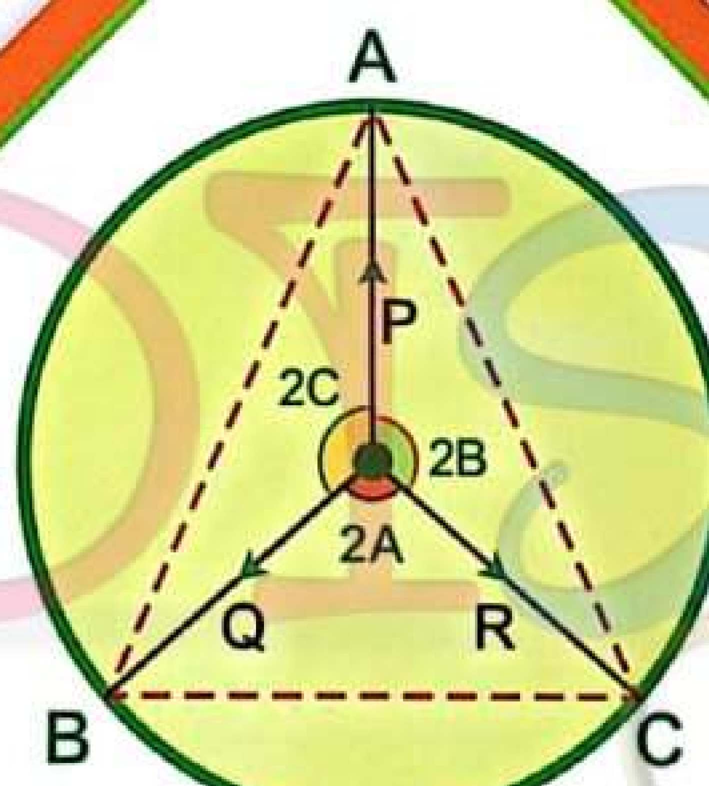
ভার্সিটি 'ক'

প্রিপারেশন বুক

উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

২০২৩ সংস্করণ



উদ্ভাস
একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

উৎসর্গ

"এমন অর্ঘ্য রচিত হয় নাই ঘুচাইবে রুধির ঋণ,
সৃষ্টির নাশ স্রষ্টায় ঘটে তোমাতে অমলিন!"

আপনার জীবন থেকে মাত্র ১০ মিনিট + ৪৫০ মি.লি. রক্ত দিন = একটি জীবন বাঁচান! যখন অন্যের কষ্ট আপনাকে কষ্ট দেয় তখন আপনি প্রাণী; কিন্তু যখন তার পাশে দাঁড়ান তখন আপনি 'মানুষ'! কয়েক মিনিট সময় আর একটু স্বদিচ্ছাই হতে পারে আরেকটি জীবনের বেঁচে থাকার রসদ। এই স্বদিচ্ছা আর রসদ যোগানিয়াদের মাহাত্ম্য-ই সুন্দর করে পৃথিবী, সৃষ্টি করে অসম্ভব সুন্দর কিছু গল্প। যে গল্প শুনলে ঢুলু ঢুলু চোখে ঘুমিয়ে যেতে ইচ্ছে হয় না বরং আর একটু রাঙিয়ে দিতে প্রত্যয়ী হতে হয়।

সেই সকল বীরদের যারা নিঃস্বার্থ ভাবে স্বেচ্ছায় রক্ত দিয়ে যাচ্ছে প্রতিনিয়ত......

ভার্সিটি 'ক' ভর্তিচ্ছু শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

ভার্সিটি 'ক' ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্নপত্র মূলত কনসেপ্টভিত্তিক, তথ্যমূলক এবং গাণিতিক সমস্যা সংক্রান্ত। এক্ষেত্রে মূল বইয়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যসমূহ মনে রাখার পাশাপাশি বুঝে পড়া অত্যন্ত জরুরি। উদ্ভাস-এর প্রতিটি লেকচার ক্লাস-এ বিভিন্ন অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টপিকসমূহের কনসেপ্টচুয়াল আলোচনাসহ প্রয়োজনীয় গাণিতিক সমস্যা সমাধানের উপর জোর দেওয়া হয়। ভার্সিটি 'ক' ভর্তি প্রস্তুতির জন্য লেকচার ক্লাস এবং মূল বইয়ের পাশাপাশি সহায়ক ভূমিকা পালন করবে উদ্ভাস-এর **"প্রিপারেশন বুক"** যেখানে ভর্তি পরীক্ষার জন্য মূল বইয়ের গুরুত্বপূর্ণ টপিকগুলোকে সহজবোধ্য উপায়ে উপস্থাপন করা হয়েছে। বইটি মূলত একাধিক পাঠ্যবইয়ের সমন্বয়ে টাইপ আকারে সাজানো। প্রতিটি টাইপের প্রয়োজনীয় কনসেপ্ট আলোচনার পর পৃথকভাবে সংযোজন করা হয়েছে ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ অন্যান্য বিশ্ববিদ্যালয়গুলোর বিগত ভর্তি পরীক্ষাসমূহের নির্বাচিত গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন ও সমাধান। একনজরে দেখে নেওয়ার জন্য অধ্যায়ভিত্তিক সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র একত্রে উপস্থাপন করা হয়েছে। যেহেতু ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষায় MCQ ও Written উভয় ধরনের প্রশ্ন আসে, তাই সবশেষে রয়েছে MCQ ও Written প্র্যাক্টিস প্রবলেম। এছাড়া সম্পূর্ণ বইয়ের উপর বেশকিছু মডেল টেস্ট রয়েছে যা তোমরা সময় ধরে প্র্যাক্টিস করতে পারবে।

উদ্ভাসের প্রতিটি লেকচার ক্লাসের সাথে বইটি সমন্বয় করে পড়লে তোমরা যথাযথভাবে প্রস্তুতি সম্পন্ন করতে পারবে। যেহেতু বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষায় ক্যালকুলেটর ব্যবহার করা যায় না সেজন্য এই বইটিতে রয়েছে গাণিতিক সমস্যা সহজে সমাধানের গুরুত্বপূর্ণ টিপস এবং শর্টকাট টেকনিক যা তোমাদের দক্ষতা অর্জনে সহায়ক হবে। বিগত বছরের প্রশ্নগুলো তোমাদের প্রশ্নের ধরন এবং অতি গুরুত্বপূর্ণ টাইপগুলোর ব্যাপারে ধারণা দিবে। সবশেষে MCQ ও Written প্র্যাক্টিস প্রবলেমগুলো নিজেকে আরো ঝালাই করে নিতে সাহায্য করবে।

তোমাদের ভর্তি প্রস্তুতিতে বইটি দারুণ কাজে আসবে বলে আমাদের দৃঢ় বিশ্বাস। তোমাদের সবার জন্য শুভকামনা।

ভার্সিটি 'ক' প্রিপারেশন বুক

উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

"উচ্চতর গণিত ২য় পত্র প্রিপারেশন বুক" তৈরিতে যেসব লেখকের মূল বইয়ের সাহায্য নেওয়া হয়েছে-

১। মোঃ কেতাব উদ্দীন স্যার

২। এস ইউ আহাম্মদ স্যার

৩। অসীম কুমার সাহা স্যার

সূচিপত্র

শর্ট সিলেবাস ২০২৩

অধ্যায় ০৩ জটিল সংখ্যা

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

কাল্পনিক সংখ্যা i এর পরিচয়

$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \therefore x=\pm 1$ এরূপ সমীকরণ সমাধান করতে কোন সমস্যা হয় না।
কিন্তু, $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$ ……… (i)
কোন বাস্তব সংখ্যার বর্গ ঋণাত্মক হয় না।

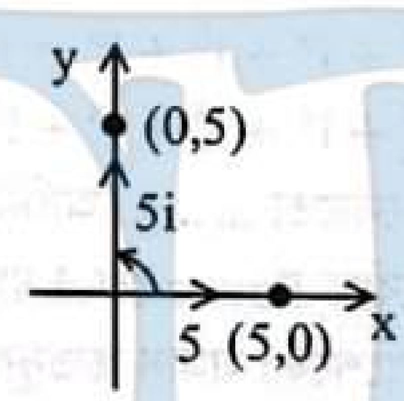
$\therefore$ ঋণাত্মক সংখ্যাকে বর্গমূল করলে কোন বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যায় না। তাই ধরা হয়, $\boxed{\sqrt{-1}=i} \Rightarrow \boxed{i^2=-1}$ ……… (ii)
যেখানে i একটি কাল্পনিক সংখ্যা (Imaginary Number) তাহলে (i) নং সমীকরণে $\sqrt{-1}$ এর মান বসালে, $\boxed{x=\pm i}$

এখন (ii) নং সমীকরণের ক্ষেত্রে, $i^2=-1$ কিন্তু এখান থেকে, $i=\pm\sqrt{-1}$ লেখা যাবে না কারণ $i=\sqrt{-1}$ (সংজ্ঞায়িত) তাই এক্ষেত্রে $\pm$ নেওয়া যাবে না, শুধুমাত্র + চিহ্ন নিতে হবে।

জটিল সংখ্যা

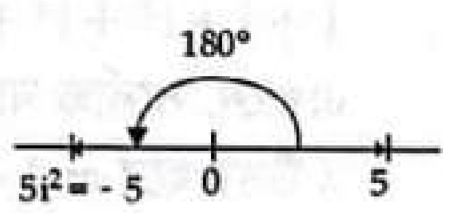
x এবং y বাস্তব সংখ্যা হলে, $x+iy$ আকারের সকল সংখ্যাকে বলা হয় জটিল সংখ্যা। জটিল সংখ্যাকে সাধারণত z দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\therefore z=x+iy$ একটি জটিল সংখ্যা। দ্বিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় (x,y) এর অবস্থান যেখানে, $x+iy$ এর অবস্থানও সেখানে। [এখানে, x বাস্তব অংশ, y কাল্পনিক অংশ]

এখন, $x+iy$ আকারের জটিল সংখ্যার ক্রমযুগল (x,y)
$3+4i$ আকারের জটিল সংখ্যার ক্রমযুগল $(3,4)$
$5=5+0.i$ আকারের জটিল সংখ্যার ক্রমযুগল $(5,0)$
$5i=0+5.i$ আকারের জটিল সংখ্যার ক্রমযুগল $(0,5)$

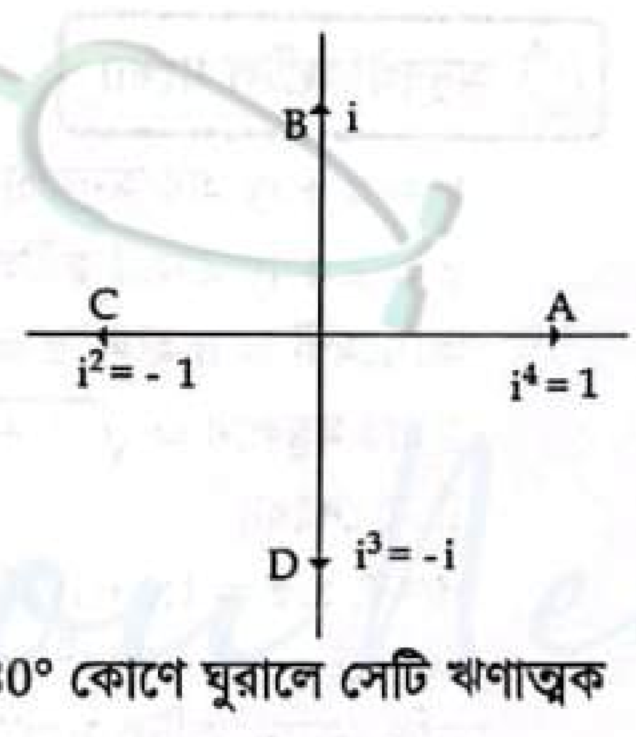


i দ্বারা গুণ করলে ঘূর্ণন

তাহলে দেখা যাচ্ছে, 5 এর অবস্থান x অক্ষের উপর এবং 5i এর অবস্থান y অক্ষের উপর।
অর্থাৎ চিত্র হতে দেখা যায় যে, 5 কে i দ্বারা গুণ করার ফলে সেটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $\frac{\pi}{2}$ কোণে ঘুরে যায়।



সুতরাং সিদ্ধান্ত নেওয়া যায় যে, i এমনই একটি অপারেটর যা দ্বারা যেকোন সংখ্যাকে গুণ করলে সংখ্যাটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $\frac{\pi}{2}$ কোণে ঘুরে যায়।
$\therefore$ কোন সংখ্যাকে i^2 দ্বারা গুণ করলে সেটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $2.\frac{\pi}{2}$ কোণে ঘুরে যায়।
কোন সংখ্যাকে i^3 দ্বারা গুণ করলে সেটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $3.\frac{\pi}{2}$ কোণে ঘুরে যায়।
কোন সংখ্যাকে i^4 দ্বারা গুণ করলে সেটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $4.\frac{\pi}{2}$ কোণে ঘুরে যায়।
কোন সংখ্যাকে i^n দ্বারা গুণ করলে সেটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $n.\frac{\pi}{2}$ কোণে ঘুরে যায়।



তাহলে লক্ষণীয় যে, i^2 দ্বারা কোন সংখ্যাকে গুণ করলে সেটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $2.\frac{\pi}{2}$ বা $180°$ কোণে ঘুরে যায়। আর আমরা জানি যে, যে কোনো জিনিসকে তার স্বাভাবিক অবস্থান থেকে $180°$ কোণে ঘুরালে সেটি বিপরীত হয়ে যায়। সংখ্যা পদ্ধতির ক্ষেত্রে ধনাত্মক সংখ্যাকে $180°$ কোণে ঘুরালে সেটি ঋণাত্মক হয়ে যায়। $\therefore 5i^2=-5 \therefore i^2=-1$

i এর ঘাত

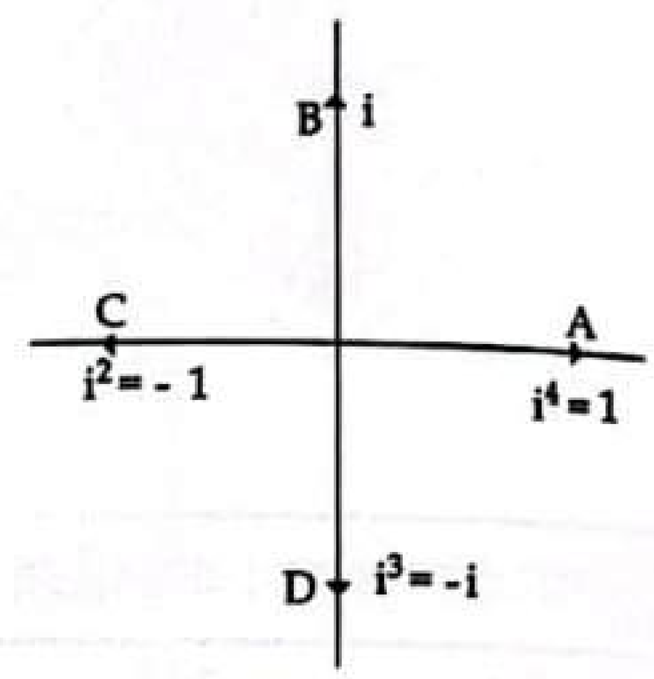
এবার পাশের চিত্র লক্ষ করো-

1 কে i দ্বারা গুণ করলে i, [A অবস্থান থেকে B অবস্থানে যায়]

i " i " " " i^2, [B " " C " "]

i^2 " i " " " i^3, [C " " D " "]

i^3 " i " " " i^4, [D " " পুনরায় A অবস্থানে যায়।]



$\therefore i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1$

$\therefore$ n পূর্ণ সংখ্যা হলে, $i^{4n} = 1$

$\therefore i^{4n+1} = i^{4n}.i = i,\ i^{4n+2} = i^{4n}.i^2 = -1\ \therefore i^{4n+p} = i^p$

আবার, $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 1 + i - 1 - i = 0$

জেনে রাখো

$4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3$ চারটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা।

$\therefore$ a, b, c, d চারটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা হলে, $i^a + i^b + i^c + i^d = 0$

এবার চলো, $i^{01717722655} = i^{4\times429430663+3} = i^3 = -i$

যদি কষ্ট হয় তবে শোনো-

i-এর Power এর শেষ দুটি ডিজিটকে 4 দ্বারা ভাগ করলে অবশিষ্ট যা হবে সেটাই i এর Power হবে এবং সেটিই হবে সঠিক উত্তর

যেমন: 55 কে 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ = 3 $\therefore i^{01717722655} = i^3 = -i$ **(Ans.)**

i এর ধারা

লক্ষ কর: $i + i^2 = i - 1$

$\underline{i} + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 = i^5 = i^1$

$\underline{i + i^2} + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 = i^5 + i^6 = \underline{i + i^2} = i - 1$

$\underline{i + i^2 + i^3} + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 = i^5 + i^6 + i^7 = \underline{i + i^2 + i^3} = i - 1 - i = -1$

লক্ষ করে বলোতো ……… আমিই বলি,

ধারাটির সর্বোচ্চ Power কে 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ সংখ্যাটি যত পাওয়া যাচ্ছে প্রথম হতে (i এর Power 1 হতে) i এর ঘাত যেখানে ভাগশেষের সমান ততদুর পর্যন্ত রাখলেই ধারাটির উত্তর পাওয়া যাচ্ছে। তবে খেয়াল রাখতে হবে যে i এর ঘাত যেন ক্রমিক সংখ্যা হয়।

এবার একটা সমস্যা সমাধান করি–

$1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{202} = ?$

এখানে, সর্বোচ্চ ঘাত 202 কে 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ = 2

$\therefore$ উত্তর হবে $= 1 + i + i^2 = 1 + i - 1 = i$ **(Answer)**

অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা

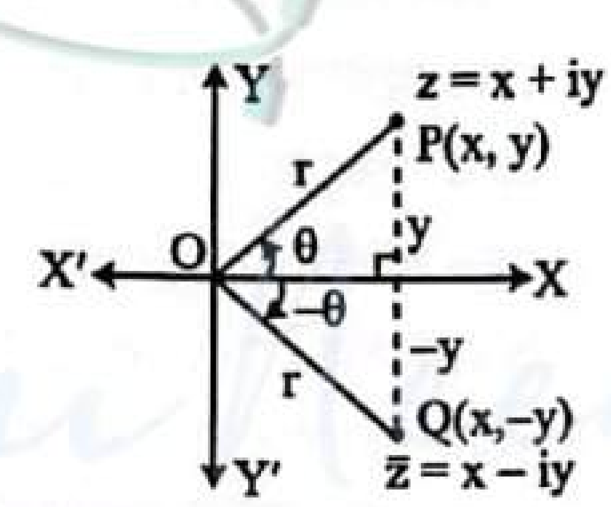
$z = x + iy$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $\bar{z} = x - iy$ ।

$z = x + iy$ একটি জটিল সংখ্যা হলে এর মডুলাস, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ এবং

আর্গুমেন্ট = θ হলে, $z = x + iy$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা, $\bar{z} = x - iy$

$\bar{z}$ এর মডুলাস $= \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = r = z$ এর মডুলাস আর্গুমেন্ট $= -\theta$

[চিত্র দেখো]



এখন, $z.\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2$

$\Rightarrow z.\bar{z} = x^2 - i^2y^2 = x^2 - (-1)y^2\ \therefore z.\bar{z} = x^2 + y^2 = r^2$

অর্থাৎ কোনো জটিল সংখ্যা এবং তার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার গুণফল জটিল সংখ্যাটির পরমমানের বর্গের সমান।

জটিল সংখ্যার গুণাত্মক (গৌণিক) বিপরীতক

$z = x + iy\ [z \neq 0]$ একটি জটিল সংখ্যা হলে এর গুণাত্মক বিপরীতক, $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow z^{-1} = \frac{x-iy}{r^2} = \frac{\bar{z}}{r^2}$

যেমন: $z = 2 - 7i$ জটিল সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীতক কত হবে?

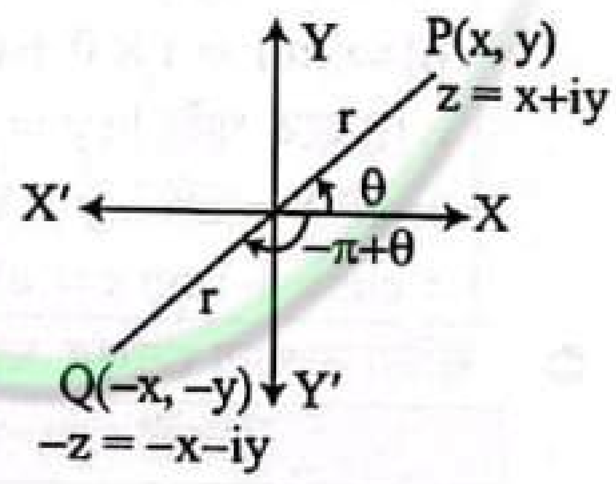
সমাধান: $z^{-1} = \frac{1}{2-7i} = \frac{2+7i}{(2-7i)(2+7i)} = \frac{2+7i}{4-49i^2} = \frac{2}{53} + \frac{7}{53}i$

জটিল সংখ্যার যোগাত্মক (যৌগিক) বিপরীতক

$z = x + iy\ \left[r = \sqrt{x^2+y^2}\right]$ একটি জটিল সংখ্যা এর যোগাত্মক বিপরীতক, $-z = -x - iy$

এখন, $|-z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = r$

$z = x + iy$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট যথাক্রমে r ও θ হলে, $-z$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট হবে যথাক্রমে r এবং $-\pi + \theta$.



জটিল সংখ্যার ধর্ম

(i) $x + iy = 0$ হলে, $x = 0, y = 0$

(ii) দুইটি জটিল সংখ্যা $x_1 + iy_1$ ও $x_2 + iy_2$ সমান হবে যদি ও কেবল যদি $x_1 = x_2$ ও $y_1 = y_2$ হয়।

(iii) দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $x + iy$ ও $x - iy$ এর সমষ্টি এবং গুণফল বাস্তব সংখ্যা।

(iv) অনুবন্ধী নয় এরূপ দুইটি জটিল সংখ্যা $x_1 + iy_1$ ও $x_2 + iy_2$ $((y_1 \neq -y_2)$ এর সমষ্টি, বিয়োগফল, গুণফল এবং ভাগফল প্রত্যেকটিই জটিল সংখ্যা হবে।

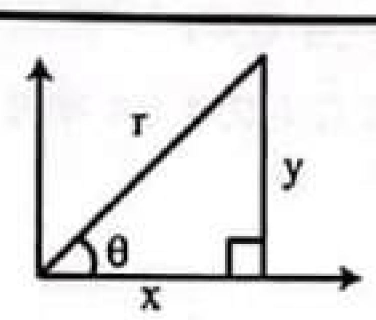
(v) $z = x + iy$ জটিল সংখ্যা এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে z^n জটিল সংখ্যা হবে।

অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার কিছু ধর্ম

(i) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ (ii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ (iii) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

(iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (v) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

জটিল সংখ্যার পোলার প্রতিরূপ



চিত্রে, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

কোন জটিল সংখ্যা $z = x + iy$ হলে, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ [যেখানে, r ও θ হলো জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট]

এখন, $z = x + iy = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ \boxed{\therefore z = re^{i\theta}} \end{array}\right\} \longrightarrow$$ জটিল সংখ্যার পোলার প্রতিরূপ [Euler's Theorem, $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$]

(অয়লারের সূত্র) Euler's Theorem	
Proof-01: মনে করি, $y = \cos x + i\sin x$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin x + i\cos x$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = i^2\sin x + i\cos x$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = i(\cos x + i\sin x)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = iy \Rightarrow \frac{dy}{y} = idx$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = i\int dx \Rightarrow \ln y = ix + c$ ……… (i) যখন, $x = 0,\ y = \cos 0 + i\sin 0 = 1$ (i) $\Rightarrow \ln 1 = i\times 0 + c \therefore c = 0$ $\therefore$ (i) হতে পাই, $\ln y = ix + 0 = ix$ $\Rightarrow e^{\ln y} = e^{ix} \therefore y = e^{ix}$ $\therefore \cos x + i\sin x = e^{ix}$	**Proof-02:** আমরা জানি, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots\infty$ $\therefore e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots\infty$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots\ldots\infty$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots\infty$ এখন, $\cos x + i\sin x$ $= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots\infty\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots\infty\right)$ $= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots\infty$ $= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \ldots\ldots\ldots\infty = e^{ix}$ $\therefore \cos x + i\sin x = e^{ix}$

➲ **জটিল সংখ্যার গুণফল, ভাগফল ও ঘাত:**

দুইটি জটিল সংখ্যার গুণফল	দুইটি জটিল সংখ্যার ভাগফল	জটিল সংখ্যার n তম ঘাত
$z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ এবং $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ হলে, $z_1z_2 = \underbrace{r_1r_2}_{\text{গুণফলের মডুলাস}}\, e^{\underbrace{i(\theta_1+\theta_2)}_{\text{গুণফলের আর্গুমেন্ট}}}$ $\therefore \lvert z_1z_2\rvert = \lvert z_1\rvert.\lvert z_2\rvert = r_1.r_2$ $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ [যেমন $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$] $= \theta_1 + \theta_2$	$\frac{z_1}{z_2} = \underbrace{\frac{r_1}{r_2}}_{\text{ভাগফলের মডুলাস}}\, e^{\underbrace{i(\theta_1-\theta_2)}_{\text{ভাগফলের আর্গুমেন্ট}}}$ $\therefore \left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert} = \frac{r_1}{r_2}$ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ [যেমন, $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$] $= \theta_1 - \theta_2$	$z^n = \underbrace{r^n}_{\text{n তম ঘাতের মডুলাস}}\, e^{\underbrace{i\,n\theta}_{\text{n তম ঘাতের আর্গুমেন্ট}}}$ $\therefore$ (i) $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n = r^n$ (ii) $\arg(z^n) = n\arg(z)$ [যেমন, $\log_a M^N = N\log_a M$] $= n\theta$

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

Type-01: A+iB আকারে প্রকাশ

Concept

বাস্তব অংশগুলোকে A ও কাল্পনিক অংশগুলোকে B আকারে প্রকাশ করতে হবে।

➤ যদি দুটি জটিল সংখ্যা গুণ আকারে থাকে তবে সাধারণ নিয়মে গুণ করে $A + iB$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।

➤ যদি দুটি জটিল সংখ্যা ভাগ আকারে থাকে তবে হরের জটিল সংখ্যার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে $A + iB$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।

Problems

Example-01. $z = (-4 + 3i)/i$ এর কাল্পনিক অংশ নির্ণয় কর। **[DU'18-19]**

Solⁿ: $z = \frac{-4+3i}{i} = -\frac{4}{i} + 3 = -\frac{4i}{i^2} + 3 = -\frac{4i}{-1} + 3 = 4i + 3$ $\therefore$ কাল্পনিক অংশ $= 4$।

Example-02. $(4 + 3i)(3 - 4i)$ কে $A + iB$ আকারে প্রকাশ কর।

Solⁿ: $(4 + 3i)(3 - 4i) = 12 + 9i - 16i - 12i^2 = 12 - 7i + 12 = 24 - 7i = 24 + (-7)i$, যা $A + iB$ এর অনুরূপ।

Example-03. $\frac{5+12i}{3-4i}$ কে $A+iB$ আকারে প্রকাশ করো। **[RU'09-10]**

Sol^n: $\frac{5+12i}{3-4i}=\frac{(5+12i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{15+20i+36i+48i^2}{3^2-(4i)^2}=\frac{15+56i-48}{3^2+4^2}=\frac{-33+56i}{25}=-\frac{33}{25}+\frac{56}{25}i$ (Ans.)

Example-04. $\frac{2+3i}{2-i}=p+iq$ হলে, p ও q এর মান কত? **[JU'22-23]**

Sol^n: এরূপ ক্ষেত্রে হরের অনুবন্ধী সংখ্যা দিয়ে লব ও হরকে গুণ করে $p+iq\ [p,q\in R]$ আকারে প্রকাশ করতে হয়।

$\therefore \frac{2+3i}{2-i}=\frac{(2+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{1+8i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i$ এখন, $p=\frac{1}{5},\ q=\frac{8}{5}$ (Ans.)

০৩

Example-05. $\frac{8-i}{1+8i}$ এর মান কোনটি? **[CU'10-11]**

Sol^n: $\frac{8-i}{1+8i}=\frac{\frac{1}{i}(8i-i.i)}{1+8i}=\frac{-i(1+8i)}{1+8i}=-i$ (Ans.)

Example-06: $\begin{vmatrix} x & -3i & 1 \\ y & 1 & i \\ 0 & 2i & -i \end{vmatrix}=6+11i$ হলে, $(x,\ y)=?$

(a) $-3, 4$ (b) $3, 4$ (c) $3, -4$ (d) $-3, -4$

Sol^n: (a); $\begin{vmatrix} x & -3i & 1 \\ y & 1 & i \\ 0 & 2i & -i \end{vmatrix}=6+11i \Rightarrow x(-i-2i^2)+3i(-iy-0)+1(2iy-0)=6+11i$

$\Rightarrow -xi+2x+3y+2yi=6+11i \Rightarrow (2x+3y)+(-x+2y)i=6+11i$ ……… (i)

$\therefore$ (i) হতে লেখা যায়: $2x+3y=6$ ……… (ii)

$-x+2y=11$ ……… (iii)

(ii) ও (iii) হতে পাই, $(x,\ y)=(-3,\ 4)$ (Ans.)

Type-02: i এর মান নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা

Concept

$i^{4n+x}=i^x$ অর্থাৎ, i এর Power কে 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ যত থাকে তাই হবে i এর Power.

- মনে রাখবে, যদি i এর ঘাত 4 দ্বারা বিভাজ্য হয় তবে তার মান 1 হবে। সুতরাং, $i^{4n}=1$
- এখান থেকে বলা যায়, $i^{4n+1}=i^{4n}.i=i$

$i^{4n+2}=i^{4n}.i^2=-1$

$i^{4n+3}=i^{4n}.i^3=-i$

$i^{4n+4}=i^{4n}.i^4=1$

Note: $\frac{1}{i}=\frac{i}{i.i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i \therefore \boxed{\frac{1}{i}=i^{-1}=-i}$

Problems

Example-07. $A=\begin{bmatrix} 4i-6 & 10i \\ 14i & 6+4i \end{bmatrix}$ এবং $K=\frac{1}{2i}$ হলে, $KA=?\ [i^2=-1]$

(a) $\begin{bmatrix} 2+3i & 5 \\ 7 & 2-3i \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2-3i & 5 \\ 7 & 2+3i \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2-3i & 7 \\ 5 & 2+3i \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2+3i & 5 \\ 7 & 2+3i \end{bmatrix}$

Sol^n: (a); $\therefore KA=\begin{bmatrix} 2-\frac{3}{i} & 5 \\ 7 & \frac{3}{i}+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+3i & 5 \\ 7 & 2-3i \end{bmatrix}$

Example-08. $i^{757814}=?$ **[JU' 11-12, 07-08]**

Sol^n: $i^{757814}=i^{4\times189453}.i^2=-1$ (Ans.)

Shortcut: $4)\ 14\ (3$
$\underline{12}$
2
; শেষ দুই ডিজিট = 14, 14 কে 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ = 2 $\therefore i^{757814}=i^2=-1$ (Ans.)

Example-09. $i^4 + i^2 + 4i^3 + 5i = ?$ [JU' 11-12]

Sol^n: $i^4 + i^2 + 4i^3 + 5i = 1 - 1 - 4i + 5i = i$ **(Ans.)**

Example-10. $i^2 = -1$ হলে $\frac{i-i^{-1}}{i+2i^{-1}}$ এর মান বের কর। [DU' 11-12, RU' 20-21, Agri. Guccho'20-21]

Sol^n: $\frac{i-i^{-1}}{i+2i^{-1}} = \frac{i-\frac{1}{i}}{i+\frac{2}{i}} = \frac{i^2-1}{i^2+2} = \frac{-1-1}{-1+2} = -2$ **(Ans.)**

বিকল্প: $\frac{i-i^{-1}}{i+2i^{-1}} = \frac{i-(-i)}{i+2(-i)} = \frac{i+i}{i-2i} = \frac{2i}{-i} = -2$ **(Ans.)**

Example-11. $\frac{i}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1+i}}}$ এর মান বের কর। [RU'22-23, DU' 15-16, JnU' 07-08]

Sol^n: $\frac{i}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1+i}}} = \frac{i}{1-\frac{i(1+i)}{i}} = \frac{i}{1-1-i} = -1$ **(Ans.)**

Example-12. $n \in \mathbb{N}$ এর সর্বনিম্ন মান কত হলে, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$ হবে?

(a) 2 (b) 6 (c) 4 (d) 3

Sol^n: (c); $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1 \Rightarrow \left\{\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right\}^n = 1 \Rightarrow \left\{\frac{1+2i-1}{1^2-i^2}\right\}^n = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{2i}{2}\right)^n = 1 \Rightarrow i^n = 1 \therefore n = 4$ হলেই $n \in \mathbb{N}$ এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে,

Shortcut: $\frac{1+i}{1-i} = +i$ হয়, $\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = i^n$ হবে, এখন $i^n = 1$ হতে হলে $n \in \mathbb{N}$ শর্তে $n = 4$ পাওয়া যায়।

Example-13. $(i\omega)^n = 1$ হলে $n \in \mathbb{N}$ শর্তে n এর সর্বনিম্ন মান কত হবে?

(a) 4 (b) 7 (c) 12 (d) 24

Sol^n: (c); দেওয়া আছে, $(i\omega)^n = 1$

আমরা জানি, $n \in \mathbb{N}$ হলে n এর সর্বনিম্ন মান 4 এর জন্য $i^n = i^4 = 1$ হয়

আবার, $n \in \mathbb{N}$ হলে n এর সর্বনিম্ন মান 3 এর জন্য $\omega^n = \omega^3 = 1$ হয়,

যেহেতু i এবং ω গুণ আকারে আছে, তাই n এর মানটি হতে হবে 3 এবং 4 এর সাধারণ গুণিতক এবং এরূপ মান হতে পারে, 12, 24, 36 ইত্যাদি। এই সাধারণ গুণিতক গুলোর মধ্যে লঘিষ্ঠ সর্বনিম্ন মানটি হল = 12, যা 3 এবং 4 এর ল.সা.গু।

Type-03: জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

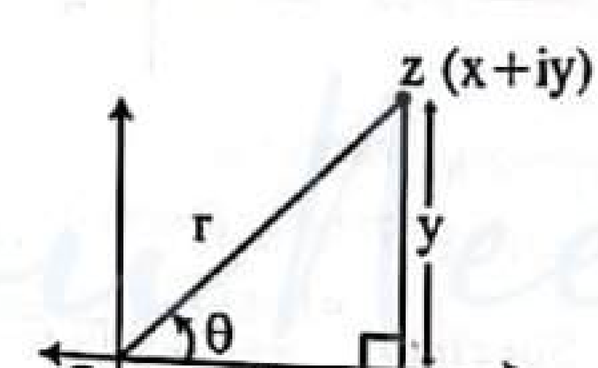
মডুলাস: মডুলাস হলো মূলবিন্দু থেকে কোনো জটিল সংখ্যার প্রতিরূপী বিন্দুর দূরত্ব।
প্রকাশ: mod (z), |z|, r

আর্গুমেন্ট: কোনো জটিল সংখ্যা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ঐ জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট বলে।
প্রকাশ: θ, arg (z)

চিত্র হতে, মডুলাস, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

অর্থাৎ, $z = x + iy$ একটি জটিল সংখ্যা হলে তার, $\boxed{\text{মডুলাস}, |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r}$

আর্গুমেন্ট ২ প্রকার: (i) মুখ্য আর্গুমেন্ট (Principal argument)
(ii) সাধারণ আর্গুমেন্ট (General argument)



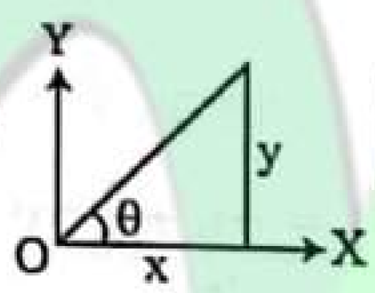
(i) **মুখ্য আর্গুমেন্ট (Principal argument):** x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কোনো জটিল সংখ্যা যে ক্ষুদ্রতম কোণ উৎপন্ন করে তাকে মুখ্য আর্গুমেন্ট বলে।

সীমা: $-\pi < x \le \pi$ (আমরা আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে বললে মুখ্য আর্গুমেন্টই নির্ণয় করবো)

(ii) **সাধারণ আর্গুমেন্ট (General argument):** মুখ্য আর্গুমেন্ট ব্যতীত বাকি সব আর্গুমেন্টই সাধারণ আর্গুমেন্ট।

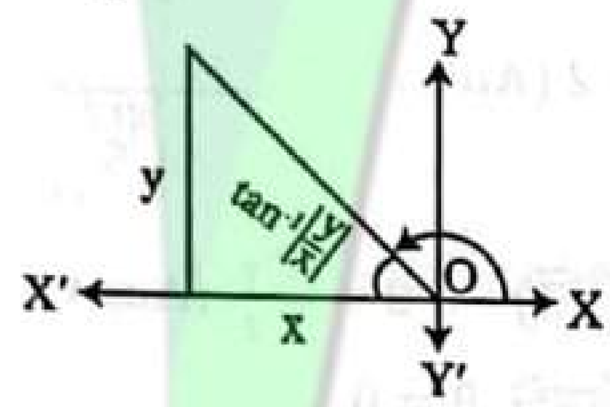
মুখ্য আর্গুমেন্ট নির্ণয়

(i) প্রথম চতুর্ভাগে (1st Quadrant)



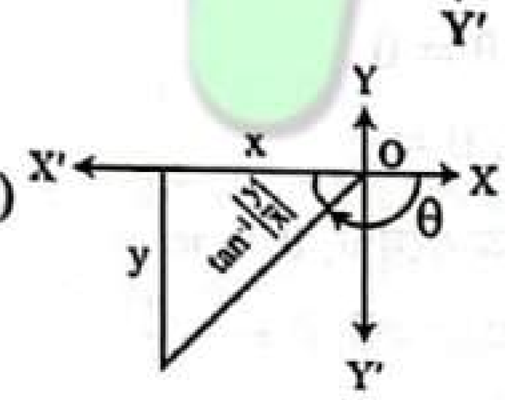
$\boxed{\arg(z) = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

(ii) দ্বিতীয় চতুর্ভাগে (2nd Quadrant)



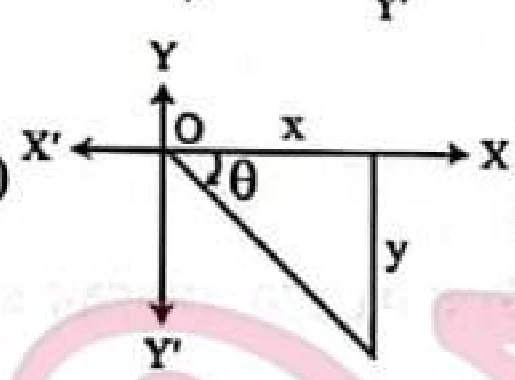
$\boxed{\arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

(iii) তৃতীয় চতুর্ভাগে (3rd Quadrant)



$\boxed{\text{Arg}(z) = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

(iv) চতুর্থ চতুর্ভাগে (4th Quadrant)



$\boxed{\text{Arg}(z) = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

(v) অক্ষদ্বয়ের উপরে থাকলে:

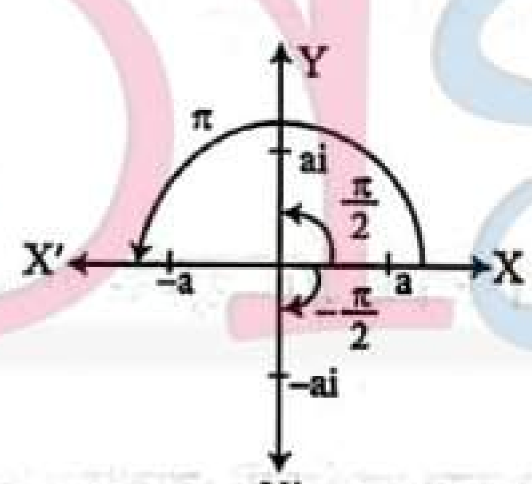
$a > 0$ হলে,

a এর মুখ্য আর্গুমেন্ট $= 0$

ai এর মুখ্য আর্গুমেন্ট $= \frac{\pi}{2}$

$-a$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট $= \pi$

$-ai$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট $= -\frac{\pi}{2}$

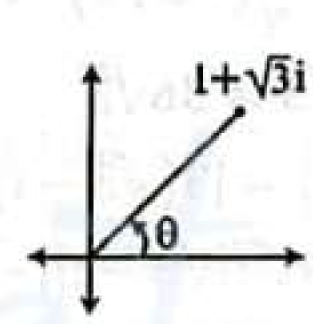


Problems

Example-14. নিম্নের জটিল সংখ্যাগুলোর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর:

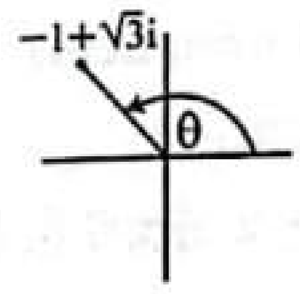
(i) $1+\sqrt{3}\,i$ (ii) $-1+\sqrt{3}\,i$ (iii) $-1-\sqrt{3}\,i$ (iv) $1-\sqrt{3}\,i$ (v) 5 (vi) 5i (vii) −5 (viii) −5i

Solⁿ: (i) $1+\sqrt{3}\,i$; মডুলাস, $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ (Ans.)



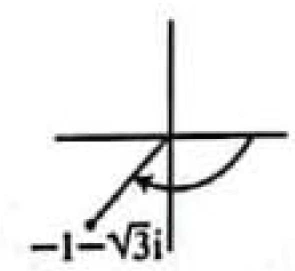
প্রথম চতুর্ভাগে, $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right| = \frac{\pi}{3}$ (Ans.)

(ii) $-1+\sqrt{3}\,i$; মডুলাস, $r = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$ (Ans.)



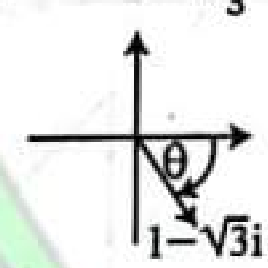
দ্বিতীয় চতুর্ভাগে, $\therefore \theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right| \therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$ (Ans.)

(iii) $-1-\sqrt{3}\,i$; মডুলাস, $r = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$ (Ans.)



তৃতীয় চতুর্ভাগে $\therefore \theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = -\pi + \tan^{-1}(\sqrt{3}) = -\pi + \frac{\pi}{3} \therefore \theta = -\frac{2\pi}{3}$ (Ans.)

(iv) $1-\sqrt{3}\,i$; মডুলাস $r = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$ (Ans.)



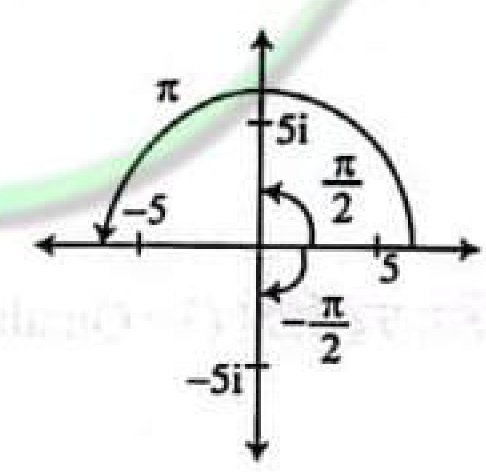
চতুর্থ চতুর্ভাগে $\therefore \theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = -\tan^{-1}(\sqrt{3}) \quad \therefore \theta = -\frac{\pi}{3}$ (Ans.)

(v) $5 = 5+0.i$; মডুলাস, $r = \sqrt{5^2+0^2} = 5$, আর্গুমেন্ট, $\theta = 0$

(vi) $5i = 0+5.i$; মডুলাস, $r = \sqrt{0^2+5^2} = 5$, আর্গুমেন্ট, $\theta = \frac{\pi}{2}$

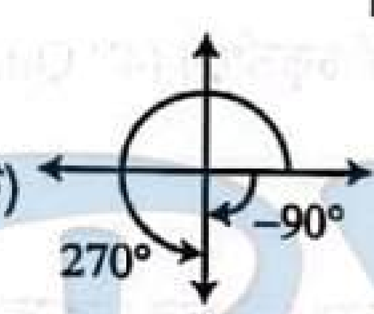
(vii) $-5 = -5+0.i$; মডুলাস, $r = \sqrt{(-5)^2+0^2} = 5$, আর্গুমেন্ট, $\theta = \pi$

(viii) $-5i = 0-5.i$; মডুলাস, $r = \sqrt{0^2+(-5)^2} = 5$, আর্গুমেন্ট, $\theta = -\frac{\pi}{2}$



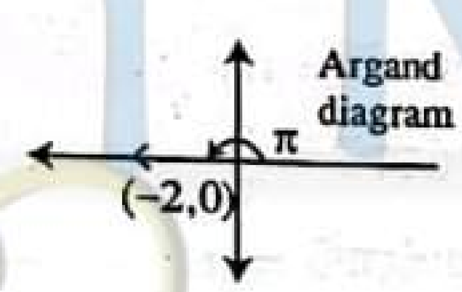
Example-15. $-2i$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট কত? **[RU'19-20]**

Sol^n: $-2i = 0-2.i \therefore$ আর্গুমেন্ট $= -90°$ (মুখ্য আর্গুমেন্ট) অথবা $270°$ (সাধারণ আর্গুমেন্ট)



Example-16. $\frac{i-i^{-1}}{i+2i^{-1}}$ এর মান এবং নতি কত হবে? **[DU'14-15]**

Sol^n: $\frac{i-i^{-1}}{i+2i^{-1}} = \frac{i^2-1}{i^2+2} = -\frac{-1-1}{-1+2} = -2+0\cdot i \therefore r = \sqrt{(-2)^2} = 2;\ \theta = \pi$



[Note: এখানে মান বলতে মডুলাস এবং নতি বলতে আর্গুমেন্ট বোঝানো হয়েছে]

Example-17. $(3\sqrt{3}-3i)(-3\sqrt{3}+9i)$ এর মডুলাস =? **[GST'22-23]**

(a) $54\sqrt{3}$ (b) $27\sqrt{3}$ (c) $36\sqrt{3}$ (d) $45\sqrt{3}$

Sol^n: (c); $z_1 = 3\sqrt{3}-3i$ এর মডুলাস, $r_1 = \sqrt{(3\sqrt{3})^2+(-3)^2} = 6$

$z_2 = -3\sqrt{3}+9i$ এর মডুলাস, $r_2 = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2+9^2} = 6\sqrt{3}$

$\therefore z_1z_2$ এর মডুলাস, $r_1r_2 = 6\times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

বিকল্প: $|(3\sqrt{3}-3i)(-3\sqrt{3}+9i)| = |3(\sqrt{3}-i)\cdot 3\sqrt{3}(-1+\sqrt{3}i)|$

$= 9\sqrt{3}|(\sqrt{3}-i)(-1+\sqrt{3}i)| = 9\sqrt{3}|\sqrt{3}-i||-1+\sqrt{3}i|$

$= (9\sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 9\sqrt{3}\cdot 2\cdot 2 = 36\sqrt{3}$ (Ans.)

Example-18. $\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4}$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট কত হবে? **[CU'22-23, DU' 12-13]**

Solⁿ: $\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4} = \left(\frac{i+1}{i-1}\right)^2 \times \frac{1}{(i-1)^2} = \frac{i^2+2i+1}{i^2-2i+1} \times \frac{1}{i^2-2i+1} = \frac{2i}{-2i} \times \frac{1}{-2i} = -\frac{i}{2} = 0 - \frac{i}{2} \therefore \text{Arg} = -\frac{\pi}{2}$ **(Ans.)**

Example-19: $z = 1 + i$ হলে $\left|z + \frac{2}{z}\right| = ?$ যেখানে $i = \sqrt{-1}$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Solⁿ: (b); $z + \frac{2}{z} = 1 + i + \frac{2}{1+i} = 1 + i + \frac{2(1-i)}{2} = 2 \therefore \left|z + \frac{2}{z}\right| = |2| = 2$ **(Ans.)**

Example-20: $z = i^{2n+1}.(-i)^{2n-1}$ হলে $|z| = ?$ যখন $i = \sqrt{-1}$ এবং $n \in \mathbb{N}$

(a) -1 (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) 2

Solⁿ: (b); $z = i^{2n+1}.(-i)^{2n-1} = i^{2n+1}\{i^{2n-1}.(-1)^{2n-1}\} = i^{(2n+1+2n-1)}.(-1)^{2n-1}$
$= i^{4n}.(-1)^{2n-1} \therefore z = (-1)^{2n-1} = -1[\because n \in \mathbb{N} \therefore 2n-1$ বিজোড় এবং $i^{4n} = 1]$
$= -1 + 0.i \therefore |z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$ **(Ans.)**

Example-21. $z_1 = 3 - 4i$ এবং $z_2 = 4 + 5i$ হলে নিচের জটিল রাশিগুলোর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট বের কর। **[DU' 13-14, JU' 16-17]**

(i) $z_1 + z_2$ (ii) $z_1.z_2$ (iii) $\bar{z}_1\bar{z}_2$ (iv) $\frac{z_1}{z_2}$ (v) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Solⁿ: (i) $|z_1 + z_2| = |3 - 4i + 4 + 5i| = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$ **(Ans.)**

$\arg(z_1 + z_2) = \arg(3 - 4i + 4 + 5i) = \arg(7 + i) = \tan^{-1}\frac{1}{7}$ **(Ans.)**

(ii) $\text{mod}(z_1z_2) = \text{mod}(z_1).\text{mod}(z_2) = \text{mod}(3 - 4i).\text{mod}(4 + 5i)$
$= \sqrt{9 + 16}.\sqrt{16 + 25}. = 5\sqrt{41}$ **(Ans.)**

$\arg(z_1z_2) = \arg\{(3-4i).(4+5i)\} = \tan^{-1}\left(\frac{4\times(-4)+3\times5}{3\times4-(-4)\times5}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{32}\right)$ **(Ans.)**

(iii) $|\bar{z}_1\bar{z}_2| = |(3 + 4i)(4 - 5i)| = |3 + 4i||4 - 5i| = \sqrt{25}\sqrt{41} = 5\sqrt{41}$ **(Ans.)**

$\arg|\bar{z}_1\bar{z}_2| = \arg\{(3 + 4i)(4 - 5i)\} = \tan^{-1}\left(\frac{4\times4+3\times(-5)}{3\times4-4\times(-5)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{32}\right)$ **(Ans.)**

(iv) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{3-4i}{4+5i}\right| = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{41}} = \frac{5}{\sqrt{41}}$ **(Ans.)**

$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg\left(\frac{3-4i}{4+5i}\right) = \arg\left(\frac{-8-31i}{41}\right) = \arg\left(\frac{-8}{41} - \frac{31}{41}i\right) = -\pi + \tan^{-1}\frac{31}{8}$ **(Ans.)**

(v) $\left|\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right| = \left|\frac{3+4i}{4-5i}\right| = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{41}} = \frac{5}{\sqrt{41}}$ **(Ans.)**

$\arg\left(\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right) = \arg\left[\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\right] = \arg\left(\frac{-8+31i}{41}\right) = \arg\left(\frac{-8}{41} + \frac{31}{41}i\right) = \pi + \tan^{-1}\left(-\frac{31}{8}\right)$ **(Ans.)**

Example-22. $z_1 = 2 + i$ এবং $z_2 = 3 + i$ হলে z_1z_2 এর মডুলাস নির্ণয় কর। **[JU' 16-17]**

Solⁿ: $z_1 = 2 + i; z_2 = 3 + i; z_1z_2 = (2 + i) \times (3 + i) = 5 + 5i$

$\therefore \text{mod}(z_1z_2) = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ **(Ans.)**

বিকল্প: $|z_1z_2| = |z_1||z_2| = |2 + i||3 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2}\sqrt{3^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$ **(Ans.)**

Example-23: $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট কত হবে?

(a) 240° (b) 210° (c) 120° (d) 60°

Solⁿ: (a); Process 01: $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \therefore \arg(1 - i\sqrt{3}) = -\tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = -\tan^{-1}(\sqrt{3}) = -60°$

এবং $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60° \therefore \arg(z) = \arg(1 - i\sqrt{3}) - \arg(1 + i\sqrt{3})$

$= -60° - 60° = -120°$ যা option-এ নেই $\therefore \arg(z) = 360° - 120° = 240°$ **(Ans.)**

নোট: (i) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$; (ii) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Process 02: ধরি, $x + iy = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(1-i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{1-3-i2\sqrt{3}}{1+3} \Rightarrow x + iy = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore x = \frac{-1}{2}$ এবং $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ আর্গুমেন্ট $= \pi + \tan^{-1}\left|\frac{-y}{-x}\right| = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}}\right| = \pi + \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 180° + 60° = 240°$ **(Ans.)**

Example-24: $\left|\frac{(2-i)^3}{(2+3i)}\right|$ এর মান হবে?

(a) $\frac{\sqrt{34}}{5}$ (b) $\frac{5\sqrt{65}}{13}$ (c) $\frac{\sqrt{11}}{9}$ (d) $\frac{\sqrt{29}}{7}$

Sol^n: (b); $\left|\frac{(2-i)^3}{2+3i}\right| = \frac{|(2-i)^3|}{|2+3i|} = \frac{|2-i|^3}{|2+3i|} = \frac{\left(\sqrt{2^2+(-1)^2}\right)^3}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{65}}{13}$

Type-04: জটিল সংখ্যার পোলার প্রতিরূপ সংক্রান্ত

Concept

$z = x + iy$ হলে, $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$ এবং $x^2 + y^2 = r^2$ $\therefore$ জটিল সংখ্যাটির পোলার প্রতিরূপ,

$z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$ [অয়লারের সূত্রঃ $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$]

Problems

Example-25. i^i এবং i^{-i} এর মান নির্ণয় কর এবং এদের মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

Sol^n: এখানে, $i = 0 + 1.i$

তাহলে, i এর মডুলাস, $r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

i এর আর্গুমেন্ট, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore i = r\,e^{i\theta} = 1.\,e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$ [যা বাস্তব সংখ্যা] **(Ans.)**

এখন, $i^i = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} + 0.i$ $\therefore$ মডুলাস, $r = \sqrt{\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$ **(Ans.)**

আর্গুমেন্ট, $\theta = 0$ **(Ans.)**

আবার, $i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow i^{-i} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{-i} = e^{-i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-(-1)\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}$ [যা বাস্তব সংখ্যা] **(Ans.)**

তাহলে, $i^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} + 0.i$ $\therefore$ মডুলাস, $r = \sqrt{\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right)^2 + 0^2} = e^{\frac{\pi}{2}}$ **(Ans.)**

আর্গুমেন্ট, $\theta = 0$ **(Ans.)**

Example-26. $\frac{1+2i}{1-3i}$ কে $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ আকারে প্রকাশ কর।

Sol^n: $\frac{1+2i}{1-3i} = \frac{(1+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{1+3i+2i+6i^2}{1^2+3^2} = \frac{-5+5i}{10}$ $[\because i^2 = -1] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$\therefore r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\right| = \pi - \tan^{-1}1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore \frac{1+2i}{1-3i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + i\sin\theta)$ যেখানে, $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Type-05: জটিল সংখ্যার বর্গমূল, ঘনমূল, চর্তুমূল, ষড়মূল

Concept

- **বর্গমূল:** $b > 0$ হলে, $\left.\begin{array}{l}\sqrt{a+ib}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{r+a}+i\sqrt{r-a}]\\ \sqrt{a-ib}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{r+a}-i\sqrt{r-a}]\end{array}\right\}$ যেখানে, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

- **ঘনমূল:** এককের ঘনমূলত্রয় যথাক্রমে $1, \omega, \omega^2$; (a) $\omega^3 = 1$ (b) $1 + \omega + \omega^2 = 0$ [যেখানে, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$]

(i) $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^3.1} = a\sqrt[3]{1} = a.1, a.\omega, a.\omega^2$

$\therefore \sqrt[3]{a^3} = a, a\omega, a\omega^2$

(ii) $\sqrt[3]{a^3i} = \sqrt[3]{a^3.i(-i^2)} = \sqrt[3]{-a^3.i^3} = \sqrt[3]{(-ai)^3.1} = -ai\sqrt[3]{1} = -ai.1, -ai.\omega, -ai.\omega^2$

$\therefore \sqrt[3]{a^3i} = -ai, -ai\omega, -ai\omega^2$

(iii) $\sqrt[3]{-a^3i} = \sqrt[3]{-a^3.i(-i^2)} = \sqrt[3]{a^3i^3} = \sqrt[3]{(ai)^3.1} = ai\sqrt[3]{1} = ai.1, ai.\omega, ai.\omega^2$

$\therefore \sqrt[3]{-a^3i} = ai, ai\omega, ai\omega^2$

(iv) $\sqrt[3]{-a^3} = \sqrt[3]{(-a)^3.1} = (-a)\sqrt[3]{1} = (-a).1, (-a).\omega, (-a).\omega^2$

$\therefore \sqrt[3]{-a^3} = -a, -a\omega, -a\omega^2$

অথবা, $x = \sqrt[3]{\text{রাশি}}$ ধরে সমস্যাগুলোকে সমাধান করা যায়।

Shortcut

ঘনমূল $\sqrt[3]{a^3} = a, a\omega, a\omega^2$; $\sqrt[3]{-a^3} = -a, -a\omega, -a\omega^2$; $\sqrt[3]{a^3i} = -ai, -ai\omega, -ai\omega^2$; $\sqrt[3]{-a^3i} = ai, ai\omega, ai\omega^2$

- **চতুর্মূল:** $\sqrt[4]{\text{রাশি}} = x$ ধরে সমস্যাগুলোকে সমাধান করতে হবে।

(i) $\sqrt[4]{a^4} = ?$

ধরি, $x = \sqrt[4]{a^4} \Rightarrow x^4 = a^4 \Rightarrow x^4 - a^4 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - (a^2)^2 = 0 \Rightarrow (x^2 + a^2)(x^2 - a^2) = 0$ হয়, $x^2 + a^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 = -a^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-a^2}$ অথবা, $x^2 - a^2 = 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2(-1)} \Rightarrow x = \pm a\sqrt{-1} \therefore x = \pm ai$ $\quad \Rightarrow x^2 = a^2 \therefore x = \pm a$ $\quad \therefore \sqrt[4]{a^4} = \pm a, \pm ai$

(ii) $\sqrt[4]{-a^4} = ?$

ধরি, $x = \sqrt[4]{-a^4} \Rightarrow x = \sqrt[4]{a^4i^2} \Rightarrow x^4 = a^4i^2$

$\Rightarrow x^2 = \pm a^2i \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2}(\pm 2i) \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2}(1 \pm 2i - 1)$

$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2}[1^2 \pm 2.1.i + i^2] \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2}(1 \pm i)^2$

$\therefore x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}(1 \pm i) \therefore \sqrt[4]{-a^4} = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

Shortcut

(চতুর্মূল)

- $\sqrt[4]{a^4} = \pm a, \pm ai$
- $\sqrt[4]{-a^4} = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

- **ষড়মূল:** $\sqrt[6]{1} = \pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2$; $\sqrt[6]{\text{রাশি}} = x$ ধরে সমস্যাগুলোকে সমাধান করতে হবে।

(i) $\sqrt[6]{a^6} = \sqrt[6]{(a^3)^2} = \pm\sqrt[3]{a^3} = \pm\sqrt[3]{a^3.1} = \pm a\sqrt[3]{1} = \pm a.1, \pm a.\omega, \pm a\omega^2 \therefore \sqrt[6]{a^6} = \pm a, \pm a\omega, \pm a\omega^2$

(ii) $\sqrt[6]{-a^6} = \sqrt[6]{a^6.i^2} = \sqrt[6]{(a^3i)^2} = \pm\sqrt[3]{a^3i} = \pm(-ai, -ai\omega, -ai\omega^2) \therefore \sqrt[6]{-a^6} = \pm ai, \pm ai\omega, \pm ai\omega^2$

Shortcut

(ষড়মূল)

- $\sqrt[6]{a^6} = \pm a, \pm a\omega, \pm a\omega^2$
- $\sqrt[6]{-a^6} = \pm ai, \pm ai\omega, \pm ai\omega^2$

Problems

Example-27. (i) $\pm 2i$ (ii) $-7 + 24i$ জটিল সংখ্যাগুলোর বর্গমূল নির্ণয় কর।

[CU'22-23, KU'19-20, SAU' 14-15, JU' 14-15, RU' 07-08, JU' 11-12, CU' 11-12]

Solⁿ: (i) $\pm\sqrt{\pm 2i} = \pm\sqrt{1^2 \pm 2.1.i + i^2} = \pm\sqrt{(1 \pm i)^2} = \pm(1 \pm i)$ **(Ans.)**

(ii) $-7 + 24i = -7 + 2.12.i = 3^2 + 2.3.4i + (4i)^2 = (3 + 4i)^2 \therefore \sqrt{-7 + 24i} = \pm(3 + 4i)$ **(Ans.)**

Example-28. $8 + 4\sqrt{5}i$ এর বর্গমূল হবে– **[DU'12-13]**

Solⁿ: $r = \sqrt{8^2 + (4\sqrt{5})^2} = 12$; $\pm\sqrt{8 + 4\sqrt{5}i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{r+8} + i\sqrt{r-8}\} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{20} + i\sqrt{4}\}$

$= \pm\left\{\frac{\sqrt{10}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\right\} = \pm(\sqrt{10} + i\sqrt{2})$

❖ **Shortcut:** MCQ তে option গুলো বর্গ করলে Answer পাওয়া যাবে।

Example-29. $-8 - 6\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

Solⁿ: $-8 - 6\sqrt{-1} = -8 - 6i = 1 - 9 - 6i = 1 + (3i)^2 - 2.3i = (1 - 3i)^2$

$\therefore \pm\sqrt{-8 - 6i} = \pm(1 - 3i)$ **(Ans.)**

Example-30. $\sqrt{i} + \sqrt{-i}$ এর মান কত? **[CU'07-08, RU'10-11, 11-12, JnU'14-15,11-12]**

Solⁿ: $\sqrt{i} = \sqrt{\frac{2i}{2}} = \sqrt{\frac{(1+i)^2}{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ $\therefore \sqrt{i} + \sqrt{-i} = \frac{1+i+1-i}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** মনে রাখবে,

$\sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, $\sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$ এবং $\therefore \sqrt{i} + \sqrt{-i} = \pm\sqrt{2}$

Example-31. নিম্নের রাশিগুলোর মান বের কর: (i) $\sqrt[3]{1}$ (ii) $\sqrt[3]{-i}$ (iii) $\sqrt[3]{-27}$

Solⁿ: (i) $\sqrt[3]{1}$

ধরি, $x = \sqrt[3]{1} \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1$

অথবা, $x = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ $\therefore \sqrt[3]{1} = 1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = 1, \omega, \omega^2$.

[Written exam. এ আসলে ω ও ω^2 এর মান উল্লেখ করতে হবে**]**

(ii) $\sqrt[3]{-i}$

ধরি, $x = \sqrt[3]{-i}$ বা, $x^3 = -i$ বা, $x^3 = i^3$ বা, $\frac{x}{i} = \sqrt[3]{1} = 1, \omega, \omega^2$ [যেখানে, $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$]

$\therefore x = i, i\omega, i\omega^2$ $\therefore \sqrt[3]{-i} = i, i\omega, i\omega^2$ **(Ans.)**

(iii) $\sqrt[3]{-27}$

ধরি, $x = \sqrt[3]{-27}$ বা, $x^3 = (-3)^3$ বা, $\left(\frac{x}{-3}\right)^3 = 1$

বা, $\frac{x}{-3} = \sqrt[3]{1} = 1, \omega, \omega^2$ [যেখানে, $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$] $\therefore x = \sqrt[3]{-27} = -3, -3\omega, -3\omega^2$ **(Ans.)**

Shortcut for MCQ: $\sqrt[3]{-a^3} = -a, -a\omega, -a\omega^2 \Rightarrow \sqrt[3]{-27} \Rightarrow \sqrt[3]{-3^3} = -3, -3\omega, -3\omega^2$

Example-32. $\sqrt[4]{-1024}=?$ **[JU' 10-11]**

Solⁿ: $x=\sqrt[4]{-1024}\Rightarrow x^4=-1024\Rightarrow x^4=(32i)^2\Rightarrow x^2=\pm32i$
$\Rightarrow x^2=4^2\pm2.4.4i+(4i)^2\Rightarrow x^2=(4\pm4i)^2\Rightarrow x=\pm4(1\pm i)$ **(Ans.)**

Example-33. নিম্নের রাশিগুলোর মান বের কর: (i) $(-i)^{\frac{1}{6}}\Rightarrow\sqrt[6]{-i}$ (ii) $\sqrt[6]{-64}$ Or, $(-64)^{\frac{1}{6}}$

Solⁿ: (i) ধরি, $x=(-i)^{\frac{1}{6}}$ বা, $x^6=-i$ বা, $x^6=i^3$ বা, $\left(\frac{x^2}{i}\right)^3=1$ বা, $\frac{x^2}{i}=\sqrt[3]{1}=1,\omega,\omega^2$

বা, $x^2=i,i\omega,i\omega^2$ বা, $x=\pm\sqrt{i},\pm\sqrt{i\omega},\pm\sqrt{i\omega^2}$

$\therefore(-i)^{\frac{1}{6}}=\pm\sqrt{i},\pm\sqrt{i\omega},\pm\sqrt{i\omega^2}$ $\therefore\sqrt[6]{-i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\omega^2;\pm\frac{i}{\sqrt{2}}(1+i)\omega$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $x=\sqrt[6]{-64}$ বা, $x^6=(8i)^2$ বা, $x^3=\pm8i$ বা, $x^3=(\pm2i)^3$ বা, $\left(\frac{x}{\pm2i}\right)^3=1$

বা, $\frac{x}{\pm2i}=\sqrt[3]{1}=1,\omega,\omega^2$ [যেখানে $\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\omega^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$]

$\therefore x=\pm2i,\pm2i\omega,\pm2i\omega^2$

Type-06: i এর ঘাতের মান নির্ণয় এবং ধারা সংক্রান্ত

Concept

(i) $i^{4n+1}=i^1=i,\ i^{4n+2}=i^2=-1,\ i^{4n+3}=i^3=-i,\ i^{4n}=i^4=1$
(ii) a, b, c, d চারটি ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা হলে, $i^a+i^b+i^c+i^d=0$; যেমন: $i^1+i^2+i^3+i^4=0$ হয়
(iii) a ও b দুইটি ক্রমিক বিজোড় সংখ্যা হলে, $i^a+i^b=0$; যেমন: $i^1+i^3=i-i=0$
(iv) a ও b দুইটি ক্রমিক জোড় সংখ্যা হলে, $i^a+i^b=0$; যেমন: $i^2+i^4=-1+1=0$

Problems

Example-34. $z=\left\{\frac{1+(i)^{4n+1}}{1+(i)^{4n+3}}\right\}^{2(2m+1)}$ হলে z =? যেখানে, $n,m\in\mathbb{N}$

(a) 1 (b) −1 (c) 2 (d) −2

Solⁿ: (b); $z=\left\{\frac{1+(i)^{4n+1}}{1+(i)^{4n+3}}\right\}^{2(2m+1)}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4m+2}=(i)^{4m+2}\left[\because\frac{1+i}{1-i}=i\text{ হয় এবং }i^{4n}=1\text{ হয়}\right]=i^2=-1$ **(Ans.)**

Example-35: $i^2=-1$ হলে, $i+i^2+i^3+\dots\dots\dots+i^{23}=?$ **[Agri. Guccho'20-21]**

Solⁿ: $i^1+i^2+i^3+i^4+\dots\dots\dots+i^{23}$ এর ক্ষেত্রে i এর ঘাতগুলো ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা।
অর্থাৎ, পরপর চারটি করে i এর ঘাত নিলে যোগফল 0 হবে।
তাহলে মোট পদ = 23 টি = 20 + 3 টি = 4 × 5 + 3 টি
∴ 20 টি পদের যোগফল হবে = 0 এবং 3 টি পদ বাকি থাকবে।

$\therefore i+i^2+i^3+\underbrace{i^4+\dots\dots\dots+i^{23}}_{=0}$

$=i+i^2+i^3=i-1-i=-1$ **(Ans.)**

Example-36: $i^2=-1$ হলে, $1+i+i^2+i^3+\dots\dots\dots+i^{104}=?$

Solⁿ: $1+i+i^2+i^3+\dots\dots\dots+i^{104}=i^0+i^1+i^2+i^3+\dots\dots\dots+i^{104}$

পদ সংখ্যা $=\frac{\text{শেষ পদ}-\text{১ম পদ}}{\text{সাধারণ অন্তর}}+1=\frac{104-0}{1}+1=105$ টি

এখন, $105=104+1=4\times26+1$

∴ 104 টি পদের যোগফল হবে 0 এবং 1টি পদ বাকি থাকবে।

$\therefore 1+\underbrace{i+i^2+i^3+\dots\dots\dots+i^{104}}_{=0}=1$ **(Ans.)**

Example-37. $i^i.i^{i^2}.i^{i^3}\ldots\ldots\ldots i^{i^{37}}=?$

Sol^n: $i^i.i^{i^2}\ldots\ldots\ldots i^{i^{37}}=i^{i+i^2+i^3+\ldots\ldots\ldots+i^{37}}=i^i$

$=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i=e^{i^2\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}$ **(Ans.)**

[$\because i^2+i^3+\ldots\ldots\ldots+i^{37}=0$]
[মোট পদ 37 টি, $37=36+1$ $\therefore$ 4 টি করে পদের সমষ্টি $=0$ হবে এবং 1 টি পদ থাকবে]

Example-38. $\sum_{n=2}^{11}(i^n+i^{n+1})=?$ যেখানে $i=\sqrt{-1}$

(a) i (b) $2i$ (c) $-2i$ (d) $1+i$

Sol^n: (c); $\sum_{n=2}^{11}(i^n+i^{n+1})=(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+(i^4+i^5)+\ldots\ldots\ldots+(i^{11}+i^{12})$

$=\underbrace{(i^2+i^3+i^4+\ldots\ldots\ldots+i^{11})}_{\text{১০টি পদ}}+\underbrace{(i^3+i^4+i^5+\ldots\ldots\ldots+i^{12})}_{\text{১০টি পদ}}$

$=(i^2+i^3)+(i^3+i^4)$ [$\because i+i^2+i^3+i^4=0$] $=-1-i-i+1=-2i$ **(Ans.)**

Example-39. $i^2=-1$ হলে, $i^3+i^5+i^7+\ldots\ldots\ldots+i^{57}=?$

Sol^n: $i^3+i^5+i^7+\ldots\ldots\ldots+i^{57}$

পদ সংখ্যা $=\frac{\text{শেষ পদ}-\text{১ম পদ}}{\text{সাধারণ অন্তর}}+1=\frac{57-3}{2}+1=28$

$$\begin{array}{r|l} 2)28(14 & \\ \underline{2} & \\ 8 & \\ \underline{8} & \\ 0 & \end{array}$$

$\because$ এখানে i এর ঘাতগুলো বিজোড় সংখ্যা
$\therefore$ পরপর 2 টি পদের যোগফল $=0$; এখন $28=14\times 2$

$\therefore$ 2 টি করে করে পদগুলোর যোগফল 0 হয়ে যাবে। $\therefore i^3+i^5+i^7+\ldots\ldots\ldots+i^{57}=0$

Example-40. $i^2=-1$ হলে, $i^5+i^7+i^9+\ldots\ldots\ldots+i^{97}=?$

Sol^n: $i^5+i^7+i^9+\ldots\ldots\ldots+i^{97}$

পদ সংখ্যা $=\frac{97-5}{2}+1=47$

$$\begin{array}{r} 2)47(23 \\ \underline{4} \\ 7 \\ \underline{6} \\ 1 \end{array}$$

তাহলে, $47=2\times 23+1$
$\therefore$ 46 টি পদের যোগফল $=0$ এবং 1 টি পদ থেকে যাবে।

$\therefore i^5+\underbrace{i^7+i^9+\ldots\ldots\ldots+i^{97}}_{=0}=i^5=i$ **(Ans.)**

Example-41. $i^2=-1$ হলে $i^4+i^6+i^8+\ldots\ldots\ldots+i^{104}=?$

Sol^n: পদ সংখ্যা $=\frac{104-4}{2}+1=51$ টি

এখন, $51=2\times 25+1$

$\therefore$ 50 টি পদের যোগফল $=0$ হয়ে যাবে। 1 টি পদ থেকে যাবে।

$\therefore i^4+\underbrace{i^6+i^8+\ldots\ldots\ldots+i^{104}}_{=0}=i^4=1$ **(Ans.)**

Type-07: ω এর ঘাতের মান নির্ণয় এবং ω এর ধারা সংক্রান্ত

Concept

$\omega^1 = \omega$	$\omega^4 = \omega^3.\omega = \omega$	$\omega^7 = \omega^6.\omega = \omega$
$\omega^2 = \omega^2$	$\omega^5 = \omega^3.\omega^2 = \omega^2$	$\omega^8 = \omega^6.\omega^2 = \omega^2$
$\omega^3 = 1$	$\omega^6 = \omega^3.\omega^3 = 1$	$\omega^9 = \omega^6.\omega^3 = 1$

(i) $\omega^{3n+1} = \omega^{3n}.\omega^1 = (\omega^3)^n.\omega^1 = 1^n.\omega = \omega$

(ii) $\omega^{3n+2} = \omega^{3n}.\omega^2 = 1.\omega^2 = \omega^2$

(iii) $\omega^{3n} = (\omega^3)^n = 1^n = 1$

∴ ω এর ঘাতকে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ থাকলে ω এর ঘাতের মান = $\omega^{\text{ভাগশেষ}}$

অর্থাৎ, $\omega^p = \omega^q$ [যখন, q হলো p কে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ]

আবার, $1 + \omega + \omega^2 = 0$

তাহলে, $\omega^5 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^2 + 1 + \omega = 0$

এভাবে ω এর তিনটি ক্রমিক ঘাতের যোগফল = 0

বা, a, b, c তিনটি ক্রমিক সংখ্যা হলে, $\omega^a + \omega^b + \omega^c = 0$

Problems

Example-42: $x = \sqrt[3]{1}$ সমীকরণের মূল তিনটির গুণফল কত? **[RU'19-20]**

Sol^n: $x = \sqrt[3]{1}$ সমীকরণের তিনটি মূল $1, \omega, \omega^2$ ∴ $1 \times \omega \times \omega^2 = \omega^3 = 1$

Example-43. এককের কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয়ের একটি ω হলে $\omega^{16} + \omega^{32}$ এর মান কত? **[RU'11-12]**

Sol^n: $\omega^{16} + \omega^{32} = \omega^{1+6} + 3^{3+2} = \omega^7 + \omega^5 = \omega^6.\omega + \omega^3.\omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$

বি.দ্র: $\omega^n = \omega^r$ $(n, r, \in \mathbb{N})$, যখন n ও r কে 3 দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ পাওয়া যায়।

কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাকে 3 দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ পাওয়া যায়, তার ডিজিটগুলোর যোগফলকে 3 দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ পাওয়া যাবে।

Example-44: $\omega^{01713236946} = ?$

Sol^n: $\omega^{01713236946}$; 01713236946 কে 3 দ্বারা ভাগ করতে হবে। কিন্তু তা অনেক বড় হয়।

Shortcut পদ্ধতি হলো:

(i) 0 গুলো কাটতে হবে (তা যেখানেই থাক)

(ii) 3 ও 3 এর গুণিতক (3, 6, 9) গুলোকে কাটতে হবে

(iii) যাদের যোগ করলে 3 বা 3 এর গুণিতক হয় তাদের কেটে দিতে হবে (যেমনঃ 24 এর জন্য 2 + 4 = 6 তাই 2 আর 4 কেটে দিতে হবে)

(iv) শেষে যা পড়ে থাকবে তাই হবে উত্তর

Steps:

(i) $\cancel{0}1713236946$ (ii) $171\cancel{3}2\cancel{3}\cancel{6}\cancel{9}4\cancel{6}$

(iii) $\boxed{\cancel{171}}$ $\boxed{\cancel{24}}$ [1 + 7 + 1 = 9; 2 + 4 = 6] (iv) 0

তাহলে, $\omega^0 = 1$ **(Ans.)**

বিকল্প: $\omega^{01713236946} = ?$

∴ 0 + 1 + 7 + 1 + 3 + 2 + 3 + 6 + 9 + 4 + 6 = 42 তাহলে, $\begin{array}{r} 3)42(14 \\ \underline{42} \\ 0 \end{array}$ $= \omega^0 = 1$

Example-45: $\omega^{244111390} = ?$

Solⁿ:

(i) 244111390 (ii) $2441113\cancel{9}\cancel{0}$

(iii) $\cancel{24411}1$ $[2+4+4+1+1=12]$ (iv) 1

$\therefore$ উত্তর হবে $= \omega^1 = \omega$ **(Ans.)**

Example-46. $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \ldots\ldots \omega^{99} = ?$

Solⁿ: $\omega + \omega^2 + 1 = 0$

এভাবে, 3 টি নিয়ে যে সেট হবে তার মান 0। মোট পদসংখ্যা = 99 ; 99, 3 দ্বারা বিভাজ্য।

মোট 33 টি গ্রুপ এবং প্রতিটি গ্রুপ এর যোগফল 0। $\therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 \ldots\ldots \omega^{99} = 0$ **(Ans.)**

Example-47: এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, $1 + \omega^2 + \omega^4 + \cdots + \omega^{16}$ এর মান কত? **[RU'19-20]**

Solⁿ: $1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^8 + \omega^{10} + \omega^{12} + \omega^{14} + \omega^{16}$

$= 1 + \omega^2 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega = 0 + 0 + 0 = 0$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

Example-48: $\omega^5 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \ldots\ldots\ldots + \omega^{101} = ?$

Solⁿ: $\omega^5 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \ldots\ldots\ldots + \omega^{101}$

পদ সংখ্যা $= \frac{101-5}{1} + 1 = 97$

এখন, $97 = 96 + 1 = 3 \times 32 + 1$

$\therefore$ 96 টি পদের যোগফল 0 এবং 1 টি পদ অবশিষ্ট থাকবে।

$\therefore$ সমষ্টি $= \omega^5 + \underbrace{\omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \ldots\ldots\ldots + \omega^{101}}_{=0} = \omega^5 = \omega^2$ **(Ans.)**

Type-08: ω এর মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ [যেখানে, ω এবং ω^2 হলো এককের দুইটি জটিল ঘনমূল]

- $\omega^3 = 1$
- $1 + \omega + \omega^2 = 0$
- $\omega^{3n+x} = \omega^{3n}.\omega^x = \omega^x$
- $\omega = \frac{1}{\omega^2}$ অথবা $\omega^2 = \frac{1}{\omega}$

Problems

Example-49. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, $(1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^4)(1 + \omega^8)$ এর মান নির্ণয় কর।

[DU' 15-16, JnU' 07-08, RU' 06-07]

Solⁿ: $(1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^4)(1 + \omega^8) = (1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega)(1 + \omega^2) = (1 + \omega)^2 (1 + \omega^2)^2$

$= \{(1 + \omega)(1 + \omega^2)\}^2 = (1 + \omega^2 + \omega + \omega^3)^2 = (0 + 1)^2 = 1$ **(Ans.)**

Example-50. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে $(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^8)$ এর মান নির্ণয় কর।

[JU'19-20, JnU'07-08, RU'06-07, DU'15-16]

Solⁿ: $(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^8) = (1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega)(1 - \omega^2)$

$= \{(1 - \omega)(1 - \omega^2)\}^2 = (1 - \omega - \omega^2 + \omega^3)^2 = (1 - (\omega + \omega^2) + 1)^2 = (1 + 1 + 1)^2 = 9$

$[\because \omega + \omega^2 = -1]$ **(Ans.)**

Example-51. যদি (ω) এককের একটি কাল্পনিক জটিল ঘনমূল হয়, তবে $(1-\omega+\omega^2)^2+(1+\omega-\omega^2)^2$ এর মান কত?

[JU'22-23, DU' 05-06, 02-03, 01-02, JnU' 07-08, JU' 09-10]

Solⁿ: $(1-\omega+\omega^2)^2+(1+\omega-\omega^2)^2$

$=(-\omega-\omega)^2+(-\omega^2-\omega^2)^2 [\because 1+\omega+\omega^2=0] = 4\omega^2+4\omega^4 = 4\omega^2+4\omega\ [\because \omega^3=1]$

$=4(\omega^2+\omega)=-4\ [\because \omega+\omega^2=-1]$ **(Ans.)**

Example-52: $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}), y=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হলে, $1-x-y-xy$ এর মান হবে?

(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) 2

Solⁿ: (c); ω এবং ω^2 এককের দুইটি জটিল ঘনমূল হলে, $\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ এবং $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ হয়।

$\therefore \omega = x$ এবং $\omega^2 = y$ লেখা যায়,

$\therefore 1-x-y-xy = 1-\omega-\omega^2-\omega.\omega^2 = 1-(\omega+\omega^2)-\omega^3$

$=1-(-1)-1\ [\therefore 1+\omega+\omega^2=0$ এবং $\omega^3=1]=1$

Type-09: শর্তাধীনে মান নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

এক্ষেত্রে জটিল সংখ্যার ধর্মগুলো ব্যবহার করতে হবে।

Problems

Example-53. $a+ib=4-i$ হলে, a^2-b^2 এর মান কত? **[JU'19-20]**

Solⁿ: $a=4; b=-1 \because a^2-b^2=4^2-(-1)^2=16-1=15$

Example-54. $x=3+2i$ এবং $y=3-2i$ হলে, $x^2+xy+y^2=?$ **[CU'10-11]**

Solⁿ: $x+y=6,\ xy=13 \therefore x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=6^2-13=23$ **(Ans.)**

Example-55. $\sqrt{p+4i}=q+i$ হলে $p-q$ এর মান কত? **[GST'20-21]**

Solⁿ: $\sqrt{p+4i}=q+i \Rightarrow p+4i=(q+i)^2=q^2+i^2+2qi \Rightarrow p+4i=q^2-1+i2q$

এখন, $2q=4 \Rightarrow q=2;\ p=q^2-1=2^2-1=3 \therefore p-q=3-2=1$

Example-56. $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib$ এবং x, a ও b বাস্তব হলে, দেখাও যে, $a^2+b^2=1$ **[RU'15-16]**

Solⁿ: $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib \Rightarrow \left|\frac{1+ix}{1-ix}\right|=|a-ib| \Rightarrow \frac{|1+ix|}{|1-ix|}=|a-ib|$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{1^2+x^2}}{\sqrt{1^2+(-x)^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{a^2+b^2}\ \therefore a^2+b^2=1$

Example-57. $\sqrt[3]{a+ib}=x+iy$ হয়, তাহলে $\sqrt[3]{a-ib}=?$

Solⁿ: $\sqrt[3]{a+ib}=x+iy \Rightarrow a+ib=x^3+3x^2.iy+3.x.(iy)^2+(iy)^3$

$\Rightarrow a+ib=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$

$a=x^3-3xy^2;\ b=3x^2y-y^3$

$\sqrt[3]{a-ib}=\sqrt[3]{x^3-3xy^2-i(3x^2y-y^3)}=\sqrt{x^3-3x^2.iy+3x(iy)^2-(iy)^3}=\sqrt[3]{(x-iy)^3}=x-iy$

Shortcut: $\sqrt[3]{a+ib}=x+iy \Rightarrow \overline{\sqrt[3]{a+ib}}=\overline{x+iy} \Rightarrow \sqrt[3]{\overline{a+ib}}=\overline{x+iy} \therefore \sqrt[3]{a-ib}=x-iy$

Example-58. $\sqrt[3]{a+ib} = x+iy$ হলে প্রমাণ কর যে, $4(x^2-y^2) = \frac{a}{x}+\frac{b}{y}$.

Sol^n: দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a+ib} = x+iy \Rightarrow a+ib = (x+iy)^3 = x^3 - iy^3 + 3ix^2y - 3xy^2$

$\therefore a = x^3 - 3xy^2$ & $b = 3x^2y - y^3; \frac{a}{x} = x^2 - 3y^2; \frac{b}{y} = 3x^2 - y^2$

$\therefore \frac{a}{x}+\frac{b}{y} = x^2 - 3y^2 + 3x^2 - y^2 = 4(x^2-y^2) \therefore 4(x^2-y^2) = \frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ **(Proved)**

Example-59. $x+iy = \sqrt{\frac{p+iq}{r+iq}}$ হলে, $(x^2+y^2)^2 =$ কত? **[RU'22-23]**

(a) $\frac{p^2-q^2}{r^2+q^2}$ (b) $\frac{p^2+q^2}{r^2-q^2}$ (c) $\frac{p^2+q^2}{r^2+q^2}$ (d) $\frac{p^2-q^2}{r^2-q^2}$

Sol^n: (c); $|x+iy| = \left|\sqrt{\frac{p+iq}{r+iq}}\right| \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \left(\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{r^2+q^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (x^2+y^2)^2 = \frac{p^2+q^2}{r^2+q^2}$

Example-60. $x = 2+i$ হলে, $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$ এর মান কত?

Sol^n: $x = 2+i \Rightarrow x-2 = i \Rightarrow (x-2)^2 = i^2 \Rightarrow x^2-4x+4+1 = 0 \Rightarrow x^2-4x+5 = 0$

এখন, $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x^2 - 4x + 5$

$= x^2(x^2-4x+5) + 1(x^2-4x+5) = x^2 \times 0 + 1 \times 0 = 0$ **(Ans.)**

Example-61. $x = 1+i$, হলে, $x^6 + x^4 + x^2 + 1 =$?

(a) $6i-3$ (b) $-6i+3$ (c) $-6i-3$ (d) $6i+3$

Sol^n: (c); $x^6+x^4+x^2+1 = (x^2+1)(x^4+1)$ $[\because x = 1+i \therefore x^2 = 2i]$

$= (2i+1)(-3) = -6i-3$

Example-62. $\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\dots\dots\dots\infty}}} =$?

Sol^n: $\sqrt{-3+\sqrt{-3+\dots\dots\dots}} = x$

$\therefore -3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\dots\dots\dots}} = x^2 \Rightarrow x^2+3 = x \Rightarrow x^2-x+3 = 0 \therefore x = \frac{1\pm\sqrt{1-12}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{-11}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$

Type-10: জটিল সংখ্যাভিত্তিক সঞ্চারপথ সংক্রান্ত

Concept

$z = x+iy$ কোন জটিল সংখ্যা হলে-

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} \rightarrow (0,0)$ বিন্দু হতে (x,y) বিন্দুর দূরত্ব।

$|z-3| = |x+iy-3| = \sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} \rightarrow (-3,0)$ বিন্দু হতে (x,y) বিন্দুর দূরত্ব।

(i) $|z+a| = |z+b|$ অথবা $|z+a| = |\bar{z}+b|$ সরলরেখা নির্দেশ করে।

(ii) $|z+a| = k$ বৃত্ত নির্দেশ করে।

(iii) $|az+k_1| = |bz+k_2|$ বৃত্ত নির্দেশ করে।

(iv) $\left|\frac{z+a}{z+b}\right| = k; k = 1$ হলে সরলরেখা নির্দেশ করে। $k \neq 1$ হলে বৃত্ত নির্দেশ করে এবং $|z+a| = |z+b|$ (বৃত্ত)

(v) $z\bar{z} = 0$ বিন্দু বৃত্ত নির্দেশ করে, $z\bar{z} = r$ বৃত্ত নির্দেশ করে যার কেন্দ্র $(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ r

(vi) $|z-a|+|z-b| = k; |a-b| < k$ হলে উপবৃত্ত নির্দেশ করে। [$k =$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য]

(vii) $||z-a|-|z-b|| = k; |a-b| > k$ হলে অধিবৃত্ত নির্দেশ করে। [যেখানে a, b, k বাস্তব ধ্রুব সংখ্যা এবং $k =$ আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য]

(viii) $|z-a| = x$ অথবা $|z-a| = y$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

Shortcut

- $|z+a|+|z-a|=2b$ উপবৃত্তের সমীকরণ হবে যদি $a<b$ হয়।
- $||z+a|-|z-a||=2b$ অধিবৃত্তের সমীকরণ হবে যদি $a>b$ হয়।

এদের উপকেন্দ্র $(\pm a, 0)$, বৃহৎ/আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b$

Problems

Example-63. দেখাও যে, $|z-3|=4$ সমীকরণটি আর্গন্ড চিত্রে একটি বৃত্ত নির্দেশ করে। **[CU'22-23]**

Sol^n: ধরি $z=x+iy$

তাহলে $|x+iy-3|=4\Rightarrow|(x-3)+iy|=4\Rightarrow\sqrt{(x-3)^2+y^2}=4\Rightarrow(x-3)^2+y^2=4^2$

$\Rightarrow(x-3)^2+(y-0)^2=4^2$ যা কেন্দ্র (3, 0) এবং ব্যাসার্ধ 4 বিশিষ্ট একটি বৃত্তের সমীকরণ।

Example-64. $z=x+iy$ হলে, $|z-5|+|z+5|=16$ কি নির্দেশ করে? **[DU'16-17]**

Sol^n: $|z-5|+|z+5|=16$ একটি বক্ররেখা যার উপরস্থ প্রতিটি বিন্দুর $(-5,0)$ ও $(5,0)$ বিন্দু থেকে দূরত্বের যোগফল 16। কাজেই এটি একটি উপবৃত্ত যার উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm5,0)$ ও বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য 16 একক।

Example-65. যদি $z=x+iy$ হয়, তবে $|2z-1|=|z-2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ কি হবে? **[KU'19-20]**

Sol^n: $z=x+iy$; $|2z-1|=|z-2|\Rightarrow|2(x+iy)-1|=|x+iy-2|$

$\Rightarrow\sqrt{(2x-1)^2+(2y)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}\Rightarrow4x^2+1-4x+4y^2=x^2-4x+4+y^2$

$\Rightarrow3x^2+3y^2=3\;\therefore x^2+y^2=1\;\therefore$ সমীকরণটি একক বৃত্তের (unit circle), কারণ ব্যাসার্ধ 1 একক।

অথবা, কোন জটিল সংখ্যা $z=x+iy$ এর জন্য $|az+k_1|=|bz+k_2|$ সর্বদা বৃত্ত নির্দেশ করে।

Example-66. যদি $z=x+iy$ হয়, তবে $|z+i|=|\bar{z}+2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের নাম কি হবে? **[KU'18-19]**

Sol^n: $|z+i|=|\bar{z}+2|\Rightarrow\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Rightarrow x^2+y^2+2y+1=x^2+4x+4+y^2\Rightarrow4x-2y+3=0$ যা সরলরেখার সঞ্চারপথ নির্দেশ করে।

Example-67. $z=x+iy$ হলে, $|z-8|+|z+8|=20$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথটি কী হবে? **[RU'13-14]**

Sol^n: $z=x+iy\;\therefore|z-8|+|z+8|=20\Rightarrow|x+iy-8|+|x+iy+8|=20$

$\Rightarrow\sqrt{(x-8)^2+y^2}+\sqrt{(x+8)^2+y^2}=20\Rightarrow(x-8)^2+y^2=400-40\sqrt{(x+8)^2+y^2)}+(x+8)^2+y^2$

$\Rightarrow-32x=400-40\sqrt{(x+8)^2+y^2)}\Rightarrow-4x=50-5\sqrt{(x+8)^2+y^2)}$

$\Rightarrow4x+50=5\sqrt{(x+8)^2+y^2)}\Rightarrow(4x+50)^2=25(x+8)^2+25y^2$

$\Rightarrow16x^2+400x+2500=25x^2+400x+1600+25y^2$

$\Rightarrow9x^2+25y^2=900\Rightarrow\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; যা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

- **মডুলাস নির্ণয়ের সূত্র:**

  (i) $x+iy$ আকারের জটিল সংখ্যার মডুলাস, $r=\sqrt{x^2+y^2}$

  (ii) $(x+iy)^n$ আকারের জটিল সংখ্যার মডুলাস, $r=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n$

- **আর্গুমেন্ট নির্ণয়ের সূত্র:**

  (i) $x+iy$ আকারের জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট, $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$; [প্রথম চতুর্ভাগ]

  (ii) মুখ্য আর্গুমেন্টের জন্য $-\pi<\theta\le\pi$

  (iii) কোন জটিল সংখ্যা দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করলে মুখ্য আর্গুমেন্ট, $\theta=\pi-\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

(iv) কোন জটিল সংখ্যা তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করলে মূখ্য আর্গুমেন্ট, $\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

(v) কোন জটিল সংখ্যা চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করলে মূখ্য আর্গুমেন্ট, $\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

(vi) $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$; z_1, z_2 এর মডুলাস $= r_1, r_2$
এবং আর্গুমেন্ট $= \theta_1, \theta_2$ হলে, $z_1.z_2$ এর মডুলাস $= r_1.r_2$ এবং আর্গুমেন্ট $= \theta_1 + \theta_2$
এবং $\frac{z_1}{z_2}$ এর মডুলাস $= \frac{r_1}{r_2}$ এবং আর্গুমেন্ট $= \theta_1 - \theta_2$

(vii) $\omega^{3n} = 1$ $[n = 0,1,2 \dots\dots\dots]$

(viii) $\omega^{3n+1} = \omega$

(ix) $\omega^{3n+2} = \omega^2$

(x) $1 + \omega + \omega^2 = 0$

(xi) $\sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

(xii) $\sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

(xiii) $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{2}$

(xiv) $\sqrt{x \pm iy} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{r+x} \pm i\sqrt{r-x}\}$ যেখানে, $r = \sqrt{x^2+y^2}$

(xv) $\overline{(Z_1 Z_2)} = \overline{Z_1}.\overline{Z_2}$

(xvi) $x^3 = n$ হলে, $x = \sqrt[3]{n}, \sqrt[3]{n}\omega, \sqrt[3]{n}\omega^2$

(xvii) অয়লারের সমীকরণ: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

(xviii) অয়লারের অভেদ: $e^{i\pi} + 1 = 0$

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম

MCQ

01. $4 + 3i$ জটিল সংখ্যার মডুলাস কত?
(a) 7 (b) 8 (c) 5 (d) 6

02. $\frac{-1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{i}}}$ এর মান–
(a) $1 - i$ (b) 10 (c) 12 (d) $i - 1$

03. $\frac{4+3i}{4-3i}$ এর মডুলাস কত?
(a) 1 (b) 0 (c) 5 (d) 10

04. যদি $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$ হয় তাহলে $\sqrt[3]{a-ib} = ?$
(a) $y - ix$ (b) $x - iy$ (c) $y - \frac{i}{x}$ (d) $x - \frac{i}{y}$

05. যদি $z = x + iy$ হয় এবং $|z - 3| = 4$ একটি বৃত্ত নির্দেশ করে, তবে নিচের কোনটি সত্য?
(a) বৃত্তটির কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং ব্যাসার্ধ 4
(b) বৃত্তটির কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং ব্যাসার্ধ 4
(c) বৃত্তটির কেন্দ্র কোন অক্ষের উপর অবস্থিত নয় এবং ব্যাসার্ধ 16
(d) বৃত্তটির কেন্দ্র উভয় অক্ষের উপর অবস্থিত এবং ব্যাসার্ধ 16

06. $8 + 6i$ এর বর্গমূল হচ্ছে–
(a) $-3 + i$ (b) $\pm(3 + i)$ (c) $3 - i$ (d) কোনটিই নয়

07. $\sqrt{\pm 2i} = ?$
(a) $\pm(1 \pm i)$ (b) $\pm 2\sqrt{-1}$ (c) $\pm 2\sqrt{i}$ (d) $2(1 \pm i)$

08. যদি $\sqrt{2p} = 1 + i$ হয়, তবে $p^6 + p^4 + p^2$ এর মান কত হবে?
(a) 1 (b) −1 (c) 0 (d) কোনটিই নয়

09. দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার গুণফল–
(a) বাস্তব সংখ্যা (b) অমূলদ সংখ্যা (c) মূলদ সংখ্যা (d) জটিল সংখ্যা

10. $\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right|$ এর মান কত?
(a) 0 (b) 1 (c) $2x^2 + y^2$ (d) $x^2 - y^2$

11. যদি $z = x + iy$, তাহলে $|z - 2| = 3$ কি নির্দেশ করে?
(a) সরলরেখা (b) বক্ররেখা (c) পরাবৃত্ত (d) বৃত্ত

12. দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার সমষ্টি ও গুণফল উভয়ই–
(a) অবাস্তব সংখ্যা (b) বাস্তব সংখ্যা (c) জটিল সংখ্যা (d) কোনটিই নয়

13. যদি $2i^2 + 6i^3 + 3i^{16} - 6i^{19} + 4i^{25}$ সমীকরণটি $x + iy$ পদ্ধতিতে লিখা হয়, তবে x ও y এর মান কত?
(a) 1, −8 (b) 1, 4 (c) 1, 16 (d) কোনটিই নয়

14. $\frac{5-i}{2-3i}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট কত?
(a) $2, \frac{\pi}{2}$ (b) $\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}$ (c) $2, \frac{\pi}{4}$ (d) $\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$

15. বাস্তব সহগবিশিষ্ট একটি বহুপদী সমীকরণে একটি মূল $a - ib$ হলে, অপরটি হবে–
(a) $a - ib$ (b) $-a - ib$ (c) $a + ib$ (d) কোনটিই নয়

16. $(1 - i)^{-2} - (1 + i)^{-2}$ এর মান কত?
(a) 1 (b) i (c) −i (d) −1

17. যদি $a + ib = 0$ হয় তবে কোনটি সঠিক?
(a) $a = 0$ ও $b = 0$ (b) $a + b = 0$ (c) $a = b$ (d) $a - b = 0$

18. $2 + i = A + iB$ হলে $A^2 + B^2$ এর মান কোনটি?
(a) 3 (b) 5 (c) 2 (d) 7

19. 1 এর ঘনমূলের সংখ্যা কয়টি?
(a) 3 টি (b) 2 টি (c) 4 টি (d) 1 টি

20. $x^2 - 2x + 2 = 0$ সমীকরণের সমাধান-
(a) $x = 2 \pm i$ (b) $x = 1 \pm i$ (c) $x = -1 \pm i$ (d) $-2 \pm i$

21. $z = x - iy$ হলে $|z + 1| = 2$ নির্দেশ করে-
(a) বৃত্ত (b) সরলরেখা (c) প্যারাবোলা (d) অধিবৃত্ত

22. এককের ঘনমূলগুলোর জটিল ঘনমূলদ্বয় যথাক্রমে a ও b হলে, $(1 - a)(1 - b)$ এর মান:
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

23. $(1 + i)^{-1}$ কে $a + ib$ আকারে লিখলে পাওয়া যায়-
(a) $\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

24. $z = x + iy$ হলে, $|z - 8| + |z + 8| = 20$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথটি কী হবে?
(a) বৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) সরলরেখা

25. $\sqrt{-3}\sqrt{-5}$ এর মান কত?
(a) $\sqrt{15}$ (b) $-\sqrt{15}$ (c) $\pm\sqrt{15}$ (d) 15

26. জটিল সংখ্যা i এর আর্গুমেন্ট কত?
(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) x (d) নির্ণয় করা সম্ভব নয়

27. $\sqrt{(4+6i\sqrt{5})}+\sqrt{(4-6i\sqrt{5})}$ এর মান কত?
(a) 34 (b) 20 (c) 36 (d) 6

28. $i^{-49}=?$
(a) $\frac{1}{-i}$ (b) $-i$ (c) i (d) কোনটিই নয়

29. $x^2-x+2=0, x=?$
(a) $\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$ (b) $\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$ (c) $\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ (d) কোনটিই নয়

30. $z=x+iy$ হলে $|z-1|=4$ কি নির্দেশ করে?
(a) সরলরেখা (b) বৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

31. কোনটি অয়লারের সমীকরণ?
(a) $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (b) $e^{i\pi}+1=0$
(c) $e^{i\pi}=\cos\pi-i\sin\pi$ (d) কোনটিই নয়

32. $\frac{1}{\omega^{2015}}+\frac{1}{\omega^{2016}}+\frac{1}{\omega^{2017}}$ এর মান কোনটি?
(a) $-2\omega^2$ (b) -2ω (c) 0 (d) 3

33. $i^{4n+3}, n\in N$ এর মান কত?
(a) -1 (b) 1 (c) $-i$ (d) i

34. $|z-7|=5$ বৃত্তের কেন্দ্র কত?
(a) (5,0) (d) (0,5) (c) (7,5) (d) (7,0)

35. $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=?$
(a) $\sqrt{ab}$ (b) $-\sqrt{ab}$ (c) $i^2\sqrt{ab}$ (d) b ও c উভয়ই

36. $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}=?$
(a) $2i^{n+1}$ (b) $-2i^{n-1}$ (c) $-2i^{n+1}$ (d) $-3i^{n+1}$

Written

37. মান নির্ণয় করঃ $\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\dots\dots\infty}}}$
38. বর্গমূল নির্ণয় করঃ $x+i\sqrt{x^4+x^2+1}$
39. মান নির্ণয় করঃ $\sqrt[3]{i}$
40. মান নির্ণয় করঃ $\sqrt[4]{-81}$
41. মান নির্ণয় করঃ $\sqrt[6]{-64}$
42. $z=x+iy$ এবং $3|z-1|=2|z-2|$ হলে, প্রমাণ করো যে, $5(x^2+y^2)=2x+7$.
43. $(-1-\sqrt{-3})^3+(-1+\sqrt{-3})^3$ এর মান কত?
44. $(1+\omega-\omega^2)(\omega+\omega^2-1)(\omega^2+1-\omega)=?$
45. যদি $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ হয় তবে $x^{3(n+2)}=?$
46. $1+2i, -1+2i$ এবং -1 জটিল সংখ্যাগুলো দ্বারা নির্দেশিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
47. প্রমাণ কর যে, $\left[\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\right]^n+\left[\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})\right]^n=2$ এবং -1 যখন n এর মান যথাক্রমে 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং 3 দ্বারা অবিভাজ্য। [CU'22-23]

প্র্যাক্টিস প্রবলেমের সমাধান

MCQ

01. **Ans:** (c) 5
02. **Sol^n: (d);** $\frac{-1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{i}}} = \frac{-1}{1-\frac{i}{i-1}} = \frac{-1(i-1)}{i-1-i} = \frac{-i+1}{-1} = i-1$
03. **Sol^n: (a);** $\text{mod}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\text{mod}(z_1)}{\text{mod}(z_2)}$
04. **Sol^n: (b);** $\sqrt[3]{a+ib} = x+iy \Rightarrow (a+ib)^{\frac{1}{3}} = x+iy \Rightarrow \overline{(a+ib)^{\frac{1}{3}}} = \overline{x+iy} \Rightarrow \left(\overline{a+ib}\right)^{\frac{1}{3}} = x-iy$
$\Rightarrow (a-ib)^{\frac{1}{3}} = x-iy \Rightarrow \sqrt[3]{(a-ib)} = x-iy.$
05. **Ans:** (b) বৃত্তটির কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং ব্যাসার্ধ 4
06. **Sol^n: (b);** $8+6i = 3^2+2.3.i+i^2 = (3+i)^2 \therefore 8+6i$ এর বর্গমূল $= \pm(3+i)$
07. **Sol^n: (a);** $\pm 2i = 1 \pm 2i - 1 = 1 \pm 2i + i^2 = (1 \pm i)^2$. অতএব, $\pm\sqrt{\pm 2i} = \pm(1 \pm i)$
08. **Sol^n: (b);** $\sqrt{2p} = 1+i \Rightarrow 2p = 1+2i-1 = 2i \Rightarrow p = i \therefore p^6+p^4+p^2 = i^6+i^4+i^2 = -1$
09. **Sol^n: (a);** $(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$, যা বাস্তব
10. **Sol^n: (b);** $\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = \left|\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{x^2+y^2} = 1$
11. **Sol^n: (d);** $|z-2| = 3 \Rightarrow |x+iy-2| = 3 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = 3 \Rightarrow (x-2)^2+y^2 = 3^2$
12. **Ans:** (b) বাস্তব সংখ্যা
13. **Sol^n: (b);** $2i^2+6i^3+3i^{16}-6i^{19}+4i^{25} = -2-6i+3+6i+4i = 1+4i$
14. **Sol^n: (d);** $\frac{(5-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = 1+i \therefore r = \sqrt{2}, \theta = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$
15. **Ans:** (c) $a+ib$
16. **Sol^n: (b);** $(1-i)^{-2}-(1+i)^{-2} = \frac{1}{(1-i)^2}-\frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{-2i}-\frac{1}{2i} = \frac{-2}{2i} = i$
17. **Ans:** (a) $a = 0$ ও $b = 0$
18. **Ans:** (b) 5
19. **Ans:** (a) 3 টি
20. **Sol^n: (b);** $x^2-2x+2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$
21. **Ans:** (a) বৃত্ত
22. **Sol^n: (b);** ধরি, $a = \omega, b = \omega^2 \therefore (1-a)(1-b) = 1-a-b+ab = 2+1 = 3$
23. **Sol^n: (b);** $(1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2}-\frac{i}{2}$
24. **Sol^n: (b);** $z = x+iy$; $|x+iy-8|+|x+iy+8| = 20$
Or, $\sqrt{(x-8)^2+y^2}+\sqrt{(x+8)^2+y^2} = 20$; Or, $(x-8)^2+y^2 = 400-40\sqrt{(x+8)^2+y^2}+(x+8)^2+y^2$
Or, $-32x = 400-40\sqrt{(x+8)^2+y^2)}$; Or, $-4x = 50-5\sqrt{(x+8)^2+y^2}$
Or, $4x+50 = 5\sqrt{((x+8)^2+y^2)}$; Or, $(4x+50)^2 = 25(x+8)^2+25y^2$
Or, $16x^2+400x+2500 = 25x^2+400x+1600+25y^2$
Or, $9x^2+25y^2 = 900$; Or, $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36} = 1$ যা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

Shortcut: $SP + S'P = 2a$

$SP + S'P > SS' \rightarrow$ উপবৃত্ত ; $SP + S'P < SS' \rightarrow$ অধিবৃত্ত

$\therefore |z-8| + |z+8| = 20 \Rightarrow |x+iy-8| - |x+iy+8| = 20$

$SP + S'P = 2a = 20 \quad SS' = 16 \therefore SP + S'P > SS' \rightarrow$ উপবৃত্ত ; আবার, যদি এমন হয়, $\Rightarrow |z-8| + |z+8| = 10$

$SP + S'P = 10; SS' = 16 \therefore SP + S'P < SS' \rightarrow$ অধিবৃত্ত

25. **Sol^n: (b);** $(\sqrt{3}i)(\sqrt{5}i) = i^2\sqrt{15} = -\sqrt{15}$
26. **Ans:** (b) $\frac{\pi}{2}$
27. **Sol^n: (d);** $r = \sqrt{4^2 + (6\sqrt{5})^2} = 14$

    $\therefore \sqrt{4+6\sqrt{5}i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{14+4} + i\sqrt{14-4}) = 3 + i\sqrt{5}$

    $\therefore \sqrt{4-6\sqrt{5}i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{14+4} - i\sqrt{14-4}) = 3 - i\sqrt{5} \therefore 3 + 3 = 6$ **(Ans.)**
28. **Sol^n: (b);** $i^{-49} = \frac{1}{i^{49}} = \frac{1}{i^{48}.i} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$
29. **Ans:** (a) $\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$
30. **Ans:** (b) বৃত্ত
31. **Ans:** (a) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
32. **Sol^n: (c);** $\frac{1}{\omega^{2015}} + \frac{1}{\omega^{2016}} + \frac{1}{\omega^{2017}} = \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^0} + \frac{1}{\omega^1} = \omega + \omega^3 + \omega^2 = 1 + \omega + \omega^2 = 0$
33. **Ans:** (c) $-i$
34. **Ans:** (d) $(7, 0)$
35. **Ans:** (d) b ও c উভয়ই
36. **Sol^n: (c);** $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n . \frac{1}{(1-i)^{-2}} = i^n.(1-i)^2 \left[\because \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = i^n \text{ হয়}\right] = i^n(-2i) = -2i^{n+1}$

Written

37. **Sol^n:** ধরি, $\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\ldots\ldots\infty}}} = x \Rightarrow x^2 = -3 + \sqrt{-3+\sqrt{-3+\ldots\ldots\infty}}$

    $\Rightarrow x^2 = -3 + x \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1^2-12}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$ **(Ans.)**
38. **Sol^n:** ধরি, $\sqrt{x + i\sqrt{x^4+x^2+1}} = p + iq \Rightarrow x + i\sqrt{x^4+x^2+1} = p^2 - q^2 + i2pq.$

    $\therefore$ বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই, $x = p^2 - q^2$ এবং $\sqrt{x^4+x^2+1} = 2pq.$

    $\therefore p^2 + q^2 = \sqrt{(p^2-q^2)^2 + 4p^2q^2} = \sqrt{x^2 + x^4 + x^2 + 1} = \sqrt{(x^2)^2 + 2x^2.1 + 1} = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1$

    $\therefore 2p^2 = x^2 + x + 1 \Rightarrow p = \pm\sqrt{\frac{x^2+x+1}{2}}$

    $\therefore 2q^2 = x^2 + 1 - x \Rightarrow q = \pm\sqrt{\frac{x^2-x+1}{2}}$

    $\therefore \sqrt{x + i\sqrt{x^4+x^2+1}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{x^2+x+1} + i\sqrt{x^2-x+1}\}$ **(Ans.)**

    Shortcut: $r = \sqrt{x^2 + x^4 + x^2 + 1} = \sqrt{(x^2)^2 + 2.x^2.1 + 1^2} = x^2 + 1$

    বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{r+x} + i\sqrt{r-x}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^2+x+1} + i\sqrt{x^2-x+1})$

39. Sol^n: $x = \sqrt[3]{i} \Rightarrow x^3 = i \Rightarrow x^3 = (-i)^3$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{-i}\right)^3 = 1^3 \Rightarrow \frac{x}{-i} = 1, \omega, \omega^2$

$\therefore x = -i, -i\omega, -i\omega^2$ where $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

40. Sol^n: ধরি, $\sqrt[4]{-81} = x \Rightarrow x^2 = (\sqrt{(\pm 9i)^2} \therefore x^2 = \pm 9i \therefore x^2 = 9i$ হলে, $x^2 = \frac{9}{2}.2i$

$\Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{2i} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1+i)$

আবার, $x^2 = -9i$ হলে, $x^2 = -\frac{9}{2}.2i \Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{-2i} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1-i) \therefore \sqrt[4]{-8i} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

41. Sol^n: ধরি, $\sqrt[6]{-64} = x \Rightarrow x^3 = (-64)^{\frac{3}{6}} = (-64)^{\frac{1}{2}} = \pm 8i$

$\therefore x^3 = 8i$ হলে, $x^3 = 8i = (-2i)^3 \therefore x = -2i,\ -2i\omega,\ -2i\omega^2$

আবার, $x^3 = -8i$ হলে, $x^3 = -8i = (2i)^3 \therefore x = 2i,\ 2i\omega,\ 2i\omega^2 \therefore \sqrt[6]{-64} = \boxed{\pm 2i, \pm 2i\omega, \pm 2i\omega^2}$

42. Sol^n: $z = x + iy$ এখন, $3|z-1| = 2|z-2|$

$\Rightarrow 3|x - 1 + iy| = 2|x - 2 + iy| \Rightarrow 3\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$\Rightarrow 9(x^2 + y^2 + 1 - 2x) = 4(x^2 + y^2 + 4 - 4x)$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 7 - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{5(x^2 + y^2) = 2x + 7}$ **(Showed)**

43. Sol^n: এখানে, $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

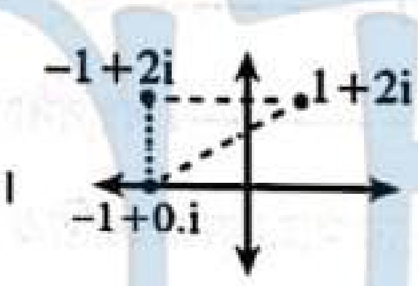
$\therefore \left(-1-\sqrt{-3}\right)^3 + \left(-1+\sqrt{-3}\right)^3 = \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3.2^3 + \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right).2^3 = 8(\omega^2)^3 + 8\omega^3 = 8 + 8 = 16$ **(Ans.)**

44. Sol^n: $(1 + \omega + \omega^2 - 2\omega^2)(1 + \omega + \omega^2 - 2)(1 + \omega + \omega^2 - 2\omega)$

$= (0 - 2\omega^2)(0-2)(0-2\omega)[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0] = -8\omega^3 = -8$ **(Ans.)**

45. Sol^n: এখানে, $x = \omega \therefore x^{3(n+2)} = (\omega^3)^{n+2} = 1$ **(Ans.)**

46. Sol^n: নির্ণেয় ক্ষেত্রফল, $\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-2-2-2+2| = 2$ বর্গ একক।



47 Sol^n: আমরা জানি, $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ এবং $\omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \therefore \left[\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\right]^n + \left[\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})\right]^n = \omega^n + \omega^{2n}$ ……… (i)

এখন n দ্বারা বিভাজ্য হলে, ধরি, $n = 3m; m \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ (i) এর ডানপক্ষ $= \omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3m} + \omega^{2(3m)} = (\omega^3)^m + (\omega^3)^{2m} = 1^m + 1^{2m} = 1 + 1 = 2$ **(প্রমাণিত)**

আবার, n দ্বারা অবিভাজ্য হলে, ধরি, $n = 3^{m+1}; m \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ (i) এর ডানপক্ষ $= \omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3m+1} + \omega^{2(3m+1)} = (\omega^3)^m.\omega^1 + (\omega^3)^{2m}.\omega^2$

$= 1^m.\omega + 1^{2m}\omega^2 = \omega + \omega^2 = -1\ [\therefore 1 + \omega + \omega^2]$ **(প্রমাণিত)**

আবার, $n = 3^{m+2}; m \in \mathbb{Z} \therefore$ (i) এর ডানপক্ষ $= \omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3m+2} + \omega^{2(3m+2)}$

$= (\omega^3)^m.\omega^2 + (\omega^3)^{2m}.\omega^4 = \omega^2 + \omega = -1$ **(প্রমাণিত)**

> "কারো সাথে যোগাযোগ রক্ষা করার সবচেয়ে উৎকৃষ্ট উপায় হচ্ছে তাঁর কথা গভীর মনোযোগ দিয়ে শোনা, যেটা কেউ কোথাও তোমাকে বলবে না।"
> Peter Drucker

অধ্যায় ০৪ বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

বহুপদী রাশি/ ফাংশন

$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\dots\dots + a_{n-1}x + a_n [a_0 \neq 0, n \in \mathbb{W}]$ [যেখানে, $\mathbb{W}$ = Set of Whole Numbers = অঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট = $\{0, 1, 2, 3, \dots\dots\dots\}$]

একটি বহুপদী ফাংশন। এখানে x এর সর্বোচ্চ ঘাত n.

n কে বহুপদী ফাংশনের মাত্রা বলা হয়। a_0 হলো x^n (সর্বোচ্চ x এর ঘাত) এর সহগ। একে মুখ্য সহগ বলা হয় ($a_0 \neq 0$)

Example:

$f(x) = x^3 + 5x + 7 \longrightarrow$ বহুপদী ফাংশন

$f(x) = x^2 + \frac{5}{x} + 7x + 8 \longrightarrow$ বহুপদী ফাংশন নয় [একটি x এর ঘাত -1 থাকায়]

$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4\sqrt{x} + 5 \longrightarrow$ বহুপদী ফাংশন নয় [একটি x এর ঘাত $\frac{1}{2}$ থাকায়]

$f(x) = 10 \longrightarrow$ বহুপদী ফাংশন [ধ্রুবক বহুপদী (Constant polynomial)]

$f(x) = 0 \longrightarrow$ বহুপদী ফাংশন [শূন্য বহুপদী]

শূন্য বহুপদীর মাত্রা অসংজ্ঞায়িত ধরা হয়।

বহুপদী সমীকরণ

- $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$
  আকারের সমীকরণকে বহুপদী সমীকরণ বলে। [যেখানে $a_0 \neq 0$ এবং $n \in \mathbb{W}$]
- পদসমূহের মধ্যে কোন চলকের সর্বোচ্চ ঘাত যত থাকে তাকে তত ঘাতের সমীকরণ বলে। সর্বোচ্চ ঘাতকে উক্ত সমীকরণের মাত্রা (Degree) বলে। n ঘাতবিশিষ্ট সমীকরণে n টি মূল থাকে। যেমন: $x^3 + 1 = 0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ অর্থাৎ মাত্রা = 3 এবং মূল থাকবে 3 টি। কিন্তু পদসমূহের মধ্যে কোন চলকের ঘাত ঋণাত্মক হলে তাকে বহুপদী সমীকরণ বলা যাবে না।
  যেমন: $3x^3 + \frac{4}{x^2} + 9 = 0$ বহুপদী সমীকরণ নয়। তবে একে x^2 দিয়ে গুণ করলে প্রাপ্ত সমীকরণ $(3x^5 + 4 + 9x^2 = 0)$ একটি বহুপদী সমীকরণ।
- একাধিক চলক সমন্বিত কোন পদ থাকলে সে পদের ঘাত হয় উভয় চলকের ঘাতের যোগফল।
  যেমন: $x^2y^2 + x^3 + y^3 = 0$ একটি চতুর্ঘাত সমীকরণ।

ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem)

কোনো বহুপদীকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে, ভাগশেষটি ঐ রাশিমালার x এর স্থানে a বসালে পাওয়া যায়। অর্থাৎ বহুপদী f(x) কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে f(a)।

Example: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ কে $x - 4$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ

$$f(4) = 4^2 - 5.4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2$$

ব্যাখ্যা: $x - 4)\ x^2 - 5x + 6(x - 1$

$$\begin{array}{l} x^2 - 4x \\ \hline -x + 6 \\ -x + 4 \\ \hline 2 \end{array}$$

$2 \leftarrow$ ভাগশেষ

উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem)

x চলকযুক্ত কোন বহুপদী রাশিমালায় x এর স্থানে a বসালে যদি মান শূন্য হয় তবে $x - a$ ঐ রাশিমালার একটি উৎপাদক হবে।

Example: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$f(2) = 2^2 - 5.2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

$\therefore x - 2, x^2 - 5x + 6$ এর একটি উৎপাদক।

ব্যাখ্যা: $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6$

$= x(x - 3) - 2(x - 3)$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = (x - 3)\boxed{(x-2)}$

$x-2$, f(x) এর একটি উৎপাদক

বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental Theorem of Algebra)

জটিল সহগযুক্ত প্রতিটি সমীকরণের অন্তত একটি জটিল মূল থাকে।

- n ঘাতবিশিষ্ট সমীকরণের n সংখ্যক মূল থাকে। যেমন: যদি $a \neq 0$ হয়, তবে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুটি। মূলদ্বয়, $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$
- মূলদ সহগবিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণের একটি মূল $p + \sqrt{q}$ (যেখানে, p মূলদ আর $\sqrt{q}$ অমূলদ) হলে অপর আরেকটি মূল হবে $p - \sqrt{q}$।

Example: একটি মূলদ সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $2 + \sqrt{5}$ হলে সমীকরণটি নির্ণয় কর।

একটি মূল $= 2 + \sqrt{5}$ $\therefore$ অপর মূলটি $2 - \sqrt{5}$

$\therefore$ সমীকরণটি, $x^2 - (2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5})x + (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + (4 - 5) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$

বিকল্প:

$x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{5} \Rightarrow (x - 2)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 5 \therefore x^2 - 4x - 1 = 0$

- বাস্তব সহগবিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণের একটি মূল জটিল হলে অপর মূলটি অনুবন্ধী জটিল হবে।

যেমন: একটি মূল p + iq হলে অপরটি হবে p - iq।

দ্বিঘাত সমীকরণের মূল সহগ সম্পর্ক

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\sum\alpha = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

ত্রিঘাত সমীকরণের মূল সহগ সম্পর্ক

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে,

$\sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$, $\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$ এবং $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

চতুর্থঘাত সমীকরণের মূল সহগ সম্পর্ক

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ এর মূলগুলো $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হলে,

(i) $\sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a}$

(ii) $\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{c}{a}$

(iii) $\sum\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\frac{d}{a}$

(iv) $\alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}$

- **$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের ক্ষেত্রে, যেখানে, a, b, c মূলদ**

(i) $c = 0$ হলে 1 টি মূল শূন্য।

ব্যাখ্যা: $c = 0$ হলে সমীকরণ $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \therefore x = 0, -\frac{b}{a} \therefore$ একটি মূল $= 0$

(ii) **$b = 0$ হলে সমীকরণের মূলদ্বয় সমান ও বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট বা যৌগিক বিপরীতক বা তাদের পরম মান সমান।**

ব্যাখ্যা: $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় $\alpha, -\alpha$ হলে, $\alpha + (-\alpha) = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0$

$\therefore b = 0 \therefore b = 0$ হলে মূলদ্বয় যৌগিক বিপরীতক হবে।

(iii) **c ও a বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হলে মূলদ্বয় বাস্তব।**

ব্যাখ্যা: a ও c বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হলে $ac < 0$ [−ve]

$\therefore$ নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac > 0$[+ve][$\therefore ac < 0$]

$\therefore$ মূলদ্বয় বাস্তব হবে।

(iv) $a = c$ হলে মূলদ্বয় গৌণিক বিপরীতক বা পরস্পর উল্টা হবে।

ব্যাখ্যা: $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ হলে, $\alpha.\frac{1}{\alpha} = \frac{c}{a} = 1$

$\therefore a = c$

$\therefore a = c$ হলে মূলদ্বয় গৌণিক বিপরীতক।

$ax^2 + bx + c$ রাশির ক্ষেত্রে,

(i) $ac > 0$ হলে, উৎপাদক দুটি একই চিহ্নযুক্ত রাশি অর্থাৎ, উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক হবে।

- এক্ষেত্রে b ধনাত্মক হলে, ac এর উভয় উৎপাদকই ধনাত্মক হবে।
- b ঋণাত্মক হলে, ac এর উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক হবে।

(ii) $ac < 0$ হলে, ac এর উৎপাদক দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে এবং b ধনাত্মক হলে, ac এর উৎপাদক দুটির ধনাত্মক সংখ্যাটি ঋণাত্মক সংখ্যাটির পরম মান থেকে বড় হবে। আর, b ঋণাত্মক হলে ac এর উৎপাদক দুটির ঋণাত্মক সংখ্যার পরম মান ধনাত্মক সংখ্যা থেকে বড় হবে।

নিশ্চায়ক: $D = b^2 - 4ac$ রাশির উপর মূলের প্রকৃতি নির্ধারিত হয় ($ax^2 + bx + c = 0$ এর ক্ষেত্রে)। একে নিশ্চায়ক (Discriminant) বলে।

- $D = 0$ হলে মূলগুলো বাস্তব ও সমান হয় [$ax^2 + bx + c$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে]
- $D > 0$ হলে মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে।
- $D < 0$ হলে মূলদ্বয় অনুবন্ধী জটিল হবে।

- $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের দুটি মূল সাধারণ হওয়ার শর্ত, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
  - দুটি সমীকরণে 1 টি সাধারণ মূল থাকার শর্ত, $(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$

প্রতিসম রাশিমালা (Symmetric Expression)

প্রতিসম রাশিমালা (Symmetric Expression): একাধিক চলকবিশিষ্ট রাশিমালার চলক দুটিকে পরস্পর স্থান পরিবর্তন করালে রাশিমালাটি যদি অপরিবর্তিত থাকে তবে তাকে প্রতিসম রাশিমালা বলে। যেমন: $\alpha + \beta, \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ রাশিমালাগুলো প্রতিসম।

প্রতিসম রাশিমালাকে Σ দিয়ে প্রকাশ করা যায় । যেমন: $\Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ [ত্রিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে]
আবার, $\Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta$ [চতুর্ঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে]
সমীকরণের ঘাত যদি আরও বড় হয় তবে $\Sigma\alpha\beta$ এর পদসংখ্যা নির্ণয় করা কষ্টকর হয়ে পড়বে। সেক্ষেত্রে সমাবেশের সূত্র ব্যবহার করা যায়। যেমন: ত্রিঘাত সমীকরণের তিনটি মূল (α, β, γ) হলে $\Sigma\alpha\beta$ = অর্থাৎ (α, β, γ) থেকে প্রতিবার 2 টি করে নিয়ে যে রাশিগুলো তৈরি হয় তাদের যোগফল = $^3C_2$ সংখ্যক রাশি (অর্থাৎ 3 টি) = $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ এবং $\Sigma\alpha^2$ = অর্থাৎ (α, β, γ) থেকে একটি করে মূল নিয়ে বর্গ করলে যে রাশিগুলো তৈরি হয় তাদের যোগফল। $^3C_1$ সংখ্যক রাশি $= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

- a, b, c সমান্তর প্রগমনে থাকবে যদি, $b - a = c - b$
  $\boxed{a + c = 2b}$ হয়।
- a, b, c গুণোত্তর প্রগমনে থাকবে যদি, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \boxed{ac = b^2}$ হয়।
- a, b, c বিপরীত/হারমোনিক প্রগমনে থাকবে যদি, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ এর জন্য $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}}$ হয়।

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

Type-01: কোনো রাশি বহুপদী কিনা নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\dots\dots + a_{n-1}x + a_n = 0$
আকারের সমীকরণ হলেই সেটা বহুপদী সমীকরণ, $a_0 \neq 0$ এবং $n \in \mathbb{W}$.

Problems

Example-01. নিচের কোন কোন রাশিগুলো x এর বহুপদী তা নির্ণয় কর:

(i) $x^2 - 3x + 4$ (ii) x (iii) 5 (iv) $\sqrt{x} + x^5 + 3$ (v) $\frac{1}{x} + 3x + x^2$

Sol^n: কোন রাশি x এর বহুপদী হবে যদি এবং কেবল যদি সেটাকে
$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ আকারে প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ প্রতিটি পদে x এর ঘাত অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হতে হবে। সুতরাং-

(i) বহুপদী
(ii) বহুপদী
(iii) বহুপদী (x এর ঘাত শূন্য)। এ ধরনের বহুপদীকে ধ্রুবক বহুপদী (constant polynomial) বলে।
(iv) বহুপদী নয় (x এর ঘাত $\frac{1}{2}$ যা ভগ্নাংশ)।
(v) বহুপদী নয় (x এর ঘাত −1 বা ঋণাত্মক)।

08

Type–02: দ্বিঘাত সমীকরণের মূল নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

$ax^2 + bx + c = 0$ কোনো দ্বিঘাত সমীকরণ হলে এর মূলদ্বয় হবে, $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Problems

Example-02. $x^2 - 10x + 34 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো নির্ণয় কর। [JU'14-15]

Solⁿ: $x^2 - 10x + 34 = 0$; $\alpha = \frac{10+\sqrt{(-10)^2-4.1.34}}{2} = 5 + 3i$; $\beta = \frac{10-\sqrt{(-10)^2-4.1.34}}{2} = 5 - 3i$ **(Ans.)**

Example-03: $|1 - 2i|^x = 5^x$ সমীকরণের সমাধান হবে,

(a) -1 (b) 1 (c) 0 (d) 2

Solⁿ: (c); $|1-2i|^x = 5^x \Rightarrow \left\{\sqrt{1^2 + (-2)^2}\right\}^x = 5^x$ [$\because z = x + iy$ হলে, $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$]

$\Rightarrow 5^{\frac{x}{2}} = 5^x \Rightarrow \frac{x}{2} = x \Rightarrow x = 2x \Rightarrow x = 0$ **(Ans.)**

Example-04: $3(9^x - 4.3^{x-1}) + 1 = 0$ সমীকরণের সমাধান হবে? [DU'10-11]

Solⁿ: দেওয়া আছে, $3(9^x - 4.3^{x-1}) + 1 = 0 \Rightarrow 3.(3^x)^2 - 3 \times 4.3^x.\frac{1}{3} + 1 = 3.(3^x)^2 - 4.3^x + 1 = 0$

ধরি, $3^x = a$ তাহলে, $3a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow 3a^2 - 3a - a + 1 = 0 \Rightarrow 3a(a-1) - 1(a-1) = 0$

$\Rightarrow (3a-1)(a-1) = 0 \Rightarrow 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$ **(Ans.)**

অথবা, $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 3^x = 1^0 \therefore x = 0$ **(Ans.)**

Example-05: $r(1 - r) = 1$ এর জটিল মূলদ্বয় z_1 ও z_2 হলে, $z_1^3 + z_2^3 = ?$

(a) -1 (b) 1 (c) 2 (d) -2

Solⁿ: (d); $r(1-r) = 1 \Rightarrow -r^2 + r - 1 = 0$ এর মূলদ্বয় z_1 ও z_2 হলে,

$\therefore z_1 + z_2 = -\frac{1}{-1} = 1$ এবং $z_1z_2 = \frac{-1}{-1} = 1$

এখন, $z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)^3 - 3z_1z_2(z_1 + z_2) = 1 - 3.1.1 = -2$ **(Ans.)**

Example-06: দুইজন ছাত্রকে একটি সমীকরণ সমাধান করতে বলা হল। একজন ছাত্র x এর সহগ ভুল লিখে সমীকরণটির মূল 2 এবং 6 নির্ণয় করল। অপর ছাত্র ধ্রুবক পদটি ভুল লিখে সমীকরণটির মূল 2 এবং -9 নির্ণয় করল। সমীকরণটির নির্ভুল মূলদ্বয় নির্ণয় কর।

Solⁿ: 2 ও 6 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $(x-2)(x-6) = 0 \therefore x^2 - 8x + 12 = 0$

যেহেতু, সমীকরণটির x এর সহগ ভুল। $\therefore$ প্রকৃত সমীকরণের x^2 এর সহগ 1 এবং ধ্রুবপদ 12

আবার, $(x-2)(x+9) = 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 18 = 0$ যেহেতু সমীকরণটির ধ্রুবক পদটি ভুল।

$\therefore$ প্রকৃত সমীকরণের x এর সহগ 7।

$\therefore$ প্রকৃত সমীকরণ $x^2 + 7x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 4x + 12 = 0 \Rightarrow (x+3)(x+4) = 0 \therefore x = -3, -4$

Example-07. $9x^2 - 12x + 4 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে মূলদ্বয়ের অনুপাত কত? [JnU'14-15]

Solⁿ: $x = \frac{12\pm\sqrt{144-4\times9\times4}}{2\times9} = \frac{2}{3} \therefore \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{2}{3} \therefore \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{1} \Rightarrow \alpha : \beta = 1 : 1$ **(Ans.)**

Example-08. $2x^2 - 7x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β; $x^2 - 4x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় β এবং γ হলে $(\gamma + \alpha) : (\gamma - \alpha) = ?$ [DU'15-16, RU'09-10]

Solⁿ: $2x^2 - 7x + 5 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 5x + 5 = 0$

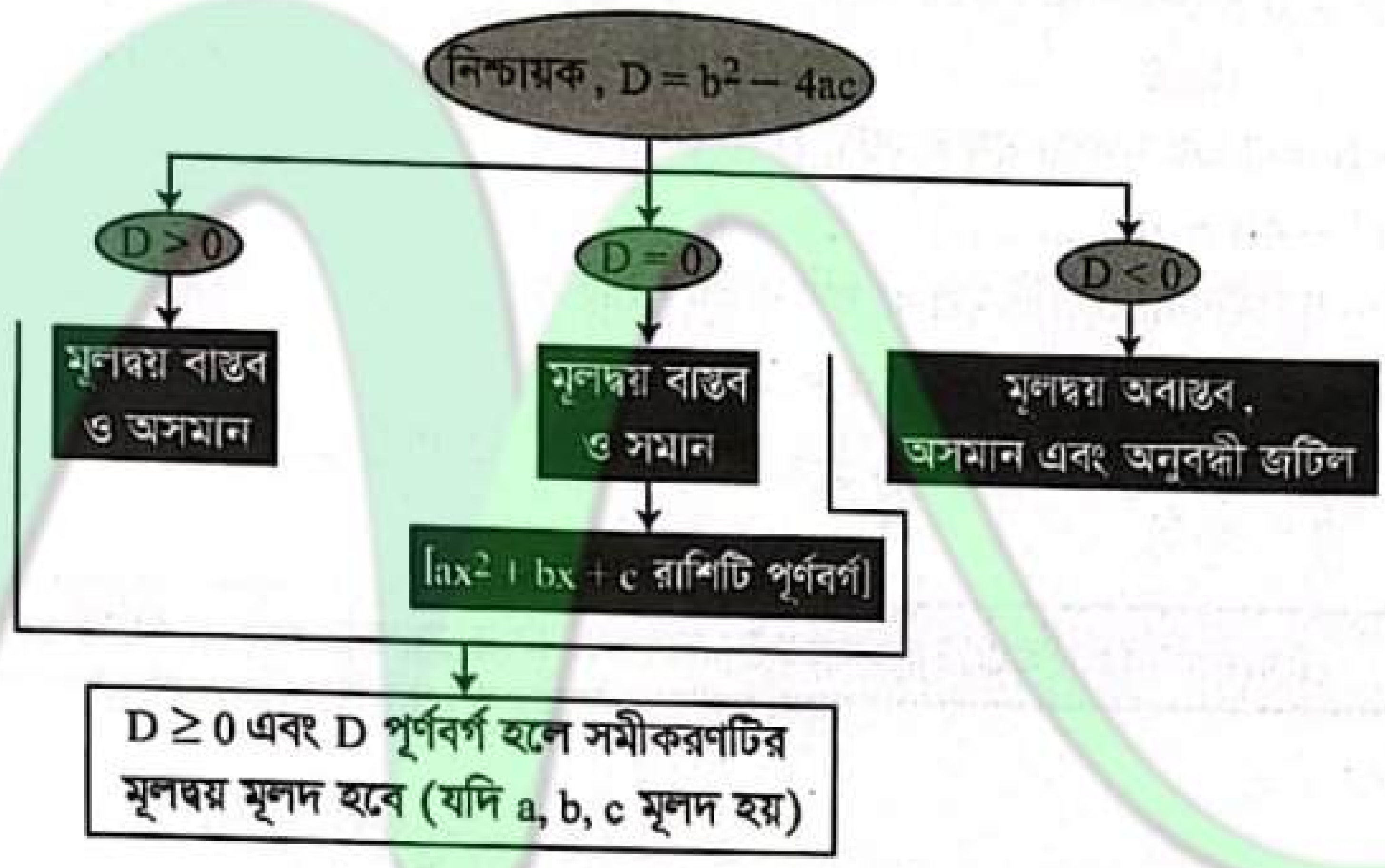
$\Rightarrow 2x(x-1) - 5(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(2x-5) = 0 \Rightarrow x = 1, \frac{5}{2}$

$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, 3 \therefore \alpha = \frac{5}{2}, \beta = 1, \gamma = 3 \therefore \frac{\gamma+\alpha}{\gamma-\alpha} = \frac{3+\frac{5}{2}}{3-\frac{5}{2}} = \frac{6+5}{6-5} = 11 : 1$ **(Ans.)**

Type-03: নিশ্চায়ক সম্পর্কিত সমস্যা

Concept

$ax^2 + bx + c = 0$ এর নিশ্চায়ক $\boxed{D = b^2 - 4ac}$



Problems

Example-09. $\frac{1}{x} + a - bx = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে, নিশ্চায়ক কত হবে? **[DU' 21-22]**

Solⁿ: $\frac{1}{x} + a - bx = 0 \Rightarrow 1 + ax - bx^2 = 0 \Rightarrow bx^2 - ax - 1 = 0$

$\therefore D = (-a)^2 - 4 \cdot b(-1) = 0 \Rightarrow a^2 + 4b = 0$ **(Ans.)**

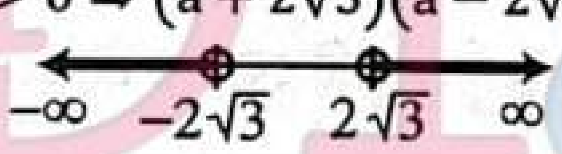
Example-10. a এর কোন ডোমেনের জন্য $x^2 + ax + 3 = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে? **[GST'22-23]**

(a) $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$
(b) $(-\infty, -2\sqrt{3})$
(c) $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$
(d) $(2\sqrt{3}, \infty)$

Solⁿ: (c); $x^2 + ax + 3 = 0$। যেহেতু মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান, $\therefore D > 0$

$\Rightarrow a^2 - 4.1.3 > 0 \Rightarrow a^2 - (2\sqrt{3})^2 > 0 \Rightarrow (a + 2\sqrt{3})(a - 2\sqrt{3}) > 0 \Rightarrow a < -2\sqrt{3}$ অথবা $a > 2\sqrt{3}$

$a \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$



Example-11. $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলোর প্রকৃতি কোনটি? **[JU'22-23, JU'09-10]**

(a) বাস্তব ও সমান (b) বাস্তব ও অসমান (c) অবাস্তব ও অসমান (d) অবাস্তব ও সমান

Solⁿ: (c); $a = 1, b = 1, c = 1 \therefore D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.1 = 1 - 4 = -3 < 0$

$\therefore$ মূলদ্বয় অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা, অর্থাৎ অবাস্তব হবে এবং সমান হবে না।

Example-12. k- এর মান কত হলে, $x^2 - 6x - 1 + k(2x + 1) = 0$ সমীকরণের মূল দুটি সমান হবে? **[JU'22-23, RU'06-07, CU'09-10, 12-13]**

(a) 3 অথবা 6 (b) 2 অথবা 5 (c) 2 অথবা 6 (d) 3 অথবা 5

Solⁿ: (b); $x^2 - 6x - 1 + k(2x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 1 + 2kx + k = 0 \therefore x^2 + (2k - 6)x + (k - 1) = 0$

$\therefore a = 1, b = 2k - 6, c = k - 1$

মূলদ্বয় সমান হলে, $D = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (2k - 6)^2 - 4.1(k - 1) = 0$

$\Rightarrow \{2(k - 3)\}^2 - 4(k - 1) = 0 \Rightarrow 2^2(k - 3)^2 - 4(k - 1) = 0 \Rightarrow 4(k - 3)^2 - 4(k - 1) = 0$

$\Rightarrow (k - 3)^2 - (k - 1) = \frac{0}{4} \Rightarrow k^2 - 6k + 9 - k + 1 = 0 \Rightarrow k^2 - 7k + 10 = 0 \Rightarrow k^2 - 2k - 5k + 10 = 0$

$\Rightarrow k(k - 2) - 5(k - 2) = 0 \Rightarrow (k - 2)(k - 5) = 0 \therefore k = 2, 5$

Example-13. $x^2 - kx + 4 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো জটিল হলে, k এর মান কীরূপ হতে পারে?

Sol^n: নিশ্চায়ক, $(-k)^2 - 4 \times 1 \times 4 < 0$
বা, $k^2 - 16 < 0$ বা, $k^2 < 16$ বা, $-4 < k < 4$; অর্থাৎ $k > -4$ এবং $k < 4$ হলে, মূলগুলো জটিল হবে। **(Ans.)**

Example-14: $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান এবং $x^2 + ax + 8 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4 হলে, b =?

(a) 4 (b) 8 (c) 9 (d) 12

Sol^n: (c); $x^2 + ax + b = 0$ এর মূলদ্বয় সমান হলে, $D = 0$ হবে,
$a^2 - 4.1.b = 0 \Rightarrow a^2 - 4b = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$
আবার, $x^2 + ax + 8 = 0$ সমীকরণের 1টি মূল 4; ধরি অপর মূলটি α
$\therefore \alpha + 4 = -a \ldots\ldots\ldots (ii)$ এবং $(\alpha).4 = 8 \Rightarrow \alpha = 2$
$\therefore$ (ii) হতে পাই, $2 + 4 = -a \Rightarrow a = -6$ $\therefore$ (i) হতে পাই, $b = \frac{a^2}{4} = \frac{(-6)^2}{4} = 9$ **(Ans.)**

Type-04: মূলদ্বয়ের মধ্যবর্তী সম্পর্ক হতে মান নির্ণয় সম্পর্কিত

Concept

(i) $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে, [দ্বিঘাত সমীকরণের মূল 2 টি]
$\sum\alpha = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$; $\sum\alpha\beta = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

(ii) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ এর মূলত্রয় α, β, γ হলে [ত্রিঘাত সমীকরণের মূল 3টি]
$\sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$
$\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$
$\sum\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

(iii) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ এর মূলগুলো α, β, γ, δ হলে [চতুর্ঘাত সমীকরণের মূল 4 টি]
$\sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a} \rightarrow$ 4 টি থেকে 1 টি করে নিয়ে সকল সমাবেশ (Combination) এর [$^4C_1 = 4$ টি] যোগফল $= -\frac{b}{a}$
$\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{c}{a} \rightarrow$ 4 টি থেকে 2 টি করে নিয়ে সকল সমাবেশের (Combination) [$^4C_2 = 6$টি] যোগফল $= \frac{c}{a}$
$\sum\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\frac{d}{a} \rightarrow$ 4 টি থেকে 3 টি করে নিয়ে সকল সমাবেশ (Combination) এর [$^4C_3 = 4$ টি] যোগফল $= -\frac{d}{a}$
$\sum\alpha\beta\gamma\delta = \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a} \rightarrow$ 4 টি থেকে 4 টিই নিয়ে সকল সমাবেশ (Combination) এর [$^4C_4 = 1$ টি] যোগফল $= \frac{e}{a}$

➤ $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত m:n হলে, ধরে নিই মূলদ্বয় mα, nα। সুতরাং $m\alpha + n\alpha = \frac{-b}{a}$ এবং $mn\alpha^2 = \frac{c}{a}$ সম্পর্ক ব্যবহার করে মূলদ্বয় নির্ণয় করতে হবে।

Shortcut

➤ $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় যৌগিক বিপরীতক হলে একটি α এবং অপরটি $(-\alpha)$ $\therefore \alpha + (-\alpha) = -\frac{b}{a} \therefore \boxed{b = 0}$

➤ যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় একে অপরের বিপরীত হয় (বা গৌণিক বিপরীতক হয়) তবে মূলদ্বয় হবে $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ $[\alpha \neq 0]$
সুতরাং, মূলদ্বয়ের গুণফল $= \alpha.\frac{1}{\alpha} = 1 = \frac{c}{a} \therefore \boxed{a = c}$

Problems

Example-15. $x^2+6x-1=0$ সমীকরণটি সমাধান করলে x এর একটি মান p এবং অপর মানটি q পাওয়া যায়। তাহলে, $p+q=$?

Sol^n: $x^2+6x-1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $=-6 \therefore p+q=-6$ **[JU'19-20]**

Example-16. $2x^3-5x+3=0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$ এর মান কত? **[CU'22-23]**

(a) 3 (b) -3 (c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}$

Sol^n: (c); $\alpha+\beta+\gamma=0 \therefore \alpha+\beta=-\gamma \therefore \beta+\gamma=-\alpha$

$\therefore \gamma+\alpha=-\beta$, অর্থাৎ $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)=(-\alpha)(-\beta)(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-\left(\frac{-3}{2}\right)=\frac{3}{2}$

Example-17: $ax^2+x+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূল শূন্য হলে, $(a\neq 0)$ নিচের কোনটি সঠিক?

(a) $b=0, c=0$ (b) $b\neq 0, c=0$ (c) $b=0, c\neq 0$ (d) $b\neq 0, c\neq 0$

Sol^n: (a); $ax^2+bx+c=0$ এর মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a}=0 \therefore b=0\ [\because a\neq 0]$

এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a}=0 \therefore c=0\ [a\neq 0] \therefore$ Option (a) is correct.

বিকল্প: $ax^2+bx+c=0$ এর মূলদ্বয় শূন্য।

$\therefore$ লেখা যায়: $(x-0)(x-0)=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow ax^2=0$ লেখা যায়।

অর্থাৎ $b=0$ এবং $c=0$ হলে, $ax^2+bx+c=0$ এর মূলদ্বয় শূন্য হয়।

Example-18. $x^2+5x+a=0$ সমীকরণের একটি মূল -2 হলে, অপর মূলটি- **[RU'19-20]**

Sol^n: ধরি, অপর মূলটি $\alpha \therefore \alpha-2=-5 \Rightarrow \alpha=-3$

Example-19. $3x^2+7x-2=0$ সমীকরণটির মূল দুইটির যোগফল ও গুণফল এর সমষ্টি কত? **[JU'20-21, 14-15]**

Sol^n: মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha+\beta=-\frac{7}{3}$, $\alpha\beta=\frac{-2}{3} \therefore (\alpha+\beta)+\alpha\beta=\frac{-7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{-7-2}{3}=\frac{-9}{3}=-3$

Example-20. $x^3-3x^2+7x-5=0$ সমীকরণের একটি মূল $(1+2i)$ হলে অন্য মূলগুলো নির্ণয় কর। **[DU'20-21, RU'20-21]**

Sol^n: $x^3-3x^2+7x-5=0$ সমীকরণের একটি মূল $1+2i$ হলে অপর একটি মূল $1-2i$।

অপর মূলটি α হলে, $\alpha+(1+2i)+(1-2i)=3 \Rightarrow \alpha+2=3 \therefore \alpha=1 \therefore$ অন্য মূল দুইটি $1-2i$ ও 1

Example-21. $(k+3)x^2+(6-2k)x+(k-1)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় একটি অপরটির সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে, $k=$? **[KU'19-20]**

Sol^n: যেহেতু মূলদ্বয় সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট, সেহেতু ধরি, মূলদ্বয় α ও $-\alpha$.

এখন, $\alpha+(-\alpha)=-\frac{6-2k}{k+3} \Rightarrow -\frac{6-2k}{k+3}=0 \Rightarrow -6+2k=0 \therefore k=3$

Example-22. k এর মান কত হলে $(k^2-3)x^2+3kx+(3k+1)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর উল্টা হবে? **[CU'20-21, RU' 08-09]**

Sol^n: মূলদ্বয় α ও $\frac{1}{\alpha} \therefore \alpha.\frac{1}{\alpha}=\frac{3k+1}{k^2-3} \Rightarrow k^2-3k-4=0 \therefore k=-1, 4$ **(Ans.)**

Example-23. $x^2-3x+k=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় একটি অপরটির দ্বিগুণ হলে, k- এর মান কত? **[RU'22-23, DU'14-15]**

(a) -2 (b) 2 (c) -1 (d) 2

Sol^n: (b, d); ধরি, $x^2-3x+k=0$ এর মূলদ্বয় α ও 2α

$\therefore 2\alpha+\alpha=-\frac{-3}{1} \Rightarrow 3\alpha=3 \therefore \alpha=1$ এবং $2\alpha.\alpha=\frac{k}{1} \Rightarrow k=2\alpha^2=2.1^2=2$ **(Ans.)**

Example-24: যদি $-1, 0$ এবং 2, সমীকরণ $f(x) = 0$ সমীকরণের মূল হয়, তবে $f(3x) = 0$ সমীকরণের তিনটি মূল হবে? **[SUST'14-15]**

(a) $-1, 0, 2$ (b) $0, 1, 2$ (c) $-3, 0, 6$ (d) $0, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

Sol^n: (d); ধরি, $f(x) = (x+1).x(x-2)$

এখন, $f(3x) = 0 \Rightarrow (3x+1) \times 3x \times (3x-2) = 0 \Rightarrow 3x + 1 = 0 \therefore x = -\frac{1}{3}$ অথবা, $3x = 0 \therefore x = 0$

অথবা, $3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left(0, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Example-25. k -এর কোন মানের জন্য $2x^2 - kx + 1 = 0$ -এর একটি মূল অপর মূলের বর্গের চারগুণের সমান হবে? **[DU' 21-22]**

Sol^n: মূলদ্বয় $\alpha, 4\alpha^2$; $\alpha + 4\alpha^2 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2\alpha + 8\alpha^2$ এবং $\alpha.4\alpha^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{1}{8} \therefore \alpha = \frac{1}{2}$

$\therefore k = 2.\frac{1}{2} + 8.\frac{1}{4} \therefore k = 3$

Example-26: $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল, অপরটির বর্গ হলে, $p = ?$

(a) $-1, 6$ (b) $1, -6$ (c) $-\frac{1}{2}, 3$ (d) $-6, -1$

Sol^n: (a); মূলদ্বয় α ও α^2 ধরি,

তাহলে, $\alpha + \alpha^2 = -\frac{2}{9} \Rightarrow 9\alpha^2 + 9\alpha + 2 = 0 \Rightarrow (3\alpha+1)(3\alpha+2) = 0$

$\therefore \alpha = -\frac{1}{3}$ অথবা, $\alpha = -\frac{2}{3}$ আবার, $\alpha.\alpha^2 = \frac{-(p+2)}{27} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{-(p+2)}{27}$

$\alpha = -\frac{1}{3}$ হলে, $\left(\frac{-1}{3}\right)^3 = \frac{-(p+2)}{27} \Rightarrow p + 2 = 1 \therefore p = -1$

$\alpha = \frac{-2}{3}$ হলে, $\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{-(p+2)}{27} \Rightarrow p + 2 = 8 \therefore P = 6 \therefore p = 6, -1$ **(Ans.)**

Example-27. $ax^2 + bx + c = 0$ -এর মূলদ্বয়ের অনুপাত 3: 4 হলে দেখাও যে, $12b^2 = 49ac$. **[DU' 21-22]**

Sol^n: ধরি, মূলদ্বয় $3\alpha, 4\alpha$

$\therefore 3\alpha + 4\alpha = -\frac{b}{a} \therefore 7\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{7a}$ ……… (i)

আবার, $3\alpha.4\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow 12\alpha^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 12\frac{b^2}{49a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow 12b^2 = 49ac$ [প্রমাণিত]

Example-28: যদি $px^2 + qx + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত m: n হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = 0$

Sol^n: $px^2 + qx + q = 0$

ধরি, মূলদ্বয় $m\alpha$ ও $n\alpha \therefore m\alpha + n\alpha = -\frac{q}{p} \Rightarrow (m+n) = \frac{-q}{p\alpha}$

$L.H.S = \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = \frac{m+n}{\sqrt{mn}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = -\frac{q}{p\alpha} \times \sqrt{\frac{p\alpha^2}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = -\sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = 0 = R.H.S$

$\therefore \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = 0$ **(Proved)**

$m\alpha.n\alpha = \frac{q}{p}$
$mn\alpha^2 = \frac{q}{p}$
$mn = \frac{q}{p\alpha^2}$

Example-29. যদি $x^2 - ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা হয়, তাহলে $a^2 - 4b = ?$

Sol^n: একটি মূল α হলে, অপরটি $\alpha + 1$; সুতরাং, $\alpha + \alpha + 1 = a$

$\Rightarrow 2\alpha + 1 = a \Rightarrow \alpha = \frac{a-1}{2}$ এবং $\alpha(\alpha+1) = b$

তাহলে, $\left(\frac{a-1}{2}\right)\left(\frac{a-1}{2} + 1\right) = b \Rightarrow \left(\frac{a-1}{2}\right)\left(\frac{a+1}{2}\right) = b$

$\Rightarrow a^2 - 1 = 4b \therefore a^2 - 4b = 1$ **(Ans.)**

Example-30. দুইটি মূলের যোগফল শূন্য হলে, $x^3-5x^2-16x+80=0$ সমীকরণটির মূলগুলি কত? **[RU'20-21]**

Sol^n: মূলত্রয় $\alpha,-\alpha,\beta$; $\alpha+(-\alpha)+\beta=-(-5)\Rightarrow\beta=5$

$-\alpha^2\beta=-80\Rightarrow\alpha^2=16\Rightarrow\alpha=4,-4$

Example-31: $x^2+2x-1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α,β হলে, $\frac{\alpha^{10}+\beta^{10}}{\alpha^{-10}+\beta^{-10}}=?$

(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) −10

Sol^n: (b); $x^2+2x-1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$\therefore\alpha+\beta=-2$ এবং $\alpha.\beta=-1$; এখন, $\frac{\alpha^{10}+\beta^{10}}{\alpha^{-10}+\beta^{-10}}=\frac{\alpha^{10}+\beta^{10}}{\frac{1}{\alpha^{10}}+\frac{1}{\beta^{10}}}=\frac{(\alpha^{10}+\beta^{10})}{\frac{(\beta^{10}+\alpha^{10})}{(\alpha\beta)^{10}}}=(\alpha\beta)^{10}=(-1)^{10}=1$ **(Ans.)**

Example-32. কোন শর্তে $x^3-mx^2+nx+r=0$ সমীকরণের দুইটি মূলের সমষ্টি শূন্য হবে? **[GST'20-21]**

Sol^n: ধরি, মূলত্রয় a, b এবং c। a ও b এর যোগফল 0।

$a+b+c=-\frac{-m}{1}=m\Rightarrow0+c=m\Rightarrow c=m$

$ab+bc+ca=n\Rightarrow ab+c(b+a)=n\Rightarrow ab=n$

$abc=-r\Rightarrow n.m=-r\Rightarrow mn+r=0$

Type-05: মূল হতে সমীকরণ গঠন সম্পর্কিত সমস্যা

Concept

- দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে মূলদ্বয় α,β হলে দ্বিঘাত সমীকরণ: $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ অথবা, $(x-\alpha)(x-\beta)=0$
- ত্রিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে মূলত্রয় α,β,γ হলে ত্রিঘাত সমীকরণ:

  $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$ অথবা, $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$

Problems

Example-33. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{1+i}$ হলে, সমীকরণটি- **[CU'22-23, RU'20-21]**

Sol^n: $x=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}\therefore$ সমীকরণ, $x^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)x+\frac{1}{2}(1-i)\frac{1}{2}(1+i)=0$

$\Rightarrow x^2-x+\frac{2}{4}=0\Rightarrow2x^2-2x+1=0$

বিকল্প: $x=\frac{1}{1+i}\Rightarrow\frac{1}{x}=1+i\Rightarrow\frac{1}{x}-1=i\Rightarrow\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1=i^2=-1\Rightarrow\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+2=0\Rightarrow2x^2-2x+1=0$

Example-34. বাস্তব সহগবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করতে হবে যার একটি মূল $\sqrt{-5}-1$. **[CU'22-23, RU' 13-14]**

Sol^n: জটিল মূল যুগল রূপে আসে।

$\therefore$ মূলদ্বয় $-1+i\sqrt{5}$ এবং $-1-i\sqrt{5}$

নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-(-1+i\sqrt{5}-1-i\sqrt{5})x+(-1+i\sqrt{5})(-1-i\sqrt{5})=0\therefore x^2+2x+6=0$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** ধরি, $x=\sqrt{5}i-1$

$\Rightarrow x+1=\sqrt{5}i\Rightarrow x^2+2x+1=-5\Rightarrow x^2+2x+6=0$ **(Ans.)**

Example-35. $3x^2-6x+2=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় m এবং n হলে, $m+\frac{1}{n}$ এবং $n+\frac{1}{m}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। **[DU'22-23]**

Solⁿ: $3x^2-6x+2=0$ এর মূলদ্বয় m ও n. $\therefore m+n=-\frac{-6}{3}=2$; $mn=\frac{2}{3}$

$\therefore$ নতুন সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল, $m+\frac{1}{n}+n+\frac{1}{m}=(m+n)+\frac{m+n}{mn}=2+\frac{2}{\frac{2}{3}}=2+3=5$

আবার মূলদ্বয়ের গুণফল, $\left(m+\frac{1}{n}\right)\left(n+\frac{1}{m}\right)=mn+1+1+\frac{1}{mn}=2+mn+\frac{1}{mn}=2+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{25}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, x^2- (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x+$ মূলদ্বয়ের গুণফল $=0\Rightarrow x^2-5x+\frac{25}{6}=0$

$\therefore 6x^2-30x+25=0$ **(Ans.)**

বিকল্প: $3x^2-6x+2=0$ এর মূলদ্বয় m, n

$\therefore 3m^2-6m+2=0$ ……… (i); $3n^2-6n+2=0$ ……… (ii) এবং, $m+n=2, mn=\frac{2}{3}$

আবার, $x=m+\frac{1}{n}=\frac{mn+1}{n}=\frac{\frac{2}{3}+1}{n}$ $[\because mn=\frac{2}{3}]$

$\therefore x=\frac{2+3}{3n}\Rightarrow n=\frac{5}{3x}$

(ii) নং এ n এর মান বসালে পাই, $3\left(\frac{5}{3x}\right)^2-6.\frac{5}{3x}+2=0\Rightarrow 3.\frac{25}{9x^2}-\frac{10}{x}+2=0\Rightarrow\frac{25}{3x^2}-\frac{10}{x}+2=0$

$\Rightarrow 25-30x+6x^2=0\therefore 6x^2-30+25=0$ **(Ans.)**

Example-36. $x^2-5x-1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 2 কম মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হল- **[RU'22-23, DU'07-08, 11-12]**

Solⁿ: ধরি, $x^2-5x-1=0$ এর মূলদ্বয় α এবং β $\therefore\alpha+\beta=-\left(\frac{-5}{1}\right)=5$ এবং $\alpha\beta=\frac{-1}{1}=-1$

নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2-[(\alpha-2)+(\beta-2)]x+(\alpha-2)(\beta-2)=0$

$\Rightarrow x^2-[(\alpha+\beta)-4]x+[\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4]=0$

$\Rightarrow x^2-[5-4]x+[-1-2\times5+4]=0\Rightarrow x^2-x-7=0$ **(Ans.)**

Shortcut: ধরি, $x^2-5x-1=0$ এর মূলদ্বয় α, β

শর্তমতে, $x=\alpha-2\therefore\alpha=x+2$

$\therefore(x+2)^2-5(x+2)-1=0\Rightarrow x^2+4x+4-5x-10-1=0\therefore x^2-x-7=0$

Type-06: মূলদ্বয়ের অন্তর সংক্রান্ত

Concept

যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β [α > β] হয় এবং মূলদ্বয়ের পার্থক্য d হয় তবে, $\alpha-\beta=d$ হবে।

Problems

Example-37. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 বা মূলদ্বয় ক্রমিক হবার শর্ত বের কর? **[RU' 15-16]**

Solⁿ: ধরি, মূলদ্বয় α ও β [α > β] $\therefore\alpha+\beta=-p$; $\alpha\beta=q$

শর্তমতে, $\alpha-\beta=1\Rightarrow(\alpha-\beta)^2=1$

$\Rightarrow(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1\Rightarrow p^2-4q=1\Rightarrow p^2=1+4q$

$\Rightarrow p^2+4q^2=1+4q+4q^2\Rightarrow p^2+4q^2=(1+2q)^2$ **(Ans.)**

Example-38. $3x^2+bx-12=0$ সমীকরণটির মূলদ্বয়ের অন্তর 4 হলে b এর মান কত?

Solⁿ: ধরি, মূলদ্বয় α, β [α > β] $\therefore\alpha+\beta=\frac{-b}{3}$; $\alpha\beta=\frac{-12}{3}=-4$

$\therefore\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{\frac{b^2}{9}+16}$

শর্তমতে, $\sqrt{\frac{b^2}{9}+16}=4\Rightarrow\frac{b^2}{9}+16=16\Rightarrow\frac{b^2}{9}=0\therefore b=0$ **(Ans.)**

Type-07: ত্রিঘাত/চতুর্ঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে মূলগুলো সমান্তর বা গুণোত্তর প্রগমনভুক্ত সম্পর্কিত

Concept

(i) মূলগুলো সমান্তর প্রগমন ভুক্ত হলে,

(a) ত্রিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে: মূল তিনটিকে $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$ ধরতে হয়। [মূলগুলোর সাধারণ অন্তর d]

(b) চতুর্ঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে: মূল চারটিকে $\alpha - 3d, \alpha - d, \alpha + d, \alpha + 3d$ ধরতে হয়। [মূলগুলোর সাধারণ অন্তর 2d]

(ii) মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমন ভুক্ত হলে,

(a) ত্রিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে: মূল তিনটিকে $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$ ধরতে হয়। [মূলগুলোর সাধারণ অনুপাত r]

(b) চতুর্ঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে: মূল চারটিকে $\frac{\alpha}{r^3}, \frac{\alpha}{r}, \alpha r, \alpha r^3$ ধরতে হয়। [মূলগুলোর সাধারণ অনুপাত r^2]

Problems

Example-39. $8x^3 - 42x^2 + 63x - 27 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমন ভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।

Sol^n: মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলত্রয়, $\alpha r^{-1}, \alpha, \alpha r$

$\therefore$ মূলগুলোর গুণফল $= \alpha r^{-1}.\alpha.\alpha r = -\frac{-27}{8} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{27}{8} \therefore \alpha = \frac{3}{2}$ এবং

মূলগুলোর যোগফল $= \alpha r^{-1} + \alpha + \alpha r = -\frac{-42}{8}$

$\Rightarrow \alpha\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{21}{4} \Rightarrow \frac{3}{2}.\frac{1+r+r^2}{r} = \frac{21}{4} \Rightarrow \frac{1+r+r^2}{r} = \frac{21}{4}.\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1+r+r^2}{r} = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow 2r^2 + 2r + 2 = 7r \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow 2r^2 - 4r - r + 2 = 0$

$\Rightarrow 2r(r-2) - 1(r-2) = 0 \Rightarrow (r-2)(2r-1) = 0 \therefore r = 2, \frac{1}{2}$

$r = 2$ হলে, $\alpha r^{-1} = \frac{3}{2}.2^{-1} = \frac{3}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4}; \alpha r = \frac{3}{2}.2 = 3$

$r = \frac{1}{2}$ হলে, $\frac{\alpha}{r} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3; \alpha r = \frac{3}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ $\therefore$ মূলগুলো $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3$ **(Ans.)**

Type-08: কোন বহুপদী সমীকরণের একটি মূল 1 হবার শর্ত সংক্রান্ত

Concept

মনে করি, একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল 1 এবং অপর মূলটি α

$\therefore$ সমীকরণ, $x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha.1 = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha = 0$

এখন x^2, x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ যোগ করলে পাই, $1 - (\alpha + 1) + \alpha = (1 + \alpha) - (1 + \alpha) = 0$

[অর্থাৎ, কোন বহুপদীর সকল সহগগুলোর যোগফল 0 হলে তার একটি মূল 1]

(i) $x^2 - 5x + 4 = 0$ (ii) $2x^4 + 5x^2 - 7 = 0$ (iii) $3x^3 - 2x^2 - x = 0$

তিনটি সমীকরণের সাধারণ মূল 1, কীভাবে??

আমরা লক্ষ করলে দেখতে পাই তিনটি সমীকরণের সহগগুলোর যোগফল শূন্য। অর্থাৎ

(i) $1 - 5 + 4 = 0$ (ii) $2 + 5 - 7 = 0$ (iii) $3 - 2 - 1 = 0$

Problems

Example-40. $(a - b)x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো নির্ণয় কর।

Sol^n: সহগগুলোর যোগফল, $a - b + b - c + c - a = 0$

$\therefore$ সমীকরণটির একটি মূল 1. ধরি, সমীকরণটির অপর মূল α. $\therefore \alpha.1 = \frac{c-a}{a-b}$ $\left[\alpha\beta = \frac{c}{a}\right]$

$\alpha = \frac{c-a}{a-b}$ $\therefore$ মূল দুইটি $\boxed{1 \text{ এবং } \frac{c-a}{a-b}}$ **(Ans.)**

Type-09: প্রতিসম রাশির মান নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা

Concept

প্রতিসম রাশি: একাধিক চলকবিশিষ্ট কোন বীজগাণিতিক রাশির যেকোন দুইটি চলককে স্থান বিনিময় করলে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে, তাহলে ঐ রাশিটিকে উক্ত চলকসমূহের প্রতিসম রাশি বলা হয়।

যেমন: $\alpha+\beta+\gamma, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ ইত্যাদি।

সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত মূল-সহগ সম্পর্কগুলো ব্যবহার করে প্রদত্ত রাশির মান নির্ণয় করতে হবে।

Shortcut

(i) $\sum\alpha^2=(\sum\alpha)^2-2\sum\alpha\beta$

(ii) $\sum\alpha^3=\sum\alpha[(\sum\alpha)^2-3\sum\alpha\beta]+3\alpha\beta\gamma$

(iii) $\sum\alpha^2\beta=\sum\alpha.\sum\alpha\beta-3\alpha\beta\gamma$

(iv) $\sum\alpha^2\beta^2=(\sum\alpha\beta)^2-2\alpha\beta\gamma\times\sum\alpha$

(v) $\frac{1}{\sum\alpha^2}=\frac{\sum\alpha^2\beta^2}{(\alpha\beta\gamma)^2}=\frac{(\sum\alpha\beta)^2-2\alpha\beta\gamma\times\sum\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2}$

(vi) $\sum\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\sum\alpha)^2-2\sum\alpha\beta}{(\alpha\beta\gamma)^2}$

Problems

Example-41. $4x^4+5x^2+6x-7=0$ সমীকরণের মূলগুলো $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ হলে $\sum\alpha, \sum\alpha\beta, \sum\alpha\beta\gamma$ এবং $\alpha\beta\gamma\delta$ এর মান কত?

Sol^n: $\sum\alpha=-\frac{0}{4}=0,\ \sum\alpha\beta=\frac{5}{4}$; $\sum\alpha\beta\gamma=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$, $\alpha\beta\gamma\delta=\frac{-7}{4}$ **(Ans.)**

Example-42. $x^2-2x+1=0$ সমীকরণটির মূলদ্বয়ের ত্রিঘাত এর সমষ্টি হলো- **[DU'20-21]**

Sol^n: $x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \quad \Rightarrow x=1,1 \therefore \alpha^3+\beta^3=1^3+1^3=2$

Example-43. $x^2-4x+4=0$ এর মূলদ্বয় α এবং β হলে $\alpha^3+\beta^3$=? **[DU' 00-01]**

Sol^n: $\alpha+\beta=4$; $\alpha\beta=4 \therefore\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4^3-3\times4\times4=16$ **(Ans.)**

Example-44. $3x^3-1=0$ এর মূলগুলো α,β,γ হলে $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ এর মান কত? **[DU'16-17]**

Sol^n: $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{0}{3}=0,\ \alpha\beta\gamma=\frac{1}{3}$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma+3\alpha\beta\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma=0+3\times\frac{1}{3}=1$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান: $3x^3-1=0\Rightarrow x^3=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\omega, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\omega^2$

$\therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\omega^3+\frac{1}{3}\omega^6=1$

Example-45. যদি $x^3+px+q=0$ সমীকরণের মূলগুলো α,β,γ হয়, তবে $\sum\alpha^2\beta^2$ এর মান নির্ণয় কর। **[CU'12-13]**

Sol^n: $\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p$, $\alpha\beta\gamma=-q$

$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta\gamma\ (\alpha+\beta+\gamma)\Rightarrow p^2=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2(-q)\times0$

$\therefore \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=p^2 \therefore \sum\alpha^2\beta^2=p^2$ **(Ans.)**

Example-46. $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $\sum \alpha^2\beta$ এর মান কত? **[JU'15-16]**

Sol^n: প্রদত্ত সমীকরণ $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $\sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma = \frac{2}{3}$; $\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$; $\sum\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma = -\frac{1}{3}$

এখন, $\sum\alpha.\sum\alpha\beta = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + \gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2 + 3\alpha\beta\gamma$

$\therefore \sum\alpha.\ \sum\alpha\beta = \sum\alpha^2\beta + 3\alpha\beta\gamma \quad \therefore \sum\alpha^2\beta = \sum\alpha.\sum\alpha\beta - 3\alpha\beta\gamma = \frac{2}{3}\times 0 - 3\left(-\frac{1}{3}\right) \therefore \sum\alpha^2\beta = 1$ **(Ans.)**

Type-10: প্রতিসম মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয়

Concept

দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে যদি α ও β এর অবস্থান পরিবর্তন করলে যদি মূলগুলো একই থাকে, তবে তাদেরকে প্রতিসম মূল বলে।
n ঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে যেকোন 2 টি চলকের অবস্থান বিনিময় করলে যদি মূলগুলো একই থাকে তাহলে তাদের প্রতিসম মূল বলে।

Problems

Example-47. $2x^2 - 5x + 6 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β হলে এমন দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদুটি

(a) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (b) $\alpha+3, \beta+3$ (c) $\alpha-3, \beta-3$ (d) $3\alpha, 3\beta$ (e) $\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3}$

(f) $\alpha+\frac{1}{\beta}, \beta+\frac{1}{\alpha}$ (g) $\frac{1}{\alpha^2\beta}, \frac{1}{\beta^2\alpha}$ (h) α^2, β^2

এই সবগুলো প্রতিসম মূল।

Sol^n: $2x^2 - 5x + 6 = 0$ ……… (i) সমীকরণের মূল দুটি $\alpha, \beta \therefore \alpha + \beta = \frac{5}{2}, \alpha\beta = \frac{6}{2} = 3$

(i) নং -এ $x = \alpha$ বসালে, $2\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$ ……… (ii) এবং $x = \beta$ বসালে, $2\beta^2 - 5\beta + 6 = 0$ ……… (iii)

(a) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করতে হবে।

ধরি, নতুন সমীকরণের একটি মূল x

$\therefore x = \frac{1}{\alpha}$ or, $x = \frac{1}{\beta}$

$\therefore \alpha = \frac{1}{x}$ or, $\beta = \frac{1}{x}$

α ও β এর মান একই। (ii) অথবা (iii) নং সমীকরণে α অথবা β এর মান বসালে,

$\therefore 2.\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 5.\frac{1}{x} + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{2 - 5x + 6x^2 = 0}$ **(Ans.)**

প্রতিসম মূলবিশিষ্ট সমীকরণ সমাধান করার Procedure:

প্রথম ধাপ: x = যে কোন একটি নতুন মূল। [এখানে $x = \frac{1}{\alpha}$]

দ্বিতীয় ধাপ: α অথবা β এর মান শুধু x এর সাপেক্ষে নির্ণয় করে সেই মানটি প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে দিলেই নতুন মূলবিশিষ্ট সমীকরণ পেয়ে যাব। [এখানে $\alpha = \frac{1}{x}$]

(b) ধরি, $x = \alpha + 3$; $\alpha = x - 3 \therefore$ সমীকরণটি, $2(x-3)^2 - 5(x-3) + 6 = 0$

$\Rightarrow 2(x^2 - 6x + 9) - 5x + 15 + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{2x^2 - 17x + 39 = 0}$ **(Ans.)**

(c), (d), (e) **Try yourself**

(f) $x = \alpha + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha\beta+1}{\beta} = \frac{3+1}{\beta}$ [$\because \alpha\beta = 3$]

$\Rightarrow \beta = \frac{4}{x} \therefore$ সমীকরণটি, $2.\left(\frac{4}{x}\right)^2 - 5.\frac{4}{x} + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{32 - 20x + 6x^2 = 0}$

(g) $x = \frac{1}{\alpha^2\beta} = \frac{1}{\alpha.\alpha\beta} = \frac{1}{3\alpha}$ [$\because \alpha\beta = 3$]

$\alpha = \frac{1}{3x} \therefore$ সমীকরণটি, $2\left(\frac{1}{3x}\right)^2 - 5.\frac{1}{3x} + 6 = 0$

$\Rightarrow \frac{2}{9x^2} - \frac{5}{3x} + 6 = 0 \Rightarrow \frac{2-15x+54x^2}{9x^2} = 0 \boxed{\therefore 54x^2 - 15x + 2 = 0}$

(h) $x = \alpha^2$

$\alpha = \pm\sqrt{x} \therefore 2(\pm\sqrt{x})^2 - 5(\pm\sqrt{x}) + 6 = 0$

$\Rightarrow 2x \pm 5\sqrt{x} + 6 = 0 \Rightarrow 2x + 6 = \pm 5\sqrt{x} \Rightarrow 4x^2 + 24x + 36 = 25x \Rightarrow \boxed{4x^2 - x + 36 = 0}$

প্রতিসম মূলবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণ:

Problems

Example-48. $2x^3 + 5x + 6 = 0$ সমীকরণের মূল তিনটি α, β, γ হলে এমন সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলগুলো,

(i) $-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}, -\frac{1}{\gamma}$ (ii) $\alpha + \beta - \gamma,\ \beta + \gamma - \alpha, \gamma + \alpha - \beta$ (iii) $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \frac{\gamma+\alpha}{\beta^2}$

মূলত্রয়ের যোগফল: $\alpha + \beta + \gamma = 0$

(i) $-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}, -\frac{1}{\gamma}$ প্রতিসম মূল।

$\therefore x = -\frac{1}{\alpha}; \alpha = -\frac{1}{x} \therefore$ সমীকরণটি, $2.\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + 5.\left(-\frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

$\Rightarrow \frac{-2}{x^3} - \frac{5}{x} + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{-2 - 5x^2 + 6x^3 = 0}$

(ii) $x = \alpha + \beta - \gamma = -\gamma - \gamma = -2\gamma$ [$\because \alpha + \beta + \gamma = 0$]

$\therefore \gamma = \frac{-x}{2} \therefore 2.\left(\frac{-x}{2}\right)^3 + 5.\left(\frac{-x}{2}\right) + 6 = 0 \Rightarrow -\frac{x^3}{4} - \frac{5x}{2} + 6 = 0 \therefore -x^3 - 10x + 24 = 0$

$\boxed{x^3 + 10x - 24 = 0}$

(iii) $x = \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2} = \frac{-\gamma}{\gamma^2} = \frac{-1}{\gamma}$; similar as (i)

Example-49: $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলির বিপরীত মূলগুলি দ্বারা গঠিত সমীকরণ কোনটি?

(a) $x^3 + px^2 + qx + r = 0$
(b) $x^3 + qx^2 + px + p = 0$
(c) $rx^3 + qx^2 + px - 1 = 0$
(d) $rx^3 - qx^2 + px - 1 = 0$

Sol^n: (d); $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β ও γ হলে, শর্তমতে নির্ণেয় সমীকরণের মূলগুলো হবে $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ এবং যা প্রতিসম মূল।

$\therefore x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}$; α হচ্ছে প্রদত্ত সমীকরণের 1টি মূল

$\therefore \left(\frac{1}{x}\right)^3 - p\left(\frac{1}{x}\right)^2 + q\left(\frac{1}{x}\right) - r = 0 \Rightarrow rx^3 - qx^2 + px - 1 = 0$ **(Ans.)**

Type-11: সাধারণ মূল সংক্রান্ত

Concept

$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ এর একটি সাধারণ মূল α হলে, $a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0$ এবং $a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0$

বজ্রগুণনের মাধ্যমে সমাধান করে পাই, $\frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

১ম ও ২য় অনুপাত হতে

$\frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{c_1a_2 - c_2a_1}$ $\therefore \alpha = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1}$ ……… (i)

২য় ও ৩য় অনুপাত হতে, $\alpha = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ……… (ii)

(i) ও (ii) তুলনা করে, $\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

$\therefore$ (i) $\boxed{(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2}$ [12 21 Rule]

Shortcut

$\left.\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0 \longrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \longrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \end{array}\right\}$ এখান থেকে বলা যায় সাধারণ মূল 2

কিন্তু 2 টি সমীকরণ দেওয়া থাকলে যদি তাদের সাধারণ মূল থাকে তাহলে তা নির্ণয়ের সহজ উপায় হলো সমীকরণদ্বয় বিয়োগ করে দেওয়া (x^2 এর সহগ একই রেখে)

$$\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \\ \underline{(-)\quad(+)\quad(-)\qquad} \\ x - 2 = 0 \end{array}$$

$\therefore \boxed{x = 2} \leftarrow$ সাধারণ মূল $= 2$

বি.দ্র.: 2 টি সমীকরণের সাধারণ মূল না থাকলেও বিয়োগ করলে x এর একটি মান আসবে। কিন্তু সেটা উক্ত সমীকরণদ্বয়ের একটিরও মূল নয়। তাই 2 টি সমীকরণ বিয়োগ করে x এর প্রাপ্ত মানটিকে যেকোন একটি সমীকরণে বসিয়ে দিলে যদি L.S = R.S হয় তাহলে ঐটাই সাধারণ মূল। অন্যথায় সাধারণ মূল নেই।

দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি সাধারণ মূল থাকলে:

$x^2 - 5x + 6 = 0$ এর মূল $\rightarrow 2, 3$

$3x^2 - 15x + 18 = 0$ এর মূল $\rightarrow 2, 3$

অর্থাৎ, 2 টি দ্বিঘাত সমীকরণের 2 টি মূলই সমান হবে যদি একটি সমীকরণ অপরটির গুণিতক হয় বা সমীকরণদ্বয়ের x^2, x এর সহগগুলোর এবং ধ্রুবক পদের অনুপাত সমান হয়।

অর্থাৎ, $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ এর 2 টি মূলই সমান হলে $\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$

আবার এভাবে চিন্তা করতে পারো,

$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এর মূলগুলো α, β এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ এর মূলগুলোও α, β

তাহলে, $\alpha + \beta = -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2} \therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$; $\alpha\beta = \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} \therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2} \therefore \boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$ যা দ্বিঘাত সমীকরণদ্বয়ের দুইটি মূলই সাধারণ হওয়ার শর্ত।

Problems

Example-50: $x^2-(a-1)x+(a+b)=0$ এবং $ax^2-2x+b=0$ সমীকরণদ্বয়ের মূলগুলি একই হলে, a এবং b এর মান হবে।

(a) $a=2,\ b=4$ (b) $a=2, b=-4$ (c) $a=1, b=\frac{1}{2}$ (d) $a=-1, b=\frac{1}{2}$

Sol^n^: (b); $x^2-(a-1)x+(a+b)=0$ ……… (i)

$ax^2-2x+b=0$ ……… (ii)

(i) ও (ii) এর মূলগুলি একই, তাহলে লেখা যায়,

$\frac{1}{a}=\frac{-(a-1)}{-2}=\frac{a+b}{b}\Rightarrow\frac{1}{a}=\frac{a-1}{2}=\frac{a+b}{b}\therefore a^2-a-2=0$ [১ম ও ২য় অনুপাত হতে]

$\therefore (a-2)(a+1)=0\therefore a=2,-1$

আবার $\frac{1}{a}=\frac{a+b}{b}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{2+b}{b}$ [a = 2 নিয়ে]

$\Rightarrow b=-4\therefore a=2$ এবং $b=-4$ **(Ans.)**

নোট: $a_1x^2=b_1x+c_1=0$ এবং $a_2x^2+b_2x+c_2=0$

সমীকরণদ্বয়ের মূলগুলি একই হলে, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ হয়।

Example-51. $x^2-px+q=0$ এবং $x^2-qx+p=0$ সমীকরণ দুটির একটি মাত্র সাধারণ মূল থাকলে, p ও q এর মধ্যকার সম্পর্ক নির্ণয় কর? **[KU'14-15]**

Sol^n^: $x^2-px+q=0\,;x^2-qx+p=0$

ধরি, সাধারণ মূলটি α তাহলে, $\alpha^2-p\alpha+q=0;\ \alpha^2-q\alpha+p=0$

বজ্রগুণনের সূত্র প্রয়োগ করে, $\frac{\alpha^2}{-p^2+q^2}=\frac{\alpha}{q-p}=\frac{1}{-q+p}$

১ম ও ২য় অনুপাত হতে পাই, $\frac{\alpha^2}{q^2-p^2}=\frac{\alpha}{q-p}\Rightarrow\frac{\alpha}{q+p}=\frac{1}{1}\Rightarrow\alpha=q+p$

২য় ও ৩য় অনুপাত হতে পাই, $\alpha=\frac{q-p}{-(q-p)}\Rightarrow p+q=-1\Rightarrow p+q+1=0$

Example-52: $x^2-11x+a=0$ এবং $x^2-14x+2a=0$ এর একটি সাধারণ মূল থাকলে a =?

(a) 0, 24 (b) 0, −24 (c) 1, −1 (d) −1, 1

Sol^n^: (a); সাধারণ মূল α হলে, $\alpha^2-11\alpha+a=0$

$$\alpha^2-14\alpha+2a=0$$

(−) করে পাই, $3\alpha=a$

$\therefore\alpha=\frac{a}{3}\therefore\frac{a^2}{9}-\frac{11a}{3}+a=0$ বা, $a^2-33a+9a=0$

বা, $a(a-24)=0\ \therefore a=0,24$

Type-12: একটি লেখচিত্র অক্ষদ্বয়কে কয়টি বিন্দুতে ছেদ করবে তা সংক্রান্ত

Concept

(i) একটি লেখচিত্র x অক্ষকে যেসকল বিন্দুতে ছেদ করবে তাদের কোটির মান 0. তাহলে, $y = f(x)$ বা $f(x, y) = 0$ আকৃতির সমীকরণে $y = 0$ বসালে x এর যতটি বাস্তব মান পাওয়া যাবে লেখচিত্রটি x অক্ষকে ততোগুলো বিন্দুতে ছেদ করবে।

(ii) একটি লেখচিত্র y অক্ষকে যেসকল বিন্দুতে ছেদ করবে তাদের ভুজের মান 0. তাহলে, $y = f(x)$ বা $f(x, y) = 0$ সমীকরণে $x = 0$ বসালে y এর যতটি বাস্তব মান পাওয়া যাবে লেখচিত্রটি y অক্ষকে ততগুলো বিন্দুতে ছেদ করবে।

Problems

Example-53. $f(x) = 1 + x^3$ বক্ররেখাটির সাথে x-অক্ষের ছেদবিন্দুর সংখ্যা নির্ণয় কর। **[DU' 18-19]**

Sol^n: $y = f(x) = 1 + x^3$ ফাংশনটি x অক্ষকে যেসকল বিন্দুতে ছেদ করবে তাদের জন্য $y = 0$.

তাহলে, $0 = 1 + x^3 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x^3 = (-1)^3 \Rightarrow \left(\frac{x}{-1}\right)^3 = 1 \Rightarrow \frac{x}{-1} = \sqrt[3]{1} = 1, \omega, \omega^2 \therefore x = -1, -\omega, -\omega^2$

এখানে, -1 বাস্তব, কিন্তু $-\omega, \omega^2$ অবাস্তব মূল। ∴ বাস্তব মূল একটি।

অর্থাৎ, $f(x) = 1 + x^3$ ফাংশনটি 1 টি বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করবে।

Example-54. $f(x, y) = x^2y + 4y^2 + 6xy - 6y + 2 = 0$ বক্ররেখাটির সাথে y- অক্ষের ছেদবিন্দুর সংখ্যা নির্ণয় কর।

Sol^n: $f(x, y) = x^2y + 4y^2 + 6xy - 6y + 2 = 0$ ফাংশনটি y অক্ষকে যেসকল বিন্দুতে ছেদ করবে তাদের জন্য $x = 0$.

তাহলে, $f(0, y) = 0 \Rightarrow 0^2.y + 4y^2 + 6.0.y - 6y + 2 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 6y + 2 = 0$

$\Rightarrow 2y^2 - 3y + 1 = 0 \therefore y = 1, \frac{1}{2}$; এখানে, $1, \frac{1}{2}$ বাস্তব মূল। অর্থাৎ, y এর বাস্তব মূল 2 টি

অর্থাৎ, $f(x, y) = x^2y + 4y^2 + 6xy - 6y + 2 = 0$ বক্ররেখাটি 2 টি বিন্দুতে y অক্ষকে ছেদ করবে।

Type-13: দ্বিঘাত বহুপদী ফাংশনের সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মান সংক্রান্ত

Concept

আদর্শ দ্বিঘাত বহুপদী ফাংশন $y = f(x) = ax^2 + bx + c \ldots\ldots\ldots (i)$

সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 2ax + b = 0 \therefore x = -\frac{b}{2a}$

এখন, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a$ তাহলে, $a > 0$ হলে, $x = -\frac{b}{2a}$ তে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান থাকবে। $a < 0$ হলে, $x = -\frac{b}{2a}$ তে ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান থাকবে।

সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মানটি, $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{4ac-b^2}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$

$\therefore f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{D}{4a}$ [যেখানে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$]

∴ $a > 0$ হলে, $x = -\frac{b}{2a}$ তে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান, $y_{min} = -\frac{D}{4a}$

$a < 0$ হলে, $x = -\frac{b}{2a}$ তে ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান, $y_{max} = -\frac{D}{4a}$

Problems

Example-55. $f(x) = 3x^2 - 15x + 18$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান থাকবে নাকি সর্বনিম্ন মান থাকবে? সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মানটি x এর কোন মানের জন্য পাওয়া যাবে? সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মানটি নির্ণয় কর।

Sol^n: $y = f(x) = 3x^2 - 15x + 18$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 6x - 15 = 0 \therefore x = 2.5$ **(Ans.)**

আবার, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6 > 0 \therefore x = 2.5$ বিন্দুতে ফাংশনটির লঘুমান (সর্বনিম্ন মান) থাকবে। **(Ans.)**

∴ সর্বনিম্ন মানটি $= f(2.5) = 3.(2.5)^2 - 15(2.5) + 18 = -\frac{3}{4}$ **(Ans.)**

Shortcut: $f(x) = 3x^2 - 15x + 18$ $[a = 3 > 0]$

$\because a > 0$ $\therefore$ ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান থাকবে। **(Ans.)**

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-15}{2\times3} = 2.5$ হলে, ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান থাকবে। **(Ans.)**

সর্বনিম্ন মানটি $= -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{(-15)^2-4\times3\times18}{4\times3} = -\frac{3}{4}$ **(Ans.)**

Example-56. x এর কোন মানের জন্য $-x^2 + 2bx + c^2$ এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়? **[RU'12-13]**

Sol^n: $-x^2 + 2bx + c^2 = -x^2 + 2bx - b^2 + b^2 + c^2 = -(x-b)^2 + b^2 + c^2$ রাশিটির মান সর্বোচ্চ হবে যদি $x - b = 0$ হয় $\therefore$ $x = b$ **(Ans.)**

Shortcut: $-x^2 + 2bx + c^2 = y$ হলে, সর্বোচ্চ মানের জন্য, $x = -\frac{2b}{2(-1)} = b$

Example-57. $3x - x^2 - 5$ এর গরিষ্ঠমান কত?

Sol^n: গরিষ্ঠ মান $= -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{3^2-4(-1)(-5)}{4(-1)} = -\frac{11}{4}$ **(Ans.)**

Example-58. $2x^2 + 5x + 6$ এর লঘিষ্ঠ মান কত?

Sol^n: লঘিষ্ঠ মান $= -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{5^2-4.2.6}{4.2} = \frac{23}{8}$ **(Ans.)**

Type-14: শর্ত সাপেক্ষে প্রমাণ সংক্রান্ত

Concept

এই টাইপটিতে কোন বহুপদী সমীকরণের কোন একটি শর্ত দেওয়া থাকবে এবং তার সাপেক্ষে কোন কিছু প্রমাণ করতে দেওয়া হবে।

Problems

Example-59: কী শর্তে $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের দুটি মূলের সমষ্টি শূন্য হবে?

Sol^n: মূল তিনটি $\alpha, -\alpha$ ও β হলে, $\alpha - \alpha + \beta = p \Rightarrow \beta = p$

$\alpha(-\alpha) + (-\alpha)\beta + \alpha\beta = q \Rightarrow -\alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = q \Rightarrow -\alpha^2 = q$

$\alpha(-\alpha)\beta = r \Rightarrow -\alpha^2\beta = r \Rightarrow q \times p = r$ $\therefore pq = r$ **(Ans.)**

Example-60: যদি $x^2 - bx + c = 0$ এবং $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলগুলোর মধ্যে কেবল একটি ধ্রুবকের পার্থক্য থাকে, b ও c এর মধ্যকার সম্পর্ক কী? **[RU'15-16]**

Sol^n: ধরি, $x^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

তাহলে, p কোন ধ্রুবক হলে, $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + p, \beta + p$

এখন, $\alpha + \beta = b$ এবং $\alpha\beta = c$ আবার, $\alpha + \beta + 2p = c$ $\therefore p = \frac{c-b}{2}$ এবং $(\alpha + p)(\beta + p) = b$

$\Rightarrow \alpha\beta + (\alpha + \beta)p + p^2 = b \Rightarrow c + bp + p^2 = b \Rightarrow c + b \times \frac{c-b}{2} + \frac{(c-b)^2}{4} = b$

$\Rightarrow 4c + 2bc - 2b^2 + c^2 - 2bc + b^2 = 4b \Rightarrow c^2 - b^2 = 4(b-c) \Rightarrow b + c = -4$ $[\because b - c \neq 0]$

$\therefore b + c + 4 = 0$ **(Ans.)**

$[b - c \neq 0 \because b \neq c$ কারণ, $b = c$ হলে সমীকরণদ্বয় একই হয়ে যেত$]$

Type-15: বিবিধ

Concept

ভাগশেষ উপপাদ্য এবং আরও কিছু শর্ত সাপেক্ষে মান নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা এখানে দেওয়া হয়েছে। প্রয়োজন অনুসারে শর্তসমূহ ব্যবহার করে এগুলো সমাধান করতে হবে।

Problems

Example-61: α এর মান কত হলে, $x^3+x^2+x+\alpha$ রাশিটি $x+2$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে? **[JU'19-20]**

Solⁿ: $(-2)^3+(-2)^2-2+\alpha=0 \therefore \alpha=6$

Example-62: $\frac{x^n-a^n}{x-a}$ নিঃশেষে বিভাজ্য হলে, ভাগফলের সর্বোচ্চ ঘাত কত? **[RU'22-23]**

(a) 1 (b) n (c) $n-1$ (d) n-2

Solⁿ: (c); লবে চলকের সর্বোচ্চ ঘাত n এবং হরে চলকের সর্বোচ্চ ঘাত 1। নিঃশেষে বিভাজ্য হলে, সর্বোচ্চ ঘাত হবে: $n-1$

Example-63: k এর কোন মানের জন্য $x^2-3x+2+k$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x-3)$ হবে? **[RU'22-23]**

(a) -3 (b) -2 (c) 1 (d) 2

Solⁿ: (b); $f(x)=x^2-3x+2+k \therefore f(3)=3^2-3\cdot3+2+k=k+2$

এখন, $f(3)=0 \Rightarrow k+2=1 \therefore k=-2$

Example-64: $(2x^3-4x+1)$ কে (x^2-x+3) দ্বারা গুণ করলে প্রাপ্ত গুণফলে x^2 এর সহগ কত?

Solⁿ: $(2x^3-4x+1)(x^2-x+3)=2x^5-2x^4+6x^3-4x^3+4x^2-12x+x^2-x+3$

$=2x^5-2x^4+2x^3+5x^2-13x+3 \therefore x^2$ এর সহগ 5

❖ **Shortcut:**

কীভাবে গুণ দিলে x^2 পাব !!

$2x^3$	$-4x$	$+1$
	$-x$	x^2

$4x^2+x^2=5x^2 \quad \therefore x^2$ এর সহগ 5 **(Ans.)**

Example-65: $x=1+\sqrt{5}$ হলে x^8-112x^4+256 এর মান কত?

Solⁿ: $x=1+\sqrt{5}$

$x^2-2\sqrt{5}x+5=1 \Rightarrow x^2+4=2\sqrt{5}x \Rightarrow x^4+8x^2+16=20x^2 \Rightarrow x^4+16=12x^2$

$\Rightarrow x^8+32x^4+256=144x^4 \Rightarrow x^8-112x^4+256=0$ **(Ans.)**

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

- $ax^2+bx+c=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ এবং এর মূলদ্বয় হচ্ছে, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক D হলে, $D=b^2-4ac$.
- নিশ্চায়ক দ্বারা $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি জানা যায়-

(i) $b^2-4ac>0$ অর্থাৎ নিশ্চায়ক ধনাত্মক হলে, মূলদ্বয় বাস্তব এবং অসমান হবে।

(ii) $b^2-4ac=0$ হলে, মূলদ্বয় বাস্তব এবং সমান হবে।

(iii) $b^2-4ac<0$ অর্থাৎ নিশ্চায়ক ঋণাত্মক হলে, মূলদ্বয় জটিল হবে।

(iv) b^2-4ac পূর্ণবর্গ হলে, মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান হবে।

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম

MCQ

01. যে সমীকরণের মূলগুলো $x^2-5x-1=0$ সমীকরণের মূলগুলো হতে 2 ছোট, তা–
(a) $x^2+x+7=0$ (b) $x^2-x+7=0$ (c) $x^2-x-7=0$ (d) $x^2-x-1=0$

02. $5-3x-x^2$ এর সর্বোচ্চ মান–
(a) 3 (b) 5 (c) $\frac{47}{4}$ (d) $\frac{29}{4}$

03. $x^2-7x+12=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β হলে $\alpha+\beta$ এবং $\alpha\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ–
(a) $x^2-19x+84=0$ (b) $x^2+14x-144=0$
(c) $x^2-14x+144=0$ (d) $x^2+19x-84=0$

04. $x^2-5x+c=0$ সমীকরণে একটি মূল 4 হলে অপর মূলটি–
(a) -5 (b) -4 (c) 4 (d) 1

05. $27x^2+6x-(k+2)=0$ সমীকরণটি একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে k এর মান কত?
(a) 6 (b) 1 (c) 6 বা -1 (d) -6 বা 1

06. $x^2-ax+b=0$ এবং $x^2-bx+a=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি মাত্র সাধারণ মূল থাকলে, $(a+b)$ এর মান–
(a) -1 (b) 1 (c) ±1 (d) 0

07. দ্বিঘাত সমীকরণের মূল নির্ণয়ের formula কোনটি?
(a) $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (b) $\frac{\pm b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (c) $\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (d) $\frac{b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

08. k এর যে মানের জন্য সমীকরণ $(k+1)x^2+4(k-2)x+2k=0$ এর মূল দুটি সমান হবে তা হল–
(a) 4 (b) 8 (c) 2 (d) 3

09. $x^3+7x^2+cx+c=0$ সমীকরণের একটি মূল 0 হলে c এর মান কত?
(a) 0 (b) 2 (c) -1 (d) 3

10. p এর কীরূপ মানের জন্য $x^2+px+1=0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় জটিল হবে?
(a) $-2\le P\le 2$ (b) $-4<P\le 4$ (c) $-2<P<2$ (d) $-4\le P<4$

11. p এর কোন মানের জন্য $x^2-px+p+3=0$ এর দুটি সমান বীজ থাকবে?
(a) -2 (b) 6 (c) $\frac{3}{6}$ (d) -2 বা 6

12. $x^2-4x+4=0$ এর বীজদ্বয় α এবং β হলে, $\alpha^3+\beta^3$ এর মান কত?
(a) 24 (b) 32 (c) 16 (d) 8

13. যদি $x^3+px+q=0$ সমীকরণের মূলগুলো α,β,γ হয়, তবে $\sum\alpha^2\beta^2$ এর মান কত?
(a) p^2-2pq (b) $-2pq$ (c) p^2 (d) কোনটিই নয়

14. যদি $x^2+x+4=0$ সমীকরণের মূল α এবং β হয় তবে $\alpha-\beta=$?
(a) ±16 (b) $\pm\sqrt{-15}$ (c) $\pm\sqrt{-20}$ (d) $\pm\sqrt{15}$

15. যদি $x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ হয়, তবে x^3+x^{-3} এর মান–
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 2 (c) 4 (d) $\frac{1}{4}$

16. $x^2-2x+3=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α,β হলে, $-\alpha,-\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ–
(a) $x^2-2x+3=0$ (b) $x^2-2x-3=0$ (c) $x^2+2x-3=0$ (d) $x^2+2x+3=0$

17. $3x^2+5x-3=0$ এর একটি মূল (Root) যদি a হয় তবে অপর মূলটি কত?
(a) $-\frac{1}{a}$ (b) $\frac{1}{a}$ (c) $-a$ (d) a

18. $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণদ্বয়ের দুটি মূলই সাধারণ হওয়ার শর্ত কোনটি?
(a) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ (b) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}$
(c) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (d) $a_1a_2 = b_1b_2 = c_1c_2$
19. একটি সমীকরণের মূল $2 + 3i$ হলে, সমীকরণ কোনটি?
(a) $x^2 - 4x + 13 = 0$ (b) $x^2 - x + 3 = 0$ (c) $x^2 - 7x + 13 = 0$ (d) কোনটিই নয়
20. সমীকরণ $x^2 + bx + 1 = 0$ এর মূলগুলো বাস্তব হওয়ার শর্ত–
(a) $b^2 < 4$ (b) $b^2 > 4$ (c) $b^2 = 4$ (d) $b^2 \geq 4$
21. $(b^2 - 4ac)$ পূর্ণ বর্গ হলে মূল দুইটি–
(a) বাস্তব সংখ্যা, অমূলদ, অসমান হবে (b) বাস্তব সংখ্যা, মূলদ এবং অসমান হবে
(c) পরস্পর সমান, বাস্তব সংখ্যা ও মূলদ হবে (d) কোনটিই নয়
22. মূলদ সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$ হলে অপরটি কত?
(a) $-2 - \sqrt{5}$ (b) $-2 + \sqrt{5}$ (c) $2 + \sqrt{5}$ (d) $\frac{1}{-2+\sqrt{5}}$
23. $ax^3 + bx^2 + d = 0$ এ জটিল মূল থাকতে পারে–
(a) একটি (b) তিনটি (c) দুইটি (d) কোনটিই নয়
24. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $3 - \sqrt{-5}$ হলে সমীকরণটি হবে–
(a) $x^2 - 6x + 14 = 0$ (b) $x^2 + 6x - 14 = 0$ (c) $x^2 - 14x + 6 = 0$ (d) কোনটিই নয়
25. $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ এর একটি মূল a হলে, নিচের কোনটি সত্য?
(a) $a^3 = 1$ (b) $a^2 = -1$ (c) $a^3 = -1$ (d) $a = i$
26. $(x - 1)^2 = 2$ সমীকরণের মূলদ্বয়–
(a) অমূলদ (b) অবাস্তব (c) মূলদ (d) কোনটিই নয়
27. $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়–
(a) বাস্তব (b) অবাস্তব (c) মূলদ (d) কোনটিই নয়
28. দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $1 + i$ হলে সমীকরণটি–
(a) $x^2 + 2x + 2 = 0$ (b) $x^2 - 2x + 2 = 0$
(c) $x^2 + 2x + 1 = 0$ (d) $x^2 + 2x - 2 = 0$
29. $ax^2 + bx + c = 0$ এ $b = 0$ হলে মূল দুইটি হবে-
(a) সমান ও বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট (b) অসমান (c) সমান (d) কোনটিই নয়
30. $4x^5 + 1 = 0$ সমীকরণটির মূল–
(a) 1 টি (b) 2 টি (c) 5 টি (d) 4 টি
31. 'a' এর মান কত হলে $2x^2 + ax + 4 = 0$ সমীকরণটি মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে?
(a) 4 (b) 2 (c) $4\sqrt{2}$ (d) 0
32. $(2x^3 - 4x + 1)$ কে $(x^2 - x + 3)$ দ্বারা গুণ করলে গুণফলে x^2 এর সহগ কত?
(a) 1 (b) 5 (c) −13 (d) 4
33. $9x^4y^3 - 8x^6 + 4xy^3 + 7$ বহুপদীর ঘাত কত?
(a) 6 (b) 7 (c) 4 (d) 3
34. $3x^2 + 2x - 7 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল কত?
(a) $\frac{-2}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{7}{3}$ (d) $-\frac{7}{3}$
35. 3 ও 4 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি?
(a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (b) $x^2 - 12x + 7 = 0$
(c) $x^2 + 7x - 12 = 0$ (d) $x^2 + 7x + 12 = 0$

36. $px^2 - x + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় অবাস্তব হলে মূলদ্বয়ের যোগফল তবে–
(a) অবাস্তব সংখ্যা (b) বাস্তব সংখ্যা (c) অমূলদ সংখ্যা (d) মূলদ সংখ্যা

37. x এর কোন মানের জন্য $-x^2 + 2bx + c^2$ এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়?
(a) c^2 (b) b^2 (c) b (d) c

38. $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে k এর মান কত হবে?
(a) 30 (b) 60 (c) 40 (d) 50

39. $x^2 + x + 1 = 0$ এর একটি মূল α হলে, $(1 + \alpha)^2$ এর মান-
(a) α (b) α^2 (c) α^3 (d) 2α

40. p এর মান কত হলে $px^2 + 3x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও অসমান হবে?
(a) $p > \frac{9}{16}$ (b) $p = \frac{9}{16}$ (c) $p < \frac{9}{16}$ (d) কোনটিই নয়

41. $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো a, b, c হলে $\sum \frac{1}{a^2} =$ কত?
(a) $\frac{1}{r^2}(q^2 - 2pr)$ (b) $\frac{1}{q^2}(r^2 - 2rp)$ (c) $\frac{1}{r^2}(p^2 - 2rp)$ (d) $\frac{1}{p^2}(q^2 - 2rp)$

42. $4x^2 - 6x - (p + 2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হলে, p-এর মান কোনটি?
(a) 3 (b) −3 (c) 4 (d) −4

43. কী শর্তে $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের দুটি মূলের সমষ্টি শূন্য হবে?
(a) $pr = q$ (b) $pq = r$ (c) $qr = p$ (d) কোনটিই নয়

44. p, q বাস্তব সংখ্যা এবং $2x^2 - 2(p + q)x + p^2 + q^2 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব বলে p এর মান
(a) q (b) 1 (c) 0 (d) কোনটিই নয়

45. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলোর ত্রিঘাতের সমষ্টি কত?
(a) $3pq - p^3 - 3r$ (b) $3pq - p^3$ (c) 0 (d) কোনটিই নয়

46. $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β এবং γ হলে $\sum \alpha^2\beta$ এর মান হবে–
(a) 3 (b) 4 (c) −3 (d) 1

47. $2x^2 + x + b = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α, β এবং $2x^2 + 3x + b = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি $\alpha + 1, \beta + 1$ হলে, b এর মান হবে-
(a) 5 (b) 7 (c) 2 (d) 3

48. দ্বিঘাত সমীকরণ $bx^2 + cx - d = 0$ এর দুটি মূল সমান ও বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হবে যদি–
(a) $b = 0$ (b) $d = 0$ (c) $c = 1$ (d) $c = 0$

49. যদি α, β সমীকরণ $x^2 + px + q = 0$ এর মূল হয় তবে $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ এর মান কত?
(a) $-\frac{p}{q}$ (b) $\frac{q}{p}$ (c) $-\frac{q}{p}$ (d) $\frac{p}{q}$

50. নিচের কোনটি বহুপদী?
(a) 0 (b) x^2 (c) $x^{\frac{1}{2}}$ (d) (a) ও (b) উভয়ই

51. $4x^2 - 5x + 1$ এর গরিষ্ঠ মান নিচের কোনটি?
(a) $\frac{-9}{16}$ (b) $\frac{9}{16}$ (c) $+\infty$ (d) $-\infty$

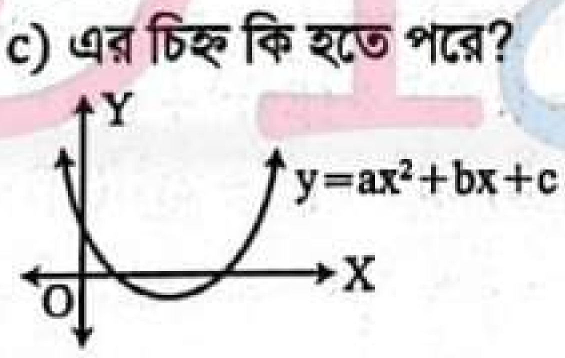
52. $3x^2 - 8x + 6 = 0$ সমীকরণের মূল দুটি α, β হলে, α^2, β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হল-
(a) $3x \pm 8\sqrt{x} + 6 = 0$ (b) $9x^2 - 28x + 36 = 0$ (c) $2x^2 - 3x + 5$ (d) কোনটিই নয়

53. $4a^2 + ax + 1 = 0$, x এর মান কত হলে মূলদুটি জটিল হবে?
(a) $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$ (b) $[-4, 4]$ (c) $(-4, 4)$ (d) $\{-4, 4\}$

54. $px^2 + 7x + 7 = 0$ সমীকরণের দুটি মূল α, β হলে $\alpha + 1, \beta + 1$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হচ্ছে–
(a) $px^2 + (2p - 7)x + p = 0$ (b) $px^2 - (2p - 7)x + p = 0$
(c) $px^2 + (2p - 7)x - p = 0$ (d) $px^2 - (2p - 7)x - p = 0$

Written

55. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটি সমাধান কর।
56. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর।
57. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ সমীকরণের মূলের সাথে সহগের সম্পর্ক স্থাপন কর।
58. $ax^2+bx+c=0$ এবং $cx^2+bx+a=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $c+a=\pm b$
59. $e^{2x}-4e^x+2=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় x_1 ও x_2 হলে দেখাও যে, $x_1+x_2=\ln 2$
60. $x^3-5x^2+17x-13=0$ সমীকরণের একটি মূল 1 হলে, অপর মূল দুইটি নির্ণয় কর।
61. দেখাও যে, $a=b$ না হলে $2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2=0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব হতে পারে না।
62. k এর মান কত হলে, $(k+1)x^2+2(k+3)x+2k+3$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ হবে?
63. $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূল দুইটি বাস্তব ও অসমান হলে দেখাও যে, $2x^2-4(1+c)x+(b^2+2c^2+2)=0$ সমীকরণের মূল দুইটি জটিল হবে।
64. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α,β হলে, $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ও $\sqrt{\alpha\beta}$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর।
65. চতুর্থঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর যার দুইটি মূল যথাক্রমে 2,3 এবং বাকী মূল $x^2+4x+5=0$ সমীকরণের মূল।
66. যদি α ও β অসমান হয় অথচ $\alpha^2=5\alpha-3$ এবং $\beta^2=5\beta-3$ হয় তবে $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।
67. $mx^2+nx+l=0$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাত r হলে দেখাও যে, $\frac{(r+1)^2}{r}=\frac{n^2}{ml}$
68. দুইটি মূলের অনুপাত 3:4 হলে, $2x^3-x^2-22x-24=0$ সমীকরণটি সমাধান কর।
69. $8x^4-2x^3-27x^2+6x+9=0$ সমীকরণের যেকোনো দুইটির যোগফল শূন্য হলে সমীকরণটির অপর দুইটি মূলের মান নির্ণয় কর।
70. $x^2-bx+c=0$ ও $x^2-cx+b=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুবরাশি হলে প্রমাণ কর যে $b+c+4=0$
71. $2bx^2+2(a+b)x+3a=2b$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হলে দেখাও যে, $a=2b$ এবং $4a=11b$
72. $x^2+6x+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $|\alpha-\beta|=?$
73. $qx^2+2x+3q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল তাদের গুণফলের সমান হলে, $q=?$
74. $4\beta^2+\lambda\beta-2=0$ এর মূলদ্বয় $\frac{k}{k+1}$ এবং $\frac{k+1}{k+2}$ হলে, $\lambda=?$
75. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $cx^2+bx+a=0$ সমীকরণের মূলগুলিকে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।
76. নিচের চিত্র $y=ax^2+bx+c$ হলে, $(a.b.c)$ এর চিহ্ন কি হতে পরে?



প্র্যাক্টিস প্রবলেমের সমাধান

MCQ

01. **Sol^n: (c)** ; $x^2-5x-1=0$ সমীকরণের মূলগুলো α ও β হলে $\alpha+\beta=5$ ও $\alpha\beta=-1$
এখন $(\alpha-2)+(\beta-2)=\alpha+\beta-4=5-4=1$
$(\alpha-2)\times(\beta-2)=\alpha\beta-2\alpha-2\beta+4=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=-1-2(5)+4=-7$
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2-x-7=0$
02. **Sol^n: (d)**; $f'(x)=-3-2x \therefore -3-2x=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ $\therefore$ সর্বোচ্চ মান $=5-3\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{29}{4}$
03. **Sol^n: (a)**; এখানে, $\alpha+\beta=7, \alpha\beta=12$
$\therefore \alpha+\beta+\alpha\beta=19, (\alpha+\beta)\alpha\beta=84 \therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2-19x+84=0$

04. **Sol^n: (d);** অপর মূল α হলে, $\alpha + 4 = -\left(\frac{-5}{1}\right) = 5 \therefore \alpha = 1$

05. **Sol^n: (c);** $\alpha + \alpha^2 = -\frac{2}{9}, \alpha^3 = -\frac{(k+2)}{27} \therefore (\alpha + \alpha^2)^3 = -\frac{8}{729}$
$\Rightarrow \alpha^3 + \alpha^6 + 3\alpha^3(\alpha + \alpha^2) = -\frac{8}{729} \Rightarrow -\left(\frac{k+2}{27}\right) + \frac{(k+2)^2}{729} + 3\left\{\frac{-(k+2)}{27}\right\}\left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{8}{729}$ সমাধান করে, $k = 6, -1$

06. **Sol^n: (a);** $\left.\begin{matrix} x^2 - ax + b = 0 \\ x^2 - bx + a = 0 \end{matrix}\right\}$ সাধারণ মূল α হলে,
$\alpha^2 - \alpha a + b = 0$
$\alpha^2 - \alpha b + a = 0$
$\frac{\alpha^2}{-a^2+b^2} = \frac{\alpha}{b-a} = \frac{1}{-b+a}$
$\therefore \alpha = b + a$ আবার, $\alpha = -1$
$\therefore \boxed{b + a = -1} \Rightarrow a + b + 1 = 0$

07. **Ans:** (a) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

08. **Sol^n: (b);** মূল সমান হওয়ার জন্য $b^2 - 4ac = 0$ হতে হবে। $\therefore 16(k-2)^2 - 4(k+1)2k = 0$
$\Rightarrow 16(k^2 - 4k + 4) - 8k^2 - 8k = 0 \Rightarrow 16k^2 - 8k^2 - 64k - 8k + 64 = 0 \Rightarrow 8k^2 - 72k + 64 = 0$
$\therefore k = 8$ বা 1 [Solve by calculator (eqn mode)]

09. **Sol^n: (a);** ধরি, তিনটি মূল হচ্ছে $\alpha, \beta, \gamma \therefore \alpha\beta\gamma = -\frac{c}{1}$ [একটি মূল 0] Or, $c = 0$
Alternative Sol^n: মূল 0 দিয়ে সমীকরণটি সিদ্ধ করে পাই, $0^3 + 7.0^2 + c.0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$ **(Ans.)**

10. **Sol^n: (c);** $x^2 + px + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4}}{2}$ মূলদ্বয় জটিল হবে যদি $P^2 < 4$ হয়। অর্থাৎ, $|p| < 2$ হয় $-2 < p < 2$ হয়।

11. **Sol^n: (d);** $p^2 - 4(p+3) = 0 \Rightarrow p = 6, -2$

12. **Sol^n: (c);** $\alpha + \beta = 4; \alpha\beta = 4; \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 4^3 - 3 \times 4 \times 4 = 16$

13. **Sol^n: (c);** এখানে, $\sum \alpha^2\beta^2 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)$ এবং $\alpha\beta\gamma = -q$
এখন, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ এবং $\frac{1}{\gamma}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $\left(\frac{1}{x}\right)^3 + p\left(\frac{1}{x}\right) + q = 0 \Rightarrow qx^3 + px^2 + 1 = 0$
$\therefore \sum \frac{1}{\alpha} = -\frac{p}{q} \sum \frac{1}{\alpha\beta} = 0 \therefore \sum \frac{1}{\alpha^2} = \left(\sum \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\sum \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{p^2}{q^2} \therefore \sum \alpha^2\beta^2 = (-q)^2 \times \frac{p^2}{q^2} = p^2$
Alternative Sol^n: $\alpha + \beta + \gamma = 0;\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p;\ \alpha\beta\gamma = -q$
এখন, $\sum \alpha^2\beta^2 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = (\alpha\beta)^2 + (\beta\gamma)^2 + (\gamma\alpha)^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma)^2 - 2\alpha\beta^2\gamma + (\gamma\alpha)^2$
$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\gamma\alpha(\alpha\beta + \beta\gamma) - 2\gamma\alpha\beta^2 = p^2 - 2\gamma\alpha(\alpha\beta + \beta\gamma + \beta^2) = p^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$
$= p^2 + 2q.0 = p^2$ **(Ans.)**

14. **Ans:** (b) $\pm\sqrt{-15}$

15. **Sol^n: (b);** $x = \omega \therefore \omega^3 + \frac{1}{\omega^3} = 1 + 1 = 2$

16. **Ans:** (d) $x^2 + 2x + 3 = 0$

17. **Sol^n: (a);** $\because$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= -\frac{3}{3} = -1 \therefore$ একটি মূল a হলে অপরটি $-\frac{1}{a}$ হবে।

18. **Ans:** (c) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

19. **Sol^n: (a) ;** একটি মূল $2 + 3i \therefore$ অপরটি $2 - 3i$ [ধরি, সমীকরণটি দ্বিঘাত]
$\therefore (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) = 0 \Rightarrow [(x-2) + 3i][(x-2) - 3i] = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - (3i)^2 = 0$
$\therefore x^2 - 4x + 4 + 9 = 0 \therefore x^2 - 4x + 13 = 0$

20. **Ans:** (d) $b^2 \geq 4$

21. **Ans:** (b) বাস্তব সংখ্যা, মূলদ এবং অসমান হবে

22. **Ans:** (b) $-2 + \sqrt{5}$

23. **Solⁿ: (c);** জটিলমূলগুলো অনুবন্ধীরূপে থাকে।
24. **Solⁿ: (a);** অপর মূলটি হবে $3+\sqrt{-5}$ $\therefore x^2-$ (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x+$ মূলদ্বয়ের গুণফল $=0; x^2-6x+14=0$
25. **Ans:** (a) $a^3=1$
26. **Solⁿ: (a);** $(x-1)^2=2; (x-1)=\pm\sqrt{2}$
[যেহেতু $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা তাই $\sqrt{2}$ সাথে কিছু যোগ বিয়োগ করলে সেটিও অমূলদ সংখ্যা হবে।]
27. **Solⁿ: (b);** $x^2+x+1=0; x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ যা অবাস্তব।
28. **Solⁿ: (b);** একটি মূল $1+i$ হলে, অপর মূল $1-i$ হলে, সমীকরণ, $x^2-(1+i+1-i)x+(1+i)(1-i)=0$
$x^2-2x+1+1=0 \Rightarrow x^2-2x+2=0$
29. **Solⁿ: (a);** $b=0$ হলে, $ax^2+c=0$, তখন $\alpha+\beta=0$ অর্থাৎ $\alpha=-\beta$
30. **Solⁿ: (c);** $4x^5+1=0$ সমীকরণটির মূল 5 টি যেহেতু x এর ঘাত 5
31. **Solⁿ: (c);** $a^2-4.4.2=0 \Rightarrow a=4\sqrt{2}$
32. **Solⁿ: (b);** $(2x^3-4x+1)(x^2-x+3)=2x^5-4x^3+x^2-2x^4+4x^2-x+6x^3-12x+3$
33. **Solⁿ: (b);** $x^4.y^3$ এর ঘাত $=4+3=7$
34. **Solⁿ: (a);** $3x^2+2x-7=0$; মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha+\beta=-\frac{2}{3}=-\frac{x \text{ এর সহগ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$
35. **Solⁿ: (a);** x^2- (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x+$ মূলদ্বয়ের গুণফল $=0 \Rightarrow x^2-7x+12=0$
36. **Ans:** (b) বাস্তব সংখ্যা
37. **Solⁿ: (c);** $-x^2+2bx+c^2=-x^2+2bx-b^2+b^2+c^2=-(x-b)^2+b^2+c^2 \therefore x=b$
38. **Solⁿ: (c);** $x^2+y^2=10x$
বা, $(x-5)^2+y^2=5^2$ কেন্দ্র, $=(5,0)$; ব্যাসার্ধ $=5, \left|\frac{15-k}{5}\right|=5; 15-k=\pm25; k=40,-10$
39. **Solⁿ: (a);** $\alpha^2+\alpha+1=0$; বা, $\alpha^2+2\alpha+1=\alpha$ বা, $(\alpha+1)^2=\alpha$
40. **Ans:** (c) $p<\frac{9}{16}$
41. **Solⁿ: (a);** $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ, $\left(\frac{1}{x}\right)^3-p\left(\frac{1}{x}\right)^2+q\left(\frac{1}{x}\right)-r=0 \Rightarrow rx^3-qx^2+px-1=0$
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{q}{r}; \frac{1}{a}.\frac{1}{b}+\frac{1}{b}.\frac{1}{c}+\frac{1}{c}.\frac{1}{a}=\frac{p}{r} \Rightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{p}{r}$
এখন, $\sum\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{q^2}{r^2}-\frac{2p}{r}=\frac{1}{r^2}(q^2-2pr)$
42. **Solⁿ: (d) ;** $\alpha+2\alpha=\frac{3}{2} \Rightarrow 3\alpha=\frac{3}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2} \therefore 2\alpha^2=-\frac{p+2}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}=-\frac{p+2}{4} \Rightarrow p=-4$
43. **Solⁿ: (b) ;** $\alpha+\beta=0 \therefore \alpha+\beta+\gamma=p \Rightarrow p=\gamma$; $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q \Rightarrow \gamma(\alpha+\beta)+\alpha\beta=q \Rightarrow \alpha\beta=q$
এখন, $\alpha\beta\gamma=r \Rightarrow pq=r$
44. **Solⁿ: (a) ;** $D\equiv4(p+q)^2-8(p^2+q^2)=4\{(p+q)^2-2(p^2+q^2)\}=-4(p-q)^2$
বাস্তব মূল হলে $-4(p-q)^2\geq0$; $p=q$ ছাড়া এই শর্ত পালন করা সম্ভব না।
45. **Solⁿ: (a);** $\sum\alpha=-p, \sum\alpha\beta=q, \sum\alpha\beta\gamma=-r \therefore \sum\alpha^3=\sum\alpha^3-3\alpha\beta\gamma+3\alpha\beta\gamma=(\sum\alpha)(\sum\alpha^2-\sum\alpha\beta)+3\alpha\beta\gamma$
এখানে, $\sum\alpha^2=(\sum\alpha)^2-2\sum\alpha\beta$
$\therefore \sum\alpha^3=(\sum\alpha)\{(\sum\alpha)^2-3\sum\alpha\beta\}+3\alpha\beta\gamma=(-P)(p^2-3q)+3(-r)=-p^3+3pq-3r$
Alternative: $\alpha+\beta+\gamma=-p$; $\alpha\beta+\beta\gamma+r\alpha=q$; $\alpha\beta\gamma=-\gamma$
$\therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma+3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$
$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\}+3\alpha\beta\gamma$
$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma=-p(p^2-3q)-3\gamma=-p^3+3pq-3\gamma$ **(Ans.)**

46. **Sol^n: (d);** $\sum\alpha^2\beta=\alpha^2\beta+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\beta+\gamma^2\alpha+\alpha^2\gamma=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\alpha+\gamma)$
$=\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)+\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\gamma(\alpha+\beta+\gamma)-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)-3\alpha\beta\gamma$
এখানে, $\alpha+\beta+\gamma=\frac{2}{3},\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=0$
এবং $\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{3}\therefore\sum\alpha^2\beta=\alpha\beta\left(\frac{2}{3}-\gamma\right)+\beta\gamma\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)+\gamma\alpha\left(\frac{2}{3}-\beta\right)$
$=\frac{2}{3}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3\alpha\beta\gamma=0+3\times\frac{1}{3}=1$

47. **Sol^n: (d);** $\alpha+\beta=-\frac{1}{2};\ \alpha\beta=\frac{5}{2};(\alpha+1)(\beta+1)=b$
$\Rightarrow\alpha\beta+\alpha+\beta+1=b\Rightarrow\frac{5}{2}-\frac{1}{2}+1=b\Rightarrow b=3$

48. **Sol^n: (d);** ধরি, মূলদ্বয় α ও $-\alpha\therefore\alpha-\alpha=-\frac{c}{b}\Rightarrow0=-\frac{c}{b}\Rightarrow c=0$ **(Ans.)**

49. **Sol^n: (a);** $\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ, $\left(\frac{1}{x}\right)^2+p\left(\frac{1}{x}\right)+q=0\therefore qx^2+px+1=0\therefore\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{p}{q}$

50. **Ans: (d);** (a) ও (b) উভয়ই

51. **Ans: (c);** $+\infty$

52. **Sol^n: (b);** $3x^2-8x+6=0;\alpha+\beta=\frac{8}{3},\alpha\beta=2\therefore\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{8}{3}\right)^2-2\times2=\frac{28}{9}\therefore\alpha^2\beta^2=4$
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2-\frac{28}{9}x+4=0\Rightarrow9x^2-28x+36=0$

53. **Sol^n: (c);** $4a^2+ax+1=0\quad\therefore x^2-16<0\ \Rightarrow x^2<16\Rightarrow|x|<4\Rightarrow\ -4<x<4\ \ \therefore x\in(-4,4)$

54. **Sol^n: (b) ;** $\alpha+\beta=-\frac{7}{p},\alpha\beta=\frac{7}{p}\therefore\alpha+1+\beta+1=-\frac{7}{p}+2$
$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=\frac{7}{p}-\frac{7}{p}+1=1$
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2-\left(2-\frac{7}{p}\right)x+1=0\Rightarrow px^2-(2p-7)x+p=0$

Written

55. **Sol^n:** বীজগুলো মূলদ সংখ্যা হলে, এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে সহজেই তার সমাধান নির্ণয় করা যায়। কিন্তু সব রাশিমালাকে সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না। সে জন্য যেকোনো প্রকার দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানের জন্য নিম্নলিখিত পদ্ধতিটি ব্যবহার করা হয়। এক চলক সমন্বিত দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2+bx+c=0$; যেখানে $a,b,c\in\mathbb{R}$ এবং $a\neq0$.
$\therefore4a^2x^2+4abx+4ac=0$, [উভয় পক্ষকে 4a দ্বারা গুণ করে]
$\Rightarrow(2ax)^2+2.2ax.b+b^2+4ac=b^2$
$\Rightarrow(2ax+b)^2=b^2-4ac\Rightarrow2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$
$\Rightarrow2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
অতএব, $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ হচ্ছে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান অর্থাৎ মূল।

56. **Sol^n:** মনে করি, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β. তাহলে, $\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ হলে $\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$\therefore\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{(-b^2)-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{2a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$
$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}\therefore$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি$=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{x\text{ এর সহগ}}{x^2\text{ এর সহগ}}$ এবং মূলদ্বয়ের গুণফল$=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{\text{ধ্রুবক পদ}}{x^2\text{এর সহগ}}$

57. **Sol^n**: মনে করি, $ax^3+b^2+cx+d=0$ অর্থাৎ $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$ সমীকরণের মূলত্রয় α,β,γ.
$\therefore x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}\equiv(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
$\Rightarrow x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}\equiv x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$
উভয় পক্ষ থেকে x^2 ও x এর সহগ এবং ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,
$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$ এবং $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$
অর্থাৎ, $\Sigma\alpha=\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\Sigma\alpha\beta=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$ এবং $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

58. **Sol^n**: মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α. তাহলে, $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ এবং $c\alpha^2+b\alpha+a=0$
বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে পাই, $\frac{\alpha^2}{ab-bc}=\frac{\alpha}{c^2-a^2}=\frac{1}{ab-bc}\therefore(c^2-a^2)^2=(ab-bc)(ab-bc)$
$\Rightarrow(c-a)^2(c+a)^2=b^2(a-c)^2\Rightarrow(c-a)^2\{(c+a)^2-b^2\}=0$
$\Rightarrow(c+a)^2-b^2=0$ এখানে $c-a\neq0\Rightarrow c\neq a$. কেননা, $c=a$ হলে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের উভয় মূলই সাধারণ হবে।
$\therefore(c+a)^2=b^2\therefore c+a=\pm b$ **(Proved)**

59. **Sol^n**: $e^{-2x}-4e^x+2=0$ অর্থাৎ $(e^x)^2+4e^x+2=0$
$\therefore e^x=\frac{4\pm\sqrt{16-4.1.2}}{2.1}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2},2-\sqrt{2}\therefore x=\ln(2+\sqrt{2}),\ln(2-\sqrt{2})$
অর্থাৎ $x_1=\ln(2+\sqrt{2})$ হলে, $x_2=\ln(2-\sqrt{2})$
এখন, $x_1+x_2=\ln(2+\sqrt{2})+\ln(2-\sqrt{2})=\ln(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=\ln(4-2)\therefore x_1+x_2=\ln2$

60. **Sol^n**: যেহেতু প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল 1, সেহেতু $x^3-5x^2+17x-13$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x-1$ হবে।
এখন, $x^3-5x^2+17x-13=x^2(x-1)-4x(x-1)+13=(x-1)(x^2-4x+13)$
$\therefore x-1=0$ অথবা $x^2-4x+13=0\therefore x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.1.13}}{2.1}=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}$
$=\frac{4\pm\sqrt{16-25}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{4\pm6i}{2}=2\pm3i$
$\therefore$ সমীকরণের অপর মূলদ্বয় $2+3i$ এবং $2-3i$
বিকল্প পদ্ধতি: মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের অপর মূলদ্বয় α এবং β।
$\therefore\alpha+\beta+1=-\frac{-5}{1}=5\Rightarrow\alpha+\beta=4$ .... (i) এবং $\alpha\beta.1=-\frac{-13}{1}\Rightarrow\alpha\beta=13\Rightarrow\alpha=\frac{13}{\beta}$
$\therefore$ (i) নং সমীকরণ হতে পাওয়া যায়, $\frac{13}{\beta}+\beta=4\Rightarrow13+\beta^2=4\beta\Rightarrow\beta^2-4\beta+13=0$
$\therefore\beta=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.1.13}}{2.1}=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{4\pm6i}{2}=2\pm3i$
জটিল মূলদ্বয় যুগলরূপে আসে বলে, অপর মূলদ্বয় $2+3i$ এবং $2-3i$

61. **Sol^n**: নিশ্চায়ক $=\{-2(a+b)\}^2-4.2(a^2+b^2)$
$=4(a^2+b^2+2ab-2a^2-2b^2)=4(-a^2-b^2+2ab)=-4(a^2+b^2-2ab)=-4(a-b)^2$
কেবল $a=b$ হলেই $-4(a-b)^2$ অঋণাত্মক হবে। অতএব, $a=b$ না হলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব হতে পারে না।

62. **Sol^n**: $(k+1)x^2+2(k+3)x+2k+3$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ বলে।
$(k+1)x^2+2(k+3)x+2k+3=0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান হবে এবং নিশ্চায়ক শূন্য হবে।
$\therefore\{2(k+3)\}^2-4(k+1)(2k+3)=0\Rightarrow4\{(k^2+6k+9-2k^2-5k-3)\}=0$
$\Rightarrow4\{-k^2+k+6\}=0\Rightarrow k^2-k-6=0\Rightarrow(k+2)(k-3)=0\therefore k=-2,3$ **(Ans.)**

63. **Sol^n**: দেওয়া আছে, $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও অসমান।
$\therefore$ নিশ্চায়ক, $b^2-4.1.c>0\Rightarrow b^2-4c>0$..... (i)
$\Rightarrow$ এখন, $2x^2-4(1+c)x+(b^2+2c^2+2)=0$
সমীকরণের নিশ্চায়ক $=\{-4(1+c)\}^2-4.2(b^2+2c^2+2)=16(1+2c+c^2)-8(b^2+2c^2+2)$
$=8(2+4c+2c^2-b^2-2c^2-2)\Rightarrow8(4c-b^2)<0$, যেহেতু $b^2-4c>0$
$\therefore 2x^2-47(1+c)x+(b^2+2c^2+2)=0$ সমীকরণের মূলগুলো জটিল।

64. **Solⁿ**: $\frac{\alpha+\beta}{2}$ এবং $\sqrt{\alpha\beta}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি $= \frac{\alpha+\beta}{2} + \sqrt{\alpha\beta} = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{2\sqrt{ca}-b}{2a}$

এবং গুণফল $= \frac{\alpha+\beta}{2}.\sqrt{\alpha\beta} = -\frac{b}{2a}.\sqrt{\frac{c}{a}} = -\frac{b\sqrt{c}}{2a\sqrt{a}}$ ∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \frac{2\sqrt{ca}-b}{2a}x - \frac{b\sqrt{c}}{2a\sqrt{a}} = 0$

$\therefore 2a\sqrt{a}\,x^2 - (2a\sqrt{c} - b\sqrt{a})x - b\sqrt{c} = 0$

65. **Solⁿ**: 2 এবং 3 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ, $x^2 - (2+3)x + 2.3 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

∴ চর্তুথঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ, $(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 4x + 5) = 0$

$\Rightarrow x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 5x^3 - 20x^2 - 25x + 6x^2 + 24x + 30 = 0 \therefore x^4 - x^3 - 9x^2 - x + 30 = 0$

66. **Solⁿ**: দেওয়া আছে, $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ ... (i) এবং $\beta^2 = 5\beta - 3$......... (ii)

(i) − (ii), $\alpha^2 - \beta^2 = 5(\alpha - \beta) \Rightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 5(\alpha - \beta) \Rightarrow \alpha + \beta = 5[\because \alpha \neq \beta]$

(i) + (ii), $\alpha^2 + \beta^2 = 5(\alpha + \beta) - 6 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 5.5 - 6 \Rightarrow 25 - 2\alpha\beta = 25 - 6 \therefore \alpha\beta = 3$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)x + \frac{\alpha}{\beta}.\frac{\beta}{\alpha} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{25-6}{3}x + 1 = 0 \therefore 3x^2 - 19x + 3 = 0$

67. **Solⁿ**: মনে করি, $mx^2 + nx + l = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং rα

$\therefore \alpha + \alpha r = -\frac{n}{m} \Rightarrow \alpha = -\frac{n}{m(1+r)}$........ (i)

$\alpha.\alpha r = \frac{l}{m} \Rightarrow \alpha^2 r = \frac{l}{m} \Rightarrow r\left\{-\frac{n}{m(1+r)}\right\}^2 = \frac{l}{m} \Rightarrow r^2\frac{n^2}{m^2(1+r)^2} = \frac{l}{m} \therefore \frac{(1+r)^2}{r} = \frac{n^2}{ml}$ **(Showed)**

68. **Solⁿ**: ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো 3α, 4α এবং β ∴ $3\alpha + 4\alpha + \beta = -\left(\frac{-1}{2}\right)$

$\Rightarrow 7\alpha + \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} - 7\alpha$ ... . (i) এবং $3\alpha.4\alpha + 4\alpha.\beta + \beta.3\alpha = \frac{-22}{2} = -11 \Rightarrow 12\alpha^2 + 7\alpha\beta = -11$

$\Rightarrow 12\alpha^2 + 7\alpha\left(\frac{1}{2} - 7\alpha\right) = -11$ .... [(i) নং দ্বারা]

$\Rightarrow 24\alpha^2 + 7\alpha - 98\alpha^2 = -22 \Rightarrow -74\alpha^2 + 7\alpha + 22 = 0 \Rightarrow 74\alpha^2 - 7\alpha - 22 = 0$

$\Rightarrow 74\alpha^2 - 44\alpha + 37\alpha - 22 = 0 \Rightarrow 2\alpha(37\alpha - 22) + 1(37\alpha - 22) = 0 \Rightarrow (37\alpha - 22)(2\alpha + 1) = 0$

$\therefore 2\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$ অথবা, $37\alpha - 22 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{22}{37}$

এখানে, মূল তিনটির গুণফল = 12 ; $\alpha = -\frac{1}{2}$ হলে, $\beta = \frac{1}{2} - 7\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$

এক্ষেত্রে প্রদত্ত সমীকরণের মূল তিনটি $-\frac{3}{2}, -2, 4$; যাদের গুণফল $= \left(-\frac{3}{2}\right)(-2).4 = 12$

আবার, $\alpha = \frac{22}{37}$ হলে, $\beta = \frac{1}{2} - \frac{154}{37} = \frac{-271}{74}$; এক্ষেত্রে সমীকরণের মূল তিনটি $\frac{66}{37}, \frac{88}{37}, \frac{-271}{74}$

যাদের গুণফল $= \frac{66}{37}.\frac{88}{37}.\frac{-271}{74} \neq 12$

∴ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $-\frac{3}{2}, -2, 4$

69. **Solⁿ**: ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, −α, β ও γ. তাহলে, $\alpha - \alpha + \beta + \gamma = -\frac{-2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta + \gamma = \frac{1}{4}$

আবার, $\alpha(-\alpha)\beta + \alpha(-\alpha)\gamma + \alpha\beta\gamma + (-\alpha)\beta\gamma = -\frac{6}{8} \Rightarrow -\alpha^2\beta - \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow -\alpha^2(\beta + \gamma) = -\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha^2 = 3$ এবং $-\alpha^2\beta\gamma = \frac{9}{8} \Rightarrow -3\beta\gamma = \frac{9}{8} \Rightarrow \beta\gamma = -\frac{3}{8}$

এখন, β, γ দ্বারা গঠিত সমীকরণ, $x^2 - (\beta + \gamma)x + \beta\gamma = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow 8x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow 8x^2 - 6x + 4x - 3 = 0$

$\Rightarrow 2x(4x - 3) + 1(4x - 3) = 0 \Rightarrow (4x - 3)(2x + 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$

∴ নির্ণেয় মূলদ্বয়, $\frac{3}{4}$ ও $-\frac{1}{2}$

70. **Sol^n**: মনে করি , $x^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $\beta \therefore \alpha + \beta = b, \alpha\beta = c$
প্রশ্নানুসারে, $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + k$ এবং $\beta + k$, যেখানে, k ধ্রুবক।
$\therefore \alpha + k + \beta + k = c \Rightarrow \alpha + \beta + 2k = c$
$\Rightarrow b + 2k = c\ [\because \alpha + \beta = b] \Rightarrow k = \frac{1}{2}(c - b) \ldots.(i)$ এবং $(\alpha + k)(\beta + k) = b$
$\Rightarrow \alpha\beta + k(\alpha + \beta) + k^2 = b \Rightarrow c + kb + k^2 = b \ \Rightarrow c + \frac{1}{2}(c - b).b + \frac{1}{4}(c - b)^2 = b$ [(i) দ্বারা]
$\Rightarrow 4c + 2bc - 2b^2 + c^2 + b^2 - 2bc - 4b = 0 \Rightarrow 4c - b^2 + c^2 - 4b = 0$
$\Rightarrow 4(c - b) + (c - b)(c + b) = 0 \Rightarrow (c - b)(b + c + 4) = 0 \therefore b + c + 4 = 0 [\because b \neq c]$ **(Proved)**

71. **Sol^n**: ধরি, $2bx^2 + 2(a + b)x + 3a = 2b$
$\Rightarrow 2bx^2 + 2(a + b)x + 3a - 2b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং 2α. $\therefore \alpha + 2\alpha = -\frac{2(\alpha+b)}{2b} \Rightarrow 3\alpha = -\frac{(\alpha+b)}{b}$
$\Rightarrow \alpha = -\frac{(a+b)}{3b}$ এবং $\alpha.2\alpha = \frac{3a-2b}{2b} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{3a-2b}{4b} \Rightarrow \left\{-\frac{a+b)}{3b}\right\}^2 = \frac{3a-2b}{4b}\left[\because \alpha = -\frac{(a+b)}{3b}\right]$
$\Rightarrow 4b(a + b)^2 = 9b^2(3a - 2b) \Rightarrow 4(a^2 + 2ab + b^2) = 9b(3a - 2b) \Rightarrow 4a^2 + 8ab + 4b^2 = 27ab - 18b^2$
$\Rightarrow 4a^2 - 19ab + 22b^2 = 0 \Rightarrow 4a^2 - 11ab - 8ab + 22b^2 = 0 \Rightarrow a(4a - 11b) - 2b(4a - 11b) = 0$
$\Rightarrow (a - 2b)(4a - 11b) = 0 \therefore a = 2b$ অথবা, $4a = 11b$

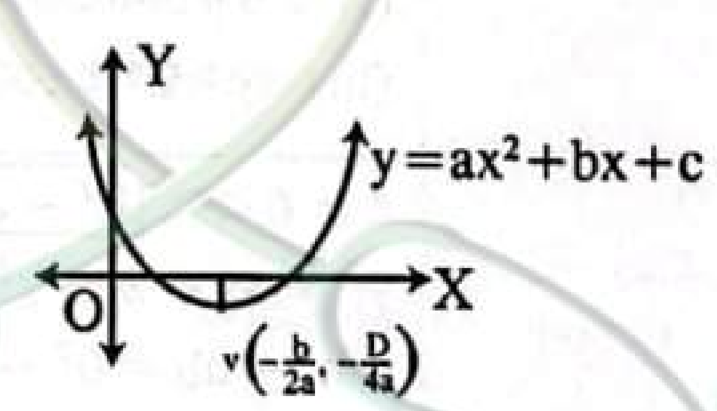
72. **Sol^n**: $x^2 + 6x + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় α ও $\beta \therefore \alpha + \beta = -6$ এবং $\alpha\beta = 1$
এখন, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-6)^2 - 4.1 = 36 - 4 = 32 \therefore |\alpha - \beta| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ **(Ans.)**

73. **So^{ln}**: $qx^2 + 2x + 3q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha + \beta = -\frac{2}{q}$ এবং $\alpha.\beta = \frac{3q}{q} = 3$
এখন, শর্তমতে, $-\frac{2}{q} = 3 \Rightarrow q = -\frac{2}{3}$ **(Ans.)**

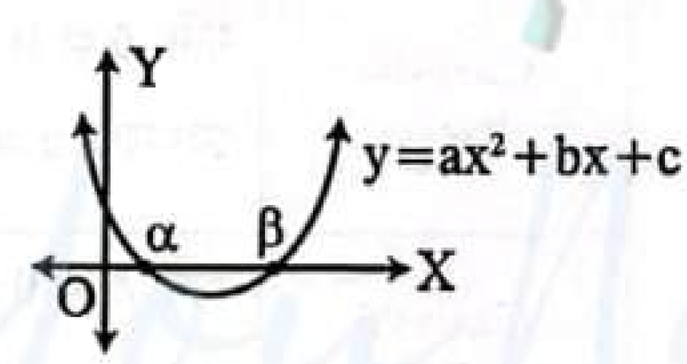
74. **Sol^n**: মূলদ্বয়ের যোগফল নিয়ে পাই, $\frac{k}{k+1} + \frac{k+1}{k+2} = -\frac{\lambda}{4} \ldots\ldots\ldots (i)$
এবং গুণফল নিয়ে পাই, $\left(\frac{k}{k+1}\right).\left(\frac{k+1}{k+2}\right) = -\frac{2}{4} \Rightarrow \frac{k}{k+2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$
$\therefore$ (i) হতে পাই, $\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}+1} + \frac{-\frac{2}{3}+1}{-\frac{2}{3}+2} = -\frac{\lambda}{4}\left[k = -\frac{2}{3}\text{ মান বসিয়ে}\right]$
$\Rightarrow -2 + \frac{1}{4} = -\frac{\lambda}{4} \Rightarrow -7 = -\lambda \therefore \lambda = 7$ **(Ans.)**

75. **Sol^n**: $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α ও $\beta \therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$
প্রদত্ত অপর সমীকরণ: $cx^2 + bx + a = 0 \Rightarrow \frac{c}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + 1 = 0\ [\therefore a \neq 0]$
$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1 = 0 \Rightarrow \alpha\beta x^2 - \alpha x - \beta x + 1 = 0 \Rightarrow \alpha x(\beta x - 1) - 1(\beta x - 1) = 0$
$\Rightarrow (\alpha x - 1)(\beta x - 1) = 0 \therefore x = \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ **(Ans.)**

76. **Sol^n**: প্রদত্ত চিত্রে; (i) গ্রাফটি উর্ধ্বমুখী, $\therefore a > 0$; (ii) ইহা y অক্ষকে ছেদ করে $\therefore x = 0$ বসালে
$y = a.0 + b.0 + c \Rightarrow y = c$ যা y অক্ষের ধনাত্মক অংশে। $\therefore c > 0$
(iii) শীর্ষবিন্দু $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$
অর্থাৎ ভুজ $= -\frac{b}{2a}$; যা x অক্ষের ধনাত্মক অংশে, তাহলে $-\frac{b}{2a} > 0$ হবে,
যেহেতু $a > 0 \therefore b < 0$ হবে, $\therefore$ সারমর্ম দাঁড়াল, $a > 0, b < 0, c > 0$
$\therefore (a)(b)(c) = (+).(-).(+) = -ve$ **(Ans.)**



বিকল্প: প্রদত্ত চিত্রের
(i) গ্রাফটি উর্ধ্বমুখী $\therefore a > 0$
(ii) মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ যেহেতু $a > 0 \therefore b < 0$ হলে, α ও β মূলদ্বয় ধনাত্মক।
(iii) মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$; সেহেতু $a > 0 \therefore c > 0$ হতে হবে
$\therefore$ সারমর্ম দাঁড়াল; $a > 0, b < 0, c > 0 \therefore (a)(b)(c) = (+) \cdot (-) \cdot (+) = -ve \therefore$ option (b) is correct.



অধ্যায় ০৬ কনিক

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

কনিক: সমতলে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা থেকে চলমান বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত ধ্রুবক হলে, তার সঞ্চারপথকে কনিক বলে। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে উপকেন্দ্র বা ফোকাস (Focus), নির্দিষ্ট সরলরেখাকে নিয়ামক (Directrix) এবং স্থির (ধ্রুবক) অনুপাতটিকে উৎকেন্দ্রিকতা বা উৎকেন্দ্রতা (Eccentricity) বলে। উৎকেন্দ্রতাকে (Eccentricity) 'e' অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়।

বিভিন্ন প্রকারের কনিক চিহ্নিতকরণ

(i) $e = 1$ হলে, কনিকটি পরাবৃত্ত (Parabola) হয়।
(ii) $0 < e < 1$ হলে, কনিকটি উপবৃত্ত (Ellipse) হয়।
(iii) $e > 1$ হলে, কনিকটি অধিবৃত্ত (Hyperbola) হয়।
(iv) $e \to 0$ হলে, কনিকটি বৃত্ত (Circle) হবে।
(v) $e \to \infty$ হলে কনিকটি একজোড়া সরলরেখা (Pair of Straight Lines) হবে।

কনিকের সাধারণ সমীকরণ,
$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর জন্য $a = x^2$ এর সহগ, $b = y^2$ এর সহগ, $c =$ ধ্রুবক পদ,
$g = \frac{2g}{2} = \frac{x \text{ এর সহগ}}{2}, f = \frac{2f}{2} = \frac{y \text{ এর সহগ}}{2}, h = \frac{2h}{2} = \frac{xy \text{ এর সহগ}}{2}$

নিচে ছক আকারে কনিক চিহ্নিতকরণ দেখানো হলো:

Case-01 একজোড়া সরলরেখা	$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$ হলে, একজোড়া সরলরেখা নির্দেশ করে।
Case-02 বৃত্ত	যদি $\Delta \neq 0$ এবং $a = b \neq 0$, $h = 0$, $g^2 + f^2 - c \geq 0$ হয়, তাহলে এটি একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে। অর্থাৎ, (i) x ও y দ্বিঘাত হবে। (ii) x^2 ও y^2 এর সহগদ্বয় অশূন্য এবং সমান হবে। (iii) xy সম্বলিত কোন পদ থাকবে না। (iv) $g^2 + f^2 - c \geq 0$ হবে।
Case-03 পরাবৃত্ত	$\Delta \neq 0$ এবং $\boxed{h^2 - ab = 0}$ হলে, ইহা পরাবৃত্ত নির্দেশ করে। যেমন: $y^2 = 4x + 2 \Rightarrow y^2 - 4x - 2 = 0$ যেখানে $a = 0, b = 1$ এবং $h = 0$ $\therefore h^2 - ab = 0^2 - 0 \times 1 = 0$ সুতরাং $y^2 = 4x + 2$ সমীকরণটি পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।
Case-04 উপবৃত্ত	যদি $\Delta \neq 0$ এবং $\boxed{h^2 - ab < 0} \Leftrightarrow \boxed{ab - h^2 > 0}$ হলে ইহা উপবৃত্ত নির্দেশ করে। যেমন: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ যেখানে, $a = \frac{1}{4}, b = 1$ এবং $h = 0$ তাহলে $h^2 = 0$, $ab = \frac{1}{4}$ $\therefore h^2 - ab = 0^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} < 0$
Case-05 অধিবৃত্ত	যদি $\Delta \neq 0$ এবং $\boxed{h^2 - ab > 0} \Leftrightarrow \boxed{ab - h^2 < 0}$ হলে ইহা অধিবৃত্ত নির্দেশ করে। যেমন: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ যেখানে, $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{9}$ এবং $h = 0$ তাহলে $h^2 = 0$, $ab = -\frac{1}{36}$ $\therefore h^2 - ab = 0^2 - \left(-\frac{1}{36}\right) = \frac{1}{36} > 0$

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

Type-01: কনিকের প্রকৃতি নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

কনিকের সাধারণ সমীকরণ, $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$

(i) $\Delta = 0$ হলে সমীকরণটি একজোড়া সরলরেখা নির্দেশ করে।

(ii) $\Delta \neq 0; a = b \neq 0$ এবং $h = 0$ হলে সমীকরণটি বৃত্ত নির্দেশ করে।
[$e \to 0$ হয়, তবে কনিকটি বৃত্ত]

যেখানে, $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

(iii) $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 - ab = 0$ হলে, [$e = 1$ $\therefore$ সমীকরণটি পরাবৃত্ত]

(iv) $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 - ab < 0$ হলে, [$0 < e < 1$ $\therefore$ সমীকরণটি উপবৃত্ত]

(v) $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 - ab > 0$ হলে, [$e > 1$ $\therefore$ সমীকরণটি অধিবৃত্ত]

Problems

Example-01. $y^2 - 4y - x^2 + 6x = 12$ সমীকরণটি কোন ধরনের কনিক? **[DU'18-19]**

Sol^n: $ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = -1; b = 1; c = -12; h = 0; g = 3; f = -2;$

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -12 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$

তাহলে, $h^2 - ab = 0^2 - (-1).1 = 1 > 0$ $\therefore$ সমীকরণটি একটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করে।

বিকল্প: x^2 এবং y^2 এর চিহ্ন বিপরীত এবং xy সম্বলিত কোন পদ নেই। অতএব, এটা অবশ্যই অধিবৃত্ত।

Example-02. $3x^2 + 4y^2 - 6x = 9$ সমীকরণটি কী বর্ণনা করে? **[RU'19-20]**

Sol^n: $3x^2 + 4y^2 - 6x = 9 \Rightarrow 3(x^2 - 2x + 1) + 4y^2 = 9 + 3$

$\Rightarrow 3(x-1)^2 + 4y^2 = 12 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, যা উপবৃত্তের সমীকরণ।

বিকল্প সমাধান: $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে

$a = 3$; $b = 4$; $g = -3$; $c = -9$; $h = 0$; $f = 0$ $\therefore \Delta \neq 0$

$\therefore ab = 12$ $\therefore h^2 = 0$ $\therefore h^2 - ab = 0 - 12 = -12 < 0$ $\therefore$ উপবৃত্ত

Example-03. $xy = 2$ সমীকরণটি- **[JU'18-19]**

Sol^n: $\Delta \neq 0$; $a = 0$; $b = 0$; $h = \frac{1}{2}$ $\therefore h^2 = \frac{1}{4}$; $ab = 0$ $\therefore h^2 - ab = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} > 0$ [অধিবৃত্ত]

Example-04. $11x^2 + 14y^2 - 4xy - 48x - 24y + 66 = 0$ সমীকরণটি কী নির্দেশ করে? **[CU'20-21, RU'18-19]**

Sol^n: $\Delta \neq 0; h^2 - ab = (-2)^2 - 11 \times 14 = -150 < 0$ $\therefore$ উপবৃত্ত।

Example-05. $2x^2 + 3y^2 + 6xy - 4x - 5y + 7 = 0$ সমীকরণটি কী নির্দেশ করে?

Sol^n: $\Delta \neq 0$; $a = 2$; $b = 3$; $h = 3$; $ab = 6$; $h^2 = 9$; $h^2 - ab = 9 - 6 = 3 > 0$

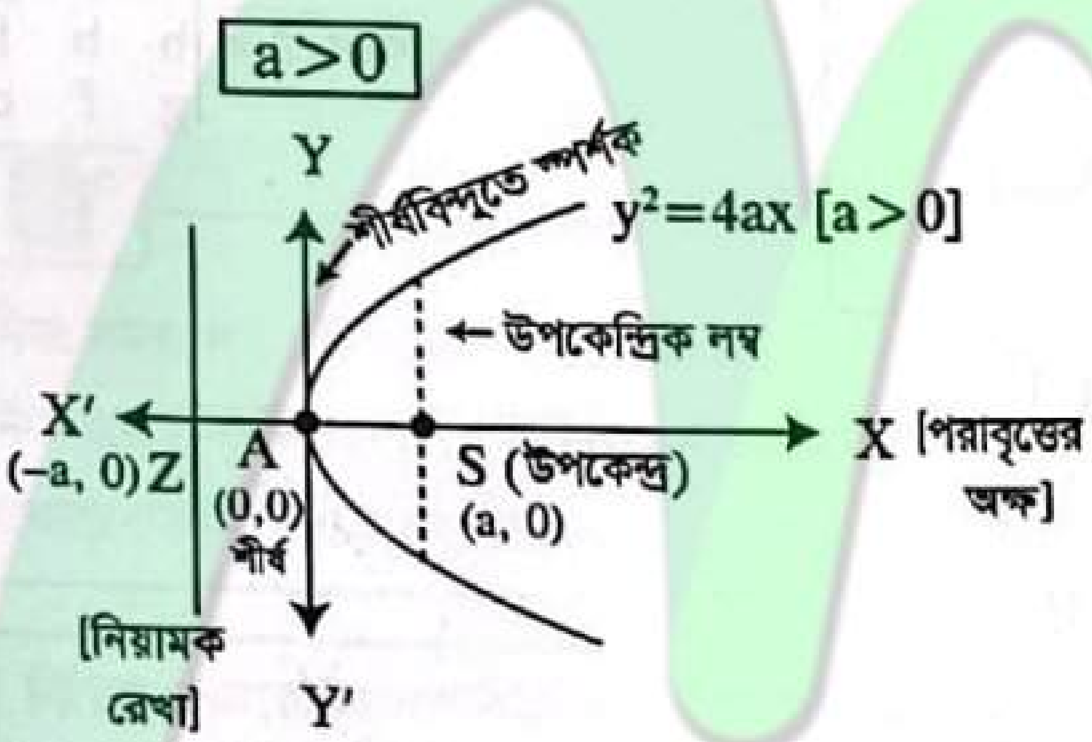
$\therefore$ অধিবৃত্ত নির্দেশ করে।

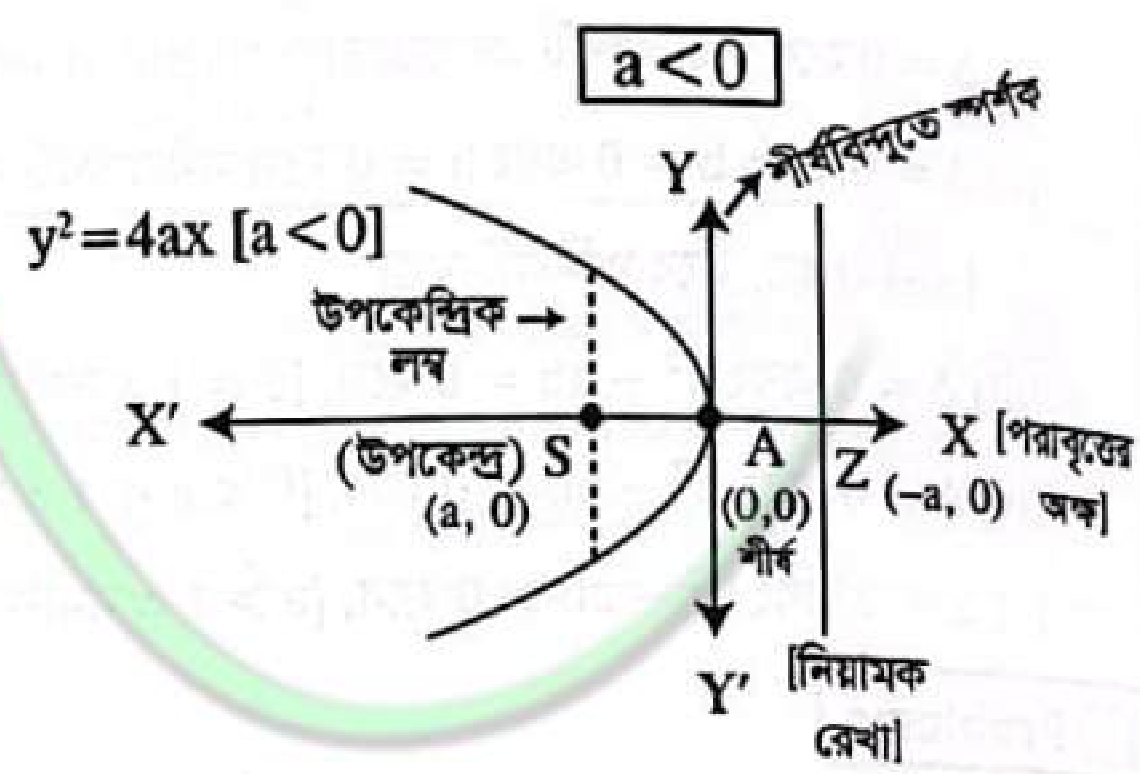
পরাবৃত্ত

Type-02: পরাবৃত্তের লেখচিত্র সম্পর্কিত

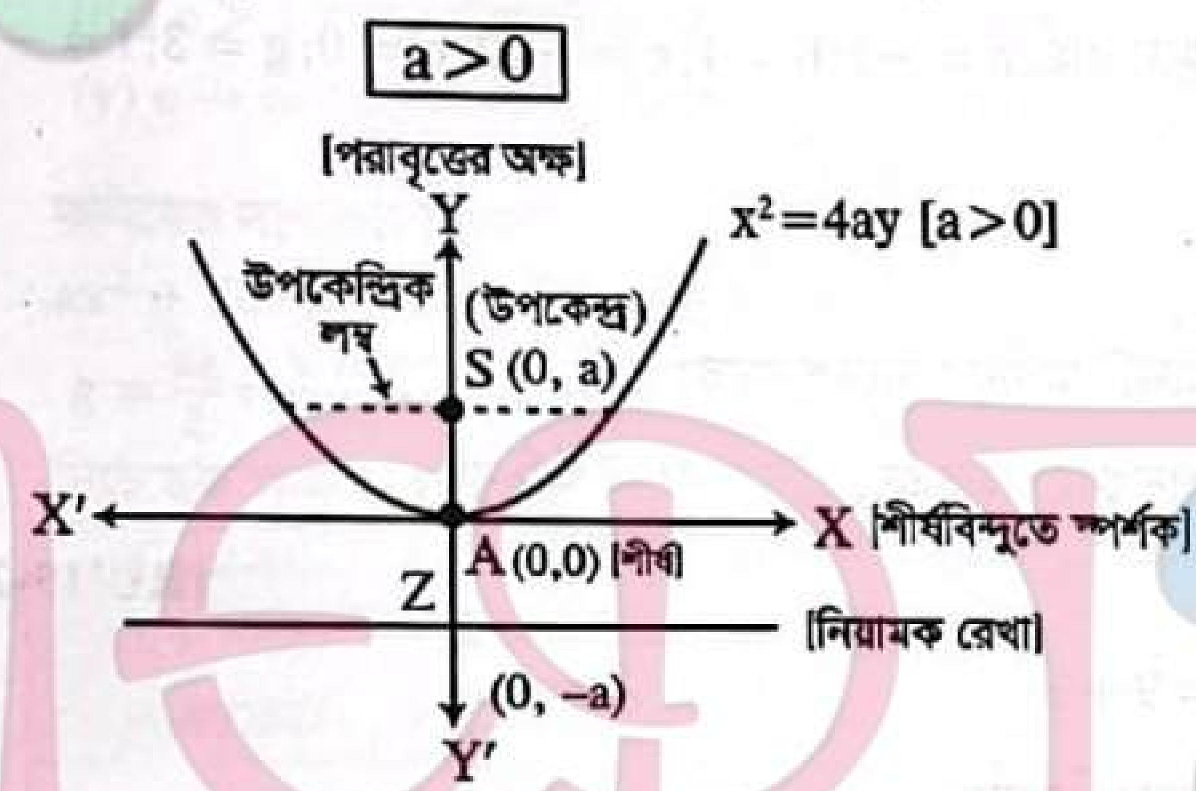
Concept

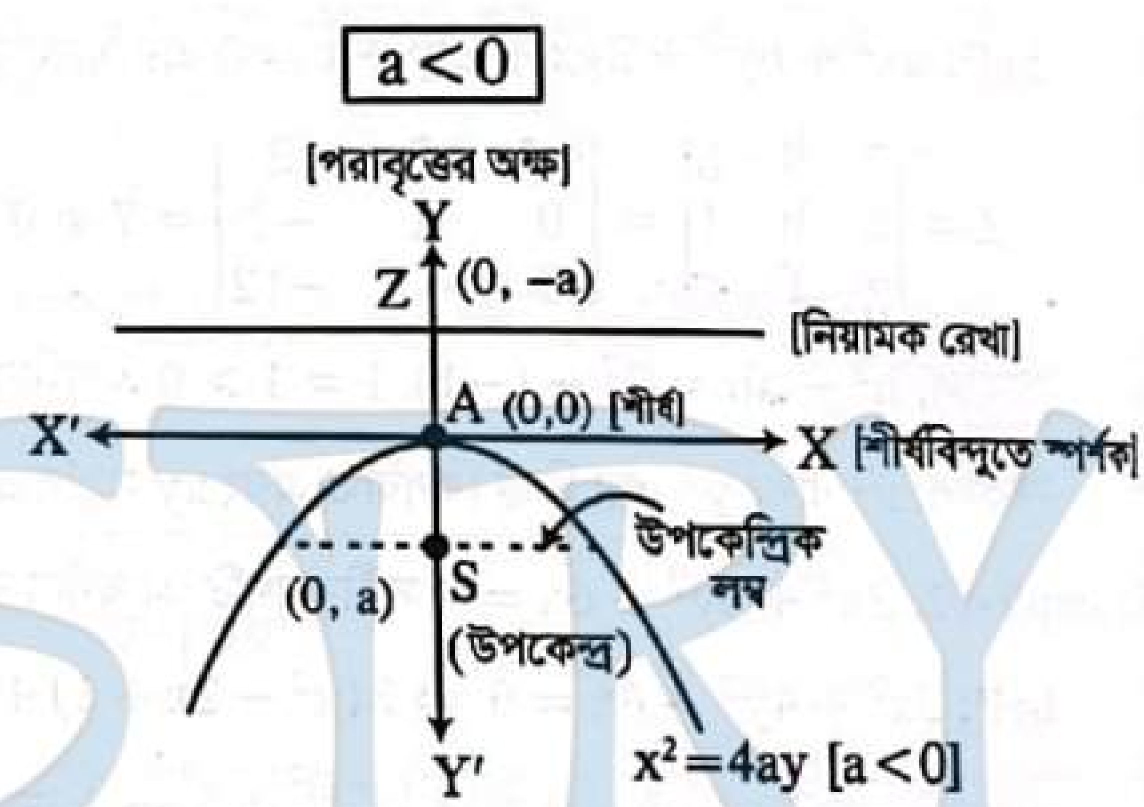
- $y^2 = 4ax$





- $x^2 = 4ay$



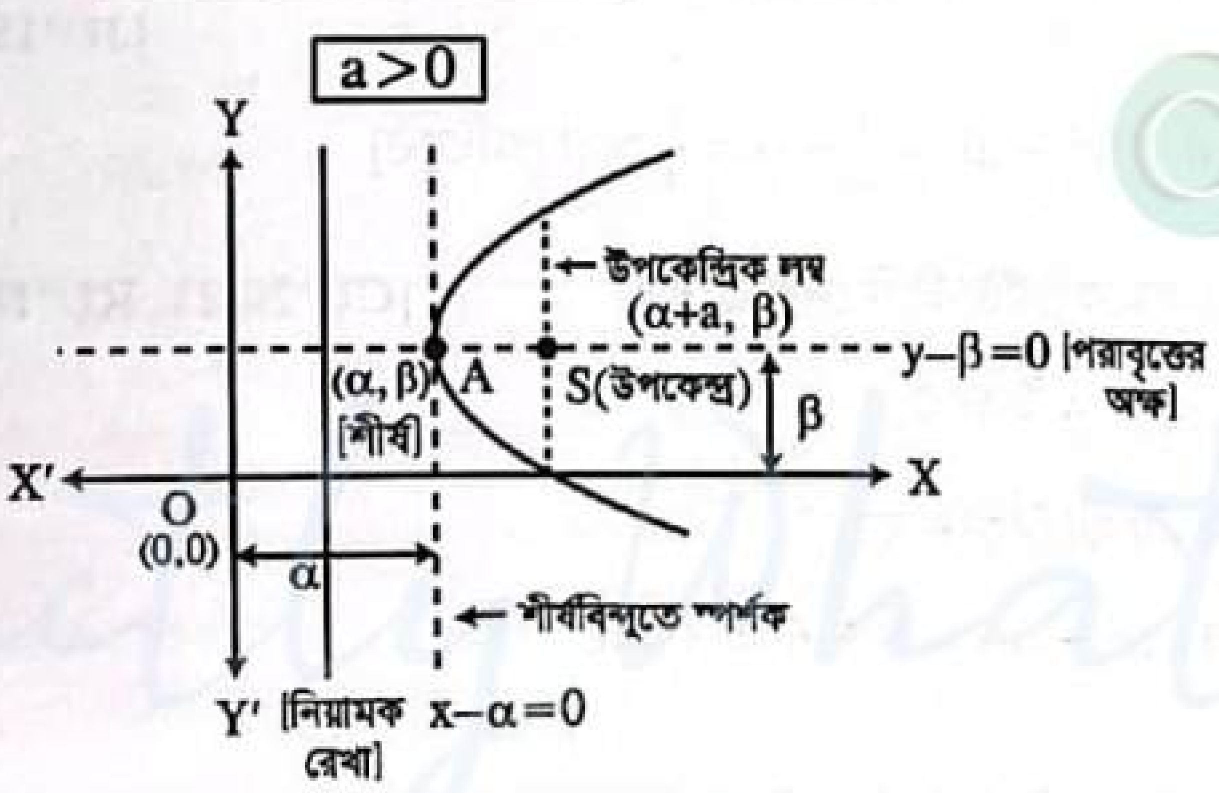


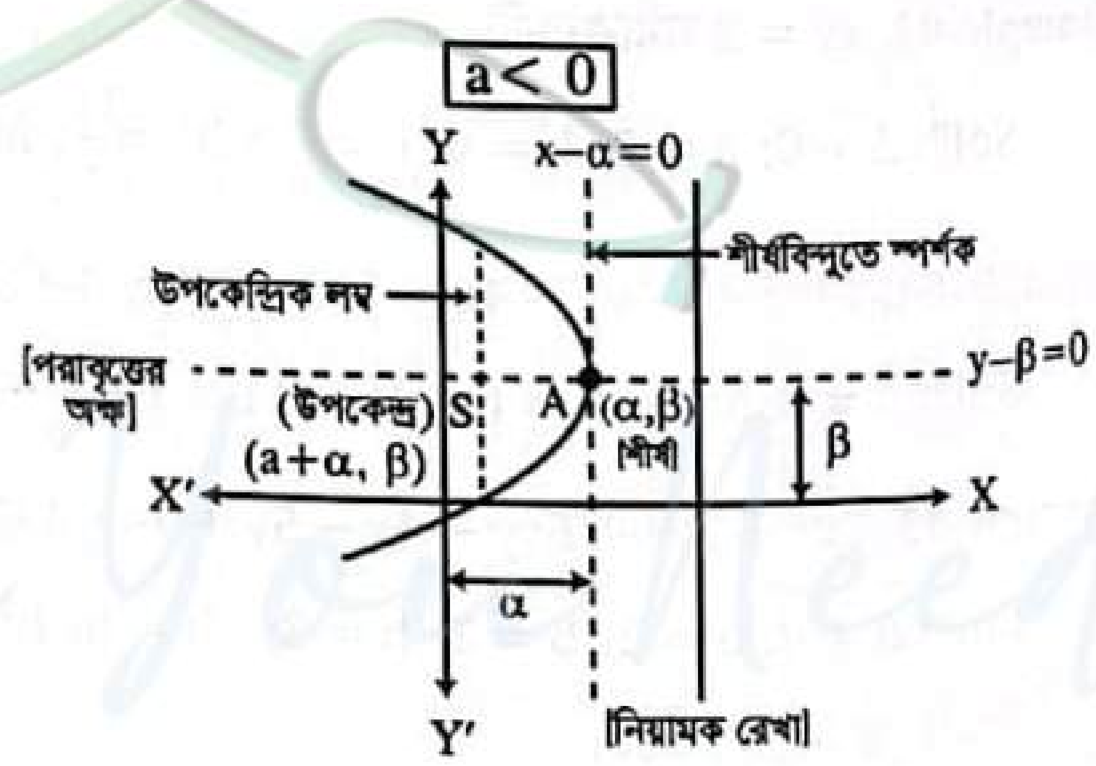
- **অক্ষ স্থানান্তর:**

(i) (α, β) শীর্ষ এবং অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল হলে পরাবৃত্তের চিত্র:

$A(\alpha, \beta)$ তে শীর্ষবিন্দু এবং অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$\boxed{(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)}$ বা, $\boxed{Y^2 = 4aX}$ [যেখানে, $Y = y - \beta$, $X = x - \alpha$]



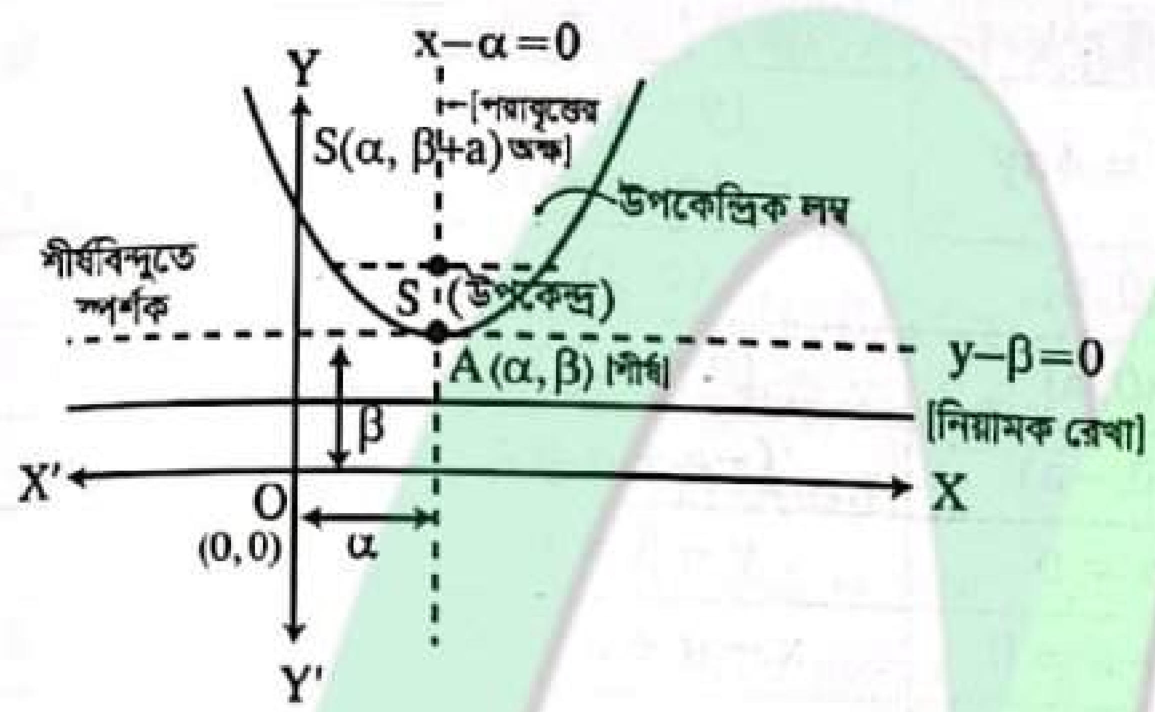


(ii) (α, β) শীর্ষ এবং অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল হলে পরাবৃত্তের চিত্র:

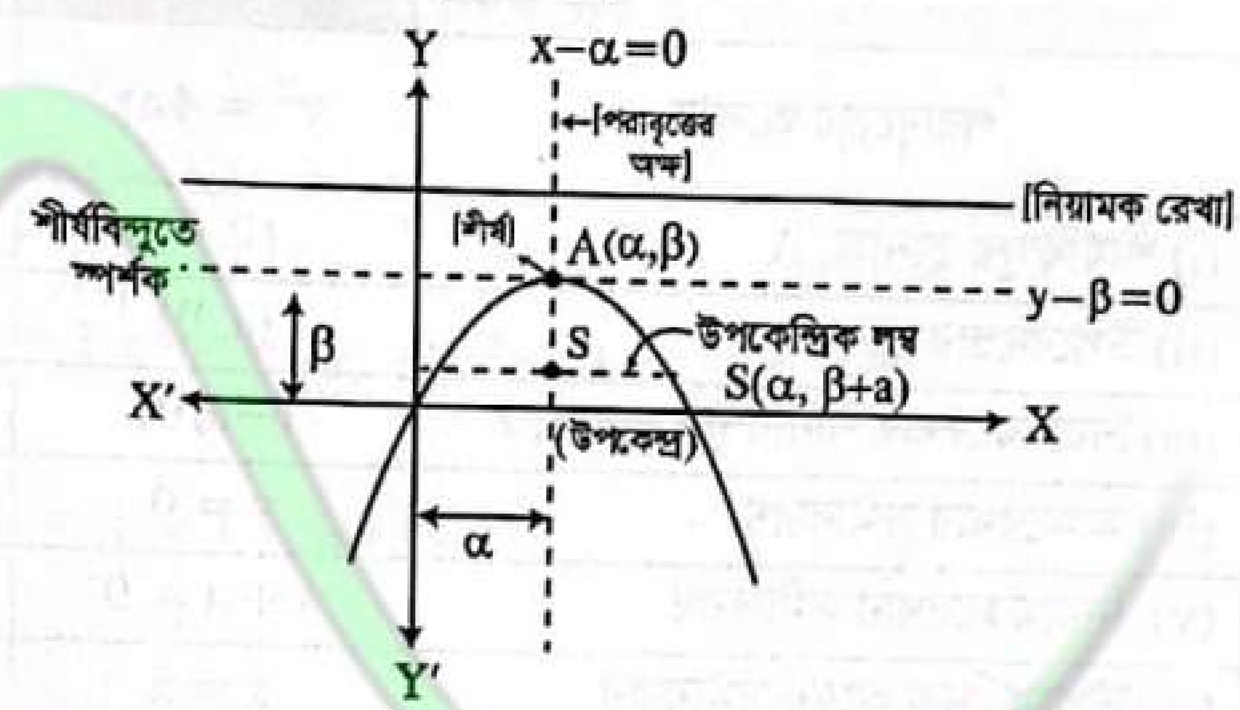
$A(\alpha, \beta)$ তে শীর্ষ বিন্দু এবং অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$\boxed{(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)}$ বা, $\boxed{X^2 = 4aY}$ [যেখানে, $Y = y - \beta, X = x - \alpha$]

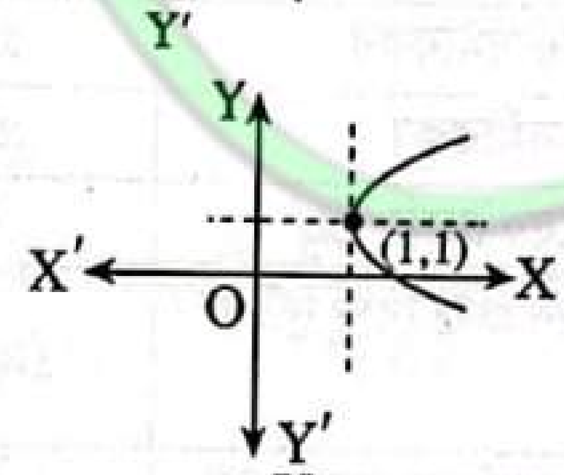
$\boxed{a>0}$



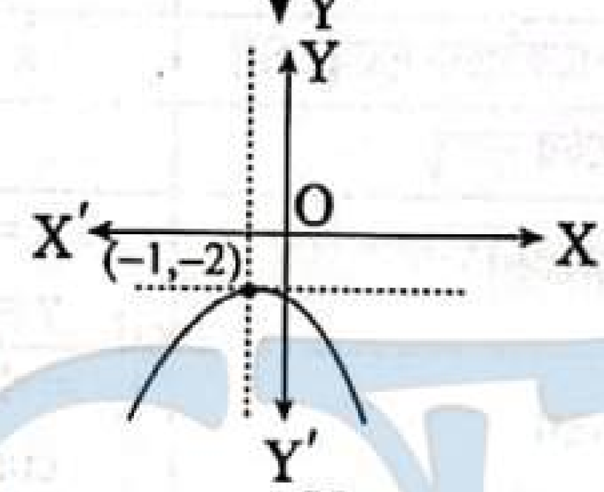
$\boxed{a<0}$



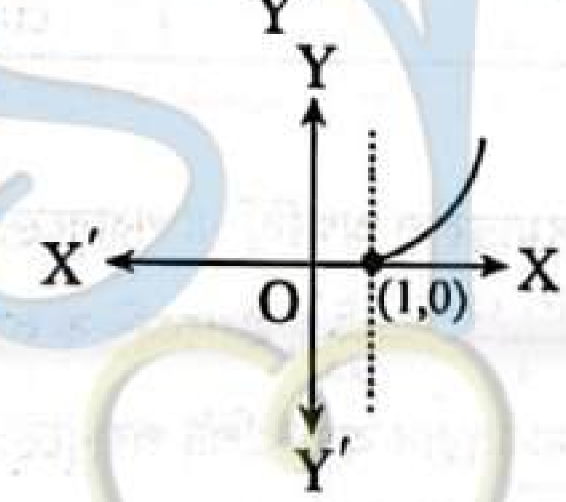
(iii) $(y-1)^2 = 4(x-1)$ এর লেখচিত্রটি হলো:



(iv) $-(y+2) = (x+1)^2$ এর লেখচিত্র:

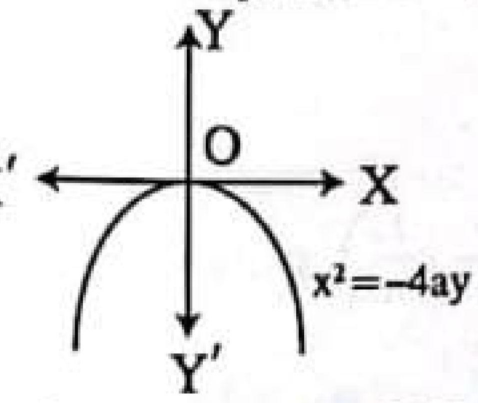


(v) $\sqrt{y} = (x-1)$ এর লেখচিত্র: $\therefore y = (x-1)^2$ [বর্গ করে]



Problems

Example-06. $x^2 = -4ay, a > 0$ অক্ষরেখার কোন দিকে অবস্থিত? **[RU'13-14]**

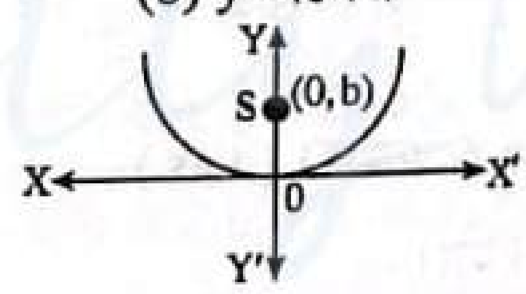
Sol^n: 

সমীকরণটি x অক্ষের নিচের দিকে অবস্থিত।

Example-07. $x^2 = 4by$ পরাবৃত্তটি কিসের সাপেক্ষে প্রতিসম? **[CU'22-23]**

(a) x-অক্ষের (b) y-অক্ষের (c) মূলবিন্দুর (d) কোনোটিই নয়

Sol^n: (b); y-অক্ষের;



Type-03: সমীকরণ থেকে বিভিন্ন উপাদান বের করতে হবে

Concept

	$a>0, a<0$	$a>0, a<0$	$a>0, a<0$	$a>0, a<0$
পরাবৃত্তের আকার	$y^2 = 4ax$	$x^2 = 4ay$	$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$	$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$
(i) শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক, A	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α, β)
(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, S	$(a, 0)$	$(0, a)$	$(a+\alpha, \beta)$	$(\alpha, a+\beta)$
(iii) নিয়ামকরেখার পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক, Z	$(-a, 0)$	$(0, -a)$	$(-a+\alpha, \beta)$	$(\alpha, -a+\beta)$
(iv) অক্ষরেখার সমীকরণ	$y=0$	$x=0$	$y-\beta=0$	$x-\alpha=0$
(v) নিয়ামকরেখার সমীকরণ	$x+a=0$	$y+a=0$	$x-\alpha+a=0$	$y-\beta+a=0$
(vi) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x=a$	$y=a$	$x-\alpha=a$	$y-\beta=a$
(vii) শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ	$x=0$	$y=0$	$x-\alpha=0$	$y-\beta=0$
(viii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, LL'	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$
(ix) উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক:	$(a, \pm 2a)$	$(\pm 2a, a)$	$(a+\alpha, \pm 2a+\beta)$	$(\pm 2a+\alpha, a+\beta)$
(x) (x, y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব, SP	$x+a$	$y+a$	$x-\alpha+a$	$y-\beta+a$
(xi) উপকেন্দ্র ও শীর্ষের দূরত্ব	a	a	a	a
(xii) পরামিতিক সমীকরণ	$x = at^2$, $y = 2at$	$x = 2at$, $y = at^2$	$x = \alpha + at^2$, $y = \beta + 2at$	$x = \alpha + 2at$, $y = \beta + at^2$
(xiii) পোলার সমীকরণ	$r = 4a\cot\theta \operatorname{cosec}\theta$	$r = 4a\tan\theta \sec\theta$	$(r\sin\theta - \beta)^2 = 4a(r\cos\theta - \alpha)$	$(r\cos\theta - \alpha)^2 = 4a(r\sin\theta - \beta)$

◆ **অন্যান্য:**

(i) x-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ: $x = ay^2 + by + c$;
শীর্ষ $\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{1}{|a|}$

(ii) y-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ: $y = ax^2 + bx + c$;
শীর্ষ $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{1}{|a|}$

(iii) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $yy_1 = 4a\left(\frac{x+x_1}{2}\right)$

(iv) $y = mx + c$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে, $c = \frac{a}{m}$;
$x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx - am^2$ $[c = -am^2]$

(v) $y = mx + \frac{a}{m}$ সরলরেখা $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

(vi) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = 2 × উৎকেন্দ্রিকতা × উপকেন্দ্র হতে দিকাক্ষের লম্ব দূরত্ব।

Problems

Example-08. $y^2 = 6x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? **[JU'18-19]**

Sol^n: $y^2 = 6x \Rightarrow y^2 = 4.\frac{3}{2}.x$ ∴ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4\left|\frac{3}{2}\right| = 6$ একক। **(Ans.)**

এইসব ক্ষেত্রে x বা y এর যে একঘাত, তার সহগই উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য হয়।

Example-09: পরাবৃত্তের শীর্ষ মূলবিন্দু এবং অক্ষরেখা y-অক্ষ যা $(-4,-2)$ বিন্দুগামী হলে তার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য হবে?

(a) 6 (b) 8 (c) 4 (d) 12

Sol^n: ধরি, পরাবৃত্তটি $x^2 = -4ay$, যা $(-4,-2)$ বিন্দুগামী,

$\therefore (-4)^2 = -4(a)(-2) \Rightarrow a = 2 \therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |4 \times 2| = 8$ **(Ans.)**

Example-10. $3y^2 + 24x - 6y - 69 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, উপকেন্দ্রিক লম্ব এর দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর?

Sol^n: $3(y^2 + 8x - 2y - 23) = 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -8x + 24$

$\Rightarrow (y-1)^2 = -8(x-3) = 4(-2)(x-3)$

$Y^2 = 4aX$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $X = x - 3, Y = y - 1, a = -2 \therefore x - 3 = 0, y - 1 = 0$

$x = 3,\ y = 1 \therefore$ শীর্ষ $(3,1)$ **(Ans.)**

এবং উপকেন্দ্রের জন্য, $x - 3 = -2 \Rightarrow x = 1; y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \therefore S \equiv (1,1)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4|a| = 8$ একক **(Ans.)**

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x - 3 = -2 \therefore x = 1$ **(Ans.)**

দিকাক্ষের সমীকরণ, $X = -a \Rightarrow x - 3 = -(-2) \Rightarrow x = 5$ **(Ans.)**

Example-11: উপকেন্দ্র $(3,3)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ, $3x - 4y - 2 = 0$ হলে, পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য হবে,

(a) 2 (b) 1 (c) 4 (d) 6

Sol^n: (a); উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 2 \times$ (উপকেন্দ্র হতে দিকাক্ষের দূরত্ব)

$= 2\left|\frac{3\times3-4\times3-2}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 2 \times \left|\frac{5}{5}\right| = 2$ **(Ans.)**

Example-12. $2x = y^2 + 8y + 22$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে- **[DU'20-21, RU'20-21, JU'19-20]**

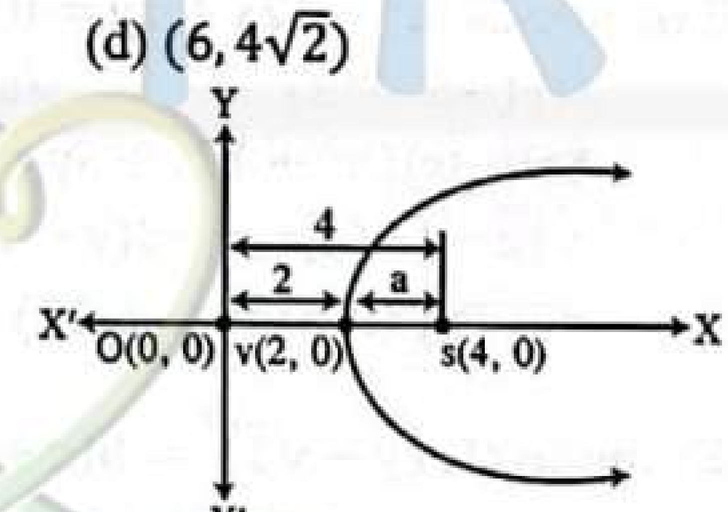
Sol^n: $2x = y^2 + 8y + 22 \Rightarrow y^2 + 8y + 16 = 2x - 6 \Rightarrow (y+4)^2 = 2(x-3)$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দু $(3,-4)$ **(Ans.)**

Example-13: পরাবৃত্তের অক্ষরেখা x-অক্ষ বরাবর এবং শীর্ষ ও ফোকাস মূলবিন্দু হতে যথাক্রমে 2 ও 4 একক দূরে x অক্ষের ধনাত্মক দিকে হলে নিচের কোন বিন্দুটি পরাবৃত্তস্থ নয়?

(a) $(4,-4)$ (b) $(5,2\sqrt{6})$ (c) $(8,6)$ (d) $(6,4\sqrt{2})$

Sol^n: (c); চিত্র হতে, $a = z$



$\therefore v(2,0)$ শীর্ষ বিশিষ্ট পরাবৃত্তটি হবে, $(y-0)^2 = 4a(x-2)$

$\Rightarrow y^2 = 8(x-2)$ ……… (i)

এখন, অপশনের বিন্দু গুলোকে সমীকরণে বসিয়ে দেখা যায় $(8,6)$ বিন্দুটি পরাবৃত্তস্থ নয়।

$\therefore$ Option (c) is correct

Example-14. $y^2 = 4p(x-2)$ পরাবৃত্তটি $(3,-4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে p এর মান কত? **[KU'19-20]**

Sol^n: $(-4)^2 = 4p(3-2) \Rightarrow 16 = 4p \therefore p = 4$ **(Ans.)**

Example-15. $5x^2 + 15x - 10y - 4 = 0$ পরাবৃত্তের নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[DU'14-15]**

Sol^n: $5\left(x^2 + 2.\frac{3}{2}.x + \frac{9}{4}\right) = 10y + 4 + \frac{45}{4} \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{10}{5}\left(y + \frac{61}{40}\right) \therefore X^2 = 2Y \therefore a = \frac{1}{2}$

$\therefore$ নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $Y + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y + \frac{61}{40} + \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow y + \frac{61+20}{40} = 0 \therefore 40y + 81 = 0$ **(Ans.)**

০৬

Example-16. $x^2-8x+4y-4=0$ কনিকটির দিকাক্ষের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক- **[GST'22-23]**

(a) $(4,6)$ (b) $(4,-6)$ (c) $(-4,-6)$ (d) $(6,4)$

Solⁿ: (a); $x^2-8x+4y-4=0 \Rightarrow x^2-2.x.4+4^2+4y-4-4^2=0 \Rightarrow (x-4)^2+4y-4-16=0$

$\Rightarrow (x-4)^2+4y-20=0 \Rightarrow (x-4)^2+4(y-5)=0 \Rightarrow (x-4)^2=-4(y-5)$

$\therefore (\underbrace{x-4}_{\alpha})^2=4(\underbrace{-1}_{a})(\underbrace{y-5}_{\beta})$ $\therefore (\alpha,\beta,a)=(4,5,-1)$

প্রদত্ত কনিকটি একটি $X^2=4aY$ আকৃতির পরাবৃত্ত। যেখানে, $(X,Y)=(x-4,y-5)$

এক্ষেত্রে, দিকাক্ষের পাদবিন্দু, $(X,Y)=(0,-a) \Rightarrow (x-4,y-5)=(0,-(-1))$

$\Rightarrow (x-4,y-5)=(0,1) \therefore (x,y)=(4,5+1)=(4,6)$ **(Ans.)**

Example-17. $y^2=8x+2y-9$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত? **[DU'21-22, JU'20-21, 15-16, CU'16-17, RU'17-18]**

Solⁿ: (a); $y^2=8x+2y-9 \Rightarrow y^2-2y+1=8x-8 \Rightarrow (y-1)^2=8(x-1)$

$\Rightarrow (y-1)^2=4.2.(x-1) \therefore a=2 \Rightarrow Y^2=4.2.X$

উপকেন্দ্রের জন্য, $X=a \Rightarrow x-1=2 \therefore x=3$ এবং $Y=0 \Rightarrow y-1=0 \therefore y=1$ $\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $S(3,1)$.

Example-18. p কোন মানের জন্য (4,4) বিন্দুটি $x^2-8x+py+7=0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র হবে? **[DU'22-23]**

Solⁿ: $x^2-8x+py+7=0 \Rightarrow x^2-8x=-py-7 \Rightarrow x^2-8x+16=-py-7+16$

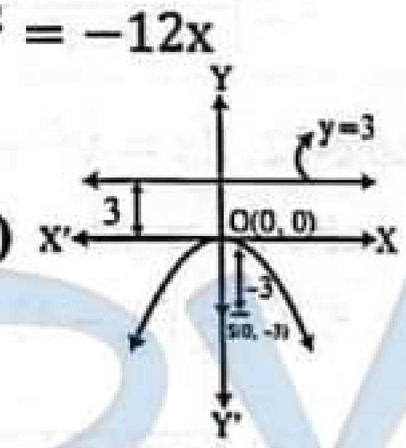
$\Rightarrow (x-4)^2=-p\left(y-\frac{9}{p}\right) \Rightarrow (x-4)^2=4\left(\frac{-p}{4}\right)\left(y-\frac{9}{p}\right)$

উপকেন্দ্র $\left(4,\frac{-p}{4}+\frac{9}{p}\right) \therefore \frac{-p}{4}+\frac{9}{p}=4 \Rightarrow -p^2+36=16p \Rightarrow p^2+16p-36=0 \therefore p=-18,2$

Example-19: উপকেন্দ্র $(0,-3)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ, $y=3$ হলে, পরাবৃত্তটি হবে-

(a) $x^2=12y$ (b) $x^2=-12y$ (c) $x^2=-9y$ (d) $y^2=-12x$

Solⁿ: (b); পাশের চিত্র হতে নির্ণেয় পরাবৃত্তটি হবে, $x^2=-4ay=-4(3)y \therefore x^2=-12y$ **(Ans.)**



Example-20. $x^2+12x+3y=0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু কোনটি? **[RU'22-23]**

(a) $(-6,-12)$ (b) $(6,12)$ (c) $(-6,12)$ (d) $(6,-12)$

Solⁿ: (c); $x^2+12x+3y=0 \Rightarrow x^2+12x+36=-3y+36 \Rightarrow (x+6)^2=-3(y-12)$

$\therefore \{x-(-6)\}^2=-3(y-12)$ এখন, $(x-\alpha)^2=\pm 4a(y-\beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

শীর্ষবিন্দু, $(\alpha,\beta)=(-6,12)$

Example-21. $\left(y+\sqrt{3}\right)^2=8(x+3)$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি? **[GST'20-21]**

Solⁿ: $\left(y+\sqrt{3}\right)^2=4.2(x+3) \Rightarrow Y^2=4.aX$;

উপকেন্দ্রের জন্য- $X=a \Rightarrow x+3=2 \Rightarrow x=-1$ এবং $Y=0 \Rightarrow y+\sqrt{3}=0 \Rightarrow y=-\sqrt{3}$

$\therefore r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$ এবং $\theta=\pi+\tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right|=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$।

Example-22. $x^2-4x+12y-40=0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? **[DU'13-14]**

Solⁿ: $x^2-4x+12y-40=0 \Rightarrow x^2-4x+4=-12y+40+4$

$\Rightarrow (x-2)^2=-12\left(y-\frac{44}{12}\right) \Rightarrow (x-2)^2=-4\times 3\left(y-\frac{44}{12}\right)$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=4\times 3=12$ একক; এইসব ক্ষেত্রে x বা y এর যে একঘাত, তার সহগই উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য হয়।

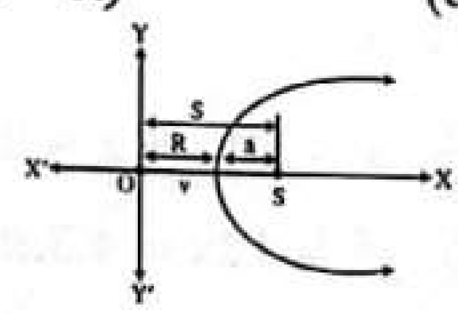
Example-23: যে পরাবৃত্তের শীর্ষ এবং ফোকাস মূলবিন্দু হতে যথাক্রমে R এবং $S(> R)$ দূরত্বে x অক্ষের ধনাত্মক দিকে অবস্থিত, তাহলে তার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য হবে,

(a) $4(S+R)$ (b) $2(S-R)$ (c) $4(S-R)$ (d) $2(S+R)$

Sol^n: (c); চিত্র হতে, $a = S - R$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a$

$= 4(S-R)$ **(Ans.)**



Example-24. $3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$ পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণটি নির্ণয় কর? **[CU'18-19]**

Sol^n: $3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0 \Rightarrow 3(x^2 + 2x + 1) - 4y - 5 - 3 = 0$

$\Rightarrow 3(x+1)^2 = 4(y+2) \therefore (x+1)^2 = 4.\frac{1}{3}(y+2)$

$\therefore X^2 = 4.\frac{1}{3}Y$ [যেখানে $X = x + 1$ এবং $Y = y + 2$]

দিকাক্ষের সমীকরণ, $Y = -\frac{1}{3} \Rightarrow y + 2 = -\frac{1}{3} \therefore y = -\frac{7}{3} \therefore 3y + 7 = 0$ **(Ans.)**

Example-25: $y^2 - kx + 8 = 0$ বক্ররেখার নিয়ামক রেখাটি $x = 1$ হলে, $k = ?$

(a) -8 or 4 (b) -4 or 8 (c) 8 or -4 (d) -8 or -4

Sol^n: (a); $y^2 - kx + 8 = 0 \Rightarrow (y-0)^2 = k\left(x - \frac{8}{k}\right)$ যা পরাবৃত্ত এবং পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ আকারে লেখা যায়,

$Y^2 = kX$; যার নিয়ামকরেখা হবে, $X = -a \Rightarrow X - \frac{8}{k} = -\frac{k}{4}$ [যেহেতু $4a = k \therefore a = \frac{k}{4}$] $\Rightarrow 1 - \frac{8}{k} = -\frac{k}{4}$ [$\therefore x = 1$]

$\Rightarrow k^2 + 4k - 32 = 0 \therefore k = \frac{-4 \pm \sqrt{16+128}}{2.1} = \frac{-4 \pm 12}{2} \therefore k = -8$ or 4 **(Ans.)**

০৬

Type-04: অক্ষের সমান্তরাল অক্ষরেখা / দিকাক্ষ

Concept

- x-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষরেখা/ y-অক্ষের সমান্তরাল নিয়ামক রেখাবিশিষ্ট পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে পরাবৃত্তের সমীকরণ, $ay^2 + by + c = x\ [a \neq 0]$ অথবা, $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ ধরতে হবে। [যেখানে (α, β) পরাবৃত্তের শীর্ষ]
- y-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষরেখা / x-অক্ষের সমান্তরাল নিয়ামক রেখাবিশিষ্ট পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে পরাবৃত্তের সমীকরণ, $ax^2 + bx + c = y\ [a \neq 0]$ অথবা, $(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$ ধরতে হবে। [যেখানে (α, β) পরাবৃত্তের শীর্ষ]

অতঃপর সমাধান করে a, b, c অথবা α, β, a এর মান বের করতে হবে।

Problems

Example-26. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ $(4, -3)$ বিন্দুতে এবং দিকাক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং যা $(-4, -7)$ বিন্দুগামী। **[JU'11-12]**

Sol^n: দিকাক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল হলে অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $(x-4)^2 = 4a(y+3)$ যা, $(-4, -7)$ বিন্দুগামী

$\therefore (-4-4)^2 = 4a(-7+3) \Rightarrow 8^2 = -16a$

$\Rightarrow a = \frac{64}{-16} = -4$ $\therefore$পরাবৃত্তের $(x-4)^2 = -4.4(y+3) \Rightarrow x^2 - 8x + 16y + 64 = 0$ **(Ans.)**

Type-05: পরাবৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ

Concept

কোন সমীকরণের x ও y চলককে ৩য় কোনো চলক দ্বারা প্রকাশ করলে প্রাপ্ত সমীকরণ যুগলকে পরামিতিক সমীকরণ বলে। ৩য় চলককে পরামিতি বলে। x ও y উভয়ই কোনো পরামিতি t দ্বারা প্রকাশিত হলে, যেকোনো সমীকরণ হতে t বের করে অন্যটিতে বসালে x ও y সম্বলিত সমীকরণ (কার্তেসীয় সমীকরণ) পাওয়া যাবে।

আদর্শ সমীকরণ	$y^2 = 4ax$	$x^2 = 4ay$
পরামিতিক সমীকরণ	$x = at^2,\ y = 2at$	$y = at^2,\ x = 2at$

Problems

Example-27. $x = 3t^2, y = 6t$ সমীকরণবিশিষ্ট পরাবৃত্তের কার্তেসীয় সমীকরণ, শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। **[GST'22-23, CU' 14-15]**

Sol^n: $y = 6t \therefore t = \frac{y}{6}$, $x = 3t^2 \Rightarrow x = 3\left(\frac{y}{6}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{3}{36}y^2 \therefore y^2 = 12x$ **(Ans.)**

$\therefore$ শীর্ষবিন্দু $(0, 0)$ আবার, $y^2 = 12x = 4.3.x \therefore a = 3$

উপকেন্দ্র $(3, 0)$ **(Ans.)**

Example-28. $r = 4a \operatorname{cosec}\theta \cot\theta$ পোলার সমীকরণটিকে কার্তেসীয় সমীকরণে রুপান্তরিত কর। **[BAU'14-15]**

Sol^n: $r = 4a \times \frac{1}{\sin\theta} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow r\sin^2\theta = 4a\cos\theta$

$\Rightarrow r^2\sin^2\theta = 4a.r\cos\theta \Rightarrow (r\sin\theta)^2 = 4a(r\cos\theta) \Rightarrow y^2 = 4ax$ **(Ans.)**

Type-06: উপকেন্দ্রিক দূরত্ব/ ফোকাস দূরত্ব

Concept

পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব = ঐ বিন্দু হতে নিয়ামক রেখার লম্ব দূরত্ব।

(i) $y^2 = 4ax$ এর উপরস্থ কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক/ফোকাস দূরত্ব $= a + x$,

(ii) $x^2 = 4ay$ এর উপরস্থ কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক/ফোকাস দূরত্ব $= a + y$

(iii) $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha) \Rightarrow Y^2 = 4aX$; $[X = x - \alpha, Y = y - \beta]$
এর উপরস্থ কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= a + X = a + x - \alpha$

(iv) $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta) \Rightarrow X^2 = 4aY$; $[X = x - \alpha, Y = y - \beta]$
এর উপরস্থ কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= a + Y = a + y - \beta$

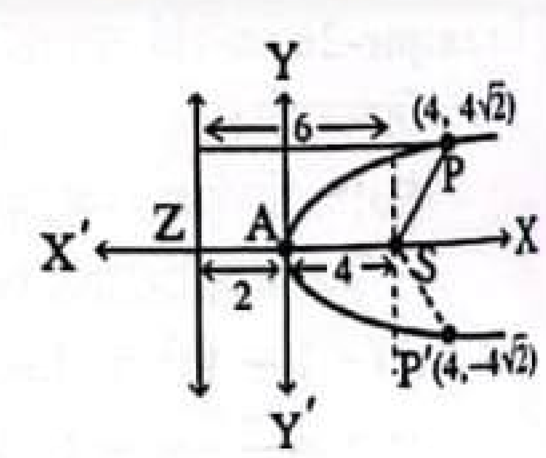
Problems

Example-29. $y^2 = 9x$ প্যারাবোলার উপরে অবস্থিত একটি বিন্দু P এর কোটি 12; P এর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব কত? **[JU'22-23]**

Sol^n: $y^2 = 9x \therefore 4a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{4}$; $y^2 = 9x \Rightarrow (12)^2 = 9x \Rightarrow x = 16$

উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= a + x = \frac{9}{4} + 16 = \frac{73}{4} = 18\frac{1}{4}$ **(Ans.)**

Example-30. $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরস্থ কোন বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 6; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।



Sol^n: $y^2 = 8x = 4.2.x$;

তাহলে, উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= a + x = 6$

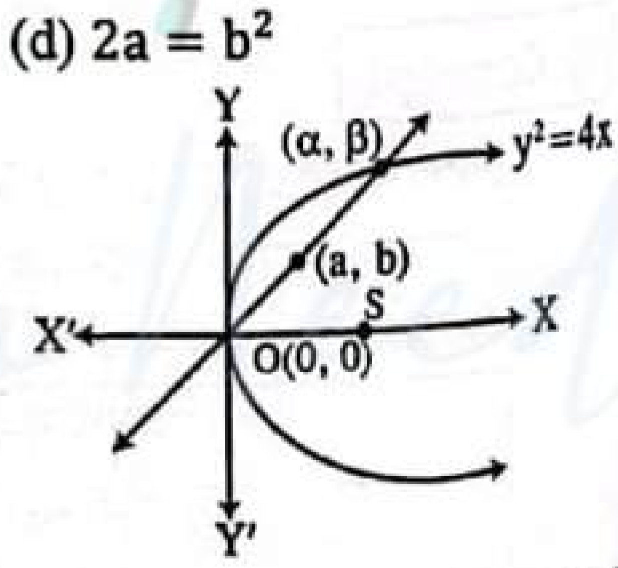
$\therefore x = 4 [\because a = 2]; y^2 = 8.4 = 32 \therefore y = \pm 4\sqrt{2}$

$\therefore$ ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, \pm 4\sqrt{2})$ **(Ans.)**

Example-31: $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের মূলবিন্দুগামী একটি জ্যা এর মধ্যবিন্দু (a, b) হলে কোনটি সঠিক?

(a) $2b = a$ (b) $2a = b$ (c) $a^2 = 2b$ (d) $2a = b^2$

Sol^n: (d); ধরি, মূলবিন্দুগামী জ্যা-এর অপর প্রান্ত বিন্দু (α, β), যা $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তস্থ।



যেহেতু (a, b) উক্ত জ্যা-এর মধ্যবিন্দু তাহলে, $a = \frac{\alpha + 0}{2} \Rightarrow \alpha = 2a$

এবং $b = \frac{\beta + 0}{2} \Rightarrow \beta = 2b$

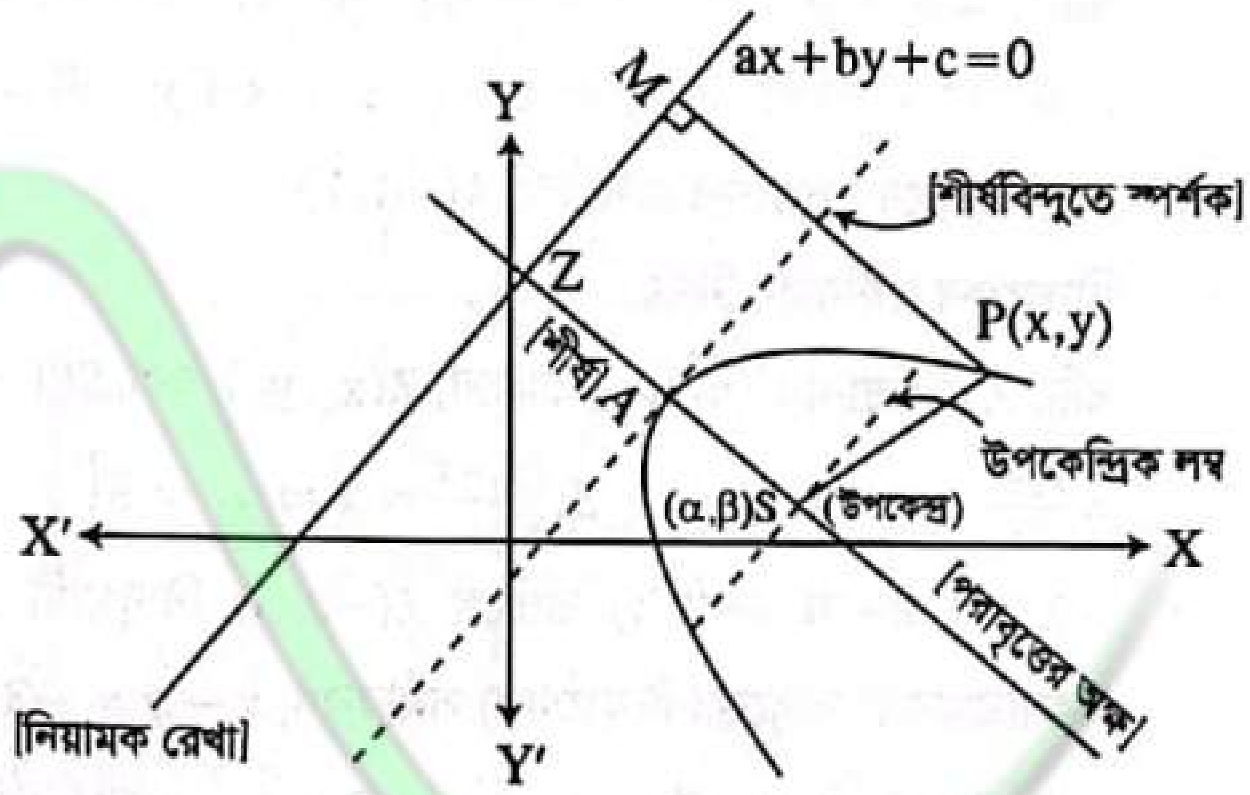
$\therefore (\alpha, \beta) \equiv (2a, 2b)$ বিন্দুটি $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তস্থ বলে,

$(2b)^2 = 4(2a) \Rightarrow 4b^2 = 8a \Rightarrow b^2 = 2a$ **(Ans.)**

Type-07: অনাদর্শ অবস্থানে উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষের সমীকরণ হতে পরাবৃত্তের সমীকরণ

Concept

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (α, β) এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ $ax + by + c = 0$ হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে। মনে করি, $P(x, y)$ উক্ত পরাবৃত্তের উপর যেকোন একটি বিন্দু।



$\frac{SP}{MP} = e = 1$

$\Rightarrow SP = MP$

$\Rightarrow SP^2 = MP^2$

$\Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$

Tips: এক্ষেত্রে ব্যবহৃত সূত্র,

$SP = e.PM$

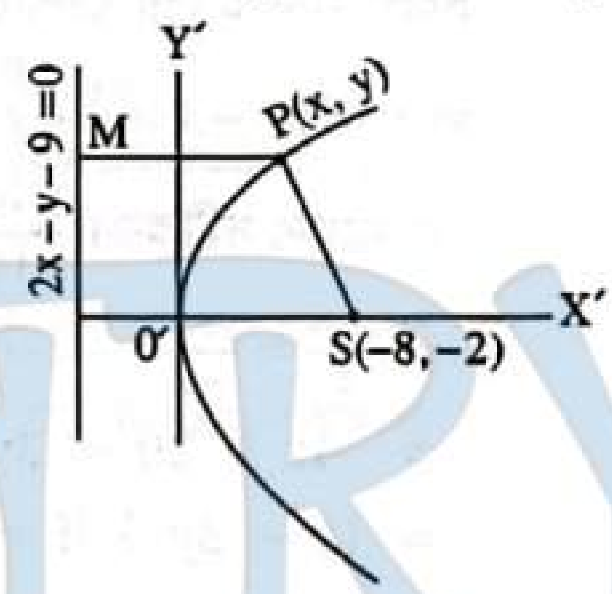
$S =$ উপকেন্দ্র

$P =$ পরাবৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু

$e =$ উৎকেন্দ্রিকতা

Problems

Example-32. $(-8, -2)$ উপকেন্দ্র ও $2x - y - 9 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ বের কর। **[RUET' 08-09]**



Solⁿ: ধরি, পরাবৃত্তের উপর একটি চলমান বিন্দু $P(x, y)$

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $\frac{SP}{PM} = 1 \Rightarrow SP^2 = PM^2$

$\Rightarrow (x+8)^2 + (y+2)^2 = \left[\frac{2x-y-9}{\sqrt{2^2+1^2}}\right]^2$

$\Rightarrow x^2 + 16x + 64 + y^2 + 4y + 4 = \frac{4x^2+y^2+81-4xy+18y-36x}{5}$

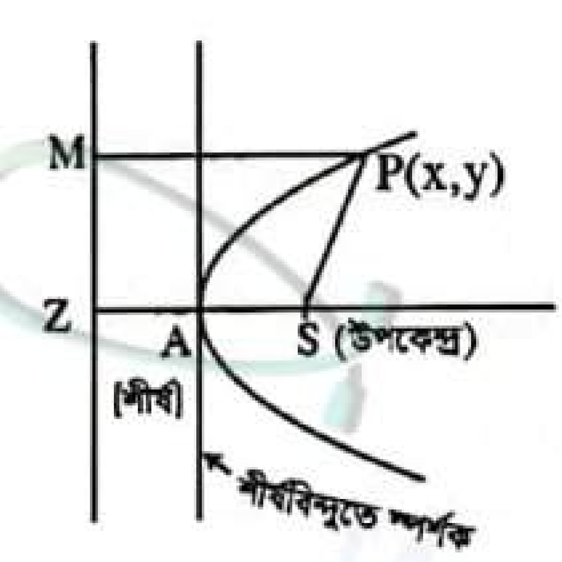
$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 + 80x + 20y + 340 = 4x^2 + y^2 + 81 - 4xy + 18y - 36x$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 + 116x + 2y + 4xy + 259 = 0$ **(Ans.)**

Type-08: উপকেন্দ্র ও শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ / শীর্ষের স্থানাঙ্ক দেয়া আছে, সমীকরণ বের করতে হবে

Concept

Z ও S এর মধ্যবিন্দু শীর্ষ A



এখন,

(i) অক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর [অক্ষ $\perp$ শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক এবং উপকেন্দ্র (S) দিয়ে যায়]

(ii) অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের ছেদবিন্দু (পরাবৃত্তের শীর্ষ, A) নির্ণয় কর।

(iii) এখন, Z ও S এর মধ্যবিন্দু শীর্ষ A শর্তে Z নির্ণয় কর

(iv) নিয়ামক রেখা $\parallel$ শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক এবং Z বিন্দুগামী $\rightarrow$ নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(v) $\frac{SP}{MP} = e = 1 \Rightarrow \frac{SP}{MP} = 1 \Rightarrow SP^2 = MP^2$ দ্বারা পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

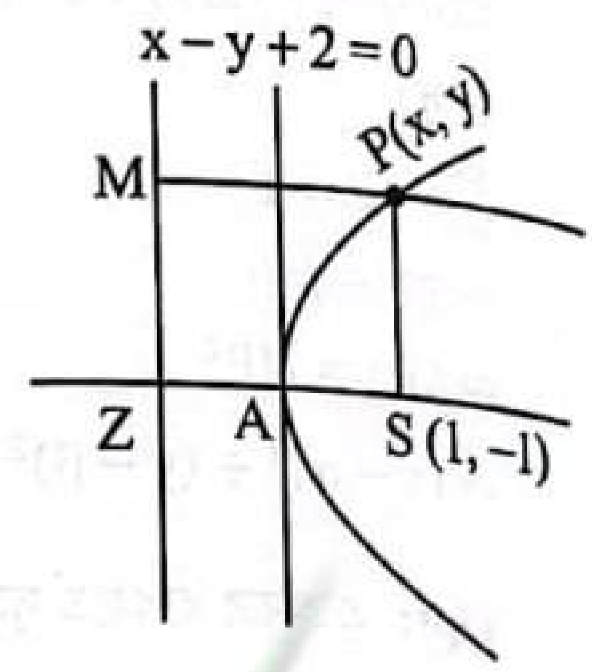
[যেখানে, $P(x, y)$ পরাবৃত্তের উপর যেকোন একটি বিন্দু]

(vi) (α, β) উপকেন্দ্র, e উৎকেন্দ্রিকতা, $lx + my + n = 0$ নিয়ামকবিশিষ্ট কণিকের সমীকরণ: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2\frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2}$

Problems

Example-33. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(1, -1)$ বিন্দুতে এবং $x - y + 2 = 0$ রেখাটি শীর্ষ বিন্দুতে অক্ষের উপর লম্ব।

Sol^n: অক্ষ, শীর্ষে স্পর্শকের উপর লম্ব এবং $(1, -1)$ বিন্দুগামী।



$\therefore$ অক্ষের সমীকরণ, $x + y = 1 + (-1) \therefore x + y = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

অক্ষ ও শীর্ষে স্পর্শকের ছেদবিন্দু $A(-1, 1)$

দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয়:

ধরি, Z এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) তাহলে, $Z(x_1, y_1)$ এবং $S(1, -1)$ এর মধ্যবিন্দু $A(-1, 1)$

$\therefore \frac{x_1+1}{2} = -1 \Rightarrow x_1 = -3; \left[\frac{y_1-1}{2} = 1 \Rightarrow y_1 = 3\right]$

$\therefore$ Z এর স্থানাঙ্ক $(-3, 3)$ তাহলে $Z(-3, 3)$ বিন্দুগামী $x - y + 2 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার (পরাবৃত্তের দিকাক্ষের) সমীকরণ, $x - y = -3 - 3 \therefore x - y + 6 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{(x-y+6)^2}{2}$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 4 = x^2 + y^2 + 36 - 2xy - 12y + 12x$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 16x + 16y - 32 = 0 \Rightarrow (x + y)^2 - 16(x - y + 2) = 0$ **(Ans.)**

Example-34. $(-1, 1)$ উপকেন্দ্র এবং $(2, -3)$ শীর্ষ বিন্দু বিশিষ্ট পরাবৃত্তটির অক্ষ ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: অক্ষ ও দিকাক্ষের ছেদবিন্দু (x, y) হলে, $2 = \frac{-1+x}{2}$

$\Rightarrow x = 5; -3 = \frac{1+y}{2} \therefore y = -7 \therefore (x, y) = (5, -7)$

$\therefore$ অক্ষের সমীকরণ, $\frac{x-5}{5+1} = \frac{y+7}{-7-1}$

$\Rightarrow \frac{x-5}{3} = \frac{y+7}{-4}$

$\Rightarrow -4x + 20 = 3y + 21$

$\Rightarrow 4x + 3y + 1 = 0$ **(Ans.)**

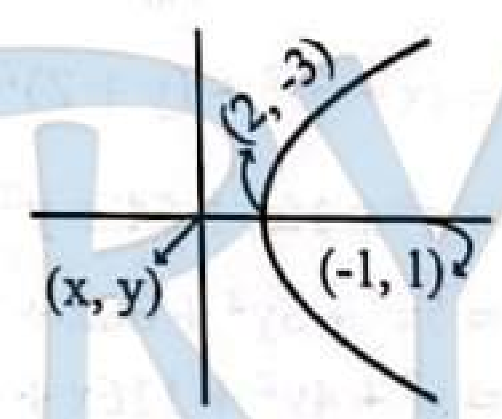
$\therefore$দিকাক্ষের বা নিয়ামক রেখার সমীকরণ,

$3x - 4y + c = 0$

$\therefore 3(5) - 4(-7) + c = 0$

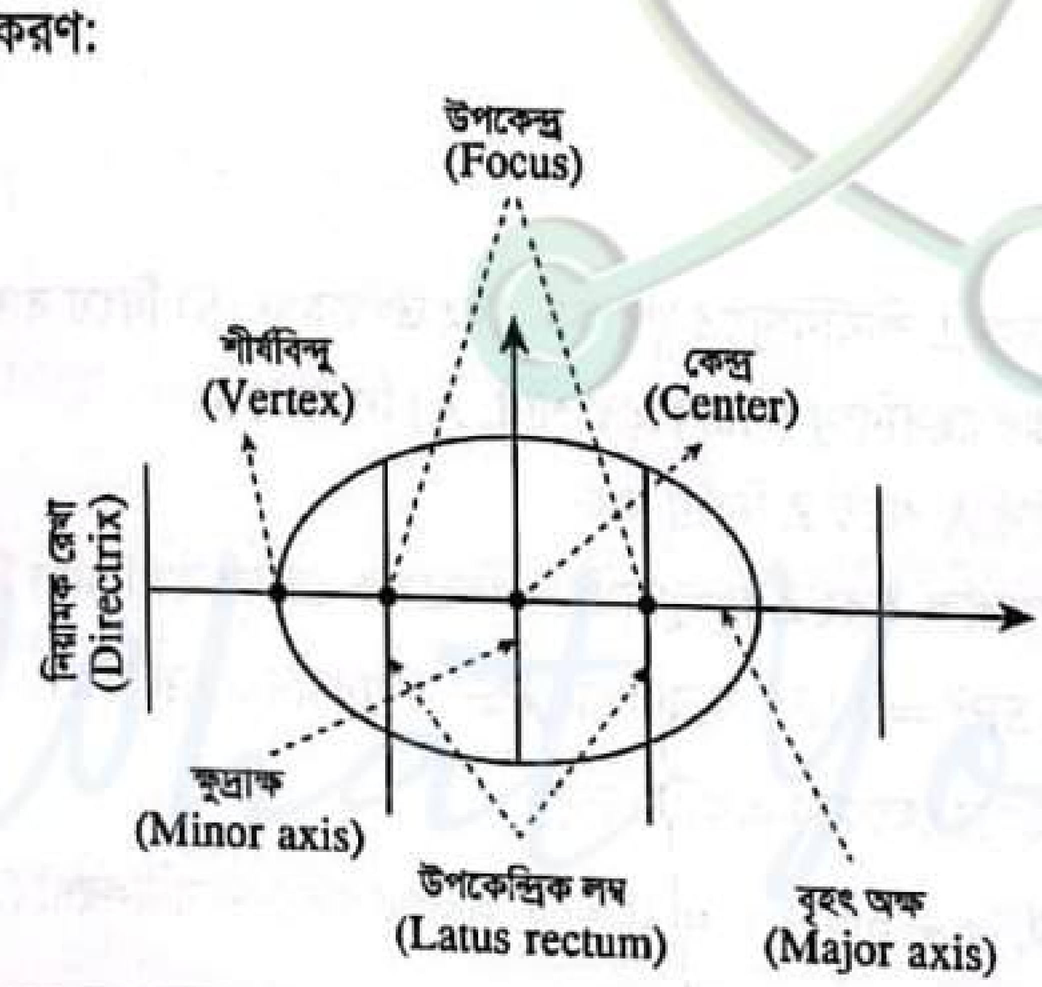
$\Rightarrow c = -43$

$\therefore 3x - 4y - 43 = 0$ **(Ans.)**



উপবৃত্ত

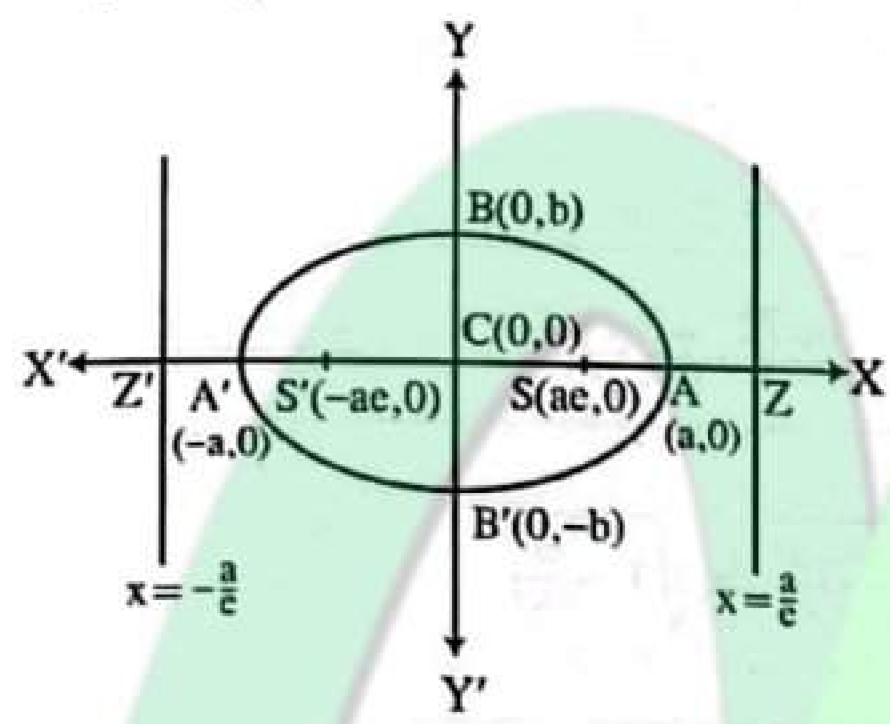
- চিত্র হতে বিভিন্ন উপাদান সনাক্তকরণ:



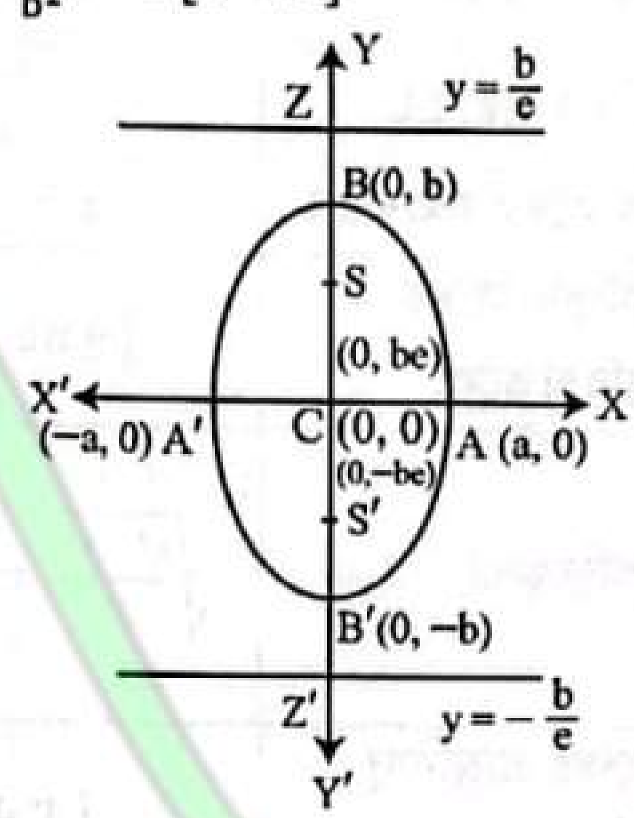
- **উপবৃত্তের বিভিন্ন আদর্শ আকৃতির চিত্র:**

➢ অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষ বরাবর:

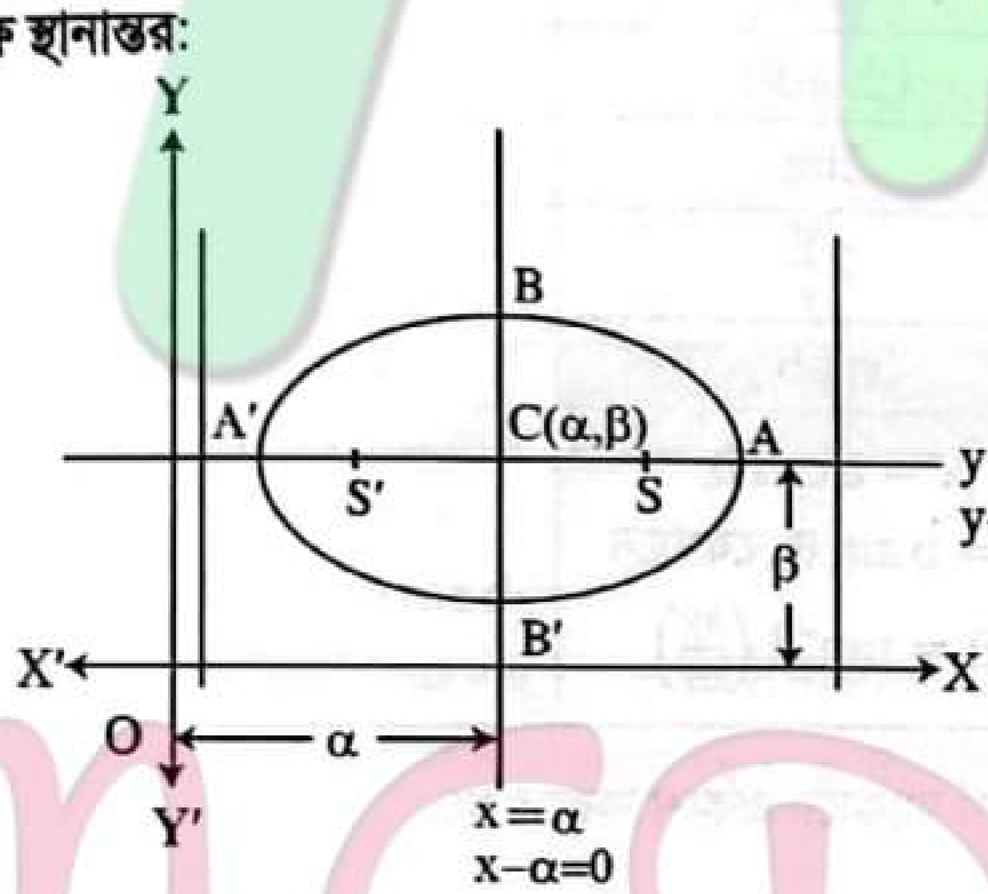
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ [a>b]$

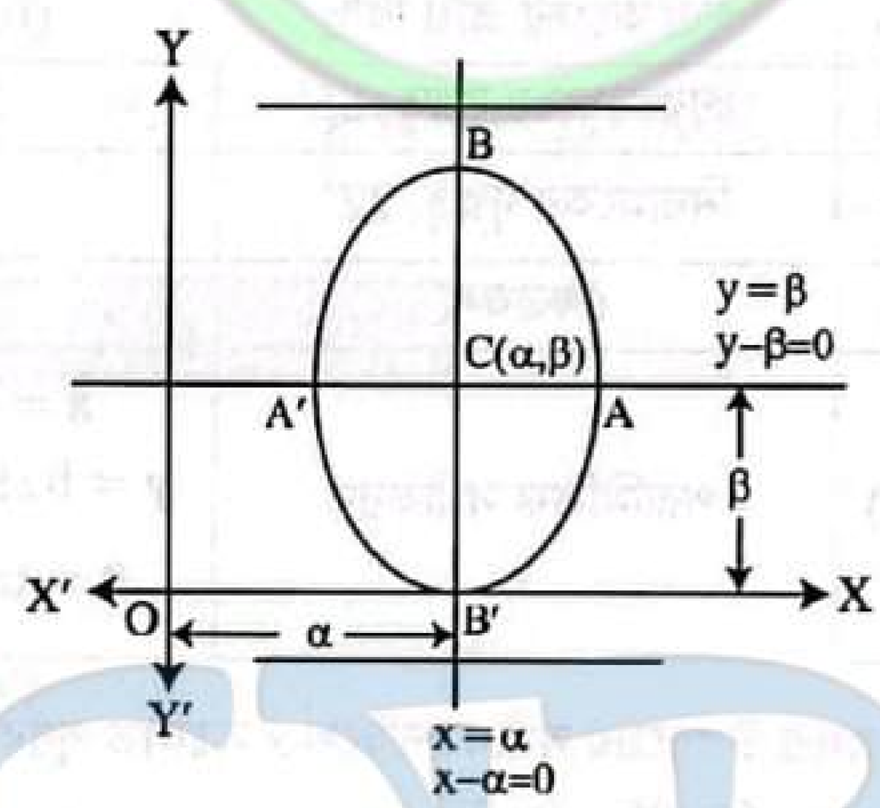


$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ [a<b]$



➢ **অক্ষ স্থানান্তর:**





কেন্দ্র (α,β) এবং বৃহৎ অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল হলে সমীকরণ,

$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1\ [a>b]$

$\Rightarrow \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1\ \begin{bmatrix}X=x-\alpha\\ Y=y-\beta\end{bmatrix}$

কেন্দ্র (α,β) এবং বৃহৎ অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল হলে সমীকরণ, $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1\ [b>a]$

$\Rightarrow \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1\ \begin{bmatrix}X=x-\alpha\\ Y=y-\beta\end{bmatrix}$

Type-09: সমীকরণ থেকে বিভিন্ন উপাদান নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

উপবৃত্তের জন্য $0<e<1$.

ক্রমিক নং	আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a<b$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1, a>b$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1, a<b$
(i)	কেন্দ্র, C	$(0,0)$	$(0,0)$	(α,β)	(α,β)
(ii)	বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য	2a	2b	2a	2b
(iii)	ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য	2b	2a	2b	2a
(iv)	উপকেন্দ্র, S	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$	$(\alpha\pm ae,\beta)$	$(\alpha,\beta\pm be)$
(v)	বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ	$y=0$	$x=0$	$y-\beta=0$	$x-\alpha=0$
(vi)	ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ	$x=0$	$y=0$	$x-\alpha=0$	$y-\beta=0$

ক্রমিক নং	আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a<b$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1, a>b$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1, a<b$
(vii)	দিকাক্ষের সমীকরণ	$x=\pm\frac{a}{e}$	$y=\pm\frac{b}{e}$	$x=\alpha\pm\frac{a}{e}$	$y=\beta\pm\frac{b}{e}$
(viii)	উপকেন্দ্রিক লম্ব, LL′	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
(ix)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=\pm be$	$x=\alpha\pm ae$	$y=\beta\pm be$
(x)	উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুগুলো	$\left(\pm ae, \pm\frac{b^2}{a}\right)$	$\left(\pm\frac{a^2}{b}, \pm be\right)$	$\alpha\pm ae, \beta\pm\frac{b^2}{a}$	$\alpha\pm\frac{a^2}{b}, \beta\pm be$
(xi)	উৎকেন্দ্রিকতা, e	$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$	$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$
(xii)	বৃহৎ অক্ষের প্রান্তবিন্দু (শীর্ষবিন্দু)	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$	$(\alpha\pm a, \beta)$	$(\alpha, \beta\pm b)$
(xiii)	ক্ষুদ্র অক্ষের প্রান্ত বিন্দু	$(0, \pm b)$	$(\pm a, 0)$	$(\alpha, \beta\pm b)$	$(\alpha\pm a, \beta)$
(xiv)	ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব, SS′	2ae	2be	2ae	2be
(xv)	নিয়ামকের দূরত্ব, ZZ′	$2\frac{a}{e}$	$2\frac{b}{e}$	$2\frac{a}{e}$	$2\frac{b}{e}$
(xvi)	ক্ষেত্রফল	πab	πab	πab	πab
(xvii)	পরামিতিক সমীকরণ	$x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, যেখানে $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{ay}{bx}\right)$	$x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, যেখানে $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{ay}{bx}\right)$	$x=\alpha+a\cos\theta$, $y=\beta+b\sin\theta$ যেখানে $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{a(y-\beta)}{b(x-\alpha)}\right)$	$x=\alpha+a\cos\theta$, $y=\beta+b\sin\theta$, যেখানে $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{a(y-\beta)}{b(x-\alpha)}\right)$

- প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণটিকে x সম্বলিত পূর্ণবর্গ ও y সম্বলিত পূর্ণবর্গ আকারে প্রকাশ করতে হবে। অর্থাৎ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।

Problems

Example-35. $25x^2+16y^2=400$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত? **[DU'19-20, JU'21-21]**

Sol^n: $25x^2+16y^2=400 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1 \therefore e=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$

Example-36. $\frac{(x+4)^2}{100}+\frac{(y-2)^2}{64}=1$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত? **[DU'07-08, 05-06, 11-12, JnU'08-09]**

Sol^n: এখানে, $a=10, b=8, \therefore a>b \therefore e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{8^2}{10^2}}=\frac{3}{5}$ **(Ans.)**

Example-37. একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্যের অর্ধেক, উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা কত? **[DU'21-22]**

Sol^n: ধরি, বৃহৎ অক্ষ x এবং ক্ষুদ্র অক্ষ y অক্ষ। $\therefore \frac{2b^2}{a}=\frac{1}{2}\times 2a \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$

এখন, $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \therefore e=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(Ans.)**

Example-38. $9x^2+4y^2=36$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? **[JU'19-20]**

Sol^n: $9x^2+4y^2=36 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ $[b>a]$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2a^2}{b}=\frac{2\times4}{3}=\frac{8}{3}$ একক।

Example-39. $\left(4,\frac{3}{2}\right)$ এবং $(3,2)$ বিন্দুগামী একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়, স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় বরাবর হলে উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা কত? [KU'18-19]

Sol^n: ধরি, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $(3,2)$ বিন্দুগামী হলে $\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{a^2}=\frac{1}{9}\left(1-\frac{4}{b^2}\right)$

$\left(4,\frac{3}{2}\right)$ বিন্দুগামী হলে, $\frac{16}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1 \Rightarrow \frac{16}{a^2}=1-\frac{9}{4b^2} \Rightarrow \frac{16}{9}\left(1-\frac{4}{b^2}\right)=1-\frac{9}{4b^2} \Rightarrow \frac{16}{9}-\frac{64}{9b^2}=1-\frac{9}{4b^2} \Rightarrow \frac{7}{9}=\frac{175}{36b^2}$

$b^2=\frac{25}{4} \therefore a^2=25 \therefore e=\sqrt{1-\frac{25/4}{25}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

Example-40. $2x^2+y^2-8x-2y+1=0$ উপবৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি? [GST'22-23]

(a) $(2,1)$ (b) $(-2,1)$ (c) $(1,2)$ (d) $(1,-2)$

Sol^n: (a); $2x^2+y^2-8x-2y+1=0 \Rightarrow 2(x^2-4x)+y^2-2y+1=0$

$\Rightarrow 2(x^2-2.x.2+2^2-2^2)+(y-1)^2=0 \Rightarrow 2\{(x-2)^2-4\}+(y-1)^2=0$

$\Rightarrow 2(x-2)^2-8+(y-1)^2=0 \Rightarrow 2(x-2)^2+(y-1)^2=8$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{8}=1 \therefore \frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{(2\sqrt{2})^2}=1 \Rightarrow \frac{X^2}{2^2}+\frac{Y^2}{(2\sqrt{2})^2}=0$

যেখানে, $X=x-2; Y=y-1$ কেন্দ্রের জন্য $X=0 \Rightarrow x-2=0 \therefore x=2$

এবং $Y=0 \Rightarrow y-1=0 \therefore y=1 \therefore$ কেন্দ্র $C(2,1)$

Shortcut: $\alpha=\frac{x \text{ এর সহগ}}{-2(x^2 \text{ এর সহগ})}=\frac{-8}{-2\times2}=\frac{-8}{-4}=2$ এবং $\beta=\frac{y \text{ এর সহগ}}{-2(y^2 \text{ এর সহগ})}=\frac{-2}{-2\times1}=\frac{-2}{-2}=1$ কেন্দ্র $(2,1)$ **(Ans.)**

Type-10: বিভিন্ন উপাদান থেকে সমীকরণ বের করতে হবে

Concept

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ বা $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$; [$(\alpha,\beta)$ উপবৃত্তের কেন্দ্র]

এর সাথে তুলনা করে বিভিন্ন উপাদান (a,b,α,β) নির্ণয় করে সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

Problems

Example-41. 'p' এর মান কত হলে $4x^2+py^2=16$ উপবৃত্তটি $(0,\pm4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে? [CU'16-17]

Sol^n: $4x^2+py^2=16$ উপবৃত্তটি $(0,\pm4)$ বিন্দুগামী হলে $4\times0+p(\pm4)^2=16 \therefore \boxed{p=1}$

Example-42. অক্ষ দুটিকে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্র অক্ষের অর্ধেক এবং যা (0, 1) বিন্দুগামী।

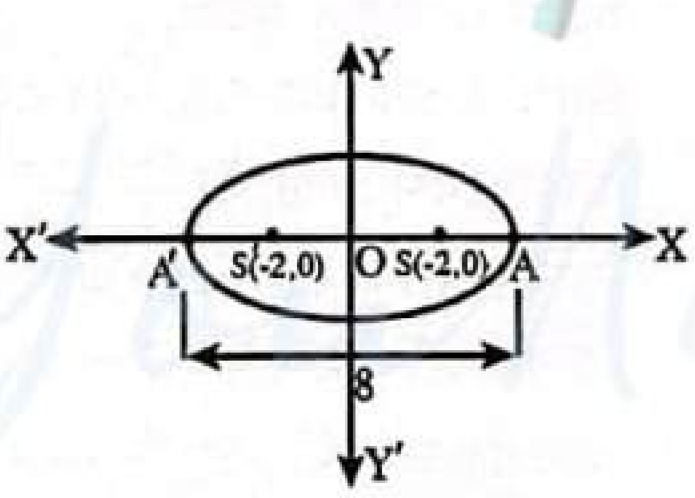
Sol^n: উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{2b^2}{a}=b \Rightarrow a=2b \cdots\cdots\cdots$ (i) আবার, উপবৃত্তটি (0, 1) বিন্দুগামী।

$\therefore 0+\frac{1}{b^2}=1 \therefore b^2=1 \therefore a^2=4 \therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ **(Ans.)**

Example-43. উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুটির স্থানাঙ্ক $(\pm2,0)$ ও বৃহদাক্ষ এর দৈর্ঘ্য 8 একক।

Sol^n: কেন্দ্র $\left(\frac{2-2}{2},\frac{0+0}{2}\right)\equiv(0,0) \therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$a=4,\ ae=2 \Rightarrow a^2e^2=4 \Rightarrow a^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=4$

$\Rightarrow b^2=12 \therefore \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ **(Ans.)**

Example-44. অক্ষ দুটি x-অক্ষ ও y-অক্ষ বিবেচনা করে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{2}{3}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক।

Solⁿ: উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$e=\frac{2}{3} \Rightarrow e^2=\frac{4}{9} \Rightarrow 1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{4}{9}$ ……… (i) ; $\frac{2b^2}{a}=5$ ……… (ii)

(i) ও (ii) নং থেকে পাই, $b^2=\frac{45}{4}$; $a^2=\frac{81}{4}$ $\therefore \frac{x^2}{\frac{81}{4}}+\frac{y^2}{\frac{45}{4}}=1 \Rightarrow 20x^2+36y^2=405$ **(Ans.)**

Example-45. একটি উপবৃত্তের অক্ষ দুটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুটির উপর অবস্থিত। উপবৃত্তটি $\frac{x}{9}+\frac{y}{4}=1$ রেখাকে x-অক্ষের উপর এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ রেখাকে y-অক্ষের উপর ছেদ করে। তার সমীকরণ বের কর।

Solⁿ: উপবৃত্তটি x-অক্ষকে (9, 0) বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে (0, 3) বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; (9, 0) বিন্দুগামী $\Rightarrow \frac{9^2}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1$; $a^2=9^2 \therefore a=9$

আবার, উপবৃত্তটি (0, 3) বিন্দুগামী $\Rightarrow \frac{0}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1$, $b=3$ ∴ নির্ণেয় সমীকরণ: $\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{3^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$ **(Ans.)**

Type-11: উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষের/শীর্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব সংক্রান্ত

Concept

[$a>b$ ধরে]

(i) উপকেন্দ্র ও অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{a}{e}-ae$

(ii) উপকেন্দ্র ও বিপরীত দিকাক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{a}{e}+ae$

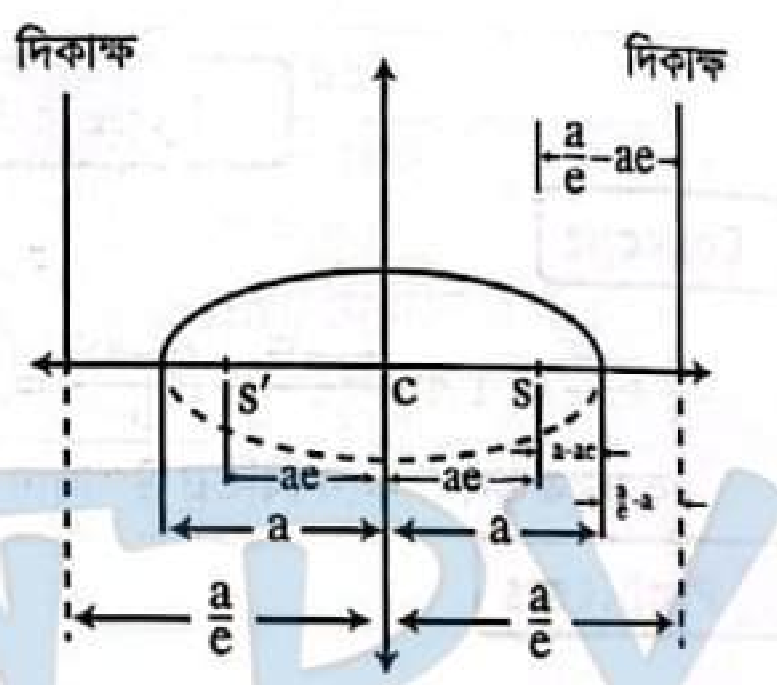
(iii) উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=2ae$

(iv) দিকাক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=2\frac{a}{e}$

(v) উপকেন্দ্র ও অনুরূপ শীর্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=a-ae$

(vi) উপকেন্দ্র ও বিপরীত শীর্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=a+ae$

(vii) $(a+ae)(a-ae)=b^2$



Problems

Example-46. সূর্যকে ফোকাসে রেখে পৃথিবী একটি উপবৃত্তাকার পথে ঘোরে যার বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 9×10^7 মাইল এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{50}$। সূর্য থেকে পৃথিবীর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন দূরত্ব কত?

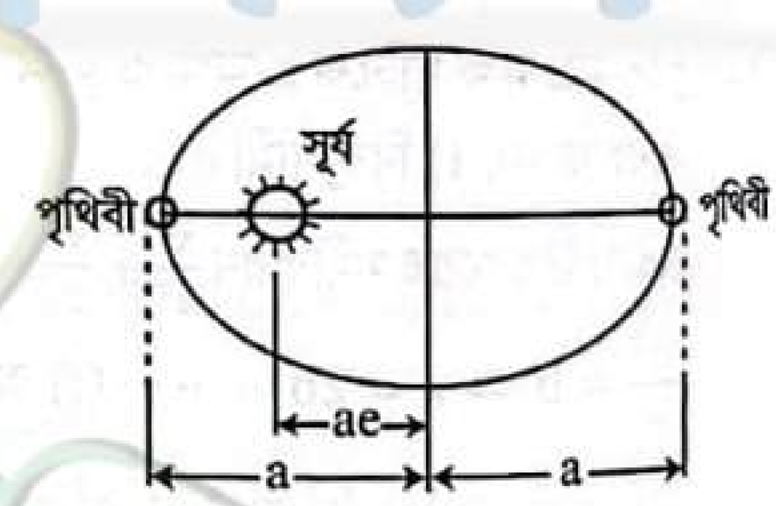
Solⁿ: এখানে, $a=\frac{9\times10^7}{2}=4.5\times10^7$ মাইল এবং $e=\frac{1}{50}$

সর্বোচ্চ দূরত্ব $=a+ae=a(1+e)$

$=4.5\times10^7\left(1+\frac{1}{50}\right)=4.59\times10^7$ মাইল **(Ans.)**

সর্বনিম্ন দূরত্ব $=a-ae=a(1-e)=4.5\times10^7\left(1-\frac{1}{50}\right)$

$=4.41\times10^7$ মাইল। **(Ans.)**



Example-47. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রদ্বয় (3, −1) এবং (1, −1). যেকোনো উপকেন্দ্র হতে শীর্ষদ্বয়ের দূরত্বগুলোর গুণফল 4 একক।

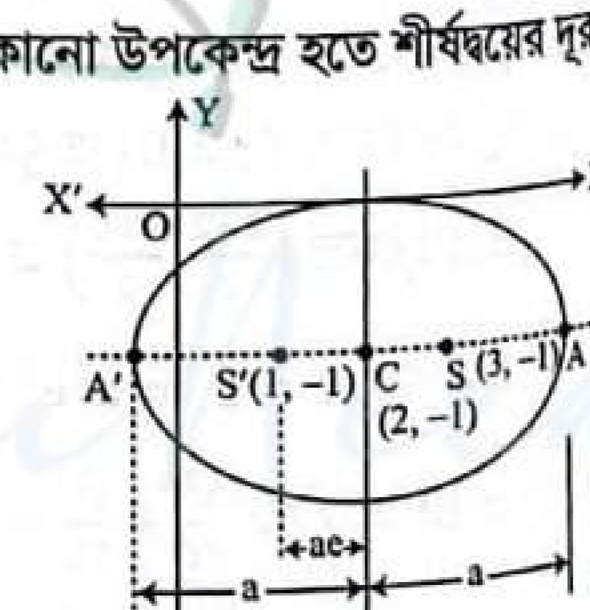
Solⁿ: উপকেন্দ্রদ্বয় $S(3,-1)$ এবং $S'(1,-1)$

এর মধ্যবিন্দু কেন্দ্র, $C\left(\frac{3+1}{2},\frac{-1-1}{2}\right)\equiv(2,-1)$

আবার, $CS=CS'=ae=1$; এখন, $(a-ae)(a+ae)=4=b^2$ $\therefore b=2$

আবার, $a^2-a^2e^2=4 \Rightarrow a^2-1^2=4 \therefore a=\sqrt{5}$

∴ উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$ **(Ans.)**



Example-48. কোন একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্র ও অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব 16 ইঞ্চি ও উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{5}$। উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য বের কর।

Sol^n: ধরি, উপকেন্দ্র S (ae, 0) অনুরূপ দিকাক্ষ $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$

$\left(\frac{a}{e} - ae\right) = 16 \Rightarrow \left\{a\left(\frac{1}{e} - e\right)\right\}^2 = 16^2 \Rightarrow a^2\left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right)^2 = 16^2 \Rightarrow a^2\left(\frac{16}{15}\right)^2 = 16^2 \Rightarrow a^2 = 15^2$

$\therefore$বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য, $2a = 30$ ইঞ্চি **(Ans.)**

এবং $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} \Rightarrow a^2e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2(1-e^2) \Rightarrow b^2 = 15^2\left(1 - \frac{3^2}{5^2}\right)$

$\therefore b = 15\sqrt{\frac{16}{25}} = 15.\frac{4}{5} = 12$ $\therefore$ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য, $2b = 24$ ইঞ্চি **(Ans.)**

Example-49. $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{14} = 1$ উপবৃত্তের নিয়ামক রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত একক? **[GST'22-23]**

(a) 7 (b) 14 (c) 15 (d) 30

Sol^n: (c); $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{14} = 1; a^2 = 30, b^2 = 14 \therefore e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{30-14}{30}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{30}} = \frac{4}{\sqrt{30}}$

$\therefore$ নিয়ামক রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2 \cdot \frac{a}{e} = 2 \cdot \frac{\sqrt{30}}{\frac{4}{\sqrt{30}}} = \frac{2}{4} \times 30 = 15$

০৬

Type-12: উপবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক সংক্রান্ত

Concept

কার্তেসীয় সমীকরণ	পরামিতিক সমীকরণ (ত্রিকোণমিতিক)	পরামিতিক সমীকরণ (বীজগাণিতিক)	ধরন
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, যেখানে, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{ay}{bx}\right)$	$x = a.\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = b.\frac{2t}{1+t^2}$	কেন্দ্র (0,0) এবং উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় বরাবর
$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	$x = \alpha + a\cos\theta$, $y = \beta + b\sin\theta$, যেখানে $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a(y-\beta)}{b(x-\alpha)}\right)$	$x = \alpha + a.\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \beta + b.\frac{2t}{1+t^2}$	কেন্দ্র (α, β) এবং উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল

Note: পরামিতিক সমীকরণ (ত্রিকোণমিতিক) থেকে কার্তেসীয় সমীকরণ পাওয়ার জন্য $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ কে এক পাশে রেখে প্রাপ্ত রাশিদ্বয়কে বর্গ করে যোগ করতে হবে।

Problems

Example-50. $25x^2 + 16y^2 = 400$ উপবৃত্তের (4, 0) ও $\left(\frac{16}{5}, -3\right)$ বিন্দুতে উপবৃত্তটির পরামিতিক স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Sol^n: $25x^2 + 16y^2 = 400 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$; $a = 4,\ b = 5$; (4, 0) বিন্দুতে পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(4\cos\theta, 5\sin\theta)$

যেখানে, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{ay}{bx}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{5\times4}\right) = 0$; $\left(\frac{16}{5}, -3\right)$ বিন্দুতে পরামিতিক স্থানাঙ্ক হবে $(4\cos\theta, 5\sin\theta)$

যেখানে, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{ay}{bx}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4\times(-3)}{5\times\frac{16}{5}}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{4}$ (প্রায়) [যেহেতু বিন্দুটি চতুর্থভাগে]

Example-51. $x = \alpha + a.\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $y = \beta + b.\frac{2t}{1+t^2}$ পরামিতিক সমীকরণ হলে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $x = \alpha + a.\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$; $y = \beta + b.\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ [ধরি, $t = \tan\theta$]

$\Rightarrow x - \alpha = a\cos 2\theta ; y - \beta = b\sin 2\theta \Rightarrow \frac{x-\alpha}{a} = \cos 2\theta ; \frac{y-\beta}{b} = \sin 2\theta$

$\therefore \boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1}$ ← উপবৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র (α, β); $a > b$ হলে বৃহৎ অক্ষ x অক্ষের এবং $a < b$ হলে বৃহৎ অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল।

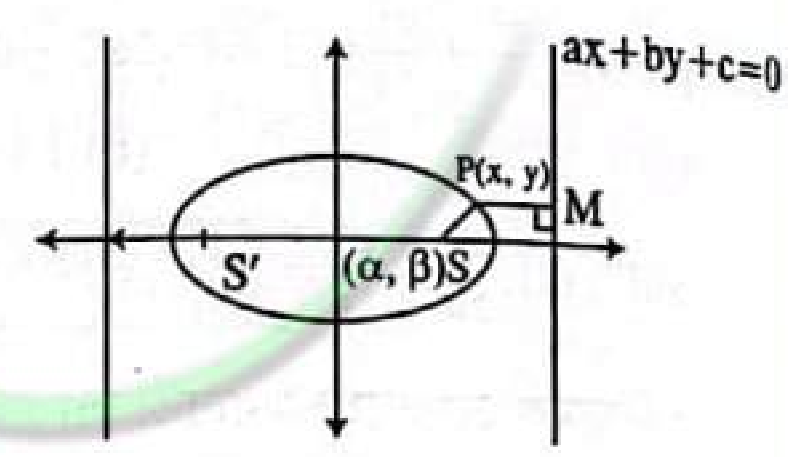
Type-13: SP = e. MP সম্পর্কিত

Concept

কোন উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(\alpha, \beta)$, নিয়ামকের সমীকরণ $ax + by + c = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $e[0 < e < 1]$ হলে তার সমীকরণ, $SP = e.MP$

$\Rightarrow SP^2 = e^2.MP^2$

$\Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2.\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$



Problems

Example-52. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(1, -1)$, দিকাক্ষের সমীকরণ $x - y + 2 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$। **[CU'18-19]**

Sol^n: $SP = e.PM \Rightarrow SP^2 = e^2.PM^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{x-y+2}{\sqrt{2}}\right|^2$

$\Rightarrow 4(x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1) = x^2 + y^2 + 4 - 2xy - 4y + 4x$

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x + 12y + 4 = 0$ **(Ans.)**

Type-14: SP + S'P = বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য

Concept

$SP + S'P =$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য

বৃহৎ অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল হলে: $SP + S'P = 2a$

বৃহৎ অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল হলে: $SP + S'P = 2b$

$S =$ ১ম উপকেন্দ্র

$S' =$ ২য় উপকেন্দ্র

$P =$ উপবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু।

$2a =$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য (বৃহৎ অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল হলে)

$2b =$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য (বৃহৎ অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল হলে)

Problems

Example-53. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুটি $(0,4)$ ও $(0,-4)$ এবং $(3,0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

Sol^n: উপকেন্দ্রদ্বয়ের ভুজ 0 বলে অক্ষ y বরাবর।

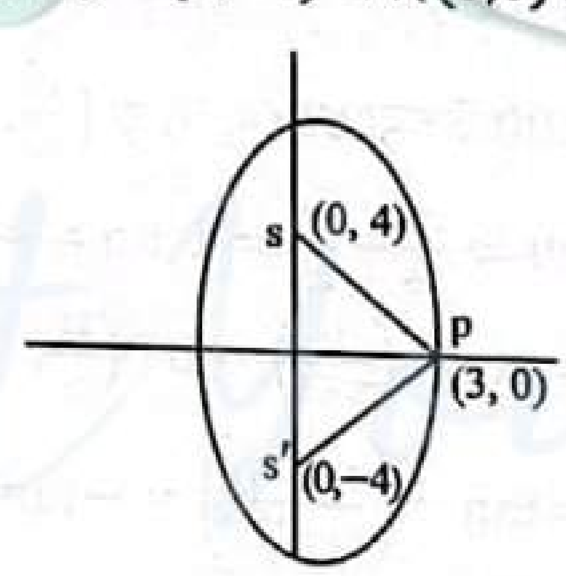
এখানে, $SP + S'P = 2b$

$\Rightarrow \sqrt{3^2+4^2} + \sqrt{3^2+4^2} = 2b$

$\Rightarrow \sqrt{25} + \sqrt{25} = 2b \Rightarrow 5 = b$

আবার, $(3,0)$ বিন্দুগামী বলে, $\frac{9}{a^2} = 1 = a^2 = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ **(Ans.)**



Example-54. যে উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $(-1,-1), (1,1)$ এবং বৃহৎ অক্ষের পরিমাণ $2\sqrt{3}$.তার সমীকরণটি নির্ণয় কর।

Solⁿ: মনে করি $P(x,y)$ উপবৃত্তের উপরে অবস্থিত একটি বিন্দু। $S \equiv (-1,-1), S'(1,1)$ & $2a = 2\sqrt{3}$

আমরা জানি, $SP + S'P = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} = 2\sqrt{3} - \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

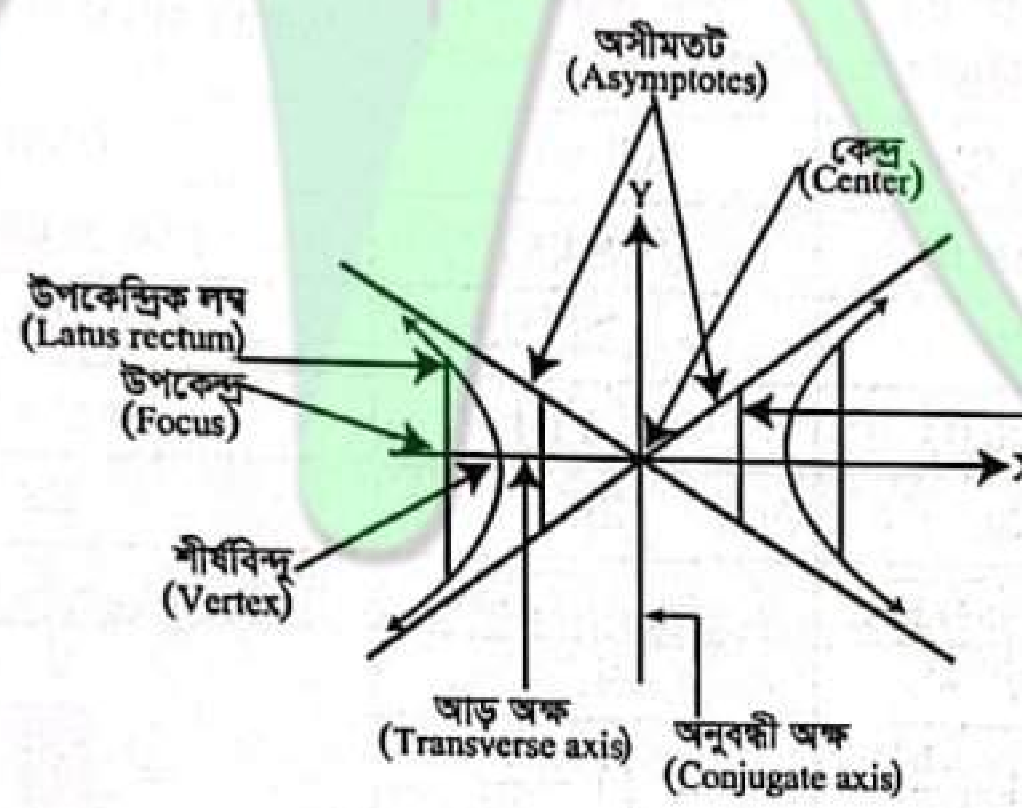
$\Rightarrow x^2+y^2+2x+2y+2 = 12+x^2+y^2-2x-2y+2-4\sqrt{3}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow 4(x+y-3) = -4\sqrt{3}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Rightarrow x^2+y^2+9+2xy-6x-6y = 3(x^2+y^2-2x-2y+2)$

$\Rightarrow 2x^2+2y^2-2xy-3=0$ ইহাই নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ. **(Ans.)**

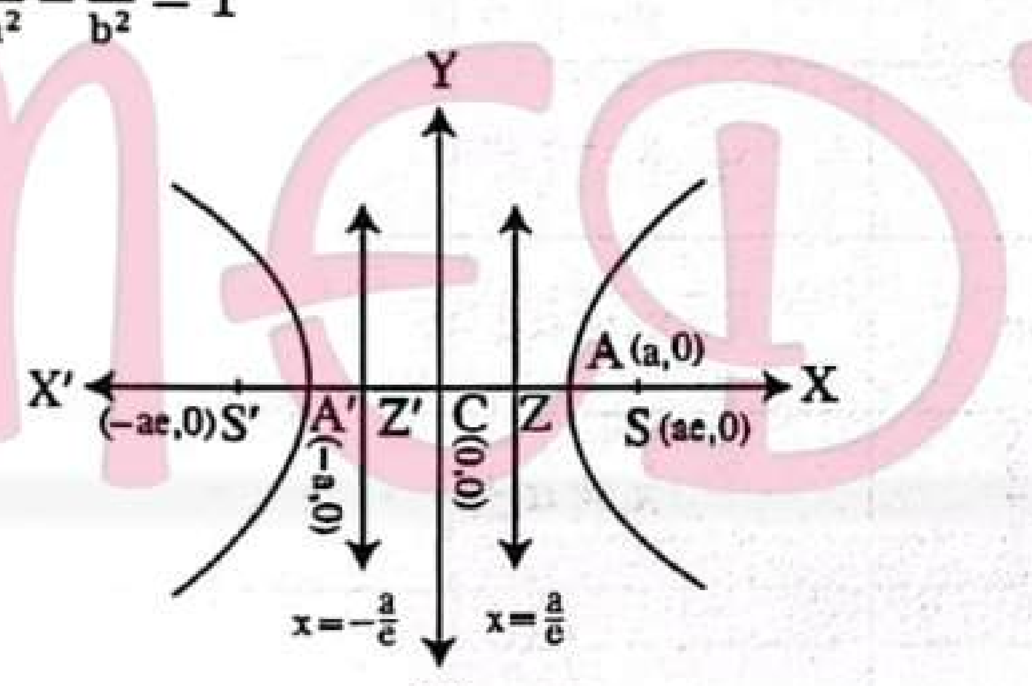
অধিবৃত্ত

- চিত্র হতে বিভিন্ন উপাদান শনাক্তকরণ

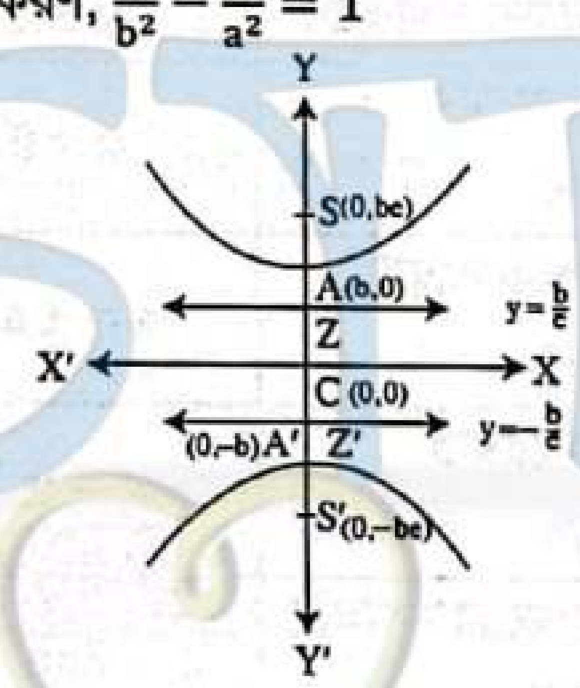


- অধিবৃত্তের বিভিন্ন আদর্শ আকৃতির চিত্র:

(1) x অক্ষ আড় অক্ষ এবং কেন্দ্র মূলবিন্দু (0, 0) হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

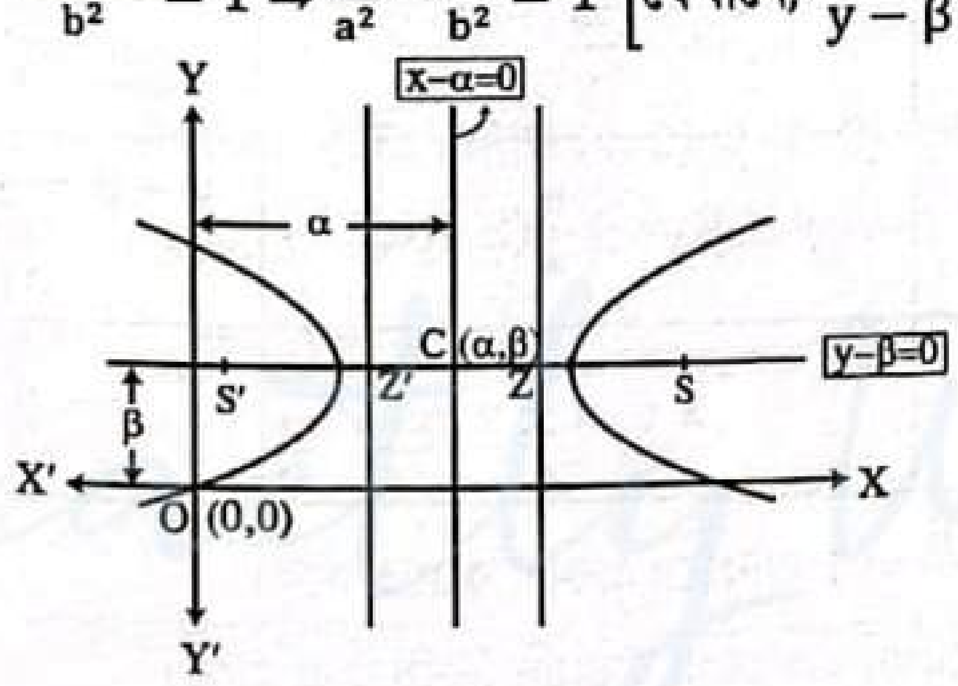


(2) y অক্ষ আড় অক্ষ এবং কেন্দ্র মূলবিন্দু (0, 0) হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$



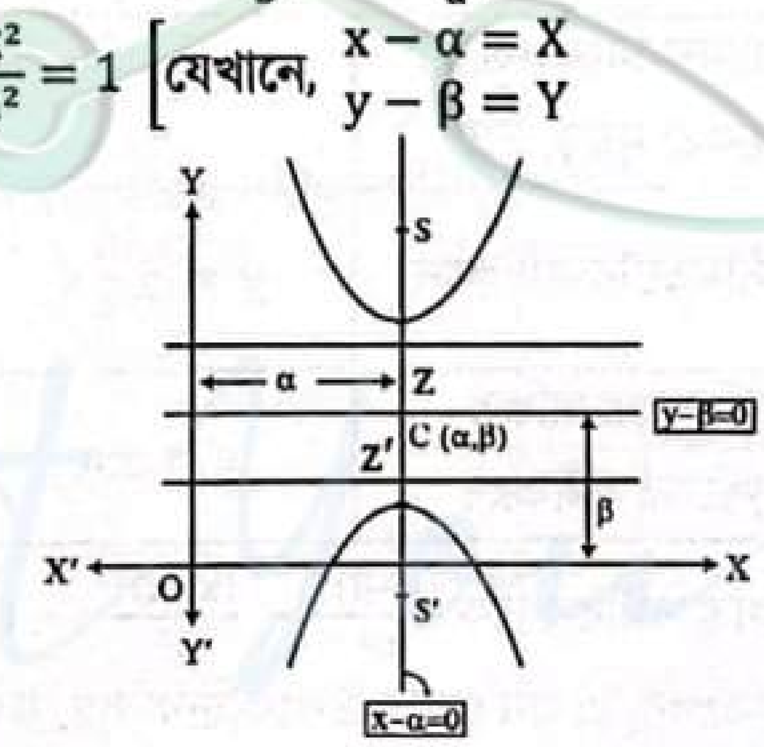
(3) আড় অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল এবং কেন্দ্র (α,β) হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ $\Big[$যেখানে, $x-\alpha=X$, $y-\beta=Y$



(4) আড় অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল এবং কেন্দ্র (α,β) হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1$

$\Rightarrow \frac{Y^2}{b^2}-\frac{X^2}{a^2}=1$ $\Big[$যেখানে, $x-\alpha=X$, $y-\beta=Y$



Type-15: সমীকরণ থেকে বিভিন্ন উপাদান বের করা

Concept

(i)	আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1$
(ii)	পরামিতিক সমীকরণ	$x=a\sec\theta$, $y=b\tan\theta$	$x=a\tan\theta$, $y=b\sec\theta$	$x=\alpha+a\sec\theta$, $y=\beta+b\tan\theta$	$x=\alpha+a\tan\theta$, $y=\beta+b\sec\theta$
(iii)	পোলার স্থানাঙ্কে সমীকরণ	$r^2(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)=a^2b^2$	$r^2(a^2\sin^2\theta-b^2\cos^2\theta)=a^2b^2$	$b^2(r\cos\theta-\alpha)^2-a^2(r\sin\theta-\beta)^2=a^2b^2$	$a^2(r\sin\theta-\beta)^2-b^2(r\cos\theta-\alpha)^2=a^2b^2$
(iv)	কেন্দ্র, C	$(0,0)$	$(0,0)$	(α,β)	(α,β)
(v)	উপকেন্দ্র, S	$(\pm ae,0)$	$(0,\pm be)$	$(\alpha\pm ae,\beta)$	$(\alpha,\beta\pm be)$
(vi)	অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য	2b	2a	2b	2a
(vii)	শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm,a,0)$	$(0,\pm b)$	$(\alpha\pm a,\beta)$	$(\alpha,\beta\pm b)$
(viii)	আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য	2a	2b	2a	2b
(ix)	উৎকেন্দ্রিকতা, e	$e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$	$e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$
(x)	উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
(xi)	আড় অক্ষের সমীকরণ	$y=0$	$x=0$	$y-\beta=0$	$x-\alpha=0$
(xii)	অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ	$x=0$	$y=0$	$x-\alpha=0$	$y-\beta=0$
(xiii)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=\pm be$	$x=\alpha\pm ae$	$y=\beta\pm be$
(xiv)	নিয়ামক রেখার সমীকরণ	$x=\pm\frac{a}{e}$	$y=\pm\frac{b}{e}$	$x=\alpha\pm\frac{a}{e}$	$y=\beta\pm\frac{b}{e}$
(xv)	উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, SS′	2ae	2be	2ae	2be
(xvi)	উপকেন্দ্র ও অনুরূপ নিয়ামকের মধ্যবর্তী দূরত্ব	$ae-\frac{a}{e}$	$be-\frac{b}{e}$	$ae-\frac{a}{e}$	$be-\frac{b}{e}$
(xvii)	নিয়ামক/দিকাক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, ZZ'	$\frac{2a}{e}$	$\frac{2b}{e}$	$\frac{2a}{e}$	$\frac{2b}{e}$
(xviii)	অসীমতটের সমীকরণ	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y-\beta=\pm\frac{b}{a}(x-\alpha)$	$y-\beta=\pm\frac{b}{a}(x-\alpha)$
(xix)	শীর্ষবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ	$x=\pm a$	$y=\pm b$	$x=\alpha\pm a$	$y=\beta\pm b$

➢ প্রদত্ত সমীকরণকে $\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1$ অথবা $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।
অতঃপর, এখান থেকে উপকেন্দ্রিক লম্ব, উপকেন্দ্র, শীর্ষ, নিয়ামকরেখা, অক্ষরেখা ইত্যাদি নির্ণয় করা যাবে।

Problems

Example-55. $x^2 - 3y^2 - 2x = 8$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুদ্বয়-

[DU' 21-22]

Sol^n: $x^2 - 3y^2 - 2x = 8 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 3y^2 = 9 \Rightarrow (x-1)^2 - 3y^2 = 9 \Rightarrow (x-1)^2 - 3y^2 = 9$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{3^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{3^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$ তাহলে, $a = 3, b = \sqrt{3}$

শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের জন্য, $X = \pm a \Rightarrow x - 1 = \pm 3 \therefore x = 4, -2$ এবং $Y = 0 \therefore y = 0 \therefore$ শীর্ষবিন্দুদ্বয় $A(4,0), A'(-2,0)$

Example-56. $2x^2 - 8y^2 = 2$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতার মান কত?

[DU'18-19]

Sol^n: $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 ; e = \sqrt{1 + \frac{\frac{1}{4}}{1}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ **(Ans.)**

Example-57. $9y^2 - 16x^2 - 54y - 64x - 127 = 0$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[KU' 14-15]

Sol^n: $9(y^2 - 6y + 9) - 16(x^2 + 4x + 4) = 127 + 81 - 64$

$\Rightarrow 9(y-3)^2 - 16(x+2)^2 = 144 \Rightarrow \frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}$; [$\because$ এর সহগ ঋণাত্মক (–ve)]

$= \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \frac{5}{4} \therefore X = x + 2,\ Y = y - 3 \therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক: $Y = \pm be,\ X = 0$

$\Rightarrow y - 3 = \pm 4.\frac{5}{4}$ | $x + 2 = 0$

$\Rightarrow y = 3 \pm 5$ | $x = -2$

$\Rightarrow y = 8, -2$

$\therefore S \equiv (-2, 8), (-2, -2) \therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = 2.\frac{9}{4} = \frac{9}{2}$ **(Ans.)**

Example-58. $4y^2 - 5x^2 = 20$ অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ কোনটি?

[RU'22-23]

(a) $3x = \pm 5$ (b) $3x = \pm\frac{1}{5}$ (c) $3y = \pm\frac{1}{5}$ (d) $3y = \pm 5$

Sol^n: (d); $4y^2 - 5x^2 = 20 \Rightarrow \frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1 \therefore e = \sqrt{1 + \frac{4}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ, $y = \pm\frac{b}{e} = \pm\frac{\sqrt{5}}{\frac{3}{\sqrt{5}}} = \pm\frac{5}{3} \Rightarrow 3y = \pm 5$

Type-16: বিভিন্ন উপাদান থেকে সমীকরণ বের কর

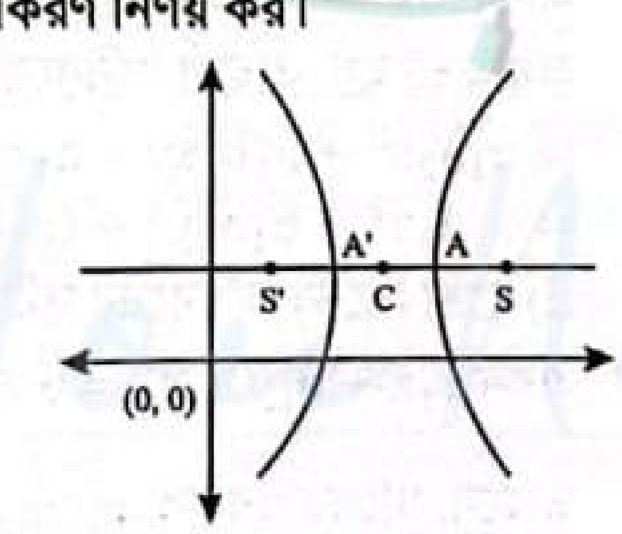
Concept

এখানে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ বা $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ বা অনুরূপ অক্ষ স্থানান্তরকৃত সমীকরণের সাথে তুলনা করে বিভিন্ন উপাদান বের করতে হবে। অতঃপর, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

Problems

Example-59. উপকেন্দ্র দুটির স্থানাঙ্ক (4, 2) ও (8, 2) এবং উৎকেন্দ্রিকতা 2 হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $2CS = SS' \Rightarrow 2CS = 4 \therefore CS = 2.$



আবার, $CA = \frac{CS}{e} \Rightarrow CA = a = 1$

C এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{8+4}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (6, 2)$

$b^2 = a^2(e^2 - 1) = 1^2(2^2 - 1) = 3$

$\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ, $(x-6)^2 - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$ **(Ans.)**

০৬

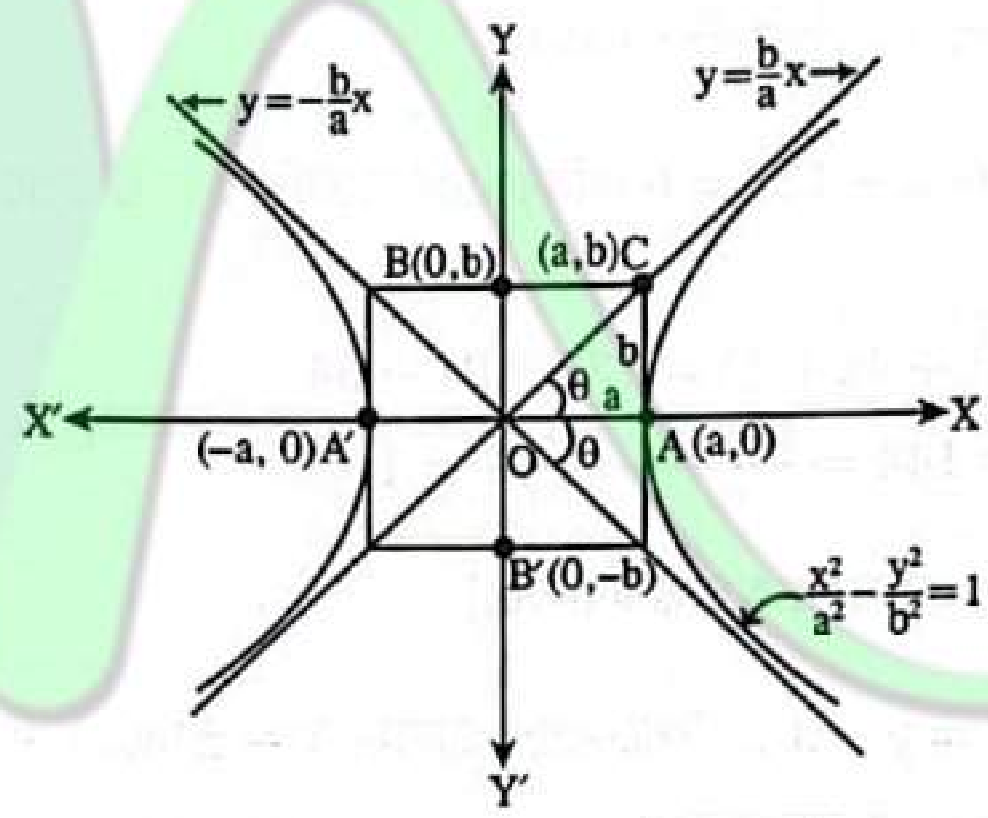
Example-60. একটি অধিবৃত্তের অক্ষ দুটি স্থানাঙ্ক অক্ষ দুটির উপর অবস্থিত। আড় অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 6 ও 8 হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: আড় অক্ষ x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

আড় অক্ষ y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{4^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ **(Ans.)**

Type-17: অধিবৃত্তের অসীমতট সম্পর্কিত

Concept



(i) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ বা $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ $\boxed{y=\pm\frac{b}{a}x}$ [অধিবৃত্তের সমীকরণে 1 এর পরিবর্তে 0 বসালে অসীমতটের সমীকরণ পাওয়া যায়।]

(ii) অসীমতটের সমীকরণ থেকে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়ের সূত্র:

$\boxed{\text{১ম অসীমতটের সমীকরণ} \times \text{২য় অসীমতটের সমীকরণ} + \lambda = 0}$ [λ একটি ধ্রুবক]

(iii) $y=\pm\frac{b}{a}x$; (a, b) বিন্দুগামী

$\therefore \tan\theta=\frac{b}{a} \therefore \theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$\therefore$ অসীমতটদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $=2\theta=2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

(iv) কোন অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ হলে উক্ত অধিবৃত্তকে আয়তাকার অধিবৃত্ত বলে।

সেক্ষেত্রে, $2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan^{-1}\frac{b}{a}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{b}{a}=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\therefore \boxed{a=b}$ ← আয়তাকার অধিবৃত্তের আড় অক্ষের এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য সমান

এখন উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2}}\,[\because a=b]=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\boxed{e=\sqrt{2}}$ ∴ আয়তাকার অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$

যেমন, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow x^2-y^2=4$ একটি আয়তাকার অধিবৃত্ত $[\because a=b=2]$

অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয়ের ঢালের গুণফল নির্ণয়: $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ যদি একটি অধিবৃত্তের দুইটি অসীমতট হয়, তাহলে অধিবৃত্তের সমীকরণ, $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)+\lambda=0$ [λ একটি ধ্রুবক]

$\Rightarrow a_1a_2x^2+a_1b_2xy+a_1c_2x+a_2b_1xy+b_1b_2y^2+b_1c_2y+a_2c_1x+b_2c_1y+c_1c_2+\lambda=0$

$\Rightarrow a_1a_2x^2+b_1b_2y^2+(a_1b_2+a_2b_1)xy+(a_1c_2+a_2c_1)x+(b_1c_2+b_2c_1)y+(c_1c_2+\lambda)=0 \ldots\ldots\ldots (i)$

(i) হলো নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ।

এখন $a_1x+b_1y+c_1=0$ এর ঢাল, $m_1=-\frac{a_1}{b_1}$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ এর ঢাল, $m_2=-\frac{a_2}{b_2}$

তাহলে, ঢালের গুণফল, $m_1m_2=\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)=\frac{a_1a_2}{b_1b_2}=\frac{\text{অধিবৃত্তের } x^2 \text{ এর সহগ}}{\text{অধিবৃত্তের } y^2 \text{ এর সহগ}}$

Problems

Example-61. অধিবৃত্তের শীর্ষ বিন্দু দুটি $(0, \pm 3)$ অসীমতটের সমীকরণ $y = \pm x$ হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: শীর্ষ দুটি y অক্ষের উপর অবস্থিত। অতএব সমীকরণ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$; $(0, \pm b) = (0, \pm 3) \Rightarrow b = 3$

আবার, $\pm\frac{b}{a} = \pm 1 \Rightarrow \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = 3 \quad \therefore \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1$ **(Ans.)**

Example-62. একটি অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয়ের সমীকরণ, $y = \frac{b}{a}x$ এবং $y = \frac{-b}{a}x$ এবং ইহা $(a, 0)$ বিন্দুগামী। অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: অসীমতটের সমীকরণদ্বয় $bx - ay = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$; $bx + ay = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

অধিবৃত্তের সমীকরণ: (১ম অসীমতট) × (২য় অসীমতট) $+\lambda = 0$

$\Rightarrow (bx - ay)(bx + ay) + \lambda = 0. \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{\lambda}{a^2b^2} = 0 \ldots\ldots\ldots (iii)$

অধিবৃত্তটি $(a, 0)$ বিন্দুগামী $\frac{a^2}{a^2} + \frac{\lambda}{a^2b^2} = 0 \Rightarrow \lambda = -a^2b^2$; (iii) নং λ এর মান বসাই, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Example-63. $25x^2 - 16y^2 = 400$ অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

Sol^n: অসীমতটের সমীকরণ, $25x^2 - 16y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{5}{4}x$

$\therefore$ অন্তর্ভুক্ত কোণ, $\tan\theta = \left|\frac{\frac{5}{4}+\frac{5}{4}}{1+\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{-5}{4}\right)}\right| \Rightarrow \tan\theta = \left|\frac{40}{-9}\right| \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{40}{9}\right)$ **(Ans.)**

বিকল্প পদ্ধতি: অসীমতটদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ, $\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = 2\tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$

$= \tan^{-1}\left|\frac{2\times\frac{5}{4}}{1-\left(\frac{5}{4}\right)^2}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{10}{4}}{-\frac{9}{16}}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{40}{9}\right| = \tan^{-1}\left(\frac{40}{9}\right)$ **(Ans.)**

Example-64. $4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y - 41 = 0$ কনিকের অসীমতটদ্বয়ের ঢালের গুণফল কত? **[RU'20-21]**

Sol^n: $4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y = 41 \Rightarrow 4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 - 2y + 1) = 41 - 5$

$\Rightarrow 4(x-1)^2 - 9(y-1)^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$; অসীমতটদ্বয়, $\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 0 \therefore \frac{x-1}{3} = \pm\left(\frac{y-1}{2}\right)$

$+$ নিয়ে, $2x - 2 = 3y - 3 \therefore$ ঢাল $= \frac{2}{3}$; $-$ নিয়ে, $2x - 2 = -3y + 3 \therefore$ ঢাল $= -\frac{2}{3} \therefore$ ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -\frac{4}{9}$

বিকল্প: অধিবৃত্তের সমীকরণের x^2 এর সহগ $= 4$ এবং y^2 এর সহগ $= -9$

$\therefore$ অসীমতটদ্বয়ের ঢালের গুণফল $= \frac{x^2 \text{ এর সহগ}}{y^2 \text{ এর সহগ}} = \frac{4}{-9} = -\frac{4}{9}$ **(Ans.)**

Example-65. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ কোনটি? **[RU'22-23]**

(a) $y = \pm x$ (b) $y = \pm ax$ (c) $y = \pm\frac{a}{b}x$ (d) $y = \pm\frac{b}{a}x$

Sol^n: (d); $y = \pm\frac{b}{a}x$

Type-18: অধিবৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ সংক্রান্ত

Concept

কার্তেসীয় সমীকরণ	পরামিতিক সমীকরণ (ত্রিকোণমিতিক)	পরামিতিক সমীকরণ (বীজগাণিতিক)	ধরন
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$ $\left[\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)\right]$	$x = a.\frac{1+t^2}{1-t^2}, y = b.\frac{2t}{1-t^2}$	কেন্দ্র $(0,0)$ আড় অক্ষ x অক্ষের উপর অবস্থিত
$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$	$x = a\tan\theta,\ y = b\sec\theta$ $\left[\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$	$x = a.\frac{2t}{1-t^2}, y = b.\frac{1+t^2}{1-t^2}$	কেন্দ্র $(0,0)$ আড় অক্ষ y অক্ষের উপর অবস্থিত
$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	$x = \alpha + a\sec\theta, y = \beta + b\tan\theta$ $\left[\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y-\beta}{b}\right)\right]$	$x = \alpha + a.\frac{1+t^2}{1-t^2}, y = \beta + b.\frac{2t}{1-t^2}$	কেন্দ্র (α,β) আড় অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল
$\frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$	$x = \alpha + a\tan\theta, y = \beta + b\sec\theta$ $\left[\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)\right]$	$x = \alpha + a.\frac{2t}{1-t^2}, y = \beta + b.\frac{1+t^2}{1-t^2}$	কেন্দ্র (α,β) আড় অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল

Problems

Example-66. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ অধিবৃত্তের উপরস্থ $(3,0)$ ও $\left(-5,-\frac{8}{3}\right)$ বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Sol^n: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ এখানে, $a=3,\ b=2$

$(3,0)$ বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(3\sec\theta,\ 2\tan\theta)$ যেখানে, $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{0}{2}\right)=0°$

$\left(-5,-\frac{8}{3}\right)$ বিন্দুর (তৃতীয় চতুর্ভাগে) পরামিতিক স্থানাঙ্ক, $(3\sec\theta,\ 2\tan\theta)$

যেখানে, $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-\frac{8}{3}}{2}\right)=-\pi+\tan^{-1}\left|-\frac{4}{3}\right|$ **(Ans.)**

Example-67. $x=t+\frac{1}{t}, y=t-\frac{1}{t}$ পরামিতিক সমীকরণ হলে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $x^2-y^2=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=4.t.\frac{1}{t}\Rightarrow x^2-y^2=4$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1} \leftarrow e=\sqrt{1+\frac{4}{4}}=\sqrt{2}$; আয়তাকার অধিবৃত্ত যার কেন্দ্র $(0,0)$, আড় অক্ষ x অক্ষ

Example-68. $x=\alpha+a\frac{1+t^2}{1-t^2}; y=\beta+b\frac{2t}{1-t^2}$ পরামিতিক সমীকরণ হলে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n:

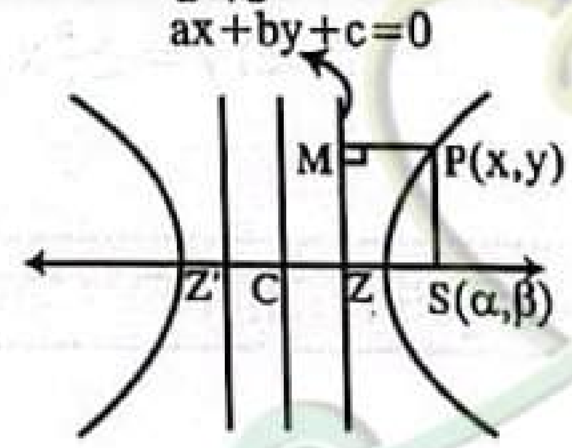
$x=\alpha+a\frac{1+t^2}{1-t^2}$ $\Rightarrow x-\alpha=a.\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}\Rightarrow\frac{x-\alpha}{a}=\sec2\theta$	$y=\beta+b\frac{2t}{1-t^2}$ $\Rightarrow y-\beta=b.\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\Rightarrow\frac{y-\beta}{b}=\tan2\theta$	ধরি, $t=\tan\theta$

$\therefore \boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1} \leftarrow$ অধিবৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র (α,β) এবং আড় অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল

Type-19: SP = e.PM

Concept

উপবৃত্তের মতো এখানেও উৎকেন্দ্রিকতা e, উপকেন্দ্র $S(\alpha,\beta)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $ax+by+c=0$ হলে,
অধিবৃত্তের সমীকরণ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2.\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ $[e>1]$



Problems

Example-69. একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$, একটি উপকেন্দ্র $(2,3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং $x+2y=1$ অনুরূপ নিয়ামক রেখা।

Sol^n: $(x-2)^2+(y-3)^2=e^2\frac{(x+2y-1)^2}{(1^2+2^2)}\Rightarrow 5(x^2-4x+4+y^2-6y+9)=\left(\sqrt{3}\right)^2(x^2+4y^2+1+4xy-4y-2x)$

$\Rightarrow 5x^2+5y^2-3x^2-12y^2-12xy-20x-30y+6x+12y+65-3=0$

$\Rightarrow 2x^2-7y^2-12xy-14x-18y+62=0$ **(Ans.)**

কিছু সাধারণ Type এর Math আছে যেগুলো পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত সবার জন্য একই পদ্ধতিতে করতে হয়। সেগুলোকে পরবর্তী Type থেকে পর পর দেওয়া হলো।

Type-20: স্পর্শক/ছেদক সম্পর্কিত

◆ **Case-01: কনিকের উপরস্থ কোন একটি বিন্দুতে স্পর্শক:**

Concept

$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ কনিকের উপরস্থ যেকোন একটি বিন্দু (x_1, y_1) হলে, (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক নির্ণয়ের জন্য,

x^2 এর পরিবর্তে $\rightarrow xx_1$ | x এর পরিবর্তে $\rightarrow \frac{x+x_1}{2}$ | xy এর পরিবর্তে $\rightarrow \frac{xy_1+yx_1}{2}$

y^2 এর পরিবর্তে $\rightarrow yy_1$ | y এর পরিবর্তে $\rightarrow \frac{y+y_1}{2}$

Note: x^3 থাকলে x^3 এর পরিবর্তে xx_1^2

y^3 থাকলে y^3 এর পরিবর্তে yy_1^2 ইত্যাদি বসাতে হয়।

$\therefore ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ এর উপরস্থ (x_1, y_1)

বিন্দুতে কনিকটির স্পর্শকের সমীকরণ, $axx_1 + byy_1 + 2h.\frac{xy_1+yx_1}{2} + 2g\frac{x+x_1}{2} + 2f\frac{y+y_1}{2} + c = 0$

$\therefore \boxed{axx_1 + byy_1 + h(xy_1 + yx_1) + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0}$

Problems

Example-70: $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের $(1, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $y.2 = 2(x+1) \Rightarrow y = x + 1$ **(Ans.)**

Example-71 : $y^2 - 5x + 6 - 3x^2 + 5y = 0$ কনিকের (a, b) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $y.b - 5\left(\frac{x+a}{2}\right) + 6 - 3x.a + 5\left(\frac{y+b}{2}\right) = 0 \Rightarrow by - \frac{5x}{2} - \frac{5a}{2} + 6 - 3ax + \frac{5y}{2} + \frac{5b}{2} = 0$

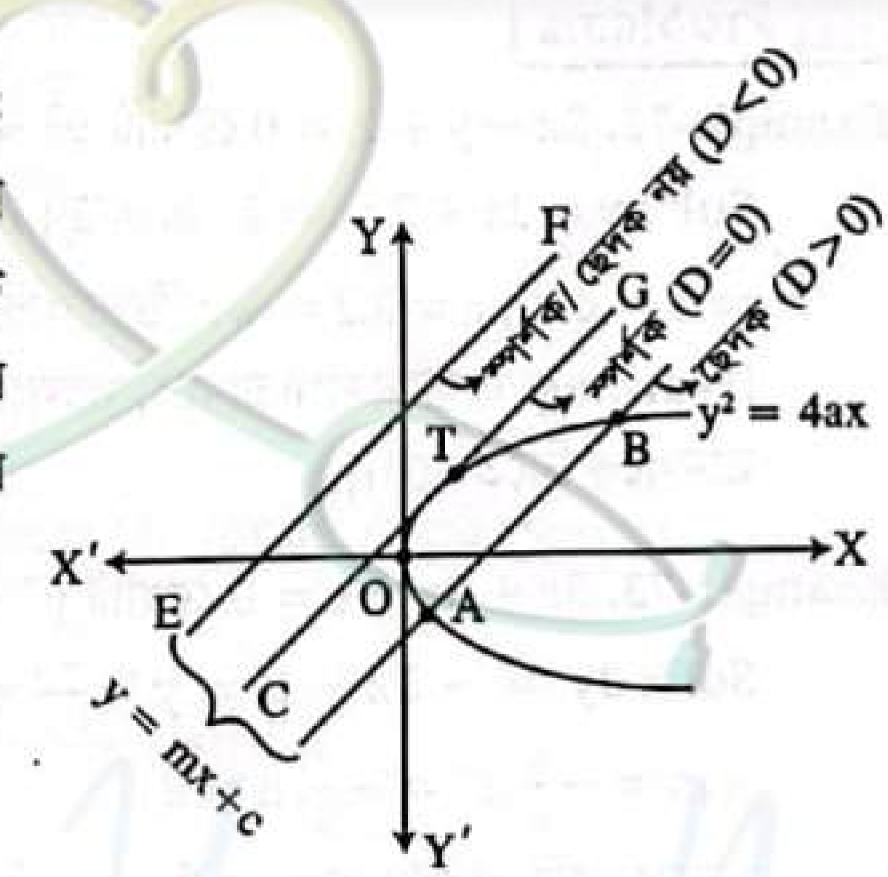
$\Rightarrow y\left(b + \frac{5}{2}\right) - x\left(3a + \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2}(b - a) + 6 = 0$ **(Ans.)**

◆ **Case-02: $y = mx + c$ কোন কনিকের স্পর্শক/ছেদক হলে:**

Concept

মনে করি,

$y^2 = 4ax$ একটি পরাবৃত্ত। $y = mx + c$ সরলরেখাটি পরাবৃত্তকে প্রথমে A এবং B 2 টি বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাই AB রেখাটি পরাবৃত্তটির ছেদক। এখন সরলরেখাটিকে সরিয়ে CG অবস্থানে নিয়ে আসা হলো। এক্ষেত্রে সরলরেখাটি পরাবৃত্তটিকে একটি বিন্দুতে (T) স্পর্শ করে। তাহলে, CG রেখাটি পরাবৃত্তের স্পর্শক। এর চেয়েও সরলরেখাটি সরালে (EF অবস্থানে আনলে) সরলরেখাটি আর পরাবৃত্তটিকে স্পর্শ/ ছেদ করে না।



এখন,

পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 4ax$

সরলরেখার সমীকরণ, $y = mx + c$

সমাধান করে পাই, $(mx + c)^2 = 4ax \Rightarrow m^2x^2 + 2mcx + c^2 = 4ax$

$\Rightarrow m^2x^2 + (2mc - 4a)x + c^2 = 0$ ……… (i)

সমীকরণ (i) হলো x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার 2 টি মূল থাকবে।

এখন সরলরেখাটি,

(i) পরাবৃত্তের ছেদক হলে মূলদ্বয় হবে বাস্তব ও অসমান $[D > 0]$

(ii) পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে মূলদ্বয় হবে বাস্তব ও সমান $[D = 0]$ [অর্থাৎ আসলে 2 টি মূলই একই হয়ে যাবে]

(iii) পরাবৃত্তের ছেদক/ স্পর্শক না হলে মূলদ্বয় হবে অবাস্তব (জটিল) $[D < 0]$

এখন, নিশ্চায়ক, $D = (2mc - 4a)^2 - 4.m^2c^2 = 4m^2c^2 - 16amc + 16a^2 - 4m^2c^2 = 16a^2 - 16amc$ $\boxed{D = 16a(a - mc)}$

আবার,

(i) সরলরেখাটি ছেদক হলে, $D > 0 \Rightarrow 16a(a - mc) > 0 \Rightarrow a(a - mc) > 0$

এখন, $\boxed{a > 0}$ হলে, $a - mc > 0 \Rightarrow a > mc \therefore \boxed{c < \frac{a}{m}}; [m \neq 0]$

$\boxed{a < 0}$ হলে, $a - mc < 0 \Rightarrow a < mc \therefore \boxed{c > \frac{a}{m}} [m \neq 0]$

(ii) সরলরেখাটি স্পর্শক হলে, $D = 0 \Rightarrow 16a(a - mc) = 0 \Rightarrow a - mc = 0 [\because a \neq 0] \Rightarrow a = mc \therefore \boxed{c = \frac{a}{m}} [m \neq 0]$

(iii) সরলরেখাটি ছেদক/ স্পর্শক না হলে, $D < 0$

অর্থাৎ, $16a(a - mc) < 0 \Rightarrow a(a - mc) < 0$; এখন, $\boxed{a > 0}$ হলে, $a - mc < 0 \Rightarrow \boxed{c > \frac{a}{m}}$ $[m \neq 0]$

$\boxed{a < 0}$ হলে, $a - mc > 0 \Rightarrow \boxed{c < \frac{a}{m}}$ $[m \neq 0]$

নোট: নিচের ছকটি MCQ এর জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ:

বক্ররেখার সমীকরণ	$y = mx + c$ আকারের বক্ররেখা	
	স্পর্শক হলে $[D = 0]$	স্পর্শক বিন্দু
(i) $y^2 = 4ax$	$c = \frac{a}{m} [m \neq 0]$	$\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$
(ii) $x^2 = 4ay$	$c = -am^2$	$\left(\frac{2a}{m}, \frac{a}{m^2}\right)$
(iii) $x^2 + y^2 = r^2$	$c^2 = r^2(m^2 + 1)$ $\therefore c = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$	$\left(\frac{-cm}{1+m^2}, \frac{c}{1+m^2}\right)$
(iv) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 = b^2 + a^2m^2$	$\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$
(v) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2m^2 - b^2$	$\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{-b^2}{c}\right)$
(vi) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$	$c^2 = b^2 - a^2m^2$	$\left(\frac{a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$

Problems

Example-72. $2x - y + 2 = 0$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে তার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Sol^n: $y = 2x + 2$; $c = 2$, $m = 2$; $c = \frac{a}{m}$

$\Rightarrow a = cm$; $a = 2.2 = 4$ $\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4|4| = 16$ একক **(Ans.)**

[**Warning:** এখানে লক্ষ রাখবে, সরলরেখার সমীকরণে y এর সহগ +1 এবং y কে বামপক্ষে রেখে অন্যান্য পদগুলোকে ডানপক্ষে নিতে হবে।]

Example-73. $5x + 3y + c = 0$ রেখাটি $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে c এর মান কত?

Sol^n: $3y = -5x - c \Rightarrow y = \frac{-5}{3}x - \frac{c}{3}$ $[y = mx + c']$

$\therefore m = -\frac{5}{3}, c' = -\frac{c}{3}, a = 2$

আমরা জানি, স্পর্শক হবার শর্ত, $c' = \frac{a}{m} \Rightarrow -\frac{c}{3} = \frac{2}{\left(-\frac{5}{3}\right)} \Rightarrow c = 2 \times 3 \times \frac{3}{5} \therefore c = \frac{18}{5}$ **(Ans.)**

[**Warning:** এখানে লক্ষ রাখবে, সরলরেখার সমীকরণে y এর সহগ +1 এবং y কে বামপক্ষে রেখে অন্যান্য পদগুলোকে ডানপক্ষে নিতে হবে।]

Example-74. $y = 3x + 1$ রেখাটি $y^2 = ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে, স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? **[RU'20-21]**

Sol^n: $y^2 = \frac{4a}{4}x \Rightarrow 1 = \frac{\frac{a}{4}}{3} \therefore a = 12$

$(3x+1)^2 = 12x \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 12x \Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0$

$\Rightarrow 9x^2 - 3x - 3x + 1 = 0 \Rightarrow (3x-1)^2 = 0 \therefore x = \frac{1}{3} \therefore y = 3 \times \frac{1}{3} + 1 = 2$ **(Ans.)**

$\therefore$ স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y) = (\frac{1}{3}, 2)$

Example-75. $y^2 = 6x$ পরাবৃত্তের স্পর্শকটি $2x + y = 1$ রেখার লম্ব হলে নিচের কোন বিন্দুটি স্পর্শকের উপর অবস্থিত নয়?

(a) $(5,4)$ (b) $(4,5)$ (c) $(6,6)$ (d) $(8,7)$

Sol^n: (a); $y^2 = 6x \therefore 4a = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ হবে, $y = mx + \frac{a}{m} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2\times\frac{1}{2}}$ [$\because 2x + y = 1$ রেখার ঢাল $= -2 \therefore$ স্পর্শকের ঢাল $= m = \frac{1}{2}$ হবে]

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$, যা অপশন (a) এর বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হয়

$\therefore$ Option (a) এর বিন্দুটি স্পর্শকের উপর অবস্থিত নয়

Example-76. c-এর মান কত হলে $2y + 2x = c$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হবে? **[RU'20-21, JU' 16-17]**

Sol^n: $2y = -2x + c \Rightarrow y = -x + \frac{c}{2}$; $m = (-1)$, $a^2 = 20$, $b^2 = 5$

$\therefore \left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2m^2 + b^2 \Rightarrow \frac{c^2}{4} = 20.(-1)^2 + 5 \Rightarrow c^2 = 25 \times 4 \therefore c = \pm 10$ **(Ans.)**

Example-77. $y = x - 5$ সরলরেখাটি $9x^2 + 16y^2 = 144$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? **[RU'22-23]**

(a) $\left(\frac{-16}{5}, \frac{9}{5}\right)$ (b) $\left(\frac{16}{5}, \frac{-9}{5}\right)$ (c) $\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$ (d) $\left(\frac{-16}{5}, \frac{-9}{5}\right)$

Sol^n: (b); $y = x - 5 \ldots\ldots\ldots$ (i) কে উপবৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে, $9x^2 + 16(x-5)^2 = 144$

$\Rightarrow 9x^2 + 16(x^2 - 10x + 25) = 144 \Rightarrow 25x^2 - 160x + 256 = 0$

$\Rightarrow (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 16 + 16^2 = 0 \Rightarrow (5x - 16)^2 = 0 \therefore x = \frac{16}{5}$

এখন, $y = \frac{16}{5} - 5 = -\frac{9}{5} \therefore$ নির্ণেয় স্পর্শ বিন্দু $\equiv \left(\frac{16}{5}, \frac{-9}{5}\right)$

Example-78. $y = kx$ সরলরেখাটি $y = x^2 + 4$ বক্ররেখার স্পর্শক হলে k এর মান কত? **[DU'18-19]**

Sol^n: বক্ররেখার সমীকরণে $y = kx$ বসিয়ে পাই, $kx = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 - kx + 4 = 0$

স্পর্শক বলে $D = 0 \Rightarrow k^2 - 4.1.4 = 0 \Rightarrow k = \pm 4$ **(Ans.)**

Example-79. $y = k - 2x$ সরলরেখাটি $xy = 1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করলে k এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $y = k - 2x \cdots\cdots$ (i)

$xy = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) হতে, $x(k - 2x) = 1$

$\Rightarrow 2x^2 - kx + 1 = 0$; যা x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ এবং x এর মান দুটি সমান হবে (যেহেতু রেখাটি স্পর্শক)।

$\therefore$ নিশ্চায়ক $= 0 \Rightarrow k^2 - 4.1.2 = 0 \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{2}$ **(Ans.)**

Example-80. $y = mx + 3$ রেখাটি $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তকে ছেদ করলে m এর মানের সীমা নির্ণয় কর।

Sol^n: $y^2 = 4x$

$(mx + 3)^2 = 4x \Rightarrow m^2x^2 + 6mx + 9 = 4x \Rightarrow m^2x^2 + x(6m - 4) + 9 = 0$

নিশ্চায়ক > 0 [$\because$ ছেদ করে]

$(6m - 4)^2 - 4.m^2.9 > 0 \Rightarrow 36m^2 - 48m + 16 - 36m^2 > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

০৬

Type-21: সাধারণ স্পর্শক সম্পর্কিত

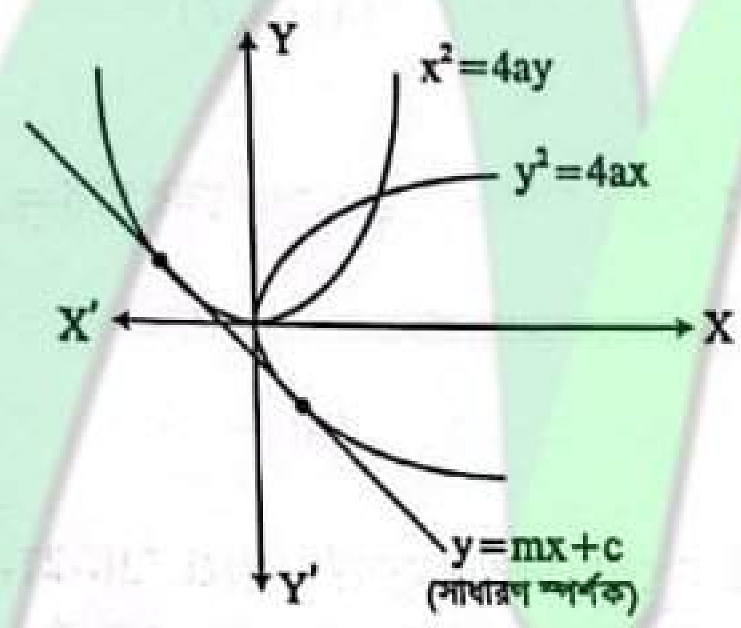
Concept

এই সমস্যাগুলো সমাধান করার সময় 'স্পর্শক/ছেদক সম্পর্কিত শীর্ষক' Type এর Case-02 এর ছক হতে স্পর্শক হওয়ার শর্তসমূহ ব্যবহার করতে হবে।

Problems

Example-81: $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ এর সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n:



$y = mx + c$, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে,

$c = \frac{a}{m}$ ……… (i)

এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে,

$c = -am^2$ ……… (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $\frac{a}{m} = -am^2$

$\Rightarrow m^3 = -1 = (-1)^3$

$\therefore \boxed{m = -1}$

(i) $\Rightarrow c = \frac{a}{-1} = -a$

এখন m এর মান (i) –এ বসালে, $y = (-1)x - a \therefore x + y + a = 0$ **(Ans.)**

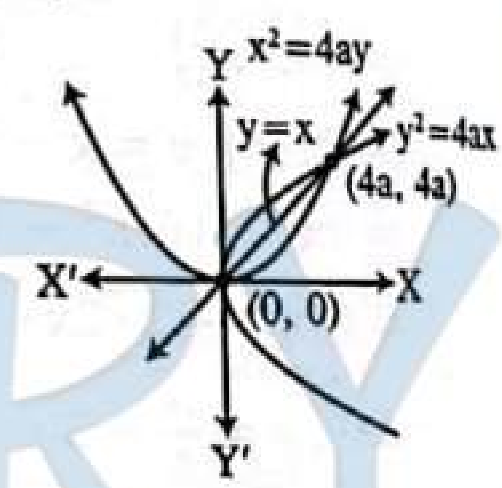
$\therefore y^2 = 12x = 4.3.x$ এবং $x^2 = 12y = 4.3.y$ এর সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ $x + y + 3 = 0$

Example-82: $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তদ্বয় ছেদ করে:

(i) মূলবিন্দুতে (ii) $y = x$ রেখার উপরিস্থিত দুটি বিন্দুতে (iii) $(4a, 4a)$ বিন্দুতে, তাহলে কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

Sol^n: (d); $y^2 = 4ax$ ও $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তদ্বয়ের শীর্ষ $(0, 0)$ অর্থাৎ উভয়েই মূলবিন্দুতে ছেদ করে



আবার, $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$

পরাবৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দুটি হবে $(4a, 4a)$

এবং $(0, 0)$ ও $(4a, 4a)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাটি হবে, $y = \frac{4a}{4a}x \Rightarrow y = x$ রেখা

$\therefore$ উপরে প্রদত্ত ৩টি শর্তই সঠিক $\therefore$ Option (d) is correct.

Example-83. $y^2 = 4x$ ও $x^2 = 4y$ পরাবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, স্পর্শকের ঢাল $= m$

$y^2 = 4x$ এর স্পর্শক এর সমীকরণ, $y = mx + \frac{a}{m} \Rightarrow mx - y + \frac{a}{m} = 0$ ……… (i)

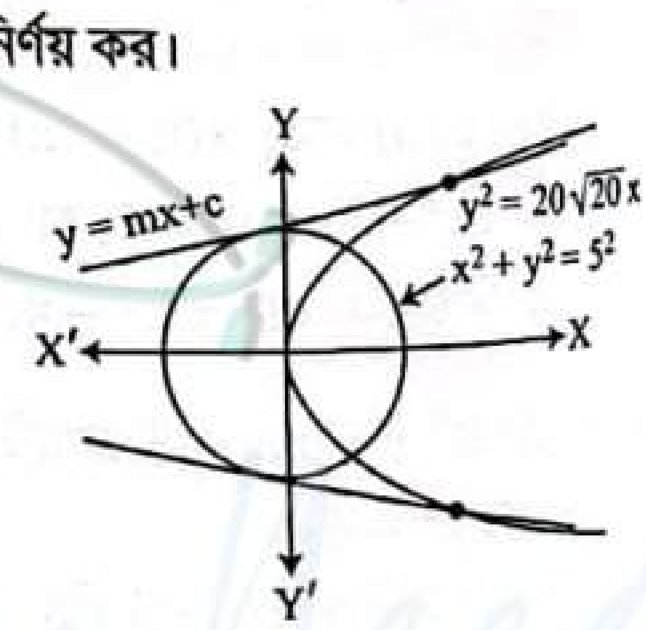
$x^2 = 4y$ এর স্পর্শক এর সমীকরণ, $y = mx - am^2$ ……… (ii)

উভয়ই একই রেখা হলে $\frac{a}{m} = -am^2 \Rightarrow -1 = m^3$ $[a = 1] \Rightarrow m = -1$

$\therefore$ স্পর্শক এর সমীকরণ, $y = -x - 1 \Rightarrow x + y + 1 = 0$ **(Ans.)**

Example-84: $y^2 = 20\sqrt{20}x$ পরাবৃত্ত এবং $x^2 + y^2 = 5^2$ বৃত্তের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 20\sqrt{20}\,x$



$y^2 = 4 \times 5\sqrt{20}x \therefore y^2 = 20\sqrt{20}x$

$y = mx + c$ রেখাটি পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে, $c = \frac{5\sqrt{20}}{m}$

$x^2 + y^2 = 5^2$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে, $c = \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$

এখন $y = mx + c$ এদের সাধারণ স্পর্শক হলে, $\pm 5\sqrt{m^2 + 1} = \frac{5\sqrt{20}}{m}$

$\Rightarrow \pm\sqrt{m^2 + 1} = \frac{\sqrt{20}}{m} \Rightarrow m^2 + 1 = \frac{20}{m^2} \Rightarrow m^4 + m^2 - 20 = 0$

$\Rightarrow m^2 = 4$ [$\because m^2 \neq -5$ [$\because$ ঢালের বর্গ ঋণাত্মক হবে না]

$\therefore m = \pm 2 \therefore c = \frac{5\sqrt{20}}{m} = \frac{5 \times 2\sqrt{5}}{\pm 2} = \pm 5\sqrt{5}$ $\therefore$ সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ, $y = 2x + 5\sqrt{5}$ এবং $y = -2x - 5\sqrt{5}$

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

01. পরাবৃত্ত

আদর্শ সমীকরণ		$y^2 = 4ax$	$x^2 = 4ay$
(i)	শীর্ষবিন্দু (a)	(0, 0)	(0, 0)
(ii)	উপকেন্দ্র / ফোকাস (S)	(a, 0)	(0, a)
(iii)	দিকাক্ষ / নিয়ামকের সমীকরণ	$x + a = 0$	$y + a = 0$
(iv)	অক্ষের সমীকরণ	$y = 0$	$x = 0$
(v)	উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$4\|a\|$	$4\|a\|$
(vi)	উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়	$(a, \pm 2a)$	$(\pm 2a, a)$
(vii)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x = a$	$y = a$
(viii)	ফোকাস দূরত্ব, PS	$PS = a + x$	$PS = a + y$
(ix)	শীর্ষ স্পর্শকের সমীকরণ	$x = 0$	$y = 0$
(x)	উপকেন্দ্র ও শীর্ষের দূরত্ব	a	a
(xi)	পরামিতিক সমীকরণ	$x = at^2$ $y = 2at$	$y = at^2$ $x = 2at$
(xii)	পোলার স্থানাঙ্কে সমীকরণ	$r = 4a \cot\theta \operatorname{cosec}\theta$	$r = 4a \tan\theta \sec\theta$

♦ অন্যান্য:

(i) x-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ: $x = ay^2 + by + c$

শীর্ষ $\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব $= \frac{1}{|a|}$

(ii) y-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ: $y = ax^2 + bx + c$

শীর্ষ $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব $= \frac{1}{|a|}$

(iii) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $yy_1 = 2a(x + x_1)$

(iv) $y = mx + c$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে, $c = \frac{a}{m}$; $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx - am^2$

(v) $y = mx + \frac{a}{m}$ সরলরেখা $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

(vi) উপকেন্দ্রিকলম্বের দৈর্ঘ্য = 2 × উৎকেন্দ্রিকতা × উপকেন্দ্র হতে দিকাক্ষের লম্ব দূরত্ব।

02. উপবৃত্ত

♦ $0 < e < 1$ হলে কোন বিন্দুর সঞ্চারপথকে উপবৃত্ত বলে।

আদর্শ সমীকরণ		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ b > a$
(i)	কেন্দ্র	(0, 0)	(0, 0)
(ii)	বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য	2a	2b
(iii)	ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য	2b	2a
(iv)	উপকেন্দ্র	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$
(v)	বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ	$y = 0$	$x = 0$
(vi)	ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ	$x = 0$	$y = 0$
(vii)	দিকাক্ষের সমীকরণ	$x = \pm\frac{a}{e}$	$y = \pm\frac{b}{e}$
(viii)	উপকেন্দ্রিক লম্ব	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$

০৬

আদর্শ সমীকরণ		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ b>a$
(ix)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=\pm be$
(x)	উৎকেন্দ্রিকতা, e	$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$	$\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}$
(xi)	বৃহৎ অক্ষের প্রান্ত বিন্দু	$(\pm a,0)$	$(0,\pm b)$
(xii)	ক্ষুদ্র অক্ষের প্রান্ত বিন্দু	$(0,\pm b)$	$(\pm a,0)$
(xiii)	ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব	2ae	2be
(xiv)	নিয়ামকের দূরত্ব	$2\frac{a}{e}$	$2\frac{b}{e}$
(xv)	ক্ষেত্রফল	πab	πab

- পরামিতিক সমীকরণ: $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$; $x=a\cos\theta+c',\ y=b\sin\theta+c'$
  এখানে, a, b, c, c' = constant $(a\neq b)\Rightarrow$ উপবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে উপকেন্দ্রিক দূরত্বদ্বয়ের যোগফল বৃহৎ অক্ষের সমান।
  $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$; A, B, C, D, E constant
  $A\neq B$ হলে x_1, y_1 বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $= Axx_1+Byy_1+C\left(\frac{x+x_1}{2}\right)+D\left(\frac{y+y_1}{2}\right)+E=0$
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক $y=mx+c$ হলে, $c^2=a^2m^2+b^2$
- (α,β) কেন্দ্রবিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$
- $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$ উপবৃত্তের উপর θ_1 বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{a}\cos\theta_1+\frac{y}{b}\sin\theta_1=1$
- বৃহৎ অক্ষই উপবৃত্তের সর্ববৃহৎ জ্যা।
- উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী সকল জ্যা ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

03. **অধিবৃত্ত**

Sl.	আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$
(i)	পরামিতিক সমীকরণ	$x=a\sec\theta$ $y=b\tan\theta$	$x=a\tan\theta$ $y=b\sec\theta$
(ii)	পোলার স্থানাঙ্কে সমীকরণ	$r^2(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)=a^2b^2$	$r^2(a^2\sin^2\theta-b^2\cos^2\theta)=a^2b^2$
(iii)	কেন্দ্র	(0, 0)	(0, 0)
(iv)	উপকেন্দ্র	$(\pm ae, 0)$	$(0,\pm be)$
(v)	অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য	2b	2a
(vi)	শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm a, 0)$	$(0,\pm b)$
(vii)	আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য	2a	2b
(viii)	উৎকেন্দ্রিকতা	$e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}$
(ix)	উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
(x)	আড় অক্ষের সমীকরণ	$y=0$	$x=0$
(xi)	অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ	$x=0$	$y=0$
(xii)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=\pm be$
(xiii)	নিয়ামক রেখার সমীকরণ	$x=\pm\frac{a}{e}$	$y=\pm\frac{b}{e}$

- (h, k) কেন্দ্রবিশিষ্ট অধিবৃত্ত: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
- (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$

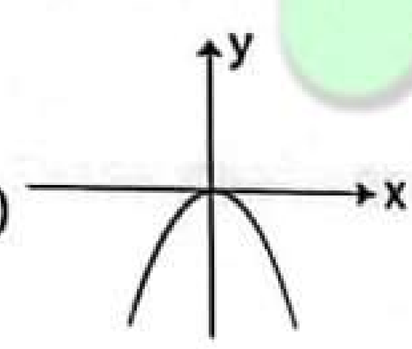
- θ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1$
- পরামিতিক স্থানাঙ্কে $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$ অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে $(a\sec\theta_1,\ b\tan\theta_1)$ এবং $(a\sec\theta_2,\ b\tan\theta_2)$ বিন্দুগামী জ্যা এর সমীকরণ, $\frac{x}{a}\cos\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2) - \frac{y}{b}\sin\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2) = \cos\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$
- কোন শর্ত উল্লেখ না থাকলে $a > b$ ধরা হয়। তবে ফোকাসের কোটি স্থির থাকলে $a > b$ এবং ভুজ স্থির থাকলে $a < b$ ধরা হয়।
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ $y = \pm\frac{bx}{a}$, অসীমতটদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম

MCQ

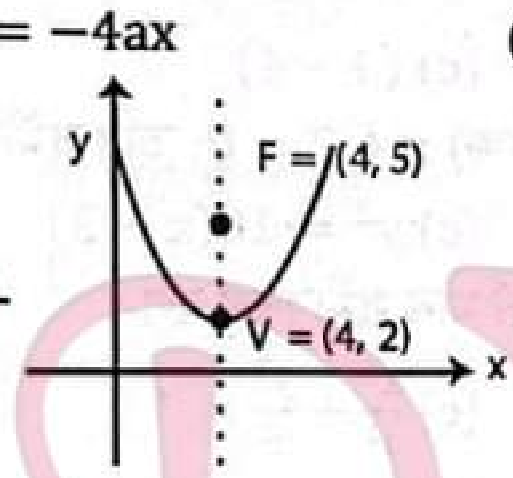
01. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা হবে–
(a) $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ (b) $e < 1$ (c) $e \leq 1$ (d) $e = 0$

02. প্যারাবোলাটির সমীকরণ- (a>0)



(a) $y^2 = 4ax$ (b) $y^2 = -4ax$ (c) $x^2 = -4ay$ (d) $x^2 = 4ay$

03. প্যারাবোলাটির দিকাক্ষের সমীকরণ-



(a) $y = -1$ (b) $y = 3$ (c) $x = 4$ (d) $y = 0$

04. $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ–
(a) $x - 1 = 0$ (b) $x + 1 = 0$ (c) $y - 1 = 0$ (d) $y + 1 = 0$

05. $y^2 = 2(x + 3)$ পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ হবে–
(a) $3x + 5 = 0$ (b) $2x + 3 = 0$ (c) $x = 0$ (d) $2x + 7 = 0$

06. নিচের কোনটি সত্য নয়?
(a) $y^2 = ax$, সমীকরণের পরাবৃত্তের লেখ y-অক্ষের উভয়দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত
(b) উপবৃত্তের লেখ উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম
(c) অধিবৃত্তের লেখ y-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম
(d) $y^2 = ax$, সমীকরণের পরাবৃত্তের লেখ y-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম

07. $x^2 = -18y$ পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ হবে কোনটি?
(a) $x = -\frac{9}{2}$ (b) $x = \frac{9}{2}$ (c) $y = \frac{9}{2}$ (d) $y = -\frac{9}{2}$

08. $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের (3,6) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি?
(a) $y = x + 3$ (b) $y + x = 3$ (c) $x + y = 9$ (d) $y = x + 9$

09. $x = y^2 + 4y + 5$ পরাবৃত্তের শীর্ষ নিম্নের কোনটি?
(a) $(1, -2)$ (b) $(2, 2)$ (c) $(-1, 2)$ (d) $(-1, -2)$

10. $9x^2 + 16y^2 = 144$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে–
(a) $(\pm\sqrt{7}, 0); \frac{9}{2}$ (b) $(\pm 7, 0); \frac{9}{2}$ (c) $(\pm\sqrt{5}, 0); \frac{7}{2}$ (d) $(\pm 5, 0); \frac{7}{2}$

11. $x^2 = -4ay, a > 0$ অক্ষরেখার কোন দিকে অবস্থিত?
(a) x-অক্ষের উপরে (b) y-অক্ষের ডানদিকে (c) y-অক্ষের বামদিকে (d) x-অক্ষের নিচে

12. $x^2 + 4x + 2y = 0$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র কোনটি?
(a) $(-2, 2)$ (b) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (c) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ (d) $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$

13. $5x^2 + 3y^2 = 9$ সমীকরণটির জ্যামিতিক পরিচয় হচ্ছে-
(a) পরাবৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) অধিবৃত্ত (d) বৃত্ত

14. $3x^2 + 5y^2 = 15$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা হবে–
(a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ (b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ (c) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ (d) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

15. $x^2 + 4x + 2y = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু হবে–
(a) $(2, -2)$ (b) $(-2, -2)$ (c) $(-2, 2)$ (d) $(2, 2)$

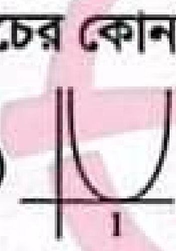
16. $\frac{(x+4)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা হবে–
(a) 1 (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) $\frac{4}{5}$

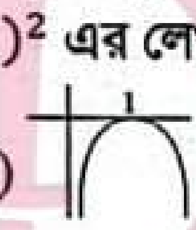
17. p এর মান কত হলে $4x^2 + py^2 = 80$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে?
(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 5

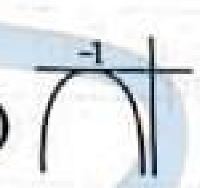
18. $y^2 = 4x + 8y$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক–
(a) $(4, 4)$ (b) $(-4, -4)$ (c) $(4, -4)$ (d) $(-4, 4)$

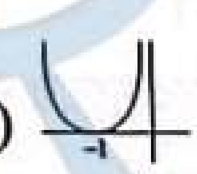
19. যে পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(4,0)$ এবং নিয়ামক (দিকাক্ষ) $x + 2 = 0$; তার সমীকরণ–
(a) $y^2 = 4(x - 1)$ (b) $y^2 = 6(x - 2)$ (c) $y^2 = 10(x - 3)$ (d) $y^2 = 12(x - 1)$

20. কোন কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা $e > 1$ হলে ঐ কনিকের আদর্শ মান সমীকরণ হল–
(a) $y^2 = 4ax$ (b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

21. নিচের কোনটি $y = -(x - 1)^2$ এর লেখচিত্র?
(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

22. $y^2 + 8x - 2y - 23 = 0$ সমীকরণটি একটি–
(a) পরাবৃত্ত যার শীর্ষ বিন্দু $(3, 1)$
(b) উপবৃত্ত যার শীর্ষ বিন্দু $(1, 3)$
(c) অধিবৃত্ত যার শীর্ষ বিন্দু $(3, -1)$
(d) পরাবৃত্ত যার শীর্ষ বিন্দু $(-3, 1)$

23. $y^2 - 4y - 4x + 16 = 0$ একটি পরাবৃত্ত নির্দেশ করে; এর উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?
(a) $(4, 2)$ (b) $(-2, -4)$ (c) $(2, 4)$ (d) $(-4, -2)$

24. $x^2 - 4x + 12y - 40 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য-
(a) 12 (b) 8 (c) 6 (d) 4

25. $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের $(4,6)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ
(a) $3x - 4y + 12 = 0$
(b) $4x - 3y - 12 = 0$
(c) $7x + 3y - 5 = 0$
(d) $7x - 3y + 6 = 0$

26. $4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$ সমীকরণটি নির্দেশ করে–
(a) বৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

27. $x^2 - y^2 = 0$ এর জ্যামিতিক রূপ হলো–
(a) পরাবৃত্ত (b) জোড়া সরলরেখা (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

28. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দু $(3, -3)$ বিন্দুতে অবস্থিত। উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 3 এবং অক্ষটি x অক্ষের সমান্তরাল।
(a) $(y+3)^2 = 3(x-3)$ (b) $(y+3)^2 = 3(x+3)$
(c) $(y-4)^2 = 4(x+3)$ (d) $(y+4)^2 = 3(x-3)$

29. পরাবৃত্ত ও অক্ষরেখার ছেদ বিন্দুকে বলা হয়-
(a) পরাবৃত্তের কেন্দ্র (b) ফোকাস দূরত্ব (c) বৃত্তের শীর্ষবিন্দু (d) পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু

30. $y^2 = 8x$, পরাবৃত্তস্থ কোন বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 10; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি?
(a) $(6, \pm 4\sqrt{3})$ (b) $(7, \pm 2\sqrt{14})$ (c) $(8, \pm 8)$ (d) $(9, \pm 6\sqrt{2})$

31. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয় ও মূলবিন্দু, সেই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?
(b) 20 (b) 0 (c) $\frac{5}{4}$ (d) $\frac{3}{2}$

32. (4,3) বিন্দুতে $3x^2 - 4y^2 = 12$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের ঢালের মান?
(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) -1 (d) 1

33. কোনো উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা শূন্য হলে তা কি নির্দেশ করে?
(a) পরাবৃত্ত (b) বৃত্ত (c) অধিবৃত্ত (d) এক জোড়া সরলরেখা

34. $9x^2 + 25y^2 = 225$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত?
(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{5}{4}$

35. 'p' এর মান কত হলে $4x^2 + py^2 = 16$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে যাবে?
(a) -16 (b) 16 (c) -1 (d) 1

36. $(2+t^2, 2t+1)$ বিন্দুটি নিচের কোনটি নিদের্শ করে?
(a) একটি পরাবৃত্ত যার উপকেন্দ্র $(2, 1)$ (b) একটি পরাবৃত্ত যার শীর্ষ $(2, 1)$
(c) একটি উপবৃত্ত যার কেন্দ্র $(2, 1)$ (d) একটি অধিবৃত্ত যার আড় অক্ষ 4 একক

Written

37. $5x^2 + 9y^2 - 20x = 25$ উপবৃত্তের কেন্দ্র, উপকেন্দ্র নির্ণয় কর।

38. P এর মান কত হলে $\frac{x^2}{P} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে? উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

39. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটি $S'(2,0)$ ও $(-2,0)$ এবং যা $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ বিন্দুগামী।

40. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং যা $(-2,1), (1,2)$ ও $(-1,3)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

41. $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর কোটি 12; P বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব নির্ণয় কর।

42. একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(1, -8)$, উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{5}$ এবং নিয়ামকরেখা $3x - 4y = 10$

43. $y = k - 2x$ সরলরেখাটি $xy = 1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করলে k এর মান নির্ণয় কর।

44. $3x^2 - 2y^2 = 6$ অধিবৃত্তের $(2, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

45. $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের শীর্ষ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

46. $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। যখন তার একটি শীর্ষ পরাবৃত্তটির শীর্ষে অবস্থিত।

47. 250 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজের একটি শীর্ষ, $y^2 + 4(x - a^2) = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষ হলে এবং ত্রিভুজের অপর শীর্ষদ্বয় y-অক্ষ এবং উক্ত পরাবৃত্তের ছেদবিন্দু হলে a =?

প্র্যাক্টিস প্রবলেমের সমাধান

MCQ

01. **Sol^n: (d);** $x^2+y^2=a^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$; $e=\sqrt{\frac{a^2-a^2}{a^2}}=0$

02. **Ans: (c);** $x^2=-4ay$

03. **Sol^n: (a);** $F=(4,5); V=(4,2)$ ∴ অক্ষ ও দিকাক্ষের ছেদবিন্দু $=(4,-1)$ ∴ দিকাক্ষের সমীকরণ: $y=-1$

04. **Sol^n: (a);** $y^2=4x$ এখানে, $a=1$ উপকেন্দ্রের লম্বের সমীকরণ, $x=a \Rightarrow x=1 \Rightarrow x-1=0$

05. **Sol^n: (d);** $y^2=2(x+3)$ ∴ $a=\frac{1}{2}$ এখন, $x+3=-\frac{1}{2}, 2x+7=0$

06. **Ans: (d);** $y^2=ax$, সমীকরণের পরাবৃত্তের লেখ y-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম

07. **Sol^n: (b);** $x^2=-4.\frac{9}{2}y$ ∴ দিকাক্ষের সমীকরণ: $x=\frac{9}{2}$

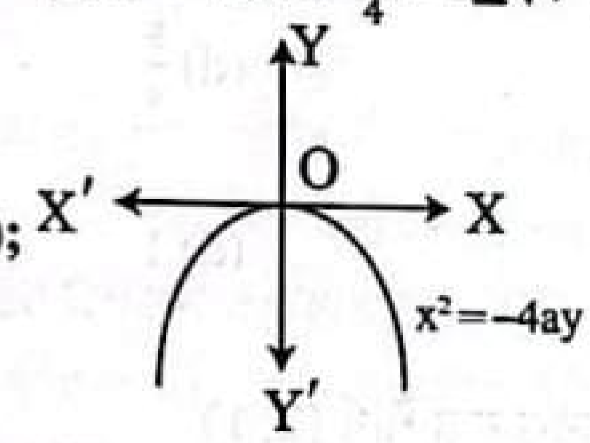
08. **Sol^n: (a);** $yy_1=12\left(\frac{x+x_1}{2}\right) \Rightarrow 6y=12\left(\frac{x+3}{2}\right) \Rightarrow y=x+3$

09. **Ans: (a);** $(1,-2)$

10. **Sol^n: (a);** $9x^2+16y^2=144; \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1; a^2=16, b^2=9$

উপকেন্দ্রিক লম্ব $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 9}{4}=\frac{9}{2}$; $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{7}{16}; \Rightarrow e=\frac{\sqrt{7}}{4}$

উপকেন্দ্র $=\pm ae=\pm 4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\pm\sqrt{7}$; উপকেন্দ্র $=(\pm\sqrt{7},0)$

11. **Sol^n: (d);** 

12. **Sol^n: (d);** $x^2+4x=-2y \Rightarrow x^2+4x+4=-2y+4 \Rightarrow (x+2)^2=-2(y-2) \Rightarrow (x+2)^2=-4.\frac{1}{2}(y-2)$

$X^2=4aY$ এর সাথে তুলনা করে ; $x+2=0 \Rightarrow x=-2$; $y-2=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{2}$

13. **Ans: (b);** উপবৃত্ত

14. **Sol^n: (c);** $3x^2+5y=15 \Rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1$ ∴ $e=\sqrt{1-\frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2}}=\sqrt{1-\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}$

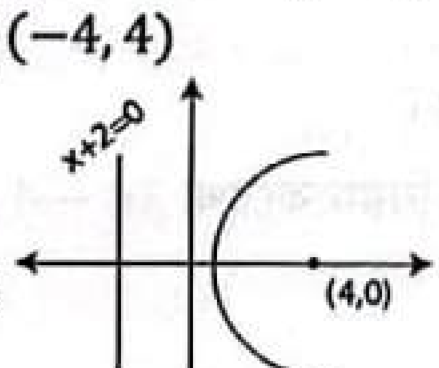
15. **Sol^n: (c);** $x^2+4x+2y=0 \Rightarrow x^2+4x+4=-2y+4 \Rightarrow (x+2)^2=-2(y-2)$ ∴ শীর্ষবিন্দু $(-2,2)$

16. **Sol^n: (b);** $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{64}{100}}=\sqrt{\frac{36}{100}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

17. **Ans: (d);** 5

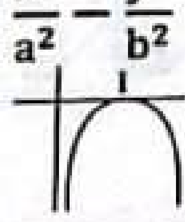
18. **Sol^n: (d);** $y^2=4x+8y \Rightarrow y^2-8y=4x \Rightarrow y^2-8y+16=4x+16 \Rightarrow (y-4)^2=4(x+4)$

∴ শীর্ষবিন্দু $(-4,4)$

19. **Sol^n: (d);** 

চিত্র হতে বলা যায়, শীর্ষ $\equiv(1,0)$; $a=3$ ∴ সমীকরণ, $Y^2=4aX \Rightarrow (y-0)^2=4.3(x-1) \Rightarrow y^2=12(x-1)$

20. **Ans: (b);** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

21. **Ans: (b);** 

22. Sol^n: (a); $y^2+8x-2y=0 \Rightarrow (y-1)^2=-8(x-3)$ ∴ শীর্ষবিন্দু $=(3,1)$
23. Sol^n: (a); $y^2-4y-4x+16=0 \Rightarrow (y-2)^2=4(x-3)$
ধরি, $Y=y-2, X=x-3 \therefore Y^2=4.1.X$
∴ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $X=1 \Rightarrow x-3=1 \Rightarrow x=4; Y=0 \Rightarrow y-2=0 \therefore y=2$ ∴ স্থানাঙ্ক $(4,2)$
24. Sol^n: (a); $x^2-4x+12y-40=0 \quad \Rightarrow x^2-4x+4=-12y+40+4 \Rightarrow (x-2)^2=-12\left(y-\frac{44}{12}\right)$
$\Rightarrow (x-2)^2=-4\times 3\left(y-\frac{44}{12}\right)$ ∴ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=4\times 3=12$
এই ধরনের ক্ষেত্রে x বা y যার দ্বিঘাত থাকেনা তার সহগই উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য হয়।
25. Sol^n: (a); (4,6) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $=\frac{dy}{dx}=\frac{9}{2y}=\frac{3}{4}$
∴ স্পর্শকের সমীকরণ: $(y-6)=\frac{3}{4}(x-4) \Rightarrow 4y-24=3x-12 \Rightarrow 3x-4y+12=0$
26. Sol^n: (b); $4x^2+5y^2-16x+10y+1=0$; $\frac{(x-y)^2}{3}+\frac{(y+1)^2}{\frac{12}{5}}=0$; $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{1}{5}}$; $e<1$ অর্থাৎ, উপবৃত্ত।
27. Ans: (b); জোড়া সরলরেখা
28. Sol^n: (a); কেন্দ্র মূলবিন্দু ব্যতিত অন্য বিন্দু (α,β) হলে, পরাবৃত্তের সমীকরণ $(Y-\beta)^2=4a(X-\alpha)$
∴ $(y+3)^2=3(x-3)$
29. Ans: (d); পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু
30. Sol^n: (c); $y^2=8x$; $|x+2|=10$; $x+2=\pm 10 \therefore x=8,-12$; $x=-12$ গ্রহণযোগ্য নয়।
∴ $y=\pm 8 \therefore (8,\pm 8)$ (Ans.)
31. Sol^n: (b); ফোকাসদ্বয় $(0,\sqrt{7}),(0,-\sqrt{7})$, মূলবিন্দু $(0,0)$ ∴ ক্ষেত্রফল $=0$ (সমরেখ বিন্দু)
32. Sol^n: (d); (4, 3) তে স্পর্শক: $3x(4)-4y(3)=12 \Rightarrow 12x-12y=12 \Rightarrow x-y=1$ ∴ ঢাল $=1$
33. Ans: (b); বৃত্ত
34. Sol^n: (c); $9x^2+25y^2=225 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1 \quad \therefore e=\sqrt{1-\frac{3^2}{5^2}}=\boxed{\frac{4}{5}}$
35. Sol^n: (d); $4x^2+py^2=16 \Rightarrow 4\times 0^2+p(\pm 4)^2=16 \Rightarrow p=1$
36. Sol^n: (b); ধরি, $x=2+t^2$ ……… (i) এবং $y=2t+1 \Rightarrow t=\frac{y-1}{2}$ ……… (ii)এখন (i) হতে পাই, $x=2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2$
$\Rightarrow 4x-8=(y-1)^2 \Rightarrow (y-1)^2=4(x-2)$, যা একটি পরাবৃত্ত এবং যার শীর্ষ $(2,1)$ ∴ Option (b) is correct

Written

37. Sol^n: $5x^2+9y^2-20x=25 \Rightarrow 5(x-2)^2+9y^2-25-20=0$
$\Rightarrow 5(x-2)^2+9y^2-45=0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$
∴ উপবৃত্তের কেন্দ্র $(2,0)$ (Ans.) ∴ উপকেন্দ্রদ্বয় $(2\pm 3e,0)$
$e=\sqrt{1-\frac{5}{9}}=\frac{2}{3}$ ∴ উপকেন্দ্রদ্বয় (4,0) ও (0,0) (Ans.)
38. Sol^n: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{5^2}=1$ (6,4) বিন্দুগামী। ∴ $\frac{6^2}{P}+\frac{4^2}{5^2}=1 \Rightarrow P=100$
∴ উপবৃত্তটির সমীকরণ : $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ ∴ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1-\frac{5^2}{10^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Ans.)
∴ উপকেন্দ্রদ্বয় $\equiv (\pm 5\sqrt{3},0)$ (Ans.)
39. Sol^n: $S'(2,0)$ ও $S(-2,0)$ ∴ কেন্দ্র $O(0,0)$ এবং উপবৃত্তটি x-অক্ষের সমান্তরাল।
∴ $|ae|=2 \Rightarrow ae=2 \Rightarrow a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=2 \Rightarrow a^2-b^2=4 \Rightarrow a^2=b^2+4$
ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{b^2+4}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{\frac{9}{4}}{b^2+4}+\frac{\frac{15}{4}}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=5 \therefore a^2=9$
∴ উপবৃত্তটি $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ (Ans.)

40. Sol^n: ধরি, পরাবৃত্তের সমীকরণ: $ay^2 + by + c = x$
$(-2,1)$ এর জন্য, $a + b + c = -2 \ldots\ldots\ldots$ (i)
$(1,2)$ এর জন্য, $4a + 2b + c = 1 \ldots\ldots\ldots$ (ii)
$(-1,3)$ এর জন্য, $9a + 2b + c = -1 \ldots\ldots\ldots$ (iii)
(i), (ii), (iii) সমাধান করে, $a = \frac{-5}{2}, b = \frac{21}{2}, c = -10$
$\therefore \frac{-5}{2}y^2 + \frac{21}{2}y - 10 = x \Rightarrow \boxed{5y^2 - 21y + 20 + 2x = 0}$ **(Ans.)**

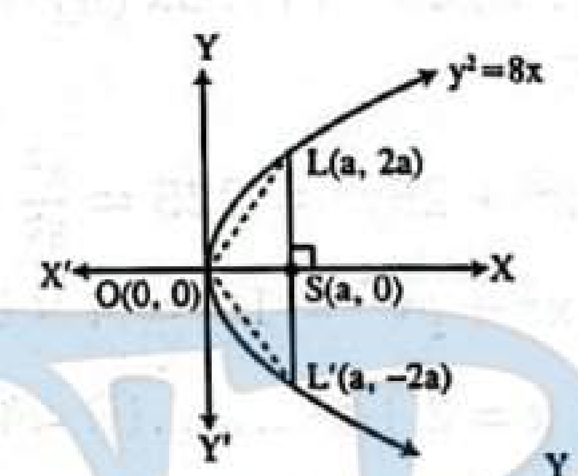
41. Sol^n: $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে P বিন্দুর কোটি 12 $\therefore 12^2 = 9x \Rightarrow \boxed{x = 16}$ $\therefore P \equiv (16,12)$
আবার, উপকেন্দ্র $S \equiv \left(\frac{9}{4}, 0\right) \therefore PS = \sqrt{\left(16 - \frac{9}{4}\right)^2 + 12^2} = \boxed{\frac{73}{4}}$ **(Ans.)**

42. Sol^n: $S \equiv (1, -8); e = \sqrt{5}$
নিয়ামকরেখা $3x - 4y = 10$ $\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ : $\sqrt{(x-1)^2 + (y+8)^2} = \sqrt{5}.\frac{|3x-4y-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}$
$\Rightarrow 5[(x-1)^2 + (y+8)^2] = (3x - 4y - 10)^2$
$\Rightarrow 5(x^2 + y^2 - 2x + 16y + 65) = (9x^2 + 16y^2 + 100 - 24xy + 80y - 60x)$
$\Rightarrow 4x^2 + 11y^2 - 50x - 24xy - 225 = 0$ **(Ans.)**

43. Sol^n: যেহেতু $y = k - 2x$ রেখা $xy = 1$ কে স্পর্শ করে, $\therefore x(k - 2x) = 1$ দ্বিঘাত সমীকরণের $D = 0$
$\Rightarrow 2x^2 - kx + 1 = 0 \therefore D = k^2 - 8 \therefore k^2 - 8 = 0 \therefore \boxed{k = \pm 2\sqrt{2}}$ **(Ans.)**

44. Sol^n: $3x^2 - 2y^2 = 6$ অধিবৃত্তের $(2,3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ:
$3x(2) - 2y(3) = 6 \Rightarrow 6x - 6y = 6 \Rightarrow \boxed{x - y = 1}$ **(Ans.)**

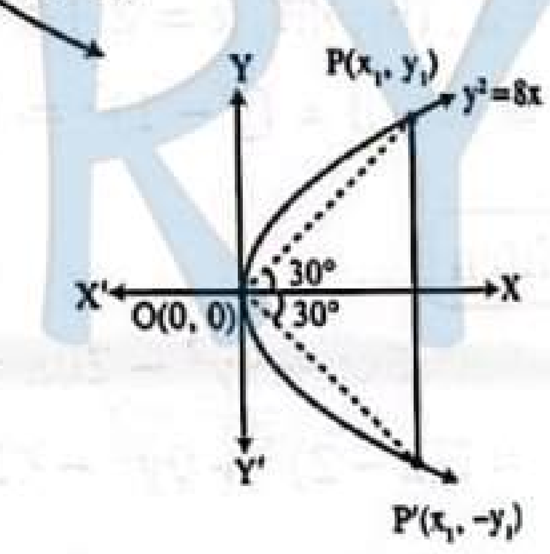
45. Sol^n: $y^2 = 4.2.x \Rightarrow a = 2$
$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় হবে $(2, 4)$ ও $(2, -4)$
এখন $O(0,0), L(2,4)$ এবং $L'(2,-4)$



বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত $\Delta OLL'$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}\right|$

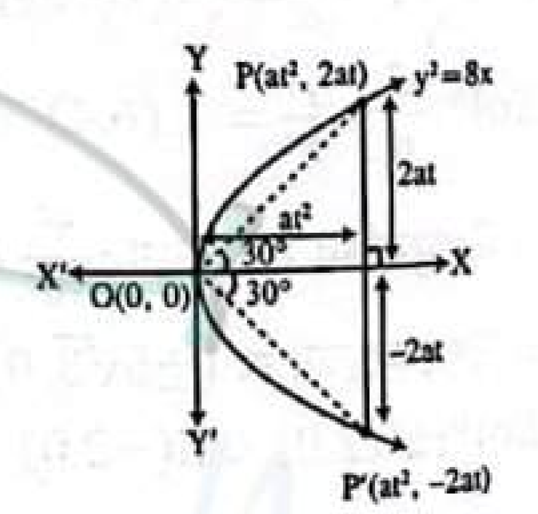
$= \frac{1}{2}|-8 - 8| = 8$ বর্গ একক **(Ans.)**

46. Sol^n: **Process-01:** $y^2 = 4.2.x \ldots\ldots\ldots$ (i) $\Rightarrow a = 2$
এখন OP রেখার সমীকরণ: $y = (\tan 30°)x \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \ldots\ldots\ldots$ (ii)



$\therefore$ (i) ও (ii) হতে পাই, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2 = 8x \Rightarrow x = 24$ এবং $y = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$
$\therefore P(x_1, y_1) \equiv P(24, 8\sqrt{3})$ এবং $P'(x_1, -y_1) \equiv (24, -8\sqrt{3})$ হবে,
এখন, $\Delta OPP' = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 24 & 24 & 0 \\ 0 & 8\sqrt{3} & -8\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-192\sqrt{3} - 192\sqrt{3}| = 192\sqrt{3}$

Process-02: $y^2 = 4.2.x \Rightarrow a = 2$
চিত্র হতে, $\tan 30° = \frac{PM}{OM} = \frac{2at}{at^2} = \frac{2}{t} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{t} \Rightarrow t = 2\sqrt{3}$
$\therefore$ PQ বাহুর দৈর্ঘ্য $= 2 \times 2at = 2 \times 2 \times 2 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$
$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}(PQ)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(16\sqrt{3}\right)^2 = 192\sqrt{3}$ **(Ans.)**



নোট: $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের পরাবৃত্তস্থ পরামিতিক বিন্দু $(at^2, 2at)$ হয়

47. Sol^n: $y^2 + 4(x - a^2) = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i) $\Rightarrow y^2 = -4(x - a^2)$, যার শীর্ষ $v(a^2, 0)$
আবার, (i) নং পরাবৃত্ত ও y অক্ষের ছেদবিন্দু হবে, $x = 0$ বসাই $\therefore y^2 = -4(0 - a^2) = 4a^2 \Rightarrow y = \pm 2a$
শর্তমতে: $250 = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 2a & -2a & 0 \end{vmatrix}\right| \Rightarrow 500 = |2a^3 + 2a^3| \Rightarrow a^3 = 5^3 \therefore a = 5$ **(Ans.)**

অধ্যায় ০৭ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

- $\sin^2\theta$ এর পরিবর্তে $(\sin\theta)^2$ লেখা বিধিসম্মত হলেও $\sin^{-1}x$ এর পরিবর্তে $(\sin x)^{-1}$ বা $\frac{1}{\sin x}$ লেখা যাবে না।
- $\sin^{-1}(x)$ দ্বারা কোণ নির্দেশ করা হয়।
- **মুখ্যমান:** একটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মুখ্যমান হল সেই মান (ধনাত্মক/ঋণাত্মক) যার সাংখ্যিক মান সব সাংখ্যিক মানের মধ্যে ক্ষুদ্রতম। অর্থাৎ $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মান $30°, 150°, 390°, \dots\dots\dots$ ইত্যাদি। কিন্তু $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর ক্ষুদ্রতম (ধনাত্মক) মান হলো $30°$ এই $30°$ কে বলা হয় $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মুখ্যমান।
- **মুখ্য মানগুলোর সীমা হচ্ছে-**

(i) কোন বাস্তব সংখ্যা $x, -1 \le x \le 1$ শর্ত সিদ্ধ করলে $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $\sin^{-1}x$ বা $\arcsin x$ এর যে মান বিদ্যমান তাকে $\sin^{-1}x$ এর মুখ্যমান বলে। যেমন: $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{6}$.এবং $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ এর মুখ্যমান $-\frac{\pi}{6}$

(ii) কোন বাস্তব সংখ্যা $x, -1 \le x \le 1$ শর্ত সিদ্ধ করলে $[0, \pi]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $\cos^{-1}x$ বা $\arccos x$ এর যে মান বিদ্যমান তাকে $\cos^{-1}x$ এর মুখ্যমান বলে। যেমন: $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{3}$ এবং $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ এর মুখ্যমান $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

(iii) কোন বাস্তব সংখ্যা $x, -\infty < x < \infty$ শর্ত সিদ্ধ করলে $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে $\tan^{-1}x$ বা $\arctan x$ এর যে মান বিদ্যমান তাকে $\tan^{-1}x$ এর মুখ্যমান বলে। যেমন: $\tan^{-1}1$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{4}$ এবং $\tan^{-1}(-1)$ এর মুখ্যমান $-\frac{\pi}{4}$

(iv) কোন বাস্তব সংখ্যা $x, x \le -1$ বা, $x \ge 1$ শর্ত সিদ্ধ করলে $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে $\text{cosec}^{-1}x$ বা $\text{arc cosec}\, x$ এর যে মান বিদ্যমান তাকে cosec^{-1}এর মুখ্যমান বলে। $\text{cosec}^{-1}(2)$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{3}$ এবং $\text{cosec}^{-1}(-2)$ এর মুখ্যমান $-\frac{\pi}{3}$.

(v) কোন বাস্তব সংখ্যা $x, x \le -1$ বা, $x \ge 1$ শর্ত সিদ্ধ করলে $\left[0, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ব্যবধিতে $\sec^{-1}x$ বা $\text{arc sec}\, x$ এর যে মান বিদ্যমান তাকে $\sec^{-1}x$ এর মুখ্যমান বলে। যেমনঃ $\sec^{-1}(2)$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{3}$ এবং $\sec^{-1}(-2)$ এর মুখ্যমান $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

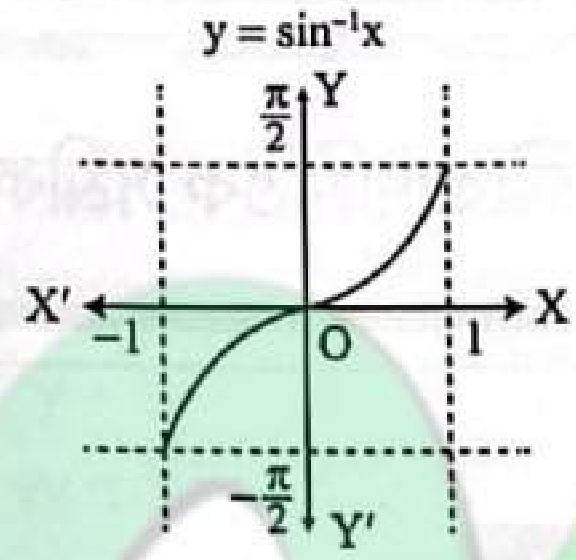
(vi) কোন বাস্তব সংখ্যা $x, -\infty < x < \infty$ শর্ত সিদ্ধ করলে $(0, \pi)$ ব্যবধিতে $\cot^{-1}x$ বা $\text{arc cot}\, x$ এর যে মান বিদ্যমান তাকে $\cot^{-1}x$ এর মুখ্যমান বলে। যেমনঃ $\cot^{-1}(1)$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{4}$ এবং $\cot^{-1}(-1)$ এর মুখ্যমান $-\frac{\pi}{4}$

Note: যদি $\sin^{-1}x$ এর মুখ্য মান α হয় তবে $\sin^{-1}x$ এর সাধারণ মান হবে $n\pi + (-1)^n\alpha$. যদি কোন বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে ক্ষুদ্রতম মানটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয়ই হয় যাদের সাংখ্যমান সমান সেক্ষেত্রে ধনাত্মক মানটিকে মুখ্যমান ধরা হয়।

যেমন: $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ এবং $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ সুতরাং, $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান হবে $= \frac{\pi}{3}$

◆ **বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র:**

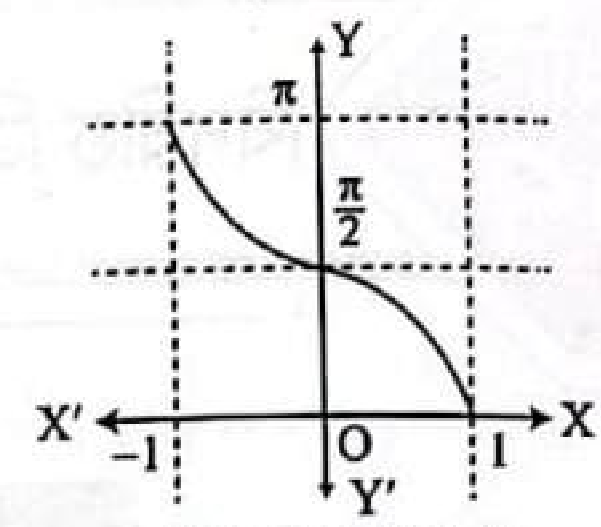
$y = \sin^{-1}x$



Domain = $[-1, 1]$

Range = $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

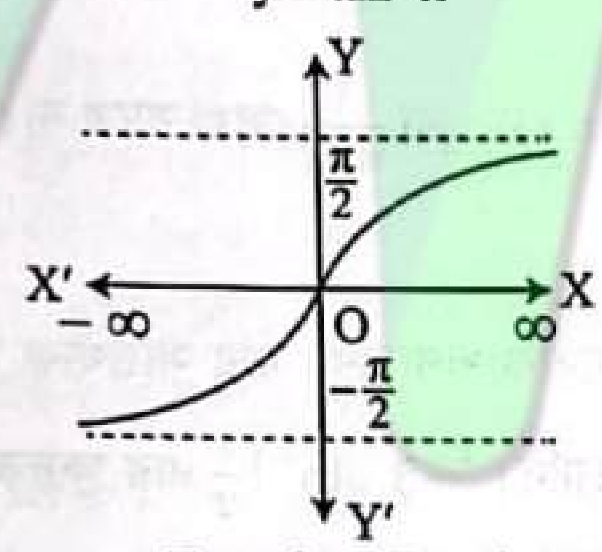
$y = \cos^{-1}x$



Domain = $[-1, 1]$

Range = $[0, \pi]$

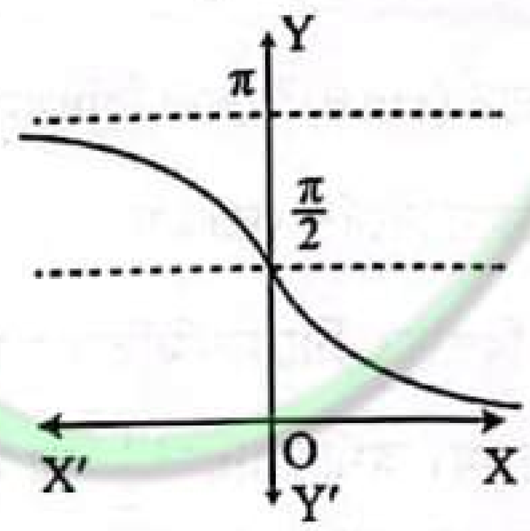
$y = \tan^{-1}x$



Domain = $\mathbb{R}$ or $(-\infty,\infty)$

Range = $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

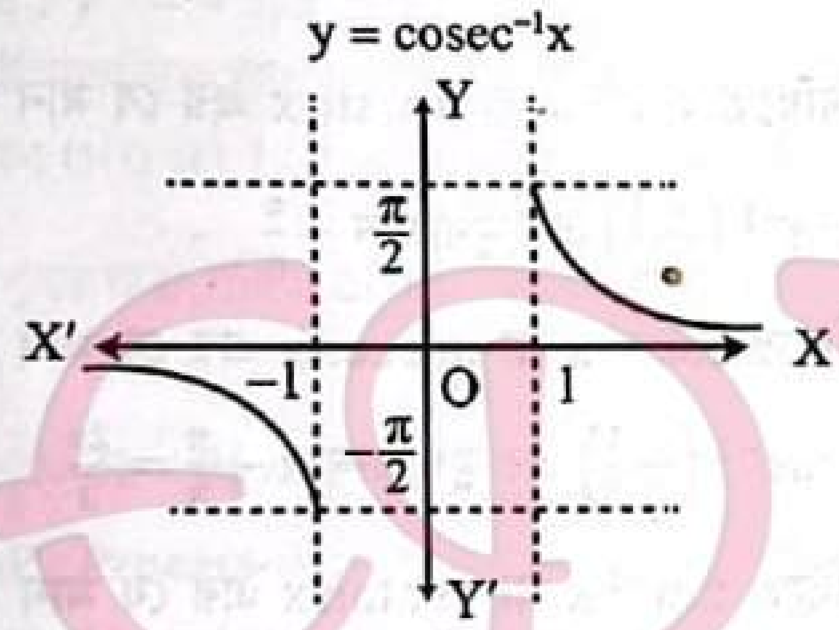
$y = \cot^{-1}x$



Domain = $\mathbb{R}$ or $(-\infty,\infty)$

Range = $(0, \pi)$

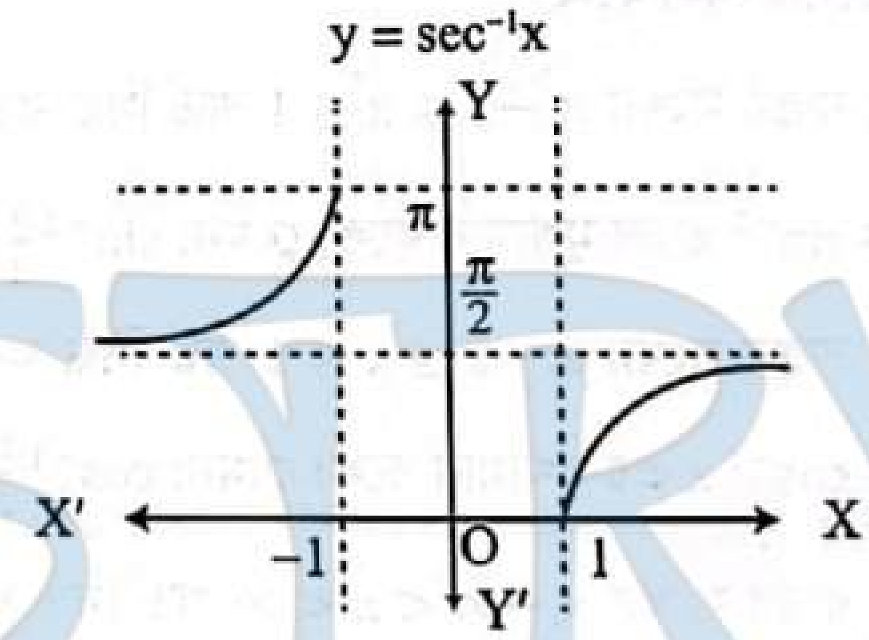
$y = \text{cosec}^{-1}x$



Domain = $\mathbb{R} - (-1, 1)$ or $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

Range = $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$ or $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)\cup\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$y = \sec^{-1}x$



Domain = $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ or $\mathbb{R}-(-1, 1)$

Range = $[0, \pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ or $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

◆ **বিপরীত ত্রিকোণমিতিক/বৃত্তীয় ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ:**

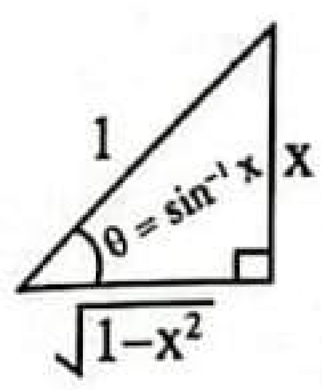
ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ
$\sin^{-1}x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\tan^{-1}x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1}x$	$\mathbb{R}$	$(0,\pi)$
$\text{cosec}^{-1}x$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ বা, $\mathbb{R}-(-1,1)$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$
$\sec^{-1}x$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ বা, $\mathbb{R}-(-1,1)$	$[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Note: $\sin^{-1}x$ কে অনেক সময় $\arc \sin x$ লেখা হয়।

- **সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মান নির্ণয়:**

$\theta = \sin^{-1} x$ হলে θ এর মান অন্যান্য বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে প্রকাশ কর।

$\theta = \sin^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{x}{1}\right)$



$\sin^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$

অনুরূপভাবে, $\cos^{-1} x = \sec^{-1}\frac{1}{x}$

$\tan^{-1} x = \cot^{-1}\frac{1}{x}$

আবার, চিত্র থেকে $\theta = \sin^{-1} x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; $\theta = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- **বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন এর গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি:**

01. $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^{-1}x + \sec^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$	09. $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$
02. $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$	10. $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$
03. $\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sec^{-1}x + \sin^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$	11. $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$
04. $\tan^{-1}x \pm \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x\pm y}{1\mp xy}$	12. $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x)$
05. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$	13. $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$
06. $\sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right\}$	14. $\frac{1}{2}\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$
07. $\cos^{-1}x \pm \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left\{xy \mp \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$	15. $\frac{1}{2}\sin^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$
08. $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$	16. $\frac{1}{2}\cos^{-1}x = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

(i) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোকে সরলীকরণের মাধ্যমে tan কিংবা cot কিংবা cos নেওয়া সুবিধাজনক।

(ii) সমীকরণের উভয়পক্ষকে বর্গ করে সমাধান এড়িয়ে যাওয়া ভাল। একান্ত সম্ভব না হলে দেখতে হবে প্রাপ্ত উত্তরগুলো যথাযথ কিনা অর্থাৎ শুদ্ধি পরীক্ষা করতে হবে এবং অবান্তর/ অপ্রাসঙ্গিক (Extraneous roots) মূলগুলো বাদ দিতে হবে।

(iii) উর্ধ্বঘাতগুলোকে গুণিতক কোণে প্রকাশ করার চেষ্টা করতে হবে।

(iv) গুণফলগুলোকে যোগফল বা যোগফলগুলোকে গুণফলে নিয়ে যাওয়া অনেক ক্ষেত্রে সুবিধাজনক।

(v) $n = 0, \pm1, \pm2, \dots\dots\dots$ কিংবা n যে কোন পূর্ণ সংখ্যা কিংবা $n \in \mathbb{Z}$ লিখতে যেন ভুল না হয় এবং প্রশ্নে n থাকলে n এর পরিবর্তে m, k ইত্যাদি ব্যবহার করতে হবে।

(vi) যেহেতু সাধারণ সূত্রগুলোতে π ব্যবহৃত হয় সুতরাং সমীকরণের বিশেষ সমাধান রেডিয়ানে নির্ণয় করা ভালো। অর্থাৎ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ হলে $\theta = 30°$ না লিখে $\theta = \frac{\pi}{6}$ লেখাই শ্রেয়।

(vii) সীমা রেডিয়ানে দেওয়া থাকলে উত্তরগুলো রেডিয়ানে দিতে হবে এবং সীমা ডিগ্রিতে দেওয়া থাকলে উত্তরগুলো ডিগ্রিতে প্রকাশ করে দিতে হবে।

(viii) সমীকরণের উভয় পক্ষের লবে $\sin x, \cos x$ জাতীয় উৎপাদক থাকলে সেটিকে অপসারণ করা যাবে না। কিন্তু উভয় পক্ষের হরে থাকলে সেটিকে অপসারণ করা যাবে। কারণ সমীকরণের হর 0 (শূন্য) হতে পারে না।

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ: (সকল ক্ষেত্রে $n \in \mathbb{Z}$ হবে।)

01. $\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\alpha$
02. $\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha$
03. $\tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha$
04. $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$
05. $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
06. $\tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$
07. $\sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$
08. $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2n\pi$
09. $\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = (4n+1)\frac{\pi}{4} = n\pi + \frac{\pi}{4}$
10. $\sin\theta = -1 \Rightarrow \theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$
11. $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = (2n+1)\pi$
12. $\tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = (4n-1)\frac{\pi}{4} = n\pi - \frac{\pi}{4}$

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

Type-01: বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অজানা মান

Concept

একটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনকে অপর একটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে রূপান্তর করতে সমকোণী ত্রিভুজের সাহায্য নিতে হবে এবং প্রয়োজনে অন্যান্য সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে। $\tan^{-1}$ এর সূত্রগুলো ব্যবহার করা সুবিধাজনক। নিচের example গুলো লক্ষ্য করো:

Problems

Example-01. $\cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right) = ?$ **[DU'19-20]**

Sol^n: $\cot\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \cot 30° = \sqrt{3}$

Example-02: $\sec^2(\tan^{-1}2) + \mathrm{cosec}^2(\cot^{-1}3) = ?$ **[DU' 15-16, RU' 08-09]**

Sol^n: $1 + \tan^2(\tan^{-1}2) + 1 + \cot^2(\cot^{-1}3) = 1 + 2^2 + 1 + 3^2 = 15$ **(Ans.)**

Example-03. $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}y$ সমীকরণে $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে, y এর মান কত? **[KU'19-20]**

Sol^n: $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}y \Rightarrow 2\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin^{-1}y \Rightarrow 2 \times \frac{\pi}{3} = \sin^{-1}y \left[\because \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$\Rightarrow y = \sin\frac{2\pi}{3} \therefore y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Example-04. $\sin[2(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)] = a$ হলে, a এর মান কত? **[JU'19-20]**

Sol^n: $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = a \therefore a = 0$

Example-05: $\cot^{-1}(x) = 0$ হলে, $\tan^{-1}x = ?$

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) ∞ (d) π

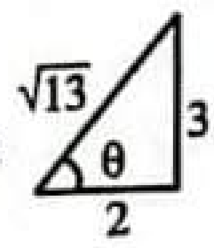
Sol^n: (b); $\cot^{-1}x + \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 + \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} \therefore \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

Example-06: $\sin^{-1}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \cos^{-1}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ এর মান = ?

(a) 180° (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{8}$

Sol^n: (b); $\therefore \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ হয়।

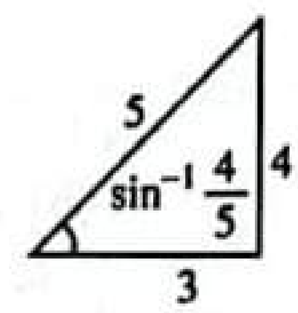
Example-07: $\tan^{-1}\frac{2}{3}+\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{13}}=?$ **[DU'18-19]**

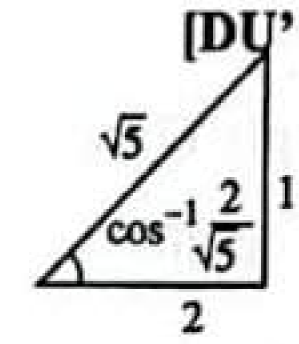
Sol^n: 

$\therefore \tan^{-1}\frac{2}{3}+\tan^{-1}\frac{3}{2}=\tan^{-1}\frac{2}{3}+\cot^{-1}\frac{2}{3}=\frac{\pi}{2}$

Example-08: $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ -এর মান নির্ণয় কর। **[DU' 21-22]**

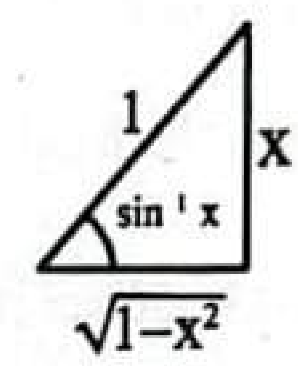
Sol^n: $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{3}\frac{1}{2}}=\tan^{-1}\frac{11}{2}$





Example-09: cot $(\sin^{-1}x)=?$

(a) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ (b) $\frac{1}{x}$ (c) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) x



Sol^n: (a); $\cot(\sin^{-1}x)=\cot\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ **(Ans.)**

Example-10: $\tan^{-1}2+\cot^{-1}\frac{1}{3}=?$

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{5\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

Sol^n: (c); $xy<1 \therefore \tan^{-1}2+\cot^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}2+\tan^{-1}3$

$=\tan^{-1}\frac{2+3}{1-6}=\tan^{-1}(-1)=\tan^{-1}\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{4}$

Example-11: $\tan^{-1}6+\tan^{-1}\frac{7}{5}=?$

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{3\pi}{2}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

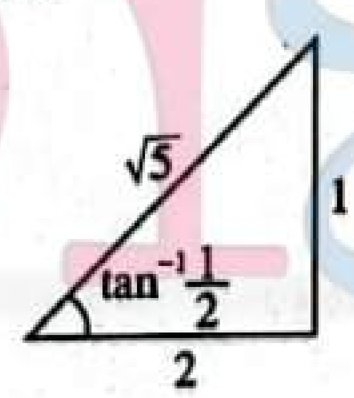
Sol^n: (c); এখানে, $xy>1 \therefore \tan^{-1}6+\tan^{-1}\frac{7}{5}=\pi+\tan^{-1}\frac{6+\frac{7}{5}}{1-6.\frac{7}{5}}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

Example-12: $\text{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)-3\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3})=?$ **[DU' 21-22]**

Sol^n: $\text{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)-3\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3})$

$=\{\text{cosec}(\text{cosec}^{-1}\sqrt{5})\}^2-3.\sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$=5-3\times\frac{4}{3}=1$

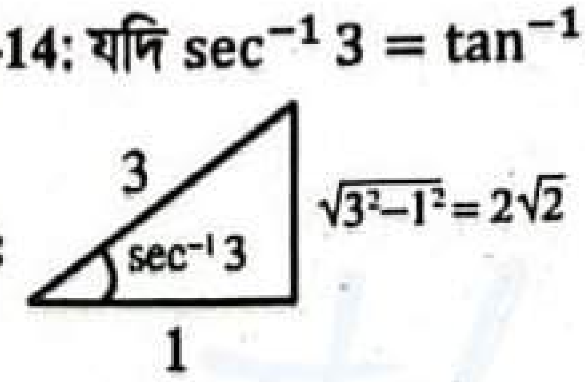


Example-13: $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{\pi}{2}$ হলে, $x^2+y^2=?$ **[KU'17-18, DU'17-18]**

Sol^n: $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin^{-1}x+\cos^{-1}\sqrt{1-y^2}=\frac{\pi}{2}$

আবার, আমরা জানি, $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ $\therefore x=\sqrt{1-y^2}\Rightarrow x^2=1-y^2\Rightarrow x^2+y^2=1$ **(Ans.)**

Example-14: যদি $\sec^{-1}3=\tan^{-1}x$ হয়, তবে x এর মান কত? **[GST'20-21]**

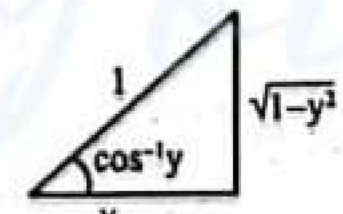
Sol^n: 

$\sec^{-1}3=\tan^{-1}x\Rightarrow\tan^{-1}(2\sqrt{2})=\tan^{-1}x \therefore x=2\sqrt{2}$ **(Ans.)**

Example-15. যদি $x=\sin\cos^{-1}y$ হয়, তবে (x^2+y^2) এর মান কোনটি? **[JU'19-20]**

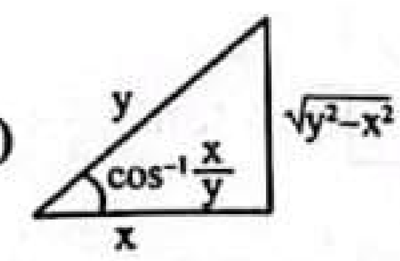
Sol^n: $x=\sin\cos^{-1}y\Rightarrow x=\sin\sin^{-1}\sqrt{1-y^2}$

$\Rightarrow x=\sqrt{1-y^2}\ \Rightarrow x^2=1-y^2\ \therefore x^2+y^2=1$



Example-11. $\operatorname{cosec}\cos^{-1}\frac{x}{y}=?$

Solⁿ: চিত্র হতে পাই, $\operatorname{cosec}\cos^{-1}\frac{x}{y}=\operatorname{cosec}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}=\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}$ **(Ans.)**

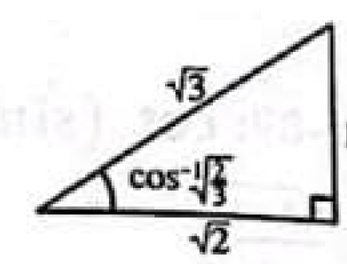


Example-12. $\tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}=$ কত? **[RU'22-23]**

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 0°

Solⁿ: (a); $\tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$=\tan^{-1}\sin\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=30°$

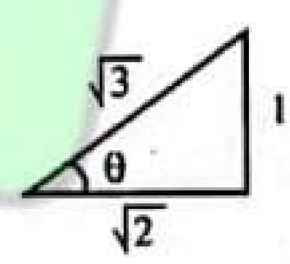


Example-13: $\arctan\left\{\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ এর মান কত? **[DU'13-14]**

Solⁿ: $\arctan\left\{\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

$=\arctan\left\{\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

$=\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$



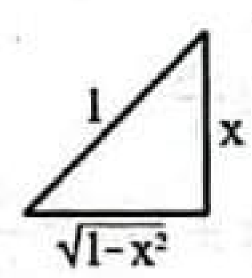
$\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$

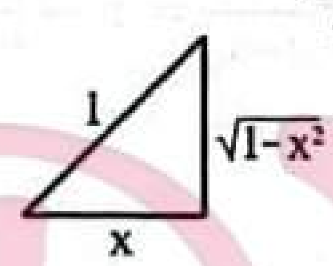
Example-14. $\cos\ \tan^{-1}\cot\ \sin^{-1}x=?$ **[JU' 09-10, DU' 11-12, RU' 09-10]**

Solⁿ: $\cos\ \tan^{-1}\cot\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

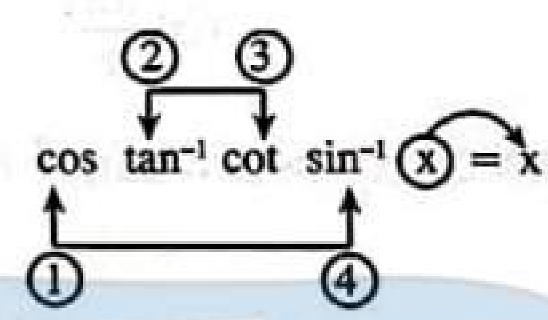
$=\cos\ \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$=\cos\ \cos^{-1}x=x$





Shortcut:



(1), (4) নং এবং (2), (3) নং অবস্থানে Cofunction থাকলে ডানপাশে যা থাকবে তাই উত্তর হবে।

(যদি (4) নং অবস্থানে অবস্থানরত ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হয়)

Example-15. $\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\cot^{-1}3\right)$ এর মান কত? **[JU'19-20]**

Solⁿ: এখানে, $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\cot^{-1}3=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$

$\therefore\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\cot^{-1}3\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(Ans.)**

Example-16. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=?$ **[KU' 16-17]**

Solⁿ: $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{10}}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\tan^{-1}\frac{7}{9}+\tan^{-1}\frac{1}{8}$

$=\tan^{-1}\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{72}}=\tan^{-1}\frac{65}{65}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

Example-17: $\tan^{-1}\frac{m}{n}-\tan^{-1}\frac{m-n}{m+n}=?$

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $-\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $-\frac{\pi}{4}$

Solⁿ: (c); $\tan^{-1}\frac{m}{n}-\tan^{-1}\frac{m-n}{m+n}=\tan^{-1}\frac{\frac{m}{n}-\frac{m-n}{m+n}}{1+\frac{m}{n}\cdot\frac{m-n}{m+n}}=\tan^{-1}\frac{m^2+mn-mn+n^2}{mn+n^2+m^2-mn}=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$

Example-18. যদি $\tan^{-1}2+\tan^{-1}3+\tan^{-1}4=\theta$ হয়, তবে $\tan\theta=$? **[Agri. Guccho'20-21]**

Sol^n: $\tan^{-1}2+\tan^{-1}3+\tan^{-1}4=\theta$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{2+3+4-2\times3\times4}{1-2\times3-3\times4-4\times2}=\theta \Rightarrow \tan^{-1}\frac{3}{5}=\theta \therefore \tan\theta=\frac{3}{5}$ **(Ans.)**

Example-19. $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3$ এর মান কত? **[JU'22-23, 19-20]**

Sol^n: $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3=\tan^{-1}\frac{1+2}{1-1.2}+\tan^{-1}3=\tan^{-1}(-3)+\tan^{-1}3$

$=\tan^{-1}\frac{-3+3}{1-(-3)\times3}=\tan^{-1}0=\pi$ [এক্ষেত্রে কোণগুলো ধনাত্মক বলে এদের যোগফল 0 হবে না।

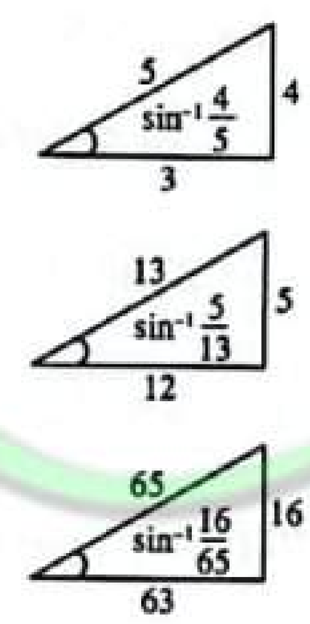
Example-20. মান নির্ণয় কর: $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}$ **[RU'19-20]**

Sol^n: $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{5}{12}+\sin^{-1}\frac{16}{65}$

$=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{12}}{1-\frac{20}{36}}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\tan^{-1}\frac{\frac{16+5}{12}}{\frac{16}{36}}+\sin^{-1}\frac{16}{65}$

$=\tan^{-1}\left(\frac{21}{12}\times\frac{36}{16}\right)+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\tan^{-1}\frac{63}{16}+\sin^{-1}\frac{16}{65}$

$=\tan^{-1}\frac{63}{16}+\cot^{-1}\frac{63}{16}=\frac{\pi}{2}$



Type-02: বিপরীত ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের প্রমাণ সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

এক্ষেত্রে যা চাওয়া হয়েছে তার সাথে মিল রেখে সমাধান করে এগিয়ে যেতে হবে। কোনো সমস্যা সমাধানের একাধিক পদ্ধতি থাকতে পারে। এর মধ্যে সর্বোৎকৃষ্ট পদ্ধতি বেছে করাই বুদ্ধিদীপ্ত কাজ।

০৭

Problems

Example-21. দেখাও যে, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$. **[DU' 20-21]**

Sol^n: ধরি, $\tan A=x \therefore A=\tan^{-1}x$ এবং $\tan B=y \therefore B=\tan^{-1}y$

$\therefore \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{x+y}{1-xy}$; $A+B=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

$\therefore \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ **[Showed]**

Example-22. যদি $A+B+C=\pi$; $\tan^{-1}2=A$ এবং $\tan^{-1}3=B$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $C=\frac{\pi}{4}$. **[JnU'19-20]**

Sol^n: $\because A+B+C=\pi$; $\tan^{-1}2=A$; $\tan^{-1}3=B$

$\therefore A+B=\pi-C$ এবং $\tan A=2$ এবং $\tan B=3 \therefore \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B} \Rightarrow \tan(\pi-C)=\frac{2+3}{1-2\times3}$

$\Rightarrow -\tan C=-1 \Rightarrow \tan C=\tan\frac{\pi}{4} \therefore C=\frac{\pi}{4}$ **[Proved]**

Example-23. প্রমাণ কর: $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$। **[RU'19-20]**

Sol^n: $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{2}{9}}\right)=\tan^{-1}\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\times2\tan^{-1}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$ **[Proved]**

Example-24: $\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2}+\tan^{-1}\frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2}+\tan^{-1}\frac{c^2-b^2}{1+c^2a^2}=?$

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\frac{1}{2}$

Sol^n: (a); $\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2}+\tan^{-1}\frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2}+\tan^{-1}\frac{c^2-b^2}{1+c^2a^2}$
$=\tan^{-1}a^2-\tan^{-1}b^2+\tan^{-1}b^2-\tan^{-1}c^2+\tan^{-1}c^2-\tan^{-1}a^2=0$ **(Ans.)**

Example-25: $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}-\cot^{-1}2=?$

(a) $\tan^{-1}\frac{27}{29}$ (b) $\tan^{-1}\frac{28}{29}$ (c) $\tan^{-1}\frac{30}{29}$ (d) $\tan^{-1}\frac{41}{28}$

Sol^n: (b); Process-01: $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}-\cot^{-1}2=\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}-\cot^{-1}2$

[$\because$ এক্ষেত্রে $\frac{1}{2}$ সরানোর জন্য $\frac{5}{13}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ধরে x এর মান নির্ণয় করে সূত্র খাটাতে হবে যেন $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}x$ প্রয়োগ করা যায় $\therefore \frac{5}{13}=\frac{1-x^2}{1+x^2}\Rightarrow 5+5x^2=13-13x^2\Rightarrow 18x^2=8\Rightarrow x^2=\frac{4}{9}\therefore x=\frac{2}{3}\quad\therefore x\neq-\frac{2}{3}$]

$=\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot 2\tan^{-1}\frac{2}{3}-\tan^{-1}\frac{1}{2}=\sin^{-1}\frac{3}{5}+\tan^{-1}\frac{2}{3}-\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}-\tan^{-1}\frac{1}{2}$

$=\tan^{-1}\frac{17}{6}-\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{17}{6}-\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{\frac{17}{6}-\frac{1}{2}}{1+\frac{17}{6}\cdot\frac{1}{2}}=\tan^{-1}\frac{28}{29}$

Process # 02: $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}-\cot^{-1}2=\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{3}-\tan^{-1}\frac{1}{2}$

[$\because \frac{1}{2}\cos^{-1}x=\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\therefore\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{1+\frac{5}{13}}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{8}{13}\times\frac{13}{18}}=\tan^{-1}\frac{2}{3}$]

$=\tan^{-1}\frac{\frac{3}{9}+\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}-\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{17}{6}-\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{\frac{17}{6}-\frac{1}{2}}{1+\frac{17}{6}\cdot\frac{1}{2}}=\tan^{-1}\frac{28}{29}$

Type-03: বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের সমীকরণের সমাধান

Concept

একাধিক বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন থাকলে প্রতিটিকে যেকোনো এক ধরনের বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে রূপান্তর করতে হবে এবং অতঃপর সমাধান করতে হবে।

Problems

Example-26. সমাধান কর: $\tan^{-1}x+2\cot^{-1}x=\frac{2}{3}\pi$

Sol^n: $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{2}{3}\pi\Rightarrow\frac{\pi}{2}+\cot^{-1}x=\frac{2}{3}\pi\Rightarrow\cot^{-1}x=\frac{\pi}{6}\therefore x=\sqrt{3}$

Example-27. $\sec^{-1}\frac{x}{a}-\sec^{-1}\frac{x}{b}=\sec^{-1}b-\sec^{-1}a$ হলে x =?

Sol^n: $\sec^{-1}\frac{x}{a}-\sec^{-1}\frac{x}{b}=\sec^{-1}b-\sec^{-1}b-\sec^{-1}a\Rightarrow\cos^{-1}\frac{a}{x}-\cos^{-1}\frac{b}{x}=\cos^{-1}\frac{1}{b}-\cos^{-1}\frac{1}{a}$
$\Rightarrow\cos^{-1}\frac{a}{x}+\cos^{-1}\frac{1}{a}=\cos^{-1}\frac{b}{x}+\cos^{-1}\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{a}{x}\times\frac{1}{a}-\frac{\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{1-a^2}}{xa}=\frac{b}{x}\times\frac{1}{b}-\frac{\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{1-b^2}}{bx}$
$\Rightarrow\frac{\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{1-a^2}}{xa}=\frac{\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{1-b^2}}{bx}\Rightarrow b^2x^2-x^2a^2b^2-a^2b^2\mp a^4b^2=a^2x^2-x^2b^2a^2-a^2b^2+a^2b^4$
$\Rightarrow x^2(b^2-a^2)=a^2b^2=a^2b^2(b^2-a^2)\therefore x=\pm ab$
শুদ্ধি পরীক্ষা করে পাই, x = ab

Example-28. $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$ হলে x =?

Sol^n: $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x\Rightarrow 2\tan^{-1}a-2\tan^{-1}b=2\tan^{-1}x$
$\Rightarrow\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}=\tan^{-1}x\Rightarrow x=\frac{a-b}{1+ab}$ **(Ans.)**

Example-29. $\tan^{-1}(x+2)+\tan^{-1}(x-2)=\tan^{-1}\frac{1}{2}$ হলে $x=$?

Sol^n: $\tan^{-1}(x+2)+\tan^{-1}(x-2)=\tan^{-1}\frac{1}{2}\Rightarrow \tan^{-1}\frac{x+2+x-2}{1-(x+2)(x-2)}=\tan^{-1}\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2+4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{2x}{5-x^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow 4x=5-x^2\Rightarrow x^2+4x-5=0\Rightarrow x^2+5x-x-5=0$

$\Rightarrow x(x+5)-1(x+5)=0\Rightarrow (x-1)(x+5)=0\ \therefore x=1,-5$ কিন্তু $x\neq -5\ \therefore x=1$ **(Ans.)**

Example-30: $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ হলে, $x=$?

(a) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\pm\frac{1}{2}$ (d) $\pm\frac{1}{3}$

Sol^n: (a); $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x\Rightarrow 2\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}=\tan^{-1}x$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{2.\frac{1-x}{1+x}}{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}=\tan^{-1}x\Rightarrow \frac{2(1-x^2)}{4x}=x\Rightarrow 6x^2=2\ \therefore x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Example-31. যদি $\tan^{-1}\left(x+\frac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(x-\frac{1}{3}\right)=\tan^{-1}2$, তাহলে x এর মান হবে কত? **[DU'16-17]**

Sol^n: $\tan^{-1}\left(x+\frac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(x-\frac{1}{3}\right)=\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{3}+x-\frac{1}{3}}{1-\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\tan^{-1}\frac{2x}{\frac{10}{9}-x^2}=\tan^{-1}2$

$\Rightarrow 2x=\frac{20}{9}-2x^2\Rightarrow 9x^2+9x-10=0\ \therefore x=\frac{2}{3},-\frac{5}{3}$ কিন্তু $x\neq -\frac{5}{3}\ \therefore x=\frac{2}{3}$ **(Ans.)**

Example-32. $\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x-1)=\tan^{-1}3x$

Sol^n: $\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)=\tan^{-1}3x-\tan^{-1}x\Rightarrow \tan^{-1}\frac{x+1+x-1}{1-(x^2-1)}\Rightarrow \tan^{-1}\frac{3x-x}{1+3x^2}$

$\Rightarrow \frac{2x}{2-x^2}=\frac{2x}{1+3x^2}\Rightarrow 2x(1+3x^2)-2x(2-x^2)=0\Rightarrow 2x(2x+1)(2x-1)=0\ \therefore x=0,\pm\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

Example-33. $\sin^{-1}(1-x)=\cos^{-1}x-\sin^{-1}x$

Sol^n: $\sin^{-1}(1-x)=\cos^{-1}x-\sin^{-1}x$

$\Rightarrow \sin^{-1}(1-x)=\cos^{-1}x-\sin^{-1}x\Rightarrow 1-x=\sin(\cos^{-1}x-\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow 1-x=\sin(\cos^{-1}x).\cos(\sin^{-1}x)-\cos(\cos^{-1}x)\sin(\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow 1-x=\left(\sin\ \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right).\left(\cos\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)-(x.x)$

$\Rightarrow 1-x=\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-x^2}-x^2\Rightarrow 1-x=1-x^2-x^2\Rightarrow 2x^2-x=0\Rightarrow x(2x-1)=0\ \therefore x=0,\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

০৭

Example-34. যদি $\tan\left(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)=\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ হয় তাহলে $x=$? **[GST'22-23]**

(a) $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (c) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{5}{3}$

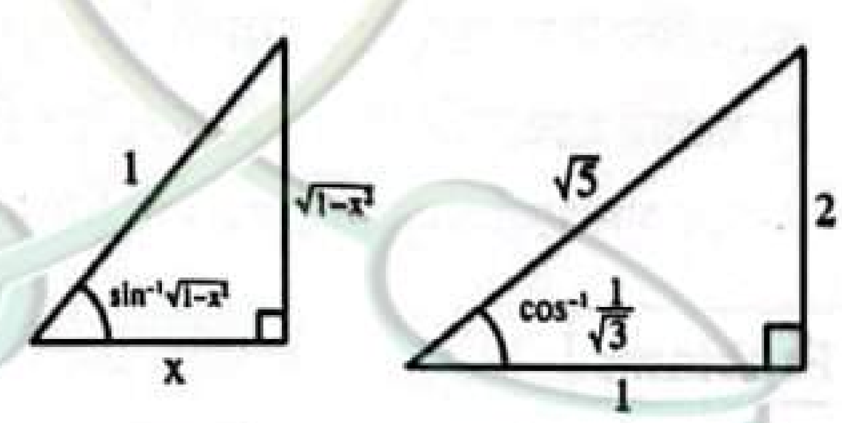
Sol^n: (a); $\tan\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}=\sin\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$\Rightarrow \tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\sin\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow \frac{1-x^2}{x^2}=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow 5-5x^2=4x^2\Rightarrow 9x^2=5\ \therefore x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ও $x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ উভয়ই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$



Example-35: $\tan\ \cos^{-1}x-\sin\ \cot^{-1}\frac{1}{2}=0$ হলে, x এর মান = ?

(a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (c) $\sqrt{5}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

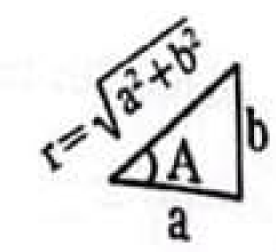
Sol^n: (b); $\tan\ \cos^{-1}x-\sin\ \cot^{-1}\frac{1}{2}=0\Rightarrow \tan\ \cos^{-1}x=\sin\ \sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \cos^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\cos^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}\ \therefore\ x=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Type-04: $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ [যেখানে, $|c| \le \sqrt{a^2+b^2}$] আকৃতির ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সংক্রান্ত

Concept

এ ধরনের অংকে উভয়পক্ষকে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করে $\cos(A \pm B)$ এর সূত্র প্রয়োগ করাই উত্তম।



$a\cos\theta + b\sin\theta = c$; যেখানে, $|c| \le \sqrt{a^2+b^2}$

মনে করি, $a = r\cos A, b = r\sin A$ যাতে r এর মান যোগবোধক হয়।

তাহলে $r = \sqrt{a^2+b^2}$. এবং $\sin A = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{r}, \cos A = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{r}$

a এবং b এর মানের চিহ্ন দ্বারা বোঝা যাবে A কোণটি কোন চতুর্ভাগে আছে, a এবং b এর মান দেওয়া আছে বলে, r এবং A এর মান সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যাবে।

প্রদত্ত সমীকরণকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়: $r\cos A\cos\theta + r\sin A\sin\theta = c \Rightarrow r\cos(\theta - A) = c$

$\Rightarrow \cos(\theta - A) = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta$ (মনে কর) তাহলে, $\theta - A = 2n\pi \pm \beta$

$\therefore\ \theta = 2n\pi + A \pm \beta = 2n\pi \pm \beta + A,$ [$n \in \mathbb{Z}$ যেখানে $A = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ এবং $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Note: $-1 \le \cos(\theta - A) \le 1 \Rightarrow |\cos(\theta - A)| \le 1 \Rightarrow \left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1 \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1 \therefore \boxed{|c| \le \sqrt{a^2+b^2}}$

Problems

Example-36. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। **[DU'11-12, 04-05]**

Solⁿ: $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = 1$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{3}\sin\theta = 1 \Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 0° \Rightarrow \theta - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

Example-37. $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ হলে, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে θ এর মান কত? **[JU'18-19]**

Solⁿ: $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = 1$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\sin\theta + \sin\frac{\pi}{4}\cos\theta = 1 \Rightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\left[\because 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right] \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

Type-05: বর্গসূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত

Concept

অপ্রাসঙ্গিক/অবান্তর মূল: ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সমাধান করার সময় সমীকরণের উভয়পক্ষে বর্গ করলে প্রাপ্ত সমাধানের মূলগুলোর প্রত্যেকটি প্রদত্ত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না। যে মূলগুলো সিদ্ধ করে না তাদেরকে অপ্রাসঙ্গিক/অবান্তর মূল বলে। অবান্তর মূলগুলো সমাধান থেকে বাদ দিতে হবে।

Problems

Example-38. $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2\sin 2\theta}$

Solⁿ: $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2\sin 2\theta} \Rightarrow \left(\sqrt{\sin\theta}\right)^2 - 2\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta} + \left(\sqrt{\cos\theta}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{\sin\theta} - \sqrt{\cos\theta}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\sin\theta} = \sqrt{\cos\theta} \Rightarrow \sqrt{\tan\theta} = 1 \Rightarrow \tan\theta = 1$ [বর্গ করে] $\Rightarrow \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$

কিন্তু n বিজোড় হলে θ তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে যেখানে $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ ঋণাত্মক। ফলে $\sqrt{\sin\theta}$ ও $\sqrt{\cos\theta}$ অবাস্তব হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $2n\pi + \frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$

Type-06: $\cot\theta, \tan\theta, \sec\theta, \operatorname{cosec}\theta$ বিশিষ্ট ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

এই টাইপের সমস্যাগুলোতে tan বা cot এর সূত্র আনার চেষ্টা করতে হবে। যদি সূত্র না আনা যায়, তাহলে, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ আকারে ভেঙ্গে সমাধান করতে হবে।

Problems

Example-39. $\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta = \sqrt{3}$ হলে θ এর মান কত? [যখন n এর মান শূন্য বা পূর্ণসংখ্যা] **[KU'18-19]**

Sol^n: $\tan\theta + \tan 2\theta = \sqrt{3}(1 - \tan\theta\tan 2\theta) \Rightarrow \frac{\tan\theta + \tan 2\theta}{1 - \tan\theta\tan 2\theta} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan 3\theta = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow 3\theta = n\pi + \frac{\pi}{3} \quad \therefore \theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$ $[n \in \mathbb{Z}]$ **(Ans.)**

Example-40. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x . \tan 2x . \tan 3x$

Sol^n: $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x . \tan 2x . \tan 3x$

$\Rightarrow \tan 3x\,(1 - \tan x . \tan 2x) = -(\tan x + \tan 2x)$

$\Rightarrow \tan 3x = \frac{-(\tan x + \tan 2x)}{1 - \tan x . \tan 2x} \Rightarrow \tan 3x = -\tan(x + 2x)$

$\Rightarrow \tan 3x = -\tan 3x \Rightarrow 2\tan 3x = 0 \Rightarrow \tan 3x = 0$

$\therefore 3x = n\pi \; \therefore x = \frac{1}{3}n\pi$; Where, $n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

Example-41. $\tan x + \tan 3x = 0$ এর সমাধান কী হবে? **[RU'20-21]**

Sol^n: $\tan x + \tan 3x = \tan 4x\,(1 - \tan x\tan 3x) = 0 \therefore \tan 4x = 0 = \tan(n\pi) \therefore x = \frac{n\pi}{4}$

Example-42: $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan\theta\tan 2\theta = 1$ হলে θ =?

(a) $\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$ (b) $\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{12}; n \in \mathbb{Z}$ (c) $\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{8}; n \in \mathbb{Z}$ (d) None of these

Sol^n: (b); $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan\theta\tan 2\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta + \tan 2\theta = 1 - \tan\theta\tan 2\theta \Rightarrow \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta\tan\theta} = 1$ [$\because 1 - \tan\theta\tan 2\theta \neq 0$ শর্তে লেখা যায়]

$\Rightarrow \tan(2\theta + \theta) = 1 \Rightarrow \tan 3\theta = \tan\frac{\pi}{4} \therefore 3\theta = n\pi + \frac{\pi}{4} \therefore \theta = \frac{1}{3}n\pi + \frac{\pi}{12}; n \in \mathbb{Z}$

Example-43. $\cot\theta\cot 3\theta = 1$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। **[DU'18-19]**

Sol^n: $\frac{\cos\theta\cos 3\theta}{\sin\theta\sin 3\theta} = 1 \Rightarrow \cos\theta\cos 3\theta - \sin\theta\sin 3\theta = 0$

$\Rightarrow \cos(\theta + 3\theta) = 0 \Rightarrow \cos 4\theta = 0 \Rightarrow 4\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{8} [n \in \mathbb{Z}]$ **(Ans.)**

Example-44. $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3} (0 < \theta < \pi)$ হলে, θ এর মান হবে- **[DU 20-21]**

Sol^n: $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3} \;\; (0 < \theta < \pi)$ ……… (i)

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1 \Rightarrow (\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

$\Rightarrow \sqrt{3}(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = 1 \therefore \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ……… (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$

$n = 0, 1$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Example-45. সমাধান কর: $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=4$

Solⁿ: $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}=4 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta+\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2.2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos 2\theta\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2\theta \Rightarrow \cos 2\theta=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore 2\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ $\therefore \theta=(6n\pm1)\frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

Example-46. $\cot\theta+\tan\theta=2\sec\theta$

Solⁿ: $\cot\theta+\tan\theta=2\sec\theta \Rightarrow \frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}=2\sec\theta \Rightarrow 1+\tan^2\theta=2\sec\theta\tan\theta$

$\Rightarrow \sec^2\theta=2.\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} \Rightarrow \cos^2\theta-2\sin\theta.\cos^2\theta=0$

$\Rightarrow \cos^2\theta(1-2\sin\theta)=0$

হয়, $\cos\theta=0 \therefore \theta=\frac{(2n+1)\pi}{2}$ অথবা, $\sin\theta=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} \therefore \theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ $[n\in\mathbb{Z}\ldots\ldots]$

কিন্তু, $\cos\theta\neq0 \therefore \theta\neq(2n+1)\frac{\pi}{2} \therefore \theta=n\pi+(-1)^n.\frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

Type-07: sin θ, cos θ বিজোড় সংখ্যক পদ সম্বলিত সমীকরণ সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

যখন সমীকরণে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ কোণের বিজোড় সংখ্যক পদ থাকে তখন $\sin C\pm\sin D, \cos C\pm\cos D$ এর সূত্র ব্যবহার করলে হবে। প্রয়োজনে, $1\pm\cos 2\theta$ এর সূত্র ব্যবহার করা যেতে পারে।

Problems

Example-47. $\sin x=\cos x$ হলে, x এর মান কত? [JU'14-15]

Solⁿ: $\sin x=\cos x \Rightarrow \sin x-\cos x=0 \Rightarrow \sin(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$

$\Rightarrow 2\times\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)=0 \Rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\left[\because \cos\frac{\pi}{4}\neq0\right]$

$\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=0,\pi,\ldots\ldots\ldots \therefore x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\ldots$ **(Ans.)**

Example-48. সমাধান কর: $\sin 2x-\sin 4x+\sin 6x=0$. [RU'19-20]

Solⁿ: $\sin 2x-\sin 4x+\sin 6x=0 \Rightarrow 2\sin 4x\cos 2x-\sin 4x=0 \Rightarrow \sin 4x(2\cos 2x-1)=0$

হয়, $\sin 4x=0 \therefore 4x=n\pi \therefore x=n\frac{\pi}{4}$ অথবা, $2\cos 2x-1=0 \Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore 2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3} \therefore x=n\pi\pm\frac{\pi}{6} \therefore x=n\frac{\pi}{4}, n\pi\pm\frac{\pi}{6}$ $[n\in\mathbb{Z}]$

Example-49. $\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 2\theta=1+\cos 2\theta+\cos\theta$ [DU' 19-20]

Solⁿ: $\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 2\theta=1+\cos 2\theta+\cos\theta$

$\Rightarrow 2\sin 2\theta\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta=2\cos^2\theta+\cos\theta$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta(2\cos\theta+1)=\cos\theta(2\cos\theta+1) \Rightarrow \cos\theta(2\sin\theta-1)(2\cos\theta+1)=0$

হয়, $\cos\theta=0$ অথবা, $\sin\theta=\frac{1}{2}$ অথবা, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}; \theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}; \theta=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}$ **(Ans.)**

Type-08: $\sin\theta, \cos\theta$ গুণ আকারে থাকলে

Concept

$\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ গুণ আকারে থাকলে $2\sin A\cos B, 2\cos A\sin B, 2\cos A\cos B, 2\sin A\sin B$ এর সূত্রগুলো ব্যবহার করতে সহজ হবে।

Problems

Example-50. $\sin 5\theta\cos\theta = \sin 6\theta\cos 2\theta$

Solⁿ: $\sin 5\theta\cos\theta = \sin 6\theta\cos 2\theta \Rightarrow 2\sin 5\theta\cos\theta = 2\sin 6\theta\cos 2\theta \Rightarrow \sin 6\theta + \sin 4\theta = \sin 8\theta + \sin 4\theta$
$\Rightarrow \sin 8\theta - \sin 6\theta = 0 \Rightarrow 2\cos 7\theta\sin\theta = 0 \therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{14}, n\pi$ $[n \in \mathbb{Z}]$ **(Ans.)**

Example-51. $\cos 9x\cos 7x = \cos 5x\cos 3x; \left[-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right]$

Solⁿ: $\cos 9x\cos 7x = \cos 5x\cos 3x \Rightarrow 2\cos 9x\cos 7x = 2\cos 5x\cos 3x$
$\Rightarrow \cos 16x + \cos 2x = \cos 8x + \cos 2x \Rightarrow \cos 8x - \cos 16x = 0 \Rightarrow 2\sin 12x.\sin 4x = 0$
হয়, $\sin 12x = 0 \Rightarrow 12x = n\pi \therefore x = \frac{n\pi}{12}$ $[n \in \mathbb{Z}]$
অথবা, $\sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = n\pi \therefore x = \frac{n\pi}{4}$ $[n \in \mathbb{Z}]$
যখন, $n = 0,\ x = 0;\ n = 1,\ x = \frac{\pi}{12}$
$n = -1,\ x = -\frac{\pi}{12};\ n = 2,\ x = \frac{\pi}{6};\ n = -2,\ x = -\frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

Example-52. সমাধান কর : $4\cos x\cos 2x\cos 3x = 1; 0 < x < \pi$

Solⁿ: $4\cos x\cos 2x\cos 3x = 1 \Rightarrow 2\cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) = 1$
$\Rightarrow 2\cos 2x\cos 4x + 2\cos^2 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos 2x\cos 4x + \cos 4x = 0 \Rightarrow \cos 4x(2\cos 2x + 1) = 0$
So, $\cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{8}$
অথবা, $2\cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{-1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \therefore 2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
$x = n\pi \pm \frac{\pi}{3} \therefore x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$ **(Ans.)**

০৭

Type-09: $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \sec\theta$-এর দ্বিঘাত রাশি সম্বলিত পদ থাকলে

Concept

সবগুলো ত্রিকোণমিতিক ফাংশনকে যেকোনো একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে রূপান্তরিত করতে হবে ও অতঃপর দ্বিঘাত রাশির সমাধান ও ত্রিকোণমিতিক সমাধান করতে হবে।

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
- $\mathrm{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

Problems

Example-53. If $\cot^2\theta - (\sqrt{3}+1)\cot\theta + \sqrt{3} = 0,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, then θ =? **[DU'15-16]**

Solⁿ: $\cot^2\theta - (\sqrt{3}+1)\cot\theta + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cot^2\theta - \sqrt{3}\cot\theta - \cot\theta + \sqrt{3} = 0$
$\Rightarrow \cot\theta(\cot\theta - \sqrt{3}) - 1(\cot\theta - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow (\cot\theta - \sqrt{3})(\cot\theta - 1) = 0$
$\therefore \cot\theta = \sqrt{3}, \cot\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

Example-54. $2\cos^2 x + 3\cos x = 2, 0 < \theta < 2\pi$ এর সমাধান সেট- [GST'22-23]

(a) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ (b) $\left\{\frac{\pi}{3}, \pi\right\}$ (c) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ (d) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

Sol^n: (a); $2\cos^2 x + 3\cos x = 2 \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + 4\cos x - \cos x - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos x(\cos x + 2) - (\cos x + 2) = 0 \Rightarrow (\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$

কিন্তু $\cos x \neq -2 [\because -1 \leq \cos x \leq 1]$

$\therefore \cos x = \frac{1}{2} [\because 0 < x < 2\pi]$ এবং $\cos x$ এর চিহ্ন " + ", মানে x ১ম অথবা ৪র্থ চতুর্ভাগে] $\therefore x = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

Example-55. $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ হলে, $\sec\theta$ এর মান কত? [JU'19-20]

Sol^n: $7(1 - \cos^2\theta) + 3\cos^2\theta = 4 \Rightarrow 7 - 7\cos^2\theta + 3\cos^2\theta - 4 = 0$

$= 3 - 4\cos^2\theta = 0 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \sec^2\theta = \frac{4}{3} \therefore \sec\theta = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

Example-56. সমাধান কর: $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}, 0 < \theta < \pi$ [DU'16-17]

Sol^n: $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3} [0 < \theta < \pi]$

$\Rightarrow 1 + 2\tan^2\theta = \frac{5}{3} \Rightarrow 2\tan^2\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \tan\theta = \tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$n = 0$ হলে $\theta = \frac{\pi}{6}$; [গ্রহণযোগ্য]

$n = 1$ হলে $\theta = \frac{5\pi}{6}$; [গ্রহণযোগ্য]

Example-57: $\sec^2\frac{x}{2} = 2\sqrt{2}\tan\frac{x}{2}$ হলে $x = ?$

(a) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2}$ (b) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}; n \in N$ (c) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$ (d) $n\pi + \frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

Sol^n: (c); $\sec^2\frac{x}{2} = 2\sqrt{2}\tan\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \Rightarrow 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$

$\Rightarrow \cos\frac{x}{2}\left(2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 1\right) = 0 \therefore \cos\frac{x}{2} = 0$; যা গ্রহণযোগ্য নয়,

$2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} \therefore x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

Example-58. যদি $2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta = 3$, তাহলে $\theta = ? \left[0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right]$ [JU'22-23, 19-20]

Sol^n: $2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta - 3 = 0 \Rightarrow 2(1 - \sin^2\theta) + 2\sqrt{2}\sin\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow -2\sin^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{2}\sin\theta)^2 - 2 \times \sqrt{2}\sin\theta \times 1 + (1)^2 = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{2}\sin\theta - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n + \frac{\pi}{4}$ $[n \in \mathbb{Z}]$ $n = 0$, then $\theta = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

Example-59: $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। [DU' 09-10, 03-04, CU' 12-13]

Sol^n: $4 - 4\cos^2\theta + 4\cos\theta = 5$

$\Rightarrow (2\cos\theta)^2 - 2.2\cos\theta + (1)^2 = 0 \Rightarrow (2\cos\theta - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2\cos\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

- **ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ:**

01. $\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\alpha$	06. $\tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$
02. $\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha$	07. $\sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$
03. $\tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha$	08. $\sin\theta = -1 \Rightarrow \theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$
04. $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$	09. $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2n\pi$
05. $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$	10. $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = (2n+1)\pi, n\in Z$

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জের ছক

ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ
$\sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}x$	$(-\infty, \infty)$ বা $\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1}x$	$(-\infty, \infty)$ বা $\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
$\sec^{-1}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ বা $\mathbb{R} - (-1, 1)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
$\text{cosec}^{-1}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ বা $\mathbb{R} - (-1, 1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম

MCQ

০৭

01. যদি $A + B + C = \pi$, $\tan^{-1}2 = A$ এবং $\tan^{-1}3 = B$ হয়, তবে C এর মান কত?
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $-\frac{\pi}{4}$

02. $\sec^{-1}x + \text{cosec}^{-1}x =$ কত?
(a) π (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

03. $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x =$ কত?
(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{3\pi}{2}$ (d) 0

04. $\sin^2 2\theta - 3\cos^2\theta = 0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান–
(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (b) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (c) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

05. $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান–
(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{5}$

06. $2\cos\theta = 1$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান–
(a) $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$ (b) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (c) $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$ (d) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

07. $\sin(4x+1)$ এর পর্যায় কত?
(a) 3π (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 2π (d) কোনটিই নয়

08. $2(\cos x + \sec x) = 5$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান–
(a) $n\pi + \frac{\pi}{3}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (d) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

09. $\sin(n\pi)$ -এর মান (যখন n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)-
(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) কোনটিই নয়

10. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = ?$
(a) $\sin^{-1}\sqrt{1+x^2}$ (b) $\sec^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$ (c) $\text{cosec}^{-1}x$ (d) কোনটিই নয়

11. $\sin\theta = 1$ হলে, θ এর মান (n শূন্য বা একটি পূর্ণ সংখ্যা)-
(a) $2n\pi$ (b) $\frac{n\pi}{2}$ (c) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (d) কোনটিই নয়

12. $\sin x - \cos x = 0$ এবং $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ হলে x এর মান-
(a) 0° (b) 45° (c) 90° (d) 60°

13. $\sin\theta + \cos\theta = 0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কত?
(a) $n\pi - \frac{\pi}{4}$ (b) $n\pi + \frac{\pi}{4}$ (c) $n\pi$ (d) কোনটিই নয়

14. $2\sin^{-1}x$ এর মান কোনটি সঠিক?
(a) $\sin^{-1}(x\sqrt{1-x^2})$ (b) $\sin^{-1}(2x^2-1)$ (c) $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ (d) $\sin^{-1}(x\sqrt{x^2-1})$

15. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \tan\theta = 2$ হলে, θ এর সঠিক মান কত?
(a) 60° (b) 45° (c) ±60° (d) কোনটিই নয়

16. $\cos 2x + \sin x = 1$ সমীকরণটির সমাধান হবে–
(a) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ (b) $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (c) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (d) কোনটিই নয়

17. $\tan^2\theta = 3\,\text{cosec}^2\theta - 1$ হলে $\tan\theta = ?$
(a) 3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\pm\sqrt{3}$

18. $\sin\cot^{-1}\cos\tan^{-1}x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ হলে $x = ?$
(a) $\pm\sqrt{2}$ (b) $\pm\sqrt{3}$ (c) $\pm\sqrt{5}$ (d) $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

19. $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x} - \tan^{-1}\sqrt{x}$ এর মান কত?
(a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) 0

20. $\arctan\left\{\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ সমান–
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

21. যদি $\sin^{-1}x = \theta$ হয়, তবে $\cos\theta$ এর মান কত?
(a) $1-x^2$ (b) $\sqrt{1-x^2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

22. $\cos\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = ?$
(a) $\sqrt{1-x^2}$ (b) x (c) 1 (d) x^2

23. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হলে, x^2+y^2 এর মান কত?
(a) -1 (b) 1 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) 2

24. $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ হলে $A + B = ?$
(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

25. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}\frac{1}{x} = ?$
(a) x (b) $\sqrt{1-x^2}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

26. $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x} = ?$
(a) $\tan^{-1}x$ (b) $\tan^{-1}x^2$ (c) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\sqrt{x}$ (d) $\tan^{-1}\sqrt{x}$

27. $\tan 2\theta \tan\theta = 1$ হলে $\theta = ?$
(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (b) $n\pi + \frac{\pi}{6}$ (c) $n\pi - \frac{\pi}{6}$ (d) b and c

28. কোন সম্পর্কটি সত্য নয়?
(a) $\sin^{-1}x = (\sin x)^{-1}$ (b) $\sin^2 x = (\sin x)^2$
(c) $\sin^{-1}x = \sin(2n\pi + \theta)$ (d) $\sin(\sin^{-1}x) = x$

29. নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক?
(a) $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}2x\sqrt{1-x^2}$ (b) $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}$
(c) $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}2x\sqrt{1-2x^2}$ (d) $2\sin^{-1}x = \cos^{-1}2x\sqrt{1-x^2}$

Written

30. দেখাও যে, $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}\frac{11}{2}$
31. মান নির্ণয় কর: $2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$
32. সমাধান কর: $\tan(\cos^{-1}x) = \sin(\tan^{-1}2)$
33. সমাধান কর: $\cot 2x = \cos x + \sin x$
34. সমাধান কর: $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$
35. সমাধান কর: $\cos\theta - \cos 7\theta = \sin 4\theta$
36. সমাধান কর: $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1, -2\pi < x < 2\pi$
37. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right) + \tan^{-1}(\cot A) + \tan^{-1}(\cot^3 A) = ?$
38. $\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}\sqrt{\cos 2\theta} = ?$
39. $\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) - \cos^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta}) = ?$

০৭

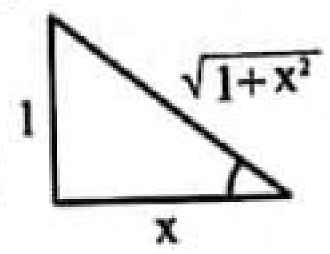
প্র্যাক্টিস প্রবলেমের সমাধান

MCQ

01. **Ans: (b);** $\frac{\pi}{4}$
02. **Ans: (d)** [Tips: x এর মান যেকোনো Degree Angle ধরে নিয়ে মান বের কর।]
03. **Sol^n: (b);** $\tan^{-1}A$ or, $x = \tan A$ or, $x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$ or, $\frac{\pi}{2} - A = \cot^{-1}x$ or, $\frac{\pi}{2} = \tan^{-1}x + \cot^{-1}x$
04. **Sol^n: (b);** $\sin^2 2\theta - 3\cos^2\theta = 0 \Rightarrow 4\sin^2\theta\cos^2\theta - 3\cos^2\theta = 0 \Rightarrow \cos^2\theta(4\sin^2\theta - 3) = 0$
$\therefore \cos\theta = 0$ অথবা, $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
05. **Sol^n: (a);** $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5 \Rightarrow 4(1 - \cos^2\theta + \cos\theta) - 5 = 0 \Rightarrow 4 - 4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 5 = 0$
$\Rightarrow 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow (2\cos\theta - 1)^2 = 0 \therefore \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
06. **Sol^n: (d);** $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
07. **Sol^n: (b);** $\sin(4x+1) = \sin(4x+1+2\pi) = \sin\left(4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1\right)$; পর্যায় $= \frac{\pi}{2}$
08. **Sol^n: (b);** $2(\cos x + \sec x) = 5 \Rightarrow 2\left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right) = 5 \Rightarrow 2\cos^2 x + 2 = 5\cos x$
$\Rightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$
Solve করে, $\cos x = 2$ অথবা, $\frac{1}{2} \therefore \cos x \neq 2, \therefore \cos x = \frac{1}{2} \therefore \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \therefore x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

09. **Sol^n: (c);** ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হচ্ছে $z_+ = \{0,1,2,3,4 \cdots\cdots\cdots\} \therefore \sin(n\pi) = 0$

10. **Sol^n: (b);** $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$



11. **Ans: (d);** কোনটিই নয়

12. **Sol^n: (b);** $\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \therefore x = 45°$

13. **Sol^n: (a);** $\sin\theta + \cos\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = -\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = -1 \therefore \theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$

14. **Ans: (c);** $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

15. **Sol^n: (c);** $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \tan\theta = 2 \Rightarrow \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2 \Rightarrow \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta} = 2 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
$\therefore n = 0$ হলে, $\theta = \pm\frac{\pi}{3} = \pm 60°$

16. **Sol^n: (a);** $\cos 2x + \sin x = 1 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x = 1 \Rightarrow \sin x(1 - 2\sin x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0, \frac{1}{2}$
$\therefore x = n\pi, n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

17. **Sol^n: (d);** $\tan^2\theta = 3\,\mathrm{cosec}^2\theta - 1 \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = 3\,\mathrm{cosec}^2\theta$
$\Rightarrow \sec^2\theta = 3\,\mathrm{cosec}^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta = 3 \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3}$

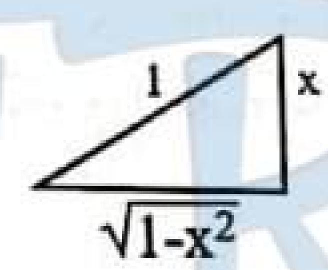
18. **Sol^n: (b);** $\sin\cot^{-1}\cos\tan^{-1} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1+x^2}{2+x^2} = \frac{4}{5}$
$\therefore 1 + x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

19. **Sol^n: (d);** $\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x} = 2\tan^{-1}\sqrt{x} \therefore \tan^{-1}\sqrt{x} - \tan^{-1}\sqrt{x} = 0$

20. **Sol^n: (d);** $[\arctan x = \tan^{-1} x]\mathrm{arc} = \tan\left\{\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\} = \frac{\pi}{6} = \tan\left\{\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} = \tan\frac{1}{\sqrt{3}}$

21. **Sol^n: (b);** $\sin^{-1} x = \theta \Rightarrow x = \sin\theta \therefore \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

22. **Sol^n: (a) ;** $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} \therefore \cos\cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$



23. **Sol^n: (b) ;** $\sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} y$ বা, $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} y\right)$ বা, $x = \cos\sin^{-1} y$ বা, $x = \sqrt{1-y^2}$
বা, $x^2 + y^2 = 1$

24. **Ans: (c);** $\frac{\pi}{2}$

25. **Ans: (c);** $\frac{1}{x}$

26. **Ans: (d);** $\tan^{-1}\sqrt{x}$

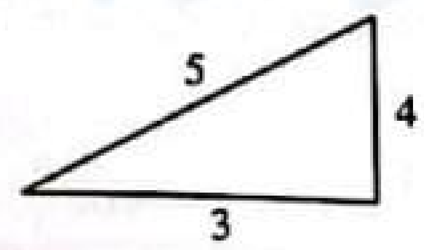
27. **Sol^n: (d);** $\tan\theta.\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = 1 \Rightarrow 2\tan^2\theta = 1 - \tan^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

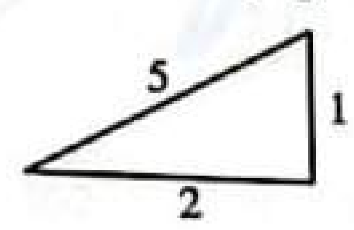
28. **Sol^n: (a);** $\sin^{-1} x$ যা একটি কোণ বুঝায় এবং $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ যা কোন বুঝায় না।

29. **Ans: (a);** $2\sin^{-1} x = \sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}$

Written

30. **Sol^n:** L. H. S $= \sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}} = \tan^{-1}\frac{11}{2} =$ R. H. S (**Showed**)



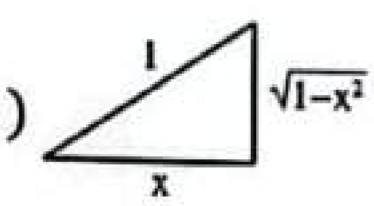


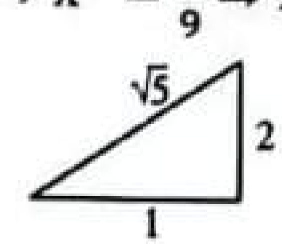
31. **Sol^n**: $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$

$=\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}}\right)=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

32. **Sol^n**: $\tan(\cos^{-1}x)=\sin(\tan^{-1}2)\Rightarrow\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow 5(1-x^2)=4x^2\Rightarrow 9x^2=5\Rightarrow x^2=\frac{5}{9}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ হলে LHS (−ve) কিন্তু RHS সর্বদা (+ve) $\therefore \boxed{x=\frac{\sqrt{5}}{3}}$ **(Ans.)**





33. **Sol^n**: $\cot 2x=\cos x+\sin x\Rightarrow\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\cos x+\sin x\Rightarrow\frac{\cos^2x-\sin^2x}{2\sin x\cos x}=\cos x+\sin x$

$\Rightarrow\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{2\sin x\cos x}=\cos x+\sin x\Rightarrow\cos x-\sin x=\sin 2x$

$\Rightarrow\cos^2x+\sin^2x-\sin 2x=\sin^2 2x$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 1-\sin 2x-\sin^2 2x=0\ \therefore \sin 2x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ কিন্তু $-1\le\sin 2x\le 1\ \therefore \sin 2x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\sin\alpha$

$\therefore x=\frac{1}{2}[n\pi+(-1)^n\alpha]$; যেখানে, $\sin\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ এবং $n\in\mathbb{Z}$ **(Ans.)**

34. **Sol^n**: $\cos x+\sin x=\cos 2x+\sin 2x\Rightarrow\cos x-\cos 2x=\sin 2x-\sin x$

$\Rightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=2\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}\Rightarrow\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)=0$

$\sin\frac{x}{2}=0$ হলে, $\frac{x}{2}=n\pi\Rightarrow x=2n\pi; n\in\mathbb{Z}$ **(Ans.)**

আবার, $\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=0\Rightarrow\tan\frac{3x}{2}=1=\tan\frac{\pi}{4}\ \therefore\frac{3x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{2}{3}\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right); n\in\mathbb{Z}$ **(Ans.)**

35. **Sol^n**: $\cos\theta-\cos 7\theta=\sin 4\theta\Rightarrow 2\sin 4\theta\sin 3\theta=\sin 4\theta$

$\therefore\sin 4\theta=0$ হলে, $4\theta=n\pi\Rightarrow\theta=\frac{n\pi}{4}; n\in\mathbb{Z}$ **(Ans.)**

আবার, $2\sin 3\theta=1\Rightarrow\sin 3\theta=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\ \therefore 3\theta=n\pi+(-1)^n.\frac{\pi}{6}\Rightarrow\theta=\frac{1}{3}\left\{n\pi+(-1)^n.\frac{\pi}{6}\right\}; n\in\mathbb{Z}$ **(Ans.)**

36. **Sol^n**: $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow x+\frac{\pi}{3}=n\pi+(-1)^n.\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=n\pi+(-1)^n.\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}; n\in\mathbb{Z}$

$-2\pi<x<2\pi$ ব্যবধিতে, $x=\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

37. **Sol^n**: $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right)+\tan^{-1}(\cot A)+\tan^{-1}(\cot^3A)$

$=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right)+\tan^{-1}\frac{\cot A+\cot^3A}{1-\cot A\cdot\cot^3A}=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right)+\tan^{-1}\frac{(\cot^2A+1)(\cot A)}{(1+\cot^2A)(1-\cot^2A)}$

$=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right)+\tan^{-1}\frac{\tan A}{\tan^2A-1}=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\tan A}{1-\tan^2A}\right)$

$=\tan^{-1}\left(\frac{\tan A}{1-\tan^2A}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\tan A}{1-\tan^2A}\right)=0$ **(Ans.)**

38. **Sol^n**: $\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)+\sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})$

$=\cos^{-1}(\sqrt{1-2\sin^2\theta})+\sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta}$ $[\because\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}]$

$=\cos^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})+\sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})=\frac{\pi}{2}$ $\left[\because\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}\right]$

39. **Sol^n**: $\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)-\cos^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta}=\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)-\sin^{-1}(\sqrt{1-(\sqrt{\cos 2\theta})^2}$

$=\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)-\sin^{-1}(\sqrt{1-\cos 2\theta})$

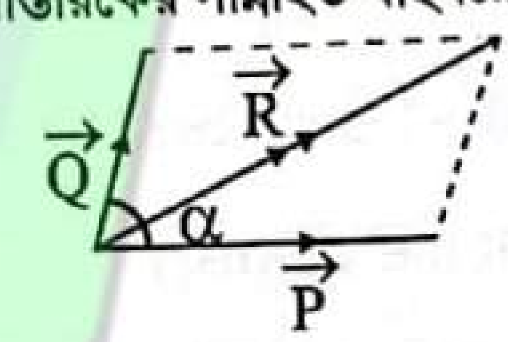
$=\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)-\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)=0$ $[\because 1-\cos\ 2\theta=2\ \sin^2\theta]$

০৭

অধ্যায় ০৮ স্থিতিবিদ্যা

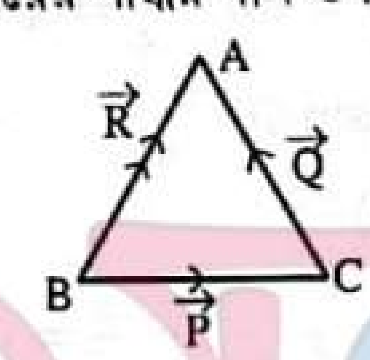
গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

- **বলের লব্ধির সামান্তরিকের সূত্র:**
কোন একটি কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুইটি বল একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত হলে, এদের লব্ধির মান ও দিক ঐ সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা সূচিত হবে।



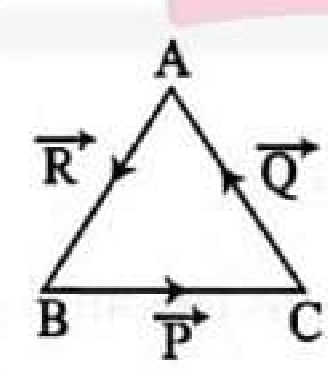
$$\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$$

- **বলের ত্রিভুজ সূত্র:**
(i) লব্ধির ত্রিভুজ সূত্র:
যদি একটি বিন্দুতে কার্যরত দুটি বলের মান ও দিক কোনো ত্রিভুজের একই ক্রমে গৃহীত দুটি বাহু দ্বারা সূচিত করা যায়, তবে ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীত ক্রমে বলদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে।



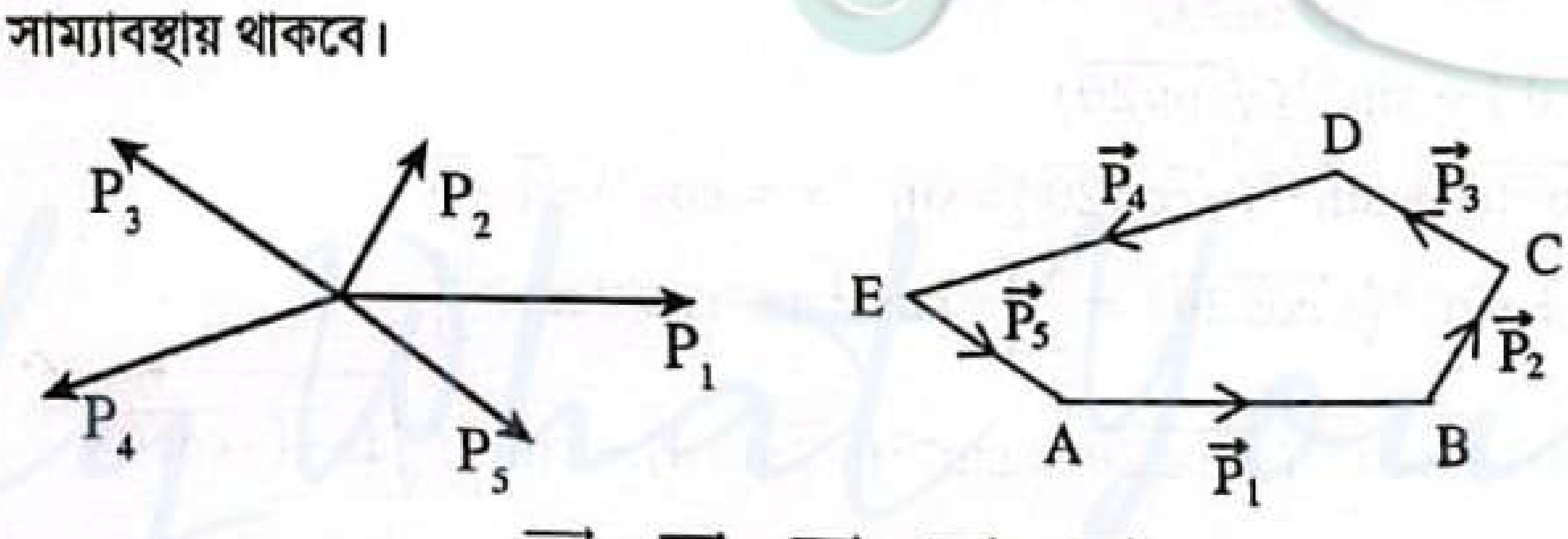
$$\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$$

(ii) সাম্যাবস্থার ত্রিভুজ সূত্র:
যদি একটি বিন্দুতে কার্যরত তিনটি বলের মান ও দিক কোনো ত্রিভুজের একইক্রমে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা সূচিত করা যায়, তবে সমবিন্দু বলত্রয় সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করবে।



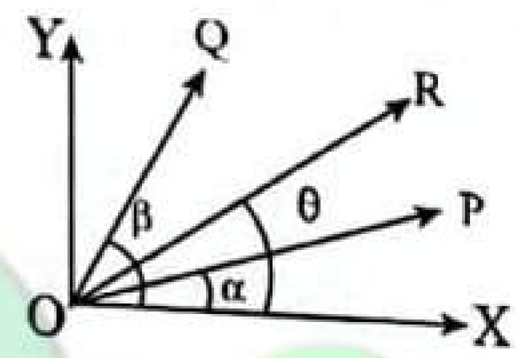
$$\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}=0$$

- **বলের সাম্যাবস্থার বহুভুজ সূত্র:**
কোন বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়াশীল কিছু সংখ্যক বলকে যদি একটি বহুভুজের বাহুগুলো দ্বারা একই ক্রমে মানে, দিকে প্রকাশ করা যায় তবে এরা সাম্যাবস্থায় থাকবে।



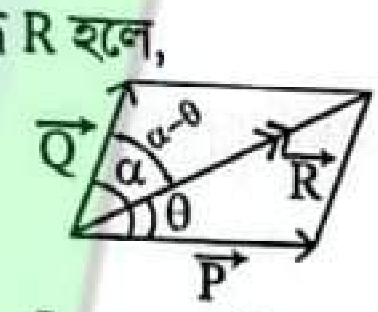
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=0$$
$$\therefore\ \vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3+\vec{P}_4+\vec{P}_5=0$$

- **লম্বাংশ উপপাদ্য:**
কোন নির্দিষ্ট দিকে এক বিন্দুগামী দুই বা ততোধিক বলের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি একই দিকে এদের লব্ধির লম্বাংশের সমান।



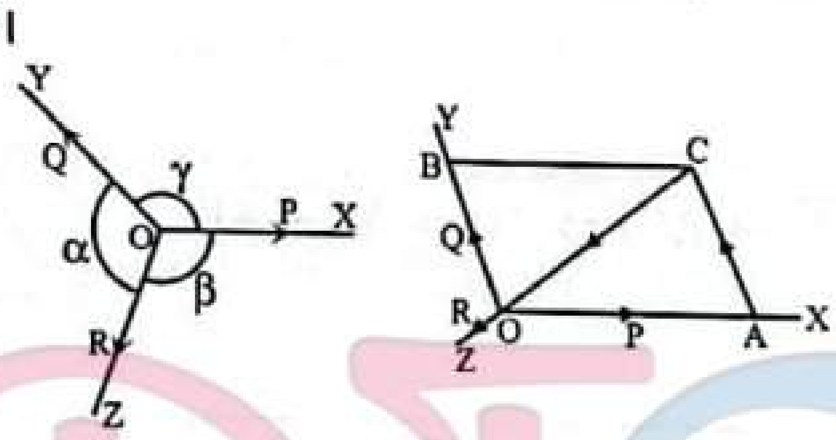
P, Q ও তাদের লব্ধি R বলত্রয় OX এর সাথে যথাক্রমে α, β ও θ কোণ উৎপন্ন করলে
$P\cos\alpha + Q\cos\beta = R\cos\theta$ [OX বরাবর] এবং $P\sin\alpha + Q\sin\beta = R\sin\theta$ [OX এর লম্ব বরাবর বা OY বরাবর]

- **বলের সাইন সূত্র:**
কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি বল P ও Q এর লব্ধি R হলে,



$$\underset{\vec{Q}\wedge\vec{R}}{\frac{P}{\sin(\alpha-\theta)}} = \underset{\vec{P}\wedge\vec{R}}{\frac{Q}{\sin\theta}} = \underset{\vec{P}\wedge\vec{Q}}{\frac{R}{\sin\alpha}}$$

- **লামির উপপাদ্য:**
একটি বিন্দুতে ভিন্ন ভিন্ন রেখায় কার্যরত তিনটি সমতলীয় বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে প্রত্যেকটি বলের মান অপর দুইটির অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক।



$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$$

Note:
- বলত্রয় সমান হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ $120°$
- তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে তাদের যেকোন দুটির লব্ধি, অন্যটির সমান হয়।
- কতগুলো বলের লব্ধি শূন্য হলে বলগুলো সাম্যাবস্থায় থাকে।

Shortcut:
- P মানের দুটি বল $120°$ কোণে থাকলে তাদের লব্ধি $R = P$
- যদি $60°$ কোণে থাকে তবে $R = P\sqrt{3}$

৯০

- **লামির উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা:**
কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি একতলীয় বলের প্রত্যেকটির মান অপর দুইটির ক্রিয়ারেখার অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক হলে এবং প্রত্যেকটি বলের ক্রিয়াদিক অপর দুইটির ক্রিয়াদিকের মধ্যবর্তী কোণের বাইরে থাকলে, তারা সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করবে।

- **কতিপয় বস্তুর ভরকেন্দ্র:**
  - একটি সুষম দণ্ডের মধ্যবিন্দুই এর ভরকেন্দ্র।
  - চারটি সুষম দণ্ড দ্বারা গঠিত সামান্তরিক এর ভরকেন্দ্র হচ্ছে বিপরীত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু। 'উল্লেখ্য, এই বিন্দুই কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু'।
  - সুষম সামান্তরিক পাত এর ভরকেন্দ্র, কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু।
  - ত্রিভুজাকার সুষম পাত এর ভরকেন্দ্র মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু।

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

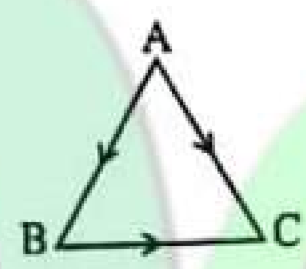
Type-01: ভেক্টরের মাধ্যমে প্রমাণ সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

ত্রিভুজ সূত্রানুসারে,

(i) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$

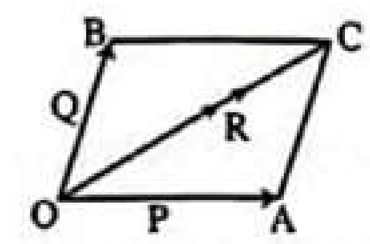
(ii) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



সামান্তরিকের সূত্রানুসারে,

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

$\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$



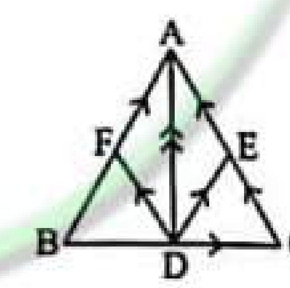
Problems

Example-01. ABC ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দুগুলো যথাক্রমে D, E এবং F হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DE}$. [DU'14-15]

Solⁿ: এখানে, DE ∥ FA ও $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{FA}$

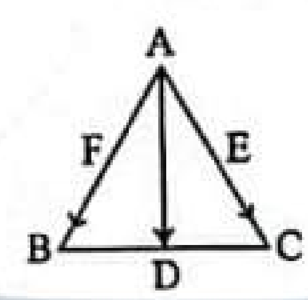
DF ∥ EA ও $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{EA}$

অর্থাৎ DEAF সামান্তরিক ও DA কর্ণ $\therefore$ সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী, $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}$



Example-02. ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দুগুলো যথাক্রমে D, E ও F হলে, $\overrightarrow{AD}$ কে $\overrightarrow{AE}$ ও $\overrightarrow{AF}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [DU'13-14]

Solⁿ: D, BC মধ্যবিন্দু বলে, $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$



Type-02: দুইটি বলের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সামান্তরিক সূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

লব্ধি, $R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$; $\tan\theta=\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

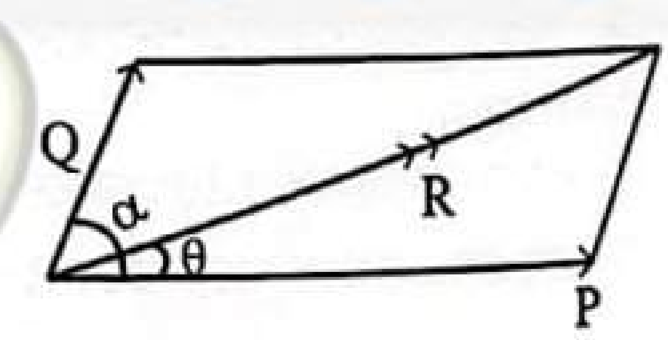
(i) মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha=0°$, হলে, $R=R_{max}=P+Q$ (বৃহত্তম লব্ধি)

(ii) মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha=180^0$ হলে, $R=R_{min}=|P-Q|$ (ক্ষুদ্রতম লব্ধি)

(iii) $\alpha=90°$ হলে লব্ধি, $R_p=\sqrt{P^2+Q^2}$ [p ⇒ Perpendicular (লম্ব)]

(iv) $P=Q$ হলে, $R_e=2P\cos\frac{\alpha}{2}$; $\theta=\frac{\alpha}{2}$ [e ⇒ Equal (সমান)]

(v) $(P+Q)^2+(P\sim Q)^2=2(P^2+Q^2) \Rightarrow \boxed{R_{max}^2+R_{min}^2=2R_p^2}$



Problems

Example-03. কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত 2N ও $2\sqrt{2}$N বলদ্বয়ের লব্ধি $2\sqrt{5}$N হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ- [DU' 21-22]

Solⁿ: ধরি, 2N ও $2\sqrt{2}$N এর মধ্যবর্তী কোণ α

$\therefore (2\sqrt{5})^2=2^2+(2\sqrt{2})^2+2\cdot2\cdot2\sqrt{2}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \alpha=45°$ **(Ans.)**

Example-04. 6 N ও 8 N মানের একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বলদ্বয়ের ক্ষেত্রে নির্ণয় কর, যখন–

(a) এরা পরস্পর $\tan^{-1}\sqrt{3}$ কোণে ক্রিয়ারত। এক্ষেত্রে লব্ধি 6 N মানের বলের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে?

(b) এরা পরস্পর লম্বদিকে ক্রিয়ারত।

(c) একই রেখায় একই দিকে ক্রিয়ারত (সর্বোচ্চ লব্ধি)।

(d) একই রেখায় বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত (সর্বনিম্ন লব্ধি)।

Solⁿ: (a) $\tan\theta = \frac{8\sin 60°}{6+8\cos 60°} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{5}$ **(Ans.)**

(b) $R_P = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ **(Ans.)**

(c) $R_{max} = 6+8 = 14$ **(Ans.)**

(d) $R_{min} = |8-6| = 2$ **(Ans.)**

Example-05: $S, T (S > T)$ দুটি বল। বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি 8N এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 2N হলে S-এর মান কত? **[CU'22-23]**

(a) 2N (b) 5N (c) 6N (d) 8N

Solⁿ: (b); $\because$ S ও $T(S > T)$ দুটি বল, $\therefore$ এদের বৃহত্তম লব্ধি $S+T$ এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি $S-T$.

তাহলে, $S+T = 8N \ldots\ldots\ldots (i)$ এবং $S-T = 2N \ldots\ldots\ldots (ii)$ $\therefore (i)+(ii) \Rightarrow 2S = 10N \therefore S = \frac{10}{2}N = 5N$ **(Ans.)**

Example-06: 2 N এবং 5 N মানের দুইটি বল পরস্পর লম্ব দিকে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধির মান কত?

Solⁿ: লব্ধির মান $= \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$ N **(Ans.)**

Example-07. কোন সমবাহু ত্রিভুজের একই শীর্ষবিন্দুতে দুই বাহু বরাবর P মানের ও 2P মানের দুইটি বল ক্রিয়া করে। বল দুইটির লব্ধি নির্ণয় কর। **[RU' 13-14, 07-08]**

Solⁿ: যেহেতু বল দুইটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহু বরাবর ক্রিয়ারত, বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°, লব্ধিকে $\vec{R}$ ধরে পাই।

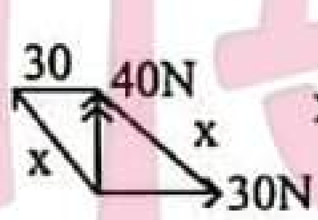
$R^2 = P^2 + (2P)^2 + 2.P.2P\cos 60° = P^2 + 4P^2 + 2P^2 = 7P^2 \therefore R = \sqrt{7}P$ **(Ans.)**

যদি লব্ধি P বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে তবে, $\tan\theta = \frac{2P\sin 60°}{P+2P\cos 60°} \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

Example-08. P এবং Q বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ 135° এবং এদের লব্ধি Q হলে, P ও Q এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর? **[CU'20-21]**

Solⁿ: $Q^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 135° \Rightarrow 0 = P^2 + 2PQ \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow P = \sqrt{2}Q$ **(Ans.)**

Example-09. দুইটি বলের লব্ধি 40 N যা ক্ষুদ্রতর বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব। ক্ষুদ্রতর বলটি 30 N, হলে বৃহত্তম লব্ধি কত? **[JU'19-20]**

Solⁿ: 

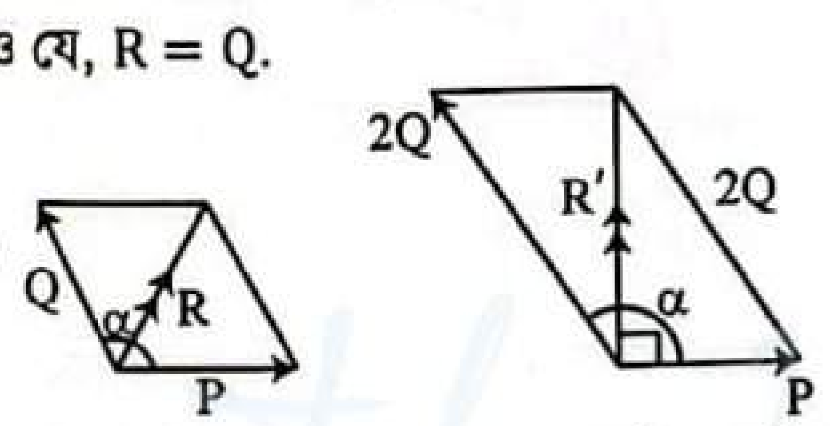
$x^2 = 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 \therefore x = 50$ N $\therefore$ বৃহত্তম লব্ধি $= 50 + 30 = 80$N

Example-10. দুইটি বল পরস্পর এক সমকোণে ক্রিয়ারত থাকলে তাদের লব্ধি $\sqrt{13}$ N ; আবার তারা 120° কোণে ক্রিয়ারত থাকলে তাদের লব্ধি $\sqrt{7}$ N। বলদ্বয়ের সমষ্টি কত? **[RU'20-21]**

Solⁿ: $p^2 + q^2 = 13 ; p^2 + q^2 - pq = 7 \therefore pq = 13 - 7 = 6$

$\therefore p + q = \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq} = \sqrt{13 + 2 \times 6} = \sqrt{25} = 5$ **(Ans.)**

Example-11. P এবং Q বল দুইটির লব্ধির মান R। Q কে দ্বিগুণ করলে যদি নতুন লব্ধি P বলের ক্রিয়া রেখার উপর লম্ব হয়, তাহলে দেখাও যে, R = Q. **[RU'11-12]**

Solⁿ: 

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ.\cos\alpha$; $R'^2 = P^2 + 4Q^2 + 4PQ.\cos\alpha$

আবার, $R'^2 = 4Q^2 - P^2$ [পিথাগোরাস] $\therefore P^2 + 4PQ.\cos\alpha = -P^2 \Rightarrow Q\cos\alpha = -\frac{P}{2}$

$\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2P\left(-\frac{P}{2}\right) = Q^2 \therefore R = Q$ **[প্রমাণিত]**

Example-12. দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 7 N এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 1 N; বল দুইটি পরস্পরের সাথে 90° কোণে একটি কণার উপর ক্রিয়া করলে লব্ধির মান কত হবে? **[RU'19-20]**

Sol^n: ধরি, বল দুইটি P ও Q এবং $P > Q$

$P + Q = 7 \ldots\ldots\ldots (i); \; P - Q = 1 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$(i) + (ii) \Rightarrow 2P = 8 \therefore P = 4$ আবার, $(i) - (ii) \Rightarrow 2Q = 6 \therefore Q = 3$

$\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2.P.Q\cos 90° \therefore R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5N$ **(Ans.)**

Example-13: দুইটি বল সমকোণে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান 20 একক এবং এদের বৃহত্তম লব্ধির মান 28 একক হলে, বল দুইটির ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $R_{max}^2 + R_{min}^2 = 2R_p^2$

$\Rightarrow 28^2 + R_{min}^2 = 2(20)^2 \Rightarrow R_{min} = 4$ একক **(Ans.)**

যেখানে, $R_{max} = P + Q$; $R_{min} = P \sim Q$

$R_p = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Example-14. $2, \sqrt{5}, 3$ মানের তিনটি বল কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত। তারা পরস্পর ভারসাম্য সৃষ্টি করলে প্রথমোক্ত বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান কত? **[CU'13-14, 11-12, 03-04, 02-03]**

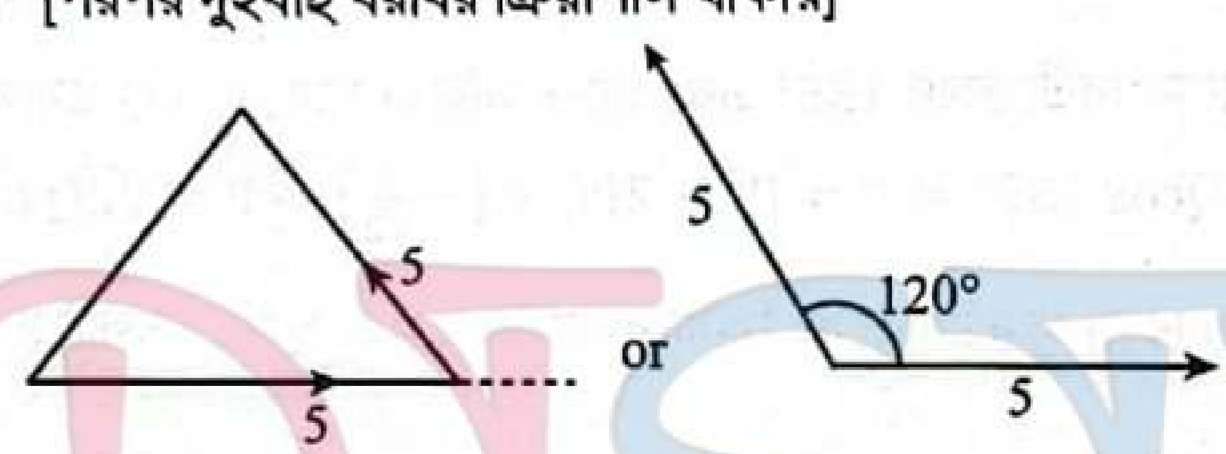
Sol^n: $3^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 + 2.2.\sqrt{5}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0 \therefore \alpha = 90°$ **(Ans.)**

Shortcut: যেহেতু পিথাগোরাসের সূত্র মেনে চলে, তাই প্রথম দুটি বলের মধ্যবর্তী কোণ 90°।

♦ বলের লব্ধি মান ও দিক নির্ণয় :

সমবাহু ত্রিভুজের পরপর দুইবাহু বরাবর 5 একক বল ক্রিয়াশীল হলে তাদের লব্ধির মান কত?

$P = Q = 5 \qquad \alpha = 120°$ [পরপর দুইবাহু বরাবর ক্রিয়াশীল থাকায়]



$\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha = 5^2 + 5^2 + 2.5.5.\cos 120° = 50 + 50 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 25 \therefore R = 5$

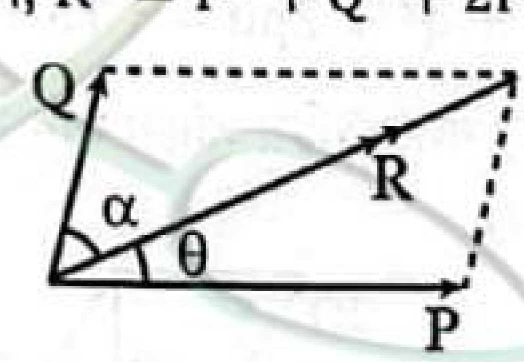
Type-03: কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

➤ P ও Q মানের দুইটি বলের অন্তর্ভুক্ত কোণ α হলে এবং এদের লব্ধি R হলে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\therefore \cos\alpha = \frac{R^2 - P^2 - Q^2}{2PQ}$ [এখান থেকে α নির্ণয় করতে হবে]

আবার, P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$



Problems

Example-15. 7 ও 8 কিলোগ্রাম ওজনের দুইটি বলের লব্ধি 13 কিলোগ্রাম হলে বলদ্বয় পরস্পর কত কোণে ক্রিয়া করবে? **[RU'17-18]**

Sol^n: $13^2 = 7^2 + 8^2 + 2.7.8\cos\alpha \quad \therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$ **(Ans.)**

Example-16. কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত $\vec{P}$ ও $2\vec{P}$ বলদ্বয়ের লব্ধি $\sqrt{7}\,\vec{P}$ হলে, তাদের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[DU'19-20]**

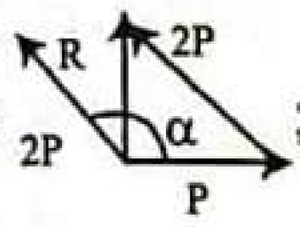
Sol^n: $7P^2 = P^2 + 4P^2 + 2.P.2P\cos\alpha \Rightarrow 2P^2 = 4P^2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \therefore \alpha = 60°$ **Ans.)**

Example-17. দুইটি সমান বলের লব্ধি যদি দ্বিতীয়টির সমান হয়, তবে বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ কোনটি? **[CU'22-23, DU'18-19]**

(a) 60° (b) 90° (c) 120° (d) 180°

Sol^n: (c); সমান বলদ্বয়ের লব্ধির জন্য $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow P = 2P\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} = \cos 60° \therefore \alpha = 120°$

Example-18. P ও 2P মানের দুইটি বলের লব্ধি R, P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে লম্বভাবে ক্রিয়া করে। বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[RU'20-21]**

Sol^n: 

; $\tan 90° = \frac{2P\sin\alpha}{P + 2P\cos\alpha} = \frac{1}{0} \Rightarrow P + 2P\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$ **(Ans.)**

Example-19. 3p এবং 2p মানের বল দুইটির লব্ধির মান R। যদি প্রথম বলের পরিমাণ দ্বিগুণ করা হয়, তবে লব্ধির মানও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। **[JU'22-23, DU'09-10, 12-13, 14-15, 20-21]**

Sol^n: $R^2 = 9p^2 + 4p^2 + 12p^2\cos\alpha \Rightarrow 4R^2 = 36p^2 + 4p^2 + 24p^2\cos\alpha$

$\Rightarrow R^2 = 10p^2 + 6p^2\cos\alpha \therefore 13p^2 + 12p^2\cos\alpha = 10p^2 + 6p^2\cos\alpha$

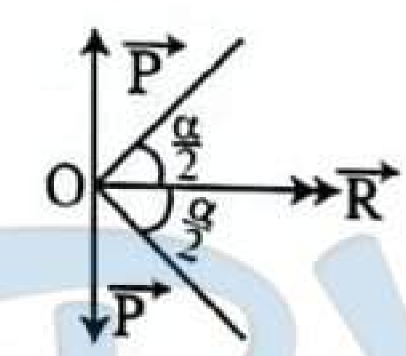
$\Rightarrow 6p^2\cos\alpha = -3p^2 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$ **(Ans.)**

Type-04: দুইটি সমান বলের লব্ধি সংক্রান্ত

Concept

কোনো বিন্দুতে যদি সমমানের দুইটি বল কাজ করে, তাহলে এদের লব্ধি এদের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করবে। এখন মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডককে আনুভূমিক অক্ষ ধরে নিলে উলম্ব অক্ষ বরাবর বলদ্বয়ের উপাংশের যোগফল শূন্য হয় এবং লব্ধির মান হয় বলদ্বয়ের আনুভূমিক উপাংশের যোগফলের সমান।

$R = P\cos\frac{\alpha}{2} + P\cos\frac{\alpha}{2} = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

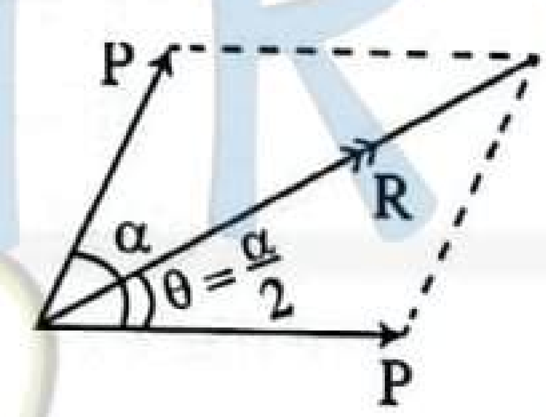


- লব্ধি, $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$
- লব্ধি এবং যেকোন একটি বলের অন্তর্ভুক্ত কোণ বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের অর্ধেক।

এভাবেও বলা যায়: $R^2 = P^2 + P^2 + 2P.P\cos\alpha = 2P^2(1 + \cos\alpha) = 2P^2.2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow R^2 = 4P^2\cos^2\frac{\alpha}{2} \therefore R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

এবং $\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P+P\cos\alpha} = \frac{P.2.\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{P.(1+\cos\alpha)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2} \therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$



Note: P মানের দুইটি সমান বলের লব্ধির-

(i) সর্বোচ্চ মান, $R_{max} = P + P = 2P$; (ii) সর্বনিম্ন মান, $R_{min} = P - P = 0$

Problems

Example-20: দুইটি সমান মানের বল P এর সর্বনিম্ন লব্ধির মান কত? **[DU'18-19]**

Sol^n: $R_{min} = P - P = 0$ **(Ans.)**

Example-21. কোন কণার উপর ক্রিয়াশীল সমমানের দুইটি বলের লব্ধি তাদের যে কোন একটির সমান। বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?

Sol^n: সমমানের বল P হলে, $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$ **[DU'18-19]**

$\Rightarrow P = 2P\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \therefore \frac{\alpha}{2} = 60° \Rightarrow \alpha = 120°$ **(Ans.)**

Example-22. একই বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বল দুইটির লব্ধি R; $\alpha = 90°$ ও $Q = P$ হলে R, P বলের সাথে কত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করে? **[RU'15-16]**

Sol^n: সমমানের দুটি বলের লব্ধি তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ R, P বলের সাথে $\frac{90°}{2} = 45°$ কোণ উৎপন্ন করবে।

Example-23. কোনো কণার উপর $\sqrt{2}$ মানের দুইটি বল পরস্পর $60°$ কোণে ক্রিয়ারত আছে। বলদ্বয়ের লব্ধির মান কত?

Sol^n: সমমানের বল P হলে, $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{2}\cos 30° = \sqrt{6}$ **(Ans.)**

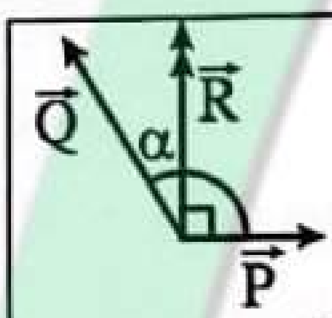
Example-24: $\sqrt{3}$ এককের দুইটি সমান বল $120°$ কোণে একটি বিন্দুতে কাজ করে। এদের লব্ধির (Resultant) মান কত? **[DU'11-12, JnU'13-14]**

Sol^n: $R = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2.\sqrt{3}.\sqrt{3}.\cos 120°} = \sqrt{3}$ একক। **(Ans.)**

বিকল্প: লব্ধি $= 2P\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{120°}{2}\right) = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$ একক **(Ans.)**

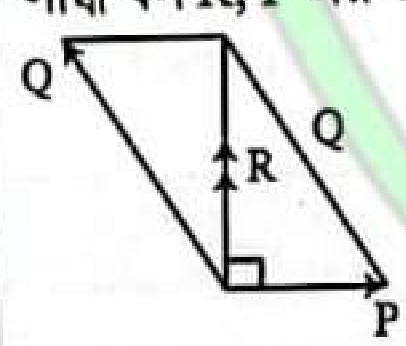
Type-05: বলের সাথে সমকোণে ক্রিয়ারত লব্ধি সংক্রান্ত

Concept



$\tan 90° = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ $\therefore P + Q\cos\alpha = 0$

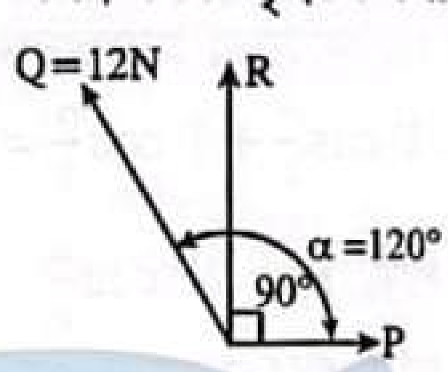
লব্ধি বল R, P এর উপর লম্ব হলে,



$Q^2 = R^2 + P^2 \therefore \boxed{R = \sqrt{Q^2 - P^2}}$

Problems

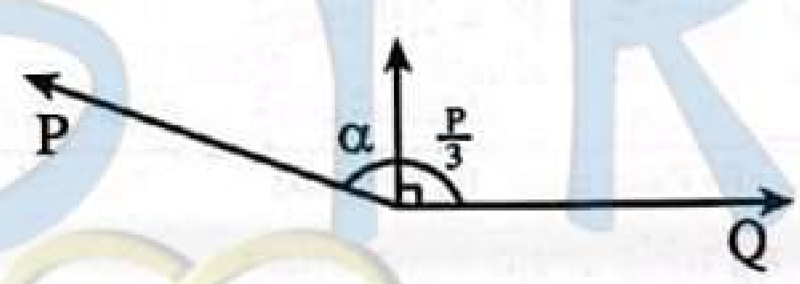
Example-25. কোন বিন্দুতে $120°$ কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি ক্ষুদ্রতরটির সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে। বৃহত্তর বলটি 12N হলে ক্ষুদ্রতর বলটি এবং বলদ্বয়ের লব্ধি নির্ণয় কর।



Sol^n: P বরাবর R এর অংশক, $R\cos 90° = P\cos 0° + Q\cos 120° = 0$

$P = \frac{12}{2} = 6$ N $\therefore$ লব্ধি, $R = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108}$ N **(Ans.)**

Example-26. কোন কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধি একটি বলের উপর লম্ব এবং এর মান অপরটির মানের এক তৃতীয়াংশের সমান। বলদ্বয়ের মানের অনুপাত কত?



Sol^n: $R = \sqrt{P^2 - Q^2} \Rightarrow \left(\frac{P}{3}\right) = \sqrt{P^2 - Q^2}$

$\Rightarrow \frac{8P^2}{9} = Q^2 \Rightarrow \frac{P^2}{Q^2} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\therefore P:Q = 3:2\sqrt{2}$

Type-06: লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকার শর্ত সংক্রান্ত

Concept

P, Q বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়ারত হলে, P, Q এর স্থলে P' ও Q' বলদ্বয় ক্রিয়া করলে যদি লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে তবে, $\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}$ $\left[\text{অর্থাৎ}, \left(\frac{\text{১ম বল}}{\text{২য় বল}}\right)_{\text{১ম ক্ষেত্র}} = \left(\frac{\text{১ম বল}}{\text{২য় বল}}\right)_{\text{২য় ক্ষেত্র}}\right]$

Shortcut: প্রথম বলকে যত গুণ বাড়ানো হয়, ২য় বলকে যদি ততো গুণই বাড়ানো হয়, তাহলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে।

Problems

Example-27. কোন বিন্দুতে 2P এবং P মানের দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথমটিকে দ্বিগুণ করলে ও দ্বিতীয়টির মান 8 একক বৃদ্ধি করলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান কত? **[KU' 12-13]**

Sol^n: $\frac{2P}{P} = \frac{2.2P}{P+8} \Rightarrow 2P = P + 8 \Rightarrow P = 8$ একক **(Ans.)**

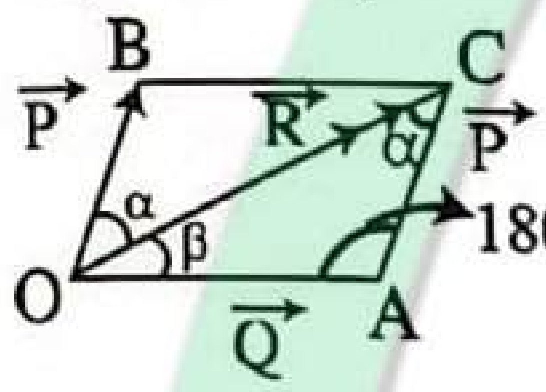
❖ **Shortcut:** প্রথম বলকে যত গুণ বাড়ানো হয়, ২য় বলকে যদি ততো গুণই বাড়ানো হয়, তাহলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। যেমন: এখানে প্রথম বলকে দ্বিগুণ করা হয়েছে। অর্থাৎ ২য় বলকেও দ্বিগুণ করলে লব্ধির দিক অপরিবর্তীত থাকবে। কিন্তু ২য় বল (P) কে ৪ একক বাড়ালেও লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে।

প্রশ্নমতে, $2 \times$ ২য় বল $=$ ২য় বল $+8$ $\therefore 2P = P + 8 \therefore P = 8$ একক **(Ans.)**

Type-07: ত্রিভুজের গুণাবলী সংক্রান্ত

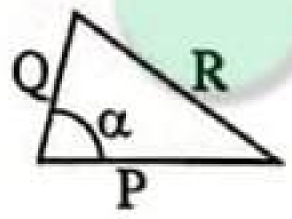
Concept

➤ ত্রিভুজের সাইন সূত্র বলের ক্ষেত্রে 'বলের সাইন সূত্র' হিসেবে ব্যবহৃত হয়: $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ হলে,



$180° - (\alpha + \beta)$; ΔOAC-এ, $\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\{180° - (\alpha+\beta)\}} \therefore \frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$

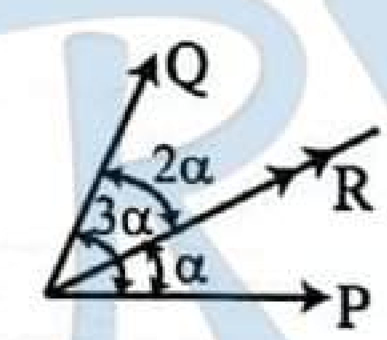
➤ ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র:



; $R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha}$

Problems

Example-28. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুইটি বলের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ এবং লব্ধির মান নির্ণয় কর।

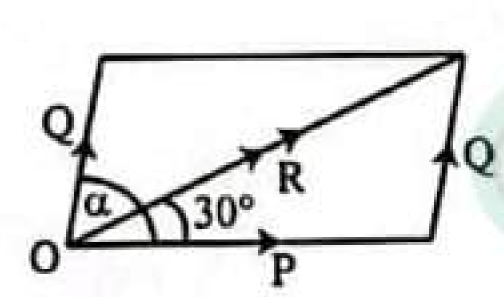


Solⁿ: বলের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{P}{\sin 2\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 3\alpha} \Rightarrow \frac{P}{2\cos\alpha} = Q = \frac{R}{3 - 4\sin^2\alpha}$

$\therefore$ ১ম ও ২য় অনুপাত হতে পাই, $\cos\alpha = \frac{P}{2Q} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\frac{P}{2Q} \therefore 3\alpha = 3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$ **(Ans.)**

আবার, ২য় ও ৩য় অনুপাত হতে পাই, $R = Q(3 - 4\sin^2\alpha) = Q(4\cos^2\alpha - 1) = Q\left(\frac{P^2}{Q^2} - 1\right) = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$ **(Ans.)**

Example-29: পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বল দুটির লব্ধির মান $\sqrt{3}Q$ এবং তা P এর ক্রিয়ারেখার সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P = Q$ অথবা $P = 2Q$.



Solⁿ: এখানে বল দুইটির লব্ধি $R = \sqrt{3}Q$, যা P এর ক্রিয়ারেখার সাথে $\theta = 30°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$Q^2 = P^2 + R^2 - 2PR\cos\theta$ [ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র হতে]

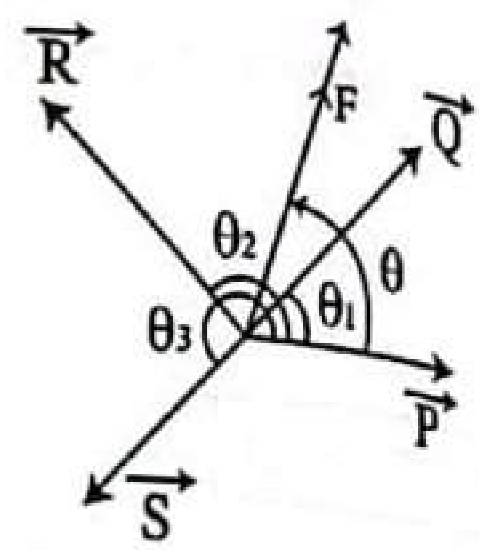
$Q^2 = P^2 + (\sqrt{3}Q)^2 - 2P \times \sqrt{3}Q\cos 30° \Rightarrow Q^2 = P^2 + 3Q^2 - 2P \times \sqrt{3}Q \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow P^2 + 2Q^2 - 3PQ = 0 \Rightarrow P^2 - 2PQ - PQ + 2Q^2 = 0 \Rightarrow P(P - 2Q) - Q(P - 2Q) = 0$

$\Rightarrow (P - 2Q)(P - Q) = 0 \therefore P = Q$ অথবা, $P = 2Q$ **(Showed)**

Type-08: দুই বা ততোধিক বলের লব্ধির মান সরাসরি নির্ণয়ের সূত্র এবং লম্বাংশ উপপাদ্য

Concept



দুই এর অধিক বলের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে লম্বাংশ উপপাদ্য ব্যবহার করতে হবে। চিত্রের বলগুলোর লব্ধি F হলে, লম্বাংশ উপপাদ্য অনুযায়ী, $F_x = F\cos\theta = P\cos 0° + Q\cos\theta_1 + R\cos\theta_2 + S\cos\theta_3$ [$\vec{P}$ এর দিকে লম্বাংশ নিয়ে]

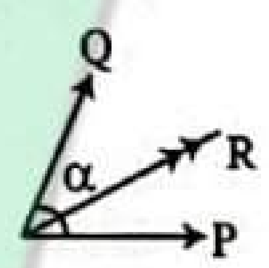
$F_y = F\sin\theta = P\sin 0° + Q\sin\theta_1 + R\sin\theta_2 + S\sin\theta_3$ [$\vec{P}$ এর লম্ব দিকে লম্বাংশ নিয়ে]

➢ $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ ➢ $\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$

➢ দুই বা ততোধিক বলের লব্ধির মান সরাসরি নির্ণয়ের সূত্র:

(i) দুইটি বল থাকলে:

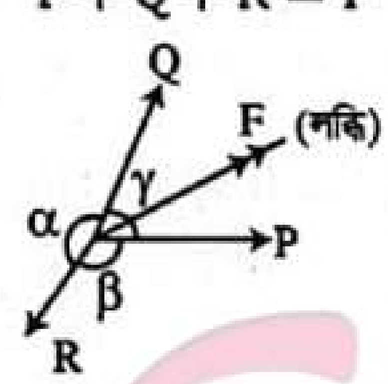
$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$



$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha = P^2 + Q^2 + 2.\vec{P}.\vec{Q}$$
$$= \sum P^2 + 2\vec{P}.\vec{Q}$$

(ii) তিনটি বল থাকলে:

$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = \vec{F}$



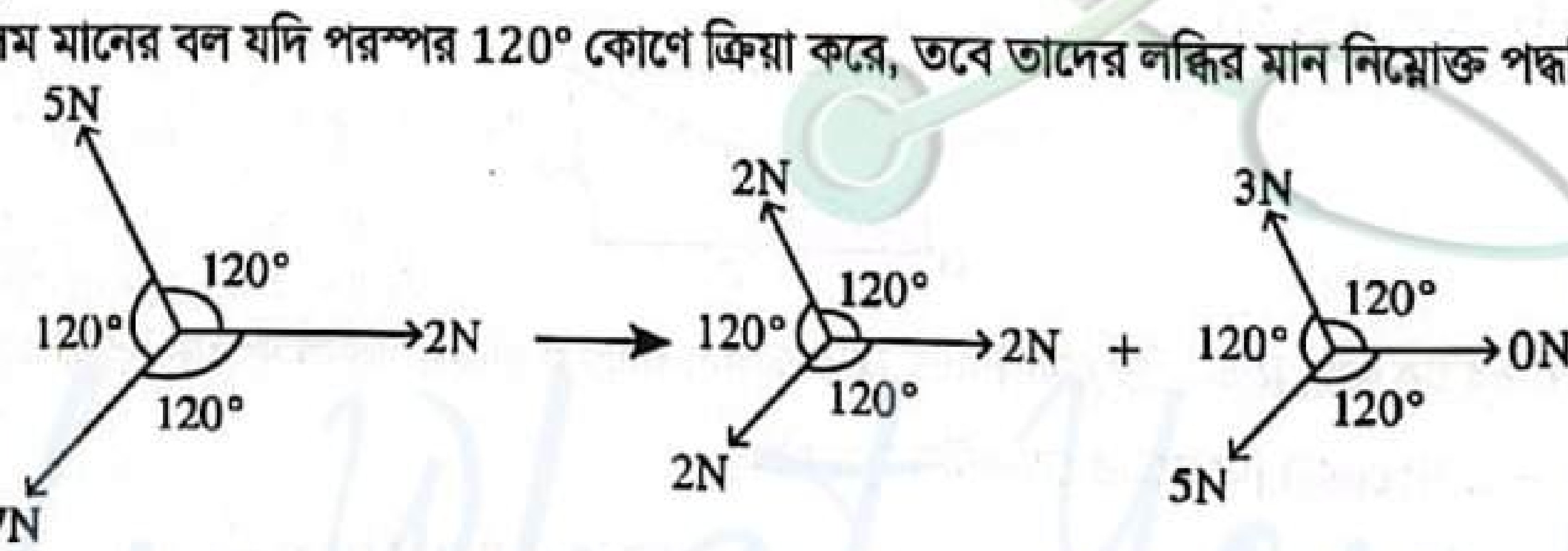
$$F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\gamma + 2QR\cos\alpha + 2PR\cos\beta$$
$$= P^2 + Q^2 + R^2 + 2\vec{P}.\vec{Q} + 2\vec{Q}.\vec{R} + 2\vec{P}.\vec{R} = \sum P^2 + 2\sum \vec{P}.\vec{Q}$$

(iii) n সংখ্যক বল থাকলে:

$P_1, P_2, P_3, \dots\dots\dots, P_n$ মানের বলগুলোর লব্ধি R হলে, $\vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{P_3} + \dots\dots\dots + \vec{P_n} = \vec{R}$

$\boxed{R^2 = \sum P_1^2 + 2\sum \vec{P_1}.\vec{P_2}}$

- যদি তিনটি সমমানের বল একটি বিন্দুতে এমনভাবে ক্রিয়া করে যেন যেকোন দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণ 120° হয়, তবে বলত্রয়ের লব্ধি শূন্য।
- যদি চারটি সমমানের বল কোন বিন্দুতে এমন ভাবে ক্রিয়া করে যেন পর পর দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণ $\frac{360°}{4} = 90°$ হয়, তবে বলগুলোর লব্ধি শূন্য।
- চিত্রের তিনটি অসম মানের বল যদি পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়া করে, তবে তাদের লব্ধির মান নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে নির্ণয় করা সম্ভব।



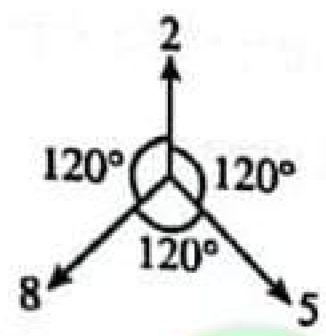
এখন, শুধুমাত্র পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়ারত 3N ও 5N মানের বলের লব্ধির মানই হবে প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধির মান।

- যদি অসম মানের তিনটি বল পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়া করে (যেখানে বলগুলোর মানগুলো সমান্তর শ্রেণিভুক্ত), বলত্রয়ের লব্ধি = সাধারণ অন্তর × $\sqrt{3}$

Problems

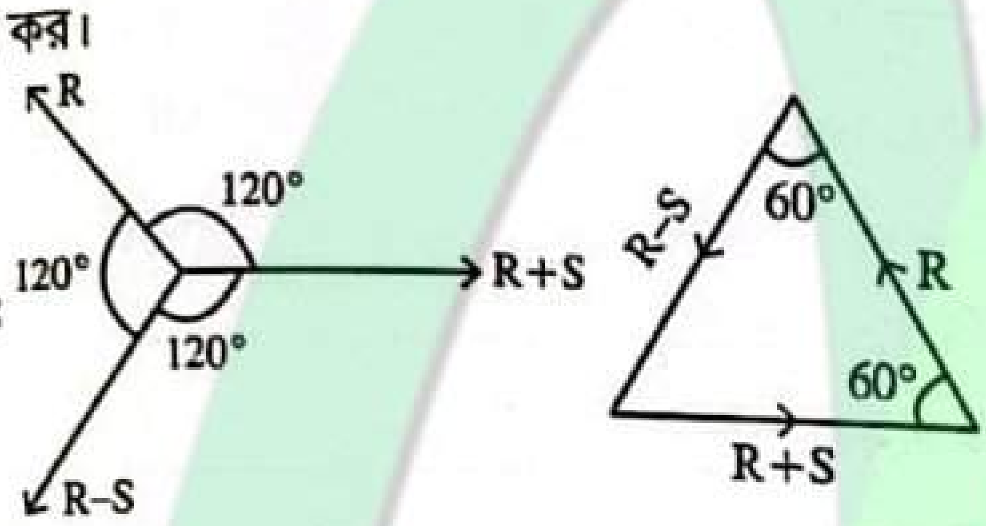
Example-30: 2N, 5N ও 8N মানের তিনটি বল কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। এদের যে কোন দুইটির মধ্যবর্তী কোণ 120° হলে, লব্ধির মান নির্ণয় কর।

Sol^n: লব্ধি = সাধারণ অন্তর × $\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ **(Ans.)**



Example-31: $(R+S)$, R ও $(R-S)$ মানের বল কোন সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমান্তরালে ক্রিয়াশীল। বল তিনটির লব্ধির মান নির্ণয় কর।

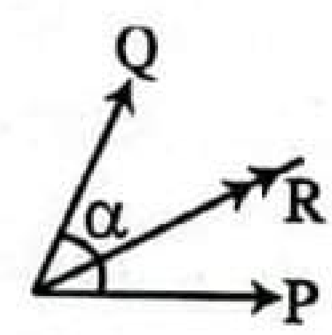
Sol^n:



লব্ধি = সাধারণ অন্তর × $\sqrt{3} = S\sqrt{3}$ **(Ans.)**

Example-32. একটি বিন্দুতে কার্যরত P, Q মানের দুইটি বলের লব্ধির মান R এবং P এর দিক বরাবর R এর লম্বাংশের পরিমাণ Q হলে, বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ এবং লব্ধির মান নির্ণয় কর।

Sol^n: P বরাবর R এর লম্বাংশ, $P\cos 0° + Q\cos\alpha = Q$



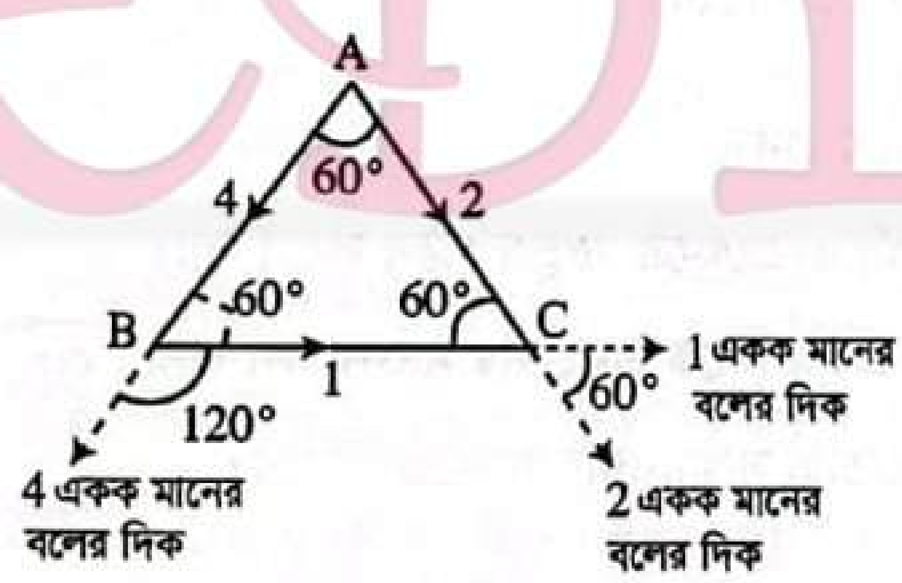
$\Rightarrow Q(1-\cos\alpha) = P \Rightarrow 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{P}{Q} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}} \Rightarrow \alpha = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$ **(Ans.)**

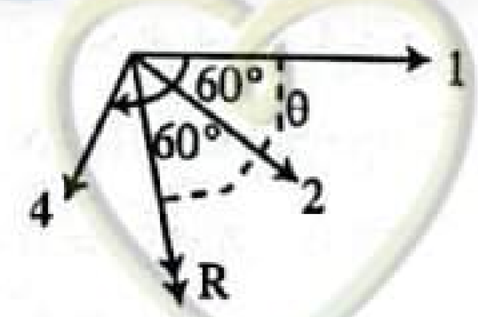
আবার, $Q\cos\alpha = Q - P \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q}$;

আবার, $R = \sqrt{P^2+Q^2+2P.(Q-P)} = \sqrt{Q^2-P^2+2PQ}$ **(Ans.)**

Example-33. ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB, AC ও BC বাহুগুলোর সমান্তরাল গতিপথের কোন একটি বিন্দুতে যথাক্রমে 4, 2 ও 1 একক মানের বলত্রয় ক্রিয়ারত হলে, এদের লব্ধির মান কত একক? **[RU'17-18]**

Sol^n:





1 একক মানের বলের দিকে লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$1.\cos 0° + 2\cos(-60°) + 4\cos(-120°) = R\cos\theta \Rightarrow R\cos\theta = 0$ ……… (1)

আবার, 1 একক মানের বলের লম্ব বরাবার লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$1.\sin 0° + 2\sin(-60°) + 4\sin(-120°) = R\sin\theta \Rightarrow R\sin\theta = -3\sqrt{3}$ ……… (2)

এখন, $(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow R^2 = 0^2 + (-3\sqrt{3})^2 \therefore R = 3\sqrt{3}$ একক **(Ans.)**

বিকল্প: চিত্র হতে, 4 ও 2 একক মানের বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ = 60°

2 ও 1 একক মানের বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ = 60°

4 ও 1 একক মানের বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ = 120°

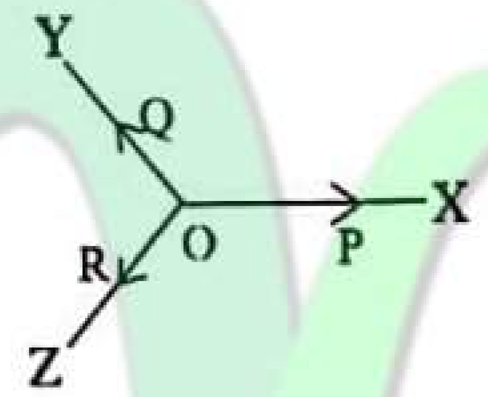
এদের R লব্ধি হলে, $R^2 = 4^2 + 2^2 + 1^2 + 2.4.2\cos 60° + 2.2.1\cos 60° + 2.4.1\cos 120°$

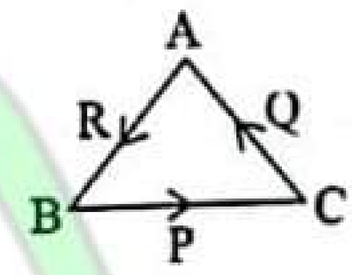
$\Rightarrow R^2 = 27 = 3\times 9 \therefore R = 3\sqrt{3}$ একক **(Ans.)**

Type-09: তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকার শর্ত সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

বলের ত্রিভুজ সূত্র: যদি এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বলের মান ও দিক কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুদ্বারা একইক্রমে মানে ও দিকে (অবস্থানে নয়) সূচিত করা যায়, তবে তারা সাম্যাবস্থায় থাকবে।





$\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}=0$

Note: ত্রিভুজের যেকোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

(i) 4N, 5N, 10N মানের তিনটি বল দ্বারা কি কখনো সাম্যাবস্থার সৃষ্টি হবে?

(ii) 4N, 5N, 8N মানের তিনটি বল দ্বারা কি কখনো সাম্যাবস্থার সৃষ্টি হবে?

(iii) 4N, 5N, 9N মানের তিনটি বল দ্বারা কি কখনো সাম্যাবস্থার সৃষ্টি হবে?

Solution:

বলের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে তিনটি বল সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করবে যদি তাদেরকে একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে, মানে ও দিকে (অবস্থানে নয়) সূচিত করা যায়, সহজ ভাষায় যদি ঐ মানের বাহু দ্বারা ত্রিভুজ গঠন সম্ভব হয়।

(i) নং এর জন্য 4+5=9 একক [ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি = 9], ৩য় বাহুর দৈর্ঘ্য = 10 একক > 9 একক

$\therefore$ 4, 5, 10 একক বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন সম্ভব নয়। $\therefore$ 4N, 5N, 10N বলত্রয় সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করবে না।

(ii) নং এর জন্য 4 + 5 = 9 একক, ৩য় বাহুর দৈর্ঘ্য = 8 একক < 9 একক

$\therefore$ ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি > ৩য় বাহু। অর্থাৎ এই মানের বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন সম্ভব।

$\therefore$ 4N, 5N, 8N মানের বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকতে পারবে।

(iii) নং এর জন্য 4+5=9 একক, ৩য় বাহুর দৈর্ঘ্য = 9 একক

$\therefore$ ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি = ৩য় বাহুর দৈর্ঘ্য। এক্ষেত্রে ত্রিভুজ গঠন সম্ভব নয়।

কিন্তু এটি একটি special case। 4N ও 5N একই দিকে এবং 9N মানের বল তার বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি = 0 হবে। $\therefore$ তারা সাম্যাবস্থায় থাকতে পারবে।

Problems

Example-34. দেখাও যে, কোন বস্তুর উপর ক্রিয়ারত 5: 6: 12 অনুপাতের বলগুলো সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করতে পারে না।

Sol^n: মনে করি, বলগুলো $P = 5k, Q = 6k,\ R = 12k$; $P + Q = 5k + 6k = 11k < 12k$

অর্থাৎ, $P + Q < R$, তিনটি বল কোন ত্রিভুজের বাহু দ্বারা সূচিত করা যায় না। অতএব বলগুলো সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করতে পারে না।

Example-35. কোন শর্তের সাপেক্ষে একটি বস্তুকণার উপর কার্যরত 3:4:7 অনুপাতের বলগুলো সাম্যাবস্থায় থাকবে?

Sol^n: মনে করি, বলগুলো $P = 3k, Q = 4k,\ C = 7k$

$3k + 4k = 7k$, বলগুলো সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করবে যদি তারা একই সরলরেখা বরাবর এবং P ও Q বলদ্বয় একত্রে যে দিকে R তার বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হবে।

Type-10: তিনটি সমবিন্দু বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে তা হতে বলত্রয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত

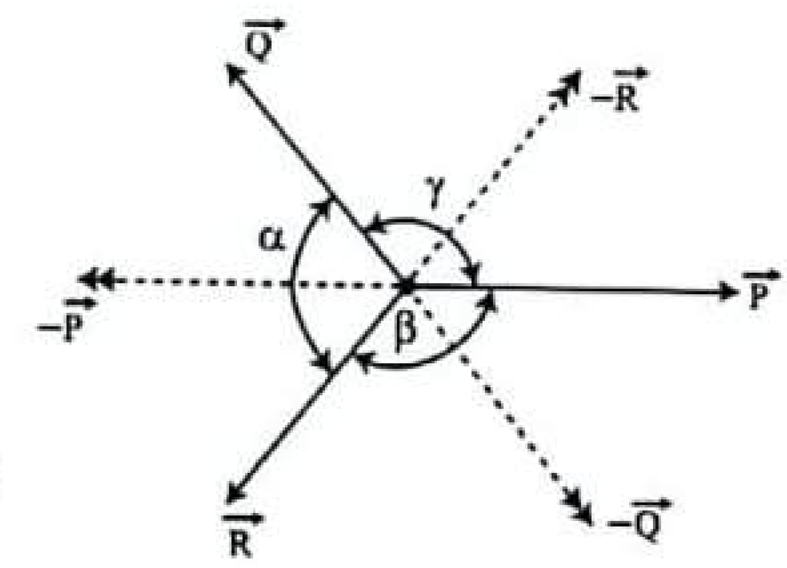
Concept

এখানে, $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}=0$

$\therefore \vec{P}+\vec{Q}=-\vec{R}$

$\therefore \vec{Q}+\vec{R}=-\vec{P}$

$\therefore \vec{P}+\vec{R}=-\vec{Q}$



যেহেতু বল তিনটির লব্ধি = 0 তাই যেকোন দুইটি বলের লব্ধির মান তৃতীয় বলটির সমান এবং লব্ধির দিক তৃতীয় বলটির দিকের বিপরীত দিকে কার্যরত হবে।

$\therefore \vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লব্ধির মান $\vec{R}$ এর মানের সমান, $\therefore R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\gamma \Rightarrow \boxed{\cos\gamma=\frac{R^2-P^2-Q^2}{2PQ}}$

অনুরূপভাবে $\boxed{\cos\alpha=\frac{P^2-Q^2-R^2}{2QR}}$ এবং $\boxed{\cos\beta=\frac{Q^2-P^2-R^2}{2PR}}$ এভাবে এদের মধ্যবর্তী কোণগুলো নির্ণয় করা যাবে।

Problems

Example-36. 5N, 7N এবং 8N বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করলে 8N এবং 5N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?

Solⁿ: $7^2=5^2+8^2+2.5.8\cos\alpha \therefore \alpha=120°$ **(Ans.)** **[RU'22-23, 17-18]**

Example-37. 1, 2 ও $\sqrt{3}$ মানের তিনটি বল কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: সাম্যাবস্থায় থাকলে যে কোন দুটি বলের লব্ধির মান অপর বলের সমান হবে। **[RU'22-23, CU'16-17]**

$\therefore$ 1 ও 2 একক মানের বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে, $(\sqrt{3})^2=1^2+2^2+2.1.2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=120°$

আবার, $(\sqrt{3})^2+(1)^2=(2)^2 \therefore \sqrt{3}$ ও 1 একক মানের বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90°।

$\sqrt{3}$ ও 2 একক মানের বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $=360°-(90°+120°)=150°$ **(Ans.)**

Example-38. 2, $\sqrt{5}$ এবং 3 মানের তিনটি বল কোন এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত। এরা পরস্পর ভারসাম্য সৃষ্টি করলে, প্রথম দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[RU'19-20]**

Solⁿ: $3^2=2^2+(\sqrt{5})^2+2\times2\times\sqrt{5}\cos\alpha \therefore \cos\alpha=\frac{3^2-4-5}{4\sqrt{5}}=0 \therefore \alpha=\frac{\pi}{2}=90°$ **(Ans.)**

Example-39. তিনটি বল P, $\sqrt{3}$P, P সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রথম দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[RU'19-20]**

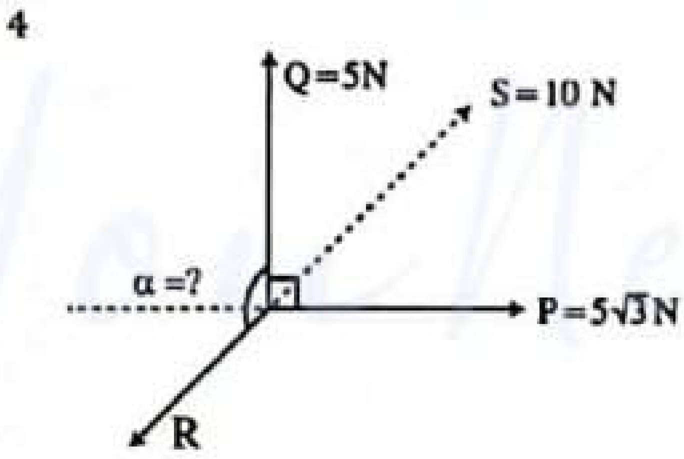
Solⁿ: $P^2=(P)^2+(\sqrt{3}P)^2+2.P.\sqrt{3}P\cos\alpha \Rightarrow P^2=4P^2+2\sqrt{3}P^2\cos\alpha$

$\Rightarrow \frac{-3P^2}{2\sqrt{3}P^2}=\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \alpha=150°$ **(Ans.)**

Example-40. তিনটি সমতলীয় বল P, Q এবং R কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় আছে। যদি P এবং Q এর মান যথাক্রমে $5\sqrt{3}$N ও 5N এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ $\frac{\pi}{2}$ হয়, তাহলে, R, Q এর সঙ্গে কত কোণ তৈরি করবে? **[GST'22-23]**

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{3\pi}{4}$

Solⁿ: (c); $S=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{75+25}=10$ N

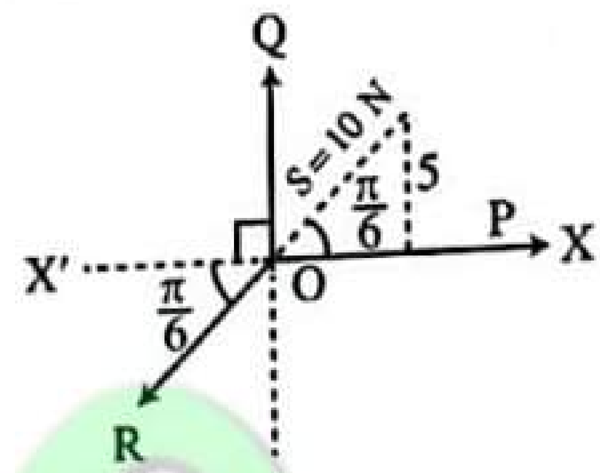


$\because$ বলত্রয় (P, Q, R) সাম্যাবস্থায়। R = S = 10N

লামির সূত্রানুসারে, $\frac{P}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{\sin\alpha}=\frac{10}{1} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{10} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \alpha=120°=\frac{2\pi}{3}\left[\because \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right]$

বিকল্প: P ও Q এর লব্ধি, $S = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2 + 2 \times 5 \times 5\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} \therefore S = 10\text{ N}$



আবার, $P \wedge S = \sin^{-1}\left(\frac{5}{10}\right) = \frac{\pi}{6} \therefore \angle ROX' = \frac{\pi}{6}$ (বিপ্রতীপ কোণ) $\therefore$ R ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$

Type-11: তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে তা থেকে বিভিন্ন অজানা রাশির মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

Case-01: লামির সূত্র প্রয়োগ সংক্রান্ত

Concept

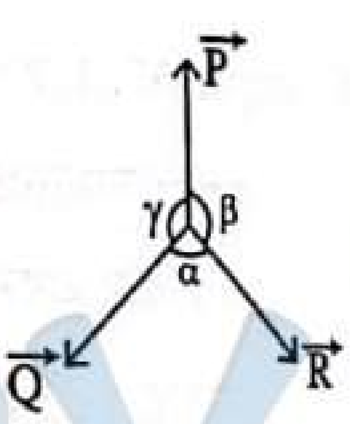
যদি কোন বিন্দুতে তিনটি বল ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে, তাহলে যেকোন একটি বল অপর বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের sine এর সমানুপাতিক।

একটি বিন্দুতে P, Q এবং R মানের তিনটি বল ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করলে, $(\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = \vec{0})$

লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$.

যেখানে, $\alpha = \vec{Q} \wedge \vec{R}; \beta = \vec{P} \wedge \vec{R}; \gamma = \vec{P} \wedge \vec{Q}$

'∧' এর অর্থ হলো মধ্যবর্তী কোণ।

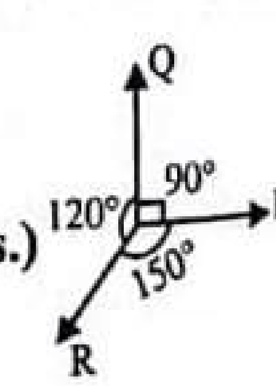


Category–01: সাধারণভাবে লামির সূত্রের ব্যবহার

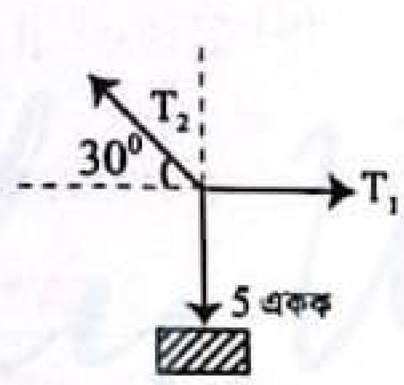
Problems

Example-41: কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে, যেখানে ১ম ও ২য় বলের অন্তর্গত কোণ 90° এবং ২য় ও ৩য় বলের অন্তর্গত কোণ 120°। তাহলে বল তিনটির অনুপাত কত? **[JnU'19-20; KU'14-15]**

Sol^n: $\frac{P}{\sin(120^\circ)} = \frac{Q}{\sin(150^\circ)} = \frac{R}{\sin(90^\circ)} \Rightarrow \frac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{Q}{\frac{1}{2}} = \frac{R}{1} \Rightarrow \frac{P}{\sqrt{3}} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{2} \therefore P : Q : R = \sqrt{3} : 1 : 2$ **(Ans.)**



Example-42. $T_1 = ?$



[JU'11-12]

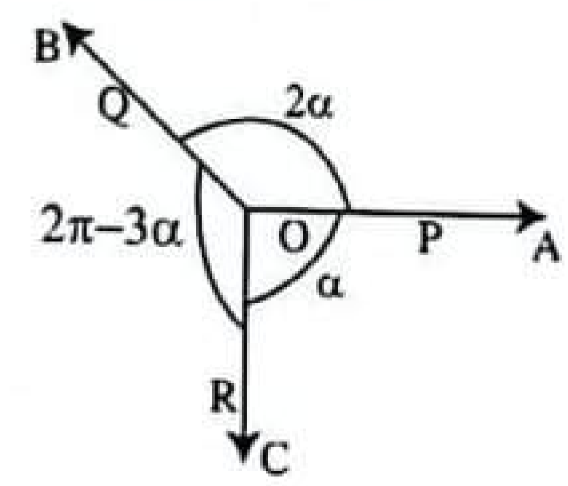
Sol^n: $\frac{5}{\sin 150^\circ} = \frac{T_1}{\sin(120^\circ)} \Rightarrow T_1 = 5\sqrt{3}$ একক **(Ans.)**

Example-43: কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R মানের তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। P ও Q এর অন্তর্ভুক্ত কোণ, P ও R এর অন্তর্ভুক্ত কোণের দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $R^2 = Q(Q-P)$

Sol^n: মনে করি, O বিন্দুতে OA, OB, OC বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। ধরি, P ও R এর অন্তর্গত কোণ $\angle AOC = \alpha$. তাহলে, P ও Q এর অন্তর্গত কোণ $\angle AOB = 2\alpha$ এবং Q ও R এর অন্তর্গত কোণ $\angle BOC = 2\pi - 3\alpha$.

এখন লামির সূত্র থেকে পাই, $\frac{P}{\sin(2\pi-3\alpha)} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{P}{-\sin 3\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 2\alpha}$

$\Rightarrow \frac{P}{-(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{2\sin\alpha\cos\alpha} \Rightarrow \frac{P}{-(3-4\sin^2\alpha)} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{2\cos\alpha}$, $[\because \sin\alpha \neq 0]$



২য় ও ৩য় অনুপাত হতে পাই, $\cos\alpha = \frac{R}{2Q}$

১ম ও ২য় অনুপাত হতে পাই, $P = Q(-3+4-4\cos^2\alpha) = Q\left\{1 - 4\left(\frac{R}{2Q}\right)^2\right\} = \frac{Q^2-R^2}{Q}$

$\Rightarrow PQ = Q^2 - R^2 \quad \therefore R^2 = Q(Q-P)$ **(Proved)**

Category–02: উলম্বের সাথে কোণ দেওয়া আছে

Concept

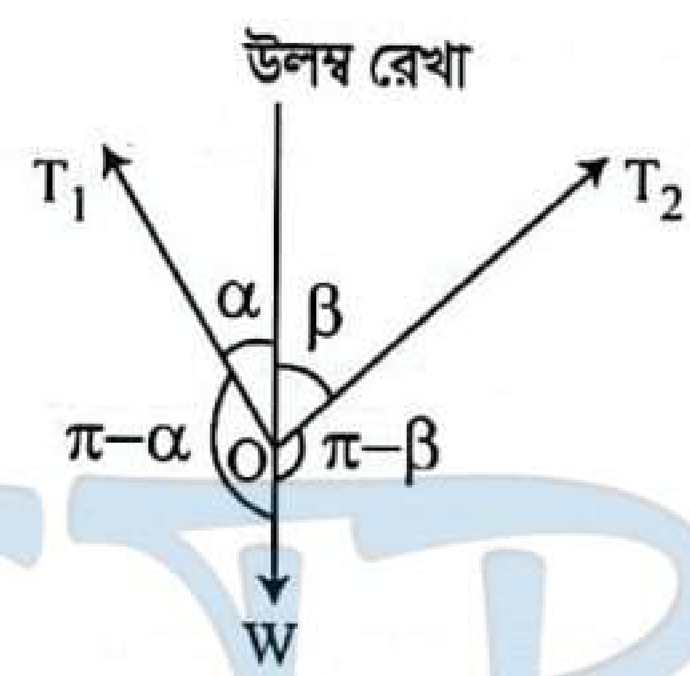
মনে করি, O বিন্দুতে একটি সুতা দ্বারা W ওজনের একটি বস্তু গিট দিয়ে ঝুলানো আছে। সুতার টানদ্বয় যথাক্রমে T_1 ও T_2। সুতার একটি প্রান্ত উলম্ব রেখার সাথে α কোণে এবং অপর প্রান্ত β কোণে আনত।

এখন, $T_1 \wedge W = \pi - \alpha$; $T_2 \wedge W = \pi - \beta$, $T_1 \wedge T_2 = \alpha + \beta$

লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{T_1}{\sin(T_2 \wedge W)} = \frac{T_2}{\sin(T_1 \wedge W)} = \frac{W}{\sin(T_1 \wedge T_2)}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{T_1}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{T_2}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{W}{\sin(\alpha+\beta)}}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{T_1}{\sin\beta} = \frac{T_2}{\sin\alpha} = \frac{W}{\sin(\alpha+\beta)}}$



$\therefore T_1 = \frac{W\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $T_2 = \frac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\therefore$ টান $= \frac{W \times \sin(\text{opposite angle})}{\sin(\text{total angle})}$

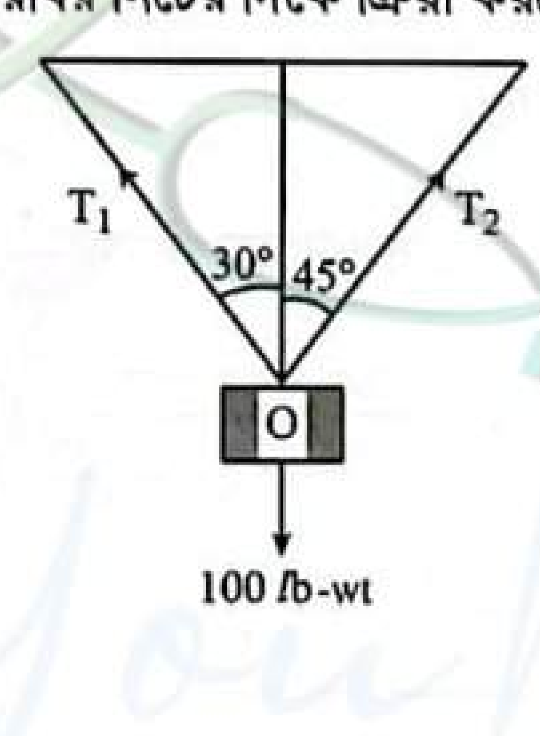
Note: যদি কোনো আংটা সুতায় গিট দিয়ে লাগানো থাকে (বা দুইটি আলাদা সুতা দ্বারা একটি আংটা ঝুলানো থাকে) তাহলে দুই পাশের টান আলাদা ধরতে হয়। গিট না থাকলে (আংটাটি যদি অবাধে চলাচলে সক্ষম হয়) তখন দুই পাশে সুতার টান সমান ধরতে হয়।

Problems

Example-44. 100 পাউন্ডের একটি বস্তুকে দুইটি রশির সাহায্যে বেঁধে ঝুলানো হয়। রশিদ্বয় উল্লম্বের সাথে যথাক্রমে 45° এবং 30° কোণে আনত। রশিদ্বয়ের টান নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, রশি দুইটিতে টানের পরিমাণ যথাক্রমে T_1 এবং T_2। বস্তুটির ওজন খাড়া রেখা বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়া করছে।

সাম্যাবস্থার জন্য লামীর সূত্র অনুযায়ী, $\frac{T_1}{\sin(\pi-45°)} = \frac{T_2}{\sin(\pi-30°)} = \frac{100}{\sin(45°+30°)}$



অথবা, $\frac{T_2}{\sin 45°} = \frac{T_2}{\sin 30°} = \frac{100}{\sin 75°}$

সুতরাং, $T_1 = 100 \times \frac{\sin 45°}{\sin 75°} = \frac{100 \times 1/\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{2}} = \frac{200}{\sqrt{3}+1}$ pound - wt

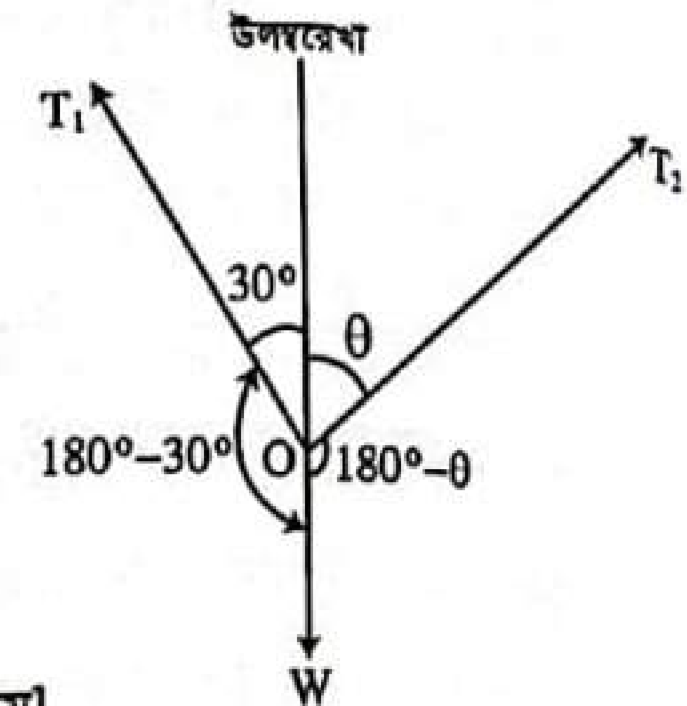
$T_2 = 100 \times \frac{\sin 30°}{\sin 75°} = \frac{100 \times 1/2}{(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ pound - wt

Shortcut for MCQ:

$T_1 = \frac{W\sin(\text{opposite angle})}{\sin(\text{total angle})} = \frac{100\sin 45°}{\sin(30°+45°)} = \frac{100 \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{200}{\sqrt{3}+1}$ lb − wt

$T_2 = \frac{W\sin(\text{opposite angle})}{\sin(\text{total angle})} = \frac{100\sin 30°}{\sin(30°+45°)} = \frac{100 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ lb − wt

Example-45. W ওজন দুইটি রশি দ্বারা ঝুলানো হলো। একটি রশি উলম্ব রেখার সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। অপর রশিটি উলম্ব রেখার সাথে কত কোণ উৎপন্ন করলে এতে টানের পরিমাণ ক্ষুদ্রতম হবে? এক্ষেত্রে রশি দুইটির টানের পরিমাণ নির্ণয় কর।



Sol^n: মনে করি, অপর রশিটি উলম্বের সাথে θ কোণে আনত।

এখানে, $T_1 \wedge W = 180° - 30°$; $T_2 \wedge W = 180° - \theta$; $T_1 \wedge T_2 = 30° + \theta$

লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{T_1}{\sin(180°-\theta)} = \frac{T_2}{\sin(180°-30°)} = \frac{W}{\sin(30°+\theta)}$

$\Rightarrow \frac{T_1}{\sin\theta} = \frac{T_2}{\sin 30°} = \frac{W}{\sin(30°+\theta)}$

এখন, $\therefore T_1 = \frac{W\sin\theta}{\sin(30°+\theta)}$ ……… (i) ; $T_2 = \frac{W\sin 30°}{\sin(30°+\theta)}$ ……… (ii)

(ii) নং হতে T_2 এর মান ক্ষুদ্রতম হবে যদি এবং কেবল যদি $\sin(30° + \theta) = 1$ [সর্বোচ্চ হয়]

$\Rightarrow 30° + \theta = 90° \therefore \boxed{\theta = 60°}$

এখন, $\theta = 60°$

(i) $\Rightarrow T_1 = \frac{W\sin 60°}{\sin(30°+60°)} = \frac{\sqrt{3}}{2}W$ এবং (ii) $\Rightarrow T_2 = \frac{W\sin 30°}{\sin(30°+60°)} = \frac{W}{2}$

Shortcut for MCQ:

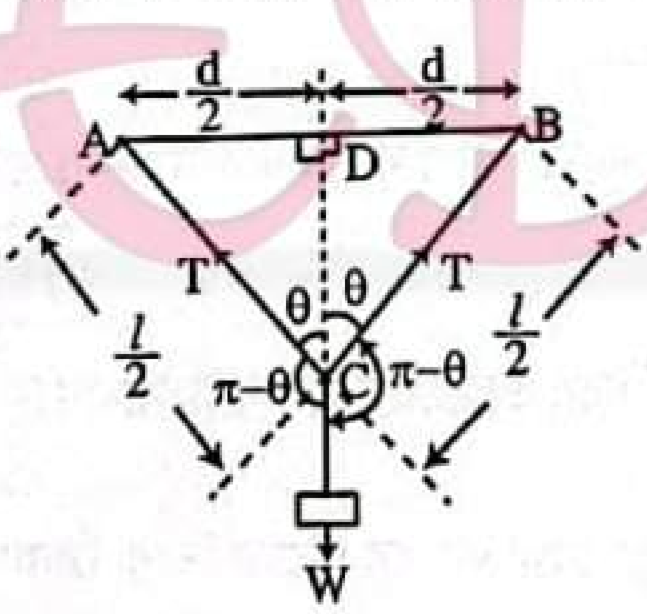
$T_2 = \frac{W\sin(\text{opposite angle})}{\sin(\text{total angle})} = \frac{W\sin 30°}{\sin(30°+\theta)}$; T_2, minimum হবে যদি এবং কেবল যদি $\sin(30° + \theta) = 1$ হয়।

$\therefore \theta = 60°$ হয়

সেক্ষেত্রে, $T_2 = \frac{W\sin 30°}{\sin(30°+60°)} = \frac{W}{2}$; $T_1 = \frac{W\sin 60°}{\sin(30°+60°)} = \frac{\sqrt{3}}{2}W$

Example-46: একই আনুভূমিক রেখায় d দূরত্বে অবস্থিত দুটি বিন্দুতে l দৈর্ঘ্যের একটি তারের প্রান্তদ্বয় বাঁধা আছে। মসৃণ ওজন বিহীন একটি আংটা W ওজন বহন করে তার বরাবর অবাধে গড়িয়ে যেতে পারে। $l > d$ হলে দেখাও যে, তারের টান $T = \frac{Wl}{2\sqrt{l^2-d^2}}$.

Sol^n:



লামির উপপাদ্য অনুসারে: $\frac{T}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{T}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{W}{\sin 2\theta} \Rightarrow \frac{T}{\sin\theta} = \frac{T}{\sin\theta} = \frac{W}{\sin 2\theta}$

১ম ও ৩য় অনুপাত থেকে, $\frac{T}{\sin\theta} = \frac{W}{2\sin\theta.\cos\theta} \Rightarrow T = \frac{W}{2\cos\theta}$

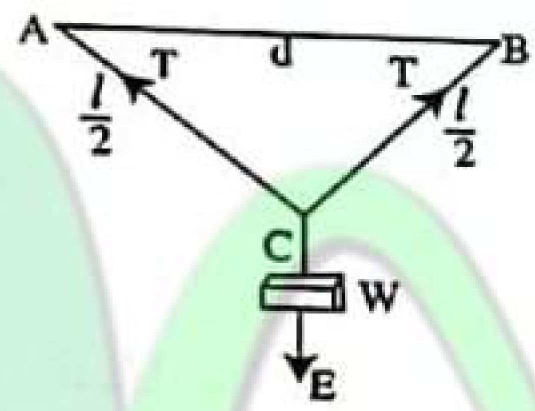
$\Rightarrow T = \frac{W}{2\times\frac{CD}{BC}} = \frac{W}{2\times\frac{\frac{1}{2}\sqrt{l^2-d^2}}{\frac{1}{2}l}}$; [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে ΔBCD- এ, $CD = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{l^2-d^2}$]

$\therefore \boxed{T = \frac{Wl}{2\sqrt{l^2-d^2}}}$

Shortcut for MCQ: $T = \frac{w\sin(\text{opposite angle})}{\sin(\text{total angle})} = \frac{w\sin\theta}{\sin 2\theta} = \frac{w\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{w}{2\cos\theta} = \frac{w}{2\times\frac{\frac{\sqrt{l^2-d^2}}{2}}{\frac{l}{2}}}$ $\therefore \boxed{T = \frac{wl}{2\sqrt{l^2-d^2}}}$

বিকল্প:

মনে করি, একই আনুভূমিক রেখায় d দূরত্বে অবস্থিত A ও B বিন্দুতে তারটির প্রান্তদ্বয় বাঁধা আছে। যেহেতু মসৃণ ওজনবিহীন আংটাটি W ওজন বহন করে তার বরাবর অবাধে গড়িয়ে যেতে পারে, সেহেতু W ওজন তারের ঠিক মধ্যবিন্দু C (ধরি) তে খাড়া নিচের দিকে কার্যরত থাকবে এবং তারের টান T সর্বত্র সমান থাকবে। তাহলে $AB = d, AC = BC = \frac{l}{2}$



এখন C বিন্দুতে ক্রিয়ারত T ও T সমান বল দুইটির লব্ধি W এর সমান। সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই,

$W^2 = T^2 + T^2 + 2T.T\cos C = 2T^2(1+\cos C)$

$= 2T^2\left(1+\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2-d^2}{2\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)}\right) = 2T^2\left(1+\frac{\frac{l^2}{2}-d^2}{\frac{l^2}{2}}\right) = 2T^2\frac{\frac{l^2}{2}+\frac{l^2}{2}-d^2}{\frac{l^2}{2}} = 4T^2\frac{l^2-d^2}{l^2} \Rightarrow T^2 = \frac{W^2l^2}{4(l^2-d^2)}$

$\therefore$ তারের টান $= \frac{Wl}{2\sqrt{l^2-d^2}}$ **(Showed)**

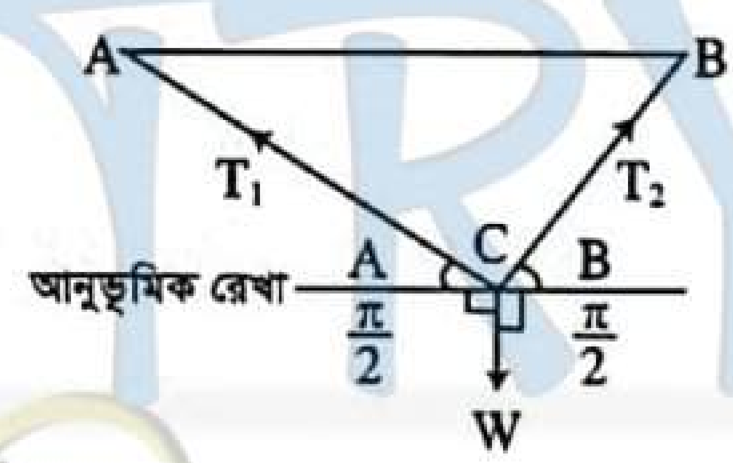
Category–03: আনুভূমিকের সাথে কোণ দেওয়া আছে

Concept

মনে করি, কোনো দেয়ালের উপর A ও B দুইটি বিন্দু। A ও B বিন্দুতে একটি সুতা (ACB) দ্বারা W ওজনের একটি বস্তুকে বেধে ঝুলিয়ে রাখা হয়েছে। সুতার টান T_1 ও T_2 যথাক্রমে CA ও CB বরাবর ক্রিয়ারত।

এখন, $T_1 \wedge W = \frac{\pi}{2} + A, T_2 \wedge W = \frac{\pi}{2} + B$

$T_1 \wedge T_2 = C$



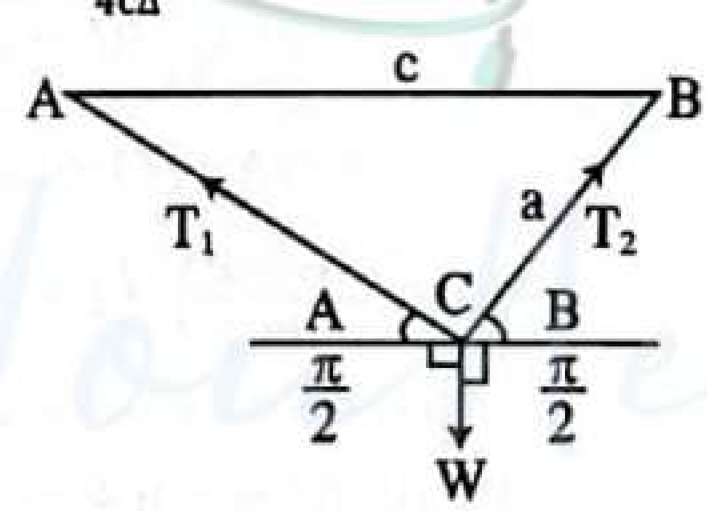
লামির উপপাদ্য অনুসারে: $\frac{T_1}{\sin(T_2 \wedge W)} = \frac{T_2}{\sin(T_1 \wedge W)} = \frac{W}{\sin(T_1 \wedge T_2)}$

$\Rightarrow \frac{T_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+B\right)} = \frac{T_2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)} = \frac{W}{\sin C} \therefore \boxed{\frac{T_1}{\cos B} = \frac{T_2}{\cos A} = \frac{W}{\sin C}}$

Note: এক্ষেত্রে প্রয়োজনে ত্রিভুজের Sine Rule, Cosine Rule এবং অন্যান্য সূত্রসমূহ ব্যবহার করা লাগতে পারে।

Problems

Example-47. ACB রশির দুই প্রান্তে একই আনুভূমিক রেখার A ও B বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। রশির C বিন্দুতে W ওজনের একটি বস্তু গিট দিয়ে বাঁধা। ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য a, b, c এবং ক্ষেত্রফল Δ দ্বারা সূচিত হলে, দেখাও যে রশির CA অংশের $\frac{Wb}{4c\Delta}(c^2+a^2-b^2)$.



Sol^n: আমরা জানি, cosine law অনুসারে, $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C \therefore \sin C = \frac{2\Delta}{ab}$

এখানে, লামির সূত্র অনুসারে, $\frac{T_1}{\cos B} = \frac{T_2}{\cos A} = \frac{W}{\sin C}$

$\therefore$ CA অংশের টান, $T_1 = W \times \frac{\cos B}{\sin C} = W \times \frac{\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{\frac{2\Delta}{ab}} \therefore T_1 = \frac{Wb}{4c\Delta}(c^2+a^2-b^2)$

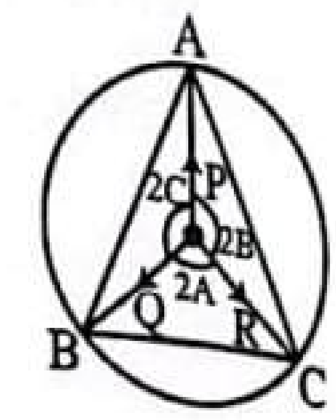
Category–04: অন্তঃকেন্দ্র, লম্ববিন্দু, পরিকেন্দ্র সংক্রান্ত

Shortcut:

➤ যদি P, Q, R মানের তিনটি বল ΔABC এর পরিকেন্দ্র O হতে OA, OB এবং OC বরাবর ক্রিয়ারত থেকে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে তাহলে,

(a) $P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

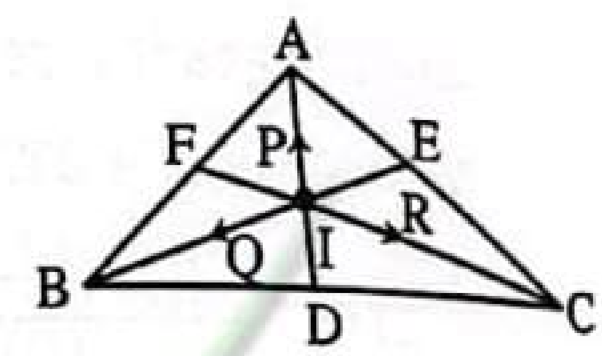
(b) $P : Q : R = a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(c^2 + a^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2)$



➤ যদি P, Q, R মানের তিনটি বল ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র I হতে IA, IB এবং IC বরাবর ক্রিয়ারত থেকে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে তাহলে,

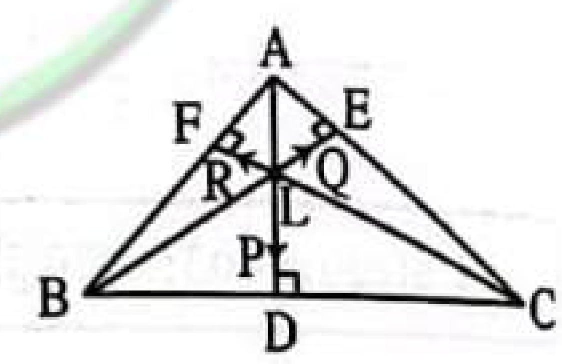
(a) $P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

(b) $P^2 : Q^2 : R^2 = a(b + c - a) : b(c + a - b) : c(a + b - c)$



➤ যদি P, Q, R মানের তিনটি বল ΔABC এর লম্ববিন্দু L হতে বিপরীত শীর্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত হয় তাহলে,

(a) $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$ (b) $P : Q : R = a : b : c$



◆ **অন্তঃকেন্দ্র:** অন্তঃকেন্দ্র হলো কোন ত্রিভুজের কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলোর ছেদবিন্দু

Problems

Example-48. ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O থেকে OA, OB, OC বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$ এবং $P^2 : Q^2 : R^2 = a(b + c - a) : b(c + a - b) : c(a + b - c)$

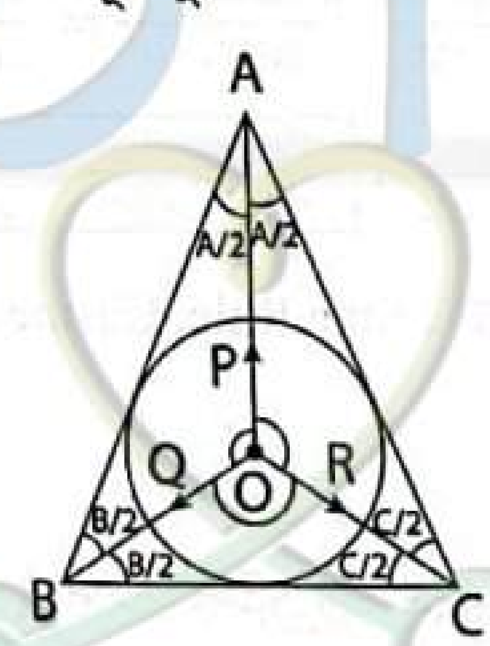
Solⁿ: O বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে লামীর সূত্রানুসারে আমরা পাই, $\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin COA} = \frac{R}{\sin AOB}$

$\Rightarrow \frac{P}{\sin\left(\pi - \frac{B+C}{2}\right)} = \frac{Q}{\sin\left(\pi - \frac{C+A}{2}\right)} = \frac{R}{\sin\left(\pi - \frac{A+B}{2}\right)}$

$\Rightarrow \frac{P}{\sin\frac{B+C}{2}} = \frac{Q}{\sin\frac{C+A}{2}} = \frac{R}{\sin\frac{A+B}{2}}$

$\Rightarrow \frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)} = \frac{Q}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right)} = \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)} \Rightarrow \frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$

$\therefore P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$ **(Showed)**



$\angle BOC = \pi - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C$

$\angle BOC = \pi - \frac{B+C}{2}$

অনুরূপভাবে, $\angle AOC = \pi - \frac{A+C}{2}$

$\angle AOB = \pi - \frac{A+B}{2}$

এবং $A + B + C = \pi$

দ্বিতীয় অংশ: $P^2 : Q^2 : R^2 = \cos^2\frac{A}{2} : \cos^2\frac{B}{2} : \cos^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos A) : \frac{1}{2}(1 + \cos B) : \frac{1}{2}(1 + \cos C)$

$= \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) : \left(1 + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right) : \left(1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} : \frac{(c+a)^2-b^2}{2ca} : \frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}$

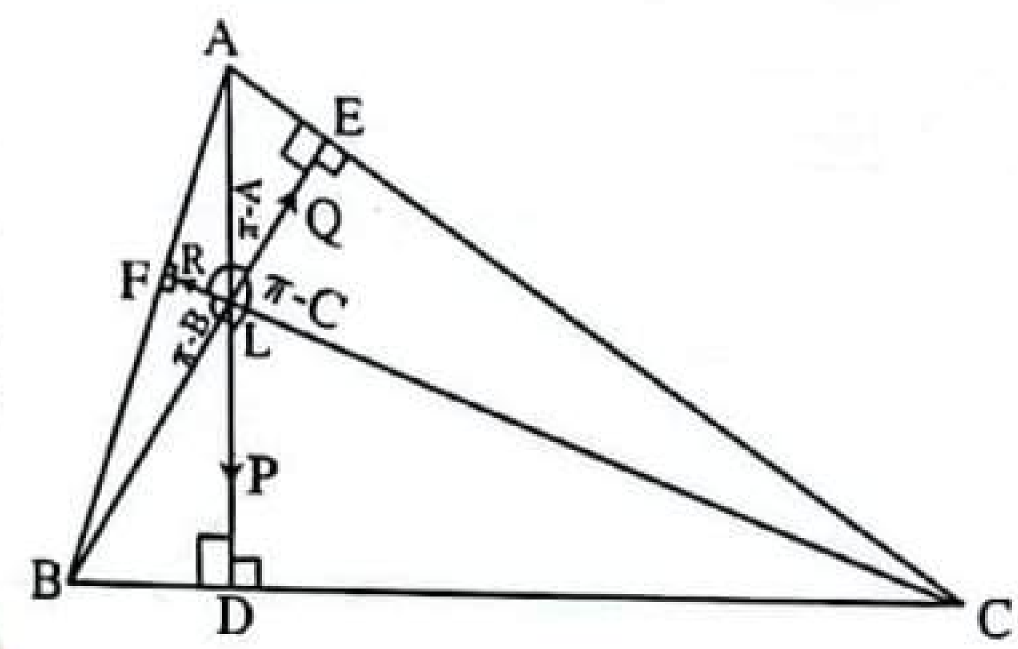
$= a(b + c - a)(b + c + a) : b(c + a - b)(c + a + b) : c(a + b - c)(a + b + c)$

$\therefore P^2 : Q^2 : R^2 = a(b + c - a) : b(c + a - b) : c(a + b - c)$ **(Showed)**

◆ **লম্ববিন্দু:** লম্ববিন্দু হলো শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুগুলোর উপর অঙ্কিত লম্বগুলোর ছেদবিন্দু।

Example-49. ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O. O থেকে BC, CA এবং AB বাহুর উপর লম্ব বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q এবং R বলত্রয় সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে,

(i) $P:Q:R = \sin A : \sin B : \sin C$ (ii) $P:Q:R = a:b:c$



Sol^n: চিত্রে, ΔABC এর শীর্ষ A, B, C হতে বিপরীত বাহুসমূহ BC, CA এবং AB এর উপর লম্বগুলো যথাক্রমে AD, BE এবং CF পরস্পরকে L বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, L হলো লম্ববিন্দু। এখন L হতে LD, LE এবং LF বরাবর P, Q এবং R মানের তিনটি বল ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করেছে। এখন, LDCE একটি চতুর্ভুজ যার $\angle LDC = \angle LEC = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \angle ELD + \angle ECD = \pi$

$\Rightarrow \angle ELD = \pi - \angle ECD = \pi - C \therefore \angle ELD = \pi - C$

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় $\angle ELF = \pi - A$ এবং $\angle FLD = \pi - B$

এখন, লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{P}{\sin\angle ELF} = \frac{Q}{\sin\angle FLD} = \frac{R}{\sin\angle ELD}$

$\Rightarrow \frac{P}{\sin(\pi-A)} = \frac{Q}{\sin(\pi-B)} = \frac{R}{\sin(\pi-C)} \therefore \boxed{\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}}$

$\Rightarrow \frac{P}{\frac{a}{2R'}} = \frac{Q}{\frac{b}{2R'}} = \frac{R}{\frac{c}{2R'}}$ [ত্রিভুজের Sine Rule, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R'$ যেখানে $R' = \Delta ABC$ এর পরিব্যাসার্ধ]

$\therefore \boxed{\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}} \therefore$ (i) $P:Q:R = \sin A : \sin B : \sin C$

(ii) $P:Q:R = a:b:c$ [প্রমাণিত]

Note: ΔABC এর অভ্যন্তরে যে কোন বিন্দু L হতে বাহুগুলোর উপর লম্ব বরাবর P, Q, R মানের তিনটি বল ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করলেও উপরোক্ত শর্তসমূহ (লম্ববিন্দু এর) একইভাবে প্রমাণ করা যায়।

- **পরিকেন্দ্র:** পরিকেন্দ্র হলো কোন ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকগুলোর ছেদবিন্দু।

Example-50. ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হতে OA, OB, OC বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে,

(i) $P:Q:R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

(ii) $P:Q:R = a^2(b^2+c^2-a^2) : b^2(c^2+a^2-b^2) : c^2(a^2+b^2-c^2)$

(iii) $P:Q:R = a\cos A : b\cos B : c\cos C$

Sol^n: মনে করি, ΔABC এর পরিকেন্দ্র O. O হতে OA, OB এবং OC বরাবর P, Q এবং R মানের তিনটি বল ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় আছে। ABC বৃত্তে $\angle BAC$, BC চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ এবং $\angle BOC$, BC চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ $\therefore \angle BOC = 2\angle BAC = 2A$ [একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় $\angle AOC = 2B$, $\angle AOB = 2C$

এখন, লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{P}{\sin\angle BOC} = \frac{Q}{\sin\angle AOC} = \frac{R}{\sin\angle AOB}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}}$ [(i) প্রমাণিত]

$\Rightarrow \frac{P}{2\sin A\cos A} = \frac{Q}{2\sin B\cos B} = \frac{R}{2\sin C\cos C}$ ……… (i)

$\Rightarrow \frac{P}{2\frac{a}{2R'}\times\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2bc.a}.a} = \frac{Q}{2.\frac{b}{2R'}.\frac{(c^2+a^2-b^2)}{2ca.b}.b} = \frac{R}{2.\frac{c}{2R'}.\frac{(a^2+b^2-c^2)}{2ab.c}.c}$ [R' = পরিবৃত্তটির ব্যাসার্ধ]

$\therefore \boxed{\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}}$ [(ii) প্রমাণিত]

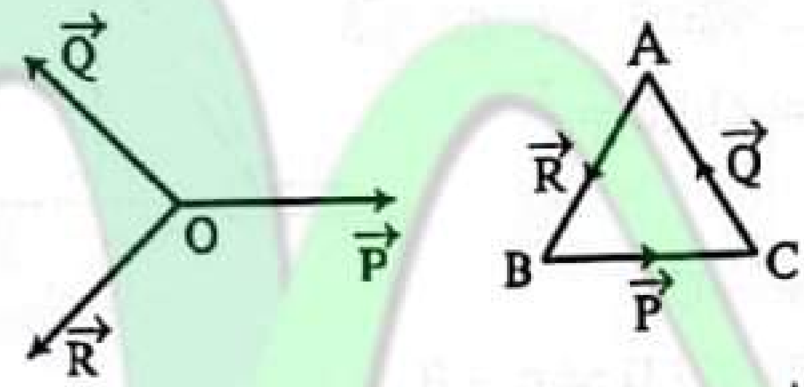
আবার (1) নং হতে পাই $\frac{P}{2\sin A\cos A} = \frac{Q}{2\sin B\cos B} = \frac{R}{2\sin C\cos C}$

$\Rightarrow \frac{P}{2\frac{a}{2R'}\cos A} = \frac{Q}{2\frac{b}{2R'}\cos B} = \frac{R}{2\frac{c}{2R'}\cos C}$ [R' = ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ] $\Rightarrow \frac{P}{a\cos A} = \frac{Q}{b\cos B} = \frac{R}{c\cos C}$ [(iii) প্রমাণিত]

Case-02: ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত সূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত

Concept

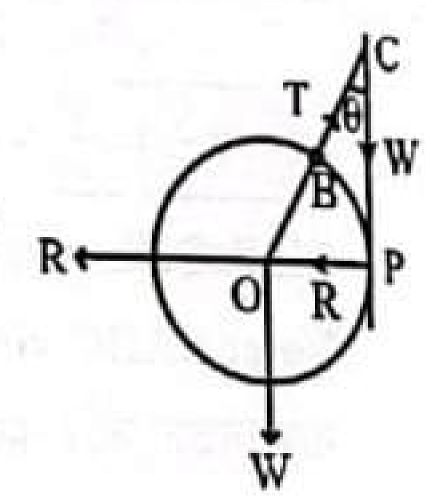
একটি বিন্দুতে কার্যরত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে তাদেরকে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা মানে ও দিকে (অবস্থানে নয়) একই ক্রমে সূচিত করা যায়।



$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{CA} = \frac{R}{AB}$$

Problems

Example-51. r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট W ওজনের একটি গোলক একটি মসৃণ খাড়া দেয়ালের সাথে P বিন্দুতে ঠেকিয়ে r দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি রশি দিয়ে গোলকের B বিন্দুতে ও দেয়ালের C বিন্দুতে সুস্থিতে বাঁধা আছে। টান T ও দেয়ালের উপর প্রতিক্রিয়া R এর মান W এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।



Solⁿ: $CP = \sqrt{(2r)^2 - r^2}$

ΔCOP এর OC, CP এবং PO বাহুর সমান্তরালে T, W এবং R মানের বলগুলোকে একই ক্রমে মানে ও দিকে সূচিত করা হয়।

এখন, $\frac{W}{CP} = \frac{R}{PO} = \frac{T}{OC} \Rightarrow \frac{W}{\sqrt{3}r} = \frac{R}{r} = \frac{T}{2r}$

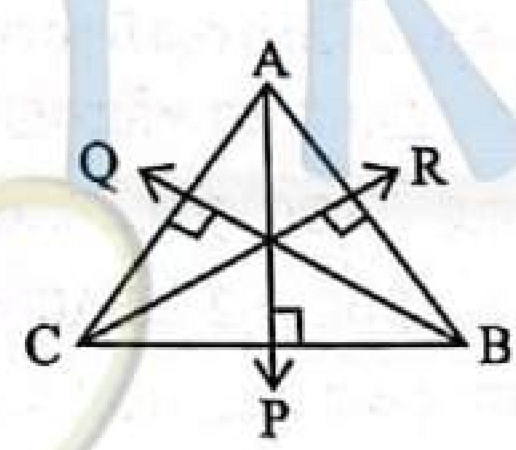
$\therefore R = \frac{W}{\sqrt{3}}$ এবং $T = \frac{2W}{\sqrt{3}}$ (Ans.)

Case-03: বলের লম্ব ত্রিভুজ সূত্র সংক্রান্ত

Concept

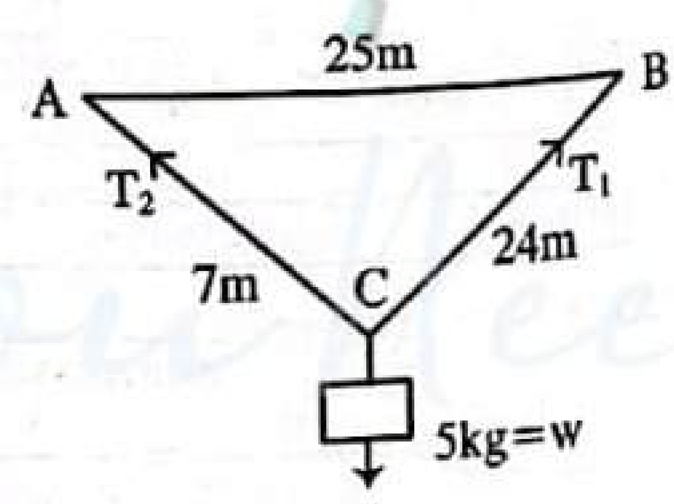
বলের লম্ব ত্রিভুজ সূত্র:

কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটা বলের মান যদি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমানুপাতিক হয় এবং ইহারা যদি অনুরূপ বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে তবে বলগুলো সুস্থিত থাকবে।



$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$$

Example-52. 31 মিটার দীর্ঘ একটি সুতার প্রান্তদ্বয় একই অনুভূমিক রেখায় 25m দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে আবদ্ধ আছে সুতাটির এক প্রান্ত হতে 7m দূরে তার সাথে 5kg ওজনের একটি বস্তু সংযুক্ত করা হল । সুতাটির প্রত্যেক অংশের টান নির্ণয় কর।



Solⁿ: $7^2 + 24^2 = 25^2$

$T_1 \perp T_2, w \perp AB$

$\therefore \frac{T_1}{7} = \frac{T_2}{24} = \frac{5}{25}$ [বলের লম্ব ত্রিভুজ সূত্র]

$T_1 = \frac{7}{5}kg - wt$

$T_2 = \frac{24}{5}kg - wt$

Type-12: লম্বাংশ/লম্বাংশ উপপাদ্য ব্যবহার করে সাম্যাবস্থার প্রমাণ সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

এক্ষেত্রে তলের উপর ক্রিয়ারত প্রতিটি বলের লম্বাংশ (resolved parts) তলের দিকে এবং তলের লম্ব দিকে বের করে হিসাব করতে হবে।

Problems

Example-53. P ও Q বলদ্বয় যথাক্রমে একটি হেলানো তলের দৈর্ঘ্য ও ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়ারত থাকলে প্রত্যেকে পৃথকভাবে তলের উপর W ওজনের একটি বস্তুকে ধরে রাখতে পারে। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{P^2}-\frac{1}{Q^2}=\frac{1}{W^2}$.

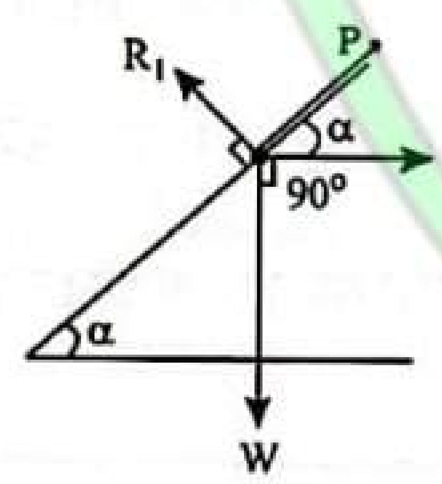
Solⁿ: মনে করি α কোণে হেলানো তলের দৈর্ঘ্য ও ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়ারত দুইটি বল P এবং Q উহার প্রত্যেকে W ওজনের একটি বস্তুকে ধরে রাখতে পারে।

১ম ক্ষেত্রে, $\frac{P}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{W}{\sin\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{1}{P^2}=\frac{\operatorname{cosec}^2\alpha}{W^2}$ ……… (i)

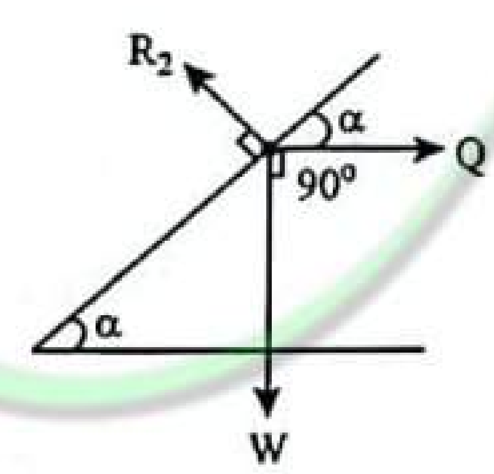
২য় ক্ষেত্রে, $\frac{Q}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} \Rightarrow Q=W\tan\alpha$

$\Rightarrow \frac{1}{Q^2}=\frac{1}{W^2}.\cot^2\alpha$ ……… (ii)

(i) – (ii) $\Rightarrow \frac{1}{P^2}-\frac{1}{Q^2}=\frac{1}{W^2}$ **(Proved)**

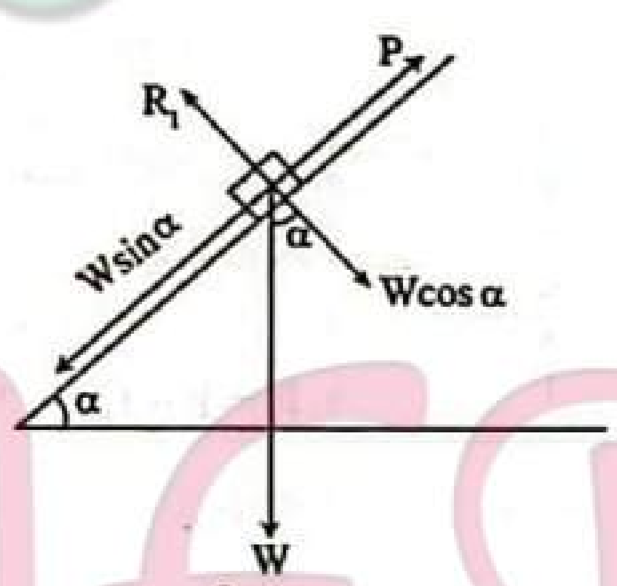


চিত্র (a)

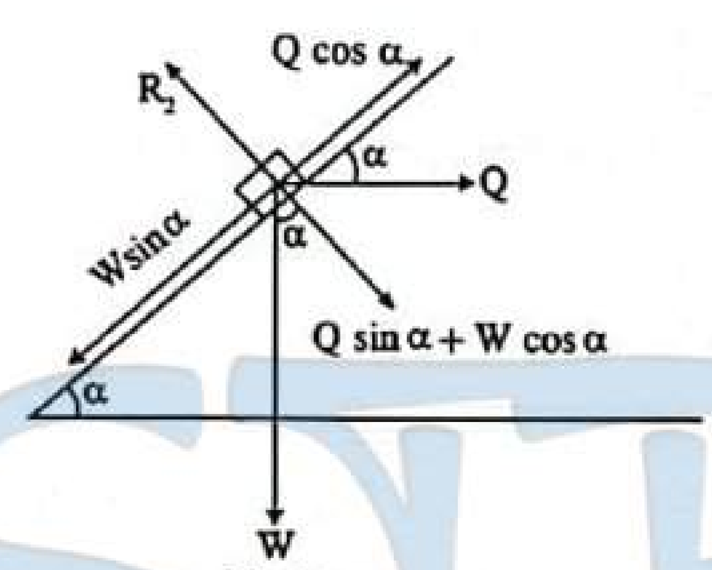


চিত্র (b)

বিকল্প:



চিত্র- (a)



চিত্র-(b)

চিত্র-(a) হতে, $P=W\sin\alpha \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha=\frac{W}{P}$ ……… (1) | চিত্র- (b) হতে, $Q\cos\alpha=W\sin\alpha \Rightarrow \cot\alpha=\frac{W}{Q}$ ………….(2)

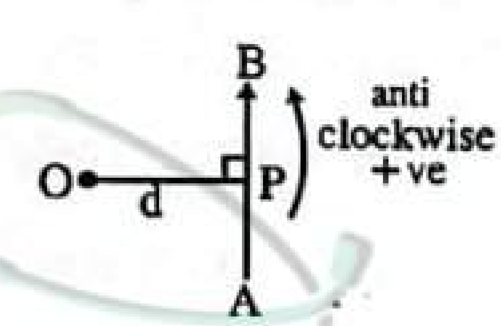
$(1)^2-(2)^2 \Rightarrow \frac{W^2}{P^2}-\frac{W^2}{Q^2}=1 \Rightarrow W^2\left(\frac{1}{P^2}-\frac{1}{Q^2}\right)=1 \therefore \boxed{\frac{1}{P^2}-\frac{1}{Q^2}=\frac{1}{W^2}}$ [প্রমাণিত]

Type-13: বলের ভ্রামক সম্পর্কিত

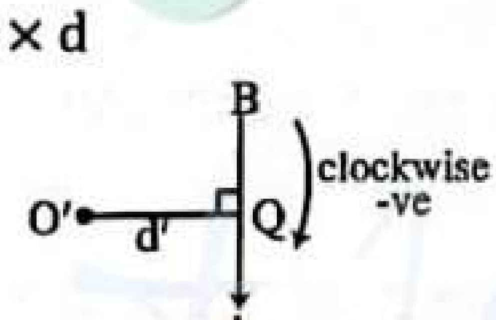
Concept

বলের ভ্রামক = বল × লম্ব দূরত্ব।

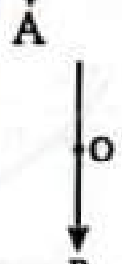
(i) P বলটি যদি AB রেখা দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত হয়, তবে যেকোনো বিন্দু O এর সাপেক্ষে,
P বলের ভ্রামক = P এর মান × O থেকে AB এর লম্ব দূরত্ব = P × d



(ii) অনুরূপভাবে, O′ এর সাপেক্ষে Q বলের ভ্রামক = $-Q.d'$



(iii) P বল O বিন্দুগামী হলে O এর সাপেক্ষে P এর ভ্রামক = P × 0 = 0



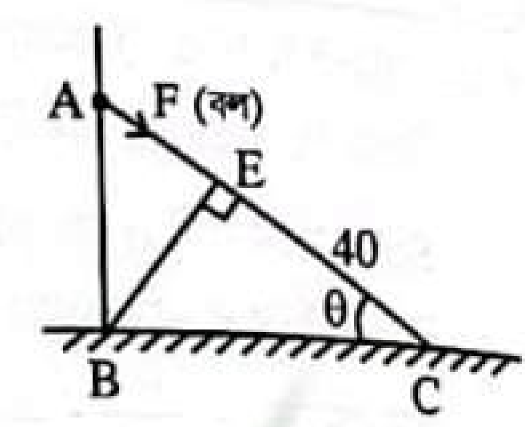
Moment, M=P×0=0

৭০

Problems

Example-54. ভূমির উপর খাড়াভাবে দন্ডায়মান একটি খুঁটির সাথে 40 m দীর্ঘ একটি শক্ত দড়ির একপ্রান্ত বাঁধা আছে এবং অপর প্রান্তে একটি লোক নির্দিষ্ট বল প্রয়োগ করে টানছে। খুঁটিটির কত উচ্চতায় দড়ি বাঁধলে লোকটির পক্ষে তা উল্টিয়ে ফেলা সহজ হবে? **[RU'18-19]**

Sol^n: $BE = BC\sin\theta = (AC\cos\theta)\sin\theta = AC\sin\theta\cos\theta = \frac{AC}{2}.(2\sin\theta\cos\theta) = \frac{40}{2}\sin 2\theta = 20\sin 2\theta$



উল্টিয়ে ফেলা সহজ হবে যদি B বিন্দু এর সাপেক্ষে F বলের ভ্রামক (Moment) সর্বাধিক হয়।

$\therefore$ বলের ভ্রামক $M = F.BE = 20F\sin 2\theta$

$\sin 2\theta$ এর সর্বোচ্চ মান 1

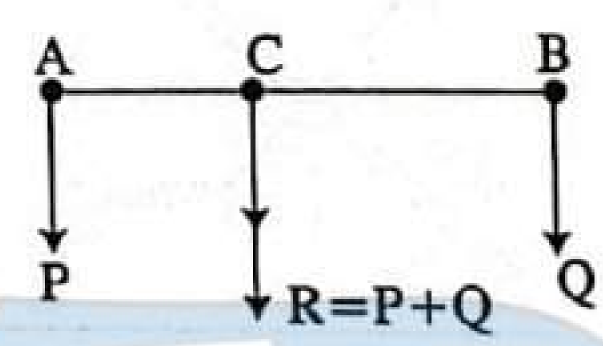
$\therefore 2\theta = 90° \Rightarrow \theta = 45° \therefore AB = AC\sin\theta = 40\sin 45° = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** সর্বদা খুটির যে উচ্চতায় দড়ি বাঁধতে হবে তা হবে $= \frac{\text{দড়ির দৈর্ঘ্য}}{\sqrt{2}}$ একক।

Note: টেলিগ্রাফ থামের দৈর্ঘ্য $\frac{l}{\sqrt{2}}$ অপেক্ষা কম হলে থামের সর্বোচ্চ বিন্দুতে রশি বাধলে Moment সর্বোচ্চ হবে।

Type-14: সদৃশ ও বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি সংক্রান্ত

Concept



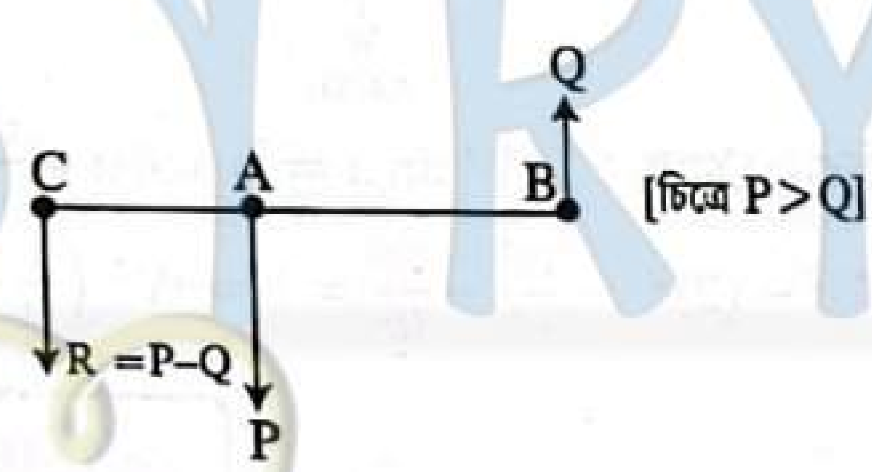
➤ দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের ক্ষেত্রে,

(i) $R = P + Q$

(ii) $P.AC = Q.BC$

(iii) $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AB}$

➤ দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বলের ক্ষেত্রে, ($P > Q$ হলে)



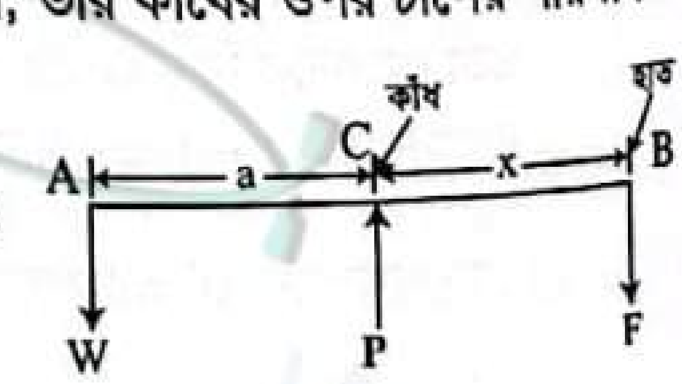
(i) $R = P - Q$

(ii) $P.AC = Q.BC$

(iii) $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P-Q}{AB}$

Problems

Example-55. একজন লোক একটি লাঠিকে তার কাঁধের ওপর অনুভূমিকভাবে স্থাপন করে এর এক প্রান্তে একটি বস্তু বহন করে। বস্তুটি W ওজন এবং তার কাঁধ হতে বস্তু ও হাতের দূরত্ব যথাক্রমে a এবং x হয় তবে দেখাও যে, তার কাঁধের ওপর চাপের পরিমাণ P হবে, যেখানে $P = \frac{W(a+x)}{x}$.



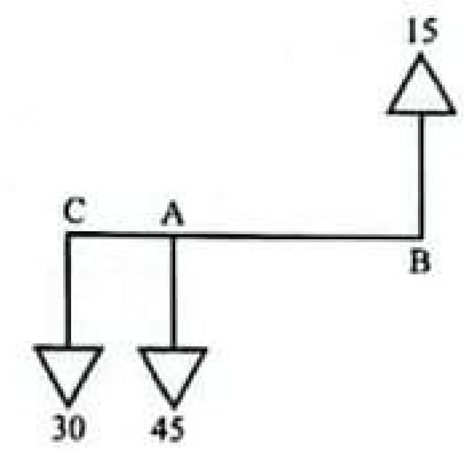
Sol^n: মনে করি, লাঠিটি AB এবং A এর প্রান্তে W ওজনের বস্তু, B প্রান্তে লোকটির হাত ও C বিন্দুতে কাঁধের অবস্থান।

মনে করি, কাঁধের উপর পৃষ্ঠ চাপ P এবং B প্রান্তে হাত দ্বারা চালিত নিম্নমুখী বল F।

$\therefore W.AC = F.BC \Rightarrow \frac{W}{BC} = \frac{F}{AC} = \frac{W+F}{BC+AC} \Rightarrow \frac{W}{x} = \frac{F}{a} = \frac{P}{x+a} \Rightarrow P = \frac{W(x+a)}{x}$ **[Showed]**

Shortcut: B এর সাপেক্ষে moment নিলে $W(a+x) - Px = 0 \therefore P = \frac{W(a+x)}{x}$

Example-56: A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলের মান ও দিক নিচের চিত্রের মাধ্যমে দেয়া হলো। যদি লব্ধি বল C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং AC = 5 হয়, তবে AB এর মান কত? **[KU'13-14]**



Sol^n: $5 \times 45 = BC \times 15$

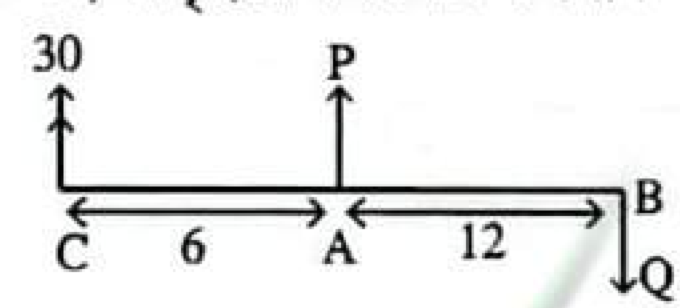
$\therefore BC = 15$

এখন, $AC + AB = BC$

$\Rightarrow 5 + AB = 15$

$\therefore AB = 10$ একক। **(Ans.)**

Example-57. 12 সেমি. ব্যবধানে ক্রিয়াশীল দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি 30 কেজি ওজন, যা বৃহত্তর বল থেকে 6 সেমি দূরে ক্রিয়া করে। বল দুইটি নির্ণয় কর।

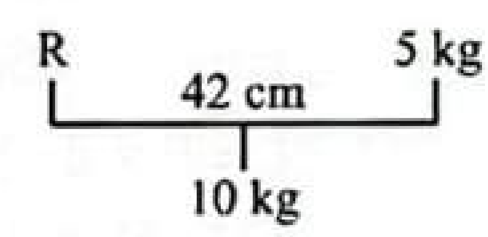


Sol^n: এখানে, $AB = 12$ cm; $AC = 6$ cm

$\therefore \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{30}{AB} \Rightarrow \frac{P}{18} = \frac{Q}{6} = \frac{30}{12} \therefore P = 45$ kg-wt, $Q = 15$ kg-wt **(Ans.)**

Example-58. 42 সে.মি. ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে 10 kg ও 5 kg ওজনের দুইটি অসদৃশ্য সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি বৃহত্তম বল থেকে কত সে.মি. দূরে ক্রিয়া করবে? **[RU'22-23]**

(a) 24 (b) 84 (c) 39 (d) 42



Sol^n: (d); ধরি, x cm দূরে ক্রিয়া করে।

প্রশ্নমতে, $x \times 10 = (42 + x)5$

$\Rightarrow 2x = 42 + x \Rightarrow x = 42$

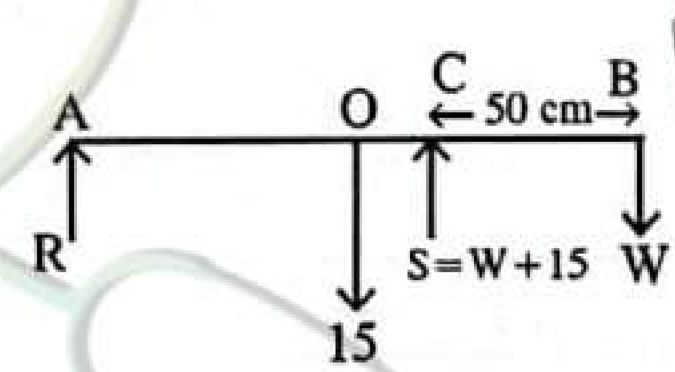
Type-15: সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় এর সূত্র প্রয়োগ করে চাপ ও প্রতিক্রিয়া বল নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

এক্ষেত্রে সমান্তরাল বলের লব্ধির Concept ব্যবহার করতে হবে অথবা 'কোনো একটি বিন্দুর চারিদিকে বলগুলোর মোমেন্টের যোগফল শূন্য হবে'-এই Concept ব্যবহার করতে হবে।

Problems

Example-59. 4 m দীর্ঘ এবং 15 kg ওজনের AB একটি সমরূপ তক্তা। দুইটি অবলম্বনের উপর আনুভূমিকভাবে স্থির আছে। একটি অবলম্বন A প্রান্তে এবং অন্যটি B প্রান্ত হতে 50 cm ভিতরে অবস্থিত। একটি বালক তক্তাটিকে না উল্টিয়ে এর উপর দিয়ে B প্রান্তে পৌছাতে সক্ষম হলে বালকটির ওজন কত?



Sol^n: মনে করি, অন্য অবলম্বনটি C বিন্দুতে অবস্থিত এবং তক্তার মধ্যবিন্দু O-তে এর ওজন নিম্নদিকে ক্রিয়া করে।

$\therefore AO = BO = 2$ m এবং $BC = 50$ cm $= \frac{1}{2}$m;

$OC = BO - BC = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$m

মনে করি, বালকটির ওজন W এবং A ও C তে অবস্থিত অবলম্বনের প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R ও S।

বালকটি কোন রকমে B প্রান্তে পৌছা মাত্র A বিন্দুতে অবলম্বনের চাপ শূন্য হবে এবং প্রতিক্রিয়া R = 0 হবে। তক্তাটি কেবলমাত্র C অবলম্বনের উপর সুস্থিত থাকবে।

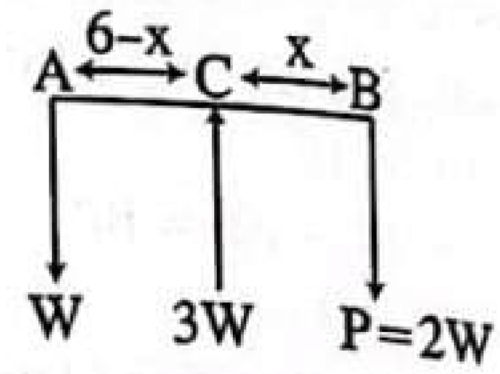
কাজেই C বিন্দুর চারদিকে ওজনগুলোর ভ্রামক নিয়ে পাই- $S \times 0 + 15 \times OC - W \times BC = 0$

$\Rightarrow 15 \times \frac{3}{2} - W \times \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow W = 45$ kg-wt। **(Ans.)**

বিকল্প: সমান্তরাল বলের লব্ধির সূত্রানুসারে, $\frac{15}{BC} = \frac{W}{OC} = \frac{W+15}{BO} \Rightarrow \frac{15}{\frac{1}{2}} = \frac{W}{\frac{3}{2}} = \frac{W+15}{2}$

১ম ও ২য় অনুপাত হতে পাই, $\frac{15}{\frac{1}{2}} = \frac{W}{\frac{3}{2}} \therefore W = 45$ kg-wt **(Ans)**

Example-60. একজন লোক একটি 6 ফুট দীর্ঘ কাঠিকে তার কাঁধের উপর আনুভূমিকভাবে স্থাপন করে এর এক প্রান্তে একটি W ওজনের বস্তু বহন করে। কাঁধের উপর চাপের পরিমাপ বস্তুটির ওজনের 3 গুণ হলে কাঁধ হতে হাতের দূরত্ব কত?

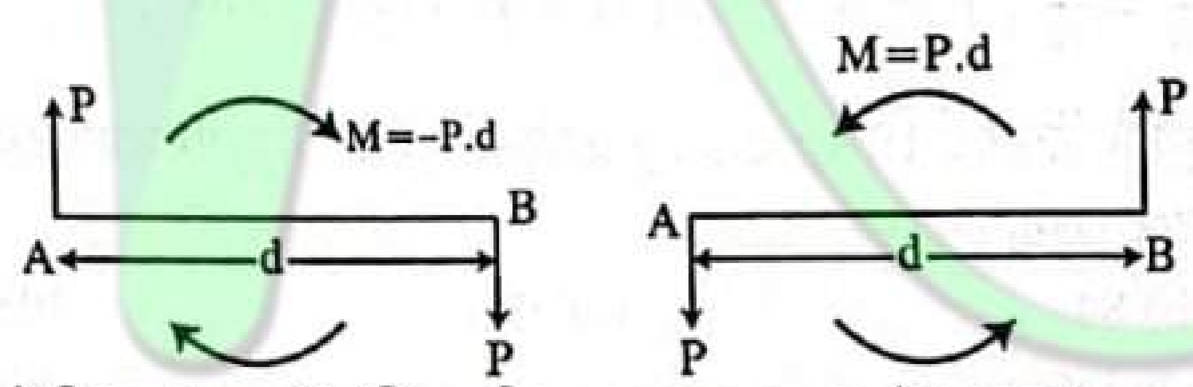


Sol^n: ধরি, কাঁধ হতে হাতের দূরত্ব $= x$;
চিত্র হতে, হাতের উপর চাপ $= 3W - W = 2W = P$
এখন, $2W.x = (6 - x)W \therefore x = 2$ feet **(Ans.)**
বিকল্প: সমান্তরাল বলের লব্ধির সূত্রানুসারে, $\frac{2W}{6-x} = \frac{W}{x} = \frac{3W}{6}$
২য় ও ৩য় অনুপাত হতে পাই, $\frac{1}{x} = \frac{3}{6} \therefore x = 2$ ft **(Ans.)**

Type-16: সমান্তরাল বলের ক্ষেত্রে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দুর সরণ ও বিবিধ নির্ণয় সংক্রান্ত

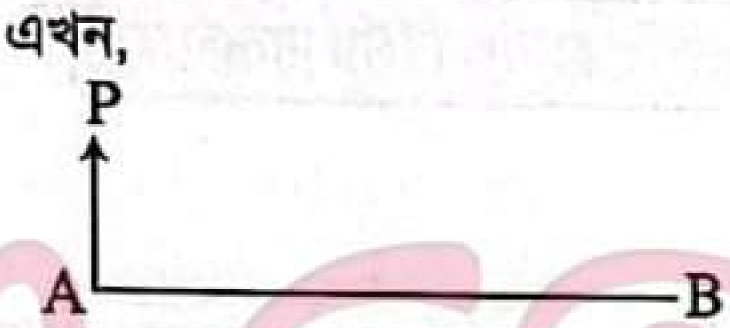
Concept

দ্বন্দ্বের (যুগল) ধারণা:



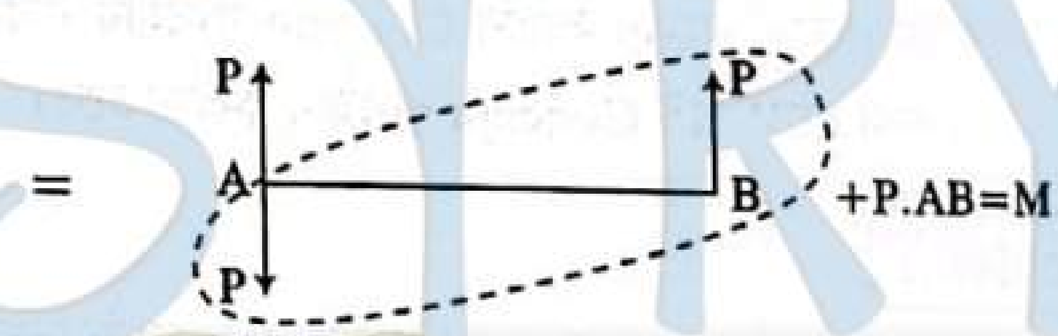
A এবং B বিন্দুতে P মানের দুইটি সমান ও বিপরীতমুখী বল কাজ করছে, উৎপন্ন System কে যুগল বা দ্বন্দ্ব বলে। দ্বন্দ্বের (যুগলের) ভ্রামক, $M = P \times d$ [বলের মান × বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব]
$\circlearrowleft(+)$ anticlockwise হলে $M = +ve$; $\circlearrowright(-)$ clockwise হলে $M = -ve$

এখন,



A বিন্দুতে P মানের একটি বল আছে। আমরা চাই, P এর ক্রিয়ারেখা অপরিবর্তীত রেখে P বলকে A হতে B বিন্দুতে স্থানান্তর করতে। নিচের চিত্র দুইটি লক্ষ কর:

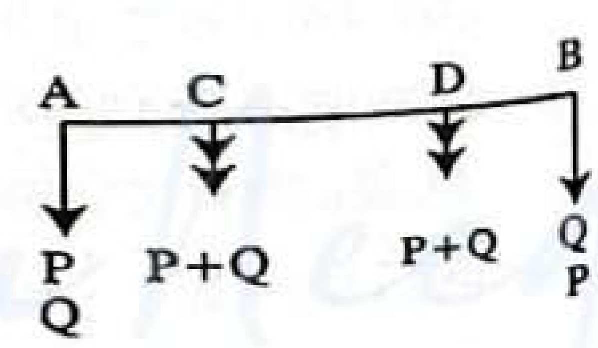
A বিন্দু থেকে বলকে B বিন্দুতে স্থানান্তর করা হয়েছে।



এভাবে চিন্তা করা যায় যে A বিন্দুতে P এর সমান এবং বিপরীতমুখী একটি বল দেওয়া হয়েছে এবং B বিন্দুতে P মানের এবং P এর দিকের একটি বল দেওয়া হয়েছে। ফলে এখানে $+P.AB$ মানের একটি যুগল সৃষ্টি হয়েছে।
অর্থাৎ A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে একটি বল স্থানান্তর করলে একটি যুগল যোগ করতে হয় যার ভ্রামক,
$M =$ উক্ত বল × বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব

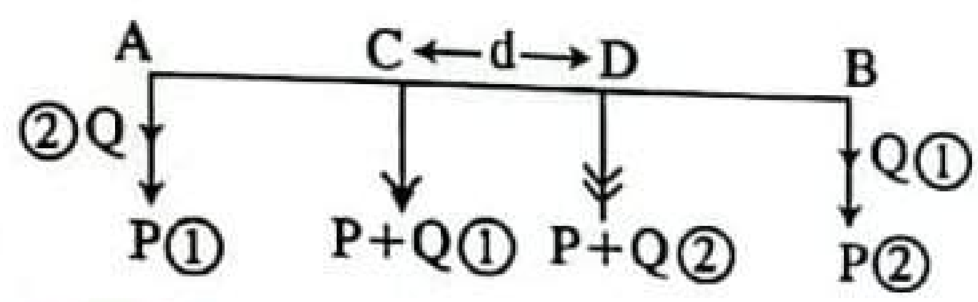
Problems

Example-61: একটি বস্তুর উপর A ও B বিন্দুতে কার্যরত দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q $(P > Q)$ পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর d দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ কর যে, $d = \frac{P-Q}{P+Q}AB$.

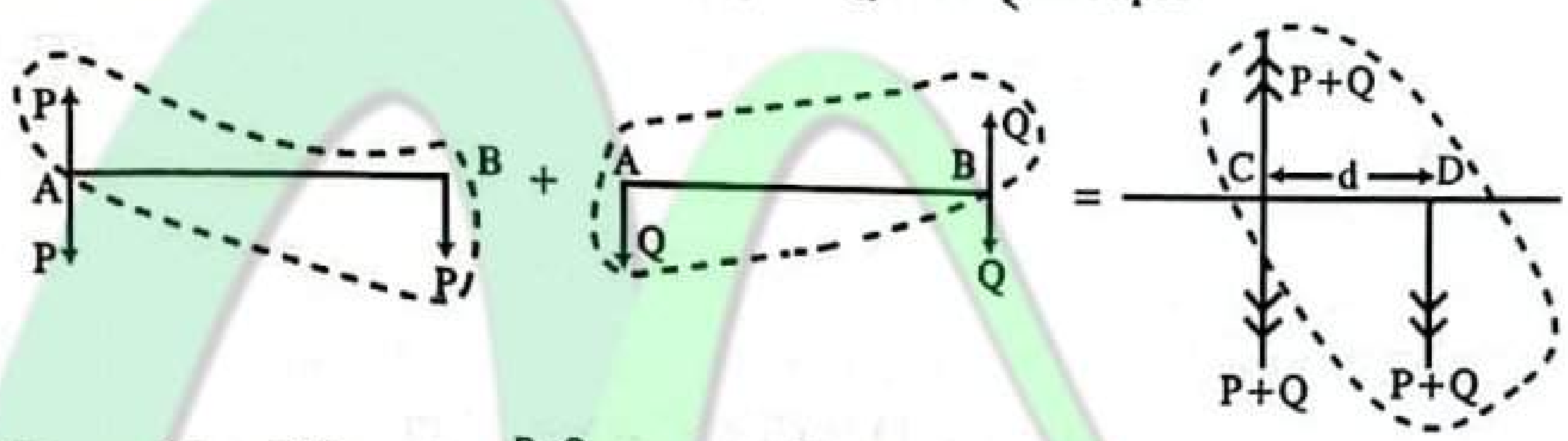


Sol^n: ধরি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q এর লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C
$\therefore \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AB}$
$\Rightarrow \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AB} \Rightarrow AC = \frac{Q}{P+Q}AB$
আবার, বল দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে যদি এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু D হয় তবে, $\frac{Q}{BD} = \frac{P}{AD} = \frac{P+Q}{AB}$
$\Rightarrow \frac{P}{AD} = \frac{P+Q}{AB} \Rightarrow AD = \frac{P}{P+Q}AB$; এখন, $d = CD = AD - AC = \left(\frac{P}{P+Q} - \frac{Q}{P+Q}\right)AB \therefore d = \frac{P-Q}{P+Q}AB$ **(Proved)**

❖ **Shortcut:**



P এর জন্য সৃষ্ট couple + Q এর জন্য সৃষ্ট couple = লব্ধির $(P+Q)$ জন্য সৃষ্ট couple

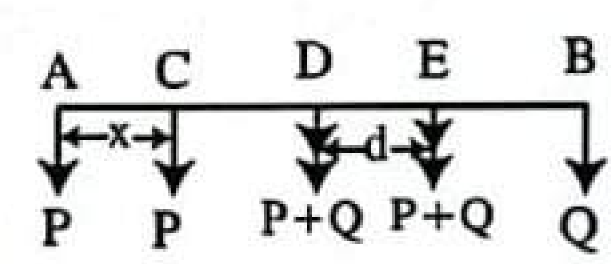


$\Rightarrow -P.AB + Q.AB = -(P+Q)d \Rightarrow d = \frac{P-Q}{P+Q}AB$ **[প্রমাণিত]**

Example-62: কোন বস্তুর A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 5 একক ও 3 একক মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত। যদি বলদ্বয় পরস্পরের অবস্থান বিনিময় করে তবে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB রেখা বরাবর কতদূর সরে যাবে? **[RU'18-19]**

Solⁿ: লব্ধির সরণ d হলে, $d = \frac{5-3}{5+3} \times AB = \frac{2}{8}AB = \frac{1}{4}AB$ **(Ans.)**

Example-63: P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল। P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়া বিন্দুকে x দূরত্বে সরালে, দেখাও যে, এদের লব্ধি $\frac{Px}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে।



Solⁿ: মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু D।

$\therefore P.AD = Q.BD \Rightarrow P.(AB - BD) = Q.BD \Rightarrow P.AB = (P+Q).BD$ ...... (i)

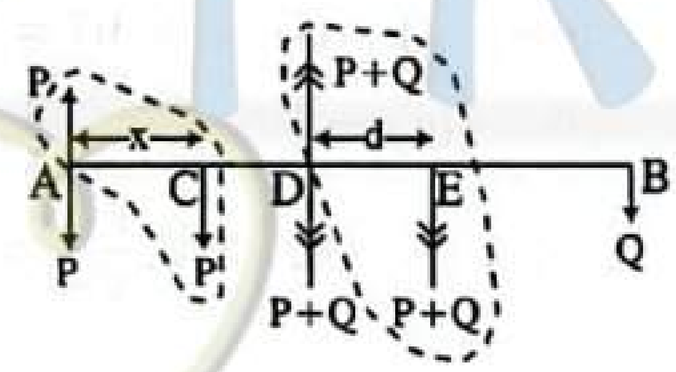
ধরি, P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়া বিন্দুকে AC = x দূরত্বে সরালে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু E হয়।

$\therefore P.CE = Q.BE \Rightarrow P.(BC - BE) = Q.BE \Rightarrow P.BC = (P+Q).BE$ ... (ii)

(i) − (ii) $\Rightarrow P.(AB - BC) = (P+Q).(BD - BE) \Rightarrow P.AC = (P+Q).DE \Rightarrow Px = (P+Q).DE$

$\therefore$ লব্ধি সরে যাবে, $DE = \frac{Px}{P+Q}$ দূরত্বে। **(Showed)**

❖ **Shortcut:**



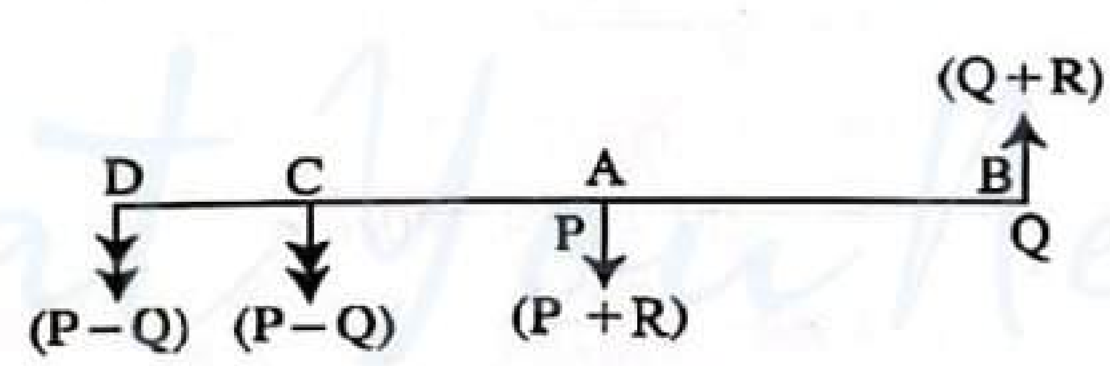
P এর জন্য couple = লব্ধির জন্য couple

$-P.x = -(P+Q).d$

$\therefore d = \frac{Px}{P+Q}$

Example-64: P ও Q দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং P ও Q $(P > Q)$ বল দুইটি যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে কার্যরত আছে। উভয় বলকে R পরিমাণে বৃদ্ধি করা হলে যদি এদের লব্ধি d দূরত্বে সরে যায়, তবে দেখাও যে, $d = \frac{R}{P-Q}AB$.

Solⁿ: মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত P ও Q কে R পরিমাণে বৃদ্ধি করা হলে $(P+R)$ ও $(Q+R)$ লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে যেখানে d = CD।



$\therefore \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P-Q}{AB} \Rightarrow \frac{Q}{AC} = \frac{P-Q}{AB} \Rightarrow AC = \frac{Q}{P-Q}AB$ ...... (i)

এবং $\frac{P+R}{BD} = \frac{Q+R}{AD} = \frac{P+R-(Q+R)}{AB} \Rightarrow \frac{Q+R}{AD} = \frac{P-Q}{AB}$

$\Rightarrow AD = \frac{Q+R}{P-Q}AB$ ...... (ii)

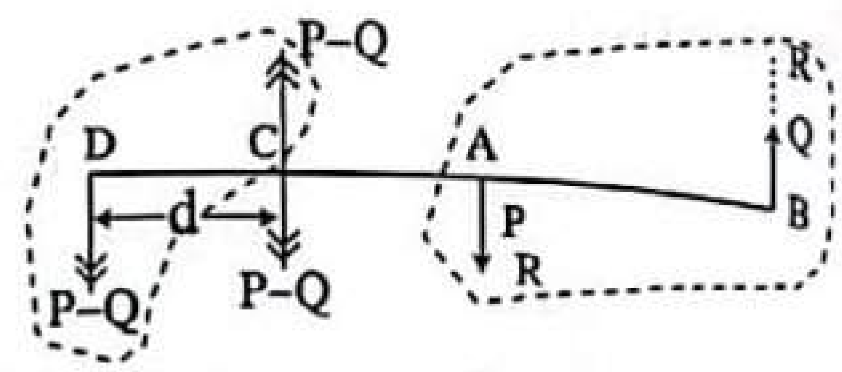
(ii) − (i) $\Rightarrow AD - AC = \frac{Q+R-Q}{P-Q}AB \Rightarrow CD = \frac{R}{P-Q}AB \therefore d = \frac{R}{P-Q}AB$ **(Showed)**

❖ **Shortcut:**

R এর জন্য couple = লব্ধির জন্য couple

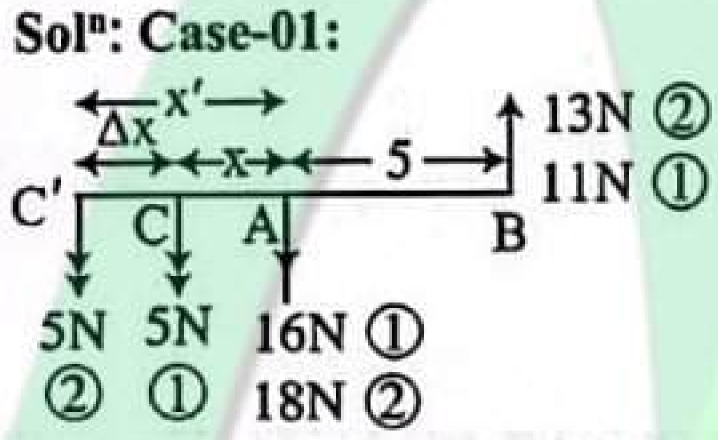
$R.AB = (P - Q)d$

$\therefore d = \frac{R}{P-Q}AB$



Example-65. 16 N ও 11 N মানের বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় 5 m দূরত্বে অবস্থিত। যদি পরবর্তীতে বলদ্বয় 18 N ও 13 N মানের হয়, তাহলে লব্ধির সরণ কত? **[KU'19-20]**

Sol^n: Case-01:



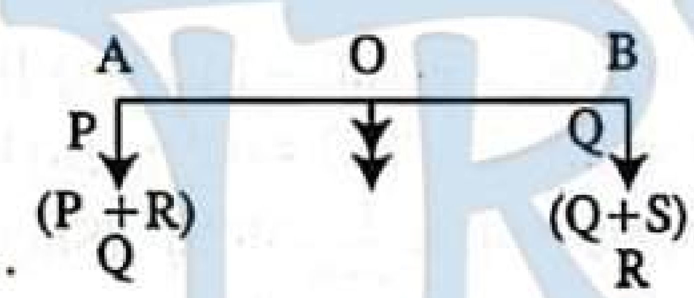
$16 \times x = 11 \times (5 + x) \therefore x = 11$ m

Case-02: $18 \times x' = 13 \times (5 + x') \therefore x' = 13$ m $\therefore \Delta x = (13 - 11)$m $= 2$ m

Shortcut: লব্ধির সরণ, $d = \frac{R}{P-Q}AB = \frac{2}{16-11} \times 5 = 2$ m [এখানে, R = P ও Q এর বৃদ্ধির পরিমাণ] **(Ans.)**

Example-66: P ও Q মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। P কে R পরিমাণে এবং Q কে S পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার P, Q এর পরিবর্তে যথাক্রমে Q, R ক্রিয়া করলেও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, $S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$

Sol^n: মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। তাহলে,



১ম ক্ষেত্রে, $P.AO = Q.BO$ ……… (i)

২য় ক্ষেত্রে, $(P + R).AO = (Q + S).BO$ ……… (ii)

৩য় ক্ষেত্রে, $Q.AO = R.BO$ ……… (iii)

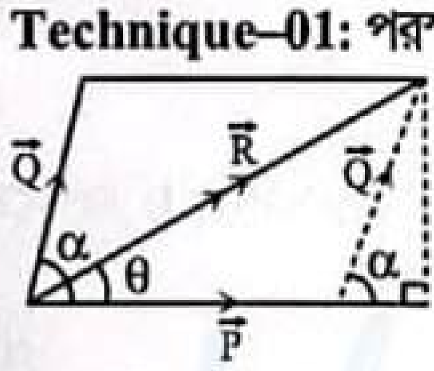
এখন, $(ii) - (i) \Rightarrow R.AO = S.BO$ ……… (iv)

$(i) \div (iii) \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{Q}{R} = \frac{P-Q}{Q-R}$ ……… (v) এবং $(iii) \div (iv) \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{R}{S} = \frac{Q-R}{R-S}$ ……… (vi)

(v) ও (vi) থেকে পাই, $\frac{P-Q}{Q-R} = \frac{Q-R}{R-S} \Rightarrow R - S = \frac{(Q-R)^2}{P-Q} \therefore S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$ **(Proved)**

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

➲ **Technique–01:** পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q (P > Q) বলদ্বয়ের লব্ধি R, P এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে–



$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

➤ $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

➤ $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

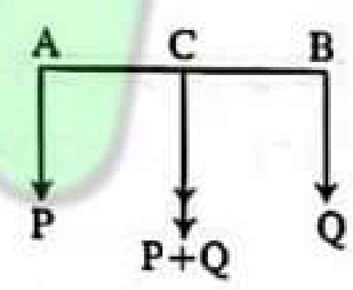
Note: লব্ধি বৃহত্তম বলের দিকে অধিকতর হেলে থাকে অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর কোণ উৎপন্ন করে।

- **বিশেষ ক্ষেত্র:**
  - $\alpha = 0^\circ$ হলে (বলদ্বয় একই দিকে কার্যরত) লব্ধি সর্বোচ্চ হয় এবং সর্বোচ্চ লব্ধি, $R_{max} = P + Q$
  - $\alpha = 180^\circ$ হলে (বলদ্বয় বিপরীত দিকে কার্যরত) লব্ধি সর্বনিম্ন হয় এবং সর্বনিম্ন লব্ধি, $R_{min} = P \sim Q$
  - $\alpha = 90^\circ$ অর্থাৎ সমকোণে কার্যরত হলে লব্ধি, $R_p = \sqrt{P^2 + Q^2}$ এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{Q}{P}$
  - P বা Q কে বিপরীতমুখী করলে যদি লব্ধির দিক 90° ঘুরে যায় তবে $P = Q$

Technique -02: দুইটি বল সমান অর্থাৎ $P = Q$ হলে বলদ্বয়ের-
  - লব্ধির মান, $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$ এবং
  - লব্ধির দিক $\theta = \frac{\alpha}{2}$ অর্থাৎ বলদ্বয়ের লব্ধি প্রদত্ত বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে।
  - দুটি বলের লব্ধির দিক বলদ্বয়ের মান পরিবর্তন করার পরও অপরিবর্তিত থাকলে প্রাথমিক বলদ্বয়ের অনুপাত অপরিবর্তিত ও পরিবর্তিত বলদ্বয়ের অনুপাত সমান হয় অর্থাৎ $\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}$

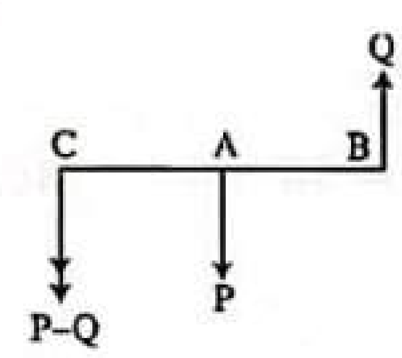
- **সদৃশ বা সমমুখ সমান্তরাল বলের লব্ধি:**

(i) $P.AC = Q.BC \Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AB}$



- **অসমান, বিসদৃশ বা বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি:**

(i) $P.AC = Q.BC \Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P-Q}{AB}$



গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম

MCQ

01. একই বিন্দুতে পরিবর্তনশীল কোণে প্রযুক্ত দুটি বলের লব্ধির বৃহত্তম মান 17N; বল দুটি লম্বভাবে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধির মান হয় 13 N। বল দুটির লব্ধির ক্ষুদ্রতম মান–
(a) 6N (b) 7N (c) 5N (d) 8N

02. একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 2 একক ও 3 একক মানের দুইটি বলের লব্ধির মান 4 একক। বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ কত?
(a) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (c) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$

03. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং 3P, 7P ও 5P মানের তিনটি বলের দিক যথাক্রমে AB, BC ও CA এর দিকে। বল তিনটির লব্ধির মান কত?
(a) 3P (b) 2P (c) $2\sqrt{3}P$ (d) $3\sqrt{2}P$

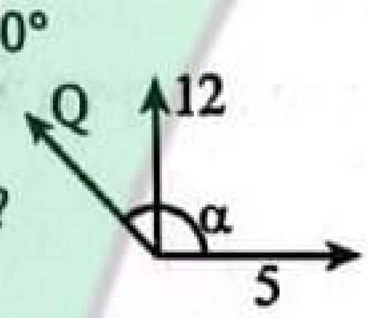
04. যদি দুইটি বল 12N ও 5N একটি কণার ওপর ক্রিয়া করে এবং বল দুইটি দ্বারা সৃষ্ট কোণ 60° হয়, তবে বল দুইটির লব্ধি প্রথম বলের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে?
(a) $\tan^{-1}\frac{5\sqrt{3}}{29}$ (b) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ (c) $\tan^{-1}(5\sqrt{3})$ (d) $\tan^{-1}\frac{11}{5}$

05. দু'টি সমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি 21lb – wt, এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু হতে 6" ও 8" দূরত্বে কার্যরত বল দুটির মান কত?
(a) 8 lb – wt, 13 lb – wt (b) 9 lb – wt, 12 lb – wt
(c) 7 lb – wt. 14 lb – wt (d) 14 lb – wt. 6 lb – wt

06. লামির উপপাদ্য কোনটি?
(a) $\frac{P}{\sin\alpha}=\frac{Q}{\sin\beta}=\frac{R}{\sin\gamma}$ (b) $P^2+Q^2=R^2$ (c) $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ (d) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\gamma$

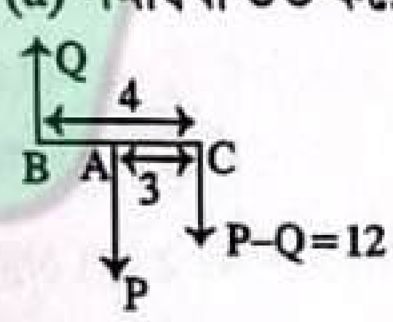
07. 36 পাঃ ওজনের একটি বস্তু 12 ফুট ও 16 ফুট দীর্ঘ দুইটি রশির সাহায্যে একটি আনুভূমিক রেখার 20 ফুট দূরবর্তী দুইটি বিন্দুতে বাধা আছে, রশিতে টানের পরিমাণ কত?
(a) $21\frac{2}{5}$ পাঃ ওজন ও $28\frac{4}{5}$ পাঃ ওজন (b) $21\frac{3}{5}$ পাঃ ওজন ও $28\frac{3}{5}$ পাঃ ওজন
(c) $21\frac{3}{5}$ পাঃ ওজন ও $28\frac{4}{5}$ পাঃ ওজন (d) 21 পাঃ ওজন ও 28 পাঃ ওজন

08. একটি কণার উপর সেকেন্ডে 2, 3 এবং 5 মিটার/সে. মানের তিনটি বেগ বিভিন্ন দিক হতে কার্যরত থাকলেও কণাটি স্থিতিশীল রয়েছে। ক্ষুদ্রতম দুইটি বেগের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ–
(a) 30° (b) 180° (c) 0° (d) 90°

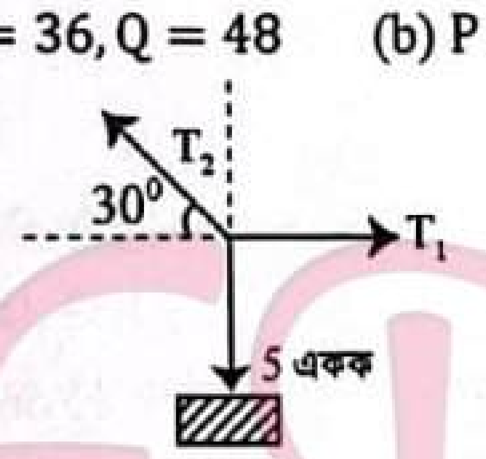
09. Q =?


(a) 7 একক (b) 11 একক (c) 17 একক (d) 13 একক

10. একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি সমান বলের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে–
(a) সমদ্বিখন্ডিত করে (b) দুই তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে (c) এক তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে (d) কোনটিই নয়

11. 

P =?, Q =?
(a) P = 36, Q = 48 (b) P = 48, Q = 36 (c) P = 12, Q = 12 (d) P = 36, Q = 12

12. T_2 =?


(a) 3 (b) 5 (c) 10 (d) $5\sqrt{3}$

13. P⟵●⟶Q যদি P = Q হয়, তবে লব্ধি বল =?
(a) 2P (b) $4P^2$ (c) $2P^2$ (d) 0

14. কোন কণার উপর ক্রিয়াশীল দুটি সমান বলের লব্ধি যদি একই বল হয়, তবে ঐ বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ হবে–
(a) 180° (b) 160° (c) 135° (d) 120°

15. S, T, U বল তিনটি O বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় রয়েছে। তাদের মান যথাক্রমে 1, 1 ও $\sqrt{2}$ হলে, T ও U এর অন্তর্ভুক্ত কোণের মান কত?
(a) 135° (b) 90° (c) 150° (d) 60°

16. কোন বিন্দুতে দুটি বল 120° কোণে ক্রিয়াশীল। বৃহত্তম উপাংশ 10N এবং তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর উপাংশের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে। ক্ষুদ্রতম উপাংশ P এবং লব্ধি R হলে ক্ষুদ্রতর উপাংশ ও লব্ধির মধ্যে সম্পর্ক–
(a) $P+10\cos120°=R\cos90°$ (b) $P+5\cos60°=R\sin90°$
(c) $R+10\cos120°=P\cos90°$ (d) $P+10\cos120°=P\cos45°$

17. একই বিন্দুগামী 2, 4 ও 6 ওজনের তিনটি বল একে অপরের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন করে। লব্ধির মান–
(a) $\sqrt{3}$ (b) 2 (c) $3\sqrt{3}$ (d) $2\sqrt{3}$

18. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র এবং একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত চারটি বলের মান ও দিক AB, 2BC, 2CD এবং 3DA দ্বারা সূচিত হয়েছে। কোন রেখা তাদের লব্ধি সূচিত করবে?
(a) CA (b) DC (c) BA (d) DA

19. একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে তবে প্রতিটি বল অপর বল দুইটির অন্তর্গত কোণের sine এর–
(a) ব্যস্তানুপাতিক (b) সমানুপাতিক (c) বর্গানুপাতিক (d) কোনটিই নয়

20. দুটি বল P এবং Q এর লব্ধির মান $\sqrt{3Q}$ লব্ধি P বলের ক্রিয়া রেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করলে নিম্নের কোনটি সঠিক?
(a) $P = Q$ (b) $2P = Q$ (c) $P = 3Q$ (d) $3P = Q$

21. তিনটি সমান বল কোন বস্তুকণাকে স্থিতি অবস্থায় রাখলে তাদের ক্রিয়াসমূহ পরস্পর কত কোণে অবস্থিত হয়?
(a) 90° (b) 270° (c) 120° (d) 75°

22. $P, \sqrt{3}P, P$ বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। প্রথম দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণ কত?
(a) 150° (b) 120° (c) 135° (d) 130°

23. একগুচ্ছ বলের ক্রিয়ারেখা একই সমতলে অবস্থান করলে ঐ বলগুচ্ছকে কি বলে?
(a) সমতলীয় বলজোট (b) সমমুখী বলজোট (c) বিপরীতমুখী বলজোট (d) কোনটিই নয়

24. $P = Q = R$ তিনটি বল একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে সুস্থিত থাকলে α, β ও γ কোণের মান কত?
(a) $\alpha = \beta = \gamma = 60°$ (b) $\alpha = 120°, \beta = 150°, \gamma = 90°$
(c) $\alpha = \beta = \gamma = 120°$ (d) $\alpha = 100°, \beta = \gamma = 130°$

25. কোন বিন্দুতে ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি একতলীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, তাদের প্রত্যেকটির মান অপর দুইটির অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক। ইহা–
(a) বলের ত্রিভুজ সূত্র (b) বলের সামান্তরিক সূত্র (c) লামির উপপাদ্য (d) কোনটিই নয়

26. কোন বস্তুর উপর একই দিকে দুইটি বল ক্রিয়ারত থাকলে তাদের লব্ধির মান কি হবে?
(a) বলদ্বয়ের বিয়োগফলের সমান (b) বলদ্বয়ের যোগফলের সমান
(c) বলদ্বয়ের গুণফলের সমান (d) শূন্য

27. একটি সমবাহু ত্রিভুজের এক কৌণিক বিন্দুতে দুই বাহু বরাবর P মানের ও 2P মানের দুইটি বল ক্রিয়া করে। বল দুইটির লব্ধির মান কত?
(a) $\sqrt{7}P$ (b) P (c) $\sqrt{2}P$ (d) 0

28. 5 lb-wt ও 10 lb-wt ওজনের দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল 15ft দূরত্বে অবস্থিত দুটি বিন্দুতে কার্যরত। এদের লব্ধি–
(a) 10 lb-wt (b) 15 lb-wt (c) 50 lb-wt (d) 5 lb-wt

29. দুটি বলের লব্ধি 60° কোণে ক্রিয়ারত অবস্থায় 7 হয়। একটি বল 5 হলে অপর বলটি কত?
(a) −8 (b) −3 (c) 3 (d) 8

30. কোন বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়ারত দুটি বল u ও v এর লব্ধি কত?
(a) $\sqrt{(u^2 - v^2)}$ (b) $\sqrt{(u^2 + v^2)}$ (c) $\sqrt{(u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta)}$ (d) $u - v$

31. $\sqrt{3}$ এককের দুইটি সমান বল 120° কোণে এক বিন্দুতে কাজ করে। তাদের লব্ধির মান–
(a) $\sqrt{3}$ units (b) $4\sqrt{3}$ units (c) 3 units (d) $2\sqrt{3}$ units

32. কোন বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে ভারসাম্যে রাখলে সমান বলদ্বয়ের প্রতিটির মান-
(a) $3\sqrt{3}$ N (b) 3N (c) $\sqrt{3}$ (d) 9N

33. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P নিউটন এবং 12N মানের দুইটি বলের লব্ধি $3\sqrt{6}$N, যার ক্রিয়ারেখা P -এর দিকে 90° কোণ উৎপন্ন করে। P এর মান-
(a) 11N (b) $3\sqrt{10}$N (c) 13 N (d) $2\sqrt{7}$N

34. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের একটির মান অপরটির দ্বিগুণ হলে এবং তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতরটির উপর লম্ব হলে বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ হবে-
(a) 60° (b) 120° (c) 90° (d) 210°

35. কোনো বিন্দুতে দুইটি বল 120° কোণে ক্রিয়াশীল। বৃহত্তর বলটির মান 10N এবং তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করলে ক্ষুদ্রতর বলের মান-
(a) 4N (b) 5N (c) 6N (d) 8N

৯০

36. যদি 12 এককবিশিষ্ট একটি বল ও অজানা বল একই বিন্দুতে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে, তাদের লব্ধি অজানা বলের অর্ধেক ও জানা বলের উপর লম্ব হয় তবে অজানা বলের মান কত?
(a) $6\sqrt{4}$ (b) $4\sqrt{6}$ (c) $8\sqrt{3}$ (d) $9\sqrt{3}$

37. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত A, B, C বল ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে। A ও B এর মধ্যবর্তী কোণ 90° এবং ও B ও C এর মধ্যবর্তী কোণ 120°. B ও C এর মানের অনুপাত কত?
(a) 4:3 (b) 1:4 (c) 2:1 (d) 1:2

38. P ও Q দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোন একটি বস্তুর উপর দুটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত। P ও Q স্থান পরিবর্তন করলেও লব্ধির স্থান পরিবর্তিত হয় না। নিম্নের কোনটি সঠিক?
(a) $P = 2Q$ (b) $P = \frac{1}{2}Q$ (c) $P = 3Q$ (d) $P = Q$

39. দুজন লোক 6m লম্বা ও 60 kg ওজনের একটি ভারী সুষম ভার বহন করছে। একজন ভারটির একপ্রান্ত থেকে 1m ও অন্যজন অপর প্রান্ত থেকে 2m দূরে ভারটি বহন করছে। তাদের প্রত্যেকে কত ওজন বহন করে?
(a) 30 kg, 30 kg (b) 20 kg, 40 kg (c) 25 kg, 35 kg (d) 10 kg, 50 kg

40. 3, 4, 5, 6 কেজি ওজন বল একটি বর্গের চার বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির মান-
(a) $2\sqrt{2}$ (b) $4\sqrt{2}$ (c) 2 (d) $\sqrt{2}$

41. আনুভূমিক দিকে ও আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে ক্রিয়াশীল দুটি বল 5 একক ওজনের বস্তুকে স্থিরভাবে ধরে রাখে। বল দুটির মান কত?
(a) $5, \frac{10}{\sqrt{3}}$ (b) $5, 10\sqrt{3}$ (c) $5\sqrt{3}, 10$ (d) $\frac{5}{\sqrt{3}}, 10$

42. যদি কোনো কণার উপর ক্রিয়ারত দুটি সমান বলের লব্ধির বর্গ তাদের গুণফলের তিনগুণ হয় তবে বল দুটির অন্তর্গত কোণের মান হবে-
(a) 60° (b) 30° (c) 120° (d) 90°

43. P মানের তিনটি সমতলীয় বল পরস্পরের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন করলে লব্ধি-
(a) 0 (b) 3P (c) $\frac{P}{3}$ (d) $\sqrt{3}P$

Written

44. 2α কোণে ক্রিয়ারত দুটি সমান বলের লব্ধি 2β কোণে ক্রিয়ারত বল দুটির লব্ধির দ্বিগুণ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos\alpha = 2\cos\beta$

45. O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল 4P, 3P মানের বল দুটির লব্ধির মান 5P। যদি কোনো ছেদক এদের ক্রিয়া রেখাকে যথাক্রমে R, S, T বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখাও যে, $\frac{4}{OR} + \frac{3}{OS} = \frac{5}{OT}$

46. $P + Q$ ও $P - Q$ বল দুটি α কোণে ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধি বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখন্ডকের সাথে $\frac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে দেখাও যে, $P : Q = \tan\frac{\alpha}{2} : \tan\frac{\theta}{2}$

47. P মানের তিনটি বল একটি বিন্দুতে এমনভাবে কার্যরত যেন এদের দিক ΔABC এর BC, CA এবং AB বাহুর সমান্তরাল, প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান, $P\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$

48. দুটি বল ABC ত্রিভুজের CA ও CB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে এবং এদের মান যথাক্রমে cosA, cosB এর সমানুপাতিক, প্রমাণ কর যে এদের লব্ধি sinC এর সমানুপাতিক এবং এর গতিপথ কোণকে $\frac{1}{2}(C + B - A)$ ও $\frac{1}{2}(C + A - B)$ এ দুই অংশে বিভক্ত করে।

49. l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সুতার এক প্রান্ত একটি উলম্ব দেয়ালের আটকানো আছে এবং অন্য প্রান্ত a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের উপরস্থ কোন বিন্দুতে যুক্ত আছে। গোলকটির ওজন W হলে দেখাও যে, রশির টান, $T = \frac{W(l+a)}{\sqrt{2al+l^2}}$

50. একটি দণ্ডের একপ্রান্ত হতে 2,8,6 মিটার দূরত্বে অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q ও R মানের তিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $P : Q : R = 1 : 2 : 3$

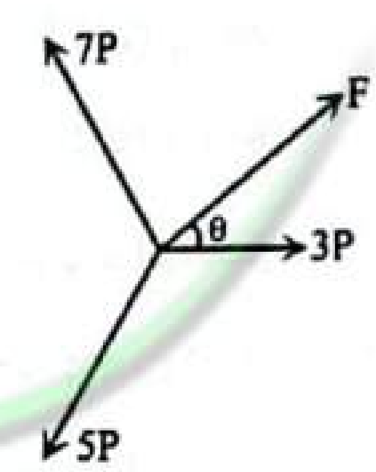
প্র্যাক্টিস প্রবলেমের সমাধান

MCQ

01. **Solⁿ: (b);** বল দুইটি P ও Q হলে $P + Q = 17; \sqrt{P^2 + Q^2} = 13$
$\Rightarrow P^2 + Q^2 = 169 \therefore (P + Q)^2 = (P^2 + Q^2) + 2PQ$
$\Rightarrow 17^2 = 169 + 2PQ \therefore PQ = 60$ আবার, $(P - Q)^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ = 169 - 120 = 49$
$\therefore P - Q = 7 \therefore$ লব্ধির ক্ষুদ্রতম মান 7N **(Ans.)**

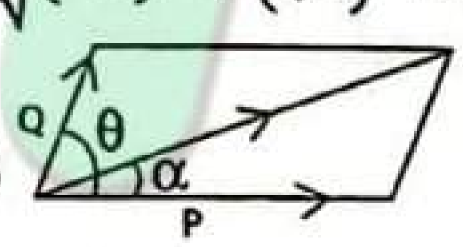
02. **Solⁿ: (a);** আমরা জানি, লব্ধি, $S = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta} \Rightarrow 4^2 = 2^2 + 3^2 + 2 \times 2 \times 3\cos\theta$
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

03. **Solⁿ: (c);** ধরি, লব্ধি বল F, 3P বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



3P এর দিকে বলের উপাংশ নিয়েঃ
$F\cos\theta = 3P\cos 0° + 7P\cos 120° + 5P\cos 240° = -3P$
লম্ব দিকে উপাংশ নিয়েঃ $F\sin\theta = 3P\sin 0° + 7P\sin 120° + 5P\sin 240° = \sqrt{3}P$
$\therefore$ লব্ধি $= \sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} \times P = 2\sqrt{3}P$

04. **Solⁿ: (a);**

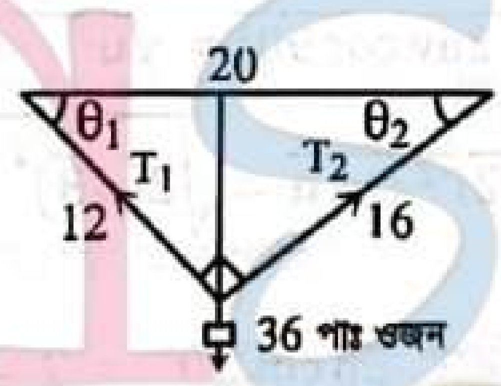


$\alpha = \tan^{-1}\frac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta} = \tan^{-1}\frac{5\sin 60°}{12+5\cos 60°} = \tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{29}\right)$

05. **Solⁿ: (b);** $\frac{21}{6+8} = \frac{P}{6} = \frac{Q}{8} \therefore P = 9, Q = 12$

06. **Ans: (a);** $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$

07. **Solⁿ: (c);** $\frac{36}{\sin 90°} = \frac{T_1}{\cos\theta_2} = \frac{T_2}{\cos\theta_1}$



$\therefore T_1 = 36\cos\theta_2 = 36 \times \frac{16}{20} = 28\frac{4}{5}$ পাঃ ওজন
$T_2 = 36\cos\theta_1 = 36 \times \frac{12}{20} = 21\frac{3}{5}$ পাঃ ওজন

08. **Solⁿ: (c);** $5^2 = 2^2 + 3^2 + 2.3.2\cos\alpha \Rightarrow 12 = 12\cos\alpha \Rightarrow \alpha = 0°$

09. **Solⁿ: (d);** $P + Q\cos\alpha = 0 \therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2.P(-P)} \therefore \sqrt{R^2 + P^2} = Q \therefore Q = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

10. **Solⁿ: (a);** $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{P2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}{P(1+\cos\alpha)}$ $[\therefore P = Q] \Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2} \therefore Q = \frac{\alpha}{2}$

11. **Solⁿ: (b);** $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P-Q}{AB} \Rightarrow \frac{P}{4} = \frac{Q}{3} = \frac{12}{1} \Rightarrow P = 48, Q = 36$

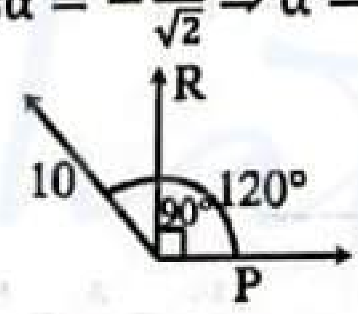
12. **Solⁿ: (c);** $\frac{5}{\sin 150°} = \frac{T_2}{\sin 90°} \Rightarrow T_2 = 10N$

13. **Solⁿ: (d);** $[R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180°} = \sqrt{P^2 + P^2 - 2P^2} = 0]$

14. **Solⁿ: (d);** $P = 2P\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \therefore \alpha = 120°$

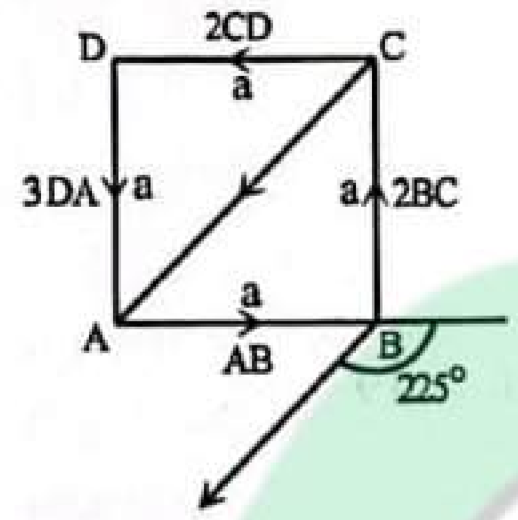
15. **Solⁿ: (a);** $1^2 = 1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2.1.\sqrt{2}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135°$

16. **Solⁿ: (a) ;** P বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,
$P\cos 0° + 10\cos 120° = R\cos 90°$
$P + 10\cos 120° = R\cos 90°$



17. **Solⁿ: (d) ;** $\alpha = 120°$, পার্থক্য = 2N $\therefore$ লব্ধি $= 2 \times \sqrt{3} = R = 2\sqrt{3}$

18. **Sol^n: (a);**



$R\cos\theta = a - 2a = -a$; $R\sin\theta = 2a - 3a = -a$; $\tan\theta = 1 \therefore \theta = 225°$ [$\cos\theta$ ও $\sin\theta$ ধনাত্মক] $\therefore$ CA বরাবর

19. **Ans: (b);** সমানুপাতিক

20. **Ans: (c);** $P = 3Q$

21. **Sol^n: (c);** $F^2 = F^2 + F^2 + 2F^2\cos\alpha \Rightarrow \alpha = 120°$

22. **Sol^n: (a);** $p^2 = \left(\sqrt{3}p\right)^2 + p^2 + 2.p.\sqrt{3}p\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \alpha = 150°$

23. **Sol^n: (a);** একগুচ্ছ বলের ক্রিয়ারেখা একই সমতলে অবস্থান করলে ঐ বলগুচ্ছকে সমতলীয় বলজোট বলে।

24. **Sol^n: (c);** $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma \therefore \alpha = \beta = \gamma = 120°$

25. **Ans: (c);** লামির উপপাদ্য

26. **Ans: (b);** বলদ্বয়ের যোগফলের সমান

27. **Sol^n: (a);** লব্ধি $= \sqrt{P^2 + (2P)^2 + 2.P.2P\cos 60°} = \sqrt{P^2 + 4P^2 + 2P^2} = \sqrt{7}P$

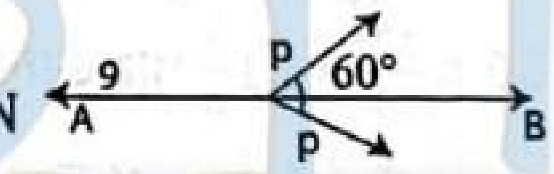
28. **Sol^n: (b);** $(5 + 10)$ lb-wt $= 15$ lb-wt

29. **Sol^n: (c);** $7^2 = 5^2 + P^2 + 2.5.P\cos 60° \Rightarrow P^2 + 5P - 24 = 0 \Rightarrow P = 3$

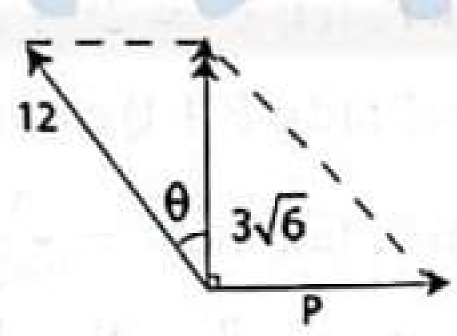
30. **Sol^n: (b);** $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos 90°} = \sqrt{u^2 + v^2}$

31. **Sol^n: (a);** $R = \sqrt{P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha} = \sqrt{2\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(\sqrt{3}\right)^2\cos 120°} = \sqrt{3}$

32. **Sol^n: (a);** AB বরাবর উপাংশ নিয়ে, $2p\cos 30° = 9 \Rightarrow p = 3\sqrt{3}N$



33. **Sol^n: (b);** চিত্র হতে, পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে, $12^2 = p^2 + \left(3\sqrt{6}\right)^2 \therefore P = 3\sqrt{10}$



34. **Sol^n: (b);** ধরি, P এবং Q এর মধ্যবর্তী কোণ α ; $\therefore \cos\alpha = -\frac{P}{Q} = -\frac{x}{2x} = -\frac{1}{2} = \cos 120° \therefore \alpha = 120°$

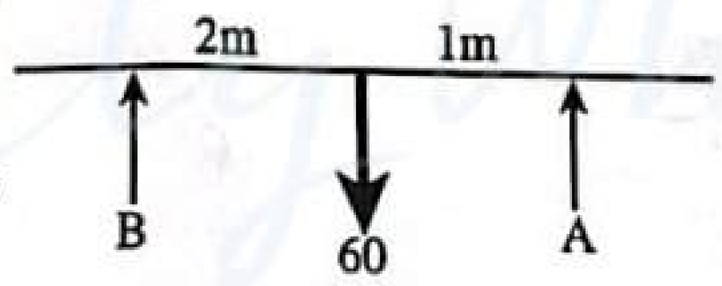
35. **Sol^n: (b);** $\tan\alpha = \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta} \therefore \tan 90° = \frac{10\sin 120°}{p + 10\cos 120°} \Rightarrow \alpha = \frac{10\sin 120°}{p - 5} \Rightarrow p - 5 = 0 \therefore p = 5$

36. **Sol^n: (c);** $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 12^2 = x^2 \Rightarrow x^2 + 4 \times 12^2 = 4x^2 \Rightarrow x = 8\sqrt{3}$

37. **Sol^n: (d);** $\frac{B}{C} = \frac{\sin(A\hat{}C)}{\sin(A\hat{}B)} = \frac{\sin(360 - 90 - 120)}{\sin 90} = 1:2$

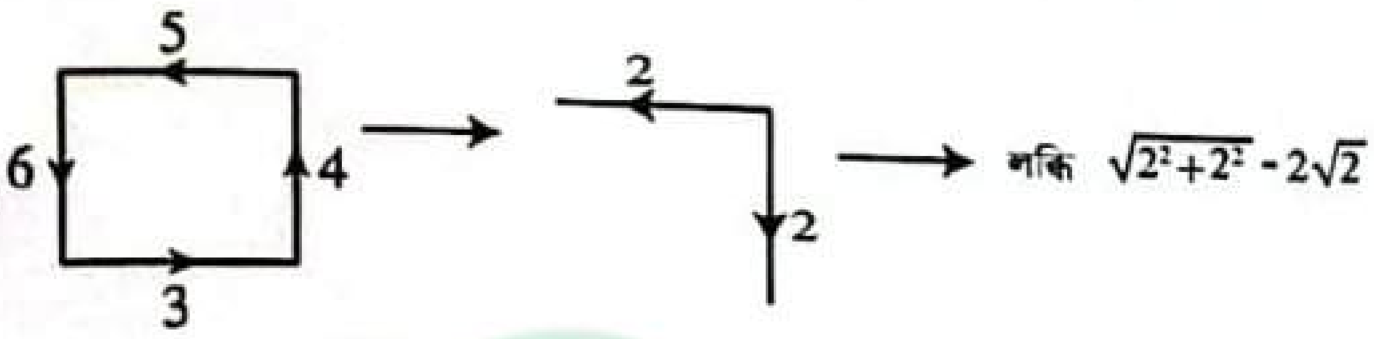
38. **Ans: (d);** $P = Q$

39. **Sol^n: (b);**

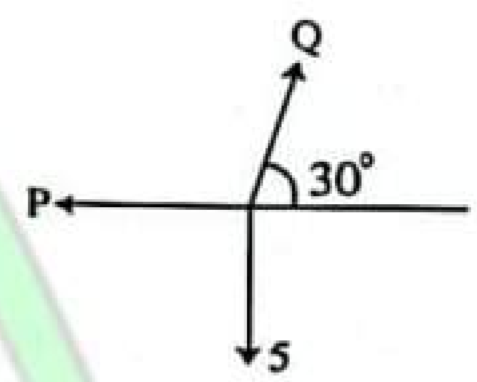


$\frac{60}{3} = \frac{A}{2} = \frac{B}{1}$; $A = 40$ kg ; $B = 20$kg

40. Solⁿ: (a);



41. Solⁿ: (c); $\frac{P}{\sin(270-30)} = \frac{Q}{\sin 90} = \frac{5}{\sin 30^0}$



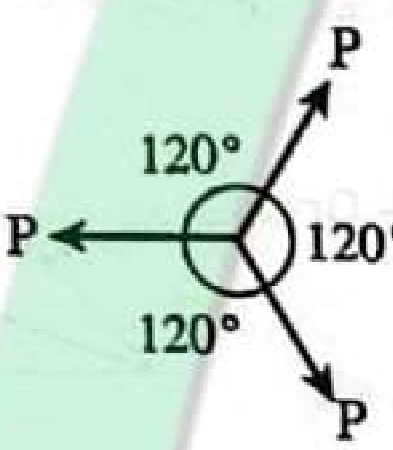
$P = 5\sqrt{3}\,; Q = 10$

$\frac{P}{\sin(90^\circ - 30^\circ)} = \frac{Q}{\sin 90} = \frac{5}{\sin 30^\circ}$

$P = 5\sqrt{3}\,; Q = 10$

42. Solⁿ: (a); $3P^2 = P^2 + P^2 + 2PP\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{2} - 1 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

43. Solⁿ: (a); লব্ধি = 0



Written

44. Solⁿ: মনে করি, 2β কোণে ক্রিয়ারত P ও P সমান বল দুইটির লব্ধি R, তাহলে 2α কোণে ক্রিয়ারত বল দুইটির লব্ধি 2R হবে।

$\therefore$ বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই, $R^2 = P^2 + P^2 + 2PP\cos 2\beta = 2P^2(1 + \cos 2\beta)$

$\Rightarrow R^2 = 2P^2 \times 2\cos^2\beta \Rightarrow R^2 = 4P^2\cos^2\beta \;\ldots\ldots (i)$

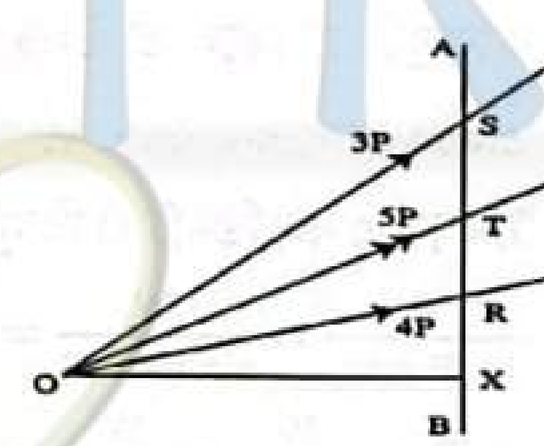
আবার, $(2R)^2 = P^2 + P^2 + 2PP\cos 2\alpha = 2P^2(1 + \cos 2\alpha) \Rightarrow 4R^2 = 2P^2 \times 2\cos^2\alpha$

$\Rightarrow R^2 = P^2\cos^2\alpha \Rightarrow 4P^2\cos^2\beta = P^2\cos^2\alpha$, [(i) হতে]

$\Rightarrow \cos^2\alpha = 4\cos^2\beta \;\therefore \cos\alpha = 2\cos\beta$ **(Proved)**

45. Solⁿ: ধরি, ছেদকটি AB। O হতে ছেদক AB এর উপর OX লম্ব অঙ্কন করি।

সমতলস্থ যেকোনো রেখা বরাবর 4P ও 3P বল দুইটির লম্বাংশের বীজগাণিতীয় সমষ্টি তাদের লব্ধি 5P এর লম্বাংশের সমান OX বরাবর তাদের লম্বাংশ নিয়ে পাই,



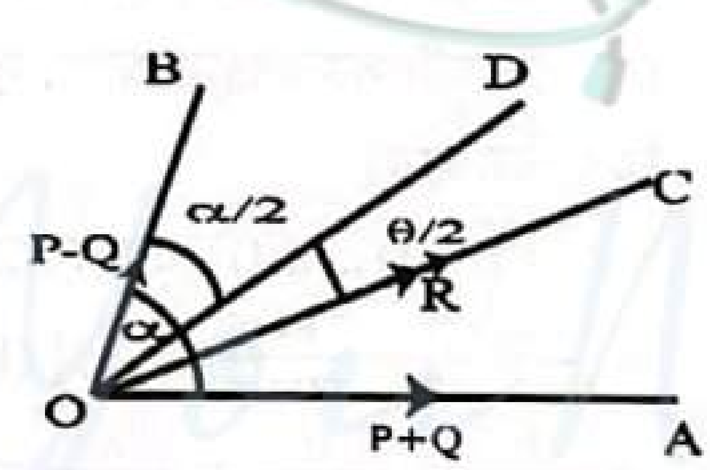
$4P\cos XOR + 3P\cos XOS = 5P\cos XOT$

$\Rightarrow 4\frac{OX}{OR} + 3\frac{OX}{OS} = 5\frac{OX}{OT} \;\therefore \frac{4}{OR} + \frac{3}{OS} = \frac{5}{OT}$

46. Solⁿ: মনে করি, OA ও OB বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে $P + Q$ ও $P - Q$ বলদ্বয়ের লব্ধি R, OC বরাবর ক্রিয়াশীল এবং $\angle AOB$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক OD, OC এর সাথে $\frac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে অর্থাৎ

$\angle COD = \frac{\theta}{2}, \angle AOD = \angle BOD = \frac{\alpha}{2}. \;\therefore \angle AOC = \frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}$ এবং $\angle COB = \frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{2}$

এখন বলের সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\frac{P+Q}{\sin BOC} = \frac{P-Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin AOB}$

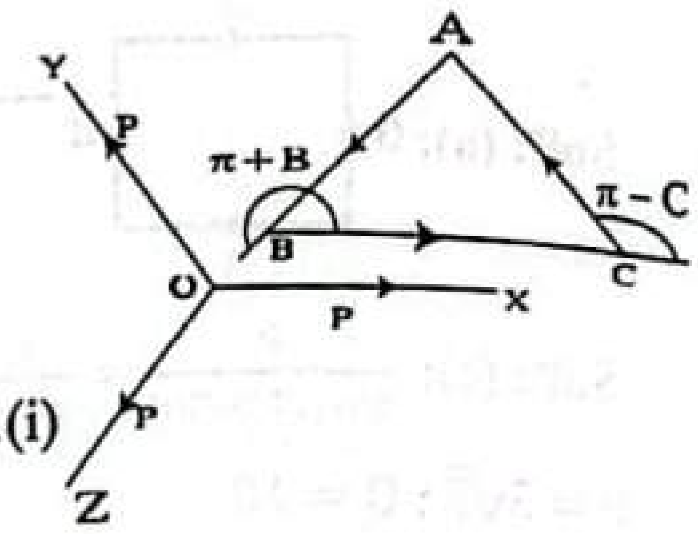


$\Rightarrow \frac{P+Q}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{P-Q}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} \Rightarrow \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$

$\Rightarrow \frac{2P}{2Q} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\theta}{2}}$

$\therefore P : Q = \tan\frac{\alpha}{2} : \tan\frac{\theta}{2}$ **(Showed)**

47. **Sol^n:** মনে করি, O বিন্দুতে OX, OY, OZ বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P মানের বল তিনটি দিক ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল। ধরি বলগুলোর লব্ধি F, যা OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



এখন, OX এবং এর উপর লম্ব রেখা বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$F\cos\theta = P\cos 0° + P\cos(\pi - C) + P\,\mathrm{Cos}(\pi + B)$

$= P(1 - \cos C - \cos B)$ ....(i) এবং

$F\sin\theta = P\sin 0° + P\sin(\pi - C) + P\sin(\pi + B) = P(\sin C - \sin B)$ ....(i)

(i) ও (ii) এর বর্গের সমষ্টি নিয়ে পাই,

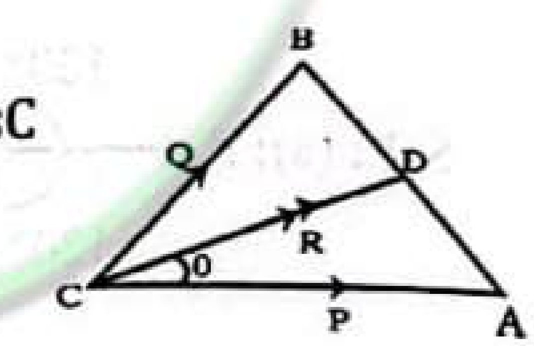
$F^2 = P^2(1 + \cos^2 C + \cos^2 B - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos B\cos C + \sin^2 C + \sin^2 B - 2\sin B\sin C)$

$\Rightarrow F^2 = P^2\{3 - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos(B + C)\} = P^2\{3 - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos(\pi - A)\}$

$\therefore$ লব্ধির মান, $F = P\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$ **(Proved)**

48. **Sol^n:** মনে করি, CA ও CB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q বলের লব্ধি R, যা CD বরাবর ক্রিয়াশীল। ধরি, $\angle ACD = \theta$.

শর্তানুসারে, $P = k\cos A, Q = k\cos B$, যেখানে k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক।



CA এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $R\cos\theta = P\cos 0° + Q\cos C = P + Q\cos C$

$= k\cos A + k\cos B\cos C = k\cos\{\pi - (B + C)\} + k\cos B\cos C$

$= -k\cos(B + C) + K\cos B\cos C = -k\cos B\cos C + k\sin B\sin C + k\cos A\cos B$

$\therefore R\cos\theta = k\sin B\sin C$ ...... (i) এবং $R\sin\theta = Q\sin C = K\cos B\sin C$ ...... (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2 = k^2\sin^2 C(\sin^2 B + \cos^2 B) = k^2\sin^2 C \Rightarrow R = k\sin C.$

$\therefore$ লব্ধির মান sin C এর সমানুপাতিক।

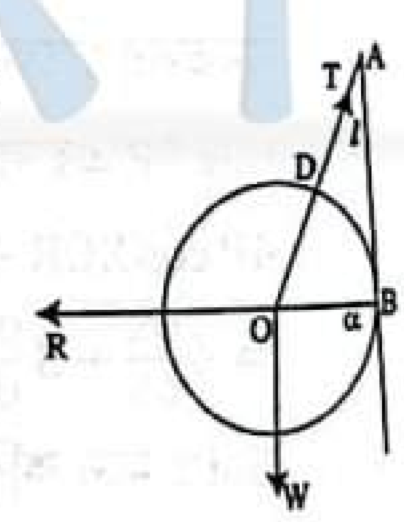
এখন (ii) ÷ (i) $\Rightarrow \tan\theta = \cot B = \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - B = \frac{1}{2}(A + B + C) - B$

$\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}(C + A - B)$ এবং C কোণের অপর অংশ $= C - \theta = C - \frac{1}{2}(C + A - B) = \frac{1}{2}(C + B - A)$

$\therefore$ লব্ধির মান sin C এর সমানুপাতিক এবং এর গতি পথ C কোণকে $\frac{1}{2}(C + B - A)$ ও $\frac{1}{2}(C + A - B)$ অংশে বিভক্ত করে।

49. **Sol^n:** মনে করি, সুতার এক প্রান্ত একটি উলম্ব দেয়ালের A বিন্দুতে আটকানো আছে এবং অপর প্রান্ত গোলকটির D বিন্দুতে যুক্ত করে ঝুলিয়ে দিলে তা উলম্ব দেয়ালের B বিন্দুতে স্পর্শ করে। ধরি, সুতার টান T এবং বৃত্তের কেন্দ্র O।

তাহলে গোলকের ওজন W খাড়া নিচের দিকে, BO বরাবর দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R এবং ODA বরাবর সুতার টান T- এ বল তিনটি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল থেকে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র প্রয়োগ করে পাই,



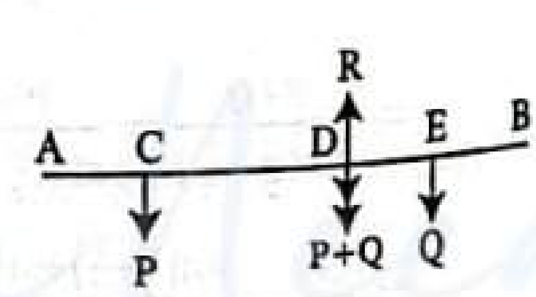
$\frac{T}{\sin(R\wedge W)} = \frac{W}{\sin(R\wedge T)} = \frac{R}{\sin(T\wedge W)} \Rightarrow \frac{T}{\sin 90°} = \frac{W}{\sin(180° - \angle AOB)}$

$\Rightarrow T = \frac{W}{\sin AOB} = \frac{W}{\frac{AB}{AO}} = \frac{AO}{\sqrt{AO^2 - OB^2}}W = \frac{l + a}{\sqrt{(l + a)^2 - a^2}}W = \frac{W(l + a)}{\sqrt{2al + l^2}}$

50. **Sol^n:** মনে করি, AB দণ্ডের C, D, E বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের বলত্রয় ক্রিয়া করে যেখানে,

$AC = 2\text{ m}, AD = 6\text{m}$ এবং $AE = 8\text{m}$

যেহেতু দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং P, Q বল দুইটি সদৃশ ধরলে এদের লব্ধি (P + Q) বলটি R এর সমান ও বিপরীতমুখী ক্রিয়াশীল হবে।



$\therefore R = P + Q$ ...... (i) এবং $P.CD = Q.DE$

$\Rightarrow \frac{P}{DE} = \frac{Q}{CD} = \frac{P+Q}{CD+DE} = \frac{R}{CE}$, [(i) দ্বারা]

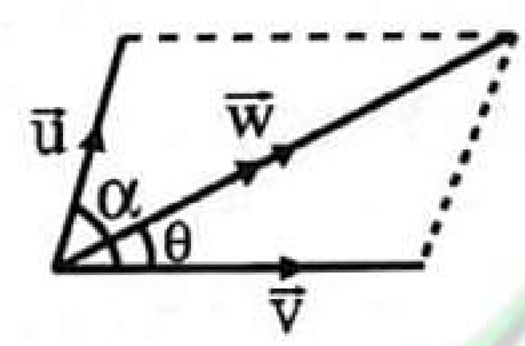
$\Rightarrow \frac{P}{AE-AD} = \frac{Q}{AD-AC} = \frac{R}{AE-AC} \Rightarrow \frac{P}{8-6} = \frac{Q}{6-2} = \frac{R}{8-2} \Rightarrow \frac{P}{2} = \frac{Q}{4} = \frac{R}{6}$

$\therefore P : Q : R = 1 : 2 : 3$

অধ্যায় ০৯ সমতলে বস্তুকণার গতি

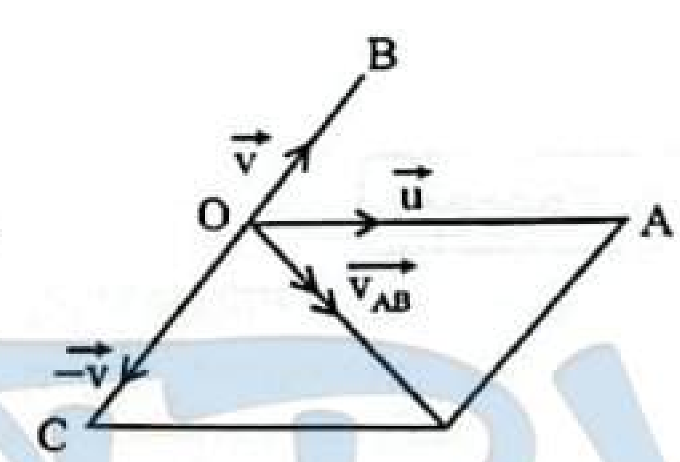
গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

- **বেগের সামান্তরিকের সূত্র:**
পরস্পর α কোণে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুইটি বেগ u ও v এর লব্ধি w হলে,
লব্ধি, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$
লব্ধি w, v বেগের সাথে θ কোণে আনত হলে, $\theta = \tan^{-1}\frac{u\sin\alpha}{v+u\cos\alpha}$



- **বেগের লব্ধির ত্রিভুজ সূত্র:**
যদি একবিন্দুতে কার্যরত দুইটি বেগের মান এবং দিক কোনো ত্রিভুজের একই ক্রমে গৃহীত দুইটি বাহু দ্বারা সূচিত করা যায়, তাহলে এদের লব্ধির মান এবং দিক ঐ ত্রিভুজের বিপরীতক্রমে গৃহীত তৃতীয় বাহু দ্বারা সূচিত হবে।

- **আপেক্ষিক বেগ:**
দুইটি গতিশীল বস্তুর প্রথমটির তুলনায় দ্বিতীয়টির সরণের হারকে প্রথম বস্তুর সাপেক্ষে দ্বিতীয় বস্তুর আপেক্ষিক বেগ বলা হয়।
আপেক্ষিক বেগ যার সাপেক্ষে তাকে স্থির ধরতে হবে। এটি যেদিকে আছে বেগ তার বিপরীত দিকে নিতে হবে।
$\overrightarrow{OB}$ এর সাপেক্ষে $\overrightarrow{OA}$ এর বেগ $\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$



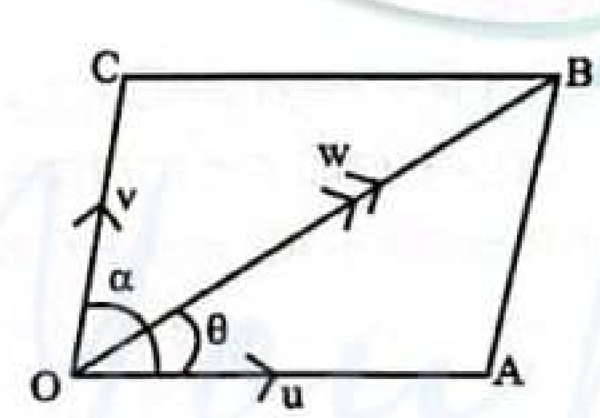
Note:
➢ ত্বরণ, মন্দন, সমবেগ ইত্যাদি সমস্যাগুলো v-t গ্রাফ দিয়ে সমাধান করলে খুব সহজেই হয়ে যায়।
➢ সরণ বনাম সময় লেখচিত্রের কোনো বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল ঐ মুহূর্তের তাৎক্ষণিক বেগ নির্দেশ করে।
➢ বেগ বনাম সময় লেখচিত্রের কোনো বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল ঐ মুহূর্তের তাৎক্ষণিক ত্বরণ ও কোনো ব্যবধিতে আবদ্ধ ক্ষেত্রফল ঐ সময় ব্যবধানে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব/ সরণ (সরলরৈখিক গতির ক্ষেত্রে) নির্দেশ করে।

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

Type-01: বেগের সামান্তরিক সূত্র সংক্রান্ত

Concept

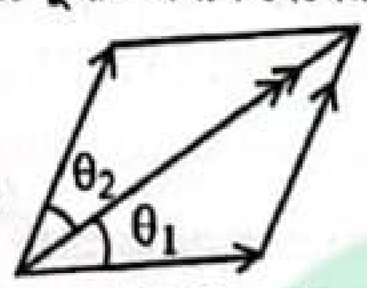
$u \wedge v = \alpha$, $w \wedge u = \theta$
লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$
যখন, $u \wedge v \Rightarrow$ u এবং v এর মধ্যবর্তী কোণ, $\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha}$



(a) বৃহত্তম লব্ধি, $w_{max} = u + v\ [\alpha = 0°]$
(b) ক্ষুদ্রতম লব্ধি, $w_{min} = u \sim v\ [\alpha = 180°]$
(c) $\alpha = 90°$ হলে লব্ধি, $w_p = \sqrt{u^2 + v^2}$ [p ⇒ perpendicular]
(d) যদি u = v হয়, তবে $w_e = 2u\cos\frac{\alpha}{2}$ এবং $\theta = \frac{\alpha}{2}$ [e ⇒ equal]

Problems

Example-01. দুইটি সমান বেগের মধ্যবর্তী কোণ α এবং লব্ধি যেকোন বেগের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে θ এর মান কত? **[JnU'17-18]**



Sol^n: $\theta_1 = \theta_2$ (রম্বস) $= \theta = \frac{\alpha}{2}$ **(Ans.)**

Example-02. একটি ক্রিকেট বল ভূমির সাথে সমান্তরাল ভাবে $20\ ms^{-1}$ সমবেগে চলছে। কিছুক্ষণ পর হঠাৎ ব্যাট দ্বারা পূর্ববেগের সাথে সমকোণে আঘাত করায় বলটি $30\ ms^{-1}$ বেগে চলতে লাগলো। ব্যাটের আঘাত বেগ নির্ণয় কর। **[RUET'05-06]**

Sol^n: ধরি, আঘাতের বেগ $v\ ms^{-1}$

আদিবেগ ও আঘাতজনিত বল পরস্পর সমকোণে ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি $30\ ms^{-1}$

$\therefore 20^2 + v^2 = 30^2 \Rightarrow v = 10\sqrt{5}\ ms^{-1}$

Example-03. দুইটি বেগের বৃহত্তম লব্ধি এদের ক্ষুদ্রতম লব্ধির n গুণ। বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে, লব্ধি বেগের মান এদের সমষ্টির অর্ধেক হয়। প্রমাণ কর যে, $\cos\alpha = -\frac{n^2+2}{2(n^2-1)}$

Sol^n: ধরি, বেগ দুইটির মান u ও v $(u > v)$ $\therefore u + v = n(u - v) = nk$ $[k = u - v]$

$\frac{(u+v)^2}{4} = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha \quad (u \wedge v = \alpha) \Rightarrow \frac{(u+v)^2}{2} = 2(u^2 + v^2) + 4uv\cos\alpha$

$\Rightarrow \frac{n^2k^2}{2} = (u+v)^2 + (u-v)^2 + \{(u+v)^2 - (u-v)^2\}\cos\alpha \Rightarrow \frac{n^2k^2}{2} = n^2k^2 + k^2 + (n^2k^2 - k^2)\cos\alpha$

$\Rightarrow n^2 = 2n^2 + 2 + 2(n^2 - 1)\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-(n^2+2)}{2(n^2-1)}$ **(Proved)**

Type-02: দূরত্ব নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

Cosine Law ব্যবহার করে,

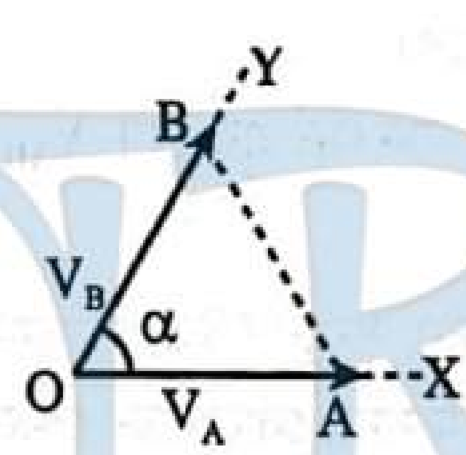
OX বরাবর ১ম ব্যক্তির বেগ $= V_A$; OY বরাবর ২য় ব্যক্তির বেগ $= V_B$

মধ্যবর্তী কোণ $= \alpha$

t সময় পর, OX বরাবর ১ম ব্যক্তির অতিক্রান্ত দূরত্ব $= OA = V_At$

OY বরাবর ২য় ব্যক্তির অতিক্রান্ত দূরত্ব $= OB = V_Bt$ $[s = vt]$

t সময় পর A ও B বিন্দুতে অবস্থিত ২ ব্যক্তির মধ্যবর্তী দূরত্ব AB.



Cosine Law:

$\cos\alpha = \frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB} \therefore AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB\cos\alpha \therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB\ \cos\alpha}$

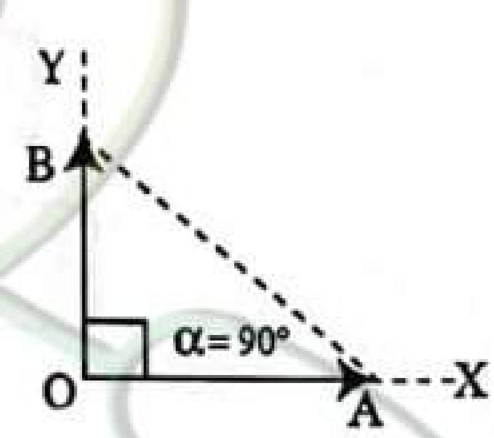
যেখানে $OA = V_At, OB = V_Bt$.

Special Case:

$\alpha = 90°$

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AB^2 = OA^2 + OB^2$

$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2}$ [যেখানে $OA = V_At, OB = V_Bt$]



Problems

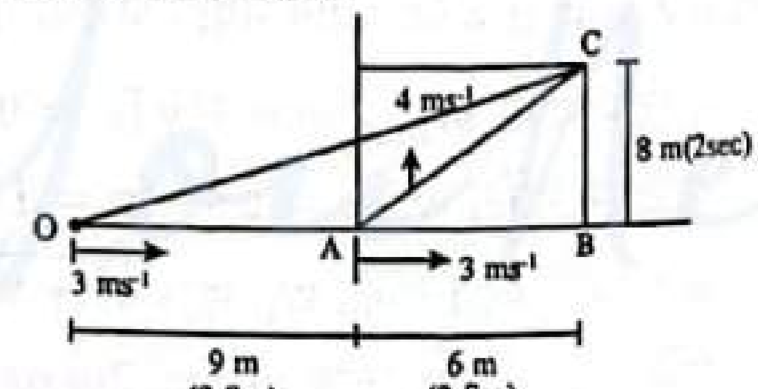
Example-04. O বিন্দু থেকে একটি বস্তু একটি সরলরেখা বরাবর $3ms^{-1}$ বেগে যাত্রা শুরু করে। 3 sec. পর যাত্রাপথের সাথে লম্ব দিকে $4\ ms^{-1}$ মানের একটি বেগ সংযোজন করা হল। যাত্রা শুরুর 5 sec পর বস্তুটির সরণের মান কত হবে?

Sol^n: $OB = OA + AB = 9 + 6 = 15$

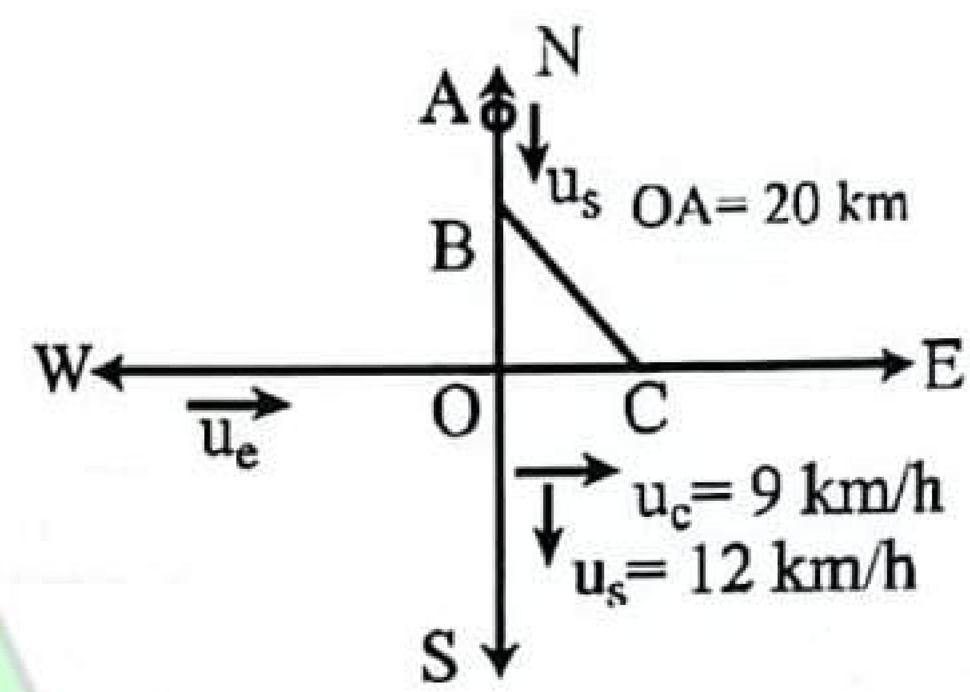
এখন, $OC^2 = OB^2 + BC^2$

$= (15)^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$

$\therefore OC = \sqrt{289}\ m = 17\ m$



Example-05. সকাল 7 টায় 9 $km\ h^{-1}$ বেগে পূর্ব দিকে ধাবমান একটি জাহাজ তার সোজা উত্তরে 20 km দূরে 12 $km\ h^{-1}$ বেগে উত্তর দিক থেকে দক্ষিণ দিকে চলমান আর একটি জাহাজকে দেখতে পেল। কখন তাদের মধ্যে দূরত্ব ন্যূনতম হবে? আর সেই ন্যূনতম দূরত্ব কত?



Solⁿ: ধরি, t ঘণ্টা পর এদের মধ্যে দূরত্ব ন্যূনতম হবে,

$BC = x$ km; $AB = 12t$, $\therefore OB = 20 - 12t$

$BC^2 = OB^2 + OC^2 = (20 - 12t)^2 + (9t)^2$

বা, $x^2 = 400 - 480t + 144t^2 + 81t^2$

বা, $x^2 = 225t^2 - 480t + 400$

বা, $x^2 = \{(15t)^2 - 2.15.16t + (16)^2\} + 144$

বা, $x^2 = (15t - 16)^2 + 144$

x ক্ষুদ্রতম হবে, যখন $15t - 16 = 0$ বা, $t = \frac{16}{15} = 1.067$ ঘণ্টা এবং $x^2 = 144$ $\therefore x = 12$ km **(Ans.)**

$\therefore$ 1 ঘণ্টা 4 মিনিটে অর্থাৎ 8 টা 4 মিনিটে দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হবে।

Type-03: গড় দ্রুতি/বেগ সংক্রান্ত

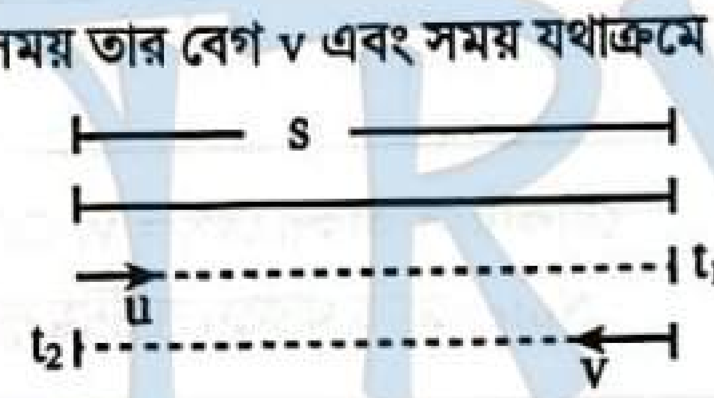
Concept

এ ধরনের অঙ্কগুলোতে কোনো fixed সূত্র ব্যবহার না করে মোট দূরত্ব বের করে নিতে হবে বা না দেওয়া থাকলে ধরে নিতে হবে এবং মোট সময় বের করে নিতে হবে (বা ধরে নিতে হবে)।

অতঃপর গড় দ্রুতি $= \frac{\text{মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{মোট সময়}}$; গড় বেগ, $\bar{v} = \frac{\text{সরণ}}{\text{মোট সময়}}$

Shortcut:

মনে করি, একজন ব্যক্তি s দূরত্ব যাওয়া আসা করে। যাওয়ার সময় তার বেগ u এবং আসার সময় তার বেগ v এবং সময় যথাক্রমে t_1 ও t_2 হলে, গড় দ্রুতি, $\bar{v} = \frac{\text{মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{মোট সময়}}$



$= \frac{2s}{t_1+t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{u}+\frac{s}{v}} = \frac{2s}{s\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)} = \frac{2}{\frac{u+v}{uv}}$ | $t_1 = \frac{s}{u}$, $t_2 = \frac{s}{v}$

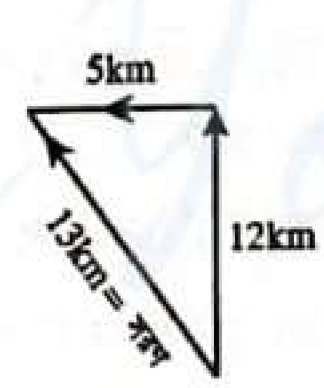
$\boxed{\text{গড় দ্রুতি}, \bar{v} = \frac{2uv}{u+v} = \frac{2}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}}$

এক ব্যক্তি n টি সমান দূরত্ব যথাক্রমে $v_1, v_2, v_3, \dots\dots\dots, v_n$ বেগ নিয়ে অতিক্রম করলে তার গড় দ্রুতি, $\bar{v} = \frac{n}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}+\dots+\frac{1}{v_n}}$

Note: অনেক সময় প্রশ্নে বলা হয় গড়বেগ নির্ণয়ের জন্য কিন্তু প্রশ্নে বস্তুটি কোন দিকে গিয়েছে তা উল্লেখ থাকে না। সেক্ষেত্রে তোমাকে বুঝে নিতে হবে প্রশ্নে আসলে গড় দ্রুতির মান নির্ণয় করতে বলা হয়েছে।

Problems

Example-06. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 3 km বেগে উত্তর দিকে 12 km হাঁটার পর পশ্চিম দিকে 150 মিনিটে 5 km পথ হাঁটল। ব্যক্তিটির গড়বেগ কত? **[JU'16-17]**



Solⁿ: সরণ $= \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ km, সময় $= \frac{12}{3} + \frac{150}{60} = 6.5$ h

$\therefore$ গড়বেগ, $\bar{v} = \frac{\text{সরণ}}{\text{সময়}} = \frac{13}{6.5}$ $kmh^{-1} = 2$ kmh^{-1} **(Ans.)**

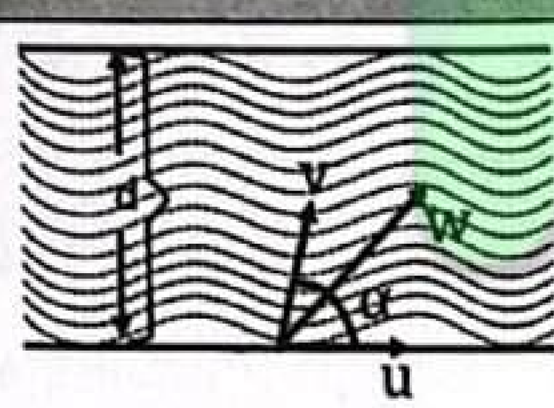
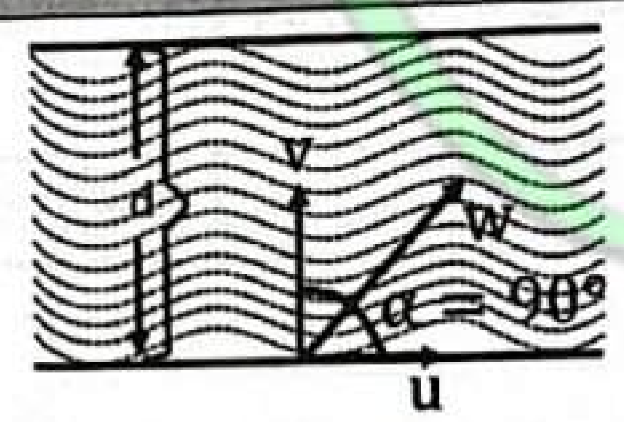
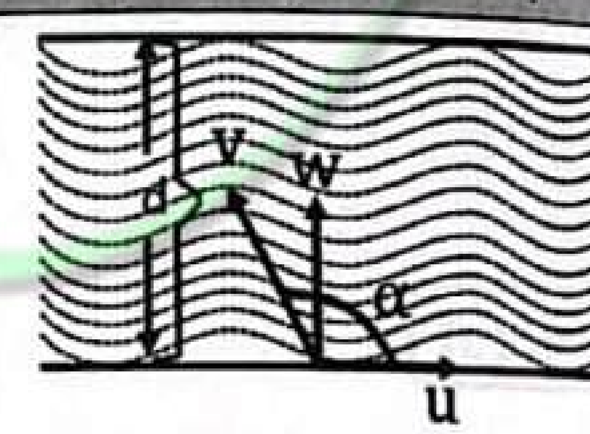
Example-07. একজন ব্যক্তি কোন স্থানে যাওয়ার সময় তার বেগ 6 $km\ h^{-1}$ এবং আসার সময় তার বেগ 14 $km\ h^{-1}$ হলে, তার গড়বেগ নির্ণয় কর।

Solⁿ: গড় দ্রুতি, $\overline{v} = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_2} = \frac{s+s}{\frac{s}{u}+\frac{s}{v}} = \frac{2uv}{u+v} = \frac{2\times6\times14}{14+6} = 8.4\ kmh^{-1}$ **(Ans.)**

Note: এখানে $\overline{v}$ দ্বারা গড় দ্রুতি বোঝানো হয়েছে। যেহেতু ব্যক্তিটি এক স্থান থেকে যাত্রা করে আবার সেখানেই ফিরে এসেছে, $\therefore$ তার সরণ $= 0$ $\therefore$ গড়বেগ $= \frac{\text{সরণ}}{\text{সময়}} = 0$. প্রশ্নের অপশনে 0 না থাকলে ধরে নিবে যে, গড়বেগ দ্বারা আসলে গড় দ্রুতি বোঝানো হয়েছে।

Type-04: নদী পারাপার সংক্রান্ত

Concept

	কোন শর্ত না দেওয়া থাকলে	সর্বনিম্ন সময়	সর্বনিম্ন দূরত্ব (সোজাসুজি নদী পার)
চিত্র			
সূত্র	$w = \sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\alpha}$ $d = v\sin\alpha\, t \Rightarrow t = \frac{d}{v\sin\alpha}$ $x = (u + v\cos\alpha)t$ $\frac{x}{d} = \frac{u+v\cos\alpha}{v\sin\alpha}$	$w = \sqrt{u^2+v^2}$ $\alpha = 90°$ $d = v\,t_{min} \Rightarrow t_{min} = \frac{d}{v}$ $x = ut_{min}$ $\frac{x}{d} = \frac{u}{v}$	$w = \sqrt{v^2-u^2}$ $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)$ $d = w\,t_{min,d}$ $\Rightarrow t_{min,d} = \frac{d}{\sqrt{v^2-u^2}} = \frac{d}{w}$ $x = 0$

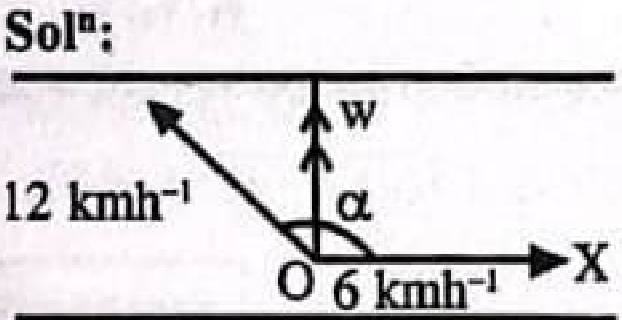
নৌকার/সাতারুর বেগ= v, স্রোতের বেগ= u, লব্ধি বেগ= w

Note: স্রোত থাকলে সর্বনিম্ন দূরত্বে নদী পারাপারের সময়, সর্বনিম্ন পারাপারের সময় অপেক্ষা বেশি হবে।

Problems

Example-08. কোন লঞ্চ 12 kmh^{-1} বেগে চলে 6 kmh^{-1} বেগে প্রবাহিত নদীর এক তীর থেকে কোন দিকে যাত্রা করলে অপর তীরে সোজাসুজি যেতে পারবে? **[JnU'13-14]**

Solⁿ:



নদীর প্রবাহের দিকে বেগের উপাংশ নিয়ে পাই, $12\cos\alpha + 6 = w\cos 90° \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120°$ **(Ans.)**

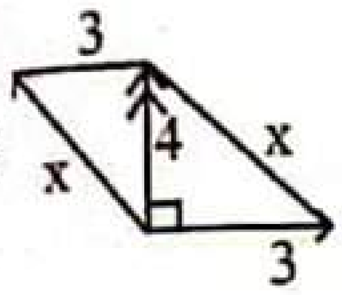
Shortcut: সোজাসুজি নদী পার হবার ক্ষেত্রে, $\cos\alpha = -\frac{\text{স্রোতের বেগ}}{\text{লঞ্চের বেগ}} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$ **(Ans.)**

Example-09. এক ব্যক্তি স্রোতের $\sqrt{2}$ গুণ বেগে সাঁতার কাটতে পারে। যাত্রাস্থান হতে নদীর ঠিক বিপরীত পাড়ে পৌঁছাতে হলে তাকে কোন দিকে সাঁতার দিতে হবে? **[CU'20-21]**

Solⁿ: স্রোতের বেগ u হলে, ব্যক্তির বেগ $\sqrt{2}u$ ।

প্রশ্নমতে, $\sqrt{2}u\cos\alpha + u\cos0° = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-u}{\sqrt{2}u} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \alpha = 135°$ **(Ans.)**

Example-10. একটি নদীর স্রোতের বেগ $3\ kmh^{-1}$, নৌকার বেগ কত হলে নৌকাটি $4\ kmh^{-1}$ বেগে সোজা পথে নদী পাড়ি দিতে পারবে? **[JU'19-20]**

Solⁿ: 

$x^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow x = 5\ kmh^{-1}$ **(Ans.)**

Example-11. স্রোত না থাকলে এক ব্যক্তি 100 মিটার চওড়া একটি নদী সাঁতার দিয়ে ঠিক সোজাসুজিভাবে 4 মিনিটে পার হয় এবং স্রোত থাকলে ঐ একই পথে সে নদীটি 5 মিনিটে পার হতে পারে। স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

Solⁿ: সাঁতারুর বেগ, $v = \frac{100}{4} = 25\ m\ min^{-1}$; স্রোতের বেগ $= u$ (ধরি)

সোজাসুজি পার হবার ক্ষেত্রে, লব্ধি বেগ $= \sqrt{v^2 - u^2} = \frac{100}{5} \Rightarrow 25^2 - u^2 = 20^2 \Rightarrow u = 15\ m\ min^{-1}$ **(Ans.)**

Example-12. 500 মিটার প্রশস্ত এবং 3 মি./সে. বেগে প্রবাহিত একটি নদী 5 মি./সে. বেগে চলে দুই খানা নৌকার একটি ন্যূনতম পথে এবং অন্যটি স্বল্পতম সময়ে পার হয়। এদের সময়ের ব্যবধান নির্ণয় কর।

Solⁿ: ন্যূনতম সময়, $t_{min} = \frac{500}{5} = 100\ s.$

ন্যূনতম দূরত্বের ক্ষেত্রে সময়, $t_{min,d} = \frac{500}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = 125\ s$

সময়ের ব্যবধান, $\Delta t = t_{min,d} - t_{min} = 125 - 100 = 25\ s$ **(Ans.)**

Example-13. এক ব্যক্তি নদীর স্রোতের সাথে সমকোণে যাত্রা করে অপর পাড়ে যাত্রাস্থানের বিপরীত বিন্দু হতে নদীর তীর বরাবর 500 মি. দূরে গিয়ে পৌঁছাল। সাঁতারুর বেগ স্রোতের বেগের দ্বিগুণ হলে, নদীর প্রস্থ নির্ণয় কর।

Solⁿ: স্রোত ও সাঁতারুর বেগ যথাক্রমে u ও v হলে $v = 2u$

$\frac{x}{d} = \frac{u}{v} \Rightarrow d = \frac{v}{u} \times x = \frac{2u}{u} \times 500 = 1000\ m = 1\ km$ **(Ans.)**

Type-05: গতির সূত্রাবলির ব্যবহার সংক্রান্ত

Concept

(i) $v = u + ft$ (ii) $v^2 = u^2 + 2fs$ (iii) $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

(iv) $s = \frac{u+v}{2} \times t = \bar{v}t$ (v) $F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = m\frac{dv}{dt}$

এই সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে। ত্বরণ হলে f এর মান positive, মন্দন হলে f এর মান negative.

Problems

Example-14. একটি চলন্ত ট্রেনকে ব্রেক করে 10 সেকেন্ডে থামিয়ে দেওয়া হলো। ট্রেনটির গড় মন্দন $70\ ms^{-2}$ হলে এর গতিবেগ কত ছিলো? **[DU'18-19]**

Solⁿ: $v = u - at \Rightarrow 0 = u - at \Rightarrow u = at = 70 \times 10 = 700\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

Example-15. একটি গাড়ি সমত্বরণে (uniform acceleration) $30\ kmh^{-1}$ আদি বেগে 100 km পথ অতিক্রম করে $50\ kmh^{-1}$ চূড়ান্ত বেগ প্রাপ্ত হয়। গাড়িটির ত্বরণ (acceleration) কত? **[JnU'14-15, DU'11-12]**

Solⁿ: দেওয়া আছে, $u = 30\ kmh^{-1}$; $v = 50\ kmh^{-1}$; $s = 100\ km$

আমরা জানি, ত্বরণ, $f = \frac{v^2 - u^2}{2s} = \frac{50^2 - 30^2}{2 \times 100} = 8\ kmh^{-2}$ **(Ans.)**

Example-16. 36 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর কী পরিমাণ বল প্রয়োগ করলে এক মিনিটে এর বেগ ঘণ্টায় 15 km এ বৃদ্ধি পাবে? **[KU'17-18]**

Solⁿ: $F = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{36 \times 15 \times \frac{5}{18}}{60} = 2.5\ N$ **(Ans.)**

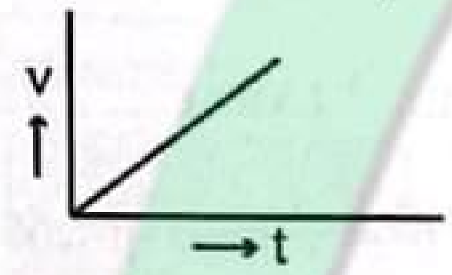
Example-17. একটি বিমান 20 মি./সে. বেগে সরল রানওয়ে স্পর্শ করে এবং 300 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে থামে। মন্দন সুষম হলে বিমানটি থামতে প্রয়োজনীয় সময় নির্ণয় কর।

Sol^n: $300 = \frac{20+0}{2}t \Rightarrow t = 30$ sec. 20 ms^{-1} $\underset{300\text{ m}}{\overset{t}{\longmapsto}}$ 0 **(Ans.)**

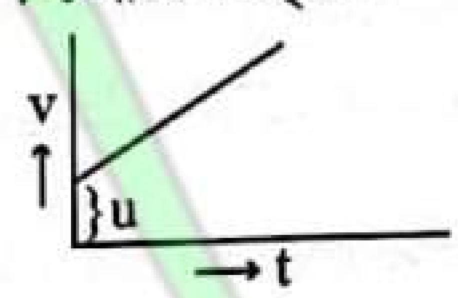
Type-06: সমত্বরণ, সমমন্দন, সমবেগে চলমান কণার গতি সংক্রান্ত

Concept

- সময়ের সাপেক্ষে সুষমভাবে বেগ বাড়লে অর্থাৎ সমত্বরণ হলে v-t গ্রাফের প্রকৃতি-

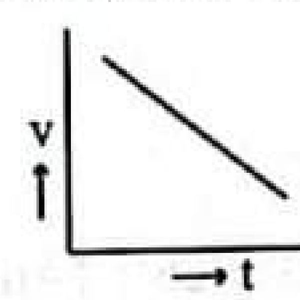


→ স্থির অবস্থান থেকে যাত্রা করলে।

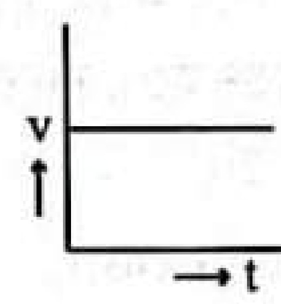


→ একটি নির্দিষ্ট বেগ নিয়ে যাত্রা করলে।

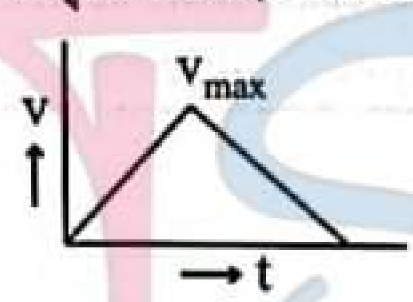
- সময়ের সাপেক্ষে সুষমভাবে বেগ কমলে অর্থাৎ সমমন্দন হলে v-t গ্রাফের প্রকৃতি নিম্নরূপ-



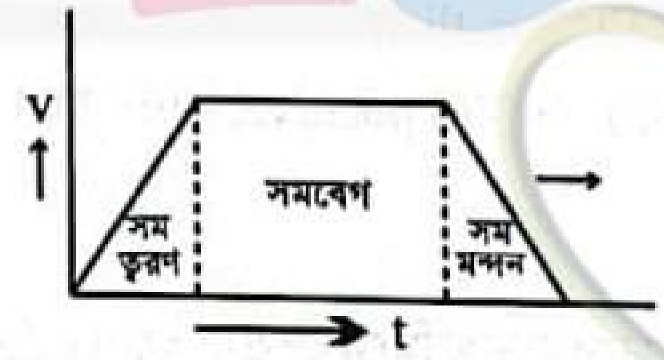
- সমবেগ-এর ক্ষেত্রে v-t গ্রাফ নিম্নরূপ-



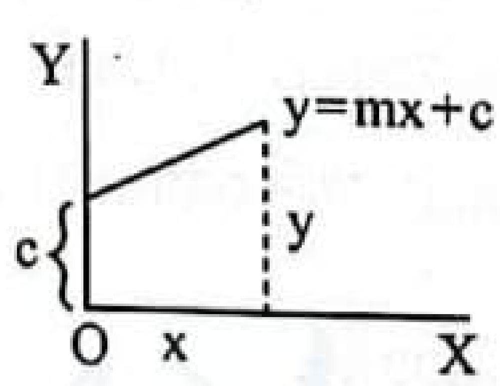
- কোন বস্তু দ্বারা অতিক্রান্ত মোট দূরত্বের কিছু অংশ সমত্বরণে এবং অবশিষ্টাংশে সমমন্দনে গেলে।



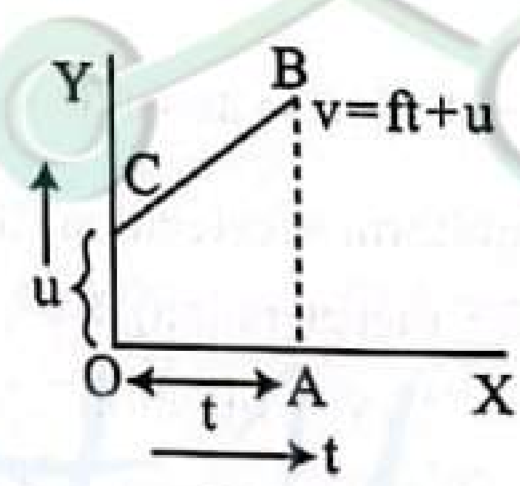
- স্থির অবস্থান থেকে যাত্রা শুরু করে যথাক্রমে সমত্বরণ, সমবেগ ও সমমন্দনে গেলে।



- এবার আমরা v-t গ্রাফ ও x-y গ্রাফের মধ্যে তুলনা করি।



চিত্র- 1



চিত্র- 2

চিত্র দুইটি লক্ষ কর, $y = mx + c$ এবং $v = ft + u$ তুলনা করলে, $v = y$; $t = x$; $u = c$; $m = f$

অর্থাৎ v-t গ্রাফের ঢালই ঐ অংশের ত্বরণ বা মন্দন নির্দেশ করে।

আবার, চিত্র-2 লক্ষ কর, $OA = t$; $AB = v$; $OC = u$

যদি বলি, OABC ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল কত?

তোমরা সকলেই বলবে, ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্র $OABC = \frac{1}{2}(OC + AB) \times OA$

$= \frac{1}{2}(u + v) \times t = \frac{1}{2}(u + u + ft).t = \frac{1}{2}(2ut + ft^2) = ut + \frac{1}{2}ft^2$

কি পেয়েছো?

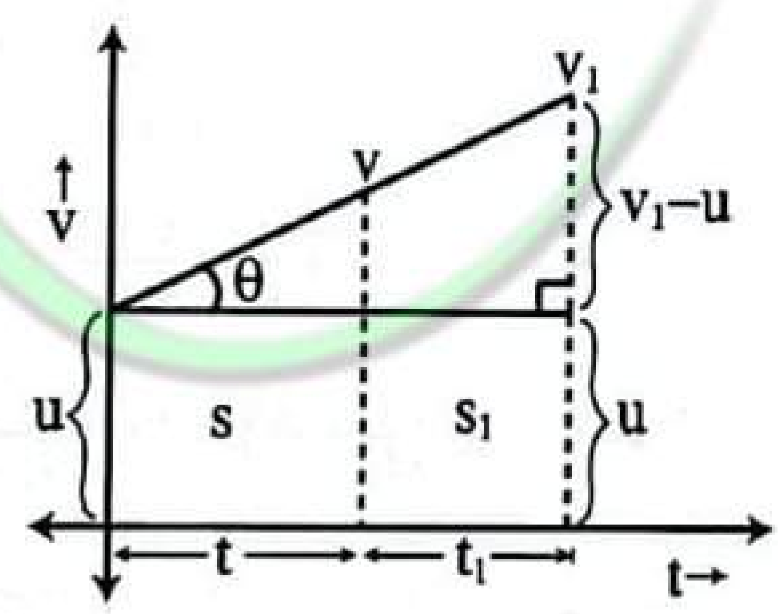
সবাই খুশি হয়ে বলবা, এটাতো আমরা নাইন-এ শিখেছি। এটাতো ছিল $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

তাহলে আমি বলবো v-t গ্রাফের ক্ষেত্রফলই বস্তু দ্বারা অতিক্রান্ত সরণ বুঝায়।

[Note: v-t গ্রাফের ঢাল ত্বরণ এবং ক্ষেত্রফল সরণ নির্দেশ করে।]

Problems

Example-18: একটি বস্তুকণা f সমত্বরণে একটি সরলরেখা বরাবর চলে t সময়ে s দূরত্ব এবং পরবর্তী t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, $f = \frac{2\left(\frac{s_1}{t_1} - \frac{s}{t}\right)}{t+t_1}$.



Solⁿ: চিত্রে, $s = \frac{u+v}{2}t \Rightarrow \frac{s}{t} = \frac{u+v}{2}$ ……… (i)

আবার, $s_1 = \frac{v_1+v}{2}t_1 \therefore \frac{s_1}{t_1} = \frac{v_1+v}{2}$ ……… (ii)

এবং $\tan\theta = f = \frac{v_1-u}{t+t_1} \therefore v_1 - u = f(t + t_1)$ ……… (iii)

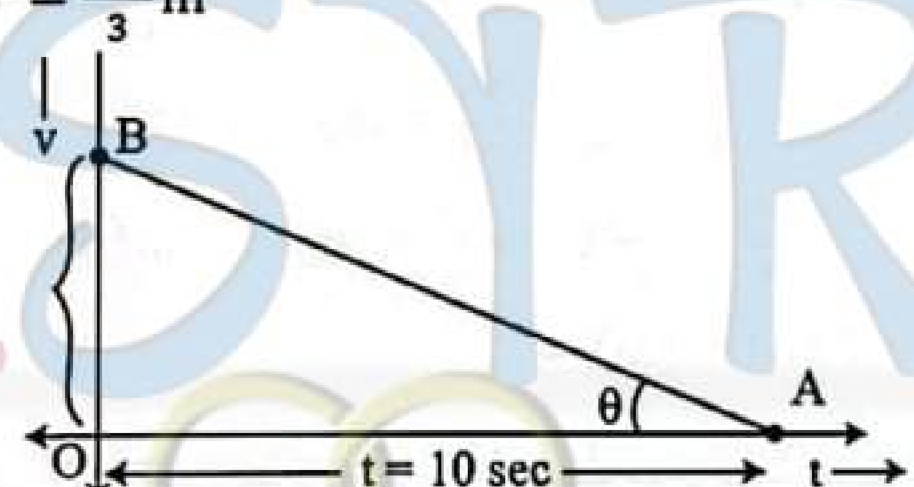
এখন, (ii) − (i) $\Rightarrow \frac{s_1}{t_1} - \frac{s}{t} = \frac{v_1+v-u-v}{2} = \frac{v_1-u}{2} \Rightarrow \frac{s_1}{t_1} - \frac{s}{t} = \frac{f(t+t_1)}{2}$ [(3) হতে]

$\therefore f = \frac{2\left(\frac{s_1}{t_1} - \frac{s}{t}\right)}{t+t_1}$ [প্রমাণিত]

Example-19. ঘণ্টায় 60 কি: মি: বেগে চলন্ত একটি ট্রেনকে ব্রেকের সাহায্যে 10 সেকেন্ডের মধ্যে সম্মুখস্থ কোন স্টেশনে থামানো হয়। ব্রেক প্রয়োগের ফলে উৎপন্ন মন্দন কত? স্টেশন হতে কতদূরে থাকতে ব্রেক প্রয়োগ করা হয়?

Solⁿ: $a = \frac{0-\frac{50}{3}}{10} = -\frac{5}{3}ms^{-2}$ ∴ মন্দন $= \frac{5}{3}ms^{-2}$; $s = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 10^2 = \frac{250}{3}m$

বিকল্প:



ত্বরণ, $a = -\frac{OB}{OA} = -\frac{\frac{50}{3}}{10} = -\frac{5}{3}ms^{-2}$

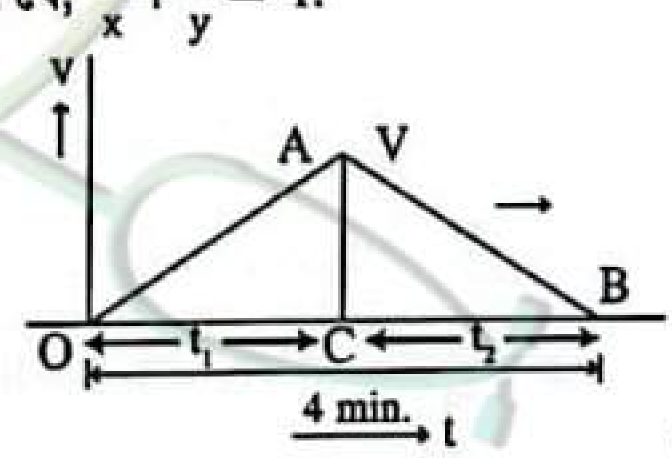
$u = 60kmh^{-1} = 60 \times \frac{5}{18}ms^{-1} = \frac{50}{3}ms^{-1}$

∴ সরণ, $s = \frac{1}{2} \times OB \times OA = \frac{1}{2} \times \frac{50}{3} \times 10 = \frac{250}{3}$ m **(Ans.)**

Example-20. একটি ট্রেন সরল রেলপথে 2 কি.মি. ব্যবধানে দুইটি স্টেশনে থামে। এক স্টেশন থেকে অন্য স্টেশনে পৌছাতে সময় লাগে 4 মিনিট। ট্রেনটি এর গতিপথের প্রথম অংশ x সমত্বরণে এবং ২য় অংশ y সমমন্দনে চলে। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$.

Solⁿ: $u = 0 \quad t_1 \quad \rightarrow x \quad v \quad t_2 \quad \rightarrow y \quad v = 0$

A $\quad s_1 \quad$ B $\quad s_2 \quad$ C



AB অংশ : $v = 0 + xt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v}{x}$ ……… (i) এবং $S_1 = \frac{0+v}{2}t_1 = \frac{vt_1}{2}$ ……… (ii)

BC অংশে : $0 = v - yt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v}{y}$ ……… (iii) এবং $S_2 = \frac{v+0}{2}t_2 = \frac{vt_2}{2}$ ……… (iv)

v-t গ্রাফের সাহায্যে: $2 = \frac{1}{2}v \times (t_1 + t_2) = \frac{1}{2} \times v \times 4 \therefore v = 1$

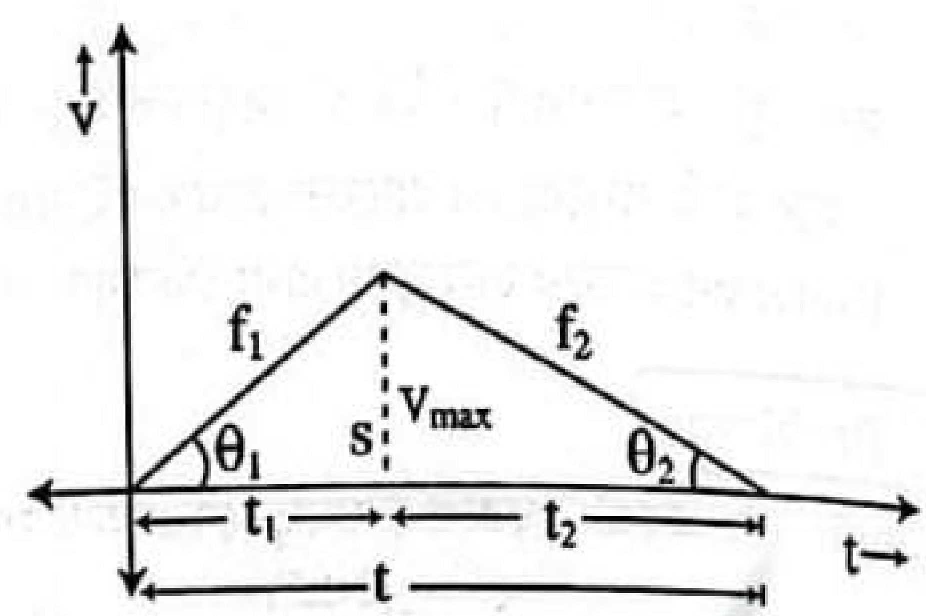
(i) + (iii) $\Rightarrow (t_1 + t_2) = \frac{v}{x} + \frac{v}{y} \Rightarrow 4 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ **(Proved)**

বিকল্প: মোট সরণ, $2 = \Delta OAB$ বা, $2 = \frac{1}{2} \times 4 \times v \therefore v = 1$

আবার, $x = OA$ রেখার ঢাল $= \frac{AC}{OC} = \frac{v}{t_1} = \frac{1}{t_2}$ এবং $y = \frac{AC}{CB} = \frac{v}{t_2} = \frac{1}{t_2} \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = t_1 + t_2 = 4$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ [$\because t_1 + t_2 = 4$] [প্রমাণিত]

Example-21: একটি ট্রেন সরল রেলপথে s দূরত্বে অবস্থানরত দুইটি স্টেশনে থামে। এক স্টেশন থেকে অন্য স্টেশনে পৌছাতে t সময় লাগে। ট্রেনটি এর গতিপথের প্রথম অংশ f_1 সমত্বরণে এবং দ্বিতীয় অংশ f_2 সমমন্দনে চলে। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{t^2}{2s}$ এবং $t=\sqrt{\frac{2(f_1+f_2)s}{f_1f_2}}$.



Sol^n: ত্বরণ, $f_1=\frac{v_{max}}{t_1}$

$\therefore \frac{1}{f_1}=\frac{t_1}{v_{max}}$ ……… (i)

আবার, মন্দন, $f_2=\frac{v_{max}}{t_2}$ $\therefore \frac{1}{f_2}=\frac{t_2}{v_{max}}$ ……… (ii)

এখন, $t=t_1+t_2$ ……… (iii)

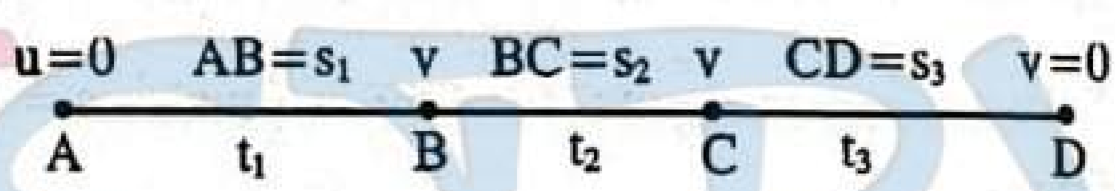
আবার, $s=\frac{1}{2}v_{max}(t_1+t_2)=\frac{1}{2}v_{max}t$ [(iii) হতে]

$\therefore v_{max}=\frac{2s}{t}$ ……… (iv)

(i) + (ii) $\Rightarrow \frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{t_1+t_2}{v_{max}}=\frac{t}{\frac{2s}{t}}$ [(iii) ও (iv) হতে] $\therefore \frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{t^2}{2s}$ [প্রমাণিত]

$\Rightarrow t^2=2s\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)=2s\left(\frac{f_1+f_2}{f_1f_2}\right)$ $\therefore t=\sqrt{\frac{2(f_1+f_2)s}{f_1f_2}}$ [প্রমাণিত]

Example-22. একটি রেলগাড়ি একটি স্টেশন থেকে সরল রেলপথে যাত্রা করে অপর স্টেশনে গিয়ে থামে। গাড়িখানা যদি মোট দূরত্বের $\frac{1}{m}$ অংশ সমত্বরণে, শেষ $\frac{1}{n}$ অংশ সমমন্দনে এবং বাকি অংশ সমবেগে চলে, তবে প্রমাণ কর যে, এর সর্বোচ্চ বেগ ও গড় বেগের অনুপাত $\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right):1$ হবে।



Sol^n: $S_1=\frac{s}{m}=\frac{0+v}{2}t_1$ এবং $vt_1=\frac{2s}{m}$ ……… (i)

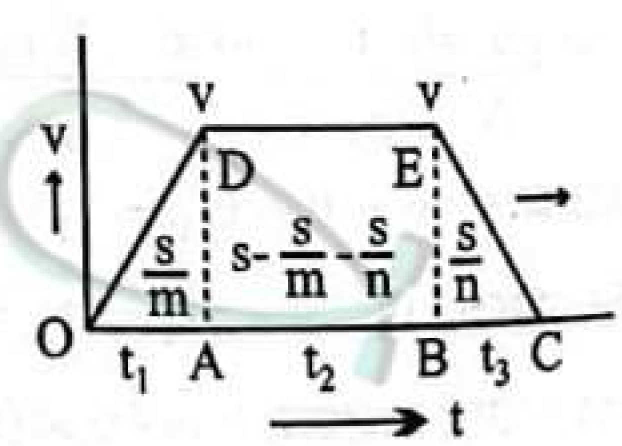
$\Rightarrow S_2=s\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)=vt_2$ …… (ii)

$\Rightarrow S_3=\frac{s}{n}=\frac{v+0}{2}t_3\Rightarrow\frac{2s}{n}=vt_3$ ……… (iii)

(i) + (ii) + (iii) $\Rightarrow$

$s\left(\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)=v(t_1+t_2+t_3)\Rightarrow\frac{s\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+1\right)}{t_1+t_2+t_3}=v\Rightarrow\bar{v}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+1\right)=v$ [$\bar{v}$ = গড়বেগ $=\frac{s}{t_1+t_2+t_3}$]

সর্বোচ্চ বেগ: গড় বেগ $=\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right):1$ **(Proved)**



বিকল্প: $\frac{s}{m}=\frac{1}{2}.t_1.v$

$\Rightarrow\frac{2s}{m}=vt_1$ ……… (i)

$s-\frac{s}{m}-\frac{s}{n}=vt_2$ ……… (ii)

$\frac{s}{n}=\frac{1}{2}\times t_3.v$ $\therefore\frac{2s}{n}=vt_3$ ……… (iii)

(i) + (ii) + (iii) $\Rightarrow s+\frac{s}{m}+\frac{s}{n}=v(t_1+t_2+t_3)$

$\Rightarrow s\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=vt$ [t = মোট সময় $=t_1+t_2+t_3$]

$\Rightarrow\frac{s}{t}\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=v\Rightarrow\bar{v}\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=v\Rightarrow\frac{v}{\bar{v}}=1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ $\therefore v:\bar{v}=\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right):1$ (প্রমাণিত)

Type-07: বাঘ-হরিণ, ইঁদুর-বিড়াল ধরা এবং বাস-যাত্রী, বাস-সাইকেল অতিক্রম করা সংক্রান্ত

Concept

এই অঙ্কগুলোতে সাধারণত একজন সমবেগে এবং অপর জন সমত্বরণে চলে, সমবেগের জন্য $s = vt$ এবং সমত্বরণের জন্য-

(i) $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

(ii) $v = u + at$

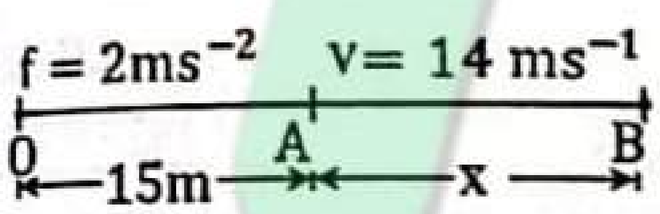
ব্যবহার করতে হবে। এক্ষেত্রে বাঘ-হরিণ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব অবশ্যই সঠিকভাবে সমীকরণে বসাতে হবে।

সমত্বরণের ক্ষেত্রে,
s = সরণ
u = আদিবেগ
v = শেষবেগ
t = সময়
a = ত্বরণ

Problems

Example-23. একটি বিড়াল এর সম্মুখে 15 m দূরত্বে একটি ইঁদুর দেখতে পেয়ে তাকে ধরার জন্য $2\ ms^{-2}$ সমত্বরণে দৌড়াতে শুরু করল। ইঁদুরটি $14\ ms^{-1}$ সমবেগে সরলপথে চলতে থাকলে, কোথায় এবং কখন বিড়ালটি ইঁদুরটিকে ধরতে পারবে?

Solⁿ: ধরি, t সময় পর ইঁদুরটি আগে যেখানে ছিল সেখানে থেকে x m দূরে ধরতে পারবে।



$x = 14t$ ……… (i); $x + 15 = 0 + \frac{1}{2}.2.t^2$ ……… (ii)

(ii) − (i) $\Rightarrow t^2 - 14t - 15 = 0 \quad \therefore t = 15,\ t = -1$

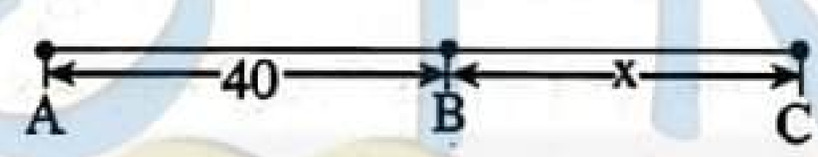
যেহেতু সময় ঋণাত্মক নয়, $\therefore t \neq -1 \therefore\ x = 14 \times 15 = 210\ m \ \therefore x + 15 = 210 + 15 = 225\ m$

Example-24. একটি বাস স্থির অবস্থা থেকে $6\ ms^{-2}$ সুষম ত্বরণে সরল পথে যাত্রা করার সাথে সাথে এর 40 m পিছন হতে $23\ ms^{-1}$ সমবেগে একজন সাইকেল চালক বাসটার দিকে চলতে শুরু করল। কখন এরা মিলিত হবে? দুইটি উত্তরের কারণ ব্যাখ্যা কর।

Solⁿ: ধরি, B থেকে x m দূরে t সময় পরে মিলিত হবে। বাসের ক্ষেত্রে $BC = x = 0 + \frac{1}{2}.6.t^2$

বা, $x = 3t^2$ ……… (i)

সাইকেল এর ক্ষেত্রে, $x + 40 = 23t$ ……… (ii)



(ii) − (i) বা, $40 = 23t - 3t^2$ বা, $3t^2 - 23t + 40 = 0$

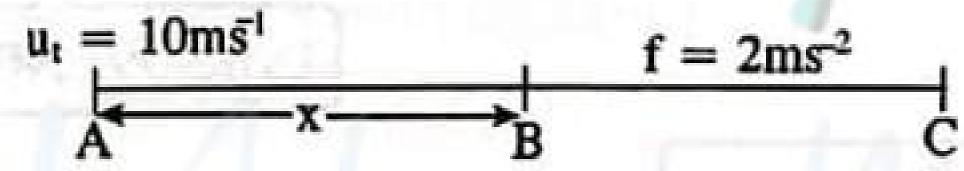
$t = 5, \frac{8}{3}sec$; $\frac{8}{3}sec$ পর বাসের বেগ, $v = 0 + \frac{6.8}{3} = 16\ ms^{-1}$ যা সাইকেল চালকের বেগ অপেক্ষা কম।

ফলে এ সময় বাসকে পেছনে ফেলে সাইকেল সামনে চলে যাবে। 5 sec পর বাসের বেগ, $v = 0 + 6.5 = 30\ ms^{-1}$ যা সাইকেল চালকের বেগ অপেক্ষা বেশি। সুতরাং বাসটি তাকে পেছনে ফেলে যাবে।

Example-25. একটি হরিণ একটি বাঘকে দেখতে পেয়ে স্থির অবস্থা হতে $2\ ms^{-2}$ সমত্বরণে সরলপথে যাত্রা করল। দেখাও 25 m এর অধিক পশ্চাৎ হতে বাঘটি $10\ ms^{-1}$ সমবেগে দৌড়ে হরিণকে ধরতে পারবে না।

Solⁿ: ধরি, A অবস্থানে বাঘ; B অবস্থানে হরিণ এবং $AB = x$.

$\therefore BC = 0 + \frac{1}{2}ft^2$ বা, $BC = \frac{1}{2}.2.t^2 = t^2$ ……… (1)



t সময়ে বাঘটি AC দূরত্ব অতিক্রম করবে,

$\therefore AC = 10t$

বা, $x + BC = 10t$ ……… (2) $\Rightarrow x = -t^2 + 10t$ বা, $t^2 - 10t + x = 0$

t এর বাস্তব মানের জন্য, $D \geq 0 \ \therefore (-10)^2 - 4.1.x \geq 0$ বা, $100 \geq 4x$ বা, $x \leq 25$

$\therefore$ 25 m এর অধিক পশ্চাৎ হতে দৌড়ে বাঘটি হরিণকে ধরতে পারবে না। **(Showed)**

Type-08: বিশেষ এক সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব সংক্রান্ত

Concept

আমরা জানি, t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $S_{th} = u + \frac{1}{2}f(2t-1)$

এবং t সেকেন্ডে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$.

ত্বরণ, $f = \frac{S_{mth} - S_{nth}}{t_m - t_n}$

Problems

Example-26. একটি কণা স্থিরাবস্থা থেকে $2m/sec^2$ ধ্রুব ত্বরণে যাত্রা করে তৃতীয় সেকেন্ডে কত পথ অতিক্রম করবে? **[JU'22-23]**

(a) 4m (b) 5m (c) 6m (d) 7m

Sol^n: (b); আমরা জানি, t তম সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $S = u + \frac{1}{2}(2t-1) = 0 + \frac{1}{2} \times 2 \times (2 \times 3 - 1) = 5m$

Example-27. একটি কণা $60\ cms^{-2}$ সমত্বরণে চলে এগারোতম সেকেন্ডে 720 cm পথ অতিক্রম করে। কণাটির আদিবেগ কত? **[JU'19-20]**

Sol^n: $s_{th} = u + \frac{1}{2}f(2t-1) \Rightarrow 720 = u + \frac{1}{2} \times 60(2 \times 11 - 1) \therefore u = 90\ cms^{-1}$

Example-28. সমত্বরণে (Uniform acceleration) চলমান একটি বস্তুকণা চতুর্থ সেকেন্ডে 19 মিটার এবং ষষ্ঠ সেকেন্ডে 27 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করলে 10 সেকেন্ড পর এর শেষবেগ কত হবে? **[JnU'13-14]**

Sol^n: $S_{4th} = u + \frac{1}{2}f.7 = 19$ ……… (i) ; $S_{6th} = u + \frac{1}{2}f.11 = 27$ ……… (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $u = 5\ ms^{-1}, f = 4\ ms^{-2} \therefore v = u + ft = 5 + 4 \times 10 \Rightarrow v = 45\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

Example-29. একটি কণা স্থির অবস্থান থেকে সমত্বরণে সরলপথে চলে নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করল। যদি এটি প্রথম সেকেন্ডে 16 মিটার এবং শেষ সেকেন্ডে মোট দূরত্বের $\frac{9}{25}$ অংশ অতিক্রম করে। তাহলে ত্বরণ, মোট দূরত্ব ও ভ্রমণকাল নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, ত্বরণ = $f\ ms^{-2}$, মোট দূরত্ব = s m এবং ভ্রমণকাল = t s

$S = 0 + \frac{1}{2}ft^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2}ft^2$ ………… (i)

$16 = 0 + \frac{1}{2}f(2.1 - 1) \Rightarrow f = 32\ ms^{-2}$

$\frac{9s}{25} = 0 + \frac{1}{2}f(2t-1)$

$\Rightarrow \frac{9}{25} \times \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2}f(2t-1) \Rightarrow \frac{9}{25}t^2 = 2t - 1$

$\Rightarrow 9t^2 - 50t + 25 = 0 \quad \therefore t = 5, \frac{5}{9}$

যেহেতু কণাটি প্রথম 1 sec এ 16m যায় $\therefore t \neq \frac{5}{9}s$

$\therefore t = 5\ sec$

মোট দূরত্ব, $s = \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2} \times 32 \times 5^2 = 400m$

ত্বরণ = $32\ ms^{-2}$ (Ans.)

Type-09: রেলগাড়ির সংঘর্ষ এড়ানোর শর্ত নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

আমরা জানি, সমত্বরণে চলমান বস্তুর জন্য, $v^2 = u^2 + 2fs$

এখানে, u = আদিবেগ; v = শেষবেগ; f = ত্বরণ; s = অতিক্রান্ত দূরত্ব।

Note: f.p.s পদ্ধতিতে g এর মান, $g = 32\ fts^{-2}$

Problems

Example-30. দুইটি রেলগাড়ি একই সরল রেলপথে u_1 ও u_2 গতিবেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব যখন x তখন তারা পরস্পরকে দেখতে পায়। ব্রেক প্রয়োগ করে রেলগাড়ি দুইটি যদি যথাক্রমে সর্বোচ্চ f_1 এবং f_2 মন্দন সৃষ্টি করে, তবে প্রমাণ কর যে,

(i) সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $u_1^2f_2 + u_2^2f_1 \le 2f_1f_2x$ হয়।

(ii) কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $u_1^2f_2 + u_2^2f_1 = 2f_1f_2x$ হয়।

Sol^n: মনে করি, ব্রেক প্রয়োগ করে f_1 ও f_2 মন্দনে গাড়ী দুইটি যথাক্রমে x_1 ও x_2 দূরত্ব অতিক্রম করে থেমে যায়।

তাহলে, $0^2 = u_1^2 - 2f_1x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{u_1^2}{2f_1}$ এবং $0^2 = u_2^2 - 2f_2x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{u_2^2}{2f_2}$

(i) সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $x_1 + x_2 \le x \Rightarrow \frac{u_1^2}{f_1} + \frac{u_2^2}{f_2} \le 2x \therefore u_1^2f_2 + u_2^2f_1 \le 2f_1f_2x$ হয়।

(ii) কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি, $x_1 + x_2 = x \Rightarrow \frac{u_1^2}{f_1} + \frac{u_2^2}{f_2} = 2x \therefore u_1^2f_2 + u_2^2f_1 = 2f_1f_2x$ হয়।

Type-10: বুলেটের তক্তা ভেদ সংক্রান্ত

Concept

ধরা হয়, ভেদ করার সময় সুষম মন্দনে বুলেটের বেগ হ্রাসপ্রাপ্ত হয়।

প্রধান সূত্রঃ $v^2 = u^2 + 2fs$ $[f < 0]$		
একটি বুলেট-	**আরও অতিক্রম করবে**	**মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব**
(i) s দূরত্ব অতিক্রম করার পর যদি বেগের $\frac{1}{n}$ অংশ হারায়	(i) $x = \frac{s(n-1)^2}{2n-1}$	(i) $x_t = \frac{s(n-1)^2}{2n-1} + s$
(ii) একটি তক্তা ভেদ করার পর যদি বেগের $\frac{1}{n}$ অংশ হারায়	(ii) $N = \frac{(n-1)^2}{2n-1} \approx \frac{n}{2} - 1$	(ii) $N_t = \frac{(n-1)^2}{2n-1} + 1 \approx \frac{n}{2}$
(i) s দূরত্ব অতিক্রম করার পর যদি বেগ আদিবেগের $\frac{1}{n}$ অংশ হয়	(i) $x = \frac{s}{n^2-1}$	(i) $x_t = \frac{s}{n^2-1} + s$
(ii) একটি তক্তা ভেদ করার পর যদি বেগ আদিবেগের $\frac{1}{n}$ অংশ হয়	(ii) $N = \frac{1}{n^2-1}$	(ii) $N_t = \frac{1}{n^2-1} + 1$
(i) নির্দিষ্ট পুরুত্বের একটি তক্তা ভেদ করতে পারলে, এর বেগ n গুণ করা হলে পূর্বের n^2 গুণ তক্তা ভেদ করতে পারবে। [অর্থাৎ, নির্দিষ্ট পুরুত্বের a সংখ্যক তক্তা ভেদ করতে পারলে, এর বেগ n গুণ করা হলে n^2a টি তক্তা ভেদ করতে পারবে।] (ii) বিপরীতক্রমে, ঐ পুরুত্বের m সংখ্যক তক্তা ভেদ করতে হলে বেগ $\sqrt{m}$ গুণ করতে হবে। [অর্থাৎ, a সংখ্যক তক্তা ভেদ করতে পারলে, ma সংখ্যক তক্তা ভেদ করাতে হলে বেগ $\sqrt{m}$ গুণ করতে হবে।]		

Problems

Example-31. একটি বুলেট একটি দেয়ালের ভিতরে 5" প্রবেশ করার পর তার বেগ আদিবেগের $\frac{3}{20}$ অংশ হয়। বুলেটটি থামার পূর্বে আর কতটুকু প্রবেশ করবে? বুলেটটি দেয়ালের ভিতরে মোট কতটুকু দূরত্ব প্রবেশ করবে?

Sol^n: Process-1:

অবশিষ্ট বেগের অংশ $= \frac{3}{20} = \frac{1}{\frac{20}{3}}$ $[n = \frac{20}{3}]$ $\therefore$ আর অতিক্রম করবে, $x = \frac{s}{n^2-1} = \frac{5}{\left(\frac{20}{3}\right)^2 - 1} = 0.115"$ **(Ans.)**

$\therefore$ মোট অতিক্রম করবে, $x_t = 5 + 0.115 = 5.115"$ **(Ans.)**

Process-2: বেগের হারানো অংশ $= 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20} = \frac{1}{\frac{20}{17}}$ $\left[n = \frac{20}{17}\right]$

$\therefore$ আর অতিক্রম করবে, $x = \frac{(n-1)^2}{2n-1}s = \frac{\left(\frac{20}{17} - 1\right)^2}{2\times\frac{20}{17} - 1} \times 5 = 0.115"$ **(Ans.)**

$\therefore$ মোট অতিক্রম করবে, $x_t = 5 + 0.115 = 5.115"$ **(Ans.)**

৫০

Example-32. একটি বুলেট কোন দেয়ালের ভিতরে 2 ইঞ্চি ঢুকবার পর এর অর্ধেক বেগ হারায়। বুলেটটির বেগ শূন্য হবার পূর্বে বুলেটটি দেয়ালের ভিতরে আর কতদূর ঢুকবে? বুলেটটি থেমে যাবার পূর্বে মোট কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? **[DU' 09-10]**

Solⁿ: $x = \frac{s(n-1)^2}{2n-1} = \frac{2(2-1)^2}{2.2-1} = \frac{2}{3}$ inch ; মোট দূরত্ব অতিক্রম করবে $= 2 + \frac{2}{3} = 2.667$ inch **(Ans.)**

Example-33. একটি তীর একটি মাটির দেয়ালের ভিতরে 3 ইঞ্চি ঢুকবার পর তার অর্ধেক বেগ হারায়। তীরটির বেগ শূন্য হওয়ার পূর্বে দেয়ালের ভিতরে তীরটি আর কত ইঞ্চি ঢুকবে? **[RU'17-18]**

Solⁿ: দেয়ালের ভিতরে 3 ইঞ্চি ঢুকবার পর বুলেটের বেগের অবশিষ্ট অংশ $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

তীরটি s পরিমাণ ঢুকবার পর এর বেগ $\frac{1}{n}$ অংশ হলে তীরটি আরও ঢুকবে, $x = \frac{s}{n^2-1} = \frac{3}{2^2-1} = 1$ ইঞ্চি **(Ans.)**

Example-34. v বেগ সম্পন্ন একটি বুলেট 5 cm পুরুত্বের একটি তক্তা ভেদ করতে পারে। বুলেটটির বেগ 3v করা হলে বুলেটটি অনুরূপ মোট কয়টি তক্তা ভেদ করতে পারবে?

Solⁿ: এখানে, $n = 3$ ∴ বুলেটটির বেগ 3 গুণ করলে বুলেটটি মোট তক্তা ভেদ করবে $= 3^2 = 9$ টি। **(Ans.)**

Example-35. $20\ cms^{-1}$ বেগ সম্পন্ন একটি বুলেট 10 cm পুরুত্বের একটি তক্তা ভেদ করতে পারে। বুলেটটির বেগ $80\ cms^{-1}$ হলে বুলেটটি অনুরূপ কয়টি তক্তা ভেদ করতে পারবে?

Solⁿ: বেগের বৃদ্ধি $= \frac{80}{20} = 4$ গুণ ∴ এরূপ তক্তা ভেদ করবে $= 4^2 \times 1 = 16$ টি **(Ans.)**

Example-36. $40\ cms^{-1}$ বেগ সম্পন্ন একটি বুলেট 5 cm পুরুত্বের তিনটি তক্তা ভেদ করতে পারে। বুলেটটির বেগ $200\ cms^{-1}$ করা হলে, অনুরূপ কয়টি তক্তা ভেদ করতে পারবে?

Solⁿ: বেগের বৃদ্ধি $= \frac{200}{40} = 5$ গুণ ∴ এরূপ তক্তা ভেদ করবে $= 5^2 \times 3 = 75$ টি **(Ans.)**

Example-37. $20\ cms^{-1}$ বেগ সম্পন্ন একটি বুলেট 10 cm পুরুত্বের একটি তক্তা ভেদ করতে পারে। এরূপ 9 টি তক্তা ভেদ করতে হলে বুলেটটির বেগ কত হতে হবে?

Solⁿ: তক্তার সংখ্যা বৃদ্ধি $= \frac{9}{1} = 9 = m$ গুণ, বুলেটের বেগ হতে হবে $= \sqrt{m} \times v = \sqrt{9} \times 20 = 60\ cms^{-1}$ **(Ans.)**

Example-38. $40\ cms^{-1}$ বেগ সম্পন্ন একটি বুলেট 5 cm পুরুত্বের তিনটি তক্তা ভেদ করতে পারে। এরূপ 12 টি তক্তা ভেদ করতে হলে বুলেটের বেগ কত হতে হবে?

Solⁿ: তক্তার সংখ্যা বৃদ্ধি $= \frac{12}{3} = 4 = m$ গুণ

∴ বুলেটের বেগ হতে হবে $= \sqrt{m} \times v = \sqrt{4} \times 40 = 80\ cms^{-1}$ **(Ans.)**

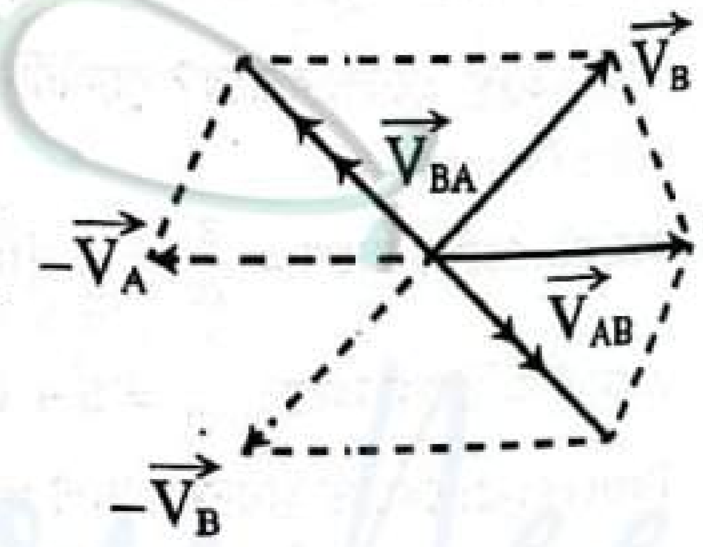
Type-11: আপেক্ষিক বেগ সংক্রান্ত

Concept

(i) একই দিকে গেলে আপেক্ষিক বেগ হবে তাদের বেগের অন্তরফল।

(ii) বিপরীত দিকে গেলে আপেক্ষিক বেগ হবে তাদের বেগের যোগফল।

(iii) আপেক্ষিক বেগ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে যার সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করতে হবে তার বিপরীত বেগ নিয়ে অপর বেগের সাথে সামান্তরিক গঠন করলে সামান্তরিকের বেগদ্বয়ের ক্রিয়া বিন্দুগামী কর্ণই আপেক্ষিক বেগের মান ও দিক নির্দেশ করে।



B এর সাপেক্ষে A এর বেগ, $\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$

A এর সাপেক্ষে B এর বেগ, $\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

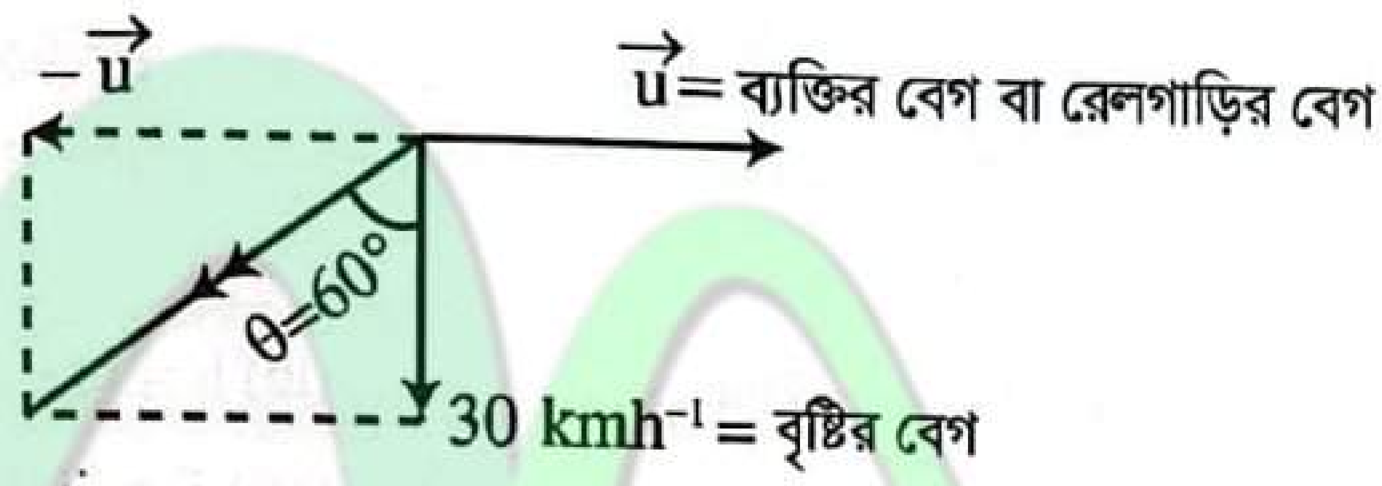
আবার, $\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{AB}$ এবং $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$

অর্থাৎ, কোন একটি বস্তুর বেগ এবং বস্তুটির সাপেক্ষে দ্বিতীয় কোন বস্তুর বেগের লব্ধি দ্বিতীয় বস্তুটির বেগের সমান।

Problems

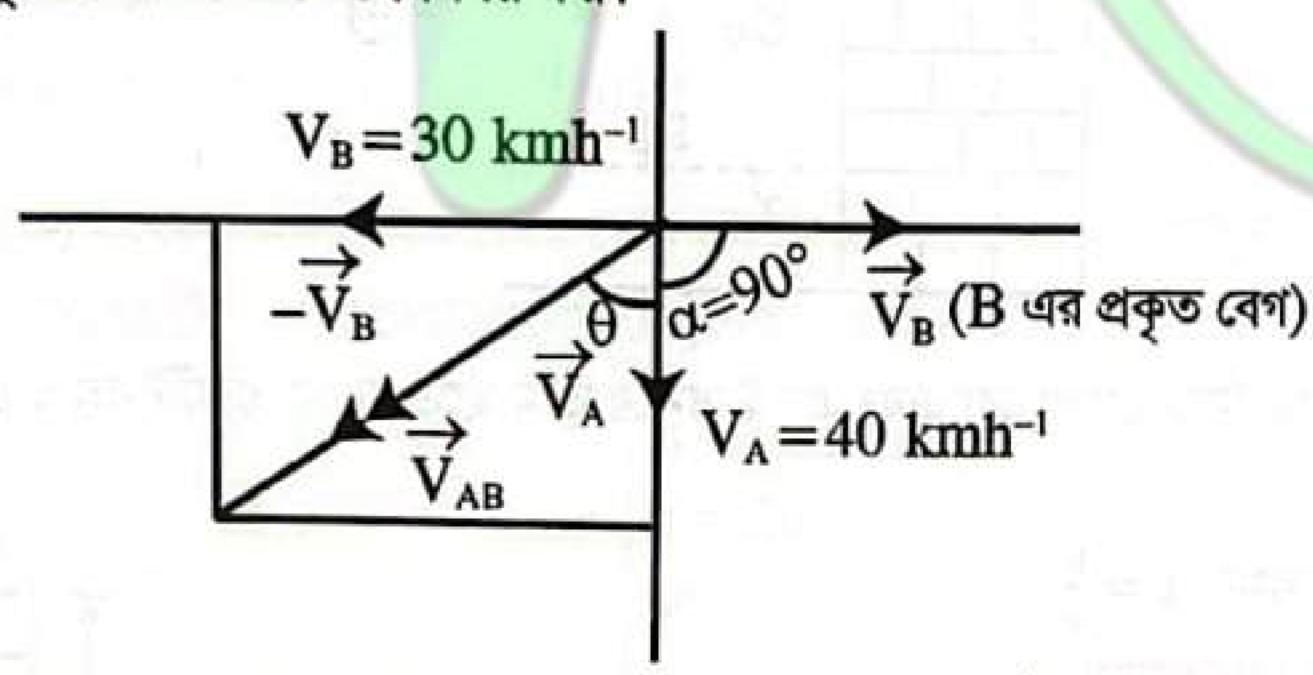
Example-39. বৃষ্টি $30\ ms^{-1}$ বেগে খাড়াভাবে পড়ছে। একজন রেলগাড়ির যাত্রীর কাছে তা খাড়ারেখার সাথে $60°$ কোণে পড়ছে বলে মনে হয়। রেলগাড়ির বেগ নির্ণয় কর।

Sol^n:



$\tan\theta = \frac{\text{ব্যক্তির বেগ বা রেলগাড়ির বেগ}}{\text{বৃষ্টির বেগ}} \Rightarrow \tan 60° = \frac{u}{30} \Rightarrow u = 30\sqrt{3}\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

Example-40: A ও B দুইটি বাস পরস্পর সমকোণে আনত দুইটি রাস্তা বরাবর যথাক্রমে $40\ kmh^{-1}$ ও $30\ kmh^{-1}$ বেগে চলছে। B বাসের যাত্রীদের ধারণা অনুসারে A বাসের বেগ নির্ণয় কর।



Sol^n: A বাসের বেগ, $V_A = 40\ kmh^{-1}$; B বাসের বেগ, $V_B = 30\ kmh^{-1}$ এবং বেগদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, $\alpha = 90°$

B বাসের যাত্রীদের সাপেক্ষে A আপেক্ষিক বাসের বেগ $V_{AB}\ kmh^{-1}$, যা V_A এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করেছে।

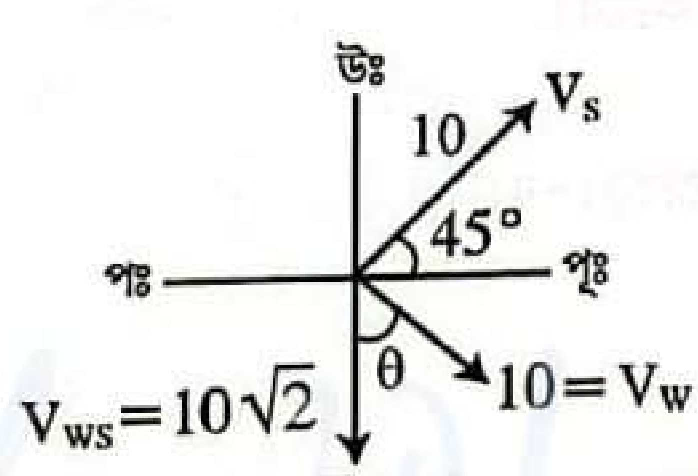
$V_{AB} = \sqrt{V_A^2 + V_B^2 - 2V_AV_B\cos\alpha} = \sqrt{40^2 + 30^2 - 2\times 40\times 30\cos 90°}$

$= \sqrt{40^2+30^2} = 50\ kmh^{-1}$ এবং $\tan\theta = \frac{V_B\sin 90°}{V_A - V_B\cos 90°} = \frac{30}{40} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$ **(Ans.)**

$\therefore$ B বাসের যাত্রীদের ধারণা অনুসারে A বাসের বেগ $50\ kmh^{-1}$ যা A বাসের প্রকৃত বেগের সাথে $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে। **(Ans.)**

Example-41. উত্তর-পূর্ব দিকে $10\ kmh^{-1}$ বেগে অগ্রসরমান একটি জাহাজের যাত্রীর কাছে মনে হয় যে বাতাস উত্তর দিকে থেকে $10\sqrt{2}\ kmh^{-1}$ বেগে প্রবাহিত হচ্ছে। বাতাসের সঠিক গতিবেগ এবং দিক কোনটি? **[RU'11-12]**

Sol^n:



$\vec{V}_W = \vec{V}_S + \vec{V}_{WS}$

বাতাসের বেগ, $v_w = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 + 10^2 + 2\times 10\times 10\sqrt{2}\times\cos 135°} = 10\ kmh^{-1}$

$\tan\theta = \frac{10\sin 135°}{10\sqrt{2}+10\cos 135°} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 \therefore \theta = 45° \therefore$ দক্ষিণ পূর্ব দিকে বাতাস প্রবাহিত হচ্ছে $10\ kmh^{-1}$ বেগে। **(Ans.)**

Type-12: উল্লম্ব গতি সংক্রান্ত

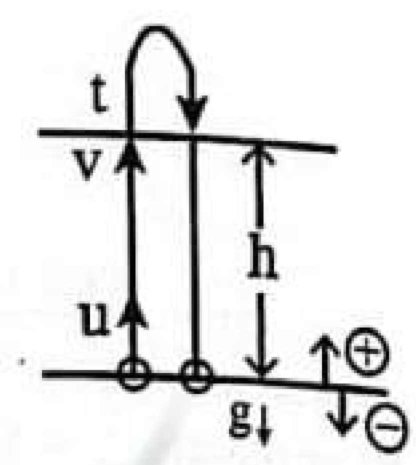
Concept

গতির আদিবিন্দু বা নিক্ষেপণ বিন্দুকে অক্ষ ব্যবস্থার মূল বিন্দু ধরে যে সকল রাশির দিক উপরের দিকে (y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে) তাদেরকে Positive ও যেসকল রাশির দিক নিচের দিকে (y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে) তাদেরকে negative ধরে গতির সূত্রে বসাতে হবে (অথবা প্রয়োজনে বিপরীত চিহ্ন ধরা যেতে পারে)।

- উর্ধ্বে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে: $\uparrow (+)$ [উপরের দিক +ve]

(i) $v = u - gt$ (ii) $v^2 = u^2 - 2gh$ (iii) $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$

(iv) $h = \frac{u+v}{2} \times t$ (v) $h_m = \frac{u^2}{2g}$ (vi) $t_m = \frac{u}{g}$ (vii) $T = \frac{2u}{g}$



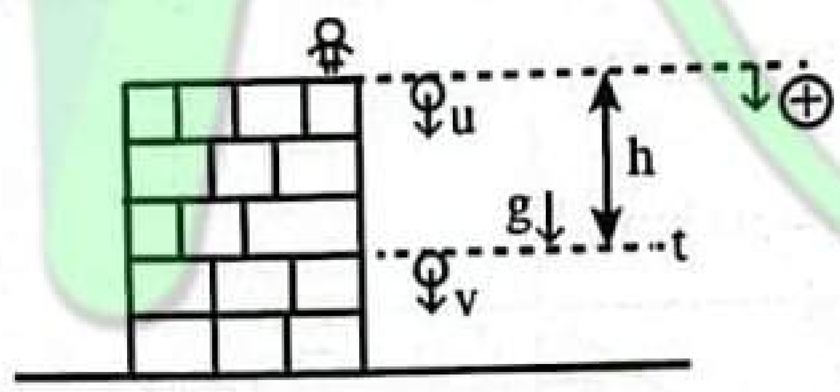
- মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে: $\downarrow (+)$ [নিচের দিক +ve]

(i) $v = u + gt$

(ii) $v^2 = u^2 + 2gh$

(iii) $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$

(iv) $h = \frac{u+v}{2} \times t$



❖ **Shortcut:**

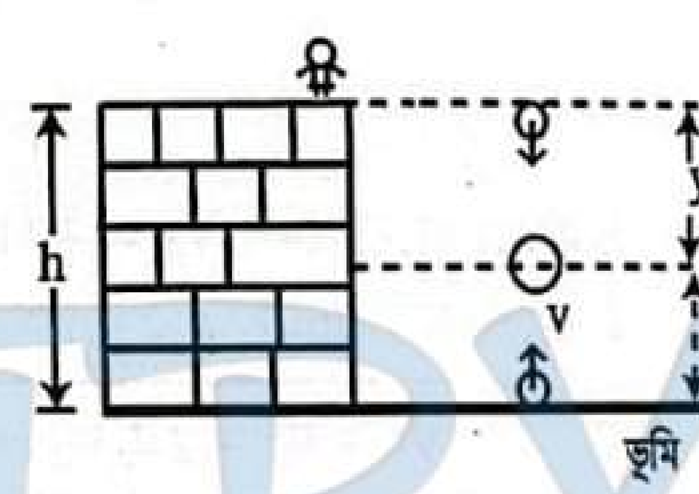
➤ h উচ্চতা হতে একটি বস্তু নিচে ফেলা হল এবং একই সময়ে ভূমি হতে অপর একটি বস্তু v বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো-

(a) বস্তুদ্বয়ের মিলিত হবার সময়, $t = \frac{h}{v}$

(b) যে উচ্চতায় মিলিত হবে তার মান-

(i) h উচ্চতা হতে $y_1 = \frac{1}{2}g\left(\frac{h}{v}\right)^2$

(ii) ভূমি হতে $y_2 = h - y_1 = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{h}{v}\right)^2$

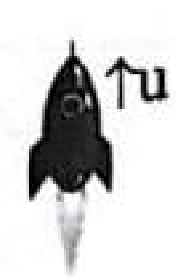


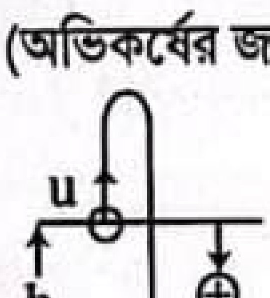
➤ ভূমি হতে একটি বস্তুকে u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো এবং ভূমির উপর h উচ্চতা হতে অপর একটি বস্তু v বেগে ছেড়ে দেয়া হলো। এরা t সময় পরে মিলিত হলে, $t = \frac{h}{u+v}$

➤ মোট বিচরণকাল, $T = \frac{2u}{g}$ [u = নিক্ষেপণ বেগ]

সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2}{2g}$ [সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠতে সময়, $t_{max} = \frac{u}{g}$]

➤ চিন্তা করো, সমবেগে (u বেগে) উর্ধ্বগামী রকেট থেকে যদি কোন বস্তু ছেড়ে দেওয়া হয় তাহলে সেই বস্তুটিরও u বেগ থাকবে। এই u বেগের জন্য বস্তুটি কিছু সময় উপরে যাবে এবং এর পর তার বেগ এক সময় শূন্য হবে (অভিকর্ষের জন্য) এর পর বস্তুটি নিচে পড়া শুরু করবে।





যেখান থেকে রকেটটি বস্তুটিকে ছেড়ে দেয়।

এখানে নিচের দিককে ধনাত্মক চিন্তা করলে,

এখন, যখন বস্তুটি মাটিতে আঘাত করে তখন রকেটের উচ্চতা হলো $= h + ut$

[h উচ্চতা থেকে বস্তুটি ছাড়া হয় এবং t সময়ে রকেট সমবেগে ut দূরত্ব অতিক্রম করে]

অর্থাৎ, $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2 \therefore h + ut = \frac{1}{2}gt^2$

$\boxed{\therefore \text{ বস্তুটি ভূমিতে আঘাত করার মুহূর্তে রকেটের উচ্চতা } = \frac{1}{2}gt^2}$

$h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$
বস্তুটির নিট সরণ
(বস্তুটিকে যে উচ্চতা হতে ফেলা হয়েছিল।)

Problems

Example-42. 64 মিটার উঁচু দালানের ছাদ থেকে একটি পাথর ছেড়ে দিলে ভূমিতে পড়তে কত সময় লাগবে? **[KU'19-20]**

Solⁿ: $\frac{1}{2}gt^2 = 64 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 = 64 \therefore t = 3.61$ s

Example-43. একটি বস্তুকে উল্লম্বদিকে 2u আদিবেগে ছোড়া হলো। বস্তুটির অতিক্রান্ত সর্বোচ্চ উচ্চতা- **[DU'20-21]**

Solⁿ: $0^2 = (2u)^2 - 2gH \Rightarrow H = \frac{4u^2}{2g} = \frac{2u^2}{g}$

Example-44: সমবেগে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি উড়োজাহাজ হতে একটি বোমা ছেড়ে দেওয়ার 5 সে. পর তা মাটিতে পড়ে। বোমাটি যখন মাটিতে পড়ে তখন উড়োজাহাজের ভূমি হতে উচ্চতা নির্ণয় কর।

Solⁿ: $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h + ut = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times g \times (5)^2 = 122.5$ m **(Ans.)**

Example-45. 10 ms^{-1} বেগে উর্ধ্বগামী কোন বেলুন হতে একটি পাথরের টুকরো ফেলে দেওয়ার 10 sec পর তা মাটিতে পড়ে। পাথরটি ফেলে দেওয়ার সময় বেলুনের উচ্চতা কত ছিল? **[RU'19-20]**

Solⁿ: $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2 = -10 \times 10 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times (10)^2 = 390$ m **(Ans.)**

Example-46: উর্ধ্বগামী একটি বেলুন থেকে একটি বস্তু ছেড়ে দেয়া হল। বস্তুটি ছাড়ার সময় বেলুনটি ভূমি হতে 1764 m উপরে ছিল। বস্তুটি 20 s এ ভূমিতে পৌছাঁয়। বস্তুটি ফেলে দেয়ার সময় বেলুনের বেগ কত ছিল?

Solⁿ: $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 1764 = -20u + \frac{1}{2}g \times (20)^2$

$\therefore u = 9.8\ ms^{-1}$

$h = 1764$ m
$t = 20$ s
$u = ?$

Example-47: একটি বস্তু ছাদ হতে মুক্তভাবে 4 সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হয়। শেষ 2 সেকেন্ডে বস্তুটি কত দূরত্ব অতিক্রম করল? **[JnU'16-17, CU'20-21]**

Solⁿ: প্রথম 2s পর বেগ, $v = g \times 2 = 2g$; শেষ 2 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$= v \times 2 + \frac{1}{2} \times g \times 2^2 = 2 \times 2g + 2g = 6g = (6 \times 32) = 192$ ফুট।

Example-48. কোন স্তম্ভের শীর্ষ হতে 19.5 ms^{-1} বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত কোনো কণা 5 সেকেন্ড পরে স্তম্ভের পাদদেশে পতিত হলে স্তম্ভের উচ্চতা- **[DU'11-12, 10-11, 07-08, 06-07, 05-06, RU'14-15, 11-12]**

Solⁿ: $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2 = -19.5 \times 5 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 5^2 = 25$ m **(Ans.)**

Example-49. একটি পাথরকে 25 ms^{-1} বেগে সোজা উপরের দিকে ছুঁড়ে দেয়া হলে- [ধরি $g = 10\ ms^{-2}$]

(i) সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠতে তার কত সময় লাগবে?

(ii) পাথর সর্বোচ্চ কত উচ্চতায় উঠবে?

(iii) পাথরটি কী বেগে ভূমিতে আঘাত করবে?

(iv) পাথরের বিচরণকাল কত?

Solⁿ: $u = 25\ ms^{-1}, g = 10\ ms^{-2}$

(i) $t = \frac{u}{g} = \frac{25}{10} = 2.5$ s **(Ans.)**

(ii) $H = \frac{u^2}{2g} = \frac{25^2}{2 \times 10} = 31.25$ m **(Ans.)**

(iii) নিক্ষেপণ বেগ = পতন বেগ $\therefore v = 25\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

(iv) $T = \frac{2u}{g} = \frac{2 \times 25}{10} = 5$ s **(Ans.)**

Example-50. 100 মিটার উঁচুতে অবস্থিত কোন বিন্দু হতে একটি বস্তু নিচে ছেড়ে দেয়া হল। একই সময়ে ভূমি থেকে অন্য একটি বস্তুকে 25 ms^{-1} বেগে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হলে, কখন এবং কোথায় তারা মিলিত হবে? [$g = 10\ ms^{-2}$]

Sol^n: মিলিত হবার সময়, $t = \frac{100}{25} = 4$ sec পরে। ভূমি হতে মিলিত হবার উচ্চতা $= 25 \times 4 - \frac{1}{2} \times 10 \times 4^2 = 20$ m **(Ans.)**

Example-51. একটি খাড়া টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু থেকে একটি কণা নিচে ছেড়ে দেয়া হল। কণাটি এর শেষতম সেকেন্ডে টাওয়ারের উচ্চতার $\frac{8}{9}$ অংশ অতিক্রম করে। টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, টাওয়ারের উচ্চতা h মিটার এবং কণাটি t সেকেন্ডে h মিটার অতিক্রম করে।

$\therefore h = 0 + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$ ……… (i)

প্রশ্নমতে, শেষতম অর্থাৎ t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $\frac{8}{9}h = 0 + \frac{1}{2}g(2t-1)$

$\Rightarrow \frac{8}{9} \times \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(2t-1) \Rightarrow \frac{8}{9}t^2 = 2t - 1 \Rightarrow 8t^2 - 18t + 9 = 0 \Rightarrow 8t^2 - 12t - 6t + 9 = 0$

$\Rightarrow 4t(2t-3) - 3(2t-3) = 0 \Rightarrow (2t-3)(4t-3) = 0 \therefore t = \frac{3}{2}$ [$\because t > 1, 4t - 3 \neq 0$]

$\therefore$ টাওয়ারের উচ্চতা, $h = \frac{1}{2} \times 9.8 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 11.025$ মিটার। **(Ans.)**

Type-13: শব্দ শোনার সময় হিসেব করে গভীরতা নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

এক্ষেত্রে গতিবিদ্যার মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর সূত্র, $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$

$v = u + gt$ ইত্যাদি ব্যবহার করতে হবে [পড়ন্ত বস্তুটির জন্য]

$u =$ আদিবেগ, $v =$ শেষবেগ, $g =$ অভিকর্ষজ ত্বরণ

শব্দের জন্য:

$h = v_s t$ ব্যবহার করতে হবে। [শব্দ সমবেগে চলে]

$v_s =$ শব্দের বেগ

কূপে মুক্তভাবে পতনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে বায়ুর বাধা অগ্রাহ্য করে: একটি পাথর কুয়ার ভিতর ফেলার t সময় পরে পানিতে এর পতনের শব্দ শোনা গেলো। শব্দের বেগ v এবং কুয়ার গভীরতা h হলে, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}$

Problems

Example-52. বিল্ডিং এর ছাদের উপর থেকে একটি পাথর ফেলা হলো এবং 3.5 সেকেন্ড পরে পাথরটি ভূমিতে পড়ার শব্দ শোনা গেল। বিল্ডিংটির উচ্চতা কত? [g = 9.81 মি./সে^{2}, শব্দের বেগ 327 মি./সে.]। **[KU'13-14]**

Sol^n: মনে করি, বিল্ডিং এর উচ্চতা = h ; ভূমিতে পড়তে সময় $= \sqrt{\frac{2h}{g}}$, শব্দ যাওয়ার সময় $= \frac{h}{327}$

$\therefore \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{327} = 3.5$ সমাধান করে পাই, h = 54.5 m **(Ans.)**

Example-53. একটি শূন্য কুয়ার মধ্যে অবাধে পড়ন্ত একখণ্ড পাথর 19.6 ms^{-1} গতিবেগে এর তলদেশে পতিত হলো। পাথর ফেলার $2\frac{2}{35}$ সেকেন্ড পর এর পতনের শব্দ শোনা গেলে শব্দের গতিবেগ এবং কুয়ার গভীরতা নির্ণয় কর। **[RU' 17-18]**

Sol^n: মনে করি, কূপের গভীরতা h মি. এবং পাথর খণ্ডটি কূপের তলদেশে পৌঁছে t সেকেন্ডে।

তাহলে তলদেশে সৃষ্ট পতন শব্দ $\left(2\frac{2}{35} - t\right) = \left(\frac{72}{35} - t\right)$ সেকেন্ডে কূপের উপরে আসে।

পাথর পতনের ক্ষেত্রে: $v^2 = u^2 + 2gh$ সূত্র হতে পাই, $(19.6)^2 = 0 + 2 \times 9.8h \Rightarrow h = 19.6$ m **(Ans.)**

$v = u + gt$ সূত্র হতে পাই, $19.6 = 0 + 9.8t \Rightarrow t = 2$ sec.

শব্দের বেগ v মি./সে. হলে, $h = v\left(\frac{72}{35} - t\right) \Rightarrow 19.6 = v\left(\frac{72}{35} - 2\right) = \frac{2}{35}v \Rightarrow v = 343\ ms^{-1}$

$\therefore$ শব্দের গতিবেগ 343 মি./সে.। **(Ans.)**

Type-14: প্রাস সংক্রান্ত

Concept

α কোণে ভূমি থেকে u বেগে নিক্ষিপ্ত প্রাসের ক্ষেত্রে,

গতিসূত্র:

(i) $v_x = u_x = u\cos\alpha$

(ii) $v_y = u_y - gt = u\sin\alpha - gt$

(iii) $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$; $\theta_v = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x}$

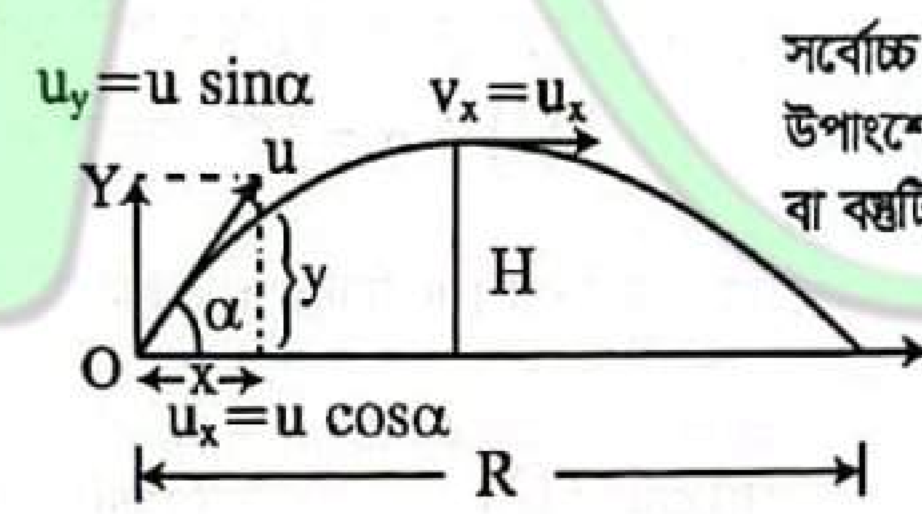
(iv) $x = u_x t = u\cos\alpha\, t$

(v) $y = u_y t - \frac{1}{2}gt^2 = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$

(vi) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\theta_r = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

চলরেখের সমীকরণ:

$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$



সর্বোচ্চ উচ্চতায় বেগের উলম্ব উপাংশের মান $v_y = u\sin\alpha - gt = 0$ বা বস্তুটি আনুভূমিকভাবে যায়।

সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠতে সময়, $t_{max} = \frac{u\sin\alpha}{g}$

বিচরণকাল, $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$;

আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$; $\tan\alpha = \frac{4H}{R}$

সর্বোচ্চ আনুভূমিক পাল্লা, $R_{max} = \frac{u^2}{g}$ [যখন $\alpha = 45°$]

এখন, $R = \frac{u^2}{g}\sin 2\alpha \therefore \boxed{R = R_{max}\sin 2\alpha}$

❖ **Shortcut:**

➢ α কোণে u আদি বেগে নিক্ষিপ্ত কোনো কণা t সময় পর কণাটির আদি বেগ u এর দিকের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করলে, $t = \frac{u}{g\sin\alpha}$

➢ কোন বস্তুকে একই আদিবেগে α এবং $\frac{\pi}{2} - \alpha$ কোণে নিক্ষেপ করলে তারা একই আনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রম করে।

Problems

Example-54. একটি বস্তু $15\ ms^{-1}$ বেগে আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে নিক্ষিপ্ত হলে, বস্তুটির ভ্রমণকাল কত? **[RU'20-21]**

Solⁿ: $T = \frac{2u\sin 30°}{g} = \frac{2\times15\times\frac{1}{2}}{9.8} = 1.53$ **(Ans.)**

Example-55. একটি বস্তুকে $40\ ms^{-1}$ বেগে আনুভূমিকের সাথে 60° কোণে নিক্ষেপ করা হলে– [ধরি, $g = 10\ ms^{-2}$]

(i) সর্বাধিক উচ্চতা (ii) সর্বাধিক উচ্চতায় উঠতে সময় (iii) আনুভূমিক পাল্লা (iv) ভূমিকে আঘাত করার সময় নির্ণয় করো।

Solⁿ: (i) $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{40^2\sin^2 60°}{2\times10} = 60\ m$ **(Ans.)**

(ii) $t_{max} = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{40\sin 60°}{10} = 2\sqrt{3}\ s$ **(Ans.)**

(iii) $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{(40)^2\sin 120°}{10} = 80\sqrt{3}\ m$ **(Ans.)**

(iv) $T = 2t_{max} = 2\times2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\ s$ **(Ans.)**

Example-56. একটি ক্রিকেট বলকে $40\ ms^{-1}$ বেগে এবং ভূমির সাথে $60°$ কোণে ব্যাট দ্বারা আঘাত করলে সর্বোচ্চ উচ্চতায় বলটির বেগ কত? **[JU'19-20]**

Sol^n: সর্বোচ্চ উচ্চতায় উল্লম্ব বেগ শূন্য $\therefore v = (40\cos 60°)\ ms^{-1} = 20\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

Example-57. $32\ fts^{-1}$ আদিবেগে এবং ভূমির সাথে $15°$ কোণে একটি বস্তুকে নিক্ষেপ করা হলো। উহার আনুভূমিক পাল্লা কত হবে? **[JnU'17-18]**

Sol^n: আমরা জানি, f.p.s পদ্ধতিতে, $g = 32\ fts^{-2}$ $\therefore R = \frac{u^2}{g}\sin 2\theta = \frac{32^2}{32}\times \sin(2\times 15°) = 32\times\frac{1}{2} = 16\ ft$ **(Ans.)**

Example-58. শূন্যে নিক্ষিপ্ত একটি পাথর খণ্ডের সর্বাধিক পাল্লার মান 40 মিটার। পাথরের সর্বাধিক উচ্চতা কত মিটার? **[RU'22-23]**

(a) 20.1 (b) 20 (c) 21 (d) 21.5

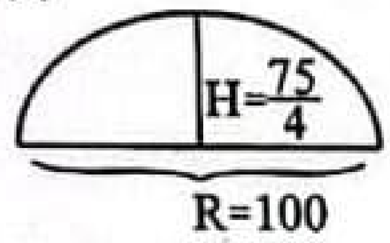
Sol^n: (b); $R_{max} = \frac{u^2}{g} = 40$ এবং $H_{max} = \frac{u^2}{2g}[\alpha = 90°] = \frac{1}{2}\times\frac{u^2}{g} = \frac{1}{2}\times 40 = 20\ m$

Example-59. কোন নিক্ষিপ্ত বস্তুর আনুভূমিক পাল্লা বৃহত্তম পাল্লার অর্ধেক হলে, নিক্ষেপণ কোণ কত? **[RU'17-18]**

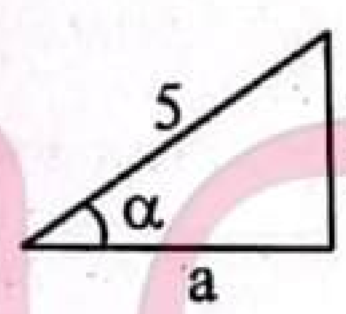
Sol^n: $\frac{R}{R_{max}} = \sin 2\alpha \Rightarrow 2\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ $\therefore \alpha = 15°$ আবার, $\alpha = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$ **(Ans.)**

Example-60. ভূমি থেকে শূন্যে নিক্ষিপ্ত একটি বল 100 মিটার দূরে ভূমিতে ফিরে আসে। সেটার বিচরণপথের সর্বাধিক উচ্চতা $\frac{75}{4}$ মিটার হলে নিক্ষেপণ কোণ কত? **[GST'22-23]**

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ (c) $\sin^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$ (d) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

Sol^n: (b); 

$\therefore \tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{4\times\frac{75}{4}}{100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$



$\therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4} = \sin^{-1}\frac{3}{5} = \cos^{-1}\frac{4}{5}$ $\therefore$ অপশন অনুযায়ী উত্তর: $\cos^{-1}\frac{4}{5}$

Example-61. যদি H সর্বোচ্চ উচ্চতা এবং R আনুভূমিক পাল্লা হয়, তবে একটি বস্তুকে ভূমির সাথে $30°$ কোণে নিক্ষেপ করা হলে নিচের কোনটি সঠিক? **[DU'22-23]**

(a) $R = \sqrt{3}H$ (b) $R = 4H$ (c) $R = 4\sqrt{3}H$ (d) $R = 3\sqrt{2}H$

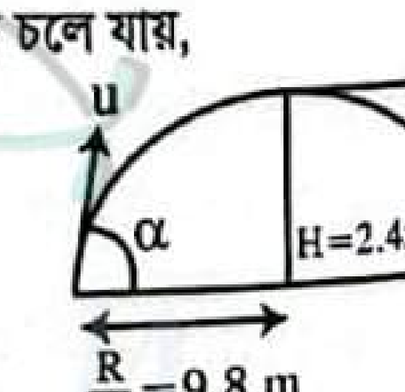
Sol^n: (c); $\tan\alpha = \frac{4H}{R} \Rightarrow \tan 30° = \frac{4H}{R} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4H}{R}$ $\therefore R = 4\sqrt{3}H$

Example-62: একটি গোলা 9.8 মি. দূরে অবস্থিত 2.45 মি. উচ্চ একটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে আনুভূমিকভাবে চলে যায়। গোলার প্রক্ষেপণ বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, গোলার প্রক্ষেপণ বেগ u মি./সে. এবং প্রক্ষেপণ কোণ α.

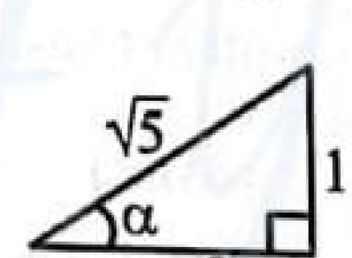
যেহেতু গোলা 9.8 মি. দূরে অবস্থিত 2.45 মি. উচ্চ একটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে আনুভূমিকভাবে চলে যায়,

সেহেতু বৃহত্তম উচ্চতা, $H = 2.45\ m$ এবং অর্ধ আনুভূমিক পাল্লা $\frac{R}{2} = 9.8 \Rightarrow R = 19.6\ m$



H এবং R এর সম্পর্ক হতে পাই, $\tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{4\times 2.45}{19.6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

পাশের ত্রিভুজ চিত্র হতে পাই, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$



এখন, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow 2.45 = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{u^2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{2\times 9.8}$

$\Rightarrow u^2 = 2.45\times 2\times 9.8\times 5 \Rightarrow u = 15.495$ (প্রায়)

$\therefore$ গোলাটির প্রক্ষেপণ বেগের মান 15.495 মি./সে. (প্রায়) এবং প্রক্ষেপণ কোণ $\tan^{-1}\frac{1}{2}$। **(Ans.)**

Example-63. (a) আনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণে ভূপৃষ্ঠ থেকে $40\ ms^{-1}$ বেগে একটি বুলেট ছোঁড়া হলো। বুলেটটি $30\ m$ দূরে অবস্থিত একটি দেয়ালকে কত উচ্চতায় আঘাত করবে?

(b) একটি বস্তুকে $40\ ms^{-1}$ বেগে এবং $45°$ নিক্ষেপণ কোণে শূন্যে নিক্ষেপ করা হলো। কখন বস্তুটির বেগের অভিমুখ আনুভূমিক হবে?

Solⁿ: (a); $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{gx}{u^2\sin 2\alpha}\right) = 30\tan 30°\left(1 - \frac{9.8\times30}{40^2\sin(2\times30°)}\right) = 13.64\ m$ **(Ans.)**

Solⁿ: (b); সর্বোচ্চ উচ্চতায় বেগের অভিমুখ আনুভূমিক হয় সেক্ষেত্রে সময়, $t_{max} = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{40\sin 45°}{10} = 2\sqrt{2}$ sec. **(Ans.)**

Example-64. প্রদত্ত R পাল্লার ক্ষেত্রে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর দুইটি গমন পথের সর্বাধিক উচ্চতা h ও h′ হলে, দেখাও যে, $R = 4\sqrt{hh'}$

Solⁿ: ধরি, বস্তুটির বেগ v ও তাদের α ও α′[α ≠ α′] কোণে প্রক্ষিপ্ত করা হয়। **[KU'14-15]**

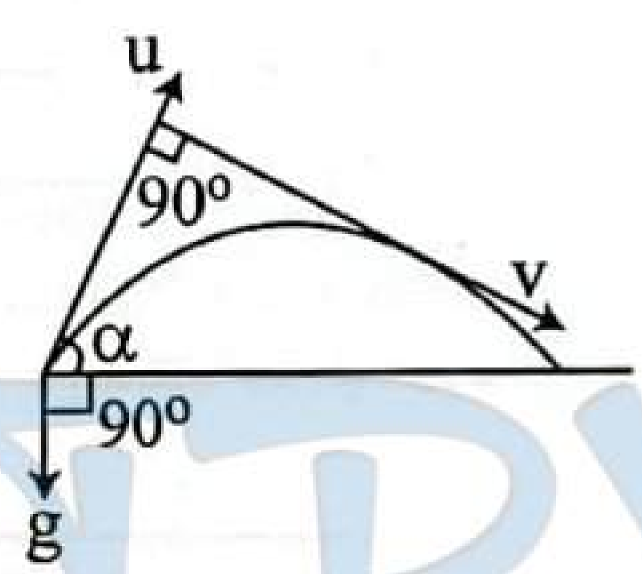
$\therefore R = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha'}{g} \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin 2\alpha'$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = \sin\{2(90° - \alpha')\} \Rightarrow 2\alpha = 2(90° - \alpha') \Rightarrow \alpha' = 90° - \alpha$

$\therefore h = \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g} \therefore h' = \frac{v^2\sin^2(90°-\alpha)}{2g} = \frac{v^2\cos^2\alpha}{2g}$

$\therefore R = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g} = 4\times\sqrt{\frac{v^4\sin^2 2\alpha}{16g^2}} = 4\times\sqrt{\frac{(v^2)^2.(2\sin\alpha.\cos\alpha)^2}{16g^2}} = 4\times\sqrt{\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}.\frac{v^2\cos^2\alpha}{2g}} = 4\sqrt{hh'}$ **(Ans.)**

Example-65. আনুভূমিকের সাথে α কোণে u আদিবেগে একটি বস্তু শূন্যে প্রক্ষিপ্ত হল। দেখাও যে, $\frac{u}{g\sin\alpha}$ সময় পর বস্তুটি u এর দিকের সাথে সমকোণে আনত রেখা বরাবর চলবে।



Solⁿ: u বরাবর g এর লম্বাংশ $= g\cos(90 + \alpha)$

$\therefore$ t সময় পর বেগ $= u + g\cos(90 + \alpha).t$

t sec পর লব্ধি বেগ আদিবেগের উপর লম্ব হলে, u বরাবর বেগ = 0

$\therefore u + g\cos(90 + \alpha).t = 0 \Rightarrow u - g\sin\alpha.t = 0$

$t = \frac{u}{g\sin\alpha}$ **[Showed]**

বিকল্প: $\vec{u}\perp\vec{v}$ হলে, $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}.(\vec{u} + \vec{g}t) = 0$

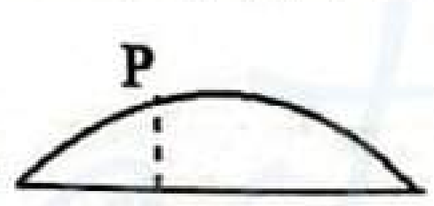
$\Rightarrow \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{g}t = 0 \Rightarrow u^2 + ug\cos(90° + \alpha)t = 0 \Rightarrow u(u - g\sin\alpha t) = 0 \therefore t = \frac{u}{g\sin\alpha}[u \neq 0]$ [Showed]

Example-66. একটি বস্তু $39.2\ ms^{-1}$ বেগে ভূমির সাথে $30°$ কোণে নিক্ষিপ্ত হলে কত সময় পরে বস্তুটি নিক্ষেপণ দিকের সাথে লম্বভাবে চলবে? **[RU'09-10]**

Solⁿ: কোন বস্তুকে $u = 39.2\ ms^{-1}$ বেগে আনুভূমিকের সাথে $\alpha = 30°$ কোণে নিক্ষেপ করলে এবং বস্তুটির বেগের দিক আদিবেগের লম্ব হবার সময় t হলে, $t = \frac{u}{g\sin\alpha} = \frac{39.2}{9.8\times\sin 30°} \therefore t = 8$ sec **(Ans.)**

Example-67. t সেকেন্ডে একটি প্রক্ষেপক তার বিচরণ পথের P বিন্দুতে পৌঁছে। আরো t′ সেকেন্ড সময় শেষে ঐ প্রক্ষেপকটি P বিন্দু থেকে প্রক্ষেপণ বিন্দুর সমতলে ফিরে আসে। দেখাও যে, ঐ তল থেকে P বিন্দুর উচ্চতা $\frac{1}{2}gtt'$. **[RU'19-20]**

Solⁿ:

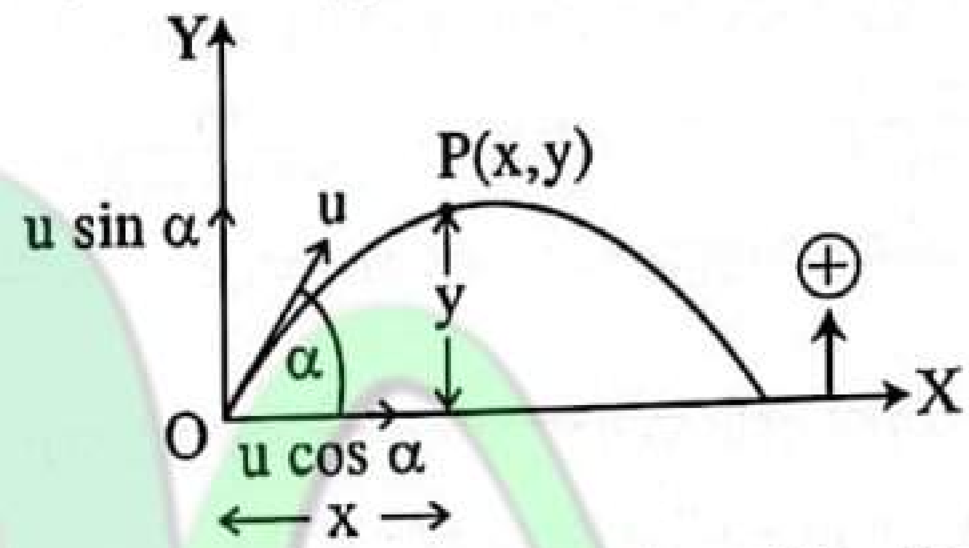


এখানে, $t + t' = \frac{2u}{g} \Rightarrow \frac{g(t+t')}{2} = u$ ……… (i)

$h = ut - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{g}{2}(t + t')t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}gtt' - \frac{1}{2}gt^2 \therefore h = \frac{1}{2}gtt'$

Example-68. প্রমাণ কর যে, উল্লম্ব তলে প্রক্ষিপ্ত কণার গতিপথ একটি পরাবৃত্ত (parabola)। **[JnU'18-19]**

Sol^n: কোন বিন্দুর চলরেখার সমীকরণ হচ্ছে যে কোন মুহূর্তে তার স্থানাঙ্কগুলো সম্পর্ক নির্দেশক সমীকরণ বা সঞ্চারপথের সমীকরণ।



ধরা যাক, প্রসঙ্গ কাঠামোর মূলবিন্দু O থেকে আনুভূমিক x-অক্ষের সাথে α কোণে xy সমতলে u আদিবেগে একটি বস্তুকে নিক্ষেপ করা হলো।

সুতরাং x ও y অক্ষ বরাবর বস্তুটির আদিবেগের উপাংশগুলো যথাক্রমে, $u_x = u\cos\alpha$ এবং $u_y = u\sin\alpha$.

বস্তুটি মূলবিন্দু থেকে নিক্ষেপ করায় $x_0 = 0$ এবং $y_0 = 0$. বস্তুটির উপর শুধুমাত্র অভিকর্ষজ ত্বরণ, g খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে।

সুতরাং, $a_x = 0$ এবং $a_y = -g$. এখন, t সময় পরে বস্তুটির স্থানাঙ্ক P(x, y) হলে,

$x = u\cos\alpha\, t \ldots\ldots\ldots$ (i) এবং $y = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ দুটি হতে t অপসারণ করে পাই,

$\Rightarrow y = (u\sin\alpha) \times \frac{x}{u\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\alpha}\right)^2$

$\Rightarrow y = (\tan\alpha)x - \frac{g}{2(u\cos\alpha)^2}x^2 \ldots\ldots\ldots$ (iii)

u, α এবং g ধ্রুবক বলে (iii) নং সমীকরণটি $y = ax - bx^2$ আকারের একটি সমীকরণ যা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

অতএব, প্রাসের গতিপথ হচ্ছে একটি পরাবৃত্ত। **[Proved]**

Type-15: ভূমি থেকে h উচ্চতা হতে ভূমির সমান্তরাল দিকে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের গতি সংক্রান্ত

Concept

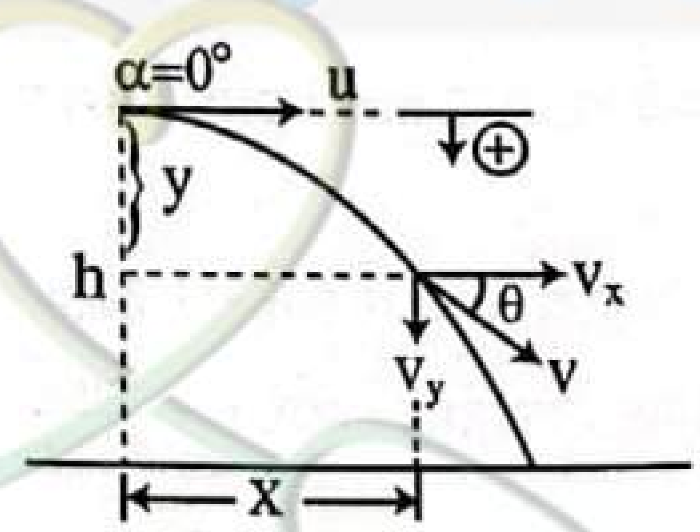
নিচের দিককে ধনাত্মক (+ve) বিবেচনা করলে,

$u_x = u,\ u_y = 0$

$a_x = 0,\ a_y = +g$

$v_x = u_x = u; v_y = u_y + gt = gt$

$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x}}$



$x = u_x t = ut\ ;\ y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$

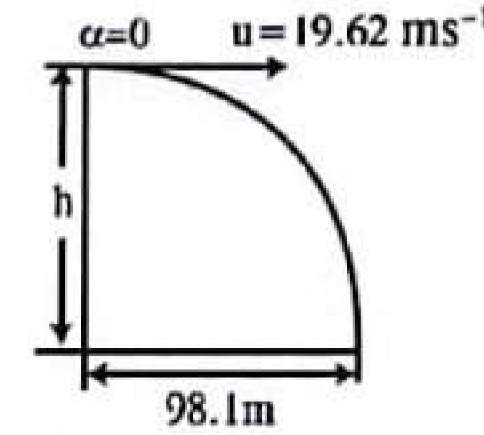
Problems

Example-69. 176.4 মিটার উঁচু একটি টাওয়ারের শীর্ষ হতে একটি বস্তু কী গতিবেগে আনুভূমিকভাবে নিক্ষেপ করলে তা টাওয়ারের পাদদেশ থেকে 96 মিটার দূরে ভূমিতে পড়বে?

Sol^n: পতনকাল, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 6$ sec

$x = v_x t \Rightarrow 96 = v_x \times 6 \Rightarrow v_x = 16\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

Example-70. একটি উঁচু টাওয়ারের শীর্ষ বিন্দু হতে একটি পাথর খণ্ডকে $19.62\ ms^{-1}$ গতিবেগে অনুভূমিক দিকে নিক্ষেপ করা হলো। পাথর খণ্ডটি টাওয়ারের পাদদেশ হতে $98.1\ m$ দূরে ভূমিকে আঘাত করলে টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর।



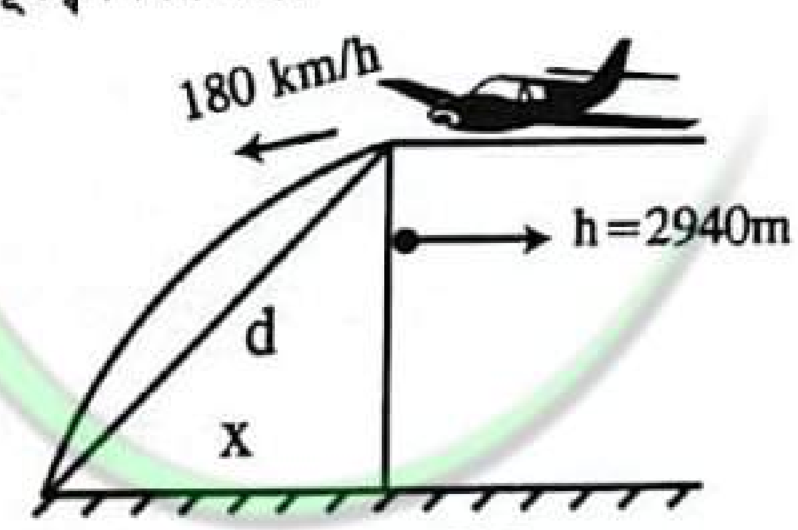
Solⁿ: অনুভূমিক উপাংশ, $x = u\cos\alpha\, t$

$\Rightarrow 98.1 = 19.62 \times t \Rightarrow t = \frac{98.1}{19.62} = 5$ sec

উল্লম্ব উপাংশ, $h = u\sin\alpha t + \frac{1}{2}gt^2 = 0 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 5^2$

$= 4.9 \times 25 = 122.5$ m **(Ans.)**

Example-71. ভূমি হতে 2.94 কি.মি. উপর দিয়ে ঘণ্টায় 180 কি.মি. বেগে চলন্ত একটি উড়োজাহাজ হতে একটি বস্তু নিচের দিকে ছেড়ে দেয়া হল। বস্তুটি ভূমিতে যে স্থানে পতিত হবে, সে স্থান হতে নিক্ষেপ বিন্দুর সরলরৈখিক দূরত্ব নির্ণয় কর।



Solⁿ: $u = \frac{180 \times 1000}{3600} = 50\ ms^{-1}$, $h = 2940$ m, $x = ut$, $x = ?$

$2940 = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2940 \times 2}{9.8}} = 10\sqrt{6}$s

$x = 50 \times 10\sqrt{6} = 1225$ m

$\therefore d = \sqrt{h^2 + x^2} = 3185$ m **(Ans.)**

Example-72. 19.62 m উঁচু একটি স্তম্ভের চূড়া থেকে $29.43\ ms^{-1}$ বেগে ভূমির সমান্তরালে একটি কামানের গোলা নিক্ষিপ্ত হলো। গোলাটি কখন এবং কোথায় ভূমিতে পতিত হবে? ভূমিতে পতিত হবার সময় এর গতিবেগ নির্ণয় করো।

Solⁿ: $h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 19.62 = \frac{1}{2}gt^2\ \therefore t = 2$ sec. **(Ans.)**

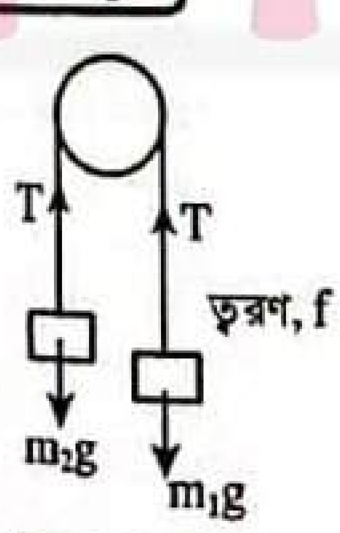
আনুভূমিক দিকে মোট সরণ $29.43 \times 2 = 58.86$ m **(Ans.)**

2 sec পর, খাড়া নিচের দিকে বেগ $= gt = 9.81 \times 2 = 19.62\ ms^{-1}$ এবং তখন আনুভূমিক বেগ $= 29.43\ ms^{-1}$

যেহেতু এই দুইটি বেগ, পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল $\therefore$ নির্ণেয় বেগ $= \sqrt{(29.43)^2 + (19.62)^2} = 9.81\sqrt{13}\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

Type-16: পুলি সংক্রান্ত

Concept



$\boxed{m_1 > m_2}$

m_1 ভরের বস্তুর জন্য, $m_1g - T = m_1f$ ……… (i)

m_2 ভরের বস্তুর জন্য, $T - m_2g = m_2f$ ……… (ii)

(i) নং হতে T এর মান (ii) নং এ বসালে, $m_1g - m_1f - m_2g = m_2f \Rightarrow (m_1 + m_2)f = (m_1 - m_2)g$

$\boxed{\therefore f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g}$ [$m_1 > m_2$ হলে]; $m_1 < m_2$ হলে, $f = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g$

f এর মান (i)-এ বসালে পাই, $m_1g - T = m_1 \times \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g \Rightarrow T = m_1g\left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \Rightarrow T = m_1g\left(\frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\right)$

$\boxed{\therefore T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g}$

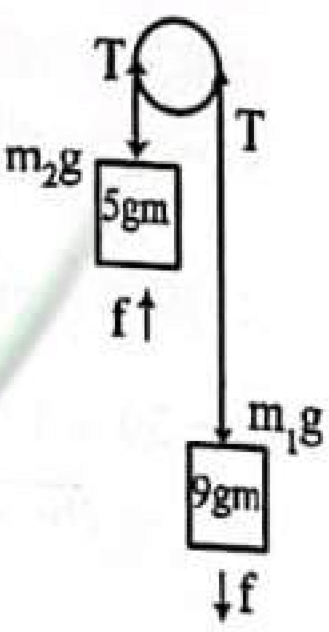
৫০

Problems

Example-73. একটি হালকা মসৃণ কপিকলের উপর দিয়ে হালকা রশির এক প্রান্তে সংযুক্ত 9 গ্রাম ভরের একটি বস্তু তার নিম্ন গতি দ্বারা অপর প্রান্তে সংযুক্ত 5 গ্রাম ভরের একটি বস্তুকে উপরে টেনে তুলছে। 2 সে. পরে রশিটি ছিড়ে গেলে হালকা বস্তুটি আর কত উপরে উঠবে? **[RU'14-15]**

Sol^n^: $f = \frac{9-5}{9+5} \times 9.8 = 2.8\ ms^{-2}$ $\therefore v = ft = 2.8 \times 2 = 5.6\ ms^{-1}$

এখন, $H = \frac{v^2}{2g} = \frac{5.6^2}{2\times9.8} = 1.6\ m = 160\ cm$ **(Ans.)**



বিকল্প: ধরি, বস্তুদ্বয়ের সাধারণ ত্বরণ f

9 গ্রাম ভরের বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বলদ্বয় তার ওজন ও রশির টান

লব্ধি বল $= m_1g - T = m_1f$ .... (i)

5g ভরের বস্তুর ক্ষেত্রে অনুরূপভাবে লব্ধি বল $= T - m_2g = m_2f$ .... (ii)

$\therefore (m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)f \Rightarrow f = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\ g = \frac{9-5}{9+5}\ g = \frac{4}{14}g = \frac{2}{7}\ g = 2.8\ ms^{-2}$

$\therefore v = ft = 2.8 \times 2\ ms^{-1} = 5.6\ ms^{-1}$ $\therefore H = \frac{v^2}{2g} = \frac{(5.6)^2}{2\times9.8}\ m = 1.6\ m = 160\ cm$ **(Ans.)**

Example-74. একটি রশির এক প্রান্তে 10 পাউন্ডের ভর কোন মসৃণ পুলির মাধ্যমে নিম্নমুখী নামার সময় রশিটির অন্যপান্তে 5 পাউন্ডের অন্য একটি ভরকে টেনে উপরে তোলে। এদের ত্বরণ ও রশির টান নির্ণয় কর। **[KU'15-16]**

Sol^n^: প্রথমেই, 1 পাউন্ড $= \frac{1}{2.204}$ kg

$\therefore$ বস্তু দুটির সাধারণ ত্বরণ, $f = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \times g = \frac{\frac{10}{2.204}-\frac{5}{2.204}}{\frac{10}{2.204}+\frac{5}{2.204}} \times 9.8\ ms^{-2} = \frac{49}{15} ms^{-2}$

এবং রশির টান, $T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2} \times g = \frac{2\times\frac{10}{2.204}\times\frac{5}{2.204}}{\frac{10}{2.204}+\frac{5}{2.204}} \times 9.8\ N = 29.6431\ N$

$\therefore$ বস্তু দুইটির সাধারণ ত্বরণ $= \frac{49}{15} ms^{-2}$ **(Ans.)** এবং রশির টান $= 29.6431$ N **(Ans.)**

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

01. কোন ব্যক্তির কোন স্থানে গমনের বেগ u, ফিরে আসার বেগ v হলে ঐ ব্যক্তির গড়বেগ $= \frac{2uv}{u+v}$

02. (ক) f ত্বরণে গতিশীল বস্তুর আদিবেগ u, t সময় পরে বেগ v এবং সরণ s হলে–

(a) গড় বেগের মাধ্যমে সরণ, $s = \bar{v}t = \frac{u+v}{2}t$

(b) $v = u + ft$ (c) $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ (d) $v^2 = u^2 + 2fs$

(e) t তম sec এ অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s_{th} = u + \frac{1}{2}f(2t-1)$

(খ) আদিবেগসহ কোন বস্তু সমত্বরণে m তম সেকেন্ডে s_{mth} ও n তম সেকেন্ডে s_{nth} দূরত্ব অতিক্রম করলে ত্বরণ, $a = \frac{s_{mth}-s_{nth}}{t_m-t_n}$

03. ভূমির ঊর্ধ্বে h উচ্চতা হতে u বেগে উলম্বভাবে উপরে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু কণা t সময়ে ভূমিতে v বেগে পতিত হলে–

(i) $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$ (ii) $v = -u + gt$

04. (a) সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2}{2g}$

(b) উত্থানকাল = পতনকাল $= \frac{u}{g}$

(c) বিচরণকাল, $T = \frac{2u}{g}$

(d) $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}, R_{max} = \frac{u^2}{g}$

(e) $H = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}, H_{max} = \frac{u^2}{2g}$

(f) $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

(g) $\tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{gT^2}{2R}$

(h) $R = u\cos\alpha \times T, R_{max} = \frac{R}{\sin 2\alpha}$

(i) একই আনুভূমিক পাল্লা ও একই নিক্ষেপ বেগের জন্য দুটি প্রক্ষেপকের নিক্ষেপ কোণ হবে α ও $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

05. আনুভূমিক পাল্লা= R, উল্লম্ব সরণ= y, আনুভূমিক সরণ x হলে, $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম

MCQ

01. একটি বস্তুকণা খাড়া উপরের দিকে প্রক্ষেপ করলে নির্দিষ্ট বিন্দু P -তে পৌছাতে t_1 সময় লাগে। যদি আর t_2 সময় পর বস্তুটি ভূমিতে পতিত হয় তবে কণাটির সর্বোচ্চ উচ্চতা হবে–

(a) $\frac{1}{8}g(t_1 + t_2)^2$ (b) $\frac{1}{8}g(t_1 + t_2)$ (c) $\frac{1}{2}g(t_2^2 + t_2^2)$ (d) $\frac{1}{8}g(t_2^2 + t_2^2)$

02. u বেগে আনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতা হবে–

(a) $\frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}$ (b) $\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ (c) $\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$ (d) $\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{g}$

03. স্রোত না থাকলে একটি ছেলে 5 মিনিটে সাঁতার কেটে সোজাসুজিভাবে 80 মিটার প্রশস্ত একটি খাল পার হতে পারে এবং স্রোত থাকলে তার দ্বিগুণ সময় লাগে। স্রোতের বেগ কত?

(a) 15 mm^{-1} (b) 12 mm^{-1} (c) 16.5 mm^{-1} (d) 13.86 mm^{-1}

04. কোন স্তম্ভের শীর্ষ হতে 19.6 ms^{-1} বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত কোন কণা 5 সেকেন্ড পরে স্তম্ভের পাদদেশে পতিত হলে স্তম্ভের উচ্চতা কত?

(a) 20 m (b) 25 m (c) 30 m (d) 50 m

05. ভূমি হতে u আদিবেগে খাড়া উর্ধ্বমুখে নিক্ষিপ্ত কোন কণার সর্বোচ্চ উচ্চতা–

(a) $\frac{u}{2g}$ (b) $\frac{u^2}{g}$ (c) $\frac{u^2}{2g}$ (d) $\frac{2u}{g}$

06. একটি গাড়ী সমত্বরণে এবং 30 kmh^{-1} আদিবেগে 100 km পথ অতিক্রম করে 50 kmh^{-1} চূড়ান্ত বেগ প্রাপ্ত হয়। গাড়ীটির ত্বরণ–

(a) 8 kmh^{-2} (b) 800 kmh^{-2} (c) 16 kmh^{-2} (d) 80 kmh^{-2}

07. 20 ms^{-1} বেগে উর্ধ্বগামী কোন বেলুন থেকে পতিত এক টুকরা পাথর 20 সেকেন্ড পরে মাটিতে পড়ল। পাথরের টুকরা ভূমিতে পতিত হওয়ার সময় বেলুনের উচ্চতা কত ছিল?

(a) 390 m (b) 560 m (c) 12580 m (d) 1960 m

08. একটি গাড়ি স্থিতাবস্থা হতে সমত্বরণে চলা শুরু করে 5 সেকেন্ডে 180 মি/সে. গতিবেগ প্রাপ্ত হলো। গাড়িটির ত্বরণ–

(a) 36 ms^{-2} (b) 32 ms^{-2} (c) 30 ms^{-2} (d) 40 ms^{-2}

09. $32\ fts^{-1}$ আদিবেগে এবং ভূমির সাথে $30°$ কোণে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলো। ইহার আনুভূমিক পাল্লা-

(a) 16 ft (b) $32\sqrt{3}$ ft (c) 32 ft (d) $16\sqrt{3}$ ft

10. একটি প্রক্ষেপকের সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছাবার সময়কাল কত?

(a) $\frac{u^2}{g}$ (b) $\frac{u \sin\alpha}{g}$ (c) $\frac{u \sin\alpha}{2g}$ (d) $\frac{u}{2g}$

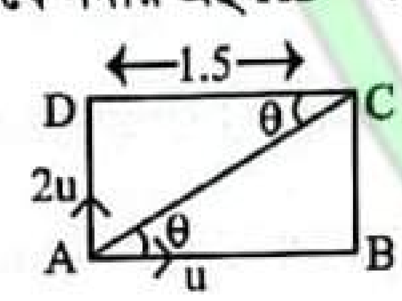
11. একটি পাথর একটি টাওয়ারের ছাদ থেকে সোজাসুজি উপরের দিকে ছোঁড়া হল। পাথরটি 10 সেকেন্ড পর $51ms^{-1}$ বেগে মাটিতে পড়ল। টাওয়ারটির উচ্চতা কত?

(a) 10m (b) 15 m (c) 20 m (d) 25 m

12. কত ms^{-1} বেগে কোনো বস্তুকে নিক্ষেপ করলে অভিকর্ষজ ত্বরণ মানের দ্বিগুণ উচ্চতায় উঠবে?

(a) 19.6 (b) 9.8 (c) 4.9 (d) 9.6

13. যদি স্রোতের বেগ u এবং নৌকার বেগ 2u হয়, তবে নদীর প্রস্থ AD =?



(a) 1 km (b) 3km (c) 2.25 km (d) 4 km

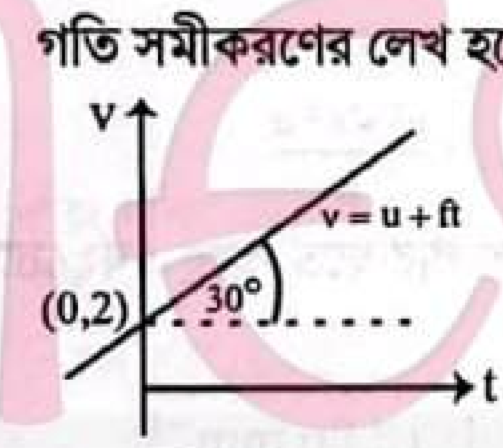
14. $20\ ms^{-1}$ বেগে গতিশীল একটি বস্তুর বেগ প্রতি সেকেন্ডে $3\ ms^{-2}$ হারে হ্রাস পায়। থেমে যাওয়ার আগে বস্তুটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

(a) 67.66 m (b) 66.67 m (c) 76.66 m (d) 96.67 m

15. একটি বস্তু 24.5 মি:/সে. বেগে আনুভূমিক তলের সাথে $60°$ কোণে নিক্ষেপ করা হল। বস্তুটি যে উচ্চতায় উঠে তা বের করার পদ্ধতি–

(a) $(24.5)^2 \frac{\sin 60°}{(2\times9.8)}$ (b) $(24.5)^2 \frac{\sin^2 60°}{2\times9.8}$ (c) $(24.5)^2 \frac{\cos 60°}{2\times9.8}$ (d) $(24.5)^2 \frac{\sin^3 60°}{2\times9.8}$

16. গতি সমীকরণের লেখ হতে আদিবেগ ও ত্বরণ হবে–



(a) $\sqrt{3}, 2$ (b) $0, \sqrt{2}$ (c) $2, \tan 30°$ (d) $0, \tan\theta$

17. বায়ুহীন অবস্থায় উল্লম্ব তলে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণার গতিপথ একটি–

(a) Parabola (b) Ellipse (c) Circle (d) কোনটিই নয়

18. একটি গাড়ী t সেকেন্ড সময়ে $3t + \frac{t^2}{8}$ সে.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে। 2 সেকেন্ড পর এর বেগ কত?

(a) $\frac{9}{8}$ (b) $\frac{7}{2}$ (c) $\frac{7}{4}$ (d) $\frac{17}{8}$

19. একটি লক্ষ্যস্থলে গুলি ছোড়া হল। 9 cm ভেদ করার পর গুলিটির বেগ অর্ধেক হয়ে গেল। গুলিটি আর কতদূর ভেদ করবে?

(a) 0 cm (b) 3 cm (c) 6 cm (d) 100 cm

20. যদি দুটি ট্রেন একই স্টেশন হতে দুপুর 1.00 টায় যাত্রা করে থাকে, তবে দুপুর 3.00 টার সময় তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত হবে; যদি একটি ট্রেন সোজা উত্তর দিকে $15\ mileh^{-1}$ বেগে এবং অপরটি সোজা পশ্চিম দিকে $20\ mileh^{-1}$ বেগে চলতে থাকে?

(a) 25 mile (b) 10 mile (c) 30 mile (d) 50 mile

21. একটি গতিশীল কণার কোন সরলরেখায় t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $S = 63t - 6t^2 - t^3$ ফুট দ্বারা প্রকাশিত হয়। কণাটি থামার পূর্বে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

(a) 118 ফুট (b) 78 ফুট (c) 98 ফুট (d) 108 ফুট

22. একটি কণা একটি সরলরেখা বরাবর 3 মিটার/সেকেন্ড গতিতে চলছে। 3 সেকেন্ড পরে কণাটির গতির সাথে লম্ব বরাবর 4 মিটার/সেকেন্ড গতি সংযোজন করা হল। গণনা শুরুর 5 সেকেন্ড' পর কণাটির আদি অবস্থান হতে অতিক্রান্ত দূরত্ব কত?
(a) 18 m (b) 24 m (c) 16 m (d) 17 m

23. একটি কণা আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 100 মিটার/ সেকেন্ড আদিবেগে নিক্ষিপ্ত হলে এর উড্ডয়ন সময় কত হবে?
(a) $10\frac{10}{49}$ সে. (b) $10\frac{1}{49}$ সে. (c) $10\frac{1}{2}$ সে. (d) 12 সে.

24. সরলরেখায় চলন্ত কোন কণা সেকেন্ডে s মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। $s = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$ হলে গতি শুরু হওয়ার 5 সেকেন্ড পর কণার ত্বরণ কত?
(a) $17\ ms^{-2}$ (b) $15\ ms^{-1}$ (c) $11\ ms^2$ (d) $16\ ms^{-2}$

25. একটি কণা v বেগে নিক্ষিপ্ত হলে যদি তার আনুভূমিক পাল্লা লব্ধ বৃহত্তম উচ্চতার দ্বিগুণ হয়, তবে তার আনুভূমিক পাল্লা কত হবে?
(a) $\frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$ (b) $\frac{2v^2}{g}$ (c) $\frac{\sin^2 \alpha}{2g}$ (d) $\frac{4v^2}{5g}$

26. খুলনা হতে রাজশাহীর উদ্দেশ্যে 15 min এর ব্যবধানে 48 kmh^{-1} বেগে দুটি ট্রেন যাত্রা শুরু করল। খুলনাগামী অপর একটি ট্রেন তাদেরকে 5 min এর ব্যবধানে অতিক্রম করলে, খুলনাগামী ট্রেনের বেগ কত?
(a) $12\ kmh^{-1}$ (b) $75\ kmh^{-1}$ (c) $48\ kmh^{-1}$ (d) $96\ kmh^{-1}$

27. সিল্কসিটি ট্রেনটি ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে চলছে। ট্রেনটি ব্রেক করে 3 মিনিটে থামানো হলো। থামার আগে ট্রেনটি কত দূরে যাবে?
(a) 1500 মিটার (b) 500 মিটার (c) 50 মিটার (d) 3000 মিটার

28. 50 মি. দূরত্ব অতিক্রম করতে একটি গাড়ীর বেগ 10 মি/সে. থেকে 20 মি/সে. হয়। আরো 200 মি. যাওয়ার পর বেগ কত হবে?
(a) 40 মি:/সে: (b) 42 মি:/সে: (c) 45 মি:/সে: (d) 60 মি:/সে:

29. বায়ুশূন্য স্থানে কোন প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের সমীকরণের আকার কোনটি?
(a) $y = ax + bx^2$ (b) $y = ax + b$ (c) $x = ay + by^2$ (d) $y = mx + c$

30. শূন্যে নিক্ষিপ্ত একটি পাথর খন্ডের সর্বাধিক পাল্লার মান 80ft। এই নিক্ষেপণ কোণের জন্য ইহার সর্বাধিক উচ্চতা কত ফুট?
(a) $20\frac{1}{2}$ ft. (b) $20\frac{1}{4}$ ft (c) 20 ft. (d) $20\frac{3}{4}$ ft.

31. একটি কঠিন বস্তুকে v বেগে ভূমির সাথে α কোণে নিক্ষেপ করা হলে সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছাতে সময় লাগে–
(a) $\frac{2uv \sin \alpha}{g}$ (b) $\frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ (c) $\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ (d) $\frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$

32. একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে 1 cms^{-2} ত্বরণে চলতে শুরু করলে 2 মিনিট পর তার বেগ সেকেন্ডে কত সেন্টিমিটার হবে?
(a) 80 (b) 90 (c) 100 (d) 120

33. স্রোতের বেগ u এবং নৌকার লব্ধি বেগ v, নৌকা স্রোতের বিপরীত দিকে চললে স্রোতের সাপেক্ষে নৌকাটির আপেক্ষিক বেগ হবে-
(a) $u + v$ (b) $v - u$ (c) v (d) $u - v$

34. একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে সমত্বরণে চলে 10 তম সেকেন্ডে 133 ফুট পথ অতিক্রম করলে কণাটির ত্বরণ কত?
(a) $13\ fts^{-2}$ (b) $14\ fts^{-2}$ (c) $15\ fts^{-2}$ (d) $13.3\ fts^{-2}$

35. একজন খেলোয়াড় 2m উচ্চতায় ভূমির সাথে 45° কোণে 20 ms^{-1} বেগে একটি ক্রিকেট বলকে আঘাত করলে, অন্য একজন খেলোয়াড় 1 m উঁচুতে বলটি ধরে ফেলে। খেলোয়াড় দুজনের দূরত্ব কত? [ধরি $g = 10ms^{-2}$]
(a) $20 + 2\sqrt{110}$ m (b) 20 m (c) $20 - 2\sqrt{110}$ m (d) কোনটিই নয়

36. একটি বস্তু আনুভূমিকের সাথে θ কোণে উপর দিকে নিক্ষিপ্ত হল। বস্তুটির নিক্ষেপ করার গতি 24 ms^{-1}। বস্তুটি নিক্ষেপ করার 1.2 sec পর সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছালে θ এর মান কত? [ধরি $g = 10ms^{-2}$]
(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) কোনটিই নয়

37. 5kg ভরের কোন বস্তুর উপর 2 ms^{-2} ত্বরণ ক্রিয়া করলে প্রযুক্ত বলের মান হবে–
(a) 10 N (b) 20 N (c) 12 N (d) 1 N

38. কোন গতিশীল বস্তু t সেকেন্ডে $5t + 2t^2$ ফুট দূরত্ব অতিক্রম করলে 3 সেকেন্ড পর তার গতিবেগ হবে–
(a) $17\ fts^{-1}$ (b) $15\ fts^{-1}$ (c) $12\ fts^{-1}$ (d) $18\ fts^{-1}$

39. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 4km বেগে উত্তর দিকে 4km হাঁটার পর পশ্চিম দিকে 120 মিনিটে 3km পথ হাঁটল, ব্যক্তিটির গড় বেগ কত?
(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{2}{3}$

40. একটি বুলেট একটি তক্তা ভেদ করতে তার বেগের $\frac{1}{20}$ অংশ হারায়। থেমে যাওয়ার পূর্বে কতগুলো তক্তা ভেদ করবে?
(a) 10 (b) 20 (c) 1 (d) 2

41. একটি বুলেট একটি নির্দিষ্ট দুরত্বের তক্তা ভেদ করতে পারে। যদি 49 টি তক্তা ভেদ করতে চায় তবে তার বেগ কত গুণ হতে হবে?
(a) 14 (b) 21 (c) 7 (d) 49

42. ভূমির সাথে α কোণে নিক্ষিপ্ত বস্তুর আনুভূমিক পাল্লা সর্বোচ্চ হবে যদি-
(a) $\alpha = 30°$ (b) $\alpha = 60°$ (c) $\alpha = 45°$ (d) $\alpha = 90°$

43. একটি কণা স্থিতাবস্থা থেকে ধ্রুব ত্বরণে 2 মি./সে.^{2} সহকারে চলতে শুরু করলে তৃতীয় সেকেন্ডে কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব কত?
(a) 9 মি. (b) 15 মি. (c) 10 মি. (d) 5 মি.

44. একটি বাড়ির সর্বনিম্ন তলার উচ্চতা 32ft. বাড়ির ছাদ থেকে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তুর সর্বনিম্ন তালা অতিক্রম করতে 1 sec সময় লাগে। বাড়ির উচ্চতা কত?
(a) 36 (b) 42 (c) 50 (d) 65

Written

45. সোজাসুজি একটি নদী পার হতে একজন সাঁতারুর t সময় লাগে। স্রোতের অনুকূলে তীর বরাবর একই দূরত্ব অতিক্রম করতে তার t_1 সময় লাগে। সাঁতারুর গতিবেগ u এবং স্রোতের গতিবেগ v হলে, প্রমাণ কর যে, $t : t_1 = \sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}$, যেখানে $u > v$.

46. দুটি ট্রেন পরস্পরকে বিপরীত দিক থেকে অতিক্রম করে যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 400m এবং 500m. ২য় ট্রেনটির বেগ প্রথম ট্রেনের দ্বিগুণ। ট্রেন দুটি পরস্পরকে 10s এ অতিক্রম করে। তাহলে ১ম ট্রেনের গতিবেগ কত? ২য় ট্রেনের গতিবেগ কত?

47. u বেগে একটি জাহাজ পূর্বদিকে চলছে। অপর একটি জাহাজ প্রথমটির দিকের সাথে উত্তর দিকে θ কোণে আনত রেখায় 2u বেগে চলছে। প্রথম জাহাজের যাত্রীদের নিকট মনে হচ্ছে দ্বিতীয় জাহাজটি উত্তর-পূর্ব দিকে চলছে। প্রমাণ কর যে, $\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

48. একটি বস্তু কণা f সমত্বরণে একটি সরলরেখা বরাবর চলে t সময়ে s দূরত্ব এবং পরবর্তী t′ সময়ে s′ দূরত্ব অতিক্রম করে। দেখাও যে, $f = 2\left(\frac{s'}{t'} - \frac{s}{t}\right)/(t + t')$

49. একজন নাবিক $v\ kmh^{-1}$ বেগে একটি নৌকা চালিয়ে $u\ kmh^{-1}$ বেগে প্রবাহিত নদী ন্যূনতম পথে পাড়ি দিতে চায়। নদীর স্রোতের সাপেক্ষে নৌকার আপেক্ষিক বেগ কত?

50. একটি ট্রেন সকল রেলপথে 4 কি.মি. ব্যবধানে দুইটি স্টেশনে থামে। এক স্টেশন থেকে অন্য স্টেশনে পৌঁছাতে সময় লাগে 8 মিনিট। ট্রেনটি এর গতিপথের প্রথম অংশ x সমত্বরণে এবং দ্বিতীয় অংশ y সমমন্দনে চলে। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8$

51. একটি সরলরেখায় দুইটি কণা a ও b সমত্বরণে চলছে। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে যখন এর x ও y দূরত্বে অবস্থান করে তখন এদের বেগ যথাক্রমে u ও v হয়। প্রমাণ কর যে, এরা দুইবারের বেশী মিলিত হতে পারে না এবং মিলিত হবার সময়ের ব্যবধান = $\frac{2}{a-b}\sqrt{(u-v)^2 - 2(x-y)(a-b)}$

52. দুইটি রেলগাড়ি একই সরল রেলপথে u_1 ও u_2 $(u_1 > u_2)$ গতিবেগে একই দিকে অগ্রসর হচ্ছে। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব যখন x তখন পরস্পরকে দেখতে পায়। রেলগাড়ি দুইটির সর্বোচ্চ মন্দন ও সর্বোচ্চ ত্বরণ যথাক্রমে সর্বোচ্চ f_1 এবং f_2 হলে দেখাও যে, কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $(u_1 - u_2)^2 = 2(f_1 + f_2)x$ হয়।

53. 10 মি/সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে উঠন্ত একটি বেলুন থেকে একখন্ড পাথর ফেলে দেয়া হল। পাথর খন্ডটি 10 সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হলে কত উঁচু থেকে পাথর খন্ডটি ফেলা হয়েছিল? পাথরটি যখন ভূমিতে পৌঁছে তখন বেলুনের উচ্চতা কত ছিল?

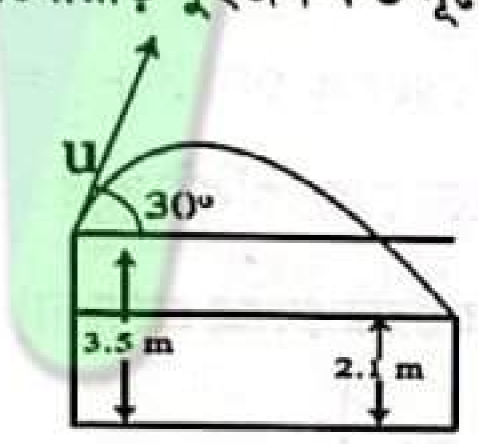
54. নির্দিষ্ট বেগে উল্লম্বভাবে ভূমি থেকে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তুকণা t সেকেন্ড সময়ে h উচ্চতায় উঠে এবং আরও t′ সেকেন্ড পরে এটা ভূমিতে ফিরে আসে। প্রমাণ কর যে, (i) কণার আদিবেগ $=\frac{1}{2}g(t+t')$ (ii) $h=\frac{1}{2}gt\,t'$ (iii) বৃহত্তম উচ্চতা $=\frac{1}{8}g(t+t')^2$

55. একটি বল u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে তা t_1 ও t_2 সেকেন্ডে h উচ্চতায় অবস্থান করে। প্রমাণ কর যে, (i) $h=\frac{1}{2}g\,t_1t_2$

56. একখন্ড পাথর কোন নির্দিষ্ট উচ্চতা হতে ফেলে দেয়া হলে তা শেষ t সেকেন্ডে h মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। দেখাও যে, পতনের মোট সময় $\left(\frac{h}{gt}+\frac{t}{2}\right)$ সেকেন্ড।

57. 24.5m উচ্চতাবিশিষ্ট একটি পাহাড়ের চূড়া থেকে আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 39.2ms^{-1} বেগে একটি পাথর নিক্ষেপ করা হলো। পাহাড়ের পাদদেশ থেকে কতদূরে পাথরটি ভূমিতে আঘাত করেছিল?

58. একজন খেলোয়াড় 3.5 মি. উচ্চতায় ভূমির সাথে 30^o কোণে 9.8 মি./সে. বেগে একটি ক্রিকেট বল ছুঁড়ে মারলে অপর একজন খেলোয়াড় 2.1 মি. উঁচুতে একে ধরে ফেলে। খেলোয়াড় দুইজন কত দূরে ছিল?

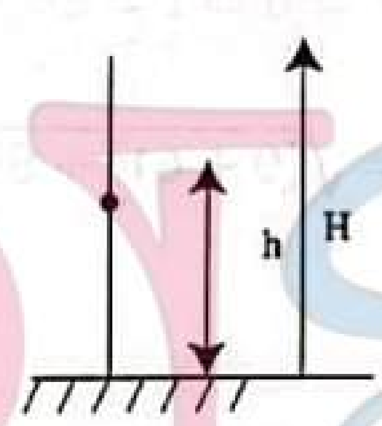


প্র্যাক্টিস প্রবলেমের সমাধান

MCQ

01. Solⁿ: (a); $T=t_1+t_2$ এখন, $T=\frac{2u}{g}\Rightarrow u=\frac{gT}{2}$

$H=\frac{u^2}{2g}=\frac{g^2T^2}{4\times 2g}=\frac{1}{8}g(t_1+t_2)^2$



02. Solⁿ: (b); Formula: $H=\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

03. Solⁿ: (d); ছেলের বেগ, $v=\frac{80}{5}=16\text{ mm}^{-1}$; স্রোত থাকলে নদী সোজাসুজি পার হতে হলে ছেলের লব্ধি বেগ হবে $=\sqrt{v^2-u^2}\;\therefore\sqrt{v^2-u^2}=\frac{80}{10}=8$

$\Rightarrow v^2-u^2=64\Rightarrow u^2=v^2-64=16^2-64\Rightarrow u=13.86\text{ mm}^{-1}$

04. Solⁿ: (b); $h=-ut+\frac{1}{2}gt^2=-19.5\times5+\frac{1}{2}\times9.8\times5^2=25\text{ m}$

05. Ans: (c); 16.5 mm^{-1}

06. Solⁿ: (a); $f=\frac{50^2-30^2}{2\times100}=8\text{kmh}^{-2}$

07. Solⁿ: (d); $h=-ut+\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow h=-20\times20+\frac{1}{2}\times9.8\times20^2=1560\text{ m}$

এখন, 20s এ অতিক্রান্ত উচ্চতা $=20\times20=400$m $\therefore$ মোট উচ্চতা $(1560+400)=1960$m

08. Solⁿ: (a); $v=u+at\Rightarrow180=0+a\times5\;\therefore a=36\,ms^{-2}$

09. Solⁿ: (d) ; $R=\frac{u^2\sin2\alpha}{g}=\frac{(32)^2\times\sin(2\times30^o)}{32}=16\sqrt{3}\text{ft}\;[g=32\text{fts}^{-2}]$

10. Ans: (b); $\frac{u\sin\alpha}{g}$

11. Solⁿ: (c); $v=-u+gt\Rightarrow u=gt-v=51\text{ ms}^{-1}$; $h=-ut+\frac{1}{2}gt^2=20$m

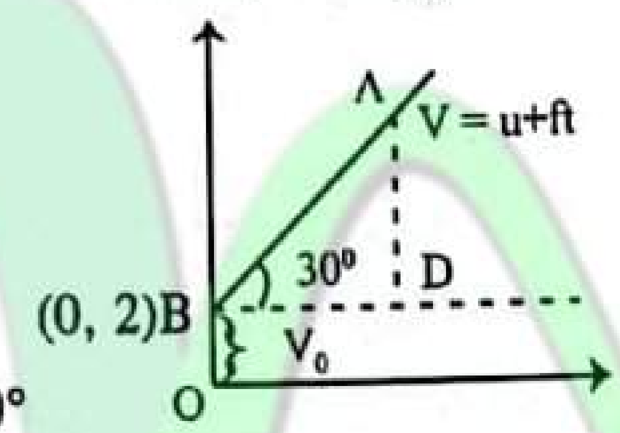
12. Solⁿ: (a); $v^2=u^2-2gh$; $u^2=2\times9.8\times2\times9.8$; $u=19.6\text{ ms}^{-1}$

13. **Ans: (b);** 3km

14. **Sol^n: (b);** $S = \frac{v_0^2 - v^2}{2a} = \frac{(20)^2-(0)^2}{2\times3} = 66.67$ m

15. **Sol^n: (b);** উচ্চতা, $H = \frac{v_0^2(\sin\theta)^2}{2g} = (24.5)^2\ \frac{\sin^2 60°}{2\times9.8}$

16. **Sol^n: (c);** এখানে, আদিবেগ, $OB = 2$ এবং ত্বরণ $= \frac{AD}{BD} = \tan 30°$



$\therefore$ আদিবেগ 2 এবং ত্বরণ $\tan 30°$

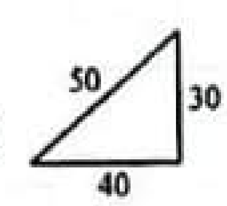
17. **Ans: (a) ;** Parabola

18. **Sol^n: (b);** $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3t + \frac{t^2}{8}\right) = 3 + \frac{t}{4} \therefore$ 2 sec এ বেগ $3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

19. **Sol^n: (b);** x মিটার ভেদ করার পর বেগ অর্ধেক হয়ে গেল, গুলিটি আরও $\frac{x}{3}$ মি. যায়।

$\therefore$ গুলিটি $\frac{9}{3} = 3$ cm যাবে। [শুধুমাত্র বেগ অর্ধেক হওয়ার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য]

20. **Sol^n: (d);** distance $= \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$

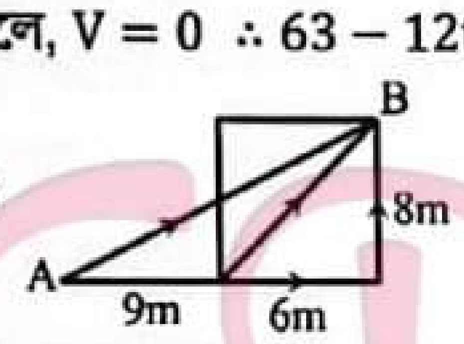


21. **Sol^n: (d);** $S = 63t - 6t^2 - t^3$

$\Rightarrow V = 63 - 12t - 3t^2$

কণাটি থামলে, $V = 0\ \therefore 63 - 12t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t = 3s \therefore t = 3s$ এ দূরত্ব, $S = 63\times3 - 6\times3^2 - 3^3 = 108$ ফুট

22. **Sol^n: (d);**



$AB = \sqrt{(9+6)^2 + 8^2} = 17$m

23. **Sol^n: (a);** $t = \frac{2u\sin\alpha}{g} = 10\frac{10}{49}$ seconds

24. **Sol^n: (a);** $\frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}t^2 + 2t + 4 \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = 3t + 2 \therefore 5$ s পরে ত্বরণ $= 3\times5 + 2 = 17\ ms^{-2}$

25. **Sol^n: (d);** $R = 2H_{max} \Rightarrow \frac{v^2\sin2\alpha}{g} = \frac{2v^2\sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow \tan\alpha = 2\ \ \therefore \sin2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{4}{5} \therefore R = \frac{v^2\times\frac{4}{5}}{g} = \frac{4V^2}{5g}$

26. **Sol^n: (d);** দুই ট্রেনের মাঝে দূরত্ব $= \frac{48}{3.6}\times15\times60 = 12000$m

খুলনাগামী ট্রেনের আপেক্ষিক বেগ (অপর ট্রেন দুটির সাপেক্ষে) $= u + \frac{48}{3.6} = u + \frac{40}{3} \Rightarrow 12000 = \left(u + \frac{40}{3}\right)\times5\times60$

$\Rightarrow u = \frac{80}{3}\ ms^{-1} = 96\ kmh^{-1}$

27. **Sol^n: (a);** $u = \frac{60}{3.6} = \frac{50}{3}ms^{-1}; t = 3min = 180s\ ;\ s \equiv \left(\frac{u+v}{2}\right)t \Rightarrow s = \left(\frac{\frac{50}{3}}{2}\right)\times180 = 1500m$

28. **Sol^n: (a);** $v^2 = u^2 + 2fs \Rightarrow f = \frac{v^2-u^2}{2s} = 3\ ms^{-2}\ ;\ v^2 = u^2 + 2fs = 20^2 + 2\times3\times200 \Rightarrow v = 40\ ms^{-1}$

29. **Ans: (a);** $y = ax + bx^2$

30. **Sol^n: (c);** $R_{max} = \frac{u^2}{g} \Rightarrow u^2 = 2560$; নিক্ষেপণ কোণ, $\alpha = 45°\ \therefore H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = 20$ft

বিকল্প: $\tan\alpha = \frac{4H}{R} \Rightarrow H = \frac{1}{4}\times R\tan45° = 20$ft

31. **Sol^n: (c);** $t_m = \frac{V_0\sin\alpha}{g}$

32. Sol^n: (d); $v = 2 \times 60 \times 1 = 120\ cms^{-1}$

33. Ans: (a); $u + v$

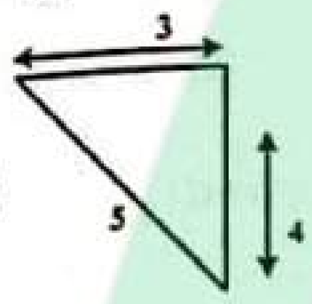
34. Sol^n: (b); $s_t = u + \frac{1}{2}a\,(2t - 1) \Rightarrow 133 = 0 + \frac{1}{2}\,a\,(2.10 - 1) \Rightarrow a = 14\ fts^{-2}$

35. Sol^n: (a); $-1 = x\tan 45° - \frac{1}{2} \times \frac{10 \times x^2}{(20\cos 45°)^2}$; by Solving , $x = 20 + 2\sqrt{110}\ m$

36. Sol^n: (a) ; $t_m = \frac{u\sin\theta}{g}$; $\theta = 30°$

37. Sol^n: (a) ; $F = ma = 10\ N$

38. Sol^n: (a) ; $\frac{ds}{dt} = 5 + 4t$; 3 s পরে বেগ $= 5 + 4 \times 3 = 17\ fts^{-1}$

39. Sol^n: (b);  $\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{5km}{\left(\frac{4}{4}+2\right)hr} = \frac{5}{3}kmhr^{-1}$

40. Sol^n: (a); শেষ বেগ $= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$; ভেদকৃত তক্তা $= \frac{(20)^2}{(20)^2-(19)^2} = 10$ টি

41. Sol^n: (c); $R = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$; R_{max} হবে যদি $\sin 2\alpha = 1$ হয়। $\therefore 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$ হলে R maximum হবে।

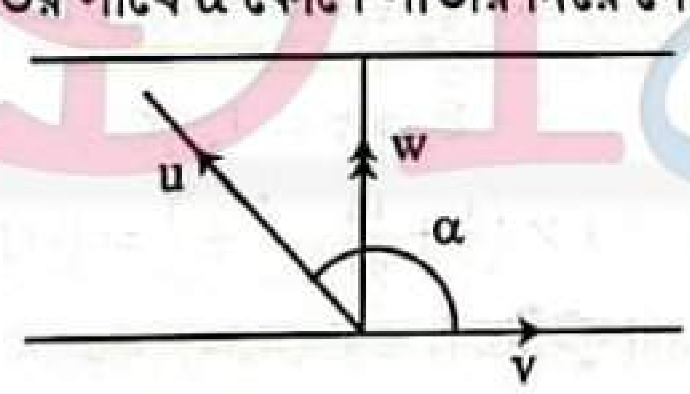
42. Sol^n: (c); বেগের মান $= \sqrt{\text{ভেদকৃত তক্তার সংখ্যা}} = \sqrt{49} = 7$

43. Sol^n: (d); $S = u + \frac{1}{2}a(2t - 1) = 0 + \frac{1}{2} \times 2(2 \times 3 - 1) = 5$ মি.

44. Sol^n: (a); $T = \frac{t}{2} + \frac{h}{gt} = \frac{1}{2} + \frac{32}{32 \times 1} = \frac{3}{2}$; $H = \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2} \times 32 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 36$

Written

45. Sol^n: ধরি, নদীর প্রস্থ d এবং সাঁতারু স্রোতের সাথে α কোণে সাঁতার দিয়ে সোজাসোজি w বেগে নদী পার হয়।



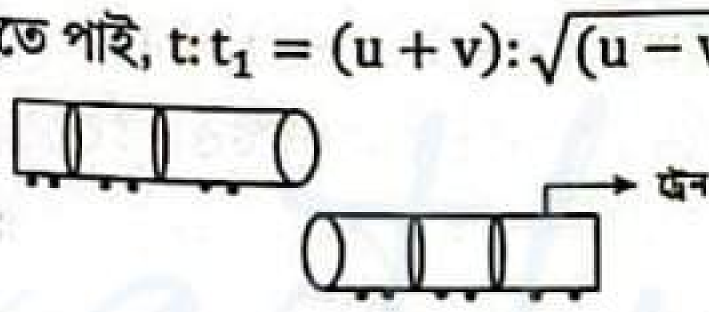
প্রশ্নমতে, $d = wt = (u + v)t_1$, [∵ স্রোতের অনুকূলে সাঁতারুর বেগ $= u + v$]

$\Rightarrow t : t_1 = (u + v) : w \ldots\ldots (i)$

স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $v\cos 0° + u\cos\alpha = w\cos 90° \Rightarrow v + u\cos\alpha = 0 \Rightarrow u\cos\alpha = -v$

লব্ধি বেগ $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha} = \sqrt{u^2 + v^2 + 2v(-v)} = \sqrt{u^2 - v^2} = \sqrt{(u - v)(u + v)}$

(i) হতে পাই, $t : t_1 = (u + v) : \sqrt{(u - v)(u + v)}$ $\therefore t : t_1 = \sqrt{u + v} : \sqrt{u - v}$ **(Proved)**

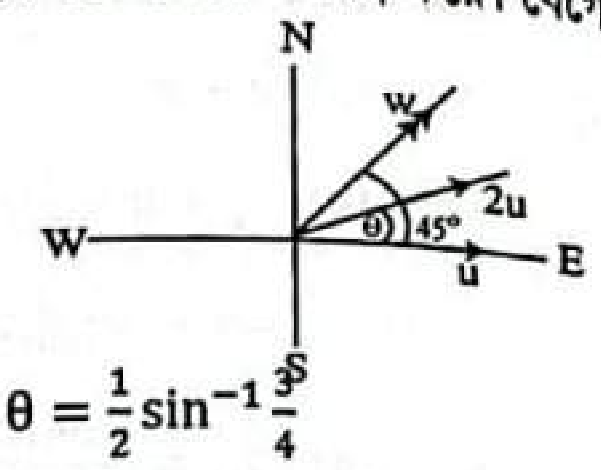
46. Sol^n: 

মোট দূরত্ব $= (400 + 500)m = 900m$

একটির সাপেক্ষে আরেকটির বেগ $= u + 2u = 3u$. $\therefore \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{বেগ}} =$ সময় $\Rightarrow \frac{900}{3u} = 10 \Rightarrow u = 30$

$\therefore$ ১ম ট্রেনের বেগ $= 30\ ms^{-1}$; ২য় ট্রেনের বেগ $= 60\ ms^{-1}$

47. **Solⁿ:** মনে করি, প্রথম জাহাজের সাপেক্ষে দ্বিতীয় জাহাজের আপেক্ষিক বেগ w, যা u এর সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। বেগের সাইসূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\frac{u}{\sin(45^\circ-\theta)}=\frac{2u}{\sin 45^\circ}=\frac{w}{\sin\theta}\Rightarrow\frac{u}{\sin(45^\circ-\theta)}=\frac{2u}{\sin 45^\circ}$



$\Rightarrow\frac{1}{\sin(45^\circ-\theta)}=\frac{2}{\sin 45^\circ}\Rightarrow\sin 45^\circ=2(\sin 45^\circ\cos\theta-\sin\theta\cos 45^\circ)$

$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\sin\theta\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow 1=2\cos\theta-2\sin\theta\Rightarrow\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin 2\theta=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow 2\theta=\sin^{-1}\frac{3}{4}\therefore\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

48. **Solⁿ:** ধরি, বস্তুকণাটির u আদিবেগ এবং f সমত্বরণে চলে t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে v বেগ প্রাপ্ত হয়।

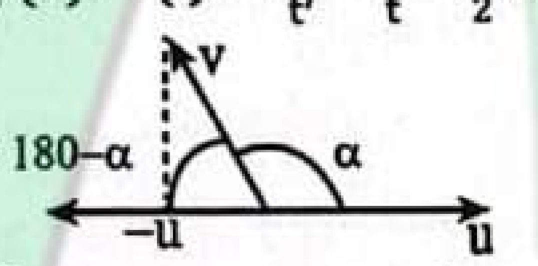
$\therefore v=u+ft$ এবং $s=ut+\frac{1}{2}ft^2\Rightarrow\frac{s}{t}=u+\frac{1}{2}ft$ ...... (i)

এখন বস্তুকণাটি v আদিবেগে f সমত্বরণে চলে t′ সময়ে s′ দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore s'=vt'+\frac{1}{2}ft'^2\Rightarrow\frac{s'}{t'}=v+\frac{1}{2}ft'=u+ft+\frac{1}{2}ft'$ ...... (ii), $[\because v=u+ft]$

এখন, (ii) − (i) $\Rightarrow\frac{s'}{t'}-\frac{s}{t}=\frac{1}{2}ft+\frac{1}{2}ft'=\frac{1}{2}f(t+t')\therefore f=2\left(\frac{s'}{t'}-\frac{s}{t}\right)/(t+t')$ **(Showed)**

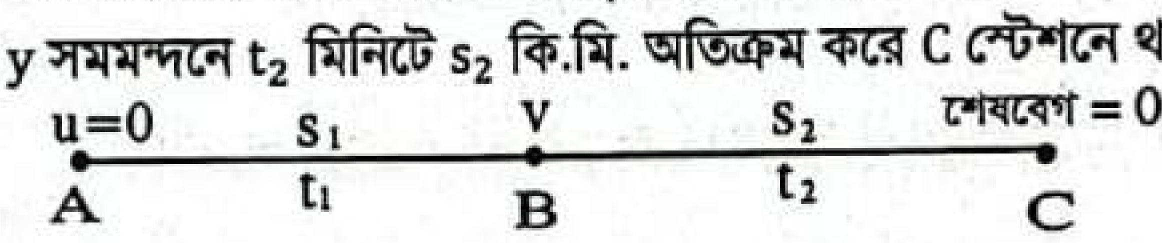
49. **Solⁿ:**



$\alpha=180^0-\theta$; $\cos\alpha=\frac{u}{v}\Rightarrow\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha=\frac{u}{v}$

স্রোতের সাপেক্ষে নৌকার বেগ $=\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\alpha}=\sqrt{u^2+v^2+2uv\frac{u}{v}}=\sqrt{3u^2+v^2}\ ms^{-1}$

50. **Solⁿ:** মনে করি, ট্রেনটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে x সমত্বরণে t_1 মিনিটে s_1 কি.মি. অতিক্রম করে B তে v বেগ প্রাপ্ত হয়। অতঃপর B তে v আদিবেগে y সমমন্দনে t_2 মিনিটে s_2 কি.মি. অতিক্রম করে C স্টেশনে থামে।



প্রশ্নমতে, $s_1+s_2=4, t_1+t_2=8.$

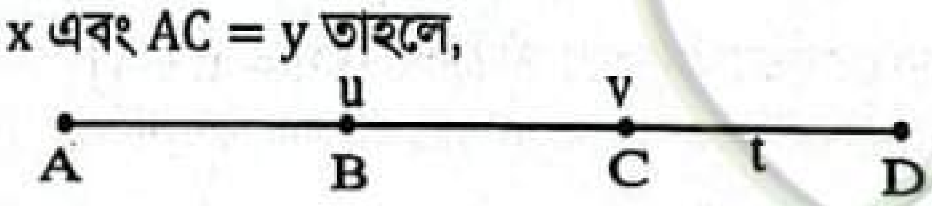
AB অংশে: $v=0+xt_1\Rightarrow t_1=\frac{v}{x}$ ...... (i) এবং $s_1=\frac{0+v}{2}\times t_1=\frac{vt_1}{2}$ ...... (ii)

BC অংশে: $0=v-yt_2\Rightarrow t_2=\frac{v}{y}$ ...... (iii) এবং $s_2=\frac{v+0}{2}\times t_2=\frac{vt_2}{2}$ ...... (iv)

(ii) + (iv) $\Rightarrow s_1+s_2=\frac{v}{2}(t_1+t_2)\Rightarrow 4=\frac{v}{2}\times 8\Rightarrow v=1,\ [\because s_1+s_2=4, t_1+t_2=8]$

(i) + (iii) $\Rightarrow t_1+t_2=v\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Rightarrow 8=1\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8$ **(Proved)**

51. **Solⁿ:** মনে করি, a ও b সমত্বরণে চলমান কণা দুইটির B ও C থেকে যথাক্রমে u ও v বেগে যাত্রা করার t সময় পর D তে মিলিত হয়, যেখানে নির্দিষ্ট বিন্দু A, AB = x এবং AC = y তাহলে,



$BD=ut+\frac{1}{2}at^2\quad\therefore AD=AB+BD=x+ut+\frac{1}{2}at^2$ ...... (i)

$CD=vt+\frac{1}{2}bt^2\quad\therefore AD=AC+CD=y+vt+\frac{1}{2}bt^2$ ...... (ii)

(i) − (ii) $\Rightarrow 0=(x-y)+(u-v)t+\frac{1}{2}(a-b)t^2\Rightarrow(a-b)t^2+2(u-v)t+2(x-y)=0$ ...... (iii)

যা t এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ বিধায় t এর দুইটির বেশি মান থাকতে পারেনা। সুতরাং কণা দুইটিও দুইবারের বেশি মিলিত হতে পারে না। ধরি, t এর মান দুইটি t_1 ও $t_2(t_1>t_2)$।

তাহলে, কণা দুইটি t_1 ও t_2 সময়ে মিলিত হয়, যেখানে $t_1+t_2=-\frac{2(u-v)}{a-b}$ এবং $t_1t_2=-\frac{2(x-y)}{a-b}$

$\therefore$ তাদের মিলিত হবার সময়ের পার্থক্য $=t_1-t_2=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\frac{4(u-v)^2}{(a-b)^2}-8\frac{x-y}{a-b}}$

$=\frac{2}{a-b}\sqrt{(u-v)^2-2(x-y)(a-b)}$ **(Proved)**

52. **Sol^n:** মনে করি, u_1 ও u_2 বেগে গতিশীল গাড়ি দুইটি t সময়ে যথাক্রমে x_1 ও x_2 দূরত্ব অতিক্রম করে এবং v_1 ও v_2 বেগ অর্জন করে। কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $v_1 = v_2$ …… (i) এবং $x_1 = x + x_2$ …… (ii) হয়।
(i) হতে পাই, $u_1 - f_1t = u_2 + f_2t \Rightarrow (f_1+f_2)t = u_1 - u_2 \Rightarrow t = \frac{u_1-u_2}{f_1+f_2}$
(ii) হতে পাই, $u_1t - \frac{1}{2}f_1t^2 = u_2t + \frac{1}{2}f_2t^2 + x_2 \Rightarrow (u_1-u_2)t = \frac{1}{2}(f_1+f_2)t^2 + x$
$\Rightarrow (u_1-u_2) \times \frac{u_1-u_2}{f_1+f_2} = \frac{1}{2}.(f_1+f_2) \times \frac{(u_1-u_2)^2}{(f_1+f_2)^2} + x \Rightarrow \frac{(u_1-u_2)^2}{f_1+f_2} = \frac{1}{2}.\frac{(u_1-u_2)^2}{f_1+f_2} + x$
$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{(u_1-u_2)^2}{f_1+f_2} = x$ ∴ কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $(u_1-u_2)^2 = 2(f_1+f_2)x$ হয়।

53. **Sol^n:** h উচ্চতা হতে পাথরটি পতিত হলে, $h = -10 \times 10 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 10^2 = 390m.$
যখন ভূমিতে পড়ে তখন বেলুনের উচ্চতা $= h + 100 = 490$

54. **Sol^n:** (i) এখানে বস্তুকণাটির বিচরণকাল $= (t + t')$ সেকেন্ড।
মনে করি, u নির্দিষ্ট বেগে উল্লম্বভাবে ভূমি থেকে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণাটি t সেকেন্ড সময়ে h উচ্চতায় উঠে।
∴ $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ …… (1) এবং কণার বিচরণকাল $= t + t' = \frac{2u}{g}$ ∴ কণার আদিবেগ $u = \frac{1}{2}g(t+t')$
(ii) সমীকরণ (1) এ u এর মান বসিয়ে পাই, $h = \frac{1}{2}g(t+t')t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt(t+t'-t)$ ∴ $h = \frac{1}{2}gt\,t'$
(iii) বৃহত্তম উচ্চতা $= \frac{u^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left\{\frac{1}{2}g(t+t')\right\}^2 = \frac{1}{8}g(t+t')^2$

55. **Sol^n:** একটি বল u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে তা t সেকেন্ড h উচ্চতায় উঠে।
∴ $h = ut - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 2h = 2ut - gt^2 \Rightarrow gt^2 - 2ut + 2h = 0$ … (i); যা t এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।
ধরি, t এর মান দুইটি t_1 ও t_2 $(t_2 > t_2)$ । তাহলে, h উচ্চতায় উত্থান $= t_1$ এবং পতনকাল $= t_2$.
(i) এর মূলদ্বয়ের গুণফল, $t_1 t_2 = \frac{2h}{g}$ ∴ $h = \frac{1}{2}g\,t_1t_2$
(i) এর মূলদ্বয়ের যোগফল, $t_1 + t_2 = -\frac{-2u}{g}$ ∴ $u = \frac{1}{2}g\,(t_1+t_2)$

56. **Sol^n:** মনে করি, পাথরটি H মিটার উঁচু থেকে পড়েছিল এবং পতনকাল T সেকেন্ড। ∴ $H = \frac{1}{2}gT^2$ … (i)
প্রথম $(T-t)$ সেকেন্ডে পাথরটির অতিক্রান্ত দূরত্ব H_1 মিটার হলে, $H_1 = \frac{1}{2}g(T-t)^2$ …… (ii)
∴ শেষ t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $h = H - H_1 = \frac{1}{2}gT^2 - \frac{1}{2}g(T-t)^2 = \frac{1}{2}g(T^2 - T^2 + 2Tt - t^2)$
$\Rightarrow \frac{2h}{g} = 2Tt - t^2 \Rightarrow 2Tt = \frac{2h}{g} + t^2 \Rightarrow T = \frac{h}{gt} + \frac{t}{2}$ ∴ পতনের মোট সময় $\left(\frac{h}{gt} + \frac{t}{2}\right)$ সেকেন্ড।

57. **Sol^n:** উল্লম্ব দিকে পাথরটির আদিবেগ $= 39.2 \times \sin 30° = 19.6\ ms^{-1}$
আনুভূমিক দিকে পাথরটির আদিবেগ, $u = 39.2 \times \cos 30° = 19.6\sqrt{3}\ ms^{-1}$; $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$
∴ $24.5 = -19.6t + 4.9t^2$ ∴ $t = 5, -1$ ∴ $t = 5\ [t \neq -1]$
5 sec আনুভূমিক দিকে পাথরটির সরণ $= 19.6\sqrt{3} \times 5 = 98\sqrt{3}$ m **(Ans.)**

58. **Sol^n:** এখানে বলটির প্রক্ষেপ বেগ $u = 9.8\ ms^{-1}$, প্রক্ষেপ কোণ $\alpha = 30^0$ এবং উল্লম্ব সরণ $h = 3.5 - 2.1 = 1.4$ মি.। বলটি ধরার সময় t সেকেন্ড হলে, $h = -u\sin 30^0 \times t + \frac{1}{2}g\,t^2 \Rightarrow 1.4 = -9.8 \times \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{2} \times 9.8\,t^2$
$\Rightarrow 4.9t^2 - 4.9\,t - 1.4 = 0 \Rightarrow 7t^2 - 7t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4\times7\times(-2)}}{14} = \frac{7\pm\sqrt{49+56}}{14} \Rightarrow t = \frac{7+\sqrt{105}}{14}, [\because t > 0]$
∴ বলটি ধরার সময় $t = 1.23$ সে. (প্রায়)
∴ খেলোয়াড়দ্বয়ের দূরত্ব = t সেকেন্ডে বলটির আনুভূমিক সরণ $= u\cos 30^0 \times t = 9.8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1.23 = 10.44$ মি. (প্রায়)

"অতীত থেকে অভিজ্ঞতা নিতে হবে কিন্তু সেটা যত সুন্দরই হোক, তার মায়ায় পরে সেখানে ঘর-বাড়ী বানিয়ে বসবাস শুরু করা যাবে না।"
Roy T. Bennett

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট-০১

নিজে পরীক্ষা দাও। অতঃপর উত্তরের সাথে মিলিয়ে নাও।

সময়: 20 মিনিট পূর্ণমান: 25 (MCQ: 15 + Written: 10)

MCQ

01. $i^{4n-2} = ?$
(a) i (b) 1 (c) $-i$ (d) -1

02. $i^{i} =$ কত?
(a) e^{π} (b) $e^{-\pi}$ (c) $e^{\frac{\pi}{2}}$ (d) $e^{-\frac{\pi}{2}}$

03. $x^2 - 2x - 1 = 0$ হলে সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha^2 + \beta^2 = ?$
(a) 10 (b) 6 (c) 8 (d) 2

04. $3x^2 - 10x + k = 0$ সমীকরণের দুটি মূল $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ হলে, α এর একটি মান কত?
(a) -10 (b) -3 (c) $\frac{1}{3}$ (d) 1

05. $y = \text{cosec}^{-1}x$ এর মুখ্যমানের সীমা কোনটি?
(a) $\frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (b) $-\frac{\pi}{2} \le y < \frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{-\pi}{2} < y \le \frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

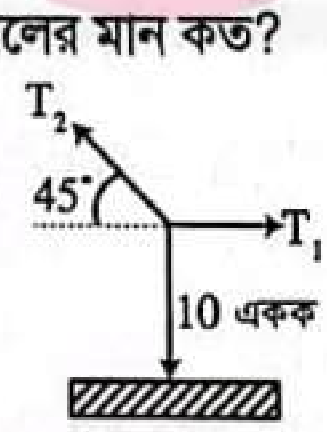
06. $(y-1)^2 = 4(2-x)$ পরাবৃত্তের নিয়ামক রেখার সমীকরণ কোনটি?
(a) $x + 2 = 0$ (b) $x - 2 = 0$ (c) $x + 3 = 0$ (d) $x - 3 = 0$

07. $16x^2 + 25y^2 = 400$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?
(a) 20π (b) 10π (c) 100π (d) 50π

08. $\tan 2\theta . \tan\theta = 1$ হলে $\theta = ?$
(a) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (b) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (c) $n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (d) কোনটিই নয়

09. $2P, 2\sqrt{3}\,P$ ও $2P$ বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। প্রথম বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ কত?
(a) 90° (b) 120° (c) 150° (d) 135°

10. নিচের চিত্র অনুসারে T_2 বলের মান কত?



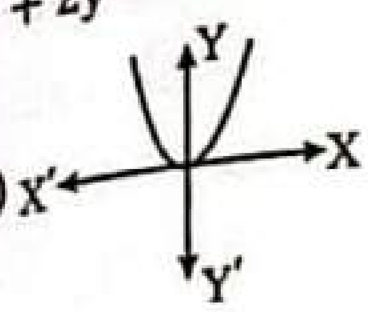
(a) $10\sqrt{2}$ একক (b) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ একক (c) 20 একক (d) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ একক

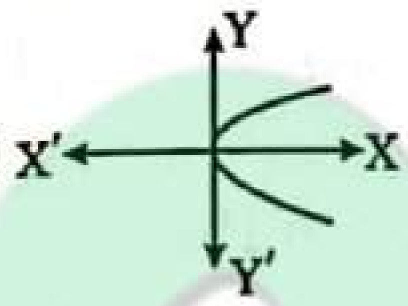
11. P ও Q মানের দুটি বল α কোণে ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি R. R সর্বোচ্চ হলে $\alpha = ?$
(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{8}$

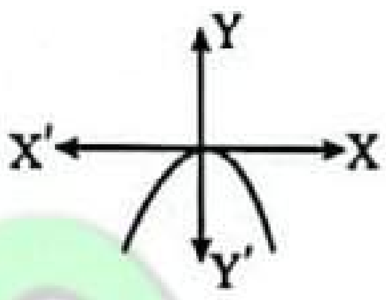
12. একটি নৌকা কোনো নদীর স্রোতের সাথে সমকোণে যাত্রা করে যাত্রাবিন্দু হতে স্রোতের দিক বরাবর 1·5 কি.মি দূরত্ব অতিক্রম করে অপর পাড়ে পৌঁছাল। নৌকার বেগ স্রোতের বেগের তিনগুণ হলে, নদীর প্রস্থ কত?
(a) 3 কি.মি (b) 4.5 কি.মি (c) 6 কি.মি (d) 9 কি.মি

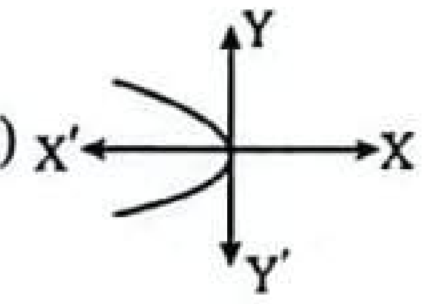
13. $\sin^{-1}p + \sin^{-1}q = \frac{\pi}{2}$ হলে $p\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{1-p^2}$ এর মান কত?
(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) অনির্ণেয়

14. 5g ভরের বুলেট 160 cm দীর্ঘ রাইফেলের নলের মুখ হতে 800 cms^{-1} বেগে নির্গত হয়। নলের মধ্যস্থিত বুলেটের উপর প্রযুক্ত সমবলের মান কত?
(a) 0.1N (b) 0.2N (c) 0.3N (d) 0.4N

15. $x^2 + 2y = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র কোনটি?
(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

Written

01. যদি $x^2 + bx + c = 0$ এবং $x^2 + mx + n = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে তাহলে প্রমাণ কর যে, সাধারণ মূলটি $\frac{bn-cm}{m-b}$ এর বর্গমূল হবে। 2.5

02. $z = x + iy$ এবং $\arg\left(\frac{z-2}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 - x - 2 = 0.$ 2.5

03. একটি উপবৃত্তের বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষ যথাক্রমে x ও y অক্ষ বরাবর অবস্থিত। উপবৃত্তটির ফোকাসদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব 8 একক এবং দিকাক্ষদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব 18 একক হলে, উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 2.5

04. প্রমাণ কর: $\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}(\sqrt{\cos\theta}) = \frac{\pi}{2}$ 2.5

Solution of Model Test-01

MCQ

01. **Solⁿ: (d);** $i^{4n-2} = i^{4n}.i^{-2} = \frac{i^{4n}}{i^2} = \frac{(i^4)^n}{-1} = \frac{1^n}{-1} = -1$

02. **Solⁿ: (d);** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \therefore e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \therefore i^i = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^i = e^{\frac{i^2\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$

03. **Solⁿ: (b);** মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \beta = 2; \alpha\beta = -1 \therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2(-1) = 6$

04. **Solⁿ: (c);** $\alpha.\frac{1}{\alpha} = \frac{k}{3} \therefore k = 3 \therefore$ সমীকরণ, $3x^2 - 10x + 3 = 0$
$\Rightarrow 3x^2 - 9x - x + 3 = 0 \Rightarrow (3x-1)(x-3) = 0 \therefore x = 3, \frac{1}{3} \therefore \alpha$ এর একটি মান $\frac{1}{3}$ **(Ans.)**

05. **Ans: (d);** $\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

06. **Solⁿ: (d);** $(y-1)^2 = -4(x-2) \therefore a = -1 \therefore x - 2 = -(-1) \Rightarrow x = 3 \therefore x - 3 = 0$

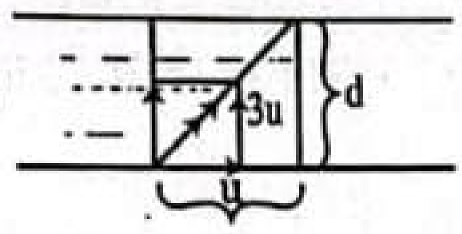
07. **Solⁿ: (a);** $16x^2 + 25y^2 = 400 \Rightarrow \frac{x^2}{(5)^2} + \frac{y^2}{(4)^2} = 1 \therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi \times 5 \times 4 = 20\pi$

08. **Solⁿ: (b);** Option Check এর মাধ্যমে সহজেই সমাধান করা সম্ভব।
এক্ষেত্রে $\theta = \frac{\pi}{6}$ হলে $\tan 2\theta.\tan\theta = \left(\tan\frac{\pi}{3}\right)\left(\tan\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3} = 1$
বিকল্প: $\tan 2\theta . \tan\theta = 1$
$\Rightarrow \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}.\tan\theta = 1 \Rightarrow \frac{2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta} = 1 \Rightarrow 3\tan^2\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}.$

09. **Solⁿ: (c);** $(2P)^2 = (2P)^2 + (2\sqrt{3}P)^2 + 2.2P.2\sqrt{3}.P\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \alpha = 150°$

10. **Solⁿ: (a);** $\frac{10}{\sin 135°} = \frac{T_2}{\sin 90°} \Rightarrow T_2 = 10\sqrt{2}$ একক

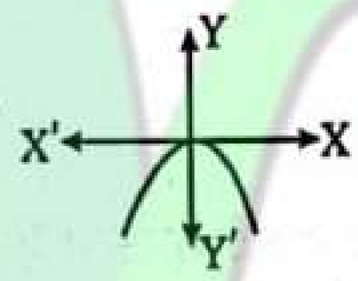
11. **Ans: (a);** 0

12. Sol^n: (b); 

সদৃশকোণী ত্রিভুজের ধারণা হতে- $\frac{u}{3u} = \frac{1.5}{d} \therefore d = 4.5$ km

13. Sol^n: (b); $\sin^{-1}p + \sin^{-1}q = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^{-1}\left(p\sqrt{1-p^2} + q\sqrt{1-q^2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow p\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{1-p^2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

14. Sol^n: (a); $8^2 = 2f \times 1.6 \Rightarrow f = 20\text{ms}^{-2} \therefore P = (5\times10^{-3}\times20)\text{N} = 0.1\text{N}$

15. Sol^n: (c); $x^2 = -2y = 4\left(-\frac{1}{2}\right)y$ 

Written

01. Sol^n: ধরি, সাধারণ মূল $= \alpha$

$\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)

$\alpha^2 + m\alpha + n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) $\times$ m $\Rightarrow \quad m\alpha^2 + bm\alpha + cm = 0$

(ii) $\times$ b $\Rightarrow \quad b\alpha^2 + bm\alpha + bn = 0$

$(-) \Rightarrow (m-b)\alpha^2 + cm - bn = 0 \Rightarrow (m-b)\alpha^2 = bn - cm \Rightarrow \alpha^2 = \frac{bn-cm}{m-b} \therefore \alpha = \sqrt{\frac{bn-cm}{m-b}}$ (প্রমাণিত)

02. Sol^n: দেওয়া আছে, $z = x + iy$

এখন, $\frac{z-2}{z+1} = \frac{x+iy-2}{x+iy+1} = \frac{(x-2)+iy}{(x+1)+iy} = \frac{\{(x-2)+iy\}\{(x+1)-iy\}}{\{(x+1)+iy\}\{(x+1)-iy\}}$

$\frac{(x-2)(x+1)+iy(x+1)-iy(x-2)+y^2}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2-x-2+y^2+iy(x+1-x+2)}{x^2+y^2+2x+1}$

$\frac{x^2+y^2-x-2+i(3y)}{x^2+y^2+2x+1} = \frac{x^2+y^2-x-2}{x^2+y^2+2x+1} + i\frac{3y}{x^2+y^2+2x+1}$

$\arg\left(\frac{z-2}{z+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3y}{x^2+y^2-x-2}\right) \therefore \tan^{-1}\left(\frac{3y}{x^2+y^2-x-2}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{x^2+y^2-x-2}{3y} = \cot\frac{\pi}{2}$ [বিপরীতকরণ করে]

$\Rightarrow \frac{x^2+y^2-x-2}{3y} = 0 \quad \therefore x^2 + y^2 - x - 2 = 0$ (প্রমাণিত)

03. Sol^n: প্রশ্নমতে, $2ae = 8 \ldots\ldots\ldots$ (i); $\frac{2a}{e} = 18 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) $\times$ (ii) $\Rightarrow 4a^2 = 144 \therefore a^2 = 36$

(i) $\div$ (ii) $\Rightarrow e^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow b^2 = 20 \therefore$ সমীকরণ $= \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

04. Sol^n: $\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}(\sqrt{\cos2\theta}) = \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{1-\cos2\theta} + \sqrt{\cos2\theta}\sqrt{1-2\sin^2\theta}\right\}$

$\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta \times \sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{\cos2\theta}\sqrt{\cos2\theta}) = \sin^{-1}(2\sin^2\theta + \cos2\theta)$

$= \sin^{-1}(1 - \cos2\theta + \cos2\theta) = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2} =$ R.H.S (প্রমাণিত)

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট-০২

নিজে পরীক্ষা দাও। অতঃপর উত্তরের সাথে মিলিয়ে নাও।

সময়: 20 মিনিট | পূর্ণমান: 25 (MCQ: 15 + Written: 10)

MCQ

01. 'k' এর মান কত হলে, $(k^2-3)x^2+3kx+(3k+1)=0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় পরস্পর উল্টা হবে?
(a) $2,-1$ (b) $3,-1$ (c) $4,-1$ (d) $1,4$

02. $\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4}$ এর মডুলাস কত হবে?
(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

03. $x^3+x^2-25x-25=0$ সমীকরণের মূলের সংখ্যা হচ্ছে-
(a) বাস্তব 3 টি, অবাস্তব 0টি (b) বাস্তব 2টি, অবাস্তব 1টি (c) বাস্তব 1টি, অবাস্তব 2টি (d) কোনোটিই নয়

04. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল i^3 হলে অপর মূল কোনটি?
(a) 0 (b) -1 (c) $-i$ (d) i

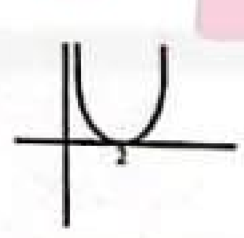
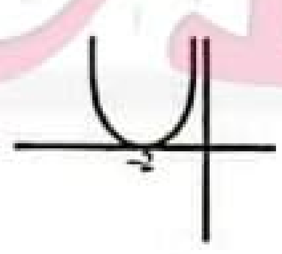
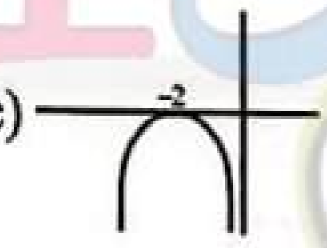
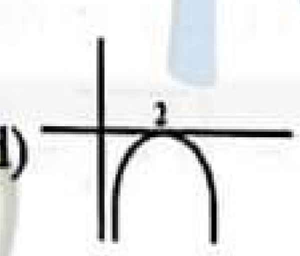
05. $\frac{1}{x}+a-bx=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে কোনটি সঠিক?
(a) $b^2+4a=0$ (b) $b^2=4a$ (c) $a^2+4b=0$ (d) $a^2=4b$

06. $y=\cot^{-1}x$ এর রেঞ্জ নিচের কোনটি?
(a) $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ (b) $[0,\pi]$ (c) $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ (d) $(0,\pi)$

07. $\sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{x}{y}=?$
(a) $\frac{\sqrt{x^2-2y^2}}{x}$ (b) $\frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{x}$ (c) $\frac{\sqrt{y^2-2x^2}}{y}$ (d) $\frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$

08. কোন কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা $0<e<1$ হলে, ঐ কনিকের আদর্শ সমীকরণ কোনটি?
(a) $y^2=4ax$ (b) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ (c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (d) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

09. $x^2+3y^2-2x=8$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত?
(a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (d) $\frac{3}{5}$

10. নিচের কোনটি $y=-(x+2)^2$ এর লেখচিত্র?
(a) 
(b) 
(c) 
(d) 

11. ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুকে কি বলে?
(a) অন্তকেন্দ্র (b) পরিকেন্দ্র (c) ভরকেন্দ্র (d) লম্বকেন্দ্র

12. কোনো বিন্দুতে p ও 2p মানের দুটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথমটিকে দ্বিগুণ করলে এবং দ্বিতীয়টির মান 8 একক বাড়ালে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। p এর মান কত?
(a) 12 একক (b) 8 একক (c) 4 একক (d) 10 একক

13. সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা চতুর্থ সেকেন্ডে 10 m ও ষষ্ঠ সেকেন্ডে 14 m দূরত্ব অতিক্রম করলে 10 s পরে এর বেগ কত হবে?
(a) $20ms^{-1}$ (b) $23\ ms^{-1}$ (c) $26\ ms^{-1}$ (d) $30ms^{-1}$

14. একটি স্তম্ভের চূড়া হতে $5ms^{-1}$ বেগে আনুভূমিক দিকে নিক্ষিপ্ত একটি বল স্তম্ভের পাদদেশ থেকে 20 মিটার দূরে মাটিতে পড়ে। স্তম্ভের উচ্চতা কত?
(a) 78·4 m (b) 78 m (c) 68·4m (d) 80·4m

15. $\sqrt{-2+2\sqrt{-2+2\sqrt{-2+\cdots\cdots\infty}}}=?$
(a) $1+\omega$ (b) $2+\omega$ (c) $1\pm i$ (d) $2\pm i$

Written

01. $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$ হলে প্রমাণ কর, (i) $\theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ এবং (ii) $\theta = \pm\frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 2.5

02. সমবেগে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি বিমান হতে একটি বোমা ছেড়ে দেয়ার 5 sec পর মাটিতে পড়ে। মাটিতে পড়ার মুহূর্তে বিমানটির উচ্চতা নির্ণয় কর। 2.5

03. $ax^2 + bx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $m : n$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0.$ 2.5

04. $y^2 = 24x$ পরাবৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যা (2, 3) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। 2.5

Solution of Model Test-02

MCQ

01. **Sol^n: (c);** $\frac{3k+1}{k^2-3} = 1 \Rightarrow k^2 - 3k - 4 = 0 \Rightarrow k = 4, -1$

02. **Sol^n: (b);** $\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4}$ এর মডুলাস $= \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2 . \left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)^{-4} = \frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^4} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$

03. **Sol^n: (a);** $x^3 + x^2 - 25x - 25 = 0 \Rightarrow (x^2 + 6x + 5)(x - 5) = 0$
$x^2 + 6x + 5 = 0$ এর দুইটি মূলই বাস্তব কেননা নিশ্চায়ক $= (6)^2 - 4.1.5 = 16$, যা 0 অপেক্ষা বড়। $\therefore$ তিনটি মূলই বাস্তব।

04. **Sol^n: (d);** একটি মূল $i^3 = -i$ $\therefore$ অপর মূল i

05. **Sol^n: (c);** $\frac{1}{x} + a - bx = 0 \Rightarrow bx^2 - ax - 1 = 0$ মূলদ্বয় সমান হলে,
$D = (-a)^2 - 4.b.(-1) = 0 \quad \therefore a^2 + 4b = 0$

06. **Ans: (d);** $(0, \pi)$

07. **Sol^n: (d);** $\sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{x}{y} = \sin\cos^{-1}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y} = \sqrt{1 - \frac{x^2-y^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{2y^2-x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$

08. **Sol^n: (c);** উৎকেন্দ্রিকতা $0 \angle e \angle 1$ হলে কনিকটি উপবৃত্ত যার আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

09. **Sol^n: (c);** $x^2 + 3y^2 - 2x = 8 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + 3y^2 = 9 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$
$\therefore e = \sqrt{1 - \frac{3}{9}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

10. **Ans: (c);** $y = -(x+2)^2$
x axis এ $y = 0 \ \therefore -(x+2)^2 = 0 \therefore x = -2$

11. **Ans: (b);** পরিকেন্দ্র

12. **Sol^n: (c);** $\frac{p}{2p} = \frac{2p}{2p+8} \Rightarrow 4p = 2p + 8 \therefore p = 4$ unit

13. **Sol^n: (b);** $S_{th} = u + \frac{1}{2}a(2t - 1)$
$10 = u + \frac{1}{2}a \times 7 \ldots\ldots$ (i); $14 = u + \frac{1}{2}a \times 11 \ldots\ldots$ (ii)
(i) ও (ii) সমাধান করে, $u = 3\ ms^{-1}$; $a = 2ms^{-2}$
$\therefore v = u + at = (3 + 2 \times 10)ms^{-1} = 23ms^{-1}$

14. **Sol^n: (a);** $t = \frac{x}{v} = \frac{20}{5}$ s $= 4s$; $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times (4)^2 = (16 \times 4{\cdot}9)m = 78{\cdot}4m$

15. **Sol^n: (c);** $x = \sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \cdots\cdots\infty}} \Rightarrow x^2 = -2 + 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$

Written

01. **Solⁿ:** (i); $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta) \Rightarrow \sin(\pi\cos\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta\right)$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \pm \sin\theta \Rightarrow \cos\theta \pm \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow 1 \pm \sin 2\theta = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sin 2\theta = \pm\frac{3}{4} \Rightarrow 2\theta = \pm\sin^{-1}\frac{3}{4} \Rightarrow \theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ **(Proved)**

(ii); $\cos\theta \pm \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

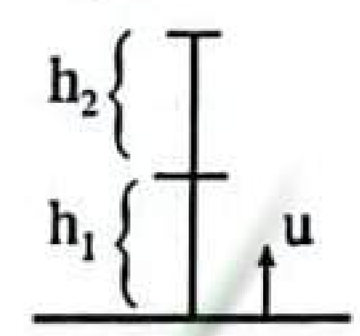
$\Rightarrow \cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **(Proved)**

02. **Solⁿ:** মনে করি, u সমবেগে খাড়া উপরের দিকে বিমানটি h_1 উচ্চতায় উঠার পর বোমা ছাড়লে 5 sec পর মাটিতে পড়ে।

$\therefore$ বোমার ক্ষেত্রে, $h_1 = -ut + \frac{1}{2}gt^2 = -5u + \frac{1}{2}g \times 5^2 = -5u + \frac{25}{2}g$

আবার, 5 sec পর বিমানটির অতিক্রান্ত উচ্চতা, $h_2 = 5u$

$\therefore$ বোমা মাটিতে পড়ার সময় বিমানের উচ্চতা $= h_1 + h_2 = -5u + \frac{25}{2}g + 5u = \frac{25}{2} \times 9.8 = 122.5$ m



03. **Solⁿ:** $ax^2 + bx + b = 0$, সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এখানে, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$ এবং $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$; $\alpha\beta = \frac{b}{a}$

$\therefore$ L.H.S $= \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{-\frac{b}{a}}{\sqrt{\frac{b}{a}}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$

$= -\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0 =$ R.H.S

04. **Solⁿ:** $y.3 - 12(x+2) = 3^2 - 24.2 \Rightarrow 4x - y - 5 = 0$

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট-০৩

নিজে পরীক্ষা দাও। অতঃপর উত্তরের সাথে মিলিয়ে নাও।

সময়: 20 মিনিট | পূর্ণমান: 25 (MCQ: 15 + Written: 10)

MCQ

01. $|z + \bar{z}| = |z - \bar{z}|$ হলে, z এর সঞ্চারপথ হবে–

(a) সরলরেখা (b) অধিবৃত্ত (c) একজোড়া সরলরেখা (d) বৃত্ত

02. পরাবৃত্ত ও এর অক্ষরেখার ছেদবিন্দুকে কী বলা হয়?

(a) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র (b) পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু

(c) পরাবৃত্তের কেন্দ্র (d) উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দু

03. $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{i^{2021}} = ?$

(a) 1 (b) $-i$ (c) 0 (d) i

04. $(k-4)x^2 - 2(k+2)x - 1 = 0; (k \neq 0)$ সমীকরণের মূল দুইটি সমান হলে k এর মান হবে-

(a) -5 (b) 5 (c) 0 (d) 2

05. k এর কোন মানের জন্য নিম্নলিখিত সমীকরণ জোটের অসংখ্য সমাধান পাওয়া যাবে? $x - y = 3$; $2x - 2y = k$

(a) $-\infty < k < \infty$ (b) $k \neq 6$ (c) $k = \frac{3}{2}$ (d) $k = 6$

06. নিচের কোনটি বহুপদী রাশি?

(a) $\frac{1}{x} + e$ (b) $x\sqrt{x} + e$ (c) $x^{-2} + x^2$ (d) x

07. $\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4}$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট হবে–

(a) π (b) $-\pi$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $-\frac{\pi}{2}$

08. y এর কোন মানের জন্য $x + iy$ বাস্তব সংখ্যা হবে?

(a) শূন্য (b) ধনাত্মক (c) ঋণাত্মক (d) কোনটিই নয়

09. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের অসীমতট রেখার সমীকরণ-

(a) $y = \pm\frac{a}{b}x$ (b) $y = \pm\frac{b}{a}x$ (c) $x = \pm\frac{b}{a}y$ (d) কোনটিই নয়

10. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের মূখ্য সহগ 1। একজন ছাত্র x এর সহগ–6 এর পরিবর্তে ভুল করে –9 পড়ে এবং মূল নির্ণয় করে ৪ এবং 1, সঠিক মূলগুলো হল-

(a) 5, 1 (b) 4, 2 (c) $-4, -2$ (d) $-5, -1$

11. $\cos\theta = -1$ হলে θ এর সাধারণ মান কত?

(a) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (b) $(2n+1)\pi$ (c) $(4n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ (d) $(4n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

12. l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সুতার এক প্রান্ত কোন খাড়া দেয়ালে আটকানো আছে এবং তার অপর প্রান্ত a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের উপরস্থ কোন বিন্দুতে সংযুক্ত আছে। গোলকটির ওজন w হলে, সুতার টান কত?

(a) $\frac{w(a+l)}{\sqrt{2al+l^2}}$ (b) $\frac{w(a+l)}{\sqrt{2al-l^2}}$ (c) $\frac{w(a-l)}{\sqrt{2al-l^2}}$ (d) $\frac{w(a+l)}{\sqrt{2al+l^3}}$

13. নিচের কোনটি সঠিক নয়?

(a) $2\tan^{-1}\sqrt{a} = \cos^{-1}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)$ (b) $\tan^{-1}\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}\left(\tan^{-1}\frac{3\sqrt[3]{a}-a}{1-3a}\right)$

(c) $\tan^{-1}p = \frac{1}{2}.\sin^{-1}\frac{2p}{1+p^2}$ (d) $\cos^{-1}\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}\cos^{-1}(4a - 3\sqrt[3]{a})$

14. একজন নাবিক v kmh^{-1} বেগে একটি নৌকা চালিয়ে u kmh^{-1} বেগে প্রবাহিত একটি নদী ন্যূনতম পথে পাড়ি দিতে চায়। নদীর স্রোতের সাপেক্ষে নৌকার আপেক্ষিক বেগ কত?

(a) $\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\left(\sin^{-1}\frac{u}{v}\right)}$ (b) $\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\left(\sin^{-1}\frac{u}{v}\right)}$

(c) $\sqrt{u^2+v^2+2uv\sin\left(\sin^{-1}\frac{u}{v}\right)}$ (d) $\sqrt{u^2+v^2-2uv\sin\left(\sin^{-1}\frac{u}{v}\right)}$

15. একটি বুলেট লক্ষ্যবস্তুর 3 cm ভিতরে প্রবেশ করতে তার অর্ধেক বেগ হারায়। লক্ষ্যবস্তুর প্রতিরোধ সুষম হলে বুলেটটি আর কতদূর প্রবেশ করবে?

(a) 0.5 cm (b) 1 cm (c) 1·5 cm (d) 2 cm

Written

01. S(3, 2) ও S′(11, 2) উপকেন্দ্রবিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 20 একক। 2.5

02. $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$ হলে প্রমাণ কর যে, $4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ 2.5

03. প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}(-\cos x) + \sin^{-1}(\cos 3x) = -2x$ 2.5

04. একই বেগে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপকের নির্দিষ্ট পাল্লা R এর জন্য দুটি বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা h, h' হলে, দেখাও যে, $R = 4\sqrt{hh'}$। 2.5

Solution of Model Test-03

MCQ

01. **Solⁿ: (c);** $z = x + iy$ হলে, $|z + \bar{z}| = |2x|$ এবং $|z - \bar{z}| = |2y|$ ∴ $|2x| = |2y| \Rightarrow x = \pm y$ এটি জোড়া সরলরেখা।

02. **Ans: (b);** পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু

03. **Solⁿ: (b);** $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} = i^3 + i^2 + i + 1$
$\because (2021 \div 4)$ এর ভাগশেষ 1 সেহেতু, রাশিটি $= \frac{1}{i} = -i$

04. **Solⁿ: (a);** $4(k+2)^2 - 4.(k-4).(-1) = 0$
$\Rightarrow k^2 + 4k + 4 + k - 4 = 0 \Rightarrow k^2 + 5k = 0 \Rightarrow k(k+5) = 0 \therefore k = 0, -5$ কিন্তু $k \neq 0$ $\therefore k = -5$

05. **Solⁿ: (d);** $k = 6$ হলে, $2x - 2y = 6 \Rightarrow x - y = 3$; অর্থাৎ একই সমীকরণ ফিরে আসে। ফলে এদের অসংখ্য সমাধান থাকবে।

06. **Ans: (d);** x

07. **Solⁿ: (d);** $\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4} = \left(\frac{i+1}{i-1}\right)^2 \times \frac{1}{(i-1)^2} = \frac{i^2+2i+1}{i^2-2i+1} \times \frac{1}{i^2-2i+1} = \frac{2i}{-2i} \times \frac{1}{-2i} = -\frac{i}{2} = 0 - \frac{i}{2} \therefore Arg = -\frac{\pi}{2}$

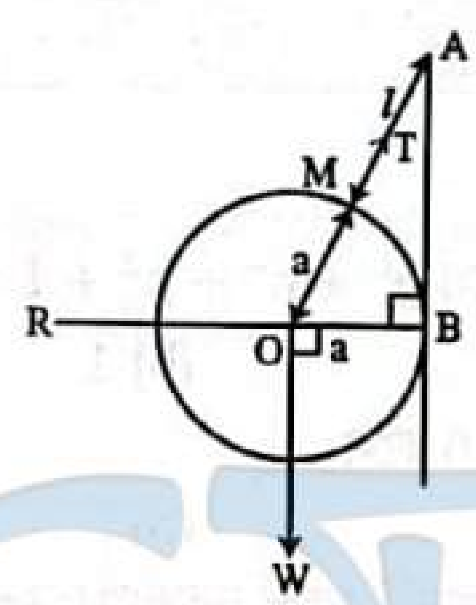
08. **Ans: (a);** শূন্য

09. **Solⁿ: (b);** Short technique: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}x$

10. **Solⁿ: (b);** $x^2 - 9x + c = 0$ এর মূলদ্বয় 8 ও 1 ∴ $8.1 = c \Rightarrow c = 8$
প্রকৃত সমীকরণ $x^2 - 6x + 8 = 0$ যার সমাধান 4, 2

11. **Ans: (b);** $(2n+1)\pi$

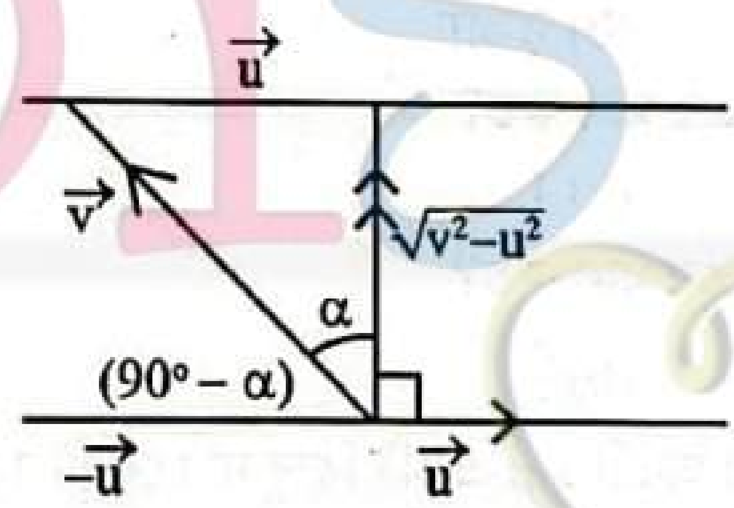
12. **Solⁿ: (a);** লামির সূত্র হতে, $\frac{W}{\sin(180 - \angle AOB)} = \frac{R}{\sin(90 + \angle AOB)} = \frac{T}{\sin 90°}$
$\Rightarrow \frac{W}{\sin\angle AOB} = T \therefore T = \frac{W}{\frac{\sqrt{2al+l^2}}{(a+l)}} = \frac{W(a+l)}{\sqrt{2al+l^2}}$



$OM = a$
$AM = l$
$\therefore OA = AM + OM = l + a$
$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{(a+l)^2 - a^2} = \sqrt{2al + l^2}$

13. **Ans: (b);** $\tan^{-1}\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}\left(\tan^{-1}\frac{3\sqrt[3]{a} - a}{1 - 3a}\right)$

14. **Solⁿ: (c);**
$\vec{v}_R = \vec{v} - \vec{u}$
$|\vec{v}_R| = \sqrt{v^2 + u^2 + 2.u.v.\cos(90° - \alpha)}$
$= \sqrt{v^2 + u^2 + 2.u.v.\sin\alpha}$
$= \sqrt{u^2 + v^2 + 2.u.v.\sin\left(\sin^{-1}\frac{u}{v}\right)}$

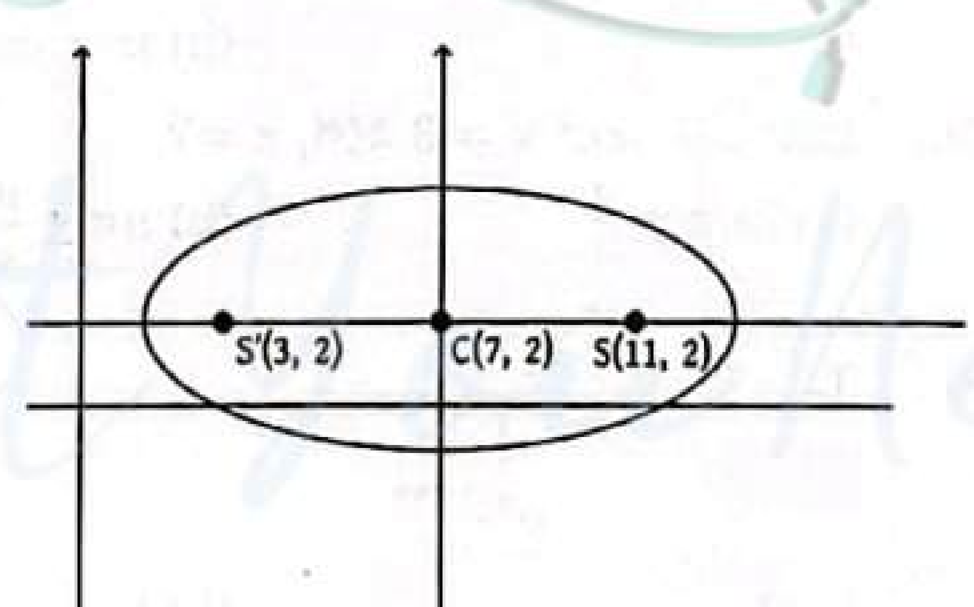


$\sin\alpha = \frac{u}{v}$
$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{u}{v}\right)$

15. **Solⁿ: (b);** s দূরত্ব অতিক্রম করে যদি বেগ $\frac{1}{n}$ অংশ হয়, তবে আরও অতিক্রম করবে $\frac{s}{n^2-1}$ দূরত্ব।
∴ এক্ষেত্রে আরও অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \frac{s}{2^2-1} = \frac{3}{3}$ cm $= 1$ cm

Written

01. **Solⁿ:** এখানে, কেন্দ্র $C\left(\frac{3+11}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \therefore C(7,2)$
বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 20 \therefore a = 10$
$2ae = 11 - 3 = 8 \therefore ae = 4 \Rightarrow 10e = 4$
$\therefore e = \frac{2}{5} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{25} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{100} = \frac{4}{25} \Rightarrow \frac{b^2}{100} = \frac{21}{25} \therefore b^2 = 84$
∴ উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-7)^2}{10^2} + \frac{(y-2)^2}{84} = 1$
$\therefore \frac{(x-7)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{84} = 1$ **(Ans.)**



02. **Sol^n:** দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$
$\Rightarrow a + ib = (x+iy)^3 \Rightarrow a + ib = x^3 + i^3y^3 + 3x^2.iy + 3x.i^2y^2 \Rightarrow a + ib = x^3 - iy^3 + 3ix^2y - 3xy^2$
Now, $a = x^3 - 3xy^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3 \Rightarrow \frac{a}{x} = x^2 - 3y^2$ ……… (i) $\Rightarrow \frac{b}{y} = 3x^2 - y^2$ ……… (ii)
(i) + (ii) $\Rightarrow \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4x^2 - 4y^2 = 4(x^2 - y^2)$ **(Proved)**

03. **Sol^n:** $L.H.S = \sin^{-1}(-\cos x) + \sin^{-1}(\cos 3x)$
$= \sin^{-1}\{-\cos x\sqrt{1-\cos^2 3x} + \cos 3x\sqrt{1-\cos^2 x}\} = \sin^{-1}\{(-\cos x \sin 3x + \cos 3x \sin x)\}$
$= \sin^{-1}\{-\sin(3x - x)\} = \sin^{-1}(-\sin 2x) = \sin^{-1}\{\sin(-2x)\} = -2x = R.H.S$

04. **Sol^n:** $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$ [নিক্ষেপণ কোণ θ ও নিক্ষেপণ বেগ u]
$= \frac{2u^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$ ……… (i)
আবার, $h = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$; $h' = \frac{u^2 \sin^2(90^\circ - \theta)}{2g} = \frac{u^2 \cos^2\theta}{2g}$ $\therefore 4\sqrt{hh'} = \sqrt[4]{\frac{u^4 \sin^2\theta.\cos^2\theta}{4g^2}} = \frac{2u^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = R$ [(i) থেকে]

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট-০৪

নিজে পরীক্ষা দাও। অতঃপর উত্তরের সাথে মিলিয়ে নাও।

সময়: 20 মিনিট | পূর্ণমান: 25 (MCQ: 15 + Written: 10)

MCQ

01. $\sqrt{2}p = 1 + i$ হলে $p^6 + p^4 + p^2 + 1 = ?$
(a) -1 (b) 1 (c) 0 (d) কোনোটিই নয়

02. $5x - x^2 - 6 > 0$ হলে-
(a) $x < 2$ (b) $2 > x > 3$ (c) $2 < x < 3$ (d) $x > 3, x < 2$

03. $3 - 7i$ জটিল সংখ্যাটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করে?
(a) চতুর্থ (b) তৃতীয় (c) দ্বিতীয় (d) প্রথম

04. $x - iy = -1 - i$ হলে y এর মান কত?
(a) -1 (b) 1 (c) i (d) $-i$

05. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cot^{-1}x$ এর মান কত?
(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) $\frac{\pi}{3}$

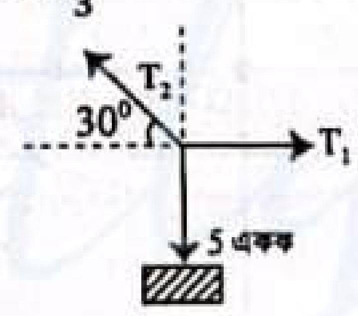
06. $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত p একটি বিন্দু যার কোটি 12 । বিন্দুটির উপকেন্দ্রিক দূরত্ব কত?
(a) 12 (b) 15 (c) 10 (d) 20

07. আয়তাকার অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত?
(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) 2

08. $\sin(\sin^{-1}x + 2\cos^{-1}x) = ?$
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) x (c) $\sqrt{1-x^2}$ (d) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

09. $\tan^2 x + \sec^2 x = 3$ হলে, $x = ?$
(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (b) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (c) both (d) কোনটিই নয়

10. $T_1 = ?$



(a) 3 (b) 5 (c) 10 (d) $5\sqrt{3}$

11. দুইটি সমান বল কোনো এক বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি বলগুলোর লব্ধির বর্গ বলগুলোর গুণফলের তিনগুণ হয়, তবে বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ কত?
(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

12. একজন লোক $5\ ms^{-1}$ বেগ নিয়ে স্থির পানিতে সাঁতার কাটতে পারে। সে $3ms^{-1}$ বেগে প্রবাহিত 15 m প্রস্থের একটি নদী সোজাসুজি পার হতে চায়। লোকটির নদী পার হতে কত সময় লাগবে?
(a) 8 s (b) 3s (c) 4s (d) $\frac{15}{4}$s

13. ভূমিতে পতিত একটি বোমা ফাটলে তার কণাগুলো u গতিবেগে ছুটতে ভূমির যে অংশ নিয়ে কণাগুলো ছড়িয়ে পড়বে তার ক্ষেত্রফল কত হবে?
(a) $\frac{\pi u^2}{g}$ (b) $\frac{\pi u^4}{2g}$ (c) $\frac{\pi u^4}{g^2}$ (d) $\frac{\pi u^3}{g^2}$

14. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = ?$
(a) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y+\sqrt{y^2-x^2}}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{x+\sqrt{y^2-x^2}}\right)$ (c) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{y-x}{y+x}\right)}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{y+x}{y-x}\right)}\right)$

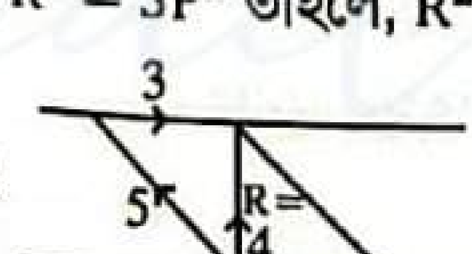
15. $5x^2 - 6x + 7 = 0$ সমীকরণের মূল α হলে $\frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।
(a) $6x^2 - 5x + 7 = 0$ (b) $7x^2 + 6x + 5 = 0$ (c) $7x^2 - 6x + 6 = 0$ (d) $7x^2 - 6x + 5 = 0$

Written

01. (5, 9) বিন্দুগামী, অসীমতট $y = \pm x$; অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2.5
02. 3P এবং 2P মানের দুটি বলের লব্ধি R। প্রথম বলটির মান দ্বিগুণ করলে লব্ধির মানও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। 2.5
03. সমাধান কর: $a\cos x + b\sin x = c$ [a, b, c ধ্রুবক] 2.5
04. মান নির্ণয় কর: $\sqrt[6]{-27}$ 2.5

Solution of Model Test-04

MCQ

01. **Sol^n: (c);** $p^2 = \frac{(1+i)^2}{2} = i \therefore p^6 + p^4 + p^2 + 1 = i^3 + i^2 + i + 1 = 0$
02. **Sol^n: (c);** $5x - x^2 - 6 > 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) < 0 \therefore 2 < x < 3$
03. **Ans: (a);** চতুর্থ
04. **Ans: (b);** 1
05. **Sol^n: (b);** $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cot^{-1}x = \frac{1}{2}.2\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
06. **Sol^n: (b);** $y = 12 \therefore x = \frac{12^2}{12} = 12 \therefore$ উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= a + x = 3 + 12 = 15$
07. **Ans: (a);** $\sqrt{2}$
08. **Sol^n: (b);** $\sin(\sin^{-1}x + 2\cos^{-1}x) = \sin(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x + \cos^{-1}x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \cos^{-1}x\right) = \cos(\cos^{-1}x) = x$
09. **Sol^n: (b);** $\tan^2 x + \sec^2 x = 3 \Rightarrow 2\tan^2 x + 1 = 3 \Rightarrow \tan x = \pm 1 \Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
10. **Sol^n: (d);** $\frac{5}{\sin 150^\circ} = \frac{T_1}{\sin 120^\circ} \therefore T_1 = 5\sqrt{3}$
11. **Sol^n: (a);** $R^2 = 3P^2$ তাহলে, $R^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha \Rightarrow 3P^2 = 2P^2 + 2P^2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$
12. **Sol^n: (d);** 

$t = \frac{d}{R} = \frac{15}{4}$ s
13. **Sol^n: (c);** $R_{max} = \frac{u^2}{g} \therefore A = \pi R_{max}^2 = \pi\left(\frac{u^2}{g}\right)^2 = \frac{\pi u^4}{g^2}$

14. Sol^n: (a); $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{y} = \tan^{-1}\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}{\frac{x}{y}}$ $\left[\because \frac{1}{2}\sin^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right]$

$= \tan^{-1}\frac{y-\sqrt{y^2-x^2}}{x} = \tan^{-1}\frac{(y-\sqrt{y^2-x^2})(y+\sqrt{y^2-x^2})}{x(y+\sqrt{y^2-x^2})}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{y^2-y^2+x^2}{x(y+\sqrt{y^2-x^2})}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x^2}{x(y+\sqrt{y^2-x^2})}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y+\sqrt{y^2-x^2}}\right)$

15. Ans: (d); $7x^2 - 6x + 5 = 0$

Written

01. Sol^n: অধিবৃত্তের অসীমতট দুইটির সমীকরণ $y = \pm x$ এবং ইহা, (5, 9) বিন্দুগামী যার x-স্থানাঙ্ক, y-স্থানাঙ্ক অপেক্ষা ছোট। সুতরাং অধিবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ এবং এর অসীমতট দুইটির সমীকরণ $y = \pm\frac{b}{a}x$.

$\therefore \pm\frac{b}{a} = \pm 1 \Rightarrow \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow a = b$ এবং $\frac{9^2}{b^2} - \frac{5^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{9^2}{a^2} - \frac{5^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{81-25}{a^2} = 1 \therefore a^2 = b^2 = 56$

$\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{y^2}{56} - \frac{x^2}{56} = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 56$

02. Sol^n: ধরি, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $= \alpha$

প্রথম ক্ষেত্রে, $R^2 = 9P^2 + 4P^2 + 2.3P.2P.\cos\alpha$

$R^2 = P^2(13 + 12\cos\alpha) \dots\dots\dots (i)$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $4R^2 = 36P^2 + 4P^2 + 2.6P.2P\cos\alpha$

$4R^2 = P^2(40 + 24\cos\alpha) \dots\dots\dots (ii)$

$(ii \div i) \Rightarrow \frac{4R^2}{R^2} = \frac{P^2(40+24\cos\alpha)}{P^2(13+12\cos\alpha)}$

$\Rightarrow 52 + 48\cos\alpha = 40 + 24\cos\alpha \Rightarrow 24\cos\alpha = -12 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120°$

03. Sol^n: মনে করি, $a = r\cos\alpha$; $b = r\sin\alpha$ তাহলে $r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore a\cos x + b\sin x = r\cos\alpha\cos x + r\sin\alpha\sin x = c \Rightarrow r\cos(x-\alpha) = c \Rightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{c}{r}$

এখন, ধরি, $\cos\beta = \frac{c}{r} \therefore \cos(x-\alpha) = \cos\beta \therefore x - \alpha = 2n\pi \pm \beta \therefore x = 2n\pi + \alpha \pm \beta$

04. Sol^n: $\sqrt[6]{-27} = x \Rightarrow x = (-27)^{\frac{1}{6}} \Rightarrow x^6 = -27 \Rightarrow (x^3)^2 = (\sqrt{27}i)^2 \therefore x^3 = \pm\sqrt{27}i$

Now, $x^3 = \sqrt{27}i$ হলে $\Rightarrow x^3 = (-i.\sqrt[6]{27})^3 \therefore x = -i\sqrt[6]{27}, -i\sqrt[6]{27}\omega, -i\sqrt[6]{27}\omega^2 = -i\sqrt{3}, -i\omega\sqrt{3}, -i\omega^2\sqrt{3}$

$x^3 = -\sqrt{27}i$ হলে $\Rightarrow x^3 = (\sqrt[6]{27}i)^3 \therefore x = \sqrt[6]{27}i, \sqrt[6]{27}i\omega, \sqrt[6]{27}i\omega^2 = +\sqrt{3}i, +\sqrt{3}i\omega, +\sqrt{3}i\omega^2$

$\therefore x = \pm\sqrt{3}i, \pm\sqrt{3}i\omega, \pm\sqrt{3}i\omega^2$

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট-০৫

নিজে পরীক্ষা দাও। অতঃপর উত্তরের সাথে মিলিয়ে নাও।

সময়: 20 মিনিট পূর্ণমান: 25 (MCQ: 15 + Written: 10)

MCQ

01. যদি $y^2 = x$ পরাবৃত্তের একটি স্পর্শক অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে, তবে স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক–

(a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (b) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (c) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

02. $(x-1)^3 + 27 = 0$ এর মূলগুলো —

(a) $-3, -3\omega, -3\omega^2$ (b) $3, 3\omega, 3\omega^2$ (c) $-2, 1-3\omega, 1-3\omega^2$ (d) $-1, -\omega, -\omega^2$

03. যদি z একটি জটিল সংখ্যা হয় $(z = x + iy)$, তবে নিচের কোন সমীকরণ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করবে?
(a) $|z + 5| = 10$ (b) $|z - 3| = |z + 4|$
(c) $|z - 3| + |z - 4| = 8$ (d) $|z - 4| + |z - 6| = 8$

04. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{1+i}$ হলে সমীকরণটি হবে–
(a) $x^2 - x + 1 = 0$ (b) $2x^2 - 2x + 1 = 0$ (c) $x^2 + x + 1 = 0$ (d) $2x^2 + 2x + 1 = 0$

05. $\sqrt{-1 + \sqrt{-1 + \sqrt{-1 + \cdots\cdots\cdots \infty}}} = ?$
(a) ω (b) ω^2 (c) 1 (d) $\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

06. যদি $3x - y + 1 = 0$ রেখাটি $y^2 = kx$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যের মান কত?
(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 16

07. $xy = 2$ কোনটির সমীকরণ?
(a) সরলরেখা (b) বৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

08. $\tan^{-1} x$ এর মূখ্যমানের সীমা কোনটি?
(a) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (b) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (c) $[0, \pi]$ (d) $(0, \pi)$

09. $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-p}{1+p} - \tan^{-1}\sqrt{P}$ এর মান কত?
(a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) 0

10. $\sin(\sin^{-1} 2 + \cos^{-1} 2)$ এর মান কত?
(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) কোনটিই নয়

11. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{2} + 2\cos^{-1}\frac{1}{2}\right) = ?$
(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 2

12. $a - ai$ এর মডুলাস কত?
(a) $-a$ (b) a (c) 0 (d) $\sqrt{2}\, a$

13. 12m দীর্ঘ একটি ভারী সুষম বীম দুইটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে সুস্থিত আছে। একটি খুঁটি একপ্রান্তে এবং অন্যটি অপর প্রান্ত হতে 4m ভিতরে অবস্থিত। বীমটিকে না উল্টিয়ে 55 kg ওজনের এক ব্যক্তি কোনো রকমে অপর প্রান্তে যেতে পারলে বীমটির ওজন কত?
(a) 110 kg (b) 200 kg (c) 27.5kg (d) 55 kg

14. যদি দুটি ট্রেন একই ষ্টেশন হতে দুপুর 1.00 টায় যাত্রা করে থাকে, তবে দুপুর 3.00 টায় তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত হবে যদি একটি ট্রেন সোজা উত্তরদিকে 15 mile/hr বেগে এবং অপরটি সোজা পশ্চিম দিকে 20 mile /hr বেগে চলতে থাকে?
(a) 25 mile (b) 10 mile (c) 30 mile (d) 50 mile

15. প্রক্ষেপণ কোণ কত হলে সর্বাধিক উচ্চতা আনুভূমিক পাল্লার সমান হবে?
(a) $\tan^{-1} 4$ (b) $\tan^{-1}\frac{1}{4}$ (c) $\tan^{-1} 3$ (d) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$

Written

01. যদি $x_1 : x_2 = (a + ib) : (c + id)$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $(c^2 + d^2)x_1^2 - 2(ac + bd)x_1x_2 + (a^2 + b^2)x_2^2 = 0$. 2.5

02. 4 একক বৃহৎ অক্ষ বিশিষ্ট উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm 1, 0)$ এবং যা $(1, c)$ দিয়ে যায়। c এর মান নির্ণয় কর। 2.5

03. সমাধান কর: $\tan^{-1} x + 2\cot^{-1} x = \frac{2\pi}{3}$ 2.5

04. যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হয়, তবে নিম্নের মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর: $\frac{\alpha+\beta}{2}, \sqrt{\alpha\beta}$ 2.5

Solution of Model Test-05

01. Solⁿ: (c); $a=\frac{1}{4}$ $m=\tan 45°=1$; $c=\frac{a}{m}=\frac{1}{4}$ $\therefore y=x+\frac{1}{4}\Rightarrow\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=x \therefore x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{2}$

02. Solⁿ: (c); $(x-1)^3=-27 \Rightarrow \left(\frac{x-1}{-3}\right)^3=1 \therefore \frac{x-1}{-3}=1,\omega,\omega^2 \Rightarrow x-1=-3,-3\omega,-3\omega^2$
$\therefore x=-2, 1-3\omega, 1-3\omega^2$

03. Ans: (b); $|z-3|=|z+4|$

04. Solⁿ: (b); একটি মূল $\frac{1}{1+i}$ হলে অপর মূল $\frac{1}{1-i}$
∴ সমীকরণ: $x^2-\left(\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}\right)x+\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1}{1-i}=0 \Rightarrow x^2-\frac{1-i+1+i}{1^2-i^2}x+\frac{1}{1^2-i^2}=0 \Rightarrow x^2-\frac{2}{2}x+\frac{1}{2}=0$
$\Rightarrow 2x^2-2x+1=0$

05. Solⁿ: (d); $x=\sqrt{-1+x} \Rightarrow x^2=-1+x \Rightarrow x^2-x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$

06. Solⁿ: (b); এখানে, $m=3, c=1 \therefore a=cm=3\times1=3 \therefore y^2=4\times3\times x=12x$ ∴ উপকেন্দ্রিক লম্ব 12 একক

07. Ans: (d); অধিবৃত্ত

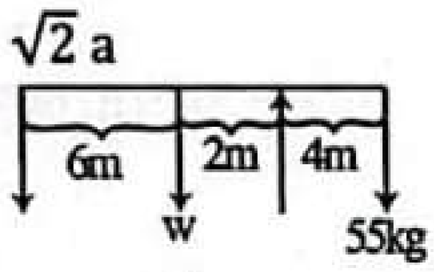
08. Ans: (b); $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

09. Solⁿ: (d); $\cos^{-1}\frac{1-p}{1+p}=2\tan^{-1}\sqrt{P} \therefore \tan^{-1}\sqrt{P}-\tan^{-1}\sqrt{P}=0$

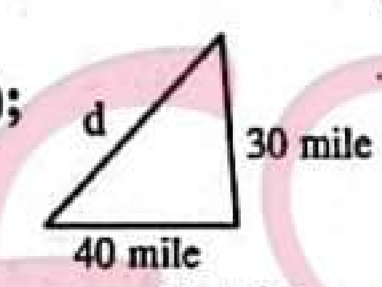
10. Solⁿ: (d); $\sin^{-1}2$ বা $\cos^{-1}2$ এর কোনো বাস্তব মান নেই, কেননা sinθ বা cosθ এর রেঞ্জ $[-1,1]$

11. Solⁿ: (b); $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)=\cos\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

12. Ans: (d); $\sqrt{2}\,a$

13. Solⁿ: (a); 

$\frac{W}{4}=\frac{55}{2} \therefore W=110$ kg

14. Solⁿ: (d); 

; $d^2=30^2+40^2 \therefore d=50$ mile (Ans.)

15. Solⁿ: (a); $H=\frac{u^2\sin^2\theta}{2g}; R=\frac{u^2\sin2\theta}{g}=\frac{2u^2\sin\theta\cos\theta}{g}; \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}=\frac{2u^2\sin\theta\cos\theta}{g} \Rightarrow \tan\theta=4 \therefore \theta=\tan^{-1}(4)$

Written

01. Solⁿ: $\frac{x_1}{x_2}=\frac{a+ib}{c+id} \Rightarrow cx_1+idx_1=ax_2+ibx_2 \Rightarrow (cx_1-ax_2)^2=(bx_2-dx_1)^2 i^2$
$\Rightarrow c^2x_1^2-2acx_1x_2+a^2x_2^2=-(b^2x_2^2-2bdx_1x_2+d^2x_1^2)$
$\Rightarrow (c^2+d^2)x_1^2-2(ac+bd)x_1x_2+(a^2+b^2)x_2^2=0$ (Proved)

02. Solⁿ: প্রশ্নমতে, $2a=4 \therefore a=2$
উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm1,0) \therefore ae=1 \therefore e=\frac{1}{2} \Rightarrow e^2=\frac{1}{4} \Rightarrow 1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4} \therefore b^2=3\ [a^2=4]$
∴ উপবৃত্তের সমীকরণ: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ যা $(1,c)$ গামী $\therefore \frac{1}{4}+\frac{c^2}{3}=1 \therefore c=\pm\frac{3}{2}$

03. Solⁿ: $\tan^{-1}x+2\cot^{-1}x=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \tan^{-1}x+\cot^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{2\pi}{3}$
$\Rightarrow \frac{\pi}{2}+\cot^{-1}x=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cot^{-1}x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=\sqrt{3} \therefore x=\sqrt{3}$

04. Solⁿ: $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$
$\frac{\alpha+\beta}{2}$ এবং $\sqrt{\alpha\beta}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি $=\frac{\alpha+\beta}{2}+\sqrt{\alpha\beta}=\frac{-b}{2a}+\sqrt{\frac{c}{a}}=\frac{2\sqrt{ca}-b}{2a}$
গুণফল $=\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{\alpha\beta}=\frac{-b}{2a}\times\sqrt{\frac{c}{a}}=\frac{-b\sqrt{c}}{2a\sqrt{a}}$; নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-\frac{2\sqrt{ca}-b}{2a}x-\frac{b\sqrt{c}}{2a\sqrt{a}}=0$

উদ্ভাসিত আলোর মাঝে
দেখো তোমার মুখ;
জীবন মানে সংগ্রাম
আর বিজয় মানে সুখ।