cdot \cot 5\theta \ldots\ldots\ldots \cot(n-1)\theta = 1$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - A\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + A\right)$ এর মান কোনটি? **[Agri.'19-20] [Ans: b]**

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - A\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + A\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - A\right) + \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - A\right)\right)\right\}^2$

$= \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - A\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = 1$

CamScanner

Written

01. $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}$ এর মান নির্ণয় কর। [RU'09-10]

Sol^n: $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}=\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)+\sin^2\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)$

$=\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}=2$ **(Ans.)**

Type-03: যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

➲ **Formula & Concept:**

- $\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$
- $\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$
- $\tan(A\pm B)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$

MCQ

01. $\tan 75°$ এর মান কত? [DU'23-24; JU'14-15] [Ans: b]

(a) $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ (c) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ (d) $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

সমাধান: $\tan 75°=\tan(45°+\tan 30°)=\frac{\tan 45°+\tan 30°}{1-\tan 45°\tan 30°}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

02. $\tan 15°=?$ [JU'19-20, 18-19] [Ans: a]

(a) $2-\sqrt{3}$ (b) $2+\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2}$

সমাধান: $\tan 15°=\tan(45°-30°)=\frac{\tan 45°-\tan 30°}{1+\tan 45°.\tan 30°}$

$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1}=2-\sqrt{3}$

03. যদি $\sin A+\cos A=\sin B+\cos B$ হয়, তবে $A+B=?$ [JU'18-19; RU'17-18, 12-13, 11-12; DU'15-16, 13-14]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) π (c) 2π (d) $\frac{\pi}{3}$ [Ans: a]

সমাধান: $\sin A+\cos A=\sin B+\cos B\Rightarrow\sin A+\cos A=\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$

$\Rightarrow A=\frac{\pi}{2}-B\therefore A+B=\frac{\pi}{2}$

04. $A+B=\frac{\pi}{2}$ হলে, $\cos^2 A-\cos^2 B$ এর মান - [DU'17-18] [Ans: b]

(a) $\sin(A-B)$ (b) $\sin(B-A)$ (c) $\cos(B-A)$ (d) $-\cos(A-B)$

সমাধান: $\cos^2 A-\cos^2 B=\sin^2 B-\sin^2 A=\sin(A+B)\sin(B-A)$

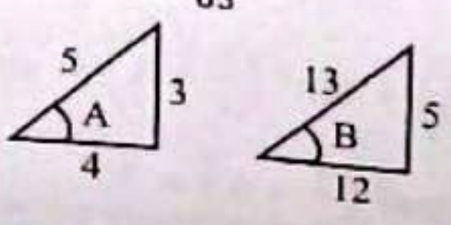
$=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin(B-A)=\sin(B-A)$

05. A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin A=\frac{3}{5},\cos B=\frac{12}{13}$ হলে $\cos(A+B)$ এর মান কত? [RU'17-18] [Ans: b]

(a) $\frac{15}{65}$ (b) $\frac{33}{65}$ (c) $\frac{18}{65}$ (d) $\frac{5}{65}$

সমাধান: $\cos A=\frac{4}{5}$ ও $\sin B=\frac{5}{13}$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{33}{65}$



POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

06. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ হলে, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = ?$ **[DU'15-16] [Ans: b]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 0 (d) -1

সমাধান: A সমকোণ হলে, $A = \frac{\pi}{2}$ এবং $B + C = \frac{\pi}{2}$।

তাহলে $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \cos^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 B + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos^2 B + \sin^2 B = 1$

07. $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ এবং $A = \frac{2\pi}{9}$ হলে $B = ?$ **[RU'14-15] [Ans: d]**

(a) $\frac{3\pi}{9}$ (b) $\frac{5\pi}{9}$ (c) $\frac{7\pi}{18}$ (d) $\frac{5\pi}{18}$

সমাধান: $\sin A + \cos A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin B + \cos B;$

তুলনা করে, $B = \frac{\pi}{2} - A;\ B = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9} = \frac{5\pi}{18}$

বিকল্প: $\sin A - \sin B = \cos B - \cos A$

$\Rightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \Rightarrow \tan\frac{A+B}{2} = 1 \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} \therefore B = \frac{\pi}{2} - A = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9} = \frac{5\pi}{18}$

08. যদি $\tan\alpha + \tan\beta = b, \cot\alpha + \cot\beta = a$ এবং $\alpha + \beta = \theta$ হয়, তবে $\tan\theta = ?$ **[RU'14-15] [Ans: c]**

(a) $\frac{ab}{1-ab}$ (b) $\frac{b}{1-ab}$ (c) $\frac{ab}{a-b}$ (d) $\frac{a}{1+ab}$

সমাধান: $\tan\alpha + \tan\beta = b$ .... (i)

$\cot\alpha + \cot\beta = a \Rightarrow \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} = a \Rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{a} = \tan\alpha . \tan\beta$

$\Rightarrow \tan\alpha . \tan\beta = \frac{b}{a}$, [from (i) থেকে] .... (ii) $\therefore \tan\theta = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha . \tan\beta} = \frac{b}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{ab}{a-b}$

Type-04: সংযুক্ত এবং গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত

১ **Formula & Concept:**

গুণিতক কোণ: একটি কোণকে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাকে গুণিতক কোণ বলে।

উদাহরণ: A একটি কোণ হলে 2A, 3A, 5A ইত্যাদি হবে তার গুণিতক কোণ।

- $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
- $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$
- $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
- $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$
- $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
- $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
- $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$
- $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$
- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
- $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$
- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$
- $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
- $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$
- $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

Shortcut:

(i) $\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \tan(45° + A)$ (ii) $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \tan(45° - A)$

(iii) $A + B = 45°$ হলে, $\tan A + \tan B + \tan A\tan B = 1$

(iv) $A + B = 90°$ হলে, $\tan A - \tan B = 2\tan(A - B)$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

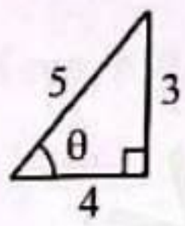
CamScanner

MCQ

01. $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ হলে $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = ?$ [GST'23-24] [Ans: c]

(a) $\frac{16}{25}$ (b) $\frac{9}{25}$ (c) $\frac{8}{25}$ (d) $\frac{7}{25}$

সমাধান: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \therefore \cos\theta = \frac{4}{5}$



তাহলে, $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\cdot\frac{16}{25} - 1 = \frac{32-25}{25} = \frac{7}{25}$

বিকল্প: $\theta = \cos^{-1}\frac{4}{5} \therefore \cos\theta = \frac{4}{5} \therefore \tan\theta = \frac{3}{4}$

তাহলে, $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{16-9}{16+9} = \frac{7}{25}$

02. $\tan\theta = \frac{1}{3}$ হলে $\sin 4\theta$ এর মান কোনটি? [RU'23-24] [Ans: c]

(a) $\frac{25}{24}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{24}{25}$ (d) $\frac{9}{10}$

সমাধান: $\tan\theta = \frac{1}{3}$; $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\times\frac{9}{8} = \frac{3}{4}$

$\therefore \{\tan(2\theta)\}^2 = \frac{9}{16} \therefore \tan^2(2\theta) = \frac{9}{16} \therefore \sin(4\theta) = \sin 2(2\theta) = \frac{2\tan(2\theta)}{1+\tan^2(2\theta)} = \frac{2\times\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{3}{2}\times\frac{16}{25} = \frac{24}{25}$

03. $\tan 75° - \tan 30° - \tan 75°\tan 30°$ সমান কত?

[RU'23-24, 15-16; JnU'16-17; KU'17-18; JU'14-15; CU'05-06] [Ans: b]

(a) -1 (b) 1 (c) $\sqrt{3}$ (d) 0

সমাধান: $\tan(75° - 30°) = \frac{\tan 75° - \tan 30°}{1+\tan 75°.\tan 30°} \Rightarrow \tan 45° = 1 = \frac{\tan 75° - \tan 30°}{1+\tan 75°\cdot\tan 30°}$

$\Rightarrow 1 + \tan 75°\tan 30° = \tan 75° - \tan 30° \Rightarrow \tan 75° - \tan 30° - \tan 75°\cdot\tan 30° = 1$

04. $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে, $\operatorname{cosec}\theta$-এর মান কত? [DU'22-23] [Ans: a]

(a) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ (b) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ (c) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ (d) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x \Rightarrow \frac{\sin\theta+1}{\cos\theta} = x \Rightarrow \frac{(\sin\theta+1)^2}{1-\sin^2\theta} = x^2 \Rightarrow \frac{(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = x^2 \Rightarrow \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = x^2$

$\Rightarrow \frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \Rightarrow \frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

05. $\operatorname{cosec} 10° - 4\sin 70°$ এর মান কত? [DU'22-23] [Ans: d]

(a) -1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) -2 (d) 2

সমাধান: $\operatorname{cosec} 10° - 4\sin 70° = \frac{1}{\sin 10°} - 4\sin 70° = \frac{1-2\cdot 2\sin 70°\sin 10°}{\sin 10°} = \frac{1-2(\cos 60°-\cos 80°)}{\sin 10°}$

$= \frac{1-2\left(\frac{1}{2}-\cos 80°\right)}{\sin 10°} = \frac{1-1+2\cos 80°}{\sin(90°-80°)} = \frac{2\cos 80°}{\cos 80°} = 2$

06. $\cos\theta = \frac{1}{2}$ এবং $\sin\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\sin(\theta+\delta)\cdot\sin(\theta-\delta) =$ কত? [RU'22-23] [Ans: c]

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{2}{3}$

সমাধান: $\sin(\theta+\delta)\cdot\sin(\theta-\delta) = \sin^2\theta - \sin^2\delta = 1 - \cos^2\theta - \sin^2\delta$

$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

07. $\sin 15° + \cos 15°$ এর মান কোনটি? [RU'22-23] [Ans: b]

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $\sin 15° + \cos(90° - 75°) = \sin 15° + \sin 75°$

$= 2\sin\frac{15+75}{2}\cos\frac{75-15}{2} = 2\sin 45° \cdot \cos 30° = 2\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

08. যদি $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ হয়, তবে $\cos 2\theta =$ কত? [RU'22-23] [Ans: d]

(a) $-\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$ (b) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x^2}\right)$ (c) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - x\right)$ (d) $\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

সমাধান: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2 \times \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) - 1$

$= \frac{1}{2}\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

09. যদি $A + B = \frac{\pi}{4}$ হলে, $(1 + \tan A)(1 + \tan B)$ এর মান কত? [JU'22-23; Agri. Guccho'20-21; RU'13-14] [Ans: b]

(a) 1 (b) 2 (c) $\sqrt{3}$ (d) $3\sqrt{3}$

সমাধান: $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B} = 1$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1 \Rightarrow 1 + \tan B + \tan A + \tan A \tan B = 1 + 1 \Rightarrow (1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$

10. $\tan\theta = \frac{y}{x}$ হলে, $x\cos 2\theta + y\sin 2\theta$ এর মান কোনটি? [JU'22-23] [Ans: a]

(a) x (b) y (c) $\frac{1}{x}$ (d) $\frac{1}{y}$

সমাধান: $x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = x \times \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} + y \times \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = x \times \frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} + y \times \frac{2\times\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = x \times \frac{\frac{x^2-y^2}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} + y \times \frac{\frac{2y}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}$

$= x \times \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{2xy^2}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}\{(x^2 - y^2) + 2y^2\} = \frac{x}{(x^2+y^2)} \times (x^2 + y^2) = x$

বিকল্প: $\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cdot\cos\theta} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{y}{x} \Rightarrow x - x\cos 2\theta = y\sin 2\theta$

$\therefore x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = x$

11. $8\sin^4\frac{\theta}{2} - 8\sin^2\frac{\theta}{2} + 1$ এর মান কোনটি? [JU'22-23] [Ans: d]

(a) $2\sin^2\theta$ (b) $2\cos^2\theta$ (c) $\sin 2\theta$ (d) $\cos 2\theta$

সমাধান: $8\sin^4\frac{\theta}{2} - 8\sin^2\frac{\theta}{2} + 1 = 2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 1 = 2(1 - \cos\theta)^2 - 4(1 - \cos\theta) + 1$

$= 2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) - 4(1 - \cos\theta) + 1 = 2 - 4\cos\theta + 2\cos^2\theta - 4 + 4\cos\theta + 1$

$= 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$

12. $\sin 5° = p$ হলে, $\sin 10°$ এর মান কোনটি? [RU'20-21] [Ans: c]

(a) 2p (b) $p^2 - 1$ (c) $2p\sqrt{1-p^2}$ (d) $p\sqrt{1-p^2}$

সমাধান: $\sin 10° = 2 \cdot \sin 5° \cdot \cos 5° = 2\sin 5°\sqrt{1 - \sin^2 5°} = 2p\sqrt{1-p^2}$

13. $\cos 40° + \cos 80° + \cos 160°$-এর মান কত? [RU'20-21] [Ans: d]

(a) -1 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

সমাধান: $\cos 40° + \cos 80° + \cos 160° = \cos 40° + 2\cos\frac{80°+160°}{2}\cos\frac{160°-80°}{2}$

$\Rightarrow \cos 40° + 2\cos 120°\cos 40° = \cos 40° + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 40° = \cos 40° - \cos 40° = 0$

14. $\cos 20°\cos 40°\cos 60°\cos 80° =$ কত? [CU'20-21] [Ans: d]

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{12}$ (d) $\frac{1}{16}$

সমাধান: $\cos 20°\cos 40°\cos 60°\cos 80° = \frac{2\sin 20°\cos 20°\cos 40°\cos 80°\times\frac{1}{2}}{2\sin 20°} = \frac{2\sin 40°\cos 40°\cos 80°}{8\sin 20°} = \frac{2\sin 80°\cos 80°}{16\sin 20°}$

$= \frac{\sin 160°}{16\sin 20°} = \frac{\sin(180° - 20°)}{16\sin 20°} = \frac{1}{16}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with CamScanner

[JU'19-20] [Ans: a]

15. $\frac{\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+1}=?$

(a) $\sin 2\alpha$ (b) $\sin\alpha$ (c) $\tan\frac{\pi}{4}$ (d) 1

সমাধান: $\frac{\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+1}=-\frac{1-\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=-\cos\left\{2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right\}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\sin 2\alpha$

বিকল্প: $\frac{\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+1}=\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2-1}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1}$; $[\alpha+\frac{\pi}{4}=\theta$ ধরে]

$=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=-\cos 2\theta=-\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\sin 2\alpha$

[DU'18-19] [Ans: a]

16. $\cos^2(60°+A)+\cos^2(60°-A)$ এর মান-

(a) $1-\frac{1}{2}\cos 2A$ (b) $1+\sin 2A$ (c) $1+3\cos 2A$ (d) $1+\frac{1}{2}\cos 2A$

সমাধান: $\cos^2(60°+A)+\cos^2(60°-A)=\frac{1}{2}\{1+\cos(120°+2A)+1+\cos(120°-2A)\}$

$=\frac{1}{2}(2+2.\cos 120°\cos 2A)=1-\frac{1}{2}\cos 2A$

[JU'18-19] [Ans: a]

17. $\cos 70°-\cos 10°+\sin 40°$ এর মান কত?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 10

সমাধান: $\cos 70°-\cos 10°+\sin 40°=-2\sin 40°\sin 30°+\sin 40°=-\sin 40°+\sin 40°=0$

[JU'18-19] [Ans: d]

18. $\tan A\ (1+\sec 2A)=?$

(a) $\sin A$ (b) $\sin 2A$ (c) $\tan A$ (d) $\tan 2A$

সমাধান: $\tan A\left(1+\frac{1}{\cos 2A}\right)=\tan A\left(1+\frac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A}\right)=\tan A\left(\frac{1-\tan^2 A+1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A}\right)=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\tan 2A$

[JU'18-19, 10-11; RU'14-15] [Ans: d]

19. $\frac{\cos 27^\circ-\cos 63^\circ}{\cos 27^\circ+\cos 63^\circ}=?$

(a) $\cot 18^\circ$ (b) $\sin 18^\circ$ (c) $\cos 18^\circ$ (d) $\tan 18^\circ$

সমাধান: $\frac{\cos(27°)-\cos(63°)}{\cos(27°)+\cos(63°)}=\frac{2\times\sin(45°)\times\sin(18°)}{2\times\cos(45°)\times\cos(18°)}=\tan 18°$

বিকল্প: $\frac{\cos 27°-\cos 63°}{\cos 27°+\cos 63°}=\frac{\cos(90°-63°)-\cos 63°}{\cos(90°-63°)+\cos 63°}=\frac{\sin 63°-\cos 63°}{\sin 63°+\cos 63°}$

$=\frac{\frac{\sin 63°-\cos 63°}{\cos 63°}}{\frac{\sin 63°+\cos 63°}{\cos 63°}}=\frac{\tan 63°-1}{\tan 63°+1}=\frac{\tan 63°-\tan 45°}{1+\tan 63°\times\tan 45°}=\tan(63°-45°)=\tan 18°$

20. $\tan 20°\tan 40°\tan 80°$ এর মান কত?

[KU'18-19, 11-12; RU'17-18] [Ans: a]

(a) $\sqrt{3}$ (b) $-\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ (d) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$

সমাধান: $\tan 20°\tan 40°\tan 80°=\tan 20°\tan(60°-20°)\tan(60°+20°)$

$=\tan 20°.\frac{\sqrt{3}-\tan 20°}{1+\sqrt{3}\tan 20°}.\frac{\sqrt{3}+\tan 20°}{1-\sqrt{3}\tan 20°}=\tan 20°\frac{3-\tan^2 20°}{1-3\tan^2 20°}$

$=\frac{3\tan 20°-\tan^3 20°}{1-3\tan^2 20°}=\tan(3\cdot 20°)=\tan 60°=\sqrt{3}$

21. $\tan 17°+\tan 28°+\tan 17°\tan 28°$ এর মান-

[JnU'17-18] [Ans: a]

(a) 1 (b) -1 (c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

সমাধান: $\tan 45°=\tan(28°+17°)\Rightarrow\frac{\tan 17°+\tan 28°}{1-\tan 17°\tan 28°}=1\therefore\tan 17°+\tan 28°+\tan 17°\tan 28°=1$

Shortcut: এক্ষেত্রে $17°+28°=45°$; অতএব, $\tan 17°+\tan 28°+\tan 17°\tan 18°=1$

22. $\sin(A-30°)+\sin(150°+A)$ এর মান হলো-

[DU'16-17] [Ans: b]

(a) $-\frac{1}{2}\cos A$ (b) 0 (c) $\cos A$ (d) $\sin A$

সমাধান: $\sin(A-30°)+\sin(150°+A)=\sin(A-30°)-\sin(A-30°)=0$

$[\sin(150°+A)=\sin\{180°+(A-30°)\}=-\sin(A-30°)]$

POLE MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

23. যদি $9\theta = \pi$ হয়, তবে $\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$ এর মান কত? **[DU'16-17] [Ans: b]**

(a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) 8 (d) 9

সমাধান: $\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta = \frac{2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta}{2\sin\theta} = \frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 4\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{4}\frac{\sin 4\theta\cos 4\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} = \frac{1}{8}$

$\left[\sin\frac{8\pi}{9} = \sin\left(\frac{9\pi-\pi}{9}\right) = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right) = \sin\frac{\pi}{9}\right]$

24. $\cos\theta = \frac{12}{13}$ হলে, $\tan 2\theta$ সমান কত? **[JnU'16-17] [Ans: a]**

(a) $\pm\frac{120}{119}$ (b) $\pm\frac{5}{12}$ (c) $\pm\frac{144}{169}$ (d) $\pm\frac{25}{144}$

সমাধান: $\cos\theta = \frac{12}{13}; \tan\theta = \pm\frac{5}{12} \therefore \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \pm\frac{2.\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \pm\frac{120}{119}$

25. $\frac{\sin 75^\circ+\sin 15^\circ}{\sin 75^\circ-\sin 15^\circ}$ এর মান- **[RU'15-16; DU'11-12, 04-05; JnU'10-11] [Ans: b]**

(a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $-\sqrt{3}$ (d) $-\sqrt{5}$

সমাধান: $\frac{\sin 75^\circ+\sin 15^\circ}{\sin 75^\circ-\sin 15^\circ} = \frac{2\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ}{2\sin 30^\circ\cdot\cos 45^\circ} = \frac{\tan 45^\circ}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$

বিকল্প: $\frac{\sin 75^\circ+\sin 15^\circ}{\sin 75^\circ-\sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ+\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ} = \frac{\frac{\cos 15^\circ+\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ} = \frac{\tan 45^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ\cdot\tan 15^\circ}$

$= \tan(45^\circ + 15^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

26. যদি $\cos 4\theta = \frac{7}{18}$ এবং $270^\circ \le 4\theta \le 360^\circ$ হয়, তবে $\cos 2\theta$ এর মান কত? **[JU'15-16] [Ans: a]**

(a) $-\frac{5}{6}$ (b) $\frac{5}{6}$ (c) $\pm\frac{5}{6}$ (d) $\frac{\sqrt{11}}{6}$

সমাধান: $270^\circ \le 4\theta \le 360^\circ \therefore 135^\circ \le 2\theta \le 180^\circ$

এখন, $\cos 4\theta = \frac{7}{18} \Rightarrow 2\cos^2 2\theta - 1 = \frac{7}{18} \Rightarrow \cos^2 2\theta = \frac{25}{36} \therefore \cos 2\theta = \pm\frac{5}{6}$

কিন্তু, $135^\circ \le 2\theta \le 180^\circ$ হওয়ায়, $\cos 2\theta$ এর মান অবশ্যই ঋণাত্মক হবে।

সুতরাং, $\cos 2\theta$ এর ধনাত্মক মানটি গ্রহণযোগ্য হবে না। $\therefore$ উত্তর হবে শুধু $\left(\frac{-5}{6}\right)$

27. $\frac{1-\cos 2\theta+\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta+\sin 2\theta} =$ কত? **[JU'14-15] [Ans: b]**

(a) $\tan 2\theta$ (b) $\tan\theta$ (c) $\tan\frac{\theta}{2}$ (d) $-\tan 2\theta$

সমাধান: $\frac{1-\cos 2\theta+\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta+\sin 2\theta} = \frac{2\sin^2\theta+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta} = \frac{2\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{2\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)} = \tan\theta$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Written

01. যদি $a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$. **[DU'22-23]**

সমাধান: $a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta. \Rightarrow a\cos\beta - a\cos\alpha = b\sin\alpha - b\sin\beta$

$\Rightarrow a(\cos\beta - \cos\alpha) = b(\sin\alpha - \sin\beta) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha} \Rightarrow \frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \frac{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \therefore \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ (দেখানো হলো)

02. A এর যে মানের জন্য $\cos A\cdot\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)$ এর মান বৃহত্তম হয় তা নির্ণয় কর। **[JU'09-10]**

সমাধান: $\cos A\cdot\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\times 2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)\cos A = \frac{1}{2}\left[\sin\left(A-\frac{\pi}{6}+A\right) + \sin\left(A-\frac{\pi}{6}-A\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\right]$; $\sin\left(2A-\frac{\পি}{6}\right) = 1$ হলে রাশিটির মান সর্বোচ্চ হবে।

$\therefore 2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2A = \frac{2\pi}{3} \therefore A = \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

CamScanner

Type-05: উপগুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত

➲ Concept & Formula:

- $\sin A = \sin 2\left(\frac{A}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{A}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$
- $\cos A = \cos 2\left(\frac{A}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$
- $\tan A = \tan 2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{A}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$
- $\sin A = \sin 3\left(\frac{A}{3}\right) = 3\sin\left(\frac{A}{3}\right) - 4\sin^3\left(\frac{A}{3}\right)$
- $\cos A = \cos 3\left(\frac{A}{3}\right) = 4\cos^3\left(\frac{A}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{A}{3}\right)$
- $\tan A = \tan 3\left(\frac{A}{3}\right) = \frac{3\tan\left(\frac{A}{3}\right) - \tan^3\left(\frac{A}{3}\right)}{1-3\tan^2\left(\frac{A}{3}\right)}$
- $2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A$
- $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$
- $\sin 18° = \cos 72° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$
- $\cos 18° = \sin 72° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
- $\sin 36° = \cos 54° = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
- $\cos 36° = \sin 54° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$

❖ **Shortcut:**

(i) $2\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ \ldots\ldots\ldots (n-1)\text{ সংখ্যক}}}}$

(ii) $2\sin\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ \ldots\ldots\ldots (n-2)\text{ সংখ্যক}}}}$ [অর্থাৎ, প্রথম 2 এর পর (−) চিহ্ন এবং এর পর (n − 2) টি 2 থাকবে যাদের প্রতিটির পরই (+) চিহ্ন হবে। মোট 2 আছে, n − 1 টি]

(iii) $2\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^n} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ \ldots\ldots\ldots (n-1)\text{ সংখ্যক}+\sqrt{3}}}}$

(iv) $2\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ \ldots\ldots\ldots (n-2)\text{ সংখ্যক}+\sqrt{3}}}}$ [অর্থাৎ, প্রথম 2 এর পর (−) চিহ্ন এবং এর পর (n − 2) টি 2 থাকবে যাদের প্রতিটির পরই (+) চিহ্ন হবে। মোট 2 আছে n − 1 টি এবং শেষে একটি $\sqrt{3}$ হবে।]

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{1-\cos A}{\sin A}$ এর মান হচ্ছে-

[CU'17-18] [Ans: b]

(a) 2cosec A (b) $2\tan\frac{A}{2}$ (c) 2 cot A (d) 2 sec A

সমাধান: $\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}} + \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2} = 2\tan\frac{A}{2}$

বিকল্প: $\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + 1 - \cos^2 A}{(1+\cos A)\sin A} = \frac{2\sin^2 A}{(1+\cos A)\sin A} = \frac{2\sin A}{1+\cos A} = 2\cdot\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}} = 2\tan\frac{A}{2}$

CamScanner

02. $\frac{\sin A}{1+\cos A} = ?$ [JU'14-15; CU'11-12; RU'06-07] [Ans: c]

(a) $\sin\frac{A}{2}$ (b) $\cos\frac{A}{2}$ (c) $\tan\frac{A}{2}$ (d) $\cot\frac{A}{2}$

সমাধান: $\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}} = \tan\frac{A}{2}$

Written

01. $2\sin\frac{\pi}{16} = ?$ [JU'10-11]

Solution: $2\sin\frac{\pi}{16} = \sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{16}} = \sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{16}} = \sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)} = \sqrt{2-\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{8}}}$

$= \sqrt{2-\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ **(Ans.)**

Shortcut: $2\sin\frac{\pi}{16} = 2\sin\frac{\pi}{2^4} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ **(Ans.)**

Type-06: বিশেষ ধরনের ত্রিকোণমিতিক অভেদ

১ **Formula & Concept:**

প্রশ্নে $A+B+C=\pi$ অথবা $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ অথবা $A+B+C=0$ এরূপ কোনো শর্ত দেওয়া থাকলে শর্তগুলোর আলোকে সমস্যার সমাধান করতে হয়।

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C = ?$ [DU'15-16] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 0 (d) -1

সমাধান: $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C = \frac{1}{2}(2\cos^2 A+2\cos^2 B)+\cos^2 C$

$= \frac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2B)+\cos^2 C$

$= \frac{1}{2}(2+\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2 C = 1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2 C$

$= 1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C$

$= 1-\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C$ [$\because A+B+C=\pi \Rightarrow A+B=\pi-C \therefore \cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$]

$= 1-\cos C[\cos(A-B)-\cos C] = 1-\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$

$= 1-\cos C\cdot 2\cos A\cos B = 1-2\cos A\cos B\cos C$

এখন পক্ষান্তর করে আমরা পাই, $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C = 1$.

CamScanner

Written

01. যদি $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=1$. [DU'10-11]

সমাধান: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{1}{2}(2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta)+\sin^2\gamma$

$=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha+1-\cos2\beta)+\sin^2\gamma$ [$\because 2\sin^2\alpha=1-\cos2\alpha$ এবং $2\sin^2\beta=1-\cos2\beta$]

$=\frac{1}{2}\{2-(\cos2\alpha+\cos2\beta)\}+\sin^2\gamma=1-\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)+\sin^2\gamma$

$=1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin^2\gamma$

$=1-\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)+\sin^2\gamma$ [$\because \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma$, অর্থাৎ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\sin\gamma$]

$=1-\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta)-\sin\gamma]=1-\sin\gamma\ [\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

$=1-\sin\gamma.2\sin\alpha\ \sin\beta=1-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

এখন পক্ষান্তর করে আমরা পাই, $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=1$. **(Proved)**

Type-07: ত্রিভুজের প্রকৃতি নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

এই Type এর সমস্যা ত্রিভুজের Cosine Rule এর মাধ্যমে সমাধান করতে হবে।

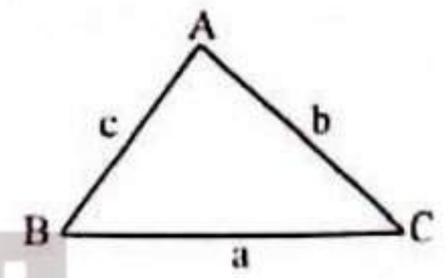
❖ **Shortcut:** বাহুর দৈর্ঘ্য m, n ইত্যাদির মাধ্যমে দেওয়া থাকলে,

➢ $m=1, n=2$ এভাবে মান বসিয়ে নির্ণয় করা যায়।

➢ বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ বৃহত্তম কোণ এবং ক্ষুদ্রতম বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতম কোণ হবে।

Note: Cosine Law:

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$; $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



Note: Sine Law: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$; যেখানে R = ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ

POLL MACHINE

MCQ

01. ΔABC-এ $\cos A+\cos B=\sin C$ হলে ত্রিভুজটির প্রকৃতি নির্ণয় কর। [JU, KU'19-20] [Ans: d]

(a) সূক্ষ্মকোণী (b) স্থূলকোণী (c) সমকোণী (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $\cos A+\cos B=\sin C\Rightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}=\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\Rightarrow\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}=\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\Rightarrow\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C}{2}\therefore A=B+C$

এখন, $A+B+C=\pi\Rightarrow A+A=\pi\Rightarrow 2A=\pi\therefore A=\frac{\pi}{2}\therefore\Delta ABC$ সমকোণী ত্রিভুজ।

Type-08: কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

ত্রিভুজের কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যায় Sine Rule এবং Cosine Rule প্রয়োগ করে সমাধান করতে হবে। প্রয়োজনে সংযুক্ত, যৌগিক, গুণিতক ও উপগুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সবগুলো ব্যবহার করতে হবে।

[**Note:** (5: 12: 13); (7: 24: 25); (8: 15: 17); (3: 4: 5) অনুপাতের বাহুগুলো সবসময়ই সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে অর্থাৎ ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ সমকোণ (90°) হয়]

Preparation and Practice are Vital for effective delivery
CamScanner

MCQ

01. $\cos A + \cos C = \sin B$ হলে $\sin(B + C)$ এর মান কত? **[BAU'18-19] [Ans: b]**

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

সমাধান: $\cos A + \cos C = \sin B \Rightarrow 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \sin B$

$\Rightarrow 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} \Rightarrow \frac{A-C}{2} = \frac{B}{2} \Rightarrow A = B + C = (A + B + C) - A$

$\Rightarrow A = 180° - A \Rightarrow A = 90°; B + C = 90° \therefore \sin(B + C) = \sin 90° = 1$

02. ABC ত্রিভুজে $a: b: c = 3: 7: 5$ হলে, $\angle B = ?$ **[DU'15-16] [Ans: d]**

(a) 60° (b) 30° (c) 90° (d) 120°

সমাধান: মনে করি, $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow a = 3k; b = 7k; c = 5k$

$\therefore \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{(5k)^2+(3k)^2-(7k)^2}{2\cdot 3k\cdot 5k} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = 120°$

03. ΔABC এ $a = \sqrt{3} + 1, b = \sqrt{3} - 1$ এবং $C = 60°$ হলে, B এর মান কত? **[RU'15-16] [Ans: d]**

(a) 105° (b) 90° (c) 30° (d) 15°

সমাধান: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow c^2 = (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\cos 60°$

$\therefore c = \sqrt{2(3+1) - 2\times\frac{1}{2}\times(3-1)} = \sqrt{6}$ একক।

এখন, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{b\sin C}{c} = \sin B \Rightarrow \sin B = \frac{(\sqrt{3}-1)\sin 60°}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \therefore B = 15°$

বিকল্প: $\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{c}{2} \Rightarrow \tan\frac{A-B}{2} = \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}\cot\frac{60°}{2} \Rightarrow \tan\frac{A-B}{2} = \frac{2}{2\sqrt{3}}\cot 30°$

$\Rightarrow \tan\frac{A-B}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3} = 1 = \tan 45° \Rightarrow \frac{A-B}{2} = 45° \Rightarrow A - B = 90° \ldots\ldots\ldots (i)$

আবার, $A + B + C = 180° \Rightarrow A + B = 180° - C = 180° - 60° = 120° \Rightarrow A + B = 120° \ldots\ldots\ldots (ii)$

$(ii) - (i) \Rightarrow 2B = 30° \therefore B = 15°$

04. ABC ত্রিভুজের $\cos A + \cos C = \sin B$ হলে $\angle C$ এর মান- **[DU'14-15] [Ans: c]**

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

সমাধান: $\cos A + \cos C = \sin B \Rightarrow 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{C-A}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$

$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right)\cos\frac{C-A}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} \Rightarrow \cos\frac{C-A}{2} = \cos\frac{B}{2} \therefore C - A = B \therefore C = A + B$

এখন, $A + B + C = \pi \therefore 2C = \pi \therefore C = \frac{\pi}{2}$

Type-09: ত্রিভুজের বিভিন্ন অজানা রাশির মান নির্ণয়

১ Formula & Concept:

(i) এক্ষেত্রেও Sine Rule বা Cosine Rule প্রয়োজনে ব্যবহার করতে হবে।

(ii) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{abc}{4R} = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

যেখানে, R, r ও $s = \frac{a+b+c}{2}$ হলো যথাক্রমে ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ, অন্তঃব্যাসার্ধ ও অর্ধপরিসীমা।

(iii) $a = b\cos C + c\cos B; b = c\cos A + a\cos C; c = a\cos B + b\cos A$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with CamScanner

(iv) $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ (v) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

(vi) $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$ (vii) $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$

(viii) $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$ (ix) $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$

(x) সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times$ (বাহু)^2

(xi) অন্তঃব্যাসার্ধ $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$; পরিব্যাসার্ধ $R=\frac{abc}{4\Delta}$

(xii) অন্তঃকেন্দ্র থেকে কৌণিক দূরত্ব $IA=r\,\text{cosec}\frac{A}{2}, IB=r\,\text{cosec}\frac{B}{2}, IC=r\,\text{cosec}\frac{C}{2}$

(xiii) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$ (b = ভূমি, a = সমান বাহুদ্বয়)

MCQ

01. একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক এবং উহার দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 ও 5 একক। উক্ত বাহু দুটির অন্তর্গত কোণ কত?

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90° **[RU'22-23] [Ans: c]**

সমাধান: $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{15\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin C=\frac{15\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\therefore C=60°$

02. ABC ত্রিভুজে $\angle A=60°, \angle B=75°$ এবং c বাহুর দৈর্ঘ্য $\sqrt{6}$ cm হলে a বাহুর দৈর্ঘ্য কত? **[CU'22-23] [Ans: b]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 3 (c) $2\sqrt{2}$ (d) $3\sqrt{2}$

সমাধান: $\angle A=60°, \angle B=75°, c=\sqrt{6}$ cm $\therefore \angle C=180°-\angle A-\angle B=180°-60°-75°=45°$

তাহলে, $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\therefore a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin60°}{\sin45°}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ cm $=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$ cm $=(\sqrt{3})^2$ cm $=3$ cm

03. ABC ত্রিভুজে যদি $\angle A=75°$ এবং $\angle B=45°$ হয়, তবে $c:b=$? **[RU'19-20] [Ans: c]**

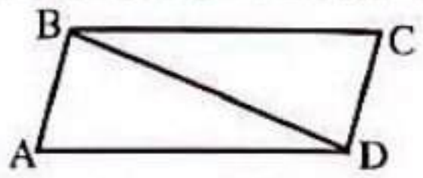
(a) $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{5}:\sqrt{7}$ (c) $\sqrt{3}:\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{7}:\sqrt{5}$

সমাধান: এখানে, $C=180°-(75°+45°)=60°$ এখন, $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}\Rightarrow\frac{c}{b}=\frac{\sin60°}{\sin45°}\therefore\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

04. কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্রকে ঐ ত্রিভুজের _____ বলে। **[JU'19-20] [Ans: a]**

(a) পরিকেন্দ্র (b) উপকেন্দ্র (c) পরাকেন্দ্র (d) অধিকেন্দ্র

05. ABCD একটি সামান্তরিক। BD এর দৈর্ঘ্য 2। BCD ত্রিভুজের সকল কোণ সমান। সামান্তরিকটির পরিসীমা কত? **[KU'18-19]**



(a) $3\sqrt{3}$ (b) 8 (c) $9\sqrt{3}$ (d) 12 **[Ans: b]**

সমাধান: বর্ণনা অনুযায়ী BCD একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং ABCD একটি রম্বস যার প্রতিবাহু 2 একক, তাই পরিসীমা 8 একক।

06. একটি ত্রিভুজের কোণগুলোর অনুপাত 1: 2: 3 হলে, বাহুগুলোর অনুপাত হচ্ছে- **[RU'17-18] [Ans: d]**

(a) $2:\sqrt{3}:1$ (b) 2: 3: 1 (c) $\sqrt{3}:2:1$ (d) $1:\sqrt{3}:2$

সমাধান: ধরি, কোণগুলো যথাক্রমে k, 2k ও 3k $\therefore k+2k+3k=180°\Rightarrow6k=180°\therefore k=30°$

অর্থাৎ, কোণগুলো হলো: 30°, 60° ও 90°

$\therefore$ বাহুগুলোর অনুপাত $\sin(30°):\sin(60°):\sin(90°)=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1=1:\sqrt{3}:2$

07. ABC ত্রিভুজে $a=\sqrt{3}$ একক, $b=\sqrt{2}$ একক, $\angle A=60°$ এবং $\angle B=45°$ হলে, $c=$? **[RU'17-18] [Ans: c]**

(a) 11 (b) 8 (c) $\frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}$ (d) 6

POLY MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

সমাধান: $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (60° + 45°) = 75°$

এখন, $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2} \Rightarrow -\tan 15° = \frac{\sqrt{2}-c}{\sqrt{2}+c}\cot 30° \Rightarrow \tan(45° - 30°) = \frac{c-\sqrt{2}}{c+\sqrt{2}}\cot 30°$

$\Rightarrow \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1+\tan 45°\tan 30°} = \frac{c-\sqrt{2}}{c+\sqrt{2}} \cdot \cot 30° \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{c-\sqrt{2}}{c+\sqrt{2}} \times \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{3+\sqrt{3}} = \frac{c-\sqrt{2}}{c+\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1+3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1-3-\sqrt{3}} = \frac{c-\sqrt{2}+c+\sqrt{2}}{c-\sqrt{2}-c-\sqrt{2}}$; [যোজন-বিয়োজন]

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{c}{\sqrt{2}} \quad \therefore c = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

বিকল্প: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sin 60°} = \frac{c}{\sin 75°}$

$\Rightarrow c = \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \sin 75° = 2 \times \sin(45° + 30°) = 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

08. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো 13, 14, 15 হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত হবে? **[JU'17-18] [Ans: b]**

(a) 56 (b) 84 (c) 64 (d) 80

সমাধান: $2s = 13 + 14 + 15 \therefore s = 21$

$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$ বর্গ একক

09. a, b, c বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ হলে এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R এর মান- **[CU'14-15] [Ans: c]**

(a) abc (b) $\frac{abc}{2\Delta}$ (c) $\frac{abc}{4\Delta}$ (d) $\frac{4\Delta}{abc}$

সমাধান: $\Delta = \frac{abc}{4R} \therefore R = \frac{abc}{4\Delta}$

10. একক ব্যাসার্ধের বৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য- **[DU'13-14] [Ans: c]**

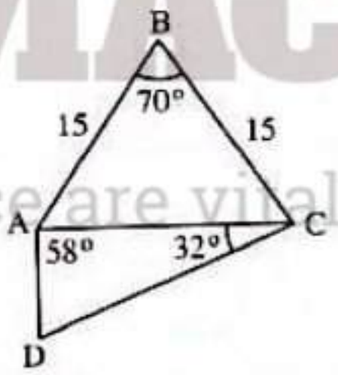
(a) $\frac{3}{2}$ units (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ units (c) $\sqrt{3}$ units (d) 1 unit

সমাধান: ত্রিভুজ sine সূত্র মতে $\frac{a}{\sin A} = 2R$

সমবাহু বলে $A = 60°$ এবং একক ব্যাসার্ধে $R = 1 \therefore \frac{a}{\sin 60^0} = 2 \Rightarrow a = 2\sin 60^0 = \sqrt{3}$

Written

01. নিচের চিত্রে AD বাহুর দৈর্ঘ্য বের কর। **[KU'15-16]**



সমাধান: চিত্র হতে, $\cos B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot(AB)\cdot(BC)}$ [ΔABC এ] $\Rightarrow \cos 70° = \frac{15^2+15^2-AC^2}{2\times 15\times 15} \therefore AC = 17.2073$ একক

এবার, সমকোণী ত্রিভুজ ΔADC এ, $\tan C = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \tan 32° = \frac{AD}{17.2073} \therefore AD = 10.7523$ একক (প্রায়) **(Ans.)**

02. একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 ও 10 একক। বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ 30° হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[JnU'10-11]**

সমাধান: ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 5 \times 10 \times \sin 30° = 12.5$ বর্গ একক। **(Ans.)**

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

"একটি ভালো আইডিয়া সবসময়েই পাগলের প্রলাপ যতক্ষন না আমরা সেটা ঘটতে দেখি।"
-Ashlee Vance

CamScanner

অধ্যায় ০৯
অন্তরীকরণ

➢ ভার্সিটি ভর্তি পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		ভর্তি পরীক্ষায় যে বছর প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪	T-01	লিমিটের অস্তিত্বশীলতা কেন্দ্রিক	02	-	JU'10-11; SUST'19-20	-
✪✪	T-02	বিচ্ছিন্নতা ও অবিচ্ছিন্নতা	01	-	JU'17-18	-
✪✪✪	T-03	L'Hôpital's Rule সংক্রান্ত সমস্যা	11	-	DU'22-23; GST'21-22; RU'23-24, 17-18; CU'23-24, 21-22, 20-21; JU'18-19, 14-15, 11-12; KU'17-18	-
✪✪✪	T-04	হরে/লবে বর্গমূল সংবলিত পদটির অনুবন্ধী দিয়ে লব ও হরকে গুণন করে লিমিট নির্ণয়	06	-	RU'22-23, 19-20; JU'18-19, 17-18, 14-15; Agri Guccho'20-21	-
✪✪	T-05	$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ আকারের সমস্যা সংক্রান্ত	02	-	JU'18-19, 16-17	-
✪✪✪	T-06	মিশ্র ফাংশন	14	-	DU'18-19, 16-17 03-04; RU'22-23, 17-18, 14-15; CU'13-14; JU'22-23, 15-16; KU'13-14; JnU'12-13	-
✪✪✪	T-07	x এর মান অসীমের দিকে ধাবিত হলে লিমিটের মান নির্ণয়	11	-	DU'23-24, 19-20, 17-18; GST'23-24, 22-23; RU'15-16; CU'22-23; JU'23-24, 18-19, 14-15	-
✪✪✪	T-08	সূচকীয় আকার	05	-	RU'21-22, 18-19; JU'23-24, 17-18; JnU'13-14	-
✪✪✪	T-09	ত্রিকোণমিতি সংক্রান্ত	07	01	DU'20-21; RU'20-21, 19-20; CU'18-19, 17-18; JU'19-20, 17-18	JnU'18-19
✪	T-10	মূল নিয়মে অন্তরজ নির্ণয়	02	-	RU'13-14; BAU'18-19	-
✪✪	T-11	সরাসরি সূত্র প্রয়োগ (প্রয়োজনে সরলীকরণ করে) সংক্রান্ত	14	01	DU'16-17, 15-16; GST'22-23; RU'23-24, 22-23; CU'17-18, 16-17; JU'22-23, 16-17, 14-15; Agri.'21-22	RU'19-20
✪✪✪	T-12	গুণের ও ভাগের সূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত	12	-	DU'18-19; RU'19-20, 15-16; CU'18-19, 13-14, 12-13, 11-12, 09-10, 05-06; JU'21-22, KU'17-18, 16-17	-

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		ভর্তি পরীক্ষায় যে বছর প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪✪	T-13	সংযোজিত ফাংশন এর অন্তরক সংক্রান্ত	25	-	DU'20-21; GST'22-23, 21-22; RU'17-18, 14-15, 10-11; CU'20-21, 16-17, 14-15; JU'22-23, 21-22, 19-20, 18-19, 16-17, 13-14; KU'19-20, 14-15; JnU'15-16, 14-15	-
✪✪✪	T-14	বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অন্তরক সংক্রান্ত	16	-	DU'19-20; RU'23-24, 17-18; CU'23-24, 21-22, 12-13; JU'21-22, 19-20, 18-19; Agri.'20-21; KU'16-17; JnU'16-17; BAU'18-19	-
✪✪	T-15	সূচকীয় ফাংশনের অন্তরীকরণে লগারিদম	03	-	RU'20-21; SUST'19-20; KU'13-14	-
✪✪	T-16	অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরীকরণ	10	01	DU'14-15, 13-14, 12-13; RU'23-24, 22-23, 20-21; CU'22-23; JU'14-15; Agri.'20-21	JnU'18-19
✪	T-17	অসীম পদবিশিষ্ট পুনরাবৃত্তিমূলক রাশির অন্তরীকরণ	02	-	CU'23-24; JnU'15-14	-
✪✪✪	T-18	পরামিতিক ফাংশনের অন্তরীকরণ	07	-	RU'22-23, 14-15; CU'16-17; JU'17-18; KU'14-15, 09-10	-
✪✪✪	T-19	ফাংশনের সাপেক্ষে ফাংশনের অন্তরীকরণ	01	01	GST'20-21	RU'19-20
✪✪✪	T-20	n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় সংক্রান্ত	22	-	DU'22-23; GST'23-24; RU'22-23, 21-22, 13-14, 10-11, 09-10; CU'16-17, 14-15, 10-11, 07-08; JU'14-15, 09-10; Agri.'21-22; SUST'19-20; BAU'18-19, 14-15; SAU'14-15	-
✪✪	T-21	পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ সংক্রান্ত প্রমাণ	05	01	DU'21-22; RU'21-22, 18-19, 17-18; CU'16-17	DU'22-23
✪✪✪	T-22	স্পর্শক ও অভিলম্বের ঢাল সংক্রান্ত	36	02	DU'20-21, 16-17, 15-16, 14-15, 13-14; GST'23-24, 21-22, 20-21; RU'23-24, 22-23, 21-22, 20-21, 19-20, 17-18, 16-17, 13-14; CU'22-23, 18-19, 16-17, 02-03; JU'23-24, 21-22, 20-21; Agri.'21-22, 20-21, 19-20; SUST'19-20; KU'17-18; JnU'10-11	JnU'19-20, 18-19
✪✪	T-23	সময়ের সাপেক্ষে পরিবর্তন সংক্রান্ত	05	01	RU'19-20; CU'16-17; JU'19-20; KU'13-14, 12-13	JnU'19-20
✪✪✪	T-24	লঘুমান বা গুরুমান এবং ক্রমবর্ধমান-ক্রমহ্রাসমান সংক্রান্ত	31	01	DU'21-22, 17-18; GST'23-24, 22-23, 20-21; RU'22-23, 21-22, 19-20, 18-19, 17-18, 15-16, 14-15, 12-13, 08-09; CU'22-23, 21-22, 14-15, 07-08; JU'22-23, 21-22; Agri.'21-22, 19-20; KU'19-20; JnU'14-15, 09-10	JnU'18-19

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-01: লিমিটের অস্তিত্বশীলতা কেন্দ্রিক

➲ **Formula & Concept:**

কোনো বিন্দুতে লিমিট অস্তিত্বশীল হবে যদি ঐ বিন্দুতে Left Hand Limit (LHL) = Right Hand Limit (RHL) হয়। অর্থাৎ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

MCQ

01. যদি $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ হয়,তবে $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান কত? **[SUST'19-20] [Ans: c]**

(a) -1 (b) -2 (c) 0 (d) 1 (e) 2

সমাধান: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 \therefore \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} f(x)$

02. $f(x) = \sqrt{1-x}$ হলে, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = ?$ **[JU'10-11] [Ans: d]**

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $f(x) = \sqrt{1-x}$ [ধরি, $x = 1+h$, যেখানে, $h \to 0^+$] $\therefore \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0^+} \sqrt{1-(1+h)}$

$= \lim_{h\to 0^+} \sqrt{-h} = \sqrt{-h}$ = অসংজ্ঞায়িত।

Type-02: বিচ্ছিন্নতা ও অবিচ্ছিন্নতা

➲ **Formula & Concept:**

কোনো বিন্দু ($x = a$) তে কোনো ফাংশন $y = f(x)$ অবিচ্ছিন্ন হবে যদি ঐ বিন্দুতে L. H. L. = R. H. L. = f(a) হয়।

অর্থাৎ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ হবে।

MCQ

01. $y = \cot x$ ফাংশনটি কোন বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন? **[JU'17-18] [Ans: a]**

(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{3\pi}{2}$

সমাধান: $x = \pi$ হলে, $\cot x = \cot \pi$ অসংজ্ঞায়িত।

$\lim_{x\to \pi^-} \cot x = -\infty$, $\lim_{x\to \pi^+} \cot x = +\infty \therefore x = \pi$ বিন্দুতে $\cot x$ বিচ্ছিন্ন।

Type-03: L'Hôpital's Rule সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

limit-এর অধিকাংশ সমস্যা L'Hôpital's Rule ব্যবহার করে সমাধান করা যায়। ভর্তি পরীক্ষার MCQ-তে L'Hôpital's Rule অর্থাৎ, ($\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ আকার দূর না হওয়া পর্যন্ত লব এবং হরকে অন্তরীকরণ করা) খুব কার্যকরী।

MCQ

01. $\lim_{\theta\to 0} \frac{2^\theta - 1}{\theta}$ = কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: b]**

(a) 2 (b) $\ln 2$ (c) $\ln \frac{1}{2}$ (d) $\ln \theta$

সমাধান: $\lim_{\theta\to 0} \frac{2^\theta - 1}{\theta}$; $\left[\frac{0}{0}\text{আকার}\right]$ [Using L' hôpital Rule]

$\lim_{\theta\to 0} \frac{2^\theta \ln 2}{1} \left[\neq \frac{0}{0}\text{আকার}\right] = \ln 2$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are Vital for Effective delivery

CamScanner

02. $\lim_{x\to0}\frac{e^x-2e^{3x}+e^{5x}}{x^2}$ এর মান কত? [CU'23-24] [Ans: a]

(a) 4 (b) 2 (c) 0 (d) 1

সমাধান: $\lim_{x\to0}\frac{e^x-2e^{3x}+e^{5x}}{x^2};\left[\frac{0}{0}\text{আকার}\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^x-6e^{3x}+5e^{5x}}{2x};\left[\frac{0}{0}\text{আকার}\right]$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-18e^{3x}+25e^{5x}}{2};\left[\neq\frac{0}{0}\text{আকার}\right]=\frac{e^0-18e^{3\times0}+25e^{5\times0}}{2}=\frac{1-18+25}{2}=\frac{8}{2}=4$

03. $\lim_{x\to1}\frac{2x^3-(2k+1)x^2+2x+k}{x-1}=-6$ হলে, k-এর মান কত? [DU'22-23] [Ans: c]

(a) 1 (b) -1 (c) 3 (d) $-\frac{1}{2}$

সমাধান: $\lim_{x\to1}\frac{2x^3-(2k+1)x^2+2x+k}{x-1}=-6\Rightarrow\frac{\lim_{x\to1}\{2x^3-(2k+1)x^2+2x+k\}}{\lim_{x\to1}(x-1)}=-6$

$\Rightarrow\lim_{x\to1}\{2x^3-(2k+1)x^2+2x+k\}=-6\times\lim_{x\to1}(x-1)=-6(1-1)$

$\Rightarrow 2-(2k+1)+2+k=0\Rightarrow 2-2k-1+2+k=0\Rightarrow 3-k=0\therefore k=3$

বিকল্প: যেহেতু, লিমিটের সমাধান -6 (সসীম সংখ্যা) এবং হরে লিমিট বসানোর পর শূন্য পাওয়া যায়। সুতরাং লবে লিমিট বসালে অবশ্যই শূন্য হতে হবে, না হলে সীমাস্থ মান থাকবে না।

$\therefore\lim_{x\to1}\{2x^3-(2k+1)x^2+2x+k\}=0\Rightarrow 2-(2k+1)+2+k=0\Rightarrow 3-k=0\therefore k=3$

04. $\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}+e^{-5x}-2}{x^2}=$ কত? [GST'21-22] [Ans: c]

(a) -2 (b) 0 (c) 25 (d) 50

সমাধান: $\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}+e^{-5x}-2}{x^2};\left(\frac{0}{0}\text{আকৃতি}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{5e^{5x}-5e^{-5x}}{2x}$ [L'Hôpital's rule; $\frac{0}{0}$ আকার] $=\lim_{x\to0}\frac{25e^{5x}+25e^{-5x}}{2};\left[\neq\frac{0}{0}\text{আকার}\right]=\frac{25+25}{2}=25$

05. $\lim_{h\to0}\frac{\ln(2+h)-\ln2}{h}$ এর মান কোনটি? [CU'21-22, 20-21] [Ans: b]

(a) $\sqrt{e}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) e^2 (d) $\frac{1}{3}$

সমাধান: $\lim_{h\to0}\frac{\ln(2+h)-\ln2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln\left(\frac{2+h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)}{h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2};\left[\because\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\right]$

Shortcut: L'Hôpital rule অনুযায়ী, $\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{2+h}}{1}=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}$

Preparation and Practice are vital for effective delivery

06. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=?$ [JU'18-19, 14-15, 11-12; RU'17-18] [Ans: b]

(a) 2 (b) 0.5 (c) 1 (d) 0

সমাধান: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2};\left[\frac{0}{0}\text{form}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)};\left[\frac{0}{0}\text{form}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{2(0-1)}\left[\neq\frac{0}{0}\text{form}\right]=\frac{1}{2}=0.5$

বিকল্প: ধরি, $x=\frac{\pi}{2}+h$; যখন $x\to\frac{\pi}{2}$, তখন $h\to0$

$\therefore\lim_{h\to0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-h\right)^2}=\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{2\times\left(\sin\frac{h}{2}\right)^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2\times4}=1\times\frac{2}{4}=0.5$

07. $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ এর মান কোনটি? [KU'17-18] [Ans: c]

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

সমাধান: $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x};\left[\frac{0}{0}\text{form}\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x};\left[\frac{0}{0}\text{form}\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x};\left[\frac{0}{0}\text{form}\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$

$=\frac{e^0+e^{-0}}{\cos0}=\frac{1+1}{1}=2$ [L'Hôpital's Rule]

CamScanner

Type-04: হরে/লবে বর্গমূল সংবলিত পদটির অনুবন্ধী দিয়ে লব ও হরকে গুণন করে লিমিট নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

(i) $\frac{0}{0}$ আকৃতির (ii) বীজগাণিতিক function (iii) লব বা হর বা উভয়টিতে বর্গমূল $(\sqrt{\ })$ থাকবে।

Note: অনুবন্ধী দিয়ে গুণ করে এমন আকার বানাতে হবে যেন limit বসানো যায়।

MCQ

01. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{4+x}}$ এর মান কত? **[RU'22-23] [Ans: d]**

(a) -2 (b) -1 (c) -3 (d) -4

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{4+x}}$; $\left[\frac{0}{0}\text{ form}\right] = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}} = -4$

02. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)=?$ **[Agri.'20-21; JU'14-15] [Ans: b]**

(a) 0 (b) 1 (c) α (d) x

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1$

03. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x}}{x}$ এর মান হবে - **[RU'19-20] [Ans: a]**

(a) $\frac{7}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{9}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x})(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1+3x-1+4x}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})} = \lim_{x\to 0}\frac{7}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x}} = \frac{7}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{7}{2}$

04. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}=?$ **[JU'18-19] [Ans: c]**

(a) $\frac{11}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{5}{2}$ (d) $\frac{11}{32}$

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$; $\left[\frac{0}{0}\text{ form}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+2x}}\times 2-\frac{1}{2\sqrt{1-3x}}(-3)}{1} = \frac{1+\frac{3}{2}}{1} = \frac{5}{2}$

05. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=?$ **[JU'17-18] [Ans: d]**

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{2}$

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\left[\frac{0}{0}\text{ form}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{1}$ [L' Hôpital's Rule] $= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2}$

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-05: $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$ আকারের সমস্যা সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

সাধারণভাবে এই Type এর সমস্যা সমাধানের সূত্র হলো, $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$; এই সমস্যাতেও L'Hôpital's Rule প্রয়োগ করা যায়, $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$; $\left[\frac{0}{0}\text{ form}\right] = \lim_{x\to a}\frac{nx^{n-1}-0}{1-0} = na^{n-1}$

❖ **Shortcut:** $\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n} = \frac{m}{n}a^{m-n}$

CamScanner

MCQ

01. $\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=?$ [JU'18-19] [Ans: a]

(a) $5a^2$ (b) $4a^2$ (c) $3a^2$ (d) $2a^2$

সমাধান: $\lim_{\sqrt{x}\to\sqrt{a}}\frac{(\sqrt{x})^5-(\sqrt{a})^5}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=5(\sqrt{a})^4=5a^2$

Shortcut: $\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}};\left[\frac{0}{0}\text{ আকার}\right]=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}a^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}=5a^2$

02. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$ এর মান কোনটি? [JU'16-17] [Ans: b]

(a) 0 (b) 8 (c) অসংজ্ঞায়িত (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4^2}{x-4}=2\cdot 4^{2-1}=2\cdot 4=8$

বিকল্প: $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=8$

Type-06: মিশ্র ফাংশন

➲ **Formula & Concept:**

এসব ক্ষেত্রে বীজগাণিতিক ও ত্রিকোণমিতিক সূত্রের মাধ্যমে সাজিয়ে ফেলতে হবে। তারপর লিমিট এর সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

প্রয়োজনীয় সূত্র:

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$
(v) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1$
(vi) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1$

Note: শুধুমাত্র $x\to 0$ এর case-এ $\lim_{x\to 0}\frac{\text{লব}}{\text{হর}}$ আকৃতির ক্ষেত্রে $\sin ax$, $\tan ax$, $\sin^{-1}ax$, $\tan^{-1}ax$, ax, $\ln(1+ax)$, $e^{ax}-1$ ফাংশনগুলো যদি লব ও হরের মধ্যে যোগ, বিয়োগ বা গুণ আকারে থাকে, তাহলে উত্তর হবে লব ও হরের সহগগুলোর অনুপাত। তবে, গুণ আকৃতির ক্ষেত্রে লবের এবং হরের পদ সংখ্যা সমান হতে হবে।

যেমন: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax+\tan bx-e^{cx}+1}{\ln(1+dx)+\tan^{-1}gx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}\cdot ax+\frac{\tan bx}{bx}\cdot bx-\frac{(e^{cx}-1)}{cx}\cdot cx}{\frac{\ln(1+dx)}{dx}\cdot dx+\frac{\tan^{-1}(gx)}{gx}\cdot gx}=\lim_{x\to 0}\frac{x[1\cdot a+1\cdot b-1\cdot c]}{x[1\cdot d+1\cdot g]}=\frac{a+b-c}{d+g}$

Shortcut: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax+\tan bx-(e^{cx}-1)}{\ln(1+dx)+\tan^{-1}(gx)}=\frac{a+b-c}{d+g}$

অনুরূপভাবে, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}(ax)\tan bx}{\ln(1+cx)\cdot(e^{dx}-1)}=\frac{a\cdot b}{c\cdot d}=\frac{ab}{cd}$ এবং $\lim_{x\to 0}\frac{a\sin bx+c\tan dx-f(e^{gx}-1)}{h\ln(1+jx)+k\tan^{-1}(mx)}=\frac{ab+cd-fg}{hj+km}$

POLY MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ এর মান কোনটি? [JU'22-23] [Ans: c]

(a) 0 (b) ∞ (c) 1 (d) -1

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots\cdots\right)}{x}=1+0+0+0+\cdots\cdots\cdots=1$

02. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}(2x)}{x}$ এর মান কোনটি? [JU'22-23] [Ans: c]

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}2x}{x}=\lim_{2x\to 2\times 0}\frac{\sin^{-1}2x}{2x}\times 2=\left(\lim_{2x\to 0}\frac{\sin^{-1}2x}{2x}\right)\times 2=1\times 2=2$

03. $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\tan^2 x}{x^3}=$ কত? [RU'22-23] [Ans: b]

(a) -1 (b) 1 (c) 4 (d) 3

সমাধান: $\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\times\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\right\}^2=1\times 1^2=1$

CamScanner

[RU'22-23] [Ans: d]

04. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{x}=?$

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{x}=\left(\lim_{2x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{2x}\right)\times 2=1\times 2=2$

[RU'22-23] [Ans: b]

05. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=$ কত?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=\lim_{\sin x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=1$; [$x\to 0$ হলে, $\sin x\to 0$; $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$]

বিকল্প: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$; $\left[\frac{0}{0}\text{form}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}.\cos x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}=1$

[DU'18-19] [Ans: b]

06. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan^{-1}(3x)}=?$

(a) 0 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 1 (d) 3

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan^{-1}3x}{3x}\times 3}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}3x}{3x}\times 3}=\frac{1}{3}$

[RU'17-18] [Ans: c]

07. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^{o}}{x}=$ কত?

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{\pi}{180}$ (d) $\frac{180}{\pi}$

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^{\circ}}{x}=\frac{\pi}{180}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi\times x}{180}}{\frac{\pi\times x}{180}}=\frac{\pi}{180}=\left(\frac{\pi}{180}\right)^{c}$

[DU'16-17] [Ans: a]

08. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}}{\cos x}$ এর মান-

(a) e (b) 1 (c) $\frac{1}{e}$ (d) 0

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}}{\cos x}=\frac{e^{\cos 0}}{\cos 0}=\frac{e^{1}}{1}=e$

[JU'15-16] [Ans: a]

09. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$ এর মান কত?

(a) $\frac{a}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$ (c) ab (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}\cdot ax}{\frac{\sin bx}{bx}\cdot bx}=\frac{a}{b}$

Shortcut: লব ও হরের সহগের অনুপাত $=\frac{a}{b}$

[RU'14-15; KU'13-14; DU'03-04] [Ans: b]

10. $\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}=?$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x+\cos 2x)}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}(\cos x+\cos 2x)=1+1=2$

[CU'13-14] [Ans: c]

11. $\lim_{x\to -1}\frac{\log(2+2x+x^2)}{(x+1)^2}$ এর মান কত?

(a) 5 (b) 2 (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: $\lim_{x\to -1}\frac{\log(2+2x+x^2)}{(x+1)^2}=\lim_{(x+1)^2\to 0}\frac{\log(1+(x+1)^2)}{(x+1)^2}=1$

[JnU'12-13][Ans: d]

12. $\log_e(1+x)=?$

(a) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots$ (b) $x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\ldots\ldots$ (c) $1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots$ (d) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-07: x এর মান অসীমের দিকে ধাবিত হলে লিমিটের মান নির্ণয়

Formula & Concept:

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (ii) বীজগাণিতিক ফাংশন (iii) $|x| < 1$ হলে, $[-1 < x < 1]$ এবং $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

নিয়ম: চলকের সর্বোচ্চ ঘাতবিশিষ্ট রাশি লব ও হরে common নিয়ে limit বসাতে হবে।

(i) লব ও হরের চলকের মাত্রা (সর্বোচ্চ ঘাত) সমান:

$x \to \infty$ বা $x \to -\infty$ এর জন্য লব ও হরের x এর সর্বোচ্চ ঘাত একই হলে সীমাস্থ মান

$$= \frac{\text{লবের x এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ}}{\text{হরের x এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ}} = \frac{\text{লবের মুখ্য সহগ}}{\text{হরের মুখ্য সহগ}}$$

যেমন, $\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots\dots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\dots\dots+b_n} = \frac{a_0}{b_0}$

(ii) লবের চলকের মাত্রা < হরের চলকের মাত্রা:

যদি লবের চলকের (x এর) মাত্রা < হরের চলকের (x এর) মাত্রা হয় তাহলে সীমাস্থ মান $= 0$

$[x \to \infty$ এবং $x \to -\infty$ দুই ক্ষেত্রেই]

(iii) লবের চলকের মাত্রা > হরের চলকের মাত্রা:

লবের চলকের মাত্রা > হরের চলকের মাত্রা হলে সীমাস্থ মান $+\infty$ অথবা $-\infty$

এক্ষেত্রে, লবের চলকের মাত্রা হরের চলকের মাত্রা অপেক্ষা 1 বেশি এর জন্য, $x \to \infty$ হলে, $\frac{\text{লবের মুখ্য সহগ}}{\text{হরের মুখ্য সহগ}} > 0$ [+ve] হলে

সীমাস্থ মান $= +\infty$ এবং $\frac{\text{লবের মুখ্য সহগ}}{\text{হরের মুখ্য সহগ}} < 0$ [−ve] হলে সীমাস্থ মান $= -\infty$

[**Note:** $x \to -\infty$ হলে বিপরীত ঘটনা ঘটবে।]

(iv) $\frac{a^{n+k}+b^{n+k}}{a^n+b^n}$ আকৃতির $[n \to \infty]$:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+k}+b^{n+k}}{a^n+b^n}$; [ধরি $a < b$] $= \lim_{n\to\infty} \frac{b^{n+k}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n+k}+1\right)}{b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n}+1\right)}$ [$\because a < b$ তাই b^{n+k} এবং b^n common নেওয়া হয়েছে]

$= \lim_{n\to\infty} \frac{b^k\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n+k}+1\right)}{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n}+1\right)} = b^k \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\infty+k}+1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\infty}+1} = b^k \frac{0+1}{0+1} = b^k.1 = b^k$

[**Note:** $a < b$ হলে $\frac{a}{b} < 1$ সেক্ষেত্রে, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n \to 0$]

(v) $a^x \sin\frac{b}{a^x}$ এবং $a^x \tan\frac{b}{a^x}$ আকৃতির:

$x \to \infty$ হলে, $a^x \to a^\infty \to \infty \Rightarrow \frac{1}{a^x} \to \frac{1}{\infty} \to 0$ তাহলে, $\boxed{\frac{b}{a^x} \to 0}$ এই আকৃতি বানিয়ে $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$ এবং $\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1$ শর্ত ব্যবহার করতে হবে।

MCQ

01. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x+1} = ?$ [DU'23-24] [Ans: d]

(a) 1 (b) $-\infty$ (c) ∞ (d) -1

সমাধান: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x+1}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ $[\sqrt{x^2} = |x| = -x \because x \to -\infty \Rightarrow x < 0]$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{1+0}}{1+0} = -1$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

[GST'23-24] [Ans: d]

02. $\lim_{x\to\infty} 2^x \sin\left(\frac{y}{2^x}\right) = ?$

(a) ∞ (b) 2 (c) 2^y (d) y

সমাধান:

ধরি, $\frac{y}{2^x} = \theta \Rightarrow 2^x = \frac{y}{\theta}$ হবে

$\therefore \lim_{x\to 0} 2^x \sin\left(\frac{y}{2^x}\right) = \lim_{\theta\to 0} \frac{y}{\theta} \sin\theta = y \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = y \times 1 = y$

$\because x \to \infty \Rightarrow 2^x \to 2^\infty \to \infty \Rightarrow \frac{1}{2^x} \to \frac{1}{\infty} \to 0$

$\Rightarrow \frac{y}{2^x} \to 0$ হবে তাহলে $\theta \to 0$ হবে।

Shortcut: $\lim_{x\to\infty} a^x \sin\frac{b}{a^x}$ এবং $\lim_{x\to\infty} a^x \tan\frac{b}{a^x}$ আকৃতির হলে উত্তর হবে: (b)

$\therefore$ প্রদত্ত ক্ষেত্রে; $\lim_{x\to\infty} 2^x \sin\left(\frac{y}{2^x}\right) = y$ হবে।

[JU'23-24] [Ans: b]

03. $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ এর মান কোনটি?

(a) 0 (b) 1 (c) 3 (d) ∞

সমাধান: $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3^x\left(1 - \frac{1}{(3^x)^2}\right)}{3^x\left(1 + \frac{1}{(3^x)^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{(3^x)^2}}{1 + \frac{1}{(3^x)^2}} = 1$

[GST'22-23] [Ans: c]

04. $\lim_{x\to\infty} x^2 \left(\frac{2}{x^4+1} + \frac{3}{x^3+7} + \frac{5}{x^2+1} + \frac{6}{x^2-5}\right)$ এর মান কত?

(a) 8 (b) 10 (c) 11 (d) 16

সমাধান: $\lim_{x\to\infty} x^2 \left(\frac{2}{x^4+1} + \frac{3}{x^3+7} + \frac{5}{x^2+1} + \frac{6}{x^2-5}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{x^2+\frac{1}{x^2}} + \frac{3}{x+\frac{7}{x^2}} + \frac{5}{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{6}{1-\frac{5}{x^2}}\right)$

$= \frac{2}{\infty+0} + \frac{3}{\infty+0} + \frac{5}{1+0} + \frac{6}{1-0}$ [$\therefore \frac{1}{\infty}$ কে আমরা 0 ধরতে পারি]

$= 0 + 0 + 5 + 6 = 11$

[CU'22-23] [Ans: b]

05. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x}$ এর মান কত?

(a) 1 (b) -1 (c) $-\infty$ (d) ∞

সমাধান: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{-x} = -\sqrt{1} = -1$

[DU'19-20] [Ans: a]

06. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x}$ এর মান হলো-

(a) 1 (b) ∞ (c) $-\infty$ (d) -1

সমাধান: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{-x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{2}{x}}$

এখানে লিমিটিং মান -1 বলে মনে হচ্ছে। কিন্তু $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x}$ লিমিটে $\sqrt{x^2+2x} > 0$

$x \to -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow -x > 0 \therefore \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x} = 1$

বিকল্প: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{-x}$; [$x \to \infty$ হওয়ায় $x < 0$, যার জন্য $|x| = -x$]

$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}} = \sqrt{1+0} = 1$

[JU'18-19] [Ans: b]

07. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{2+x-4x^2}$ এর মান কত?

(a) -2 (b) $\frac{-1}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

সমাধান: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{2+x-4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}-4} = -\frac{1}{4}$

Shortcut: লব ও হরের সর্বোচ্চ ঘাতের সহগের অনুপাত $= \frac{1}{-4}$

[JU'18-19] [Ans: b]

08. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{x} - 1\right)$ এর মান কত?

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) 3

সমাধান: $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{x} - 1\right) = 0 - 1 = -1$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery
CamScanner

09. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3x+5}{3x^2+5x-6}$ এর মান- [DU'17-18] [Ans: c]

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $-\frac{5}{6}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{2}{3}$

সমাধান: $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3x+5}{3x^2+5x-6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}=\frac{2}{3}$

Shortcut: লব ও হরের সর্বোচ্চ ঘাতের সহগের অনুপাত $=\frac{2}{3}$

10. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(\sin x+\cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)}=?$ [RU'15-16] [Ans: a]

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

সমাধান: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(\sin x+\cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)}$ এখন, $-1\le\sin x\le 1$ এবং $-1\le\cos x\le 1\ \therefore\ -1\le\cos^3 x\le 1$

$\therefore\ -2\le\sin x+\cos^3 x\le 2\Rightarrow -2x^2\le x^2(\sin x+\cos^3 x)\le 2x^2$; [$x\to-\infty$ হলে, $x^2>0$]

$\Rightarrow\frac{-2x^2}{(x^2+1)}\le\frac{x^2(\sin x+\cos^3 x)}{(x^2+1)}\le\frac{2x^2}{(x^2+1)}$; [$x\to-\infty$ হলে, $(x^2+1)>0$]

$\Rightarrow\frac{-2x^2}{(x^2+1)(x-3)}\ge\frac{x^2(\sin x+\cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)}\ge\frac{2x^2}{(x^2+1)(x-3)}$; [$x\to-\infty$ হলে, $(x-3)<0$]

$\Rightarrow\frac{2x^2}{(x^2+1)(x-3)}\le\frac{x^2(\sin x+\cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)}\le\frac{-2x^2}{(x^2+1)(x-3)}$

এখন, $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{(x^2+1)(x-3)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x.\left(1-\frac{3}{x}\right)}=0$ এবং $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2}{(x^2+1)(x-3)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x.\left(1-\frac{3}{x}\right)}=0$

$\therefore$ Sandwich Theorem অনুযায়ী বলা যায়, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(\sin x+\cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)}=0$

বিকল্প: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(\sin x+\cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x+\cos^3 x}{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)(x-3)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x+\cos^3 x}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)(x-3)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x+\cos^3 x}{x-3}$

$=\frac{1}{1+\frac{1}{\infty}}\times\frac{\sin(-\infty)+\cos^3(-\infty)}{-\infty-3}=\frac{1}{1+0}\times 0=0$; [$\because\sin x,\cos^3 x$ এর মান $(-1,1)$ হয়। তাই একে ∞ দিয়ে ভাগ করলে 0 পাওয়া যায়]

11. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)=?$ [JU'14-15] [Ans: c]

(a) 1 (b) 0 (c) 5 (d) 2

সমাধান: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\times\frac{5x^2-1}{x^2}\right)\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\times\frac{5x^2-1}{x^2}\right)\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-x+5x^2-1}{x^3}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(5+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3}=5+0=5$

বিকল্প: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{1}{x^2}\right)=1\times 5=5$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-08: সূচকীয় আকার

১ **Formula & Concept:**

এই Type এর math-এ একটা ফরম্যাট মনে রাখলে খুবই সুবিধা হয়, $(1+0)^{\infty}=e$

➢ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ এখানে, $x\to\infty\ \therefore\frac{1}{x}\to 0$ তাই, $(1+0)^{\infty}=e$ হচ্ছে।

➢ $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ এখানে $x\to 0$ এবং $\frac{1}{x}\to\infty\ \therefore(1+0)^{\infty}=e$ হচ্ছে, এইভাবে মনে রাখলে সমস্যা সমাধান সহজতর হয়।

❖ **Shortcut:** $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{b}{x}+c}=e^{ab}$; $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+c}=e^{ab}\left[e^{x\text{ এর সহগ}\times\frac{1}{x}\text{ এর সহগ}}\right]$; $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x=e^{a-b}$

CamScanner

MCQ

01. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ এর মান কোনটি? [JU'23-24] [Ans: d]

(a) 1 (b) ∞ (c) 0 (d) e

সমাধান: $L=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$\Rightarrow L=\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}$

$\Rightarrow \log L=\lim_{y\to0}\frac{1}{y}\log(1+y)=\lim_{y\to0}\frac{\log(1+y)}{y}$

$\Rightarrow \log L=1\ ;\left[\because \lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1\right]\therefore L=e^1=e$

ধরি, $\frac{1}{x}=y\Rightarrow\frac{1}{y}=x\ \because x\to\infty\ \therefore\frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}\to0$ হলে
$\Rightarrow y\to0$ হবে

Shortcut: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ (সরাসরি সূত্র)

02. $\lim_{x\to0}(1+4x)^{\frac{3x+2}{x}}$ এর মান কত? [RU'21-22] [Ans: d]

(a) e^2 (b) $e^{\frac{3}{4}}$ (c) e^3 (d) e^8

সমাধান: $\lim_{x\to0}(1+4x)^{\frac{3x+2}{x}}=\lim_{x\to0}(1+4x)^{3+\frac{2}{x}}=e^{4\cdot2}=e^8;\left[\because\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{b}{x}+c}=e^{ab}\right]$

03. $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{bx+c}{x}}=$ কত? [RU'18-19] [Ans: c]

(a) ac (b) bc (c) e^{ac} (d) 0

সমাধান: $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{bx+c}{x}}=\lim_{x\to0}(1+ax)^{b+\frac{c}{x}}=\lim_{x\to0}(1+ax)^b\cdot\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{c}{x}}=1\cdot\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{c}{x}}=e^{ac}$

04. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}=$ কত? [JU'17-18] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{e}$ (b) e (c) e^2 (d) 1

সমাধান: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^3=e\times1=e$

Shortcut: $e^{x\text{এর সহগ}\times\frac{1}{x}\text{এর সহগ}}=e^{1\times1}=e$

05. $\lim_{x\to0}(\sec x)^x=?$ [JnU'13-14] [Ans: b]

(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) অসংজ্ঞায়িত (Undefined)

সমাধান: ধরি, $y=(\sec x)^x$ so, $\ln y=x\ln(\sec x)$

$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}x\ln(\sec x)=0$ so, $\ln y=0\ \therefore y=e^0=1$

বিকল্প: $\lim_{x\to0}(\sec x)^x=(\sec0)^0=1^0=1$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-09: ত্রিকোণমিতি সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

ত্রিকোণমিতি সংক্রান্ত সমস্যাগুলো সমাধানের সময় সকল অনুপাতকে sine, cosine অনুপাতের মাধ্যমে প্রকাশ করে নিতে হবে। এভাবে সমস্যা সমাধান সহজতর হয়।

MCQ

01. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 2x}$ এর মান হবে- [DU'20-21] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

সমাধান: $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 2x}\left[\frac{0}{0}\right]$; $\lim_{x\to0}\frac{0+\sin x}{2\times2\sin2x\cos2x}$ [L'Hôpital's rule]

$=\frac{1}{4}\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{2x}{\sin2x}\times\frac{1}{2}\right)\left(\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos2x}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{8}$

CamScanner

02. $\lim_{x\to0}\frac{\cos 7x-\cos 9x}{\cos 3x-\cos 5x}=$ কত? [RU'20-21] [Ans: c]

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) 0

সমাধান: $\lim_{x\to0}\frac{2\sin 8x\sin x}{2\sin 4x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 8x}{8x}\times\frac{4x}{\sin 4x}\times\frac{8}{4}=2$

03. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ এর মান হবে- [RU'19-20] [Ans: d]

(a) 2 (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

04. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 9x-\sin 7x}{\sin 7x-\sin 5x}=?$ [JU'19-20] [Ans: a]

(a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) -2

সমাধান: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 9x-\sin 7x}{\sin 7x-\sin 5x}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos 8x\sin x}{2\cos 6x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos 8x}{\cos 6x}=1$

05. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$ এর মান হবে- [CU'18-19] [Ans: d]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) $-\frac{1}{2}$ (d) 0

সমাধান: $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1}$ (L'Hôpital's rule) $=0$

06. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=?$ [JU'17-18] [Ans: d]

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{-1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\times4}=1\times\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

বিকল্প: $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{-(-\sin x)}{2x}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2}\left[\neq\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{2}$

07. $\lim_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$ এর মান কত? [CU'17-18] [Ans: b]

(a) 0 (b) $\frac{5}{2}$ (c) 5 (d) ∞

সমাধান: $\lim_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin 2x+3\sin 3x}{2x}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{-4\cos 2x+9\cos 3x}{2}=\frac{9-4}{2}=\frac{5}{2}$

বিকল্প: $\lim_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2}\left[\because\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}\right]$

$=2\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}=2\times1\times1\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Written

01. $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$ এর মান বের কর। [JnU'18-19]

সমাধান: $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)}{\sin^3 x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\cos x(\sin^2 x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos^2 x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}$

$=\frac{1}{\cos 0(1+\cos 0)}=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$ (Ans.)

বিকল্প: $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\sec x-1}{\sin^2 x}\left[\frac{0}{0}\right]$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sec x\tan x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sec x.\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x}{2\cos x}=\frac{1}{2}$ (Ans.)

CamScanner

Type-10: মূল নিয়মে অন্তরজ নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

মূল নিয়মে অন্তরজ নির্ণয় লিমিটের মাধ্যমে করা হয়। সংজ্ঞানুসারে, $\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$। যেই ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করতে বলবে, বামপক্ষে তা বসিয়ে limit এর মান নির্ণয় করতে হবে।

MCQ

01. $\lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}$ এর মান কত? **[BAU'18-19] [Ans: d]**

(a) $\sec^2 x$ (b) $\tan x$ (c) $\sec x \operatorname{cosec} x$ (d) $\sec x \tan x$

সমাধান: $\lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h} = \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

02. ক্যালকুলাস আবিষ্কারের পেছনে অবদান আছে কার? **[RU'13-14][Ans: d]**

(a) পীথাগোরাস (b) গাউস (c) জগদীশচন্দ্র বসু (d) নিউটন

Type-11: সরাসরি সূত্র প্রয়োগ (প্রয়োজনে সরলীকরণ করে) সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

এখানে অন্তরীকরণের সাধারণ সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে।

MCQ

01. $\frac{d}{dx}(\log_{10} x) =$ কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: b]**

(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{x}\log_{10} e$ (c) $\frac{1}{x}\log_e 10$ (d) $\log_{10} e$

সমাধান: $\frac{d}{dx}(\log_{10} x) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\ln 10}\ln x\right\} = \frac{1}{x}\log_{10} e\ ; \left[\because \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}\right]$

02. $a > 1$ হলে, $\frac{d}{dx}(\ln a^x) =$? **[GST'22-23] [Ans: b]**

(a) $\frac{a^x}{\ln a}$ (b) $\ln a$ (c) a^x (d) $x \ln a$

সমাধান: $\frac{d}{dx}[\ln a^x] = \frac{d}{dx}[x \ln a]$ [যেহেতু, $\log_a(b^x) = x\log_a b$]

$= \ln a \frac{d}{dx}[x]\left[\because \ln a \text{ একটি ধ্রুবক}\right] = \ln a \times 1 = \ln a$

03. $y = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx} =$ কত? **[RU'22-23] [Ans: a]**

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $2\sin 2x$

সমাধান: $y = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}} = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}} = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x} \therefore y = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

04. যদি $f(x) = \ln(2x + e^{2x})$ হয়, তবে $f'(0) =$ কত? **[RU'22-23]**

(a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) 10

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $f'(x) = \frac{2+2e^{2x}}{2x+e^{2x}} \therefore f'(0) = \frac{4}{1} = 4$

05. যদি $y = \sin^{-1}(\sin x)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? **[JU'22-23; DU'16-17] [Ans: d]**

(a) $\sin x$ (b) $\cos x$ (c) x (d) 1

সমাধান: $y = \sin^{-1}(\sin x) = x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1$

06. $\frac{d}{dx}(10^x) =$? **[Agri.'21-22] [Ans: a]**

(a) $10^x \log_e 10$ (b) $x\,10^{x-1}$ (c) $10^x \log 10_e$ (d) $x\,10^{x+1}$

সমাধান: $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \therefore \frac{d}{dx}(10^x) = 10^x \ln 10 = 10^x \log_e 10$

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

07. $y = \ln x$ হলে, $\frac{dx}{dy}$ = কত? [CU'17-18] [Ans: c]

(a) e^y (b) e^x (c) x (d) $\frac{1}{y}$

সমাধান $y = \ln x \Rightarrow 1 = \frac{1}{x}\frac{dx}{dy} \therefore \frac{dx}{dy} = x$

08. $y = 3\log_a x - 5e^x$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [JU'16-17] [Ans: b]

(a) $\frac{3}{x} - 5e^x$ (b) $\frac{3}{x}\log_a e - 5e^x$ (c) $\frac{3}{x}\log_a x - 5e^x$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $y = 3\log_a x - 5e^x = 3\log_a e \ln x - 5e^x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}\log_a e - 5e^x$

09. $x + y = a^2$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{dx}{dy}$ এর মান যথাক্রমে– [CU'16-17] [Ans: d]

(a) 0, 0 (b) 0, 2a (c) 2a, 0 (d) −1, −1

সমাধান: $x + y = a^2$; $1 + \frac{dy}{dx} = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = -1 \therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{-1} = -1$

10. $p(x) = a + 1$ হলে, $p'(a)$ এবং $p'(1)$ এর মান যথাক্রমে কত? [CU'16-17] [Ans: c]

(a) $a + 1, 0$ (b) $0, a$ (c) 0, 0 (d) $a + 1, a + 1$ (e) 0, 1

সমাধান: $p(x) = a + 1 \therefore p'(x) = 0$ [∵ $(a + 1)$ একটি ধ্রুবক]; অর্থাৎ $p'(a) = p'(1) = 0$

11. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ =? [DU'15-16] [Ans: b]

(a) $2\sin 2x$ (b) 0 (c) 1 (d) $\cos 2x$

সমাধান: $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}} = 1 \therefore \frac{dy}{dx} = 0$

12. $\frac{d}{dy}\left(\frac{1+y+y^2}{y}\right)$ = কত? [JU'14-15] [Ans: a]

(a) $\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)$ (b) $\left(1 - \frac{1}{y}\right)$ (c) $\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)$ (d) $\left(1 + \frac{1}{y}\right)$

সমাধান: $\frac{d}{dy}\left(\frac{1+y+y^2}{y}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y} + 1 + y\right) = -\frac{1}{y^2} + 0 + 1 = 1 - \frac{1}{y^2}$

13. $y = x(3 - x^2)$ এবং $\frac{dy}{dx} = 0$ হলে, x এর মান কত? [JU'14-15] [Ans: c]

(a) 1 (b) −1 (c) ± 1 (d) 0

সমাধান: $y = 3x - x^3$; $y_1 = 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3 = 3x^2$; $x^2 = 1 \therefore x = \pm 1$

Written

01. যদি $y = x^2 + \frac{2}{x}$ তাহলে $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় কর। [RU'19-20]

সমাধান: $y = x^2 + \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{2}{x^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2 + \frac{2}{x^3} \cdot 2 \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 2 + \frac{4}{x^3}$ (Ans.)

Type-12: গুণের ও ভাগের সূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত

Formula & Concept:

➢ গুণের সূত্র: যদি u এবং v, x এর দুটি ফাংশন হয় তবে, $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

➢ ভাগের সূত্র: যদি u এবং v, x এর দুটি ফাংশন হয় তবে, $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

Note: $\log x$ লেখা থাকলে ধরে নিতে হবে $\ln x$ বোঝানো হচ্ছে।

MCQ

01. $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{x^2-4}\right]$ = কত? [JU'21-22; KU'16-17] [Ans: a]

(a) $-\frac{8x}{(x^2-4)^2}$ (b) $\frac{8x}{(x^2-4)^2}$ (c) $-\frac{2x}{(x^2-4)^2}$ (d) $\frac{2x}{(x^2-4)^2}$

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{x^2-4}\right] = \frac{(x^2-4)\frac{d}{dx}(x^2) - x^2\frac{d}{dx}(x^2-4)}{(x^2-4)^2} = \frac{(x^2-4)\times 2x - x^2\times 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

02. $y = \frac{\ln x}{x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [RU'19-20] [Ans: a]

(a) $\frac{1-\ln x}{x^2}$ (b) $\frac{x-\ln x}{x^2}$ (c) $-\frac{\ln x}{x^2}$ (d) $\frac{1-\ln x}{x}$

সমাধান: $y = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\times\frac{1}{x}-\ln x\times 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

03. $y = \frac{1+x}{1-x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান- [DU'18-19] [Ans: c]

(a) $\frac{-2}{(x-1)^2}$ (b) $\frac{2}{1-x^2}$ (c) $\frac{2}{(1-x)^2}$ (d) $\frac{2x}{(1-x)^2}$

সমাধান: $y = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1-x).1-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$

04. $\frac{\log x}{x}$ এর অন্তরক সহগ কত? [CU'18-19, 12-13, 11-12, 09-10, 05-06] [Ans: c]

(a) $1 - \log x$ (b) $\frac{1+\log x}{x}$ (c) $\frac{1-\log x}{x^2}$ (d) $\frac{1-\log x}{x}$ (e) $\frac{1+\log x}{x^2}$

সমাধান: $y = \frac{\log x}{x}; \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$

05. $y = \frac{1}{6}x^3 \log x$ হলে, $\frac{d^4y}{dx^4}$ এর মান কত? [KU'17-18] [Ans: c]

(a) 1 (b) $\frac{6}{x}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $\log x$

সমাধান: $y = \frac{1}{6}x^3 \log x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}x^3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{6}\cdot 3x^2 \cdot \log x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \log x$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x + x\log x \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + x\cdot\frac{1}{x} + \log x \Rightarrow \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{x}$

06. $\frac{d}{dx}\{x^3 \ln(x)\} = ?$ [RU'15-16] [Ans: d]

(a) $x + 2x\ln(x)$ (b) $x^2 + 2x\ln(x)$ (c) $x^3 + 2x^2\ln(x)$ (d) $x^2 + 3x^2\ln(x)$

সমাধান: $\frac{d}{dx}\{x^3 \ln(x)\} = x^3 \cdot \frac{1}{x} + (\ln x)\cdot 3x^2 = x^2 + 3x^2\ln(x)$

07. $g(y) = e^{-y} + x\cos y + \sin t$ এর y সাপেক্ষে অন্তরক সহগ হচ্ছে- [CU'13-14] [Ans: d]

(a) $-e^{-y} + \cos y - x\sin y$ (b) $\cos y$ (c) $-x\sin y + \cos t$ (d) $-e^{-y} - x\sin y$

সমাধান: $\frac{d[g(y)]}{dy} = \frac{d}{dy}(e^{-y} + x\cos y + \sin t) = -e^{-y} - x\sin y + 0 = -e^{-y} - x\sin y$

Type-13: সংযোজিত ফাংশন এর অন্তরক সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

একটি রাশিতে যেই অপারেটর আগে থাকবে ঐ অপারেটর অনুযায়ী অন্তরীকরণ করতে হবে। যেমন, $\frac{d}{dx}\{\sin(e^{\sqrt{x}})\}$ এর ক্ষেত্রে প্রথম অপারেটর sine। তাই আগে sine এর অন্তরীকরণ করতে হবে। দ্বিতীয় অপারেটর e, তাই এরপর e এর অন্তরীকরণ করবে। তৃতীয় অপারেটর $\sqrt{x}$, তাই সবার শেষে $\sqrt{x}$ এর অন্তরীকরণ করবে।

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin(e^{\sqrt{x}})) = \cos e^{\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

MCQ

01. $e^y = \tan^{-1}x$ হলে $\frac{dx}{dy} = ?$ [GST'22-23] [Ans: b]

(a) $\sqrt{1+x^2}\tan^{-1}x$ (b) $(1+x^2)\tan^{-1}x$ (c) $\sqrt{1-x^2}\tan^{-1}x$ (d) $(1-x^2)\tan^{-1}x$

সমাধান: $e^y = \tan^{-1}x \Rightarrow \ln e^y = \ln(\tan^{-1}x) \Rightarrow y\ln e = \ln(\tan^{-1}x) \Rightarrow y = \ln(\tan^{-1}x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\ln(\tan^{-1}x)] = \frac{1}{\tan^{-1}x}\times\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$ $\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = (1+x^2)\tan^{-1}x$

বিকল্প: এখানে, $e^y = \tan^{-1}x$ ..... (i)

y এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $e^y = \frac{1}{1+x^2}\frac{dx}{dy} \Rightarrow \tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{dx}{dy}$ $\therefore \frac{dx}{dy} = (1+x^2)\tan^{-1}x$ (Ans.)

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery
CamScanner

02. $\frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x})$ এর মান কোনটি? [JU'22-23, 19-20] [Ans: b]

(a) $-\sin\sqrt{x}$ (b) $\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (c) $\frac{-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (d) $\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

সমাধান: $\frac{d}{dx}[\cos\sqrt{x}] = \frac{d}{dx}[\cos\sqrt{x}] \times \frac{d(\sqrt{x})}{dx} = -\sin\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

03. $y = \log_x a^5$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত? [GST'21-22] [Ans: d]

(a) $5x\ln a$ (b) $\frac{5\ln a}{x(\ln x)^2}$ (c) $\frac{-\ln a^5}{x\ln x}$ (d) $\frac{-5\ln a}{x(\ln x)^2}$

সমাধান: $y = \log_x a^5 = 5\log_x a = 5\log_x e \times \log_e a = \frac{5\ln a}{\log_e x} = \frac{5\ln a}{\ln x}$ $\therefore y = \frac{5\ln a}{\ln x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{5\ln a}{\ln x}\right) = 5\ln a \times (-1)(\ln x)^{-2} \times \frac{1}{x} = -\frac{5\ln a}{x(\ln x)^2}$

04. $\frac{d}{dx}[\ln(e^x + e^{-x})]$ =কত? [JU'21-22, 18-19] [Ans: d]

(a) $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$ (b) $\frac{e^{2x}}{e^x+e^{-x}}$ (c) $\frac{e^{-x}-e^x}{e^x+e^{-x}}$ (d) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

সমাধান: $\frac{d}{dx}[\ln(e^x + e^{-x})] = \frac{1}{e^x+e^{-x}}\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x}) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

05. $\frac{d}{dx}(\sin\sqrt{x})$ =? [JU'21-22] [Ans: c]

(a) $\cos\sqrt{x}$ (b) $-\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (c) $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (d) $-\cos\sqrt{x}$

সমাধান: $\frac{d}{dx}(\sin\sqrt{x}) = \cos\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \cos\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}$

06. $\frac{d}{dx}(\cos^2(\ln x))$ =? [DU'20-21] [Ans: c]

(a) $-\frac{\sin(2\ln x)}{2}$ (b) $-\frac{2\cos(\ln x)}{x}$ (c) $-\frac{\sin(2\ln x)}{x}$ (d) $-2x\cos(\ln x)\sin(\ln x)$

সমাধান: $\frac{d}{dx}(\cos^2(\ln x)) = 2\cos(\ln x)(-\sin(\ln x))\frac{1}{x} = -\frac{2\sin(\ln x)\cos(\ln x)}{x} = \frac{-\sin(2\ln x)}{x}$

07. $y = \log\sin x^2$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [CU'20-21] [Ans: a]

(a) $2x\cot x^2$ (b) $2x\cot x$ (c) $\frac{1}{\sin x^2}$ (d) $\frac{1}{\cos x^2}$

সমাধান: $y = \log\sin x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x^2} \times \frac{d}{dx}(\sin x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x^2} \times \cos x^2 \times \frac{d}{dx}(x^2)$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 2x\cot x^2$

08. $\frac{d}{dx}\sqrt{\left(\frac{1}{e^x}\right)}$ =? [CU'20-21]

(a) $-\frac{1}{2}e^{-x}$ (b) $\frac{1}{2}e^{-x}$ (c) $\frac{1}{2}e^x$ (d) $-\frac{1}{2}e^x$

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $\frac{d}{dx}\sqrt{\left(\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{d}{dx}\sqrt{e^{-x}} = \frac{1}{2\sqrt{e^{-x}}}\frac{d}{dx}(e^{-x}) = \frac{1}{2\sqrt{e^{-x}}} \times (-e^{-x}) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

09. x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}(e^x)$ এর অন্তরজ কত? [KU'19-20] [Ans: a]

(a) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ (b) $\frac{e^x}{1-e^{2x}}$ (c) $\frac{1+e^{2x}}{e^x}$ (d) $\frac{1-e^{2x}}{e^x}$

সমাধান: $\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(e^x)\} = \frac{1}{1+e^{2x}} \times e^x = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

10. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}(x^2))$ এর মান কোনটি? [JU'18-19] [Ans: c]

(a) $\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}$ (b) $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ (c) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ (d) $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

সমাধান: $\frac{dy}{dx}\{\sin^{-1}(x^2)\} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

11. $y = \ln\cos x^\circ$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত? [RU'17-18] [Ans: d]

(a) $-\tan x^\circ$ (b) $\tan x^\circ$ (c) $\frac{\pi}{180}\tan x^\circ$ (d) $-\frac{\pi}{180}\tan x^\circ$

সমাধান: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x^\circ} \times (-\sin x^\circ) \times \frac{\pi}{180} = \frac{-\pi\tan x^\circ}{180}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

12. $y = e^{1+\log x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [RU'17-18] [Ans: d]

(a) $e^{1+\log x}$ (b) $\frac{1}{x}e^{1+\log x}$ (c) $\frac{1}{ex}(1+\log x)$ (d) e

সমাধান: $y = e^{1+\log x} = e.e^{\log x} = e.x \therefore \frac{dy}{dx} = e$

13. $y = \ln(\ln x)$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [JU'16-17] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{\ln x}$ (b) $\frac{1}{x\ln x}$ (c) $\frac{x}{\ln x}$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $y = \ln(\ln x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x\ln x}$

14. $y = e^{5-2x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [JU'16-17] [Ans: c]

(a) e^{5-2x} (b) $2e^{5-2x}$ (c) $-2e^{5-2x}$ (d) $(5-2x)e^{5-2x}$

সমাধান: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{5-2x}) = e^{5-2x}\frac{d}{dx}(5-2x) = -2e^{5-2x}$

15. $y = x\log_a x$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [CU'16-17] [Ans: a]

(a) $\log_a x + \log_a e$ (b) $\log_e a$ (c) $\log_a x + 1$ (d) $\log_a x$ (e) 1

সমাধান: $y = x\log_a x = x\log_a e \times \log_e x = (\log_a e)x\ln x \therefore \frac{dy}{dx} = \log_a e \times \left(\ln x + x.\frac{1}{x}\right) = \log_a x + \log_a e$

16. $\frac{d}{dx}\left[\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = ?$ [CU'16-17] [Ans: c]

(a) $\sec\frac{x}{2}$ (b) $2\sec x$ (c) $\sec x$ (d) $\sec x\tan x$ (e) $\frac{1}{2}\sec\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left[\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}}{\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$

17. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$ এর অন্তরক সহগ (derivative) কত? [JnU'15-16] [Ans: b, d]

(a) $\frac{-\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}}$ (b) $\frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}}$ (c) $\frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x}}$ (d) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}.\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}$

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}$

18. $y = 2x^2 + e^{\sin x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}|_0 = ?$ [RU'14-15] [Ans: b]

(a) 4x (b) 1 (c) $\cos x\, e^{\sin x}$ (d) 0

সমাধান: $y = 2x^2 + e^{\sin x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_0 = 4x + e^{\sin x}.\cos x = (4\times 0) + e^0\cdot 1 = 1$

19. যদি $y = x\sqrt{x^2+a^2}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = ?$ [CU'14-15] [Ans: b]

(a) $\frac{x^2+2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (b) $\frac{2x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (c) $\frac{2x^2+2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (d) $\frac{2x^2+a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}$

সমাধান: $y = x\sqrt{x^2+a^2}$, $y_1 = \sqrt{x^2+a^2} + x\times\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\times 2x = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x^2+a^2+x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{2x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

20. $y = \log_x a$ হলে, $\frac{dy}{dx} =$ কত? [JnU'14-15; RU'10-11] [Ans: d]

(a) $\frac{\log a}{x(\log x)^2}$ (b) $\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$ (c) $-\frac{\log a}{x(\log x)^2}$ (d) $-\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$

সমাধান: $y = \log_x a = \log_e a\times\log_x e = \ln a\times\frac{1}{\ln x} \therefore \frac{dy}{dx} = \ln a\times\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln x}\right) = -\frac{1}{(\ln x)^2}\times\frac{1}{x}\times\ln a = -\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$

21. x কে পরিবর্তনশীল ধরে $\log(x-\sqrt{x^2-1})$ এর অন্তরক সহগ কোনটি? [KU'14-15] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (d) $\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left(\log(x-\sqrt{x^2-1})\right) = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\times\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\times 2x\right) = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\times\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$

22. $\frac{d}{dx}\left\{e^{2\log x+1}\right\} =$ কত? [CU'13-14] [Ans: b]

(a) $2\log x\, e^{2\log x}$ (b) $2xe$ (c) $e^{2\log x}$ (d) $\frac{1}{x}e^{2\log x+1}$ (e) $x^2e^{\frac{2}{x}}$

সমাধান: $e^{2\log x+1} = e^{\log x^2}\cdot e = x^2\cdot e$ এখন, $\frac{d}{dx}(x^2\cdot e) = 2xe$

POLL MACHINE
Preparation and practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-14: বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অন্তরক সংক্রান্ত

Formula & Concept:

এই Type এর সমস্যা সমাধানের সময় বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের সূত্র apply করে $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x, \operatorname{cosec}^{-1}x, \sec^{-1}x, \cot^{-1}x$ মৌলিক ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে রূপান্তর করে অন্তরীকরণ করতে হবে। বিশেষত জটিল আকৃতির বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনে এর প্রয়োগ হয়। নিম্নোক্ত প্রতিস্থাপনের ফলে অন্তরক সহগ নির্ণয় সহজতর হয়।

Term -এর আকৃতি	যা ধরতে হবে
$1-x^2$	$x =* \sin\theta/\cos\theta$
$1+x^2$	$x =* \tan\theta/\cot\theta$
x^2-1	$x =* \sec\theta/\operatorname{cosec}\theta$
$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ or, $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$x = \cos\theta$
$\frac{2x}{1\pm x^2}$ or, $\frac{1-x^2}{1+x^2}$	$x = \tan\theta$
$\frac{1-x}{1+x}, \frac{1+x}{1-x}$	$x = \tan\theta$
$\frac{a+x}{1-ax}, \frac{a-x}{1+ax}$	$x = \tan\theta$

Note: চলক $[x = f(\theta)]$ ধরার ক্ষেত্রে '*' চিহ্নিত ফাংশন অগ্রাধিকার পাবে।

অথবা, সরাসরি নিম্নোক্ত সূত্রাবলি ব্যবহার করবে। অতঃপর অন্তরক নির্ণয় করবে।

(i) $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

(ii) $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$

(iii) $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

(iv) $2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

(v) $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

(vi) $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$

(vii) $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x)$

(viii) $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

MCQ

01. যদি $y = \tan^{-1}\frac{p+qx}{q-px}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [RU, CU'23-24] [Ans: c]

(a) $1+7x$ (b) $p+qx$ (c) $\frac{1}{1+x^2}$ (d) $\frac{2}{1-x^2}$

সমাধান: $y = \tan^{-1}\frac{p+qx}{q-px} = \tan^{-1}\frac{q\left(\frac{p}{q}+x\right)}{q\left(1-\frac{p}{q}x\right)} = \tan^{-1}\left(\frac{p}{q}\right)+\tan^{-1}x$; $\left[\because \tan^{-1}x \pm \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x\pm y}{1-xy}\right]$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\frac{p}{q}+\tan^{-1}x\right] = 0+\frac{d}{dx}[\tan^{-1}x] = \frac{1}{1+x^2}$

02. $y = \tan^{-1}\frac{4x}{1-4x^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ সমান কত? [RU'23-24; JnU'16-17] [Ans: a]

(a) $\frac{4}{1+4x^2}$ (b) $\frac{-4}{1-4x^2}$ (c) $\frac{4}{1-4x^2}$ (d) $\frac{1}{4x^2-1}$

সমাধান: $y = \tan^{-1}\frac{4x}{1-4x^2} = \tan^{-1}\frac{2.2x}{1-(2x)^2} = 2\tan^{-1}2x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2.2}{1+(2x)^2} = \frac{4}{1+4x^2}$

03. $y = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ হলে $\frac{dy}{dx} =$ কত? [JU'21-22, 19-20, 18-19] [Ans: b]

(a) $-\frac{2}{1+x^2}$ (b) $\frac{2}{1+x^2}$ (c) $\frac{1}{1+4x^2}$ (d) $\frac{4}{1+x^2}$

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x) = \frac{2}{1+x^2}$

04. $y = \tan^{-1}\sqrt{x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} =$? [CU'21-22] [Ans: c]

(a) $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ (b) $\frac{1}{\pm\sqrt{x}(1+x)}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ (d) $\frac{1}{1+x^2}$

সমাধান: $y = \tan^{-1}\sqrt{x} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

05. $y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত? [Agri.'20-21; DU'19-20; JU'19-20] [Ans: d]

(a) $\frac{1}{1-x^2}$ (b) $\frac{1}{1+x}$ (c) $\frac{x}{1+x^2}$ (d) $\frac{1}{1+x^2}$

সমাধান: $y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-(1)(x)} = \tan^{-1}1 + \tan^{-1}x = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

06. $\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{x^3}{e^x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{e^x}{x^3}\right)\right\}$ এর মান কত? [BAU'18-19] [Ans: a]

(a) 0 (b) 1 (c) $3x^2e^x$ (d) $\frac{x^6}{e^x}$

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{x^3}{e^x}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{x^3}{e^x}\right)\right\} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \left[\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$

07. $y = \cot^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [BAU'18-19] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$

সমাধান: $y = \cot^{-1}\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}} = \cot^{-1}\sqrt{\cot^2\frac{x}{2}} = \cot^{-1}\left(\cot\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

08. $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত? [RU'17-18] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) 1

সমাধান: $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = \tan^{-1}\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}} = \tan^{-1}\tan\frac{x}{2} = \frac{x}{2} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

09. x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ এর অন্তরজ কত? [KU'16-17] [Ans: a]

(a) $\frac{3}{1+x^2}$ (b) $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

সমাধান: $\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2} = 3\tan^{-1}x \therefore$ অন্তরক সহগ $= \frac{3}{1+x^2}$

10. যদি $y = \tan^{-1}\left(\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর। [CU'12-13] [Ans: c]

(a) $\frac{1}{1+\frac{a^2}{b^2}} - 1$ (b) 1 (c) -1 (d) None

সমাধান: $y = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{a}{b} - \tan x}{1 + \frac{a}{b}\tan x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \tan^{-1}(\tan x) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - x \therefore \frac{dy}{dx} = -1$

POLL MACHINE

Type-15: সূচকীয় ফাংশনের অন্তরীকরণে লগারিদম

Preparation and Practice are vital for effective delivery

➲ **Formula & Concept:**

কোনো সূচকীয় ফাংশনের অন্তরীকরণ লগারিদম ব্যবহার করে করা হয়। যেমন, $y = u^v$

$\Rightarrow \ln y = v\ln u \Rightarrow \frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx} = v\frac{d(\ln u)}{dx} + \ln u\frac{dv}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left(v\frac{d(\ln u)}{dx} + \ln u\frac{dv}{dx}\right) = u^v\left(\frac{v}{u}.\frac{du}{dx} + \ln u\frac{dv}{dx}\right) = u^v\left[\ln u\frac{dv}{dx} + \frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right]$

Shortcut: $\frac{d}{dx}(u^v) = u^v\frac{d}{dx}(v\ln u)$

MCQ

01. $y = x^x$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ =? [RU'20-21] [Ans: d]

(a) x^{x-1} (b) $x\cdot x^{x-1}$ (c) $x\ln x$ (d) $x^x(1+\ln x)$

সমাধান: $y = x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln x + 1 \therefore \frac{dy}{dx} = x^x(1+\ln x)$

বিকল্প: $\frac{dy}{dx} = x^x\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x\left(x.\frac{1}{x} + \ln x.1\right) = x^x(1+\ln x)$

CamScanner

02. $y = \log_y x$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [SUST'19-20] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{x(1+\ln x)}$ (b) $\frac{1}{x(1+\ln y)}$ (c) $\frac{1}{x \ln y}$ (d) $\frac{1}{x \ln x}$ (e) $\frac{1}{y(1+\ln x)}$

সমাধান; $y = \log_y x \therefore x = y^y \Rightarrow \ln x = y \ln y \Rightarrow \frac{1}{x} = y \times \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} + \ln y \times \frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{1}{x} = \frac{dy}{dx}(1 + \ln y) \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(1+\ln y)}$

03. $\frac{d}{dx}(x^{x^x})$ এর মান কত? [KU'13-14] [Ans: c]

(a) $x^{x^x}\left[\frac{1}{x} + (1 + \ln x)\ln x\right]$ (b) $x^x\left[\frac{1}{x} + (1 + \ln x)\ln x\right]$

(c) $x^{x^x}x^x\left[\frac{1}{x} + (1 + \ln x)\ln x\right]$ (d) $x^x\, x^{x-1}\left[\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)\ln x\right]$

সমাধান: ধরি, $y = x^{x^x}$ বা, $\ln y = x^x \ln x$ বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left\{x^x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \frac{d}{dx}(x^x)\right\}$

ধরি, $z = x^x$ বা, $\ln z = x \ln x$ বা, $\frac{1}{z}\frac{dz}{dx} = \ln x + 1$ বা, $\frac{dz}{dx} = x^x(1 + \ln x)$

বা, $\frac{dy}{dx} = x^{x^x}\left[x^x \frac{1}{x} + x^x \ln x(1 + \ln x)\right] = x^{x^x} \cdot x^x\left[\frac{1}{x} + \ln x(1 + \ln x)\right]$

Type-16: অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরীকরণ

➲ **Formula & Concept:**

যে ফাংশনকে $y = f(x)$ আকারে প্রকাশ করা যায় না, তাকে অব্যক্ত (Implicit) ফাংশন বলে। এক্ষেত্রে $f(x,y) = 0$ আকারে প্রকাশ করে সকল পদকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করতে হবে এবং প্রাপ্ত সমীকরণ হতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করতে হবে।

❖ **Shortcut:** $f(x,y) = 0$ কোনো অব্যক্ত ফাংশন হলে, $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$; যেখানে, $f_x = x$ এর সাপেক্ষে $f(x,y)$ এর আংশিক অন্তরীকরণ সহগ (Partial Derivative) এবং $f_y = y$ এর সাপেক্ষে $f(x,y)$ এর আংশিক অন্তরীকরণ সহগ (Partial Derivative)

MCQ

01. যদি $e^{xy+1} = 5$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [RU'23-24; Agri.'20-21; DU'14-15] [Ans: c]

(a) $\frac{\ln 5}{xy}$ (b) $\frac{-\ln 5}{xy}$ (c) $\frac{-y}{x}$ (d) $\frac{\ln 5}{x}$

সমাধান: $e^{xy+1} = 5$; $xy + 1 = \ln 5 \Rightarrow xy = \ln 5 - 1 \therefore x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

02. $(x+y)^2 - xy = 1$ হলে, $\frac{dy}{dx} =$ কত? [CU'22-23] [Ans: c]

(a) $\frac{x+2y}{y+2y}$ (b) $\frac{2x+y}{x+2y}$ (c) $\frac{-2x-y}{x+2y}$ (d) $\frac{-x-2y}{y+2x}$

সমাধান: $(x+y)^2 - xy = 1 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 - xy - 1 = 0 \because x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$

তাহলে, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta}{\delta x}[x^2+xy+y^2-1]}{\frac{\delta}{\delta y}[x^2+xy+y^2-1]} = -\frac{2x+y+0-0}{0+x+2y-0} = \frac{-2x-y}{x+2y}$

বিকল্প: $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_y}{f_x} = -\frac{2(x+y)\cdot 1-y-0}{2(x+y)\cdot 1-x-0} = -\frac{2x+y}{x+2y} = \frac{-2x-y}{x+2y}$

03. যদি $x^2 = 5y^2 + \sin y$ হয়, তাহলে $\frac{dy}{dx}$ কত হবে? [CU'22-23] [Ans: a]

(a) $\frac{2x}{\cos y+10y}$ (b) $\frac{2x}{\sin y+10y}$ (c) $\frac{10y}{\cos y+2x}$ (d) $\frac{5}{\sin y}$

সমাধান: $x^2 = 5y^2 + \sin y \Rightarrow 2x = 10y\frac{dy}{dx} + (\cos y)\frac{dy}{dx} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\cos y+10y}$

04. $x^x y^y = 1$ হলে, $\frac{dy}{dx} =$ কত? [RU'22-23] [Ans: b]

(a) $\frac{1+\ln x}{1+\ln y}$ (b) $-\frac{1+\ln x}{1+\ln y}$ (c) $\frac{1-\ln x}{1+\ln y}$ (d) $\frac{1+\ln x}{1-\ln y}$

সমাধান: $x^x \cdot y^y = 1 \Rightarrow \ln(x^x.y^y) = \ln 1 = 0 \Rightarrow x\ln x + y\ln y = 0$

$\therefore \left(x.\frac{1}{x} + \ln x\right) + \left(y \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + \ln y \cdot \frac{dy}{dx}\right) = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1+\ln x}{1+\ln y}$

POET MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

05. $e^{3xy+5} = 10$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [RU'20-21] [Ans: c]

(a) $\frac{x}{y}$ (b) $\frac{y}{x}$ (c) $-\frac{y}{x}$ (d) $-\frac{x}{y}$

সমাধান: $3xy + 5 = \ln 10 \Rightarrow 3\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$

06. যদি $x^2 + 3xy + 5y^2 = 1$ হয়, তাহলে $\frac{dy}{dx}$ সমান হবে- [JU'14-15; DU'12-13] [Ans: a]

(a) $-\frac{2x+3y}{3x+10y}$ (b) $\frac{2x+3y}{3x+10y}$ (c) $\frac{2x-3y}{3x+10y}$ (d) $\frac{2x+3y}{3x-10y}$

সমাধান: $x^2 + 3xy + 5y^2 = 1 \Rightarrow 2x + 3y + 3x\frac{dy}{dx} + 10y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+3y}{3x+10y}$

07. যদি $x^n + y^n = a^n$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = ?$ [DU'13-14] [Ans: c]

(a) $\left(\frac{x}{y}\right)^n$ (b) $\left(-\frac{x}{y}\right)^n$ (c) $-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$ (d) $\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$

সমাধান: $x^n + y^n = a^n \Rightarrow nx^{n-1} + ny^{n-1}.\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{nx^{n-1}}{ny^{n-1}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$

Written

01. $x^y + y^x = a^b$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [JnU'18-19]

সমাধান: $x^y + y^x = a^b \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{yx^{y-1}+y^x \ln y}{x^y \ln x + xy^{x-1}} = -\frac{y(yx^y + xy^x \ln y)}{x(yx^y \ln x + xy^x)}$ **(Ans.)**

Type-17: অসীম পদবিশিষ্ট পুনরাবৃত্তিমূলক রাশির অন্তরীকরণ

➲ **Formula & Concept:**

কোনো রাশিতে অসীম সংখ্যক বার একই অংশের পুনরাবৃত্তি হলে, পুনরাবৃত্ত অংশকে ঐ রাশি দ্বারা প্রতিস্থাপন করে একটা সসীম পদবিশিষ্ট রাশিতে পরিণত করে নিতে হবে। এরপর প্রদত্ত রাশির অন্তরীকরণ করতে হবে।

MCQ

01. যদি $y = e^{x+e^{x+e^{x+\ldots\infty}}}$ হয়, $\frac{dy}{dx} = ?$ [CU'23-24] [Ans: c]

(a) $\frac{1+y}{y}$ (b) $\frac{y}{1+y}$ (c) $\frac{y}{1-y}$ (d) $\frac{1-y}{y}$

সমাধান: $y = e^{x+e^{x+e^{x+\ldots\infty}}} \Rightarrow \ln y = \ln\left(e^{x+e^{x+e^{x+\ldots\infty}}}\right) \Rightarrow \ln y = \left(x + e^{x+e^{x+e^{x+\ldots\infty}}}\right)\ln e$

$\Rightarrow \ln y = (x + y) \Rightarrow \ln y - y = x \Rightarrow \frac{d}{dy}[\ln y - y] = \frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{1}{y} - 1 = \frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1-y}{y} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-y}$

02. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots\ldots\ldots}}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [JnU'13-14] [Ans: a]

(a) $\frac{1}{2y-1}$ (b) $\frac{x}{1-2y}$ (c) $\frac{x}{2y-1}$ (d) $\frac{y}{1-2y}$

সমাধান: $y = \sqrt{x+y}$ অথবা, $y^2 = x + y$

অথবা, $y^2 - y = x \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-1}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery
LIBRARY

CamScanner

Type-18: পরামিতিক ফাংশনের অন্তরীকরণ

Formula & Concept:

পরামিতি মানেই হলো নতুন আরেকটি চলক যার মাধ্যমে x ও y কে প্রকাশ করা যায়। যেমন, $(x = 2t + 3; y = t^2)$। এখানে x ও y এর মধ্যে সরাসরি সম্পর্ক দেয়া না থাকলেও। এর মাধ্যমে x ও y কে সম্পর্কিত করা যায়। পরামিতির মাধ্যমে প্রকাশিত চলকের একটির সাপেক্ষে অন্যটির অন্তরীকরণের নিয়ম, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$।

এখন এই অন্তরজকে x বা y যেকোনো চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। আবার চাইলে পরামিতির মাধ্যমেও Answer রেখে দেওয়া যায়।

MCQ

01. $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$ এবং $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}$ হলে, $\theta =$ কত? **[RU'22-23] [Ans: c]**

(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{5}$ (c) $\frac{5\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

সমাধান: $x = a(\theta - \sin\theta) \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a - a\cos\theta$

আবার, $y = a(1 + \cos\theta) \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = -a\sin\theta \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-a\sin\theta}{a - a\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - 1} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{-2\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\cot\frac{\theta}{2}$

প্রশ্নমতে, $-\cot\frac{\theta}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot\frac{\theta}{2} = -\sqrt{3} = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{5\pi}{6} \therefore \theta = \frac{5\pi}{3}$

02. $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$ এবং $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[JU'17-18; RU'14-15] [Ans: b]**

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) $\sqrt{2}$

সমাধান: $\tan y = \frac{2t}{1-t^2} \Rightarrow y = \tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2} = 2\tan^{-1}t$

আবার, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow x = 2\tan^{-1}t \therefore x = y$; এখন, $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$

03. $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx} =$ কত? **[JU'17-18; KU'14-15, 09-10] [Ans: d]**

(a) $2\tan^{-1}t$ (b) $2\sin^{-1}t$ (c) $\sin^{-1}\frac{2t}{1+t^2}$ (d) 1

সমাধান: $y = \tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2} = 2\tan^{-1}t$; $x = \sin^{-1}\frac{2t}{1+t^2} = 2\tan^{-1}t \therefore y = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$

04. $x = f(\theta) = r\cos\theta$ এবং $y = g(\theta) = r\sin\theta$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{dx}{dy}$ এর মান যথাক্রমে– **[CU'16-17] [Ans: a]**

(a) $-\cot\theta, -\tan\theta$ (b) $\tan\theta, \cot\theta$ (c) $-\tan\theta, -\cot\theta$ (d) $-\cot\theta, \tan\theta$ (e) $\cot\theta, -\tan\theta$

সমাধান: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r\cos\theta}{-r\sin\theta} = -\cot\theta \therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\tan\theta$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-19: ফাংশনের সাপেক্ষে ফাংশনের অন্তরীকরণ

Formula & Concept:

ধরি, f(x) এবং g(x), x এর দুটি ফাংশন।

f(x) এর সাপেক্ষে g(x) এর অন্তরীকরণ করতে হলে, $\frac{d(g(x))}{d(f(x))} = \frac{\frac{d(g(x))}{dx}}{\frac{d(f(x))}{dx}}$ আকারে লিখে অন্তরজ নির্ণয় করতে হবে।

MCQ

01. $\frac{d}{d\cos x}(\sin x) = ?$ **[GST'20-21] [Ans: b]**

(a) $\cot x$ (b) $-\cot x$ (c) $\sec^2 x$ (d) $\text{cosec}^2 x$

সমাধান: $\frac{d}{d\cos x}(\sin x) = \frac{\frac{d}{dx}(\sin x)}{\frac{d}{dx}(\cos x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x$

CamScanner

Written

02. $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ এর সাপেক্ষে $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [RU'19-20]

সমাধান: $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = 2\tan^{-1}x = a$ (ধরি); $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x = b$ (ধরি) $= a \therefore \frac{db}{da} = \frac{da}{da} = 1$ **(Ans.)**

Type-20: n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

এই Type এর সমস্যা সমাধানের সময় সঠিক প্যাটার্ন নির্ণয় করতে পারা খুব গুরুত্বপূর্ণ। প্রদত্ত ফাংশনকে 2-3 বার অন্তরীকরণ করে অন্তরজের মধ্যে প্যাটার্ন খুঁজে নিয়ে y_n এর মান নির্ণয় করতে হবে।

এইক্ষেত্রে কিছু বিষয় জেনে রাখা ভালো-

y এর প্রথম অন্তরজ $= \frac{dy}{dx} = y_1 = y' = f'(x)$

y এর দ্বিতীয় অন্তরজ $= \frac{d^2y}{dx^2} = y_2 = y'' = f''(x)$

এভাবে, y এর n তম অন্তরজ $= \frac{d^ny}{dx^n} = y_n = f^n(x)$

❖ **Shortcut: n তম অন্তরক:**

(i) $y = e^{ax}$ হলে, $y_n = a^n e^{ax}$

(ii) $y = \sin x$ হলে, $y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$

(iii) $y = \cos x$ হলে, $y_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$

(iv) $y = \ln x$ হলে, $y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

(v) $y = \frac{1}{x}$ হলে, $y_n = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

(vi) $y = a\sin(bx + c)$ হলে, $y_n = ab^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + bx + c\right)$

(vii) $y = a\cos(bx + c)$ হলে, $y_n = ab^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + bx + c\right)$

(viii) $y = \sin ax \cos bx$ হলে, $y = \frac{1}{2}\cdot 2\sin ax\cos bx = \frac{1}{2}[\sin\{(a+b)x\} + \sin\{(a-b)x\}]$

$\therefore y_n = \frac{1}{2}\left[(a+b)^n \sin\left\{\frac{n\pi}{2} + (a+b)x\right\} + (a-b)^n \sin\left\{\frac{n\pi}{2} + (a-b)x\right\}\right]$

(ix) $y = \sin ax \sin bx$ হলে, $\therefore y_n = \frac{1}{2}\left[(a-b)^n \cos\left\{\frac{n\pi}{2} + (a-b)x\right\} - (a+b)^n \cos\left\{\frac{n\pi}{2} + (a+b)x\right\}\right]$

(x) $y = \cos ax \cos bx$ হলে, $y_n = \frac{1}{2}\left[(a+b)^n \cos\left\{\frac{n\pi}{2} + (a+b)x\right\} + (a-b)^n \cos\left\{\frac{n\pi}{2} + (a-b)x\right\}\right]$

(xi) $y = x^m$ হলে, $y_n = {}^mP_n x^{m-n}$; [$m > n$ হলে]

$y_n = n!$; [$m = n$ হলে]

$y_n = 0$; [$m < n$ হলে]

(xii) $y = \frac{1}{ax+b}$ হলে, $y_n = \frac{(-1)^n n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

(xiii) $y = \ln(ax + b)$ হলে, $y_n = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\, a^n}{(ax+b)^n}$

(xiv) $y = e^{ax}\sin(bx + c)$ হলে, $y_n = r^n e^{ax}\sin(bx + c + n\theta)$ যেখানে, $r = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

(xv) $y = e^{ax}\cos(bx + c)$ হলে, $y_n = r^n e^{ax}\cos(bx + c + n\theta)$ যেখানে, $r = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with CamScanner

MCQ

01. $y = \frac{1}{x}$ হলে, $y_n =$ কত? **[GST'23-24; RU'22-23; BAU'14-15; CU'07-08] [Ans: b]**

(a) $\frac{n!}{x^{n+1}}$ (b) $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ (c) $\frac{(-1)^{n+1} n!}{(n+1)!}$ (d) $\frac{(-1)^{n+1} n!}{(n-1)!}$

সমাধান: $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$y_1 = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y_2 = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{(-1)^2.2!}{x^3} = \frac{(-1)^2 \cdot 2!}{x^{2+1}}$

$y_3 = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = \frac{-6}{x^4} = \frac{(-1)^3 \cdot 3!}{x^4} = \frac{(-1)^3.3!}{x^{3+1}} \therefore y_n = n! \times (-1)^n \times x^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$

02. $y = x^{-2}\ln x$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান কত? **[DU'22-23] [Ans: b]**

(a) $x^{-4}\ln x - 2x^{-2} - 3x^{-4}$ (b) $6x^{-4}\ln x - 5x^{-4}$

(c) $6x^{-4}\ln x - 2x^{-2} - 3x^{-4}$ (d) $x^{-4}\ln x - 2x^{-2} + 3x^{-4}$

সমাধান: $y = x^{-2}\ln x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{-2} \cdot \frac{1}{x} + (\ln x)(-2)x^{-3} = x^{-3} - 2x^{-3}\ln x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{-3}(1 - 2\ln x) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = x^{-3}\left(0 - \frac{2}{x}\right) + (1 - 2\ln x)(-3)x^{-4}$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -2x^{-4} - 3x^{-4} + 6x^{-4}\ln x \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 6x^{-4}\ln x - 5x^{-4}$

03. $y = e^{-x}$ হলে, y_5 কোনটি? **[Agri.'21-22] [Ans: a]**

(a) $-e^{-x}$ (b) e^{-x} (c) $-5e^{-x}$ (d) $5e^{-x}$

সমাধান: $y = e^{-x} \Rightarrow y_1 = -e^{-x} \Rightarrow y_2 = e^{-x} \Rightarrow y_3 = -e^{-x} \Rightarrow y_4 = e^{-x} \Rightarrow y_5 = -e^{-x}$

বিকল্প: $y = e^{ax}$ হলে, $y_n = a^n e^{ax}$; এক্ষেত্রে, $y = e^{-x}$ $[a = -1] \therefore y_5 = (-1)^5 e^{-x} = -e^{-x}$

Shortcut: $y = e^{-x}$ এমন একটি প্যাটার্ন যাকে বিজোড় সংখ্যক বার অন্তরীকরণ করা হলে অন্তরক সহগ পাওয়া যায় $-e^{-x}$ এবং জোড় সংখ্যক বার অন্তরীকরণ করা হলে পাওয়া যায় e^{-x}। এক্ষেত্রে 5 বার (বিজোড়) অন্তরীকরণ করলে $y_5 = -e^{-x}$

04. $y_1 = \frac{1}{x}$ হলে, $y_n =$ কত? **[RU'21-22] [Ans: c]**

(a) $\frac{(n-1)!}{x^{n-1}}$ (b) $\frac{(-1)^n n!}{x^n}$ (c) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ (d) $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

সমাধান: $y_1 = \frac{1}{x} \Rightarrow y_2 = \frac{(-1)}{x^2} \Rightarrow y_3 = \frac{(-1)(-2)}{x^3} = \frac{(-1)^2 \cdot 2!}{x^3} = \frac{(-1)^{3-1}(3-1)!}{x^3} \Rightarrow y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

05. $f(x) = \sin x$ হলে, $f^{11}(0)$ এর মান কত? **[SUST'19-20] [Ans: c]**

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

সমাধান: $f(x) = \sin x$; $f^{4n+1}(x) = \cos x$; $f^{4n+2}(x) = -\sin x$; $f^{4n+3}(x) = -\cos x$; $f^{4n}(x) = \sin x$

$[n = 0, 1, 2, \ldots] \therefore f^{11}(0) = f^{4\times2+3}(0) = -\cos 0 = -1$

বিকল্প: $y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) \therefore f^{11}(x) = \sin\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) = -\cos x \therefore f^{11}(0) = -\cos 0 = -1$

06. যদি $y = x^3 \ln x$ হয়, তবে $\frac{d^4y}{dx^4} =$? **[BAU'18-19; JU'14-15; RU'09-10] [Ans: c]**

(a) $\frac{4}{x}$ (b) $\frac{1}{x}$ (c) $\frac{6}{x}$ (d) $\frac{6}{x^2}$

সমাধান: $y = x^3 \ln x \therefore y_1 = 3x^2 \ln x + x^2$; $y_2 = 6x\ln x + 3x + 2x = 6x\ln x + 5x$

$\therefore y_3 = 6\ln x + 6 + 5 = 6\ln x + 11$; $y_4 = \frac{6}{x}$

07. $f(x) = \cos a$ হলে $f'(a)$ এবং $f''(a)$ এর মান যথাক্রমে কত? **[CU'16-17] [Ans: d]**

(a) $-\sin a, -\cos a$ (b) $0, -\sin a$ (c) $-\cos a, -\sin a$ (d) $0, 0$ (e) $-\sin a, 0$

সমাধান: $f(x) = \cos a$; [$\cos a$ একটি ধ্রুবক] $\therefore f'(x) = 0; f''(x) = 0$ অর্থাৎ $f'(a) = 0; f''(a) = 0$

08. $y = (x-1)^3$ হলে, y_4 এর মান? **[JU'14-15; RU'09-10] [Ans: a]**

(a) 0 (b) 6 (c) 3 (d) -6

সমাধান: $y = (x-1)^3 \Rightarrow y_1 = 3(x-1)^2 \Rightarrow y_2 = 6(x-1) \Rightarrow y_3 = 6 \Rightarrow y_4 = 0$

Shortcut: $y = (x-1)^3$ কে বিশেষ একটি প্যাটার্নে বিবেচনা করলে $y_4 = 0$ হয়। [$y = x^m$, যেখানে, $m < n$ হলে $y_n = 0$]

POLY MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

09. $y = x^2 \log x$ হলে, y_4 এর জন্য কোনটি সত্য? [JU'14-15; RU'10-11]

(a) 6 (b) $\frac{6}{x}$ (c) $\frac{x}{6}$ (d) $\frac{4}{x}$

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $y = x^2 \log x,\ y_1 = 2x\log x + x,\ y_2 = 2\log x + 3,\ y_3 = \frac{2}{x},\ y_4 = -\frac{2}{x^2}$

10. $y = (2x-1)^3$ হলে, $y_3 =$ কত? [JU'14-15] [Ans: c]

(a) 24 (b) 42 (c) 48 (d) 18

সমাধান: $y = (2x-1)^3; y_1 = 3(2x-1)^2 \times 2 = 6(2x-1)^2$

$\therefore y_2 = 12 \times 2(2x-1) = 24(2x-1);\ y_3 = 24 \times 2 = 48$

11. $y = (2x-5)^3$ হলে $y_n =$ কত? [CU'14-15, 10-11] [Ans: d]

(a) 24 (b) 48 (c) 0 (d) অনির্ণেয় (e) 50

সমাধান: $y = (2x-5)^3,\ y_1 = 3\cdot(2x-5)^2\cdot 2 = 6.(2x-5)^2,\ y_2 = 6\cdot 2(2x-5)\cdot 2 = 24(2x-5)$

$y_3 = 24(2x-5)^0\cdot 2 = 48,\ y_4 = 0$ যদি $n > 4$ তবে y_n অনির্ণেয়।

12. $y = \ln(1+x)$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$ [SAU'14-15; JU'09-10] [Ans: c]

(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $1 + x^2$ (c) $\frac{-1}{(1+x)^2}$ (d) $-1(1+x)^2$

সমাধান: $y = \ln(1+x), \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1}; \frac{d^2y}{dx^2} = -1(1+x)^{-1-1} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

13. $y = \frac{1}{x}$ হলে, $y_{98} =$ কত? [RU'13-14] [Ans: c]

(a) $-\frac{99!}{x^{99}}$ (b) $-\frac{98!}{x^{99}}$ (c) $\frac{98!}{x^{99}}$ (d) $\frac{99!}{x^{100}}$

সমাধান: $\therefore y_n = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$; $y_{98} = \frac{(-1)^{98}98!}{x^{99}} = \frac{98!}{x^{99}}$

Type-21: পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ সংক্রান্ত প্রমাণ

➲ **Formula & Concept:**

এই Type এর সমস্যা সমাধানের কোনো ধরা-বাধা নিয়ম নাই। কিন্তু কিছু টেকনিক অনুসরণ করে এগোলে সহজেই সমাধান করা যায়। যেমন-

➢ কিছু ক্ষেত্রে y, y_1, y_2 সমীকরণের দুই পাশে বসিয়ে বামপক্ষ = ডানপক্ষ দেখানো যায়।

➢ অথবা অনেক সময় উভয় পাশে একই সাথে অন্তরীকরণ করে প্রাপ্ত রাশিকে সরলীকরণ করলেই প্রমাণ হয়ে যায়।

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. কোন ফাংশনটির জন্য $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$ সত্য? [DU'21-22] [Ans: b]

(a) $y = \cos^{-1}x$ (b) $y = (\cos^{-1}x)^2$ (c) $y = \sin^{-1}x$ (d) $y = \tan^{-1}x$

সমাধান: $y = (\cos^{-1}x)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\cos^{-1}x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} = -2\cos^{-1}x$

$\Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4(\cos^{-1}x)^2 \Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y \Rightarrow (1-x^2).2\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.(-2x) = 4\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$

02. $y = ax + \frac{b}{x}$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক? [RU'21-22] [Ans: c]

(a) $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = -2a$ (b) $\frac{xd^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 4a$ (c) $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 2a$ (d) $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 3a$

সমাধান: $y = ax + \frac{b}{x} \therefore \frac{dy}{dx} = a - \frac{b}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2dy}{dx} = ax^2 - b$

$\Rightarrow x^2.\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}.2x = 2ax$: [x এর সাপেক্ষে আবার অন্তরীকরণ করে] $\therefore x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 2a$ [x দ্বারা ভাগ করে]

CamScanner

03. $y = x^y$ হলে, $(1 - y\log x)\frac{dy}{dx} =$ কত? **[RU'18-19] [Ans: b]**

(a) $x^{2y} - 1$ (b) x^{2y-1} (c) $x^{y-\frac{1}{2}}$ (d) $x^{2(y-1)}$

সমাধান: $\ln y = y\ln x \Rightarrow \frac{y_1}{y} = \frac{y}{x} + y_1 \ln x \Rightarrow y_1(1 - y\ln x) = \frac{y^2}{x} = x^{2y-1}$; [যেহেতু, $y^2 = x^{2y}$]

04. যদি $y = \frac{\ln x}{x}$ হয়, তবে $x^3y_2 - 2xy$ এর মান কোনটি? **[RU'17-18] [Ans: a]**

(a) -3 (b) -2 (c) -1 (d) 0

সমাধান: $y = \frac{\ln x}{x}$; $y_1 = \frac{x.\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$;

$y_2 = \frac{x^2.\left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$ $\therefore x^3y_2 - 2xy = -3$; [$\because \ln x = xy$]

05. $y = pe^{mx} + qe^{-mx}$ হলে, $y_2 - m^2y =$? **[CU'16-17] [Ans: d]**

(a) y (b) y^2 (c) 1 (d) 0 (e) কোনটিই হয়

সমাধান: $y = pe^{mx} + qe^{-mx}$ $\therefore y_1 = m(pe^{mx} - qe^{-mx})$

$\therefore y_2 = m^2(pe^{mx} + qe^{-mx}) = m^2y$ $\therefore y_2 - m^2y = 0$

Written

01. $y = \cos x \ln\left(\frac{1}{\sec x + \tan x}\right)$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} + y$ এর মান নির্ণয় কর। **[DU'22-23]**

সমাধান: $y = \cos x \ln\left(\frac{1}{\sec x + \tan x}\right) = \cos x \ln\left(\frac{\sec x - \tan x}{\sec^2 x - \tan^2 x}\right)$

$\therefore y = \cos x \ln(\sec x - \tan x)$ ..... (i)

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\sin x \ln(\sec x - \tan x) + \cos x \times \frac{1}{\sec x - \tan x} \times (\sec x \tan x - \sec^2 x)$

$= -\sin x \ln(\sec x - \tan x) + \frac{\cos x(-\sec x)(\sec x - \tan x)}{\sec x - \tan x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin x \ln(\sec x - \tan x) + \cos x\left(-\frac{1}{\cos x}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin x \ln(\sec x - \tan x) - 1$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x \ln(\sec x - \tan x) - \sin x \times (-\sec x) = -y + \tan x$ [$\because$ (i) $\Rightarrow y = \cos x \ln(\sec x - \tan x)$]

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x$ **(Ans.)**

বিকল্প: দেওয়া আছে, $y = \cos x \cdot \ln\left(\frac{1}{\sec x + \tan x}\right)$ ..... (i)

$= \cos x \cdot \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}\right)$ $\therefore y = \cos x \cdot \ln\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$ ..... (ii)

এখন, $\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)\right] = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \times \frac{(1 + \sin x)(-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{-\sin x - 1}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{-1}{\cos x}$

$\therefore \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)\right] = \frac{-1}{\cos x}$ ..... (iii)

(ii) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx} \times \ln\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) + \cos x \times \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)\right]$

$= (-\sin x) \times \ln\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) + \cos x \times \left(\frac{-1}{\cos x}\right)$ [(iii) হতে]

$\therefore \frac{dy}{dx} = (-\sin x) \times \ln\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) - 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = (-\cos x) \times \ln\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) - \sin x \times \left(\frac{-1}{\cos x}\right)$ [(iii) হতে]

$= -y + \tan x$;[(ii) হতে] $\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x$ **(Ans.)**

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-22: স্পর্শক ও অভিলম্বের ঢাল সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

(i) $y = f(x)$ বক্ররেখার যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল, $m = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}$ এর রাশিমালায় যদি শুধু x থাকে তবে $f(x) = y$ বক্ররেখার উপর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল নির্ণয়ের জন্য শুধু ঐ বিন্দুর ভুজ প্রয়োজন হবে।

যদি $\frac{dy}{dx}$ এর রাশিমালায় x, y দুই চলকই থাকে তবে $y = f(x)$ লেখের উপর অবস্থিত বিন্দুর ভুজ ও কোটি উভয়ের মান বসিয়ে ঢাল নির্ণয় করতে হবে।

(ii) $y = f(x)$ এর লেখের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাই হলো অভিলম্ব।

স্পর্শকের ঢাল, $m\left(=\frac{dy}{dx}\right)$ হলে, ঐ বিন্দুতে অভিলম্বে ঢাল $= -\frac{1}{m}\left(= -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{dx}{dy}\right)$ হবে।

Note: (i) স্পর্শকগুলো x অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) স্পর্শকগুলো y অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

(iv) স্পর্শকগুলো x ও y অক্ষ হতে সমান কোণ খণ্ডন করলে, $\frac{dy}{dx} = \pm 1$

(v) $y = f(x)$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}(x - x_1)$

যেখানে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}$, (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ এর মান।

(vi) (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

অভিলম্বের সমীকরণকে $y - y_1 = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1,y_1)}(x - x_1)$ আকারে ও লিখা যায়।

MCQ

01. k-এর কোন মানের জন্য $y = kx(1 - x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে? **[GST'23-24]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 1 **[Ans: a]**

সমাধান: $y = kx(1 - x) = kx - kx^2; \frac{dy}{dx} = k - 2kx$

মূলবিন্দুতে, $\frac{dy}{dx}|_{(0,0)} = k - 2.k.0 = k$

প্রশ্নমতে, $k = \tan 30° \therefore k = \frac{1}{\sqrt{3}}$

02. $y = x^3 + 2x + 6$ বক্ররেখার (0, 6) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ- **[RU'23-24] [Ans: d]**

(a) $2x - y + 6 = 0$ (b) $2x + y + 6 = 0$ (c) $x - 2y + 12 = 0$ (d) $x + 2y - 12 = 0$

সমাধান: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2$; $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,6)} = 2 \therefore$ অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{1}{2}$

অভিলম্ব: $y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow 2y - 12 = -x \therefore x + 2y - 12 = 0$

03. $y = 2x^2 + 3x + 5$ বক্ররেখার (0,1) বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল- **[RU'23-24] [Ans: a]**

(a) $-\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) -3 (d) 3

সমাধান: $y = 2x^2 + 3x + 5; \frac{dy}{dx} = 4x + 3$

$\therefore (0, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx}|_{(0,1)} = 4 \times 0 + 3 = 3$

$\therefore$ অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{1}{3}$

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

04. $xy = 1$ বক্ররেখার $(1,1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: b]**

(a) $x - y + 2 = 0$ (b) $x + y - 2 = 0$ (c) $x - 2y + 2 = 0$ (d) $x + 2y - 2 = 0$

সমাধান: $xy = 1$

$(1,1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $\frac{x\cdot1+y\cdot1}{2} = 1 \Rightarrow x + y = 2 \therefore x + y - 2 = 0$

[$\because xy = C$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে, $\frac{xy_1+yx_1}{2} = C$]

05. $y = x^2 - 4x + 4$ হলে কোন বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 2$ হবে? **[JU'23-24] [Ans: b]**

(a) $(1, 3)$ (b) $(3, 1)$ (c) $(-3,1)$ (d) $(-1, 3)$

সমাধান: $y = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - 4 \Rightarrow 2 = 2x - 4 \Rightarrow 2x = 6; x = 3$

$y = 3^2 - 4 \times 3 + 4 = 9 + 4 - 12 = 1 \therefore$ বিন্দুটি $(3,1)$

06. $y = x^2 - 2x + 1$ হলে কোন বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ হবে? **[JU'23-24] [Ans: b]**

(a) $(0,1)$ (b) $(1,0)$ (c) $(-1,0)$ (d) $(0,-1)$

সমাধান: $y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - 2 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\therefore y = 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 0 \therefore (1,0)$ বিন্দুতে

07. $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত? **[RU'22-23] [Ans: b]**

(a) t (b) $\frac{1}{t}$ (c) $\frac{2}{t}$ (d) $\frac{3}{t}$

সমাধান: $y^2 = 4ax \Rightarrow 2yy_1 = 4a \Rightarrow y_1 = \frac{4a}{2y} \therefore (at^2, 2at)$ বিন্দুতে ঢাল $= \frac{4a}{2\cdot2at} = \frac{1}{t}$

08. $y(x-1)(x-2) - x + 3 = 0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x- অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? **[RU'22-23] [Ans: b]**

(a) $2x - 2y - 3 = 0$ (b) $x - 2y - 3 = 0$ (c) $x + 2y + 3 = 0$ (d) $x + 2y - 3 = 0$

সমাধান: x-অক্ষে $y = 0 \therefore 0(x-1)(x-2) - x + 3 = 0 \therefore x = 3 \therefore$ x অক্ষের ছেদবিন্দু $(3,0)$

এখন, $y(x^2 - 3x + 2) - x + 3 = 0 \Rightarrow y \cdot (2x - 3) + (x^2 - 3x + 2) \cdot \frac{dy}{dx} - 1 = 0$

$(3,0)$ বিন্দুতে, $0 \cdot (2 \times 3 - 3) + (3^2 - 3 \times 3 + 2) \cdot \frac{dy}{dx} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

এখন, স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 0 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow 2y = x - 3 \therefore x - 2y - 3 = 0$

09. $y = (x-2)(x-3) - x + 7$ বক্ররেখাটির কোন বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল 4 হবে? **[RU'22-23; GST'20-21] [Ans: d]**

(a) $(2,3)$ (b) $(2,7)$ (c) $(3,7)$ (d) $(5,8)$

সমাধান: $y = (x-2)(x-3) - x + 7 \Rightarrow y = (x^2 - 5x + 6) - x + 7 = x^2 - 6x + 13$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 6$; এখন, ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 4 = 2x - 6 \Rightarrow 2x = 10 \therefore x = 5$

$x = 5$ হলে, $y = 5^2 - 6 \cdot 5 + 13 = 8 \therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(5,8)$

10. $(4,3)$ বিন্দুতে $3x^2 - 4y^2 = 12$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের ঢালের মান কত হবে? **[CU'22-23] [Ans: b]**

(a) -1 (b) 1 (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{4}{3}$

সমাধান: $3x^2 - 4y^2 = 12 \Rightarrow \frac{d}{dx}(3x^2 - 4y^2) = \frac{d}{dx}(12) \Rightarrow 6x - 8y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 8y\frac{dy}{dx} = 6x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{6x}{8y} = \frac{3x}{4y} \therefore (4,3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= \frac{dy}{dx}|_{(4,3)} = \frac{3\times4}{4\times3} = 1$

11. যদি $f(x) = x + \sin x$ হয়, তবে x এর কোন মানটির জন্য $f'(x) = 0$ হবে? **[GST'21-22] [Ans: d]**

(a) $\frac{\pi}{5}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

সমাধান: $f(x) = x + \sin x \Rightarrow f'(x) = 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 = \cos\pi \therefore x = \pi$

12. x এর কোন মানের জন্য $y = x + \frac{1}{x}$ বক্ররেখার ঢাল শূন্য হবে? **[Agri.'21-22, 20-21; DU'16-17, 13-14; JnU'10-11; CU'02-03] [Ans: b]**

(a) 1 (b) ±1 (c) $\pm\frac{3}{2}$ (d) ±2

সমাধান: $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \therefore x = \pm1$

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

13. $x^3 - 2xy^2 = 1$ বক্ররেখার $(-1, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত? **[RU'21-22] [Ans: b]**

(a) 1 (b) $-\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) 0

সমাধান: $x^3 - 2xy^2 = 1 \Rightarrow 3x^2 - 2\left[x.2y\frac{dy}{dx} + y^2.1\right] = 0$; [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$\Rightarrow 3x^2 - 4xy\frac{dy}{dx} - 2y^2 = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-2y^2}{4xy} \therefore (-1,1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx}|_{(-1,1)} = \frac{3(-1)^2-2\cdot1^2}{4(-1)\cdot1} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$

14. a এর মান কত হলে, $y = ax(1 + x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করবে? **[RU'21-22, 19-20; KU'17-18; DU'15-16] [Ans: b]**

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $3\sqrt{3}$ (d) $2\sqrt{3}$

সমাধান: $y = ax(1 + x) = ax + ax^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a + 2ax$; এখন, $\frac{dy}{dx}\Big|_{(0,0)} = a = \tan 30° \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

15. $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তের $(pt^2, 2pt)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত হবে? **[RU'21-22] [Ans: c]**

(a) $-\frac{1}{t}$ (b) $\frac{-1}{t^2}$ (c) $\frac{1}{t}$ (d) t

সমাধান: $y^2 = 4px \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 4p \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y} \therefore (pt^2, 2pt)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx}\Big|_{(pt^2,2pt)} = \frac{2p}{2pt} = \frac{1}{t}$

বিকল্প: $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তের $(pt^2, 2pt)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢালের ক্ষেত্রে, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2p}{2pt} = \frac{1}{t}$; $[x = pt^2, y = 2pt]$

16. $y = x^3 - 2x^2 + 4$ বক্ররেখার (2,4) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এর সমীকরণ নিচের কোনটি? **[JU'21-22] [Ans: a]**

(a) $4x - y - 4 = 0$ (b) $x + 4y - 18 = 0$ (c) $4x - y + 4 = 0$ (d) $x + 4y + 18 = 0$

সমাধান: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$; (2,4) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 3 \times 2^2 - 4 \times 2 = 4$

(2,4) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ: $(y - 4) = 4(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \therefore 4x - y - 4 = 0$

17. যদি $y = kx(2x + \sqrt{3})$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে তাহলে k-এর মান হবে-

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{1}{2}$ **[DU'20-21] [Ans: a]**

সমাধান: $y = kx(2x + \sqrt{3}) = 2kx^2 + \sqrt{3}kx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4kx + \sqrt{3}k$

মূলবিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = 4k \times 0 + \sqrt{3}k = \sqrt{3}k \therefore \frac{dy}{dx} = \sqrt{3}k = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

18. $x = y$ সরলরেখাটি $xy^2 = 4(4 - x)$ বক্ররেখাটির যে বিন্দুতে মিলিত হয়, বক্ররেখাটির সেই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? **[RU'20-21] [Ans: a]**

(a) $y + x - 4 = 0$ (b) $y + x + 4 = 0$ (c) $y - x - 4 = 0$ (d) $x - y - 4 = 0$

সমাধান: $x = y$, $xy^2 = 4(4 - x)$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x \cdot x^2 = 4(4 - x) \Rightarrow x^3 + 4x - 16 = 0$ যার একটি বাস্তব সমাধান $x = 2$ অর্থাৎ $y = 2$

এখন, প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $y^2 + x \cdot 2y\frac{dy}{dx} = 0 - 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4-y^2}{2xy}$

$\therefore \frac{dy}{dx}\Big|_{(2,2)} = \frac{-4-2^2}{2\times2\times2} = -1$

$\therefore$ উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $y - 2 = -1(x - 2) \Rightarrow y + x - 4 = 0$

19. $y = 4x^2 + 3x - 5$ বক্ররেখার (1, 2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল কত? **[JU'20-21] [Ans: c]**

(a) 3 (b) 2 (c) 11 (d) 5

সমাধান: $y = 4x^2 + 3x - 5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 8x + 3 \therefore \frac{dy}{dx}|_{(1,2)} = 8 \times 1 + 3 = 11$

20. $y^2 = 4x$ বক্ররেখা $(2, 2\sqrt{2})$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কোনটি? **[Agri.'19-20] [Ans: b]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (d) $2\sqrt{2}$

সমাধান: $y^2 = 4x \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \therefore \frac{dy}{dx}|_{(2,2\sqrt{2})} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

21. $y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ বক্ররেখার (0,2) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ কোনটি? [SUST'19-20] [Ans: d]

(a) $y = 0$ (b) $x = 0$ (c) $x = 2$ (d) $y = 2$ (e) $x = y$

সমাধান: $y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow 2y \times \frac{dy}{dx} - 2 - 4\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y-2} = \frac{1}{y-2}$

$\therefore$ অভিলম্বের ঢাল $= \frac{-1}{\frac{dy}{dx}|_{(0,2)}} = \frac{-1}{\frac{1}{2-2}} = 0 \therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ, $(y-2) = 0(x-0) \therefore y = 2$

22. (0,1) বিন্দুতে $y = e^x$ বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [CU'18-19] [Ans: a]

(a) $y = x + 1$ (b) $y = 2x + e^x$ (c) $x = e + 1$ (d) $y = -x + 1$

সমাধান: $\frac{dy}{dx} = e^x \therefore \frac{dy}{dx}|_{(0,1)} = 1 \therefore$ স্পর্শক: $y - 1 = 1(x - 0) = y = x + 1$

23. $\frac{dy}{dx} = 0$ সমীকরণটির সমাধান- [RU'17-18] [Ans: a]

(a) x অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা (b) y অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা

(c) একটি বৃত্ত নির্দেশ করে (d) সমাধান নেই

24. a এবং b এর কোন মানের জন্য $y = ax^2 + b$ পরাবৃত্তটি (0, 2) বিন্দু দিয়ে যাবে এবং (2,0) বিন্দুতে ঢাল হবে 4? [RU'16-17]

(a) 1, 2 (b) $-2, 2$ (c) 4, 2 (d) কোনোটিই নয় [Ans: a]

সমাধান: $y = ax^2 + b$ পরাবৃত্তটি (0,2) বিন্দু দিয়ে যায় $\therefore 2 = 0 + b \therefore b = 2$

$\frac{dy}{dx} = 2ax \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{(2,0)} = 2 \cdot a \cdot 2 = 4a$; অতএব, $4a = 4 \therefore a = 1$

25. $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ বক্র রেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল? [CU'16-17] [Ans: c]

(a) (0,0) (b) (2,2) (c) $(2, -1)$ (d) (3,0)

সমাধান: $y_1 = 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \therefore x = 2$

$x = 2$ হলে, $y = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 9 = -1 \therefore (x, y) = (2, -1)$

26. $x = 0$ বিন্দুতে $y = x + e^x$ এর লেখচিত্রে স্পর্শকের সমীকরণ হবে- [DU'14-15] [Ans: c]

(a) $y = x$ (b) $y = x + 1$ (c) $y = 2x + 1$ (d) $y = 2x$

সমাধান: $y = x + e^x \therefore \frac{dy}{dx} = 1 + e^x$; $x = 0, \frac{dy}{dx} = 1 + e^0 = 2$ এবং $y = 0 + e^0 = 1$

$y - 1 = 2(x - 0) \therefore y = 2x + 1$

27. $y = \sqrt{x}$ বক্ররেখার উপর কোন বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সহিত 45° কোণ সৃষ্টি করে? [RU'13-14] [Ans: a]

(a) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (c) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

সমাধান: $y = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \tan 45° = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 1 = \frac{1}{4x}$: [বর্গ করে]

$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \therefore y = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \therefore (x, y) \equiv \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Written

01. c – এর মান কত হলে, $y = cx(1 + x)$ বক্ররেখা এবং x-অক্ষের ছেদবিন্দুতে অঙ্কিত বক্ররেখার স্পর্শক (Tangent) x -অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করবে? [JnU'19-20]

সমাধান: x – অক্ষের ছেদবিন্দুতে $y = 0 \therefore 0 = cx(1 + x) \therefore cx = 0$ বা, $1 + x = 0 \therefore x = 0$ বা, $x = -1$

আবার, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cx + cx^2) = c + 2cx$; মূলবিন্দুতে $\frac{dy}{dx}|_{(0,0)} = c$

x – অক্ষের সাথে স্পর্শক 30° কোণ উৎপন্ন করলে ঢাল, $m = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Ans.)

আবার, $\frac{1}{\sqrt{3}} = c + 2c \times (-1) = -c \therefore c = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \therefore c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (Ans.)

CamScanner

02. দেখাও যে, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ বক্ররেখার যে কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দ্বারা অক্ষদ্বয় হতে কর্তিতাংশের যোগফল একটি ধ্রুবক। [JnU'18-19]

সমাধান: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে] $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$

বক্ররেখার (x_1,y_1) বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ, $y-y_1=-\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}\ (x-x_1)$

y অক্ষে $x=0$, তাই, $y-y_1=-\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}\ (-x_1)$; $y=y_1+\sqrt{x_1y_1}$ ..... (i)

অনুরূপভাবে, x অক্ষে $y=0$, তাই, $x=x_1+\sqrt{x_1y_1}$ ..... (ii)

∴ কর্তিতাংশের যোগফল $=x+y=x_1+y_1+2\sqrt{x_1.y_1}$ [(i) ও (ii) হতে]

$=\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2=a=$ ধ্রুবক (প্রমাণিত)

Type-23: সময়ের সাপেক্ষে পরিবর্তন সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

বাস্তবভিত্তিক কিছু সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে সময়ের সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করার প্রয়োজন পড়ে। যেমন: যদি, s সরণ হয় তবে, বেগ, $v=\frac{ds}{dt}$; ত্বরণ, $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$ হবে।

Note: কোনো রাশির সময়ের সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করার অর্থ হলো একক সময়ে রাশিটির পরিবর্তন নির্ণয় করা।

MCQ

01. একটি গোলাকার বলের আয়তনের বৃদ্ধির হার তার ব্যাসার্ধ r এর বৃদ্ধির হারের কত গুণ? **[RU'19-20] [Ans: c]**

(a) 4 (b) $2\pi r$ (c) $4\pi r^2$ (d) $\frac{4}{3}\pi r^2$

সমাধান: $v=\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt}=4\pi r^2\times\frac{dr}{dt}$

02. একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $\left(3t+\frac{t^2}{8}\right)$ মিটার পথ অতিক্রম করে। 5 মিনিট পর ট্রেনটির বেগ কত হবে? **[JU'19-20] [Ans: a]**

(a) $78\ ms^{-1}$ (b) $87\ ms^{-1}$ (c) $75\ ms^{-1}$ (d) $85\ ms^{-1}$

সমাধান: $v=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\left(3t+\frac{t^2}{8}\right)=3+\frac{1}{8}.2t=3+\frac{t}{4}$

$t=(5\times60)s$ হলে, $v=3+\frac{5\times60}{4}=78\ ms^{-1}$

03. একটা কণার গতিপথ হচ্ছে: $S(t)=t^2+2t+1$ । $S(0)$ এবং $S'(10)$ এর ফিজিক্যাল মান যথাক্রমে- **[CU'16-17] [Ans: e]**

(a) শুরুতে কণার অবস্থান, 10 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত পথ

(b) 0 সেকেন্ডে কণার অতিক্রান্ত পথ, 10 সেকেন্ডে কণার বেগ

(c) t সেকেন্ডে কণার অতিক্রান্ত পথ, 10 সেকেন্ড পর কণার অতিক্রান্ত পথ

(d) t সেকেন্ডে কণার অতিক্রান্ত পথ, t সেকেন্ডে কণার গতিবেগ

(e) 0 একক সময়ে কণার অবস্থান, 10 একক সময়ে কণার বেগ

04. যদি একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল সমহারে বাড়ে, তবে তার পরিসীমা- **[KU'13-14] [Ans: a]**

(a) ব্যাসার্ধের ব্যস্তানুপাতে বাড়ে (b) ব্যাসার্ধের সমানুপাতে বাড়ে

(c) ব্যাসের সমানুপাতে বাড়ে (d) ব্যাসের ব্যস্তানুপাতে বাড়ে

সমাধান: ধরি, বৃত্তের ক্ষেত্রফল $A=\pi r^2$, পরিসীমা $=2\pi r=p \Rightarrow \frac{dp}{dt}=2\pi\frac{dr}{dt}$

এখন, $\frac{dA}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}$; [অন্তরীকরণ করে]; প্রশ্নানুসারে, $\frac{dA}{dt}=$ ধ্রুবক $=k$ ∴ $2\pi\frac{dr}{dt}=\frac{k}{r}$; $\frac{dp}{dt}=\frac{k}{r}$

∴ $\frac{dp}{dt}\alpha\frac{1}{r}$ অর্থাৎ পরিসীমা ব্যাসার্ধের ব্যস্তানুপাতে বাড়ে।

05. ধাতুর তৈরি একটি বৃত্ত আকৃতির থালার ব্যাসার্ধ, তাপ প্রয়োগের ফলে প্রতি সেকেন্ডে 0.25cm বাড়ে। যখন থালাটির ব্যাসার্ধ 7cm তখন তার তলের বৃদ্ধির হার প্রতি সেকেন্ডে কত বর্গ সেন্টিমিটার? **[KU'12-13] [Ans: a]**

(a) 10.99 (b) 12.99 (c) 3.25 (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $A=\pi r^2; \frac{dA}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}=2\pi\times7\times0.25=10.99$

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Written

01. কোনো সরলরেখায় একটি কণা এমনভাবে চলছে যেন তা $s = 15t + 1.5t^2$ শর্তানুসারে t সেকেন্ডে s সে.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে। অন্তরীকরণের (Differentiation) ধারণা ব্যবহার করে 2 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ (Acceleration) একটি ধ্রুব (Constant) রাশি। **[JnU'19-20]**

সমাধান : $\frac{ds}{dt} = 15 + 3t \Rightarrow v = 3t + 15$ $\therefore$ 2s পর বেগ, $v = (3 \times 2 + 15) = 21\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t + 15) = 3\ ms^{-2}$ যা ধ্রুবক। (দেখানো হলো)

Type-24: লঘুমান বা গুরুমান এবং ক্রমবর্ধমান-ক্রমহ্রাসমান সংক্রান্ত

Formula & Concept:

গুরুমানের শর্ত	লঘুমানের শর্ত
(i) $\frac{dy}{dx} = 0$; (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ [−ve]	(i) $\frac{dy}{dx} = 0$; (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ [+ve]

অন্যান্য তথ্য:

(i) যদি কোনো বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} > 0$ [+ve] হয় তাহলে গ্রাফ/ফাংশনটি ঐ বিন্দুতে ক্রমবর্ধমান (Increasing)

(ii) যদি কোনো বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} < 0$ [−ve] হয় তাহলে গ্রাফ/ফাংশনটি ঐ বিন্দুতে ক্রমহ্রাসমান (Decreasing)

লঘুমান বা গুরুমান নির্ণয়ের ধাপ সমূহ:

- লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় করার জন্য $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করে $\frac{dy}{dx} = 0$ বসিয়ে সমাধান করে x এর মানগুলো বের করতে হবে। x এর এই সমস্ত মান দ্বারা গঠিত বিন্দুগুলোকে স্থির বিন্দু/সন্ধি বিন্দু /সংকট বিন্দু বলে।
- $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করতে হবে এবং তাতে x এর প্রাপ্ত মানসমূহ বসাতে হবে। যদি $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ হয় তবে x এর ঐ মানের জন্য ফাংশনটির লঘুমান পাওয়া যাবে এবং $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ হয় তবে x এর ঐ মানের জন্য ফাংশনটির গুরুমান পাওয়া যাবে।
- x এর মানগুলো প্রদত্ত ফাংশনে বসিয়ে গুরুমান বা লঘুমান নির্ণয় করতে হবে।

POLL MACHINE

MCQ

01. x-এর কোন মানের জন্য $F(x) = \int_0^x \frac{t-4}{9-t^2} dt$ ফাংশনটির মান বৃহত্তম হবে? **[GST'23-24] [Ans: a]**

(a) 4 (b) 9 (c) 3 (d) −4

Preparation and Practice are vital for effective delivery

সমাধান: বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের জন্য, $\frac{d}{dx}(F(x)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \frac{t-4}{9-t^2} dt\right] = 0 \Rightarrow \frac{x-4}{9-x^2} \cdot \frac{d}{dx}(x) - \frac{0-4}{9-0^2}\frac{d}{dx}(0) = 0$

$\Rightarrow \frac{x-4}{9-x^2} = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \therefore x = 4$

02. x এর কোন মানের জন্য $y = x \ln x$ এর লঘুমান নির্ণয় করা যাবে। **[GST'22-23] [Ans: c]**

(a) e (b) $-e$ (c) $\frac{1}{e}$ (d) $\frac{-1}{e}$

সমাধান: $y = x \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x \ln x] = x\frac{d(\ln x)}{dx} + \ln x \frac{d}{dx}(x) = x \times \frac{1}{x} + \ln x = \ln x + 1$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}[\ln x + 1] = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$

গুরুমান ও লঘুমানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \therefore x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

এখন, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{e}} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e \approx 2.71828 > 0 \therefore x = \frac{1}{e}$ তে y সর্বনিম্ন $\therefore$ লঘুমানের শর্তে, $x = \frac{1}{e}$

03. $f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান কোনটি? **[RU'22-23] [Ans: c]**

(a) 3 (b) 6 (c) 4 (d) 8

CamScanner

সমাধান: $f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x + \cos^2 x = 3 + \cos^2 x$

$\therefore f(x) = 3 + \cos^2 x$

আমরা জানি, $-1 \le \cos x \le 1$ এবং $0 \le \cos^2 x \le 1$

অর্থাৎ $\cos^2 x$ এর সর্বোচ্চ মান 1। $\therefore f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান, $f_{max} = 3 + 1 = 4$

বিকল্প: $f'(x) = \frac{d}{dx}(3 + \cos^2 x) = 0 \Rightarrow -2\sin x \cdot \cos x = 0$

$\therefore x = 0, \frac{\pi}{2}$ এবং $f''(x) = \frac{d}{dx}(-2\sin x \cdot \cos x) = \frac{d}{dx}(-\sin 2x) = -2\cos 2x$

এখন, $f''(0) = -2\cos 0° = -2 < 0$ এবং $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\cos \pi = 2 > 0$

অর্থাৎ $x = 0$ এর জন্য সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে। $\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= f(0) = 3 \times \sin^2 0 + 4 \times \cos^2 0 = 4$

04. $4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান কত? **[RU'22-23] [Ans: a]**

(a) 12 (b) 10 (c) 40 (d) 1

সমাধান: $y = 4e^x + 9e^{-x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4e^x - 9e^{-x}$

গুরু/ লঘুমানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 4e^x - \frac{9}{e^x} = 0 \Rightarrow (e^x)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow e^x = \pm\frac{3}{2}$ কিন্তু $e^x \neq -\frac{3}{2} \therefore e^x = \frac{3}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^x + 9e^{-x}; \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{e^x=\frac{3}{2}} = 4 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} = 6 + 6 = 12 > 0$

এখন, $e^x = \frac{3}{2}$ হলে, $y = 4 \cdot \frac{3}{2} + 9 \cdot \frac{2}{3} = 6 + 6 = 12$

05. $3x - x^2 - 5$ এর গরিষ্ঠ মান – **[CU'22-23] [Ans: c]**

(a) $\frac{11}{3}$ (b) $\frac{11}{4}$ (c) $\frac{-11}{4}$ (d) $\frac{17}{4}$

সমাধান: ধরি, $f(x) = 3x - x^2 - 5 \therefore f'(x) = 3 - 2x$ ও $f''(x) = -2$, চরমবিন্দুতে $f'(x) = 0 \Rightarrow 3 - 2x = 0$

$\therefore x = \frac{3}{2}$ এখন, $f''(\frac{3}{2}) = -2 < 0 \therefore x = \frac{3}{2}$ তে $f(x)$ গরিষ্ঠ।

$\therefore f(x)$ এর গরিষ্ঠমান $= f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \times \frac{3}{2} - \frac{3^2}{2^2} - 5 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} - 5 = \frac{18-9-20}{4} = \frac{-11}{4}$

বিকল্প: $3x - x^2 - 5 = -(x^2 - 3x + 5) = -\left\{x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} - 5 + \frac{9}{4}$

$= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{20-9}{4} = -\frac{11}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

$\therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ সর্বনিম্ন হলে $(3x - x^2 - 5)$ সর্বোচ্চ হবে। $\because \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ এর সর্বনিম্ন মান 0

$\therefore 3x - x^2 - 5$ এর গরিষ্ঠমান $= \frac{-11}{4} - 0 = \frac{-11}{4}$

Shortcut: $y_{min} = C - \frac{b^2}{4a} = -5 - \frac{3^2}{4\times(-1)} = -5 + \frac{9}{4} = \frac{-11}{4}$

06. $y = x^2 - 1$ ফাংশনটির Optimal value কোনটি? **[CU'22-23] [Ans: c]**

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) কোনটিই নয়

সমাধান: ধরি, $y = x^2 - 1 = f(x) \therefore f'(x) = 2x = 0$ [চরমমান পেতে] $\Rightarrow x = 0$; $f''(x) = 2 > 0 \therefore$ লঘুমান বিদ্যমান

$\therefore f(0) = 0^2 - 1 = -1$

07. $5 - 3x - x^2$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান কোনটি? **[JU'22-23] [Ans: d]**

(a) 3 (b) 5 (c) $\frac{47}{4}$ (d) $\frac{29}{4}$

সমাধান: ধরি, $f(x) = 5 - 3k - x^2$; $f'(x) = 0 - 3 - 2x = -3 - 2x$; $f''(x) = 0 - 2 = -2$

চরমমানের শর্তে, $f'(x) = 0 \Rightarrow -3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = -3 \therefore x = -\frac{3}{2}$

এখন, $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = -2 < 0 \therefore x = -\frac{3}{2}$ তে $f(x)$ সর্বোচ্চ।

$\therefore f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান $= f\left(-\frac{3}{2}\right) = 5 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 5 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{20+18-9}{4} = \frac{29}{4}$

বিকল্প: $f(x) = 5 - 3x - x^2 = 5 - (x^2 + 3x) = 5 - \left\{x^2 + 2x.\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 5 + \frac{9}{4} - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

$f(x)$ সর্বোচ্চ হবে যদি $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ সর্বনিম্ন হয়। বর্গসংখ্যা অঋণাত্মক বিধায় $x + \frac{3}{2} = 0$

$\therefore f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান $= 5 + \frac{9}{4} - 0 = \frac{20+9}{4} = \frac{29}{4}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

08. k এর কোন মানের জন্য $x = 1$ বিন্দুতে $f(x) = x^2 + \frac{k}{x}$ এর লঘুমান পাওয়া যাবে? **[DU'21-22] [Ans: c]**

(a) 0 (b) -1 (c) 2 (d) 1

সমাধান: $f(x) = x^2 + \frac{k}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{k}{x^2} \therefore f'(1) = 2.1 - \frac{k}{1^2} = 2 - k \Rightarrow f''(x) = 2 + \frac{2k}{x^3}$

চরম মানের জন্য, $f'(1) = 0 \Rightarrow 2 - k = 0 \therefore k = 2$

Test: $f''(2) = 2 + \frac{2.2}{1^3} = 6 > 0 \therefore$ k এর মান 2 এর জন্য লঘুমান পাওয়া যাবে।

09. কোন ব্যবধিতে $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ক্রমবর্ধমান? **[DU'21-22] [Ans: b]**

(a) $(-\infty, 0)$ (b) $(-1, 1)$ (c) $(0, \infty)$ (d) $(-1, \infty)$

সমাধান: $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \therefore f'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 1 - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

ক্রমবর্ধমান হলে, $f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} < 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2} < 0$

$\because (x^2+1)^2 > 0 \quad \therefore (x+1)(x-1) < 0 \therefore -1 < x < 1 \therefore$ ব্যবধি $(-1, 1)$

10. $y = x^2(1-x)$ এর সর্বোচ্চ মান কত? **[RU'21-22] [Ans: c]**

(a) $\frac{1}{27}$ (b) $\frac{2}{27}$ (c) $\frac{4}{27}$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $y = x^2(1-x) = x^2 - x^3 \therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 3x^2; \frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x(2-3x) = 0 \therefore x = 0, \frac{2}{3}$

$x = 0$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 > 0$; সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে।

$x = \frac{2}{3}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6.\frac{2}{3} = 2 - 4 = -2 < 0 \quad \therefore$ সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মানটি, $y|_{x=\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{12-8}{27} = \frac{4}{27}$

11. $y = 2x^2 + 4x + 17$ হলে y এর সর্বনিম্ন মান কোনটি? **[CU'21-22] [Ans: d]**

(a) 1 (b) 17 (c) 23 (d) 15

সমাধান: $y = 2x^2 + 4x + 17 \therefore \frac{dy}{dx} = 4x + 4; \frac{d^2y}{dx^2} = 4; \frac{dy}{dx} = 0$ হলে, $4x + 4 = 0; \ x = -1$

যেহেতু $\frac{d^2y}{dx^2} > 0, x = -1$ এ সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান, $y = 2 \times (-1)^2 + 4(-1) + 17 = 2 - 4 + 17 = 15$

12. $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 8x + 4$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি? **[JU'21-22] [Ans: a]**

(a) $\frac{92}{3}$ (b) $\frac{92}{5}$ (c) $\frac{16}{3}$ (d) $\frac{16}{5}$

সমাধান: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 8x + 4\right) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x - 8 \therefore x^2 + 2x - 8 = 0$

$\therefore x = 2, -4; f''(x) = 2x + 2;$ যদি $x = -4, f''(-4) = 2(-4) + 2 = -6 < 0, f''(2) \times 2 + 2 = 6 > 0$

$\therefore x = 4$ বিন্দুতে সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= \frac{(-4)^3}{3} + (-4)^2 - 8(-4) + 4 = \frac{92}{3}$

13. $2x^2 - x + 2$ এর ন্যূনতম মান কত? **[Agri.'21-22] [Ans: b]**

(a) 2 (b) $\frac{15}{8}$ (c) $\frac{3}{8}$ (d) $\frac{17}{8}$

সমাধান: $y = 2x^2 - x + 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x - 1 = 0 \therefore x = \frac{1}{4}; \frac{d^2y}{dx^2} = 4 > 0; y = 2 \times \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4} + 2 = \frac{15}{8}$

Shortcut: $y_{min} = C - \frac{b^2}{4a} = 2 - \frac{(-1)^2}{4\times 2} = \frac{15}{8}$

14. $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0$ ফাংশনের চরম বিন্দু কোনটি? **[GST'20-21] [Ans: c]**

(a) $(1, -1)$ (b) $\left(-1, \frac{-3}{2}\right)$ (c) $(1, 2)$ (d) $\left(2, \frac{5}{2}\right)$

সমাধান: $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0 \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \ (x > 0)$

$\therefore$ চরম বিন্দুতে $f(x) = 1 + \frac{1}{1} = 2 \quad \therefore$ চরম বিন্দু $(1, 2)$।

POHE MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

15. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে $y = 1 + 2\sin x + 2\cos^2 x$ এর মান x এর কোন মানদ্বয়ের জন্য গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ হবে? [RU'19-20]
(a) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$ (d) $0, \frac{\pi}{2}$ [Ans: c]
সমাধান: $y_1 = 2\cos x + 4\cos x(-\sin x) \Rightarrow 0 = 2\cos x - 4\cos x \sin x \Rightarrow 2\cos x \sin x - \cos x = 0$
$\Rightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0 \therefore \cos x = 0 \therefore x = \frac{\pi}{2}$ অথবা, $\sin x = \frac{1}{2} \therefore x = \frac{\pi}{6} \quad \therefore x = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right\}$

16. $y = x + \frac{1}{x}$ এর সর্বনিম্ন মান কোনটি? [Agri.'19-20] [Ans: c]
(a) -1 (b) -2 (c) 2 (d) 0
সমাধান: $y = x + \frac{1}{x}$; $y_1 = 1 - \frac{1}{x^2}$; $y_2 = \frac{2}{x^3}$
সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের জন্য $y_1 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \therefore x = \pm 1$
$x = 1$ হলে, $y_2 = \frac{2}{1} = 2 > 0 \therefore x = 1$ এর জন্য $y = x + \frac{1}{x}$ এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে।
$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= 1 + \frac{1}{1} = 2$

17. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ হলে, f(x) এর গরিষ্ঠ মান কোনটি? [Agri.'19-20] [Ans: c]
(a) 6 (b) 12 (c) 5 (d) 0
সমাধান: $f''(x) = x^3 - 3x^2 + 5$; $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6$
সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের জন্য $f'(x) = 0$; $3x^2 - 6x = 0$; $3x(x-2) = 0$; $x = 0, 2$
$x = 0$ হলে, $f''(x) = 6 \times 0 - 6 = -6 < 0$
$\therefore x = 0$ এর জন্য $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ এর গরিষ্ঠ মান পাওয়া যাবে।
$\therefore$ গরিষ্ঠ মান $f(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 + 5 = 5$

18. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ফাংশনটির গুরুমান লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হলে গুরুমানটি কত? [KU'19-20; RU'17-18] [Ans: a]
(a) -2 (b) -1 (c) 1 (d) 2
সমাধান: $y = x + \frac{1}{x} \therefore y_1 = 1 - \frac{1}{x^2} \therefore 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \therefore x = \pm 1$
এখানে, $y_2 = \frac{2}{x^3}$; $x = 1$ হলে, $y_2 = 2 > 0$; অর্থাৎ লঘুমান পাবো।
$x = -1$ হলে $y_2 = -2 < 0$; অর্থাৎ গুরুমান পাবো। $\therefore y = -1 + \frac{1}{(-1)} = -2 \therefore$ গুরুমান $= -2$

19. x এর কোন মানের জন্য $f(x) = \int_0^x \frac{t-3}{t^2+7} dt$ ন্যূনতম হবে? [RU'18-19] [Ans: d]
(a) $-\sqrt{7}$ (b) -3 (c) $\sqrt{7}$ (d) 3
সমাধান: $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{x-3}{x^2+7} = 0 \therefore x = 3$

20. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5$ হলে, লঘিষ্ঠ মান - [DU'17-18] [Ans: b]
(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8
সমাধান : $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5$
$y' = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 12x + 8) = 0$
$\Rightarrow x = 0; y'' = 12x^2 - 24x + 8 ; y''(0) = 8 > 0$ এবং $4x^2 - 12x + 8 = 0$
$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - (2+1)x + 2 \therefore x = 2, 1; y''(2) = 8 > 0$ ও $y''(1) = -4 < 0$
$\therefore x = 0$ এর জন্য লঘিষ্ঠ মান রয়েছে $\therefore f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 5 = 5$
আবার, $x = 2$ এর জন্য ও লঘিষ্ঠ মান রয়েছে $\therefore f(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 5 = 5$

21. f(x) একটি ফাংশন। যদি $x = c$ বিন্দুতে $f'(c) = 0$ এবং $f''(c) > 0$ হয় তবে নিচের কোনটি সত্য? [RU'15-16] [Ans: a]
(a) ফাংশনটির আপেক্ষিক লঘুমান আছে (b) ফাংশনটির আপেক্ষিক গুরুমান আছে
(c) ফাংশনটির নিশ্চল বিন্দু আছে (d) ফাংশনটির আনতি বিন্দু আছে

22. $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x$ এর গুরুমান ও লঘুমান যথাক্রমে নিচের কোনটি? [RU'15-16] [Ans: c]
(a) 20 ও -128 (b) -3 ও -128 (c) 17 ও -108 (d) -30 ও -128

POLI MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

সমাধান: $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x$

$\therefore f'(x) = 6x^2 - 42x + 36 \quad \therefore f''(x) = 12x - 42$

গুরুমানের বা লঘুমানের জন্য $f'(x) = 0 \therefore 6x^2 - 42x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - (6+1)x + 6 = 0$

সুতরাং, $x = 6$ অথবা, $x = 1$, এখন, $f''(6) = 30 > 0$ এবং $f''(1) = -30 < 0$

$\therefore f(1) = 17$ যা গুরুমান এবং $f(6) = -108$ যা লঘুমান।

23. $f(x) = 1 + \sqrt{\sin^2(x) + 1}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান হবে- **[RU'14-15; CU'07-08] [Ans: d]**

(a) 2 (b) 3 (c) 1 (d) 2.41

সমাধান: $f(x) = 1 + \sqrt{\sin^2 x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{2\sqrt{\sin^2 x+1}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 x+1}}$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{\sqrt{\sin^2 x+1} \cdot 2\cos 2x - (\sin 2x) \times \frac{2\sin x \cdot \cos x}{2\sqrt{\sin^2 x+1}}}{2(\sin^2 x+1)} = \frac{2(\cos 2x)\sqrt{\sin^2 x+1} - \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 x+1}}}{2(\sin^2 x+1)} = \frac{4(\cos 2x)(\sin^2 x+1) - \sin 2x}{4(\sin^2 x+1)^{\frac{3}{2}}}$

এখন, $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 x+1}} = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \quad \therefore x = \frac{\pi}{2}$ এবং $\cos 2x = \pm 1$

$f''(0) = \frac{4\times1\times1-0}{4\times1^{\frac{3}{2}}} = 1$ আবার, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4(-1)\times2-0}{4\times1^{\frac{3}{2}}} = -2$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ এর জন্য সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান। সর্বোচ্চ মান $= 1 + \sqrt{1^2+1} = 2 \cdot 41$

24. $f(x)$ ফাংশনের $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ এর গরিষ্ঠ মান হলে, নিম্নের কোন শর্তটি সঠিক? **[CU'14-15] [Ans: c]**

(a) $f(c) < f(c+h)$ (b) $f(c) + f(c+h) > 0$

(c) $f(c) - f(c+h) > 0$ (d) $f(c) - f(c+h) < 0$

সমাধান: $f(c) > f(c+h) \Rightarrow f(c) - f(c+h) > 0$

25. $x + \frac{1}{x}$ এর লঘুমান ও গুরুমান নিম্নের কোন সম্পর্কটিকে সিদ্ধ করে? **[CU'14-15] [Ans: c]**

(a) লঘুমান = গুরুমান (b) গুরুমান > লঘুমান (c) গুরুমান < লঘুমান (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $y = x + \frac{1}{x} \quad \therefore y_1 = 1 - \frac{1}{x^2} \therefore y_2 = \frac{2}{x^3}$ এখন, $y_1 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = 1$ হলে, $y_2 = \frac{2}{1} = 2 > 0$

$\therefore x = 1$ এ y এর লঘুমান বিদ্যমান।

y এর লঘুমান $= 1 + \frac{1}{1} = 2$

$x = -1$ হলে, $y_2 = \frac{2}{-1} = -2 < 0$

$\therefore x = -1$ এ y এর গুরুমান বিদ্যমান।

$\therefore y$ এর গুরুমান $= -1 + \frac{1}{-1} = -2$

26. $x(12-2x)^2$ এর বৃহত্তম মান কত হবে? **[JnU'14-15, 09-10; RU'12-13, 08-09] [Ans: b]**

(a) 120 (b) 128 (c) 228 (d) -128

সমাধান: $f(x) = x(12-2x)^2, f'(x) = 144 - 96x + 12x^2 \therefore 12x^2 - 96x + 144 = 0$

বা, $x^2 - 8x + 12 = 0$ বা, $x = 6,2$; $f''(x) = -96 + 24x$; $x = 2$ এর জন্য $f'' < 0 \therefore f(2) = 128$

Written

01. $4e^{2x} + 9e^{-2x}$ ফাংশনের সর্বনিম্ন মান (minimum value) নির্ণয় কর। **[JnU'18-19]**

সমাধান: $y = 4e^{2x} + 9e^{-2x}$

$y_1 = 8e^{2x} - 18e^{-2x} = 0 \Rightarrow e^{4x} = \frac{9}{4} \therefore e^{2x} = \frac{3}{2}$; $[\because e^{2x} > 1]$; $y_2 = 16e^{2x} + 36e^{-2x}$

$e^{2x} = \frac{3}{2}$ হলে, $y_2 = 16 \times \frac{3}{2} + 36 \times \frac{2}{3} = 48 > 0$

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= 4 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} = 12$ (Ans.)

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

অধ্যায় ১০

যোগজীকরণ

➤ ভার্সিটি ভর্তি পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪✪	T-01	$\int f(ax+b)\,dx$ আকৃতির	5	1	DU'18-19; RU'20-21, 19-20; JU'18-19, 14-15	RU'19-20
✪✪✪	T-02	যোগজীকরণে প্রতিস্থাপন পদ্ধতির ব্যবহার	24	-	DU'18-19, 15-16, 14-15, 11-12, 07-08; GST'22-23; RU'23-24, 22-23, 21-22, 20-21, 07-08; CU'22-23, 16-17, 14-15, 13-14; JU'19-20, 14-15, 09-10; KU'17-18, 13-14	-
✪✪✪	T-03	সাধারণ সূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত	11	-	DU'17-18; GST'22-23; RU'18-19, 15-16, 13-14; CU'16-17; JU'18-19, 17-18, 16-17, 14-15; KU'13-14	-
✪✪✪	T-04	$\int \frac{dx}{1\pm\sin ax}$, $\int \frac{dx}{1\pm\cos ax}$ আকারের	5	-	RU'17-18; CU'18-19; JU'23-24, 22-23, 18-19	-
✪✪✪	T-05	$\int \sin^m x\,dx$ বা, $\int \cos^m x\,dx$ আকারের	4	1	RU'14-15; JU'22-23, 18-19; JnU'15-16	JU'18-19
✪✪	T-06	$\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ আকারের	3	-	CU'16-17, 14-15; JU'21-22	-
✪✪✪	T-07	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ এবং $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$ আকৃতির	8	-	DU'23-24; RU'22-23; CU'23-24, 18-19; JU'23-24, 21-22	-
✪✪✪	T-08	$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ আকারের; যেখানে a, b, c যেকোনো ধ্রুবক	16	-	DU'08-09; RU'23-24, 20-21, 19-20, 17-18, 11-12; CU'21-22, 16-17; JU'22-23, 14-15, 11-12, 10-11; Agri.'20-21, KU'04-05; BAU'18-19	-
✪	T-09	$\int \frac{ex+f}{ax^2+bx+c}dx$ আকারের; $[a \neq 0, e \neq 0]$ যেখানে, a, b, c, e, f যেকোনো ধ্রুবক	1	-	JU'15-16	-

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

গুরুত্ব	টাইপ	বিষয়বস্তু	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
			MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪	T-10	$\int \frac{dx}{a+be^{mx}}$, $\int \frac{dx}{a+be^{-mx}}$, $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$ আকারের	9	-	DU'22-23, 19-20, 09-10; RU'09-10; JU'17-18, 10-11; KU'19-20, 16-17, 14-15	-
✪	T-11	$\int \frac{dx}{a+b\sin^2 x}$, $\int \frac{dx}{a+b\cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}$ আকারের	2	-	RU'22-23; KU'18-19	-
✪✪✪	T-12	Integration by Parts (অংশক্রমে সমাকলন) সংক্রান্ত	15	-	DU'13-14; RU'22-23, 21-22, 17-18, 10-11, 08-09, 07-08; CU'06-07; JU'22-23, 17-18, 16-17, 09-10; KU'06-07; JnU'15-16, 14-15,	-
✪✪✪	T-13	$\int e^{ax}\{a f(x) + f'(x)\} dx$ সংক্রান্ত	9	-	RU'23-24, 22-23, 21-22, 15-16; CU'21-22; JU'21-22; SUST'19-20; KU'18-19	-
✪✪✪	T-14	নির্দিষ্ট যোগজের সাধারণ সমস্যা	8	-	GST'23-24, 21-22; RU'23-24, 21-22; Agri.'21-22	-
✪	T-15	যুগ্ম ও অযুগ্ম ফাংশনের ক্ষেত্রে	1	-	RU'17-18	-
✪✪✪	T-16	$\int_a^b f(x)dx$ এর মান দেওয়া থাকলে $\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(cx+d)dx$ এর মান নির্ণয়	6	-	DU'17-18, 16-17; GST'21-22; RU'22-23; BAU'18-19	-
✪✪	T-17:	কয়েকটি পরমমান ফাংশনের সমাকলন	5	-	DU'21-22, 20-21, 15-16; RU'23-24; CU'23-24, 22-23	-
✪✪✪	T-18	নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত	33	3	DU'23-24, 19-20, 17-18, 16-17, 15-16, 14-15, 13-14, 11-12, 10-11, 08-09, 07-08, 05-06; GST'23-24, 21-22; RU'23-24, 22-23, 21-22, 18-19, 17-18, 14-15, 10-11; CU'22-23; JU'23-24, 21-22, 20-21, 17-18, 14-15; KU'16-17; JnU'17-18	DU'21-22, 20-21; RU'19-20

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-01: $\int f(ax+b)\,dx$ আকৃতির

➲ **Formula & Concept:**

$ax + b = z$ ধরতে হবে; [সেক্ষেত্রে, $dx = \frac{dz}{a}$ হবে]

Shortcut: $\int f(ax+b)dx = \frac{(ax+b) \text{ এর সাপেক্ষে } f(ax+b) \text{ এর যোগজীকরণ}}{x \text{ এর সহগ}} = \frac{(ax+b) \text{ এর সাপেক্ষে } f(ax+b) \text{ এর যোগজীকরণ}}{a}$

Warning: শুধুমাত্র $ax + b$ থাকলেই (বা, x এর ঘাত 1 হলেই) এই Shortcut ব্যবহার করে যোগজীকরণ করা যাবে।

MCQ

01. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RU'20-21]**

(a) $\frac{3}{2}$ (b) 6 (c) $\frac{2}{3}$ (d) 9

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x+1}} = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{d(4x+1)}{\sqrt{4x+1}} = \left[\frac{1}{4}2\sqrt{4x+1}\right]_0^2$; $\left[\because \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c\right]$

$= \frac{1}{2}\{\sqrt{4\times2+1} - \sqrt{4\times0+1}\} = \frac{1}{2}(3-1) = 1$

বিকল্প: ধরি, $z = 4x + 1 \Rightarrow dz = 4dx \Rightarrow \frac{dz}{4} = dx$

$x = 0, z = 1\,; x = 2, z = 9$

$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x+1}} = \frac{1}{4}\int_1^9 \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{z}\right]_1^9 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{9} - \sqrt{1}\right) = \frac{1}{2}(3-1) = 1$

02. $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{(1-2x)}\,dx$ এর মান কত? **[RU'19-20] [Ans: b]**

(a) $e - 1$ (b) $\frac{e-1}{2}$ (c) $\frac{e}{2}$ (d) $-\frac{e}{2}$

সমাধান: $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-2x}\,d(1-2x) = -\frac{1}{2}\,[e^{1-2x}]_0^{\frac{1}{2}}$; $[\because \int e^x\,dx = e^x + c] = -\frac{1}{2}[e^0 - e] = \frac{e-1}{2}$

03. $\int \sqrt{e^x}\,dx = ?$ **[DU'18-19] [Ans: c]**

(a) $\frac{2}{3}(e^x)^{\frac{3}{2}} + c$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{e^x} + c$ (c) $2e^{\frac{x}{2}} + c$ (d) $e^{\frac{x}{2}} + c$

সমাধান: $\int \sqrt{e^x}\,dx = \int e^{\frac{x}{2}}\,dx = 2\int e^{\frac{x}{2}}\,d\left(\frac{x}{2}\right) = 2e^{\frac{x}{2}} + c$

04. $X = \int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ হলে, X এর মান কত? **[JU'18-19] [Ans: b]**

(a) $\frac{26}{5}$ (b) $\frac{26}{3}$ (c) $\frac{3}{26}$ (d) 26

সমাধান: $X = \int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 (2x+1)^{\frac{1}{2}}\,d(2x+1) = \frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4 = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left(9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right)$

$= \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$

05. $\int \frac{dy}{5e^{5y}} =$ কত? **[JU'14-15]**

(a) $\frac{1}{15e^{5y}}$ (b) $\frac{1}{15}e^{5y}$ (c) $\frac{1}{5}e^{5y}$ (d) $-\frac{1}{15}e^{-5y}$

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $\int \frac{dy}{5e^{5y}} = \frac{1}{5}\int e^{-5y}dy = \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{5}\right)\int e^{-5y}\,d(-5y) = -\frac{1}{25}e^{-5y} + c$

Written

01. $\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[RU'19-20]**

সমাধান: $\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (3x+1)^{\frac{1}{2}}\,d(3x+1) = \frac{1}{3}\left[\frac{(3x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1$

$= \frac{2}{9}\left\{(3\cdot1+1)^{\frac{3}{2}} - (3\cdot0+1)^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{2}{9}\left\{(4)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{2}{9}(8-1) = \frac{14}{9}$ **(Ans.)**

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Type-02: যোগজীকরণে প্রতিস্থাপন পদ্ধতির ব্যবহার

Formula & Concept:

যোগজীকরণের ক্ষেত্রে প্রয়োজন অনুসারে কোনো কোনো রাশিকে z ধরে (বা z দ্বারা প্রতিস্থাপন করে) যোগজীকরণ করতে হয়। এক্ষেত্রে কাকে z ধরতে হবে তার সুনির্দিষ্ট কোনো নিয়ম নেই। চর্চা/অনুশীলন করে বুঝতে হবে কাকে z ধরলে সুবিধা হবে।

MCQ

01. $\int \frac{e^{\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ এর মান কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: b]**

(a) $e^{\cos^{-1}x}+c$ (b) $-e^{\cos^{-1}x}+c$ (c) $-\frac{1}{2}e^{\cos^{-1}x}+c$ (d) $\frac{1}{2}e^{\cos^{-1}x}+c$

সমাধান: $\int \frac{e^{\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int e^z\,dz = -e^z+c = -e^{\cos^{-1}x}+c$ | ধরি, $z=\cos^{-1}x;\ dz=\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$

বিকল্প: $\int \frac{e^{\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int e^{\cos^{-1}x}\,d(\cos^{-1}x) = -e^{\cos^{-1}x}+c;\ [\because \int e^x dx = e^x+c]$

02. $3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\ e^{\cos 3x}\,dx = ?$ **[GST'22-23] [Ans: c]**

(a) $3e$ (b) $1-e$ (c) $e-1$ (d) $3e-1$

সমাধান: $3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\, e^{\cos 3x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos 3x}(3\sin 3x\,dx)$

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos 3x}(-3\sin 3x\,dx) = -\int_1^0 e^z dz$

$= \int_0^1 e^z dz;\quad \left[\because \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\right]$

$= [e^z]_0^1 = e^1 - e^0 = e-1$

ধরি, $z=\cos 3x \therefore 3\sin 3x\,dx = -dz$

$\therefore dz = -3\sin 3x dx$

এখন $x=0$ হলে $z=1$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ হলে, $z=0$

বিকল্প: $3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\, e^{\cos 3x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos 3x}\,d(\cos 3x)$

$= -[e^{\cos 3x}]_0^{\frac{\pi}{2}};\ [\because \int e^x dx = e^x+c] = -\left[e^{\cos 3x\frac{\pi}{2}} - e^{\cos 0}\right] = -(e^0-e^1) = (e-1)$

03. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx =$ কত? **[RU'22-23] [Ans: c]**

(a) $e-1$ (b) $\frac{1}{2}(e-1)$ (c) $2(e-1)$ (d) $2(1-e)$

সমাধান: ধরি, $\sqrt{x}=z \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dz \therefore \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dz$

$x=1$ হলে, $z=1$; $x=0$ হলে, $z=0 \therefore \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 e^z\cdot 2dz = 2[e^z]_0^1 = 2(e^1-e^0) = 2(e-1)$

বিকল্প: $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,d(\sqrt{x}) = 2[e^{\sqrt{x}}]_0^1;\ [\because \int e^x dx = e^x+c] = 2\left(e^{\sqrt{1}} - e^{\sqrt{0}}\right) = 2(e-1)$

04. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4} = A$ হলে, A এর মান কত? **[CU'22-23; JU'19-20; KU'17-18] [Ans: c]**

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{8}$ (d) $\frac{\pi}{12}$

সমাধান: $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2xdx}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}[\tan^{-1}x^2]_0^1;\left[\because \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x+c\right]$

$= \frac{1}{2}[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{8}$

05. $\int e^{x+e^x}dx =$ কত ? **[RU'21-22] [Ans: c]**

(a) e^x+c (b) $e^{x+e^x}+c$ (c) $e^{e^x}+c$ (d) $e^{x^2}+c$

সমাধান: $\int e^{x+e^x}dx = \int e^x\cdot e^{e^x}dx = \int e^{e^x}d(e^x) = e^{e^x}+c;\ [\because \int e^x dx = e^x+c]$

06. $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ এর মান কত? **[RU'20-21] [Ans: b]**

(a) $\frac{1}{2}(1-e)$ (b) $\frac{1}{2}(e-1)$ (c) $\frac{e}{2}$ (d) $\frac{1}{2}(e+1)$

সমাধান: $\int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}[e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2}(e^1-e^0) = \frac{1}{2}(e-1)$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

07. $\int x^9 e^{x^{10}} dx = ?$ [JU'19-20] [Ans: d]

(a) $-\frac{1}{9}e^{x^{10}} + c$ (b) $-\frac{1}{10}e^{x^{10}} + c$ (c) $\frac{1}{9}e^{x^{10}} + c$ (d) $\frac{1}{10}e^{x^{10}} + c$

সমাধান: $\int x^9 e^{x^{10}} dx = \frac{1}{10}\int e^{x^{10}} d(x^{10}) = \frac{1}{10}e^{x^{10}} + c$

08. $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} dx$ এর মান কোনটি? [JU'19-20; CU'16-17] [Ans: c]

(a) $\frac{\pi}{32}$ (b) $\frac{\pi}{16}$ (c) $\frac{\pi^2}{32}$ (d) $\frac{\pi^2}{16}$

সমাধান: $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \tan^{-1}x \, d(\tan^{-1}x) = \left[\frac{(\tan^{-1}x)^{1+1}}{1+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\{\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)\}^2 = \frac{\pi^2}{32}$

09. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\sin x)^2 \cos x \, dx = ?$ [JU'19-20] [Ans: a]

(a) $-\frac{7}{3}$ (b) $\frac{7}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

সমাধান: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\sin x)^2 \cos x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\sin x)^2 \, d(1+\sin x) = \frac{1}{3}[(1+\sin x)^3]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= \frac{1}{3}\left[(1+\sin\pi)^3 - \left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{3}(1-8) = -\frac{7}{3}$

10. $\int \frac{\tan(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$ [DU'18-19] [Ans: c]

(a) $\sec^2(\sin^{-1}x) + c$ (b) $\sec(\sin^{-1}x) + c$ (c) $\ln|\sec(\sin^{-1}x)| + c$ (d) $\ln|\tan(\sin^{-1}x)| + c$

সমাধান: $\int \tan(\sin^{-1}x) \, d(\sin^{-1}x) = \ln|\sec(\sin^{-1}x)| + c$

11. $\int_0^x f(p)f'(p)dp = ?$ [DU'15-16] [Ans: c]

(a) $\frac{1}{2}f^2(x)$ (b) $\frac{1}{2}x^2$ (c) $\frac{1}{2}[\{f(x)\}^2 - \{f(0)\}^2]$ (d) $f(x) - f(0)$

সমাধান: $\int_0^x f(p).f'(p).dp = \int_0^x f(p) \, d\{f(p)\} = \left[\frac{\{f(p)\}^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2}[\{f(x)\}^2 - \{f(0)\}^2]$ $\left[\because \int y \, dy = \frac{y^2}{2}\right]$

বিকল্প: $f(p) = z \Rightarrow f'(p) \, dp = dz$

f(p)	0	x
z	f(0)	f(x)

$\therefore \int_0^x f(p) \cdot f'(p) \, dp = \int_{f(0)}^{f(x)} z \, dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_{f(0)}^{f(x)} = \frac{1}{2}[\{f(x)\}^2 - \{f(0)\}^2]$

12. $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx = f(x) + c; \; f(x) = ?$ [DU'15-16, 14-15, 11-12, 07-08] [Ans: b]

(a) $\sin(xe^x)$ (b) $\tan(xe^x)$ (c) $\cot(xe^x)$ (d) $\sec(xe^x)$

সমাধান: ধরি, $z = xe^x \Rightarrow dz = e^x(1+x)dx \therefore \int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx = \int \sec^2 z \, dz = \tan z + c = \tan(xe^x) + c$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x + \tan x)dx = ?$ [JU'14-15] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

সমাধান: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(\tan^2 x + 1)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(\sec^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, d(\tan x) = \left[\frac{(\tan x)^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

14. $\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4} \, dx =$ কত? [CU'14-15] [Ans: b]

(a) $\frac{3}{18}$ (b) $\frac{7}{18}$ (c) $\frac{7}{36}$ (d) $\frac{14}{9}$

সমাধান: $\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4} \, dx$; ধরি, $1+3x^4 = z \Rightarrow 12x^3dx = dz \Rightarrow x^3dx = \frac{dz}{12}$

$\therefore$ আমরা পাই, $\frac{1}{12}\int_1^4 \sqrt{z} \, dz = \left[\frac{1}{12} \times \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3\times12} \times z^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{1}{18}\left[z^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{1}{18}\left\{(2^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right\} = \frac{1}{18}(8-1) = \frac{7}{18}$

বিকল্প: $\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}dx = \frac{1}{12}\int_0^1 \sqrt{1+3x^4} \, d(1+3x^4) = \frac{1}{12}\left[\frac{(1+3x^4)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \frac{1}{12} \times \frac{2}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{18}(8-1) = \frac{7}{18}$

ROLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

15. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ এর মান- **[KU'13-14; JU'09-10; DU'07-08] [Ans: c]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (c) 1 (d) $\frac{\pi}{2}$

সমাধান: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^1 \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left[2\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1$

16. $\int \frac{(\cos x - x\sin x + 3x^2)}{x\cos x + x^3}dx =$ কত? **[CU'13-14] [Ans: b]**

(a) $\frac{\sin x + x\cos x}{x\sin x + 3x} + c$ (b) $\log(x^3 + x\cos x) + c$ (c) $\log\left(\frac{\sin x + x\cos x}{x^2 + x\sin x}\right) + c$ (d) $\log\left(\frac{\sin x + x\cos x}{x^2 + x\sin x}\right)$

সমাধান: ধরি, $x\cos x + x^3 = t \Rightarrow (\cos x - x\sin x + 3x^2)dx = dt$

$\int \frac{\cos x - x\sin x + 3x^2}{x\cos x + x^3}dx = \int \frac{dt}{t} = \log(t) + c = \log(x^3 + x\cos x) + c$

17. $\int \frac{3x^2}{1+x^6}dx = f(x) + c$ হলে, $f(x)$এর মান কত? **[RU'07-08] [Ans: a]**

(a) $\tan^{-1}x^3$ (b) $\sin^{-1}x^3$ (c) $\frac{1}{1+x^3}$ (d) $\cos^{-1}x^3$

সমাধান: ধরি, $x^3 = z \Rightarrow 3x^2dx = dz \therefore \int \frac{3x^2}{1+x^6}dx = \int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}dx$

$= \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1}(z) + c = \tan^{-1}(x^3) + c \therefore f(x) = \tan^{-1}(x^3)$

Type-03: সাধারণ সূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

এই Type এর জন্য যোজ্য রাশিকে Integration এর যোগ্য রাশিতে পরিণত করতে হবে। প্রদত্ত রাশিতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত থাকলে সব অনুপাতকে Simplify করে Integration যোগ্য করে নিতে হবে। চেষ্টা করতে হবে প্রদত্ত রাশিকে জানা সূত্রে পরিণত করে ফেলতে।

MCQ

01. $2\int_0^1 \text{cosec}\left(\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)dx =?$ **[GST'22-23] [Ans: d]**

(a) 2.5 (b) 2.0 (c) 1.5 (d) 1.0

সমাধান: $2\int_0^1 \text{cosec}\left(\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)dx = 2\int_0^1 \text{cosec}(\text{cosec}^{-1}x)dx = 2\int_0^1 x\,dx$

$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = [x^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$

02. $\int_0^1 x^4(1-x)^5dx =$ কত? **[RU'18-19] [Ans: a]**

(a) $\frac{1}{1260}$ (b) $\frac{1}{280}$ (c) $\frac{1}{315}$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $\int_0^1 x^4(1-x)^5dx = \int_0^1 x^4(1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5)dx$

$= \int_0^1 (x^4 - 5x^5 + 10x^6 - 10x^7 + 5x^8 - x^9)dx$

$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{6}x^6 + \frac{10}{7}x^7 - \frac{10}{8}x^8 + \frac{5}{9}x^9 - \frac{x^{10}}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{5}{6} + \frac{10}{7} - \frac{10}{8} + \frac{5}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{1260}$

03. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx =?$ **[JU'18-19] [Ans: c]**

(a) $\sin x + c$ (b) $\cos x + c$ (c) $x + c$ (d) 1

সমাধান: $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}}dx = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int dx = x + c$

04. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ সমান- **[DU'17-18] [Ans: d]**

(a) $\sin x$ (b) $\sin^{-1}x$ (c) $\cos x$ (d) $\sec^{-1}x$

05. $\int \tan^2 x\,dx =?$ **[JU'17-18] [Ans: a]**

(a) $\tan x - x + c$ (b) $\cot x + x + c$ (c) $\cot x - x + c$ (d) $\tan x + x + c$

সমাধান: $\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + c$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

06. $\int \frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$ এর মান কত? [JU'16-17] [Ans: d]

(a) $1-\frac{1}{x^2}+c$ (b) $1-\frac{1}{x}+c$ (c) $x-\frac{1}{x^2}+c$ (d) $x-\frac{1}{x}+c$

সমাধান: $\int \frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \int(1+x^{-2})dx = x-\frac{1}{x}+c$

07. $\int \sec^2 a \sec^2 x\, dx = ?$ [CU'16-17] [Ans: b]

(a) $\tan\tan x + c$ (b) $(\sec^2 a)\tan x + c$ (c) $\tan a + \tan x$

(d) $\cot a \cot x + c$ (e) $\operatorname{cosec}^2 a \operatorname{cosec} x + c$

সমাধান: $\int \sec^2 a \sec^2 x\, dx = \sec^2 a \int \sec^2 x dx = (\sec^2 a)\tan x + c$; [লক্ষ করো, $\sec^2 a$ একটি ধ্রুবক]

08. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta} d\theta = ?$ [RU'15-16] [Ans: a]

(a) $\frac{\pi}{2}-1$ (b) $\frac{\pi}{4}-1$ (c) $\frac{\pi}{3}-2$ (d) $2-\frac{\pi}{4}$

সমাধান: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = 2[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\tan\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}-1$

09. $\int \frac{\tan x}{\sqrt{2}\cot x} =$ কত? [JU'14-15] [Ans: d]

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cot x - x)+c$ (b) $(\tan x - x)+c$ (c) $(\tan x + x)+c$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\tan x - x)+c$

সমাধান: $\int \frac{\tan x}{\sqrt{2}\cot x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \tan^2 x\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int(\sec^2 x - 1)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}[\tan x - x]+c$

10. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$ এর মান কত? [RU'13-14] [Ans: b, c]

(a) $\cos 2x + c$ (b) $\cos x + \sin x + c$

(c) $-(\cos x + \sin x)+c$ (d) $\cos x - \sin x + c$

সমাধান: $\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx = \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}\, dx$

$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\, dx = \int(\sin x - \cos x)\, dx = -(\cos x + \sin x)+c$

অথবা, $\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx = \int \sqrt{\cos^2 x - 2\cos x\sin x + \sin^2 x}\, dx$

$= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\, dx = \int(\cos x - \sin x)\, dx = \cos x + \sin x + c$

∴ Option b ও c উভয়ই সঠিক।

11. $\int \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$ এর মান কত? [KU'13-14] [Ans: d]

(a) $\sqrt{2}\cos x + c$ (b) $-2\cos x + c$ (c) $2\cos x + c$ (d) $-\sqrt{2}\cos x + c$

সমাধান: $\int \sqrt{1-\cos 2x}\, dx = \int \sqrt{2}\, \sin x\, dx = -\sqrt{2}\cos x + c$

POLI MACHINE
Preparation and Practice mill for effective delivery

Type-04: $\int \frac{dx}{1\pm\sin ax}$, $\int \frac{dx}{1\pm\cos ax}$ আকারের

➲ **Formula & Concept:**

প্রদত্ত যোগজের হরের বিপরীত রাশি দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে সরলীকরণ করতে হবে।

ব্যবহৃত সূত্র: $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$; $\int \sec x \cdot \tan x\, dx = \sec x + c$

$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$; $\int \operatorname{cosec} x \cdot \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

MCQ

01. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x}$ এর মান কোনটি? [JU'23-24, 22-23] [Ans: d]

(a) $2+\sqrt{2}$ (b) $3-\sqrt{2}$ (c) $3+\sqrt{2}$ (d) $2-\sqrt{2}$

সমাধান: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin x)dx}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin x)dx}{1-\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{\cos x}\right) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - \sec x\tan x)dx = [\tan x - \sec x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \sec\frac{\pi}{4} - \tan 0 + \sec 0 = 1-\sqrt{2}-0+1 = 2-\sqrt{2}$

Scanned with CamScanner

02. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx =$ কত? [JU'18-19; CU'18-19] [Ans: b]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) -1

সমাধান: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx = \left[\tan \frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$

03. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ এর মান কোনটি? [RU'17-18]

(a) $\frac{1}{3} \sin x$ (b) $\frac{1}{2} \tan x$ (c) $\frac{1}{3} \cos x$ (d) $\frac{1}{3} \tan x$

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \sec^2 \frac{x}{2} dx = \tan \frac{x}{2} + c$

Type-05: $\int \sin^m x\, dx$ বা, $\int \cos^m x\, dx$ আকারের

Formula & Concept:

(i) m বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হলে $\sin^m x$ এর জন্য $\sin^m x$ কে $(\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} . \sin x$ আকারে প্রকাশ করতে হবে এবং $\sin^2 x$ কে $\cos^2 x$ -এ Convert করে $\cos x = z$ ধরতে হবে এবং $\cos^m x$ এর জন্য $\cos^m x$ কে $(\cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} . \cos x$ আকারে প্রকাশ করতে হবে এবং $\cos^2 x$ কে $\sin^2 x$ -এ Convert করে $\sin x = z$ ধরতে হবে।

(ii) m জোড় পূর্ণসংখ্যা হলে $2\sin^2 x / 2\cos^2 x$ আকারে পরিণত করতে হবে ও নিচের সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে।

- $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$
- $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

[এবং প্রয়োজনে, $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$; $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ সূত্রদ্বয় ব্যবহার করতে হবে]

MCQ

01. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$ এর মান কোনটি? [JU'22-23] [Ans: c]

(a) $\frac{\pi}{32}$ (b) $\frac{3\pi}{32}$ (c) $\frac{5\pi}{32}$ (d) $\frac{7\pi}{32}$

সমাধান: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \sin^6 x dx = \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^3 x)^2 dx = \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x - \sin 3x)^2 dx$

$= \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (9\sin^2 x - 6\sin x \sin 3x + \sin^2 3x) dx = \frac{1}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (18\sin^2 x - 12\sin x \sin 3x + 2\sin^2 3x) dx$

$= \frac{1}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{9(2\sin^2 x) - 6(2\sin 3x \sin x) + 2\sin^2 3x\} dx$

$= \frac{1}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{9(1 - \cos 2x) - 6(\cos 2x - \cos 4x) + 1 - \cos 6x\} dx$

$= \frac{1}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (9 - 9\cos 2x - 6\cos 2x + 6\cos 4x + 1 - \cos 6x) dx$

$= \frac{1}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10) dx$

$= \frac{1}{32} \left[-\frac{\sin 6x}{6} + 6 \times \frac{\sin 4x}{4} - 15 \times \frac{\sin 2x}{2} + 10x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{32} \left(\frac{-\sin 3\pi}{6} + \frac{3\sin 2\pi}{2} - \frac{15\sin \pi}{2} + 5\pi\right) = \frac{1}{32} \times 5\pi = \frac{5\pi}{32}$

বিকল্প: ধরি, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx$ ..... (i)

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\, dx$ ..... (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^6 x + \cos^6 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3\} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)\} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x\right) dx$

$= \left[x - \frac{3x}{8} + \frac{3\sin 4x}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{16} = \frac{5\pi}{16} \Rightarrow I = \frac{5\pi}{32} \therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x = \frac{5\pi}{32}$ (Ans.)

Shortcut: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

02. $\int \cos^3 x\,dx = ?$ [JU'18-19] [Ans: d]

(a) $\frac{1}{12}\sin 3x + c$ (b) $\frac{1}{12}\sin 3x + \sin x + c$

(c) $\frac{1}{12}\sin 3x + 9\sin x + c$ (d) $\frac{1}{12}(\sin 3x + 9\sin x) + c$

সমাধান: $\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int 4\cos^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int(\cos 3x + 3\cos x)dx$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right) + c = \frac{1}{12}(\sin 3x + 9\sin x) + c$

বিকল্প: $\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx = \int(1 - \sin^2 x)\,d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$

$= \sin x - \frac{1}{12}(4\sin^3 x) + c = \sin x - \frac{1}{12}(3\sin x - \sin 3x) + c = \frac{1}{12}(\sin 3x + 9\sin x) + c$

03. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$ সমান কত? [JnU'15-16] [Ans: c]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) 1

সমাধান: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$

$\therefore 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$

বিকল্প: $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \frac{1}{2}(0 - 0) = \frac{\pi}{4}$

Shortcut: Walli's theorem থেকে পাই, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

04. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ এর মান কত? [RU'14-15] [Ans: d]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{-2}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

সমাধান: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos^2 x) \times (-1)\,d(\cos x)$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 x)\,d(\cos x) = \left[\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^0 = 1 - \frac{1}{3} - 0 - 0 = \frac{2}{3}$

Shortcut: Walli's theorem থেকে পাই, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot dx = \frac{2}{3}$

Written

01. $\int \cos^7 x\,dx = ?$ [JU'18-19]

সমাধান: $\int \cos^6 x.\cos x\,dx = \int(\cos^2 x)^3 \cos x\,dx = \int(1 - \sin^2 x)^3 \cos x\,dx$

$= \int(1 - z^2)^3\,dz = \int(1 - 3\cdot 1^2\cdot z^2 + 3\cdot 1\cdot z^4 - z^6)dz = z - \frac{3}{3}z^3 + \frac{3}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + c$

$= \sin x - (\sin x)^3 + \frac{3}{5}(\sin x)^5 - \frac{1}{7}(\sin x)^7 + c$ (Ans.)

ধরি, $\sin x = z$
$\therefore \cos x\,dx = dz$

Type-06: $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ আকারের

Formula & Concept:

(a) m ও n উভয়ই বিজোড় হলে:

যে কোনোটি অর্থাৎ $\sin x = \cos x = z$ ধরতে হবে তবে যার power বড় সেটা z ধরলে সুবিধাজনক।

(ii) m ও n এর যে কোনোটি জোড় এবং অপরটি বিজোড় হলে:

যার power জোড় সেটা = z ধরতে হবে।

(iii) m ও n উভয়ই জোড়:

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ এবং $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ সূত্রের সাহায্যে বিজোড় ঘাতবিশিষ্ট বা ঘাতহীন ফাংশনে পরিবর্তিত করতে হবে। [এবং প্রয়োজনে, $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$; $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ সূত্রদ্বয় ব্যবহার করতে হবে]

ROLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

MCQ

01. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sqrt{\sin x}\, dx$ এর মান কত? **[JU'21-22] [Ans: a]**

(a) $\frac{8}{21}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{9}{21}$ (d) $\frac{5}{21}$

সমাধান: $\int \cos^3 x\sqrt{\sin x}\, dx = \int \sqrt{\sin x}\cdot\cos^2 x\cdot\cos x\, dx$

$= \int \sqrt{\sin x}(1-\sin^2 x)\cos x\, dx = \int \sqrt{z}(1-z^2)dz = \left[\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{z^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right]$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sqrt{\sin x}\, dx = \left[\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}(\sin x)^{\frac{7}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{21}$

ধরি, $\sin x = z$
$\therefore \cos x\, dx = dz$

02. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin\theta\, d\theta = ?$ **[CU'16-17] [Ans: b]**

(a) 0 (b) $\frac{1}{5}$ (c) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (d) $-\frac{1}{5}$ (e) $\frac{4}{5}$

সমাধান: ধরি, $\cos\theta = z \Rightarrow \sin\theta\, d\theta = -dz$

এখানে, $\int \cos^4\theta\cdot\sin\theta\, d\theta = -\int z^4\, dz = -\frac{1}{5}z^5 + c = -\frac{1}{5}\cos^5\theta + c$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\sin\theta\, d\theta = -\frac{1}{5}[\cos^5\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{5}(0-1) = \frac{1}{5}$

03. $\int_0^{\pi} \sin^4 x\cos^5 x\, dx =$ কত? **[CU'14-15] [Ans: a]**

(a) 0 (b) $\frac{22}{7}$ (c) $\frac{8}{315}$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $\int_0^{\pi} \sin^4 x\cos^5 x\, dx = \int_0^{\pi} \sin^4 x\cdot\cos^4 x\cdot\cos x\, dx = \int_0^{\pi} \sin^4 x(1-\sin^2 x)^2\cos x\, dx$

ধরি, $\sin x = z \Rightarrow \cos x\cdot dx = dz$; যখন $x = 0, z = 0$ এবং যখন $x = \pi, z = 0$

$\therefore$ আমরা পাই, $\int_0^0 z^4\ (1-z^2)^2 dz = \int_0^0 z^4(1-2z^2+z^4)dz$

$= \int_0^0 (z^4 - 2z^6 + z^8)dz = \left[\frac{z^5}{5} - \frac{2z^7}{7} + \frac{z^9}{9}\right]_0^0 = 0$

বিকল্প: ধরি, $I = \int_0^{\pi} \sin^4 x\cos^5 x\, dx \Rightarrow I = \int_0^{\pi} \sin^4(\pi-x)\cos^5(\pi-x)\, dx$

$= \int_0^{\pi} \sin^4 x(-\cos^5 x)dx = -\int_0^{\pi} \sin^4 x\cos^5 x\, dx = -I \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0 \therefore \int_0^{\pi} \sin^4 x\cos^5 x\, dx = 0$

Type-07: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ এবং $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$ আকৃতির

POLYTECHNIC ONE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

১ **Formula & Concept:**

(i) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$ (ii) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

MCQ

01. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$ **[DU'23-24] [Ans: d]**

(a) $-\sqrt{x} + c$ (b) $-\sqrt{1-x} + c$ (c) $\sqrt{1-x^2} + c$ (d) $-\sqrt{1-x^2} + c$

সমাধান: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\times 2\sqrt{1-x^2} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$

বিকল্প: $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2} + c = -\sqrt{1-x^2} + c \left[\because \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c\right]$

02. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}$ এর মান কত? **[CU'23-24] [Ans: a]**

(a) $2\sqrt{1+\tan x} + C$ (b) $\sqrt{1+\tan x} + C$ (c) $2\sqrt{1+\tan^2 x} + C$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{1+\tan x}} \left[\because \int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + c\right] = 2\sqrt{1+\tan x} + C$

বিকল্প: $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{1+\tan x}} = \int \frac{d(1+\tan x)}{\sqrt{1+\tan x}} = 2\sqrt{1+\tan x} + c; \left[\because \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c\right]$

CamScanner

[JU'23-24] [Ans: a]

03. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$ এর মান কোনটি?

(a) $\ln\frac{3}{2}$ (b) $\ln\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{2}{3}$

সমাধান: $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_2^3 \frac{dz}{z}$ [ধরি, $1 + e^x = z \therefore e^x dx = dz$]

x	0	ln 2
z	2	3

$= [\ln z]_2^3 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

বিকল্প: $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} = [\ln|1 + e^x|]_0^{\ln 2}$ $\left[\because \int \frac{dx}{x} = \ln x + c\right]$

$= \ln|1 + e^{\ln 2}| - \ln|1 + e^0| = \ln|1 + 2| - \ln|1 + 1| = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

[RU'22-23] [Ans: d]

04. $\int_1^{15} \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} dx =$ কত?

(a) 2 (b) 6 (c) 4 (d) ln 6

সমাধান: $\int_1^{15} \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} dx = \int_1^{15} \frac{x+2}{x^2+4x+3} dx = \frac{1}{2}\int_1^{15} \frac{2x+4}{x^2+4x+3} dx$

$= \frac{1}{2}[\ln|x^2 + 4x + 3|]_1^{15} = \frac{1}{2}[\ln|15^2 + 4 \times 15 + 3| - \ln|1^2 + 4 \cdot 1 + 3|] = \frac{1}{2}[\ln 288 - \ln 8]$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{288}{8} = \ln 36^{\frac{1}{2}} = \ln 6$

[RU'22-23] [Ans: a]

05. $\int \frac{\sin x}{3+4\cos x} dx =$ কত?

(a) $-\frac{1}{4}\ln(3 + 4\cos x) + c$ (b) 0

(c) $-\frac{3}{4}\ln(3 + 4\cos x) + c$ (d) $-\frac{1}{4}\ln\sin x + c$

সমাধান: $\int \frac{\sin x}{3+4\cos x} dx = -\frac{1}{4}\int \frac{-4\sin x}{3+4\cos x} dx = -\frac{1}{4}\ln|3 + 4\cos x| + c$; $\left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c\right]$

[JU'21-22] [Ans: c]

06. $\int_2^3 \frac{2x}{1+x^2} dx$ এর মান কত?

(a) 1 (b) 5 (c) ln 2 (d) 2

সমাধান: $\int_2^3 \frac{2x}{1+x^2} dx\ [\ln|1 + x^2|]_2^3 = \ln 10 - \ln 5 = \ln\frac{10}{5} = \ln 2$

[JU'21-22] [Ans: b]

07. $\int \frac{e^x+xe^x}{xe^x} dx$ এর মান কত?

(a) $\ln|e^x(1 + x)| + c$ (b) $\ln|xe^x| + c$ (c) $e^x(1 + x) + c$ (d) $xe^x + c$

সমাধান: ধরি, $f(x) = x\,e^x \therefore f'(x) = xe^x + e^x \cdot 1 = e^x + xe^x$

$\int \frac{e^x+xe^x}{xe^x} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c = \ln|xe^x| + c$

[CU'18-19] [Ans: b]

08. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan x}$ এর মান কত?

(a) $\sec x$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) 90° (d) $\frac{\pi}{2}$

সমাধান: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x+\cos x)+(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x} dx$

$= \frac{1}{2}[x + \ln|\sin x + \cos x|]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right] = \frac{\pi}{4}$

Type-08: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx$ আকারের; যেখানে a, b, c যেকোনো ধ্রুবক

➲ **Formula & Concept:**

$ax^2 + bx + c$ কে দুটি বর্গের সমষ্টি বা অন্তররূপে প্রকাশ করতে হবে

এবং এরপর $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$, $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$, $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$, $\int \sqrt{a^2 - x^2}$, $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$ সূত্রের সাহায্যে বাকিটুকু করতে হবে। যেখানে,

01. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$; [ধরি, $x = a\tan\theta$]

02. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

03. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

04. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$; [ধরি, $x = a\sin\theta$]

05. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|\sqrt{x^2+a^2}+x\right| + c$; [ধরি, $x = a\tan\theta$]

06. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\sqrt{x^2-a^2}+x\right| + c$; [ধরি, $x = a\sec\theta$]

07. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$; [ধরি, $x = a\tan\theta$]

08. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

09. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$; [ধরি, $x = a\sec\theta$]

MCQ

01. $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}dx$ এর মান কোনটি? [RU'23-24] [Ans: b]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{8}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

সমাধান: $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1} = \int_0^1 \frac{x}{(x^2)^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{z^2+1}$; [ধরি, $x^2 = z; 2xdx = dz; xdx = \frac{dz}{2}$]

$= \frac{1}{2}[\tan^{-1}(z)]_0^1 = \frac{1}{2}[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)] = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

x	0	1
z	0	1

বিকল্প: $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}[\tan^{-1}(x^2)]_0^1$; $\left[\because \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c\right] = \frac{1}{2}[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)] = \frac{\pi}{8}$

02. $\int_2^5 \frac{dx}{x^2-4x+13}$ এর মান কোনটি? [JU'22-23] [Ans: c]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{12}$ (d) $\frac{\pi}{24}$

সমাধান: $\int_2^5 \frac{dx}{x^2-4x+13} = \int_2^5 \frac{dx}{x^2-2x.2+2^2-4+13} = \int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^2+9} = \int_2^5 \frac{dx}{3^2+(x-2)^2} = \left[\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{3}\right)\right]_2^5$

$= \frac{1}{3}\left[\tan^{-1}\frac{x-2}{3}\right]_2^5 = \frac{1}{3}\left(\tan^{-1}\frac{5-2}{3} - \tan^{-1}\frac{2-2}{3}\right) = \frac{1}{3}(\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{12}$

03. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx =$ কত? [CU'21-22] [Ans: d]

(a) $\frac{1}{x}\cos^{-1}x^2 + C$ (b) $\frac{1}{4}\sin^{-1}x^2 + C$ (c) $-\frac{1}{2}\cos^{-1}x^2 + C$ (d) $\frac{1}{2}\sin^{-1}x^2 + C$

সমাধান: $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x^2) + c$

04. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ এর মান হবে- [Agri.'20-21; RU'19-20, 17-18, 11-12; JU'14-15, 11-12, 10-11; DU'08-09; KU'04-05]

(a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{5\pi}{2}$

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}}$

$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = [\sin^{-1}(x-1)]_0^1 = \sin^{-1}0 - \sin^{-1}(-1) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

05. যদি $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx = \frac{1}{3}\sin ax + c$ হয়, তাহলে 'a' এর মান কত? [RU'20-21] [Ans: c]

(a) 2 (b) 4 (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{2}{3}$

সমাধান: $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-x^2}} = \frac{1}{3}.\sin^{-1}\left(\frac{x}{\frac{2}{3}}\right) + c \therefore a = \frac{3}{2}$

06. যদি $x > a > 0$ হয়, তবে $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ এর মান কত? [BAU'18-19] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{2a}\ln\frac{x+a}{x-a}$ (b) $\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$ (c) $\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}$ (d) $\frac{1}{2a}\ln\frac{a-x}{a+x}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

07. $\int f(x)dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} + c$ হলে, $f(x)$ এর মান কত? [BAU'18-19] [Ans: d]

(a) $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (c) $\frac{1}{a^2-x^2}$ (d) $\frac{1}{a^2+x^2}$

08. $\int \frac{dx}{2+x^2} = ?$ [CU'16-17] [Ans: d]

(a) $\tan^{-1}\frac{x}{2} + k$ (b) $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + k$ (c) $\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + k$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + k$ (e) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + k$

Type-09: $\int \frac{ex+f}{ax^2+bx+c}dx$ আকারের; $[a \neq 0, e \neq 0]$ যেখানে, a, b, c, e, f যেকোনো ধ্রুবক

➲ **Formula & Concept:**

$\int \frac{ex+f}{ax^2+bx+c}dx$ আকারে integration দেওয়া থাকলে $ex + f = m\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) + n$ আকারে লিখতে হবে। এরপর দুই পাশের সহগ সমীকৃত করে m, n এর মান নির্ণয় করতে হবে।

Note: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$; $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

MCQ

01. $\int_2^3 \frac{x}{x^2+1}dx$ এর মান কত? [JU'15-16] [Ans: a]

(a) $\frac{1}{2}\ln 2$ (b) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ (c) $\ln 2$ (d) $2\ln 2$

সমাধান: $\int_2^3 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}[\ln|x^2+1|]_2^3 = \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{10}{5}\right) = \frac{1}{2}\ln 2$

Type-10: $\int \frac{dx}{a+be^{mx}}$, $\int \frac{dx}{a+be^{-mx}}$, $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$ আকারের

➲ **Formula & Concept:**

আকৃতি	লব ও হরকে যা দিয়ে গুণ করতে হবে	ধরি,
$\int \frac{dx}{a+be^{mx}}$	e^{-mx}	$e^{-mx} = z$
$\int \frac{dx}{a+be^{-mx}}$	e^{mx}	$e^{mx} = z$
$\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$	e^{mx} (অথবা, e^{-mx})	$e^{mx} = z$; [যদি e^{mx} দিয়ে গুণ কর] $e^{-mx} = z$; [যদি e^{-mx} দিয়ে গুণ কর]

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

MCQ

01. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ = কোনটি? [DU'22-23, 09-10; KU'19-20, 16-17, 14-15; JU'17-18, 10-11; RU'09-10] [Ans: d]

(a) $\sin^{-1}(e^x)$ (b) $\frac{1}{1+e^x}$ (c) $\cos^{-1}(e^{-x})$ (d) $\tan^{-1}(e^x)$

সমাধান: $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{dz}{z^2+1}$; [ধরি, $z = e^x \Rightarrow dz = e^x dx$]

$= \tan^{-1} z + c = \tan^{-1}(e^x) + c$

02. $\int \frac{dx}{(e^x+e^{-x})^2} = ?$ [DU'19-20] [Ans: b]

(a) $\frac{1}{2(e^{2x}+1)} + c$ (b) $\frac{-1}{2(e^{2x}+1)} + c$ (c) $\frac{1}{2e^{2x}} + c$ (d) $\frac{-1}{2e^{2x}} + c$

সমাধান: $\int \frac{dx}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}dx}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} + c = \frac{-1}{2(e^{2x}+1)} + c$; [ধরি, $e^{2x} + 1 = z \Rightarrow 2e^{2x}dx = dz$]

CamScanner

Type-11: $\int \frac{dx}{a+b\sin^2 x}$, $\int \frac{dx}{a+b\cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}$ আকারের

Formula & Concept:

লব ও হরকে $\sec^2 x$ দ্বারা গুণ করে হরকে $\tan x$ এর ফাংশন আকারে প্রকাশ করতে হবে এবং $\tan x = z$ ধরতে হবে।

MCQ

01. $\int \frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta}$ এর মান কোনটি? [RU'22-23; KU'18-19] [Ans: a]

(a) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{2}\right)+c$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{2}\right)+c$

(c) $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{2}\right)+c$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{2}\right)+c$

সমাধান: $\int \frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta} = \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^2\theta+3} = \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan^2\theta+4} = \int \frac{d(\tan\theta)}{\tan^2\theta+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{2}\right)+c$

Type-12: Integration by Parts (অংশক্রমে সমাকলন) সংক্রান্ত

Formula & Concept:

সূত্র $\int uv\,dx = u\int v dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(u)\int v dx\right\}dx$

উপরের সূত্রটিতে কোনটি u এবং কোনটি v হবে তা নির্ধারণ করতে নিম্নোক্ত পদ্ধতি অবলম্বন করতে পারো। u এবং v এর মাঝে LIATE অনুযায়ী যা প্রথমে আছে তাকে u ধরতে হবে।

L I A T E

- Logarithmic Function ($\log_a x$, $\ln x$ etc.)
- Inverse Trigonometric Function ($\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ etc.)
- Arithmetic/Algebraic Function (x^2, x^3 etc.)
- Trigonometric Function ($\sin x$, $\tan x$ etc.)
- Exponential Function (e^x, a^x etc.)

Shortcut: $\int e^{ax}x^n dx = e^{ax}\left[\frac{x^n}{a} - \frac{nx^{n-1}}{a^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3} \cdots\cdots \text{যতক্ষণ পর্যন্ত না constant আসে।}\right]+c$

Formula-01: $\int x^n \cos ax\,dx = x^n\frac{\sin ax}{a} - nx^{n-1}\left(-\frac{\cos ax}{a^2}\right) + n(n-1)x^{n-2}\left(-\frac{\sin ax}{a^3}\right) - \cdots + c$

Formula-02: $\int x^n \sin ax\,dx = x^n\left(-\frac{\cos ax}{a}\right) - nx^{n-1}\left(-\frac{\sin ax}{a^2}\right) + n(n-1)x^{n-2}\left(\frac{\cos ax}{a^3}\right) - \cdots + c$

[**Note:** x^n × ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের যোগজ + প্রতিবারে চিহ্ন পরিবর্তনসহ পূর্ববর্তী বীজগাণিতিক ফাংশনের অন্তরজ (ধ্রুবক না আসা পর্যন্ত) × পূর্ববর্তী ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের যোগজ + c]

MCQ

01. $\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx$ এর মান কোনটি? [JU'22-23] [Ans: c]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) 1

সমাধান: $\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx = \left[\ln x\int x\,dx - \int\left\{\frac{d(\ln x)}{dx}\int x\,dx\right\}dx\right]_1^{\sqrt{e}} = \left[\ln x\times\frac{x^2}{2} - \int\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}dx\right]_1^{\sqrt{e}}$

$= \left[\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x dx\right]_1^{\sqrt{e}} = \left[\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} = \left[\frac{2x^2\ln x - x^2}{4}\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{2(\sqrt{e})^2\ln\sqrt{e} - (\sqrt{e})^2 - 2\times1^2\ln 1 + 1^2}{4}$

$= \frac{2e\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - e - 2\ln 1 + 1}{4} = \frac{2e\times\frac{1}{2}\ln e - e - 2\times0 + 1}{4} = \frac{e.1 - e - 0 + 1}{4} = \frac{1}{4}$

02. $\int(\ln x)^2 dx =$ কত? [RU'22-23] [Ans: d]

(a) $x(\ln x)^2 + 2x\ln x + 2x + c$ (b) $x(\ln x)^2 + 2x\ln x - 2x + c$

(c) $x(\ln x)^2 - 2x\ln x - 2x + c$ (d) $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

সমাধান: $\int (\ln x)^2 dx = (\ln x)^2 \int dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\ln x)^2 \cdot \int dx\right] dx = x(\ln x)^2 - \int \left(2\ln x \cdot \frac{1}{x} \times x\right) dx$

$= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x \, dx = x(\ln x)^2 - 2[x\ln x - x] + c \; ; [\because \int \ln x \, dx = x\ln x - x]$

$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$

03. $\int_{\sqrt{e}}^{1} x \ln \frac{1}{x^2} dx$ এর মান কত? **[RU'21-22] [Ans: c]**

(a) $e + 1$ (b) $\frac{1}{e}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $e + \frac{1}{2}$

সমাধান: $\int_{\sqrt{e}}^{1} x \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_{\sqrt{e}}^{1} x \ln(x^{-2}) dx = -2\int_{\sqrt{e}}^{1} x \ln x \, dx = -2\left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx\right]_{\sqrt{e}}^{1}$

$= -2\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_{\sqrt{e}}^{1} = -2\left[\left(0 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{e}{2}\ln\sqrt{e} - \frac{e}{4}\right)\right] = -2\left[\left(-\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{e}{4} - \frac{e}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}$

04. $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x} dx =$ কত? **[RU'17-18] [Ans: d]**

(a) 0 (b) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (c) 1 (d) 2

সমাধান: ধরি, $u = \sqrt{x} \;\; \therefore du = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx \therefore dx = 2u \cdot du$

x	0	$\frac{\pi^2}{4}$
u	0	$\frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2u \sin(u) \cdot du = [2(\sin u - u\cos u)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$

05. $\int x \ln x \, dx =$ কত? **[JU'17-18] [Ans: c]**

(a) $\frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{2}x^2 + c$ (b) $\frac{1}{2}x^2 \ln(x) + \frac{1}{2}x^2 + c$

(c) $\frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c$ (d) $\frac{1}{2}x^2 \ln(x) + \frac{1}{4}x^2 + c$

সমাধান: $\int x \ln x = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{d}{dx}(\ln x) \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c$

06. $\int_0^1 xe^x dx$ এর মান কত? **[JU'16-17]**

(a) $(e + 1)$ (b) $(e - 1)$ (c) $\frac{1}{2}(e + 1)$ (d) $\frac{1}{2}(e - 1)$

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $\int_0^1 xe^x dx = \left[x\int e^x dx - \int \left(\frac{d}{dx}(x)\int e^x\right) dx\right]_0^1 = [e^x \cdot x - e^x \cdot 1]_0^1 = (e - e - 0 + 1) = 1$

07. $\int \log x \, dx$ সমান কত? **[JnU'15-16; RU'10-11,08-09,07-08; JU'09-10; CU'06-07; KU'06-07] [Ans: a]**

(a) $x\log x - x$ (b) x (c) $\frac{1}{x}$ (d) $x\log x + x$

সমাধান: $\int \log x \, dx = \log x \int dx - \int \left[\frac{d(\log x)}{dx}\int dx\right] dx = x\log x - x$

08. $\int \sin^{-1} x dx$ সমান- **[JnU'14-15] [Ans: b]**

(a) $\sin^{-1} x + \sqrt{(1 - x^2) + c}$ (b) $x\sin^{-1} x + \sqrt{(1 - x^2)} + c$

(c) $\sin^{-1} x + c$ (d) $\sin^{-1} x + \sqrt{(1 - x) + c}$

সমাধান: $\int \sin^{-1} x \, dx = \sin^{-1} x \int dx - \int \{\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)\int dx\} dx$

$= x\sin^{-1} x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sin^{-1} x + \frac{1}{2} 2\sqrt{1 - x^2} + c = x\sin^{-1} x + \sqrt{(1 - x^2)} + c$

09. ধনাত্মক x এর জন্য $F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$ হলে $F'(x) = ?$ **[DU'13-14] [Ans: b]**

(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\ln x$ (c) $x \ln x$ (d) $x \ln x - x$

সমাধান: $\int_1^x \ln t \, dt = \left[\ln t \int dt - \int \left\{\frac{d}{dt}(\ln t)\int dt\right\} dt\right]_1^x = [t\ln t - t]_1^x = x\ln x - x - 1 \cdot \ln 1 + 1$

$= x\ln x - x + 1 \;\therefore F'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x - 1 = \ln x$

Shortcut: $\frac{d}{dt}\left[\int_1^x \ln t \, dt\right] = \ln x \frac{d}{dx}(x) - \ln 1 \frac{d}{dx}(1) = \ln x \therefore F'(x) = \ln x$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Scanned with CamScanner

Type-13: $\int e^{ax}\{a f(x) + f'(x)\}dx$ সংক্রান্ত

Formula & Concept:

- $\int e^{ax}[a f(x) + f'(x)]dx = e^{ax} f(x) + c$
- $\int e^{x}[f(x) + f'(x)]dx = e^{x} f(x) + c$

MCQ

01. $\int e^x(\cos x + \sin x)dx =$ কত? **[RU'23-24, 22-23] [Ans: c]**

(a) $e^x \cos x + c$ (b) $-e^x \cos x + c$ (c) $e^x \sin x + c$ (d) $-e^x \sin x + c$

সমাধান: $\int e^x(\cos x + \sin x)dx = \int e^x\left(\sin x + \frac{d}{dx}(\sin x)\right)dx = e^x \sin x + c$

02. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx =$ কত? **[RU'21-22] [Ans: d]**

(a) $\frac{e^x}{(1+x)^2} + c$ (b) $-\frac{e^x}{1+x} + c$ (c) $\frac{e^x}{1-x} + c$ (d) $\frac{e^x}{1+x} + c$

সমাধান: $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \int \frac{e^x\{(1+x)-1\}}{(1+x)^2}dx = \int e^x\left\{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right\}dx$

ধরি, $f(x) = \frac{1}{1+x} \therefore f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = \int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + c = \frac{e^x}{1+x} + c$

03. $\int e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)dx =$ কত? **[RU'21-22] [Ans: b]**

(a) $-e^x \ln x + c$ (b) $e^x \ln x + c$ (c) $e^x \frac{1}{x} + c$ (d) $\ln x + c$

সমাধান: $\int e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)dx = e^x \ln x + c$; [যেখানে, $f(x) = \ln x \therefore f'(x) = \frac{1}{x}$]

04. $\int e^x(\sec x + \sec x \tan x)\,dx$ এর মান কত? **[JU'21-22] [Ans: a]**

(a) $e^x \sec x + c$ (b) $e^x \tan x + c$ (c) $e^x \sec x \tan x + c$ (d) $\sec x + c$

সমাধান: $\int e^x(\sec x + \sec x \tan x)\,dx = e^x \sec x + c$ $\left[\int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x \cdot f(x) + c\right]$

05. $\frac{dy}{dx} = e^x(\sin x - \cos x)$ হলে, y এর মান কোনটি? **[CU'21-22] [Ans: a]**

(a) $-e^x \cos x$ (b) $-e^x \sin x$ (c) $e^x \sec x$ (d) $e^x(\sin x + \cos x)$

সমাধান: $\int dy = \int e^x(\sin x - \cos x)dx = -\int e^x(\cos x - \sin x)dx \Rightarrow y = -e^x \cos x + c$

06. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x}[(1+x)\ln(1+x) + 1]dx$ এর মান কত? **[SUST'19-20] [Ans: e]**

(a) 1 (b) 0 (c) e (d) $\ln 2$ (e) $e \ln 2$

সমাধান: $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x}[(1+x)\ln(1+x) + 1]dx = \int_0^1 e^x\left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right]dx$

$= [e^x \ln(1+x)]_0^1 = e \ln 2 - 0 = e \ln 2$ $[\because \int e^x\{f'(x) + f(x)\} = e^x f(x) + c]$

07. $\int e^x[f(x) + f'(x)]dx$ এর মান কত? **[KU'18-19] [Ans: b]**

(a) $e^x f'(x)$ (b) $e^x f(x)$ (c) $xe^x f(x)$ (d) $f'(x)$

08. $\int e^x\left\{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(x-1)^2}\right\}dx = ?$ **[RU'15-16] [Ans: a]**

(a) $\frac{e^x}{1-x}$ (b) $\frac{x}{1-e^x}$ (c) $\frac{e^x}{x-1}$ (d) $\frac{e^x}{(x-1)^2}$

সমাধান: $\int e^x\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$; ধরি, $f(x) = \frac{1}{1-x} \therefore f'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(x-1)^2}$

$\therefore \int e^x\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = \frac{e^x}{1-x}$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-14: নির্দিষ্ট যোগজের সাধারণ সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

এই type এর সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে আগে অনির্দিষ্ট যোগজের মত integration করতে হবে। এরপর লিমিট বসিয়ে Answer বের করতে হবে।

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$; যেখানে, $F(x) + c$ হলো $f(x)$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ। এবং নির্দিষ্ট যোগজে c পদটি অনুপস্থিত থাকবে।

MCQ

01. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{9-2x^2}}dx$ এর মান কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: d]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\ln 2$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) 1

সমাধান: $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{9-2x^2}} = -\frac{1}{4}\int_0^2 \frac{-4x\,dx}{\sqrt{9-2x^2}} = -\frac{1}{4}\int_3^1 \frac{2zdz}{\sqrt{z^2}} = \frac{1}{2}\int_1^3 dz = \frac{1}{2}[z]_1^3$

$= \frac{1}{2}[3-1] = 1$

ধরি, $9 - 2x^2 = z^2$

$-4x\,dx = 2z\,dz$

x	0	2
z	3	1

02. $\int_1^2 \log_e x\,dx = ?$ **[GST'23-24] [Ans: d]**

(a) $\log_e 2$ (b) $\log_e 2 - 1$ (c) $2\log_e 2$ (d) $2\log_e 2 - 1$

সমাধান: $\int_1^2 \log_e x\,dx = [x\log_e x - x]_1^2 = (2\log_e 2 - 2) - (1\cdot\log_e 1 - 1) = 2\log_e 2 - 1$

03. $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx =$ কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: d]**

(a) e^2 (b) $\frac{1}{2}\ln 2$ (c) e (d) $\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

সমাধান: $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)}dx$; [ধরি, $\ln(x+1) = z; \frac{1}{(x+1)}dx = dz$]

$\therefore \int_0^{\ln 2} z\,dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}[(\ln 2)^2 - 0^2] = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

x	0	1
z	0	ln 2

বিকল্প: $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \int_0^1 \ln(x+1)\,d(\ln(x+1)) = \left[\frac{\{\ln(x+1)\}^{1+1}}{1+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

04. $\int_1^2 x\ln x dx$ কোনটি? **[RU'23-24] [Ans: c]**

(a) $2\ln 2 + c$ (b) $2\ln 2 - \frac{1}{4}$ (c) $2\ln 2 - \frac{3}{4}$ (d) 1

সমাধান: $\int x\ln x\,dx = \ln x\int x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int x\,dx\right\}dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int\left(\frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2$

$\therefore \int_1^2 x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = \left(\frac{4}{2}\ln 2 - \frac{4}{4}\right) - \left\{\frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{4}\right\} = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$

05. $\int_0^3 4x^3dx$ এর মান কত? **[Agri.'21-22] [Ans: b]**

(a) 27 (b) 81 (c) 108 (d) 162

সমাধান: $\int_0^3 4x^3dx = [x^4]_0^3 = 3^4 - 0^4 = 81$

06. $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ এর মান কত? **[Agri.'21-22] [Ans: d]**

(a) $\frac{1}{e} - 1$ (b) $-\frac{1}{e} - 1$ (c) $-\frac{1}{e}$ (d) $-\frac{1}{e} + 1$

সমাধান: $\int_0^1 e^{-x}\,dx = -[e^{-x}]_0^1 = -\left(\frac{1}{e} - 1\right) = -\frac{1}{e} + 1$

FULL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

07. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx = ?$ [GST'21-22] [Ans: b]

(a) $-\ln\left(\frac{4}{e}\right)$ (b) $\ln\left(\frac{4}{e}\right)$ (c) $-\ln(4e)$ (d) $\ln 4e$

সমাধান: $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx = \int_0^1 -\frac{(1+x)-2}{1+x}dx = \int_0^1 \left(-1+\frac{2}{1+x}\right)dx$

$= [-x + 2\ln|1+x|]_0^1 = -1 + 2\ln 2 = -\ln e + \ln 2^2 = \ln 4 - \ln e = \ln\left(\frac{4}{e}\right)$

08. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = ?$ [RU'21-22] [Ans: a]

(a) $\frac{8}{3}$ (b) $\frac{15}{8}$ (c) $\frac{13}{3}$ (d) $\frac{15}{3}$

সমাধান: $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int_0^3 \frac{(x+1)-1}{\sqrt{x+1}}dx = \int_0^3 \left\{\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right\}dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3$

$= \left\{\frac{2}{3}(3+1)^{\frac{3}{2}} - 2(3+1)^{\frac{1}{2}}\right\} - \left\{\frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}} - 2(0+1)^{\frac{1}{2}}\right\}$

$= \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 2 = \frac{16-12-2+6}{3} = \frac{8}{3}$

Type-15: যুগ্ম ও অযুগ্ম ফাংশনের ক্ষেত্রে

Formula & Concept:

- যদি কোনো ফাংশনের ক্ষেত্রে $f(-x) = f(x)$ হয় তবে তাকে যুগ্ম ফাংশন বলে। আবার যদি কোন ফাংশনের ক্ষেত্রে $f(-x) = -f(x)$ হয় তবে তাকে অযুগ্ম ফাংশন বলে। যেমন $x^2, \cos x, x\sin x$ যুগ্ম ফাংশন এবং $x^3, \sin x, x\cos x$ অযুগ্ম ফাংশন।
- $f(x)$ যুগ্ম ফাংশন হলে, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$
- $f(x)$ অযুগ্ম ফাংশন হলে, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ যেমন, $\int_{-a}^{a} x\cdot\cos x\,dx = 0$

MCQ

01. যদি $f(x) = -f(-x)$ হয়, তবে $\int_{-a}^{a} f(x)dx =$ কত? [RU'17-18] [Ans: b]

(a) 1 (b) 0 (c) a (d) 2a

সমাধান: কারণ এটি একটি অযুগ্ম ফাংশন। $\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-16: $\int_a^b f(x)dx$ এর মান দেওয়া থাকলে $\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(cx+d)dx$ এর মান নির্ণয়

Formula & Concept:

মনে করি, $\int_a^b f(x)dx = I$ দেওয়া আছে এবং $\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(cx+d)\,dx$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

এখানে, $\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(cx+d)dx = \int_a^b f(z)\frac{dz}{c} = \frac{1}{c}\int_a^b f(z)\,dz$

$= \frac{1}{c}\int_a^b f(x)\,dx \left[\because \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz\right]$

$= \frac{1}{c}I = \frac{I}{c}$ এই পদ্ধতি ব্যবহার করে সমস্যাগুলোকে সমাধান করতে হবে।

ধরি, $cx + d = z$
$\Rightarrow c\,dx = dz$
$\therefore dx = \frac{dz}{c}$

x	$\frac{a-d}{c}$	$\frac{b-d}{c}$
z	a	b

Shortcut: উত্তর হবে $\frac{I}{x \text{ এর সহগ}}$

CamScanner

MCQ

01. যদি $\int_0^4 f(x)dx = 5$ হয়, তবে $\int_1^5 f(x-1)dx$ এর মান কত? **[RU'22-23] [Ans: d]**

(a) 0 (b) 4 (c) 5 (d) 6

সমাধান: আমরা জানি, $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$

$\therefore \int_0^4 f(x)\,dx = \int_{0+1}^{4+1} f(x-1)\,dx = \int_1^5 f(x-1)dx = 5$

Shortcut: $I = \int_0^4 f(x)\,dx = 5 \therefore \int_1^5 f(x-1)\,dx = \frac{I}{x \text{ এর সহগ}} = \frac{5}{1} = 5$

02. $\int_0^4 f(x)dx = 6$ হলে $\int_1^5 f(x+1)dx$ এর মান কত? **[RU'22-23; BAU'18-19] [Ans: d]**

(a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) 6

সমাধান: ধরি, $x+1=t \Rightarrow t-1=x$ $\therefore t=5$ হলে $x=4$; $t=1$ হলে $x=0$;

$\therefore \int_1^5 f(x+1)\,dx = \int_1^5 f(x+1)\,d(x+1) = \int_1^5 f(t)dt = \int_0^4 f(x)dx = 6$

Shortcut: $\frac{I}{x \text{ এর সহগ}} = \frac{6}{1} = 6$

03. $\int_0^2 f(x)dx = 2$ হলে, $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\,dx =$ কত? **[GST'21-22] [Ans: c]**

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 4

সমাধান: $\because \int_0^2 f(x)dx = 2 \therefore \int_0^2 f(z)dz = 2$ ..... (i)

এখন, $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)dx$

$= -\frac{1}{2}\int_2^0 f(z)dz = \frac{1}{2}\int_0^2 f(z)dz = \frac{1}{2}\times 2 = 1$

ধরি, $1-2x=z$
$\Rightarrow -2dx = dz$
$\therefore dx = -\frac{1}{2}dz$

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	2	0

Shortcut: $I = \int_0^2 f(x)\,dx = 2 \therefore \frac{I}{x \text{ এর সহগ}} = \frac{2}{2} = 1$

04. যদি $\int_0^6 f(t)dt = 8$ হয়, তবে $\int_0^3 f(2x)dx$ এর মান- **[DU'17-18] [Ans: d]**

(a) 0 (b) 6 (c) 10 (d) 4

সমাধান: $\int_0^6 f(t)dt = 8 \therefore \int_0^3 f(2x)dx = \int_{0\times 2}^{2\times 3} \frac{f(2x)d(2x)}{2} = \frac{1}{2}\int_0^6 f(2x)d(2x)) = \frac{1}{2}\times 8 = 4$

Shortcut: $\frac{I}{x \text{ এর সহগ}} = \frac{8}{2} = 4$

05. যদি $\int_1^4 f(x)dx = 5$ হয়, তবে $\int_0^1 f(3x+1)dx$ এর মান- **[DU'16-17] [Ans: c]**

(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) 5

সমাধান: ধরি, $z = 3x+1 \Rightarrow dz = 3dx$; যখন $x=0, z=1$

এবং $x=1,\ z=4$

$\therefore \int_0^1 f(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int_1^4 f(z)dz = \frac{5}{3}$; $\left[\text{Shortcut: } \frac{I}{x \text{ এর সহগ}}\right]$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

Type-17: কয়েকটি পরমমান ফাংশনের সমাকলন

➲ **Formula & Concept:**

পরমমানের সংজ্ঞানুসারে, $|x| = \begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$

$\int_a^b |x|\,dx$ বের করার ক্ষেত্রে যদি $a < 0 < b$ হয় তাহলে, $\int_a^b |x|dx = \int_a^0 |x|dx + \int_0^b |x|\,dx$ আকারে ভেঙ্গে নিতে হবে।

[অর্থাৎ, x এর যেসব মানের জন্য পরমমান ফাংশনের মান 0 আসে সেসব মানে গিয়ে যোগজীকরণকে আলাদা করে দিতে হবে]

CamScanner

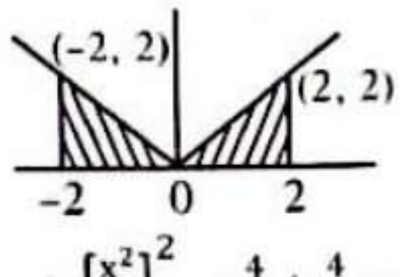
MCQ

01. $\int_{-2}^{2}|x|\,dx$ =? [RU'23-24] [Ans: b]

(a) 2 (b) 4 (c) 1 (d) 0

সমাধান: $\int_{-2}^{2}|x|\,dx$; $\frac{1}{2}\times 2\times 2 = 2$ বর্গ একক

∴ মোট ক্ষেত্রফল $2\times 2 = 4$ বর্গ একক



বিকল্প: $\int_{-2}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{2}x\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = \frac{4}{2}+\frac{4}{2} = 2+2 = 4$

Shortcut: $\int_{-2}^{2}|x|\,dx = \left[\frac{x|x|}{2}\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{2|2|}{2} - \frac{-2|-2|}{2}\right] = 2+2 = 4$

02. $\int_{-1}^{1}|x+1|\,dx$ এর মান কোনটি হবে? [CU'22-23] [Ans: d]

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

সমাধান: $|x+1| = \begin{cases} +(x+1), & \text{যখন } x+1 \geq 0 \text{ অর্থাৎ } x \geq -1 \\ -(x+1), & \text{যখন } x+1 < 0 \text{ অর্থাৎ } x < -1 \end{cases}$

$[-1,1]$ ব্যবধিতে সর্বদাই $x \geq -1$ ∴ $[-1,1]$ ব্যবধিতে $|x+1| = +(x+1)$

∴ $\int_{-1}^{1}|x+1|\,dx = \int_{-1}^{1}(x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}+1-\frac{(-1)^2}{2}-(-1) = \frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+1 = 2$

03. $\int_{-2}^{-1}(x+|x|)dx$ =? [DU'21-22] [Ans: b]

(a) 3 (b) 0 (c) 1 (d) 6

সমাধান: $\int_{-2}^{-1}\{x+|x|\}\,dx = \int_{-2}^{-1}x\,dx + \int_{-2}^{-1}|x|\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \int_{-2}^{-1}-x\,dx$ ($[-2,-1]$ ব্যবধিতে x সর্বদা ঋণাত্মক ∴ $|x| = -x$)

$= \left[\frac{1}{2}-\frac{4}{2}\right] - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2}-\frac{4}{2}-\frac{1}{2}+\frac{4}{2} = 0$

04. $\int_{0}^{2}|x-1|\,dx$ =? [DU'20-21] [Ans: b]

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: $\int_{0}^{2}|x-1|\,dx$ ($[0,1]$ ব্যবধিতে $|x-1| = -(x-1)$ এবং $[1,2]$ ব্যবধিতে $|x-1| = +(x-1)$)

$= \int_{0}^{1}-(x-1)\,dx + \int_{1}^{2}(x-1)dx = -\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{0}^{1} + \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{1}^{2} = -\left[\frac{1}{2}-1-0\right] + \left[\left(\frac{4}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$

$= -\left[\frac{1}{2}-1\right] + \left[0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

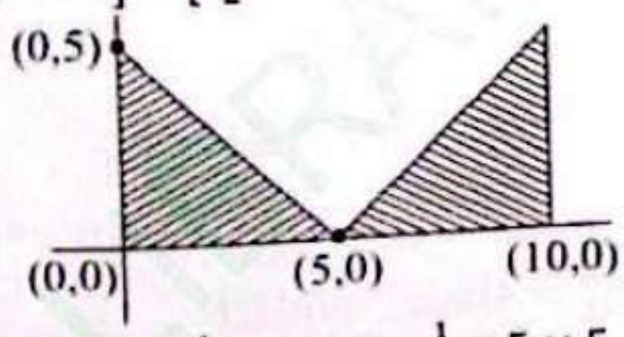
05. $\int_{0}^{10}|x-5|dx$ =? [DU'15-16] [Ans: b]

(a) $\frac{25}{2}$ (b) 25 (c) 50 (d) 5

সমাধান: $\int_{0}^{10}|x-5|\,dx = -\int_{0}^{5}(x-5)\,dx + \int_{5}^{10}(x-5)\,dx = -\left[\frac{x^2}{2}-5x\right]_{0}^{5} + \left[\frac{x^2}{2}-5x\right]_{5}^{10}$

$= -\left[\frac{25}{2}-25\right] + \left[\frac{100}{2}-5\times 10-\frac{25}{2}+5\times 5\right] = \frac{25}{2}+\left[50-50-\frac{25}{2}+25\right] = 25$

বিকল্প:



$\int_{0}^{10}|x-5|\,dx = \frac{1}{2}\times 5\times 5+\frac{1}{2}\times 5\times 5 = 25$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective deliver

Scanned with CamScanner

Type-18: নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

দুইটি বক্ররেখা ও দুইটি y অক্ষের সমান্তরাল রেখা দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ; [x অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষেত্রফল] নির্ণয়:

$y_1 = f_1(x)$ এবং $y_2 = f_2(x)$ দুইটি ফাংশন এবং $x = a$ এবং $x = b$ দুইটি সরলরেখা (y অক্ষের সমান্তরাল)।

তাহলে, $x = a$ থেকে $x = b$ পর্যন্ত $y_1 = f_1(x)$ এবং $y_2 = f_2(x)$ এর মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল (ABCD অংশের ক্ষেত্রফল),

$A = \int_a^b (y_1 - y_2)dx \therefore \boxed{A = \int_a^b (y_u - y_l)dx} \because y_1 = y_u;\ y_2 = y_l$ [u = upper, l = lower]

দুইটি বক্ররেখা ও দুইটি x অক্ষের সমান্তরাল রেখা দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ; [y অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষেত্রফল] নির্ণয়:

$x_1 = f_1(y)$ এবং $x_2 = f_2(y)$ দুইটি ফাংশন এবং $y = a$ এবং $y = b$ দুইটি সরলরেখা (x অক্ষের সমান্তরাল)।

তাহলে, $y = a$ থেকে $y = b$ পর্যন্ত $x_1 = f_1(y)$ এবং $x_2 = f_2(y)$ এর মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল (ABCD অংশের ক্ষেত্রফল),

$A = \int_a^b (x_1 - x_2)dy \therefore \boxed{A = \int_a^b (x_u - x_l)dy}$ $[\because x_1 = x_u$ এবং $x_2 = x_l]$

Shortcut:

(i) $y^2 = 4ax$ এবং $y = mx$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3m^3}$ বর্গ একক।

(ii) $x^2 = 4ay$ এবং $y = mx$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8}{3}a^2m^3$ বর্গ একক।

(iii) $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4by$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{16}{3}ab$ বর্গ একক।

(iv) $y^2 = 4ax$ (বা $x^2 = 4ay$) এবং উহার উপকেন্দ্রিক লম্বের দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3}$ বর্গ একক।

(v) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi a^2$ বর্গ একক

(vi) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi ab$ বর্গ একক

(vii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}\pi ab - \frac{1}{2}ab$ বর্গ একক।

MCQ

01. $y^2 = 4x$ ও $y = x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল-

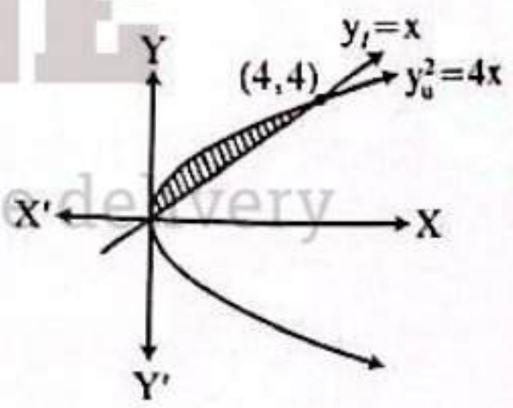
[DU'23-24, 10-11, 08-09, 05-06; JU'14-15; RU'10-11] [Ans: b]

(a) $\frac{3}{8}$ বর্গ একক (b) $\frac{8}{3}$ বর্গ একক (c) 3 বর্গ একক (d) 8 বর্গ একক

সমাধান: $y^2 = 4x \Rightarrow y = 2\sqrt{x}$ আর $y = x$ এর ছেদবিন্দু (0,0) এবং (4,4)

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \int_0^4 (y_u - y_l)\,dx = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)dx = \left[2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4$

$= \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{4}{3} \times 8 - \frac{16}{2} = \frac{8}{3}$ বর্গ একক।

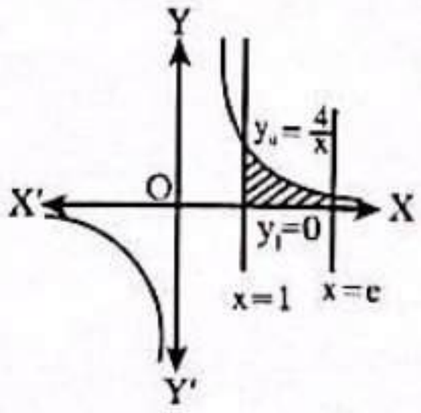


Shortcut: $\frac{8a^2}{3m^3} = \frac{8}{3} \times \frac{1^2}{1^3} = \frac{8}{3}$ বর্গ একক।

02. $xy - 4 = 0$ অধিবৃত্ত, x-অক্ষ, $x = 1$ এবং $x = e$ রেখা দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? **[GST'23-24]**

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 **[Ans: c]**

সমাধান: $xy = 4 \therefore y = \frac{4}{x}$



$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \int_1^e (y_u - y_l)\,dx = \int_1^e \left(\frac{4}{x} - 0\right)dx = \int_1^e \frac{4}{x}dx = 4[\ln|x|]_1^e = 4[\ln|e| - \ln|1|]$

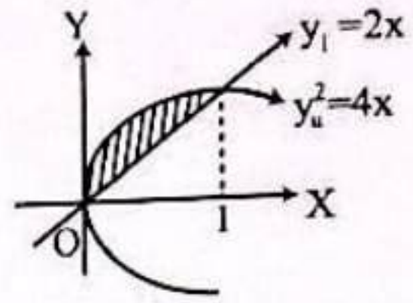
$= 4[1 - 0] = 4$

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

03. $y^2 = 4x$ এবং $y - 2x = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [RU'23-24; JU'23-24] [Ans: b]

(a) 3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 6 (d) $\frac{1}{6}$



সমাধান: ছেদবিন্দু নির্ণয়: $y = 2x$ ..... (i); $y^2 = 4x$ ..... (ii)

(ii) $\Rightarrow 4x^2 = 4x \Rightarrow 4x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x-1) = 0 \therefore x = 1, 0$

$y^2 = 4x; y = 2x \Rightarrow \int_0^1 (y_u - y_l)\,dx = \int_0^1 (2\sqrt{x} - 2x)\,dx; [\because y_u = 2\sqrt{x}, y_l = 2x] =$

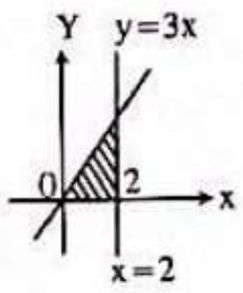
$2\int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx = 2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{4-3}{6}\right) = \frac{1}{3}$

Shortcut: $y^2 = 4x$ ও $y = 2x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3m^3} = \frac{8 \times 1^2}{3 \times 2^3} = \frac{1}{3}$ বর্গ একক ; $[\because a = 1, m = 2]$

04. $y = 3x$, x-অক্ষ এবং $x = 2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [RU'22-23] [Ans: a]

(a) 6 (b) 5 (c) 4 (d) 3

সমাধান: $\int_0^2 3x\,dx = \frac{3}{2}[x^2]_0^2 = \frac{3}{2} \times 4 = 6$



Shortcut: $x = 2$ হলে, $y = 3 \times 2 = 6$

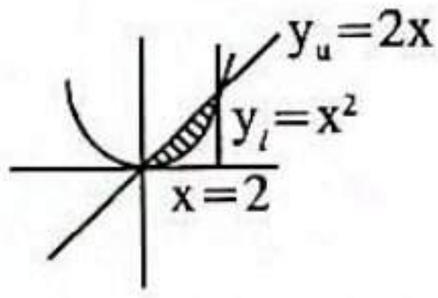
$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$

05. $y = x^2$ এবং $y = 2x$ দ্বারা আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল কত হবে? [CU'22-23] [Ans: c]

(a) 4 unit^2 (b) 3 unit^2 (c) $\frac{4}{3}$ unit^2 (d) $\frac{3}{4}$ unit^2

সমাধান: $y = x^2 = 2x \therefore x = 0, 2$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $\int_0^2 (y_u - y_l)\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \left[2 \times \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$ unit^2



Shortcut: $\frac{8}{3}a^2m^3 = \frac{8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 2^3}{3} = \frac{8}{3} \times \frac{1}{16} \times 8 = \frac{4}{3}$ unit^2

06. $9x^2 + 25y^2 = 225$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [RU'22-23] [Ans: a]

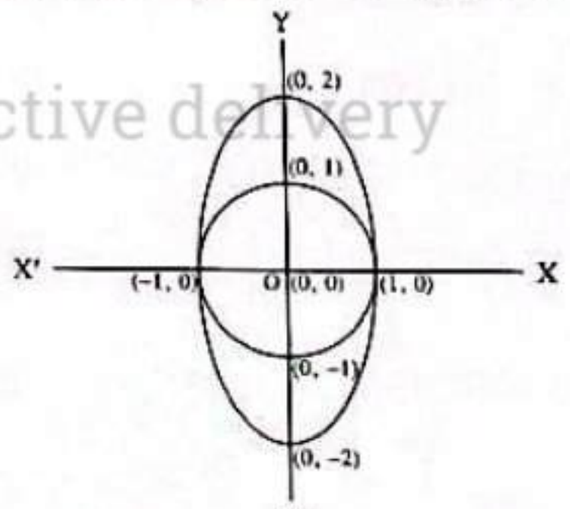
(a) 15π (b) 10π (c) 20π (d) 25π

সমাধান: $9x^2 + 25y^2 = 225 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \therefore a = 5; b = 3$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi ab = \pi \times 5 \times 3 = 15\pi$

07. প্রথম চতুর্থাংশে $x^2 + y^2 = 1$ এবং $4x^2 + y^2 = 4$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [GST'21-22] [Ans: d]

(a) 2π (b) π (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$



সমাধান: $x^2 + y^2 = 1$ ..... (i) যা একটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র (0,0) এবং ব্যাসার্ধ, $r = 1$

$4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$ ..... (ii) $\therefore$ যা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ যার $a = 1; b = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $A = \left|\frac{1}{4}\pi ab - \frac{1}{4}\pi r^2\right|$ বর্গ একক $= \frac{\pi}{4}|ab - r^2|$ বর্গ একক

$= \frac{\pi}{4}|1 \times 2 - 1^2|$ বর্গ একক $= \frac{\pi}{4}$

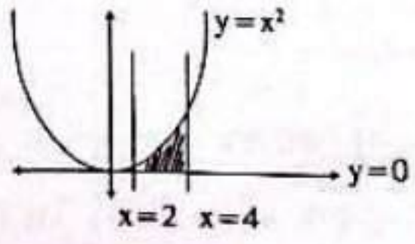
08. $y = x^2$, x-অক্ষ এবং $x = 2$ ও $x = 4$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [RU'21-22] [Ans: b]

(a) $\frac{76}{3}$ (b) $\frac{56}{3}$ (c) $\frac{46}{3}$ (d) $\frac{68}{3}$

সমাধান: $\therefore$ নির্ণেয় আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল

$= \int_2^4 (x^2 - 0)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4$

$= \frac{4^3 - 2^3}{3} = \frac{56}{3}$



POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

09. $4x^2 + 25y^2 = 100$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [JU'21-22] [Ans: a]

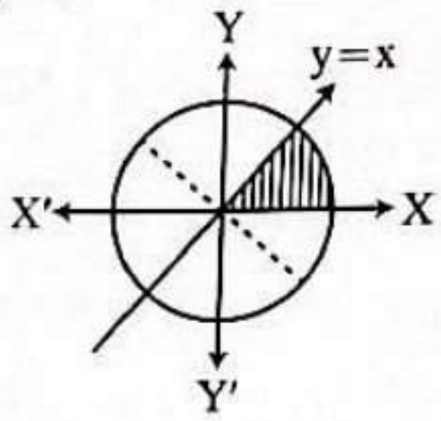
(a) 10π (b) 4π (c) 25π (d) 100π

সমাধান: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1 \therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi ab = \pi \times 5 \times 2 = 10\pi$

10. $y = x, y = 0$ এবং $x^2 + y^2 = 64$ দ্বারা প্রথম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গএকক? [JU'21-22] [Ans: a]

(a) 8π (b) 16π (c) 4π (d) 12π

সমাধান: ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \frac{\pi r^2}{4} = \frac{1}{8}\pi \times 8^2 = 8\pi$



11. $y = x^2, x$ -অক্ষ, $x = 1$ এবং $x = 3$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? [JU'20-21; DU'17-18] [Ans: a]

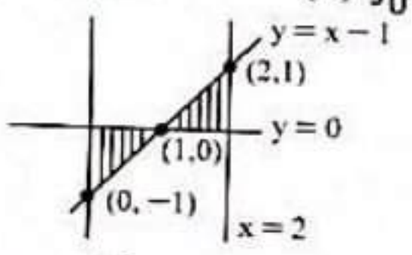
(a) $\frac{26}{3}$ (b) $\frac{25}{3}$ (c) 8 (d) 9

সমাধান: ক্ষেত্রফল $= \int_1^3 y\,dx = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 1^3) = \frac{26}{3}$ বর্গএকক।

12. $[0,2]$ ব্যবধিতে $y = x - 1$ এবং $y = 0$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের মোট ক্ষেত্রফল কত? [DU'19-20] [Ans: b]

(a) $\int_0^2 (x-1)dx$ (b) $\int_0^2 |x-1|dx$ (c) $2\int_1^2 (1-x)dx$ (d) $2\int_0^1 (x-1)dx$

সমাধান:



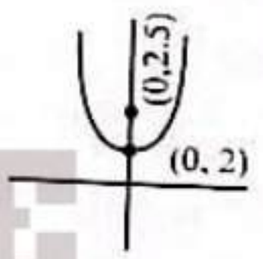
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \int_0^2 |x-1|\,dx$; (যেহেতু ক্ষেত্রফল সবসময়ই ধনাত্মক এবং পরমমানের সাহায্যে লিখা হয়)

13. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [RU'18-19] [Ans: c]

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

সমাধান: $x^2 = 2(y-2)$; $a = \frac{1}{2}$,

অর্থাৎ ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3} = \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$



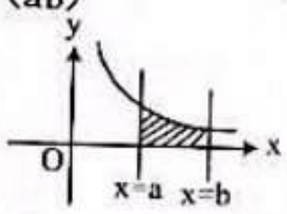
14. $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [RU'17-18] [Ans: d]

(a) $16a^2$ (b) $3a^2$ (c) $\frac{3a^2}{16}$ (d) $\frac{16a^2}{3}$

15. $xy = c^2$ অধিবৃত্ত, x-অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ রেখা দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? [JU'17-18] [Ans: b]

(a) $c^2 \ln\left(\frac{1}{ab}\right)$ (b) $c^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ (c) $c^2 \ln(ab)$ (d) $c^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

সমাধান:

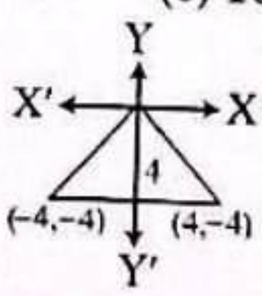


$\Delta = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \int_a^b \frac{c^2}{x}\,dx = c^2[\ln x]_a^b = c^2 \ln\frac{b}{a}$

16. $y = -|x|$, x অক্ষ রেখা ও $y = -4$ রেখার দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? [JnU'17-18] [Ans: c]

(a) 8 বর্গ একক (b) 0 বর্গ একক (c) 16 বর্গ একক (d) 32 বর্গ একক

সমাধান: $\Delta = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$ বর্গ একক



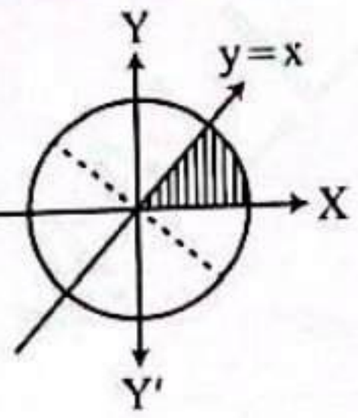
17. $y = x, y = 0$ রেখাদ্বয় এবং $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্ত দ্বারা প্রথম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল– [DU'16-17] [Ans: a]

(a) 2π বর্গ একক (b) 3π বর্গ একক (c) 4π বর্গ একক (d) 5π বর্গ একক

POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

সমাধান: $\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \frac{\pi r^2}{4} = \frac{1}{8} \times \pi \times 16 = 2\pi$ বর্গ একক

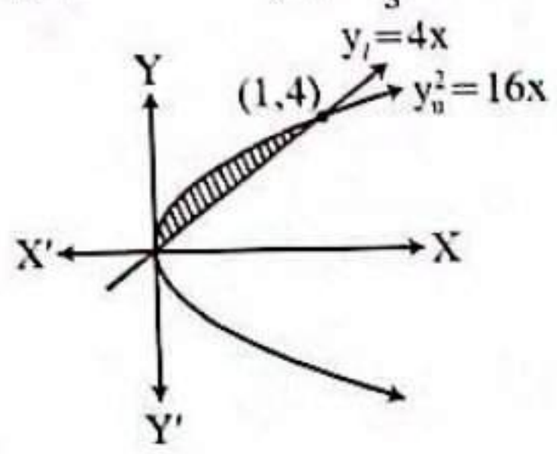


18. জ্যামিতিকভাবে $\int_a^b f(x)dx$ দ্বারা কী বোঝায়? **[KU'16-17] [Ans: b]**

(a) ফাংশন (b) ক্ষেত্রফল (c) আয়তন (d) দৈর্ঘ্য

19. $y^2 = 16x$ এবং $y = 4x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল- **[DU'15-16, 11-12, 07-08] [Ans: a]**

(a) $\frac{2}{3}$ বর্গ একক (b) $-\frac{2}{3}$ বর্গ একক (c) $\frac{3}{2}$ বর্গ একক (d) $\frac{1}{3}$ বর্গ একক



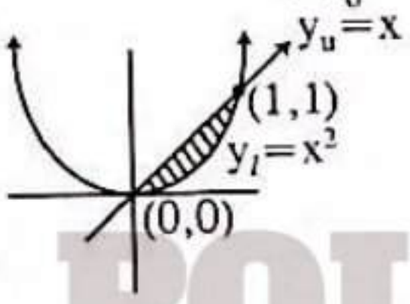
সমাধান:

ক্ষেত্রফল $= \int_0^1 (y_u - y_l)dx = \int_0^1 (4\sqrt{x} - 4x)dx = \int_0^1 \left[4x^{\frac{1}{2}} - 4x\right]dx = \left[4 \times x^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$ বর্গ একক

Shortcut: ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3m^3} = \frac{8 \times (4)^2}{3\,(4)^3} = \frac{2}{3}$

20. $y = x$ এবং $y = x^2$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (বর্গ একক)- **[DU'14-15] [Ans: b]**

(a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $-\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{3}$



সমাধান:

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \int_0^1 (y_u - y_l)dx \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Shortcut: ক্ষেত্রফল $= \frac{8}{3}a^2m^3 = \frac{8}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times (1)^3 = \frac{1}{6}$

21. $y^2 = 8x$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? **[RU'14-15] [Ans: a]**

(a) $\frac{32}{3}$ (b) $\frac{8}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

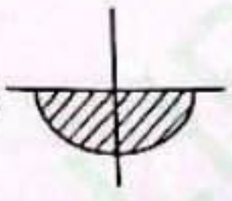
সমাধান: $y^2 = 4 \times 2 \times x \;\therefore a = 2$

$\Delta = 2\int_0^2 ydx = 2\int_0^2 \sqrt{8x}dx = 4\sqrt{2}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{8\sqrt{2}}{3} \times 2^{\frac{3}{2}} = \frac{32}{3}$

Shortcut: $\frac{8}{3}a^2 = \frac{8}{3}(2)^2 = \frac{32}{3}$

22. $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ ও $y = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল- **[DU'13-14] [Ans: b]**

(a) $\frac{1}{4}\pi a^2$ (b) $\frac{1}{2}\pi a^2$ (c) πa^2 (d) $\frac{1}{2}a^2$



সমাধান: $y = -\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$; যা বৃত্তের সমীকরণ।

সমীকরণে (–) মাইনাস থাকায় চিত্রের মতো নিচের অর্ধবৃত্ত আসবে। ফলে ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}\pi a^2$.

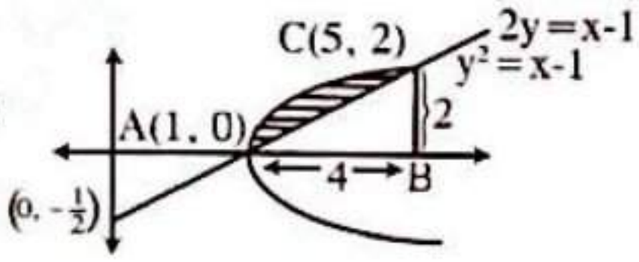
POLL MACHINE
Preparation and Practice are vital for effective delivery

CamScanner

Written

01. $y^2 = x - 1$ এবং $2y = x - 1$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [DU'21-22]

সমাধান:



$2y = x - 1$ ..... (i) এবং $y^2 = x - 1$ ..... (ii)

(i) ও (ii) হতে, $2y = y^2 \therefore y = 0, 2$

এখন, (i) -এ $y = 0$ বসালে, $0 = x - 1 \therefore x = 1 \therefore$ বিন্দুটি $(1, 0)$

আবার, (i) -এ $y = 2$ বসালে, $2 \cdot 2 = x - 1 \therefore x = 5 \therefore$ বিন্দুটি $(5, 2)$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \int_1^5 \left\{\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}(x-1)\right\} dx$

$= \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right]_1^5 = \left[\frac{2}{3}(5-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{5^2}{2} - 5\right)\right] - \left[\frac{2}{3}(1-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1^2}{2} - 1\right)\right]$

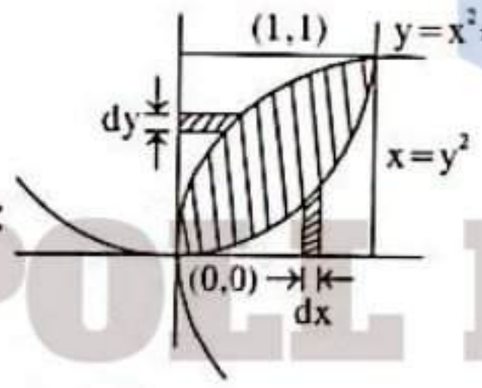
$= \frac{16}{3} - \frac{15}{4} - 0 - \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$ বর্গ একক **(Ans.)**

বিকল্প: ক্ষেত্রফল $= \int_1^5 \sqrt{x-1}\, dx - \Delta ABC = \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^5 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2$

$= \left[\frac{2}{3}(5-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1-1)^{\frac{3}{2}}\right] - 4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$ বর্গ একক **(Ans.)**

02. $y = x^2$ এবং $x = y^2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [DU'20-21]

সমাধান:



POLL MACHINE
Preparation and Practice Portal for effective delivery

ক্ষেত্রফল $= 1^2 - \int_0^1 x^2 \cdot dx - \int_0^1 y^2 \cdot dy = 1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ বর্গ একক **(Ans.)**

বিকল্প: ক্ষেত্রফল $= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ বর্গ একক **(Ans.)**

03. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [RU'19-20]

সমাধান: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x}$

$\therefore y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 = a + x - 2\sqrt{ax}$

$x = 0$ হলে, $y = a$; $y = 0$ হলে, $x = a$

$\therefore A = \int_0^a y\, dx = \int_0^a (a + x - 2\sqrt{a}\sqrt{x})dx = \left[ax + \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{a} \times \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^a$

$= \left[a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{4}{3}a^2 - 0\right] = \frac{1}{6}a^2$ বর্গ একক। **(Ans.)**

Scanned with CamScanner