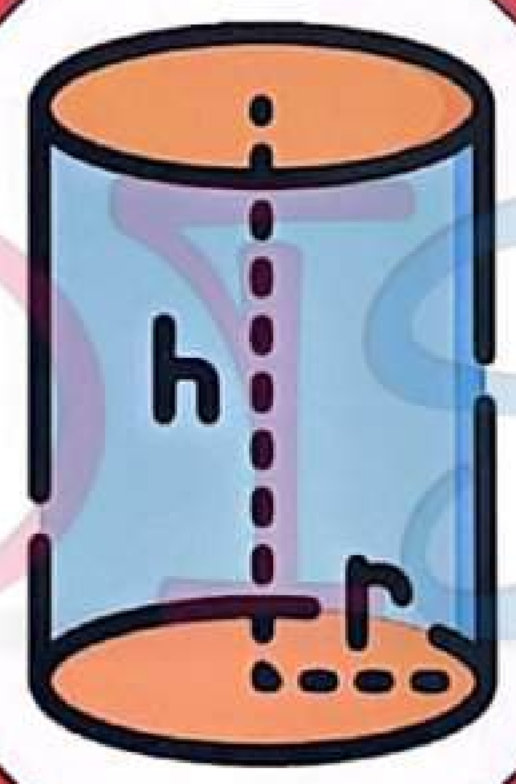
ভার্সিটি 'ক'

প্রিপারেশন বুক

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

২০২৩ সংস্করণ



উদ্ভাস
একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

উৎসর্গ

উন্মুক্ত সুতার প্রান্তে তীক্ষ্ণ চোখের পাহারা। কাপড়ে কাপড়ে জোড়া দেওয়ার মতোই বিশ্বের সঙ্গে বাংলাদেশকে জুড়ে দিচ্ছে তারা। শৈল্পিক হাতের ছোঁয়ায় বিচ্ছিন্ন কাপড়গুলো ক্রমেই হয়ে ওঠে আমাদের আব্রু। কখনো কলেজ পড়ুয়া ছাত্রের গায়ের উদ্যমী গেঞ্জি, আবার কখনো ছোট্ট শিশুর তুলতুলে সোয়েটার-এ চলছে সেই সেলাইযুদ্ধ। অন্নহীন হয়ে বাইরে বের হওয়া সম্ভব, কিন্তু বস্ত্রহীনভাবে নয়।

বস্ত্রের কারিগর সকল গার্মেন্টস শ্রমিকের প্রতি পরম শ্রদ্ধা...

ভার্সিটি 'ক' ভর্তিচ্ছু শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

ভার্সিটি 'ক' ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্নপত্র মূলত কনসেপ্টভিত্তিক, তথ্যমূলক এবং গাণিতিক সমস্যা সংক্রান্ত। এক্ষেত্রে মূল বইয়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যসমূহ মনে রাখার পাশাপাশি বুঝে পড়া অত্যন্ত জরুরি। উদ্ভাস-এর প্রতিটি লেকচার ক্লাস-এ বিভিন্ন অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টপিকসমূহের কনসেপ্টচুয়াল আলোচনাসহ প্রয়োজনীয় গাণিতিক সমস্যা সমাধানের উপর জোর দেওয়া হয়। ভার্সিটি 'ক' ভর্তি প্রস্তুতির জন্য লেকচার ক্লাস এবং মূল বইয়ের পাশাপাশি সহায়ক ভূমিকা পালন করবে উদ্ভাস-এর **"প্রিপারেশন বুক"** যেখানে ভর্তি পরীক্ষার জন্য মূল বইয়ের গুরুত্বপূর্ণ টপিকগুলোকে সহজবোধ্য উপায়ে উপস্থাপন করা হয়েছে। বইটি মূলত একাধিক পাঠ্যবইয়ের সমন্বয়ে টাইপ আকারে সাজানো। প্রতিটি টাইপের প্রয়োজনীয় কনসেপ্ট আলোচনার পর পৃথকভাবে সংযোজন করা হয়েছে ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ অন্যান্য বিশ্ববিদ্যালয়গুলোর বিগত ভর্তি পরীক্ষাসমূহের নির্বাচিত গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন ও সমাধান। একনজরে দেখে নেওয়ার জন্য অধ্যায়ভিত্তিক সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র একত্রে উপস্থাপন করা হয়েছে। যেহেতু ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষায় MCQ ও Written উভয় ধরনের প্রশ্ন আসে। তাই সবশেষে রয়েছে MCQ ও Written প্র্যাক্টিস প্রবলেম। এছাড়া সম্পূর্ণ বইয়ের উপর বেশকিছু মডেল টেস্ট রয়েছে যা তোমরা সময় ধরে প্র্যাক্টিস করতে পারবে।

উদ্ভাসের প্রতিটি লেকচার ক্লাসের সাথে বইটি সমন্বয় করে পড়লে তোমরা যথাযথভাবে প্রস্তুতি সম্পন্ন করতে পারবে। যেহেতু বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষায় ক্যালকুলেটর ব্যবহার করা যায় না সেজন্য এই বইটিতে রয়েছে গাণিতিক সমস্যা সহজে সমাধানের গুরুত্বপূর্ণ টিপস এবং শর্টকাট টেকনিক যা তোমাদের দক্ষতা অর্জনে সহায়ক হবে। বিগত বছরের প্রশ্নগুলো তোমাদের প্রশ্নের ধরন এবং অতি গুরুত্বপূর্ণ টাইপগুলোর ব্যাপারে ধারণা দিবে। সবশেষে MCQ ও Written প্র্যাক্টিস প্রবলেমগুলো নিজেকে আরো ঝালাই করে নিতে সাহায্য করবে।

তোমাদের ভর্তি প্রস্তুতিতে বইটি দারুণ কাজে আসবে বলে আমাদের দৃঢ় বিশ্বাস। তোমাদের সবার জন্য শুভকামনা।

ভার্সিটি ‘ক’ প্রিপারেশন বুক

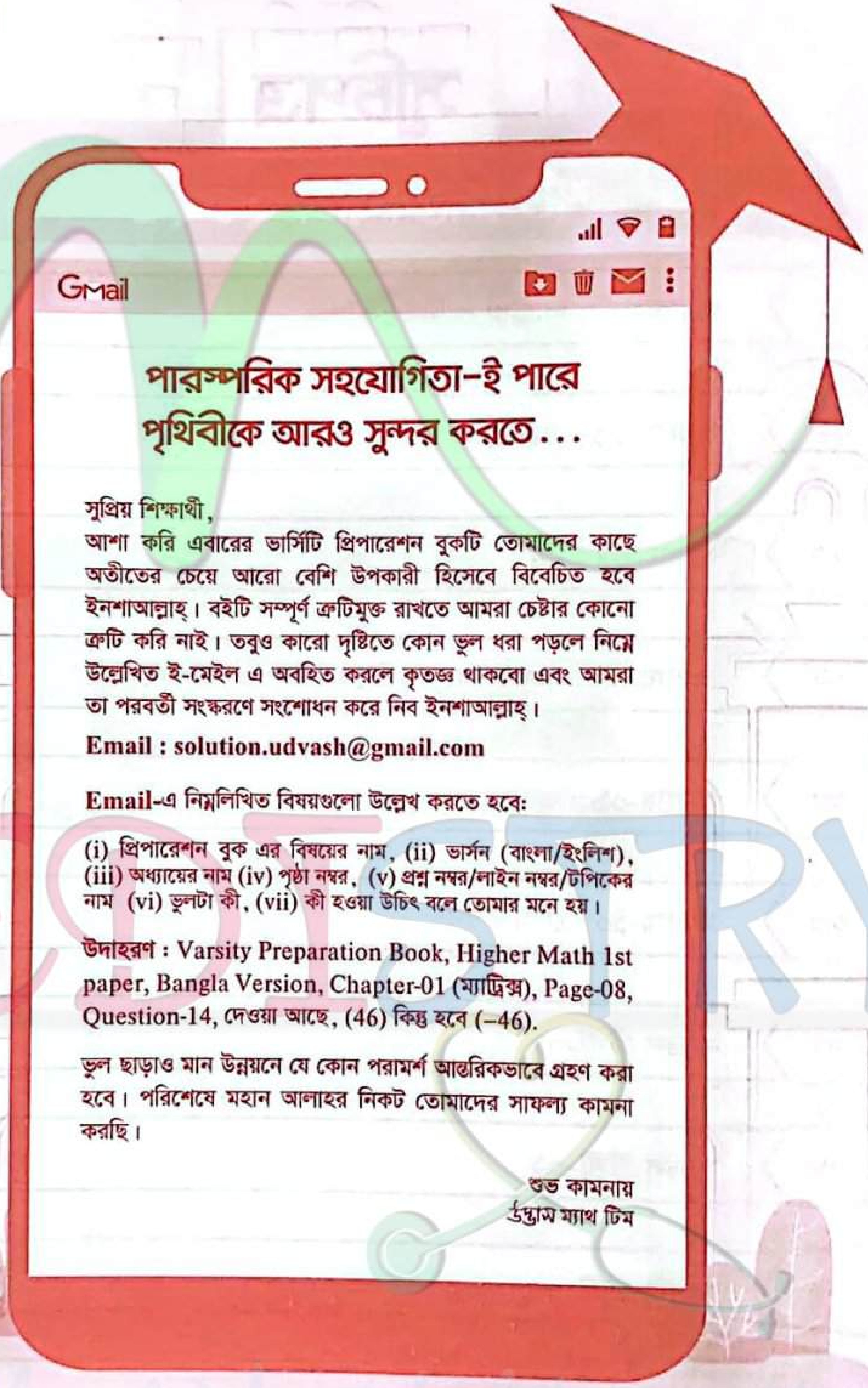
উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

“**উচ্চতর গণিত ১ম পত্র প্রিপারেশন বুক**” তৈরিতে যেসব লেখকের মূল বইয়ের সাহায্য নেওয়া হয়েছে-

১। মোঃ কেতাব উদ্দীন স্যার
২। এস ইউ আহাম্মদ স্যার
৩। অসীম কুমার সাহা স্যার

সূচিপত্র

শর্ট সিলেবাস ২০২৩



পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে...

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,
আশা করি এবারের ভার্সিটি প্রিপারেশন বুকটি তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ক্রটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ক্রটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নিব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solution.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) প্রিপারেশন বুক এর বিষয়ের নাম, (ii) ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (iii) অধ্যায়ের নাম (iv) পৃষ্ঠা নম্বর, (v) প্রশ্ন নম্বর/লাইন নম্বর/টপিকের নাম (vi) ভুলটা কী, (vii) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়।

উদাহরণ : Varsity Preparation Book, Higher Math 1st paper, Bangla Version, Chapter-01 (ম্যাট্রিক্স), Page-08, Question-14, দেওয়া আছে, (46) কিন্তু হবে (–46).

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যে কোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আলাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

অধ্যায় ০১

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

ম্যাট্রিক্স

- ঐতিহাসিক নোট: 1850 সালে J. J. Sylvester ম্যাট্রিক্স শব্দটি ব্যবহার করেন। এর পর 1858 সালে Arthur Cayley সুনির্ধারিত নিয়মে ম্যাট্রিক্সের তত্ত্বসমূহকে দৃঢ়ভাবে প্রতিষ্ঠা করেন।
- সারি ও কলাম:

ম্যাট্রিক্স: কোনো রাশিকে যদি সারি ও কলামে সুবিন্যস্ত করা হয় তখন ঐ সুষম রাশিকে ম্যাট্রিক্স বলে।

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$ একটি 3 × 4 ক্রমের ম্যাট্রিক্স কেননা এতে 3 টি সারি ও 4 টি কলাম আছে।

অনেক ক্ষেত্রে $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$ আকারেও প্রকাশ করা যায়। সংক্ষেপে $A_{m,n} = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \\ i,j,m,n \in N}}$ আকারেও প্রকাশ করা যায়; যেখানে, a_{ij} ম্যাট্রিক্সটির উপাদান প্রকাশ করে এবং m ম্যাট্রিক্সটির সারি সংখ্যা ও n কলাম সংখ্যা নির্দেশ করে।

ম্যাট্রিক্সের শ্রেণিবিভাগ

(i) সারি ম্যাট্রিক্স (Row Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সের একটি মাত্র সারি বিদ্যমান তাকে বলা হয় সারি ম্যাট্রিক্স। যেমন: $[1 \quad 2 \quad 3]$ একটি সারি ম্যাট্রিক্স।

Note: সারি ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা অনির্দিষ্ট।

(ii) কলাম ম্যাট্রিক্স (Column Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সের একটি মাত্র কলাম বিদ্যমান তাকে বলা হয় কলাম ম্যাট্রিক্স। যেমন: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ একটি কলাম ম্যাট্রিক্স।

Note: কলাম ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা অনির্দিষ্ট।

(iii) আয়তাকার ম্যাট্রিক্স (Rectangular Matrix):

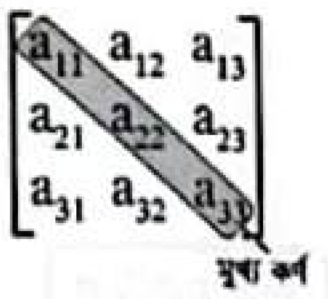
যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম সংখ্যা অসমান তাকে আয়তাকার ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ একটি আয়তাকার ম্যাট্রিক্স। কারণ এর মাত্রা 2 × 4।

(iv) বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম সংখ্যা সমান তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন: $\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{bmatrix}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স, এর মাত্রা 3×3।

কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সে n সংখ্যক row ও n সংখ্যক column থাকলে তার আকার $n \times n$ যাকে শুধু n বলা হয় অর্থাৎ এরূপ ম্যাট্রিক্সের order বা ক্রম হল- n.

◆ কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স এর যে কর্ণ, তার যেকোন ভুক্তি a_{ij} এর জন্য $i = j$ হয়, তখন তাকে ঐ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণ বলে।



◆ **ট্রেস (Trace):**

কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্যকর্ণের ভুক্তিসমূহের বীজগাণিতিক সমষ্টিকে ট্রেস (Trace) বলে। যেমন,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ এখানে মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলো 1, 0, 5 $\therefore$ Trace $(A) = \text{Tr}(A) = 1 + 0 + 5 = 6$ ।

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \vdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ এর মুখ্যকর্ণ বরাবর যোগফল $\left(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)$ হচ্ছে এর ট্রেস (Trace),

$\therefore \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

(v) শূন্য বা বিদেহী ম্যাট্রিক্স (Null Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেকটি ভুক্তি শূন্য, তাকে শূন্য ম্যাট্রিক্স বলে। যেমনঃ $0_{3,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 0_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 0_{3,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ হলো শূন্য ম্যাট্রিক্স।

(vi) শূন্য এক ম্যাট্রিক্স:

শুধু 0 ও 1 ভুক্তিবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় শূন্য-এক ম্যাট্রিক্স। যেমন: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ একটি শূন্য-এক ম্যাট্রিক্স।

(vii) বিম্ব ম্যাট্রিক্স (Transpose of a Matrix):

কোন ম্যাট্রিক্সের সারিগুলোকে কলামে ও কলামগুলোকে সারিতে পরিণত করলে যে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে বিম্ব ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{bmatrix}$ হলে বিম্ব ম্যাট্রিক্স $A' = \begin{bmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স A এর বিম্বকে A^T বা A^t বা A' প্রতীক দ্বারা লেখা হয় এবং $(A^T)^T = A$ কোন $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্সের বিম্ব ম্যাট্রিক্সের ক্রম হবে $n \times m$.

বৈশিষ্ট্য: (i) $(A^T)^T = A$, (ii) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$, (iii) $(AB)^T = B^T A^T$, (iv) $(kA)^T = kA^T$

(viii) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrix):

যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান/মুখ্য কর্ণের উপাদানগুলো শূন্য নয় কিন্তু অন্য সকল উপাদান শূন্য তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ একটি 2×2 কর্ণ ম্যাট্রিক্স। $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ এটি 3×3 কর্ণ ম্যাট্রিক্স। [বর্গ ম্যাট্রিক্স এ $i \neq j$ অবস্থানে ভুক্তি গুলো 0 হলে তা কর্ণ ম্যাট্রিক্স]

(ix) **স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrix):** যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলো সমান তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ এরা প্রত্যেকে একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

(x) **অভেদক ম্যাট্রিক্স (Identity/Unit Matrix):**

যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান/মুখ্য কর্ণের সকল ভুক্তি 1 এবং অবশিষ্ট সকল ভুক্তি শূন্য, তাকে অভেদক ম্যাট্রিক্স বলে। এই ম্যাট্রিক্সকে সাধারণত I দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অথবা, যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের সকল ভুক্তি 1 তাকে অভেদক/একক ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ একটি 3 × 3 অভেদক ম্যাট্রিক্স যাকে I_3 বলা হয়।

$$I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ $(n \times n)$ আকারের একক অভেদক (Identity) ম্যাট্রিক্স যেন, $IA = AI = A$.

$I_1 = [1]$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ইত্যাদি।

(xi) **উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Upper triangle Matrix):**

কোনো বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের নিচের সবগুলি ভুক্তি 0 হলে প্রদত্ত matrix টি হবে উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার matrix.

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ [বর্গ ম্যাট্রিক্সের $i > j$ অবস্থানে ভুক্তি গুলো 0 হলে, তা উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স]

(xii) **নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Lower triangle matrix):**

কোনো বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের মুখ্যকর্ণের উপরের সবগুলি ভুক্তি 0- হলে প্রদত্ত matrix হবে নিম্ন ত্রিভুজাকার matrix।

যেমন, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ [বর্গ ম্যাট্রিক্সের $i < j$ অবস্থানে ভুক্তি গুলো 0 হলে, তা নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স]

(xiii) **প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetric matrix):**

একটি ম্যাট্রিক্স A প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে যদি $A = A^T$ হয়। যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

(xiv) **বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Skew Symmetric matrix):**

একটি ম্যাট্রিক্স A বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে যদি $A = -A^T$ হয়। যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ একটি বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

Note: বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের প্রতিটি ভুক্তির মান শূন্য (0).

(xv) **লম্ব (Orthogonal) ম্যাট্রিক্সঃ** একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A লম্ব ম্যাট্রিক্স হবে যদি $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$ হয়। অর্থাৎ, যদি $A^T = A^{-1}$ হয়।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$ একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স।

(xvi) **একক্ষম/সমঘাতী ম্যাট্রিক্স (Idempotent Matrix):**

কোন একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে বর্গ করলে যদি ম্যাট্রিক্সটির কোন পরিবর্তন না হয় তবে ঐ ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় সমঘাতী ম্যাট্রিক্স। অর্থাৎ A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে, A কে সমঘাতী ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^2 = A$ হয়।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতী ম্যাট্রিক্স।

(xvii) অক্ষম/বিনাশক/শূন্যঘাতী ম্যাট্রিক্স (Nilpotent Matrix):

k একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে এবং $A^k = 0$ এবং $A^{k-1} \neq 0$ হলে A কে বলা হয় শূন্যঘাতী ম্যাট্রিক্স।

যেমন $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ একটি শূন্যঘাতী ম্যাট্রিক্স। এখানে $k = 3$ এর জন্য $A^k = 0$ [অর্থাৎ $A^3 = 0$] [কিন্তু $A^2 \neq 0$], এটি একটি 3 ক্রমের শূন্যঘাতী ম্যাট্রিক্স।

(xviii) উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স (Involutary Matrix):

কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সকে বর্গ করলে যদি অভেদক ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তবে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স।

অর্থাৎ A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে, A কে উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^2 = I$ হয়।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ একটি উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স। কারণ, $A^2 = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

(xix) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Singular Matrix):

যে বর্গ ম্যাট্রিক্স-এর নির্ণায়কের মান শূন্য (0), তাকে ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Singular Matrix) বলে।

$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$ হলে, A কে নির্ণায়ক আকারে লিখা যায়- $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 12 \end{vmatrix} = (5 \times 12) - (10 \times 6) = 0$

$\therefore$ A একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স হয় না।

(xx) অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Non-Singular Matrix):

যে বর্গ ম্যাট্রিক্স-এর নির্ণায়কের মান শূন্য (0) নয়, তাকে অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Non-Singular Matrix) বলে।

$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ হলে, A কে নির্ণায়ক আকারে লিখা যায়- $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = (5 \times 5) - (10 \times 6) = -35$

$\therefore$ A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। শুধু মাত্র অব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স হয়।

(xxi) Adjoint ম্যাট্রিক্স:

কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক |A| এর সহগুণকসমূহ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A এর Adjoint Matrix বলা হয় এবং এ ম্যাট্রিক্সকে Adj (A) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\text{Adj}(A) = A_{co}^T$ যেখানে A_{co} হলো A এর সহগুণক ম্যাট্রিক্স।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ সহগুণক ম্যাট্রিক্স, $A_{co} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ $\therefore \text{Adj}(A) = A_{co}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

(xxii) বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse of a Matrix):

কোনো ম্যাট্রিক্সের সাথে যে ম্যাট্রিক্স গুণ করলে অভেদক ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলে।

অর্থাৎ, $A.A^{-1} = I$ হলে, A^{-1} হলো A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স এবং A হলো A^{-1} এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স।

সকল ম্যাট্রিক্সের Adjoint ও বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকে না। কেবল বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের Adjoint এবং বর্গাকার Non-singular (অব্যতিক্রমী) (অশূন্য মান বিশিষ্ট) ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকে। A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্সকে A^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ম্যাট্রিক্স A এর Inverse অর্থাৎ $A^{-1} = \frac{\text{Adj}|A|}{|A|}$।

(xxiii) জটিল ম্যাট্রিক্স (Complex Matrix):

জটিল উপাদানবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে জটিল ম্যাট্রিক্স বলে। যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 2i & 4 & i \\ 6 & i & 0 \\ 7 & -i & -1 \end{bmatrix}$ একটি জটিল ম্যাট্রিক্স।

(xxiv) অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স (Conjugate Matrix):

কোন জটিল ম্যাট্রিক্স-এর জটিল ভুক্তিগুলোর অনুবন্ধী ভুক্তি দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় ঐ ম্যাট্রিক্স-এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 5-2i & 4 & i \\ 6 & 3+i & 0 \\ 7 & 2-i & -1 \end{bmatrix}$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা, $\overline{A} = \begin{bmatrix} 5+2i & 4 & -i \\ 6 & 3-i & 0 \\ 7 & 2+i & -1 \end{bmatrix}$

(xxv) হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স (Hermitian Matrix):

কোন বর্গ জটিল ম্যাট্রিক্স-এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স-এর ট্রান্সপোজ যদি প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স-এর সমান হয় তবে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স। অর্থাৎ, $A = \left(\overline{A}\right)^T$

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 5 & 2+i & i \\ 2-i & 3 & 5+i \\ -i & 5-i & -1 \end{bmatrix}$ হলে, $\overline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2-i & -i \\ 2+i & 3 & 5-i \\ i & 5+i & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore \left(\overline{A}\right)^T = \begin{bmatrix} 5 & 2+i & i \\ 2-i & 3 & 5+i \\ -i & 5-i & -1 \end{bmatrix} \therefore A = \begin{bmatrix} 5 & 2+i & i \\ 2-i & 3 & 5+i \\ -i & 5-i & -1 \end{bmatrix}$ একটি হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স।

Note: হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের প্রতিটি ভুক্তিই বাস্তব সংখ্যা।

(xxvi) বক্র হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স: কোন বর্গ জটিল ম্যাট্রিক্সের অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স এর ট্রান্সপোজ যদি প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের ঋণাত্মক এর সমান হয়। অর্থাৎ $(\overline{A})^T = -A$ হয়।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1+2i & 3+i \\ -1+2i & 2i & 1-i \\ -3+i & -1-i & -3i \end{bmatrix}$ তাহলে, $\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1-2i & 3-i \\ -1-2i & -2i & 1+i \\ -3-i & -1+i & 3i \end{bmatrix}$

$\therefore (\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 0 & -1-2i & -3-i \\ 1-2i & -2i & -1+i \\ 3-i & 1+i & 3i \end{bmatrix}$ আবার, $-A = \begin{bmatrix} 0 & -1-2i & -3-i \\ 1-2i & -2i & -1+i \\ 3-i & 1+i & 3i \end{bmatrix}$

$\therefore (\overline{A})^T = -A$; অর্থাৎ A একটি বক্র হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স

নির্ণায়ক

- কোন নির্ণায়কের সারিগুলো এদের অনুরূপ কলামসমূহে পরিবর্তিত হলে এবং কলামগুলো ইহাদের অনুরূপ সারিসমূহে পরিবর্তিত হলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
- কোন নির্ণায়কের একটি সারি বা কলামের সবগুলো ভুক্তি শূন্য হইলে নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে। যেমন: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$
- কোন নির্ণায়কে যে কোন দুইটি সারি বা কলাম পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কটির চিহ্ন শুধু বদলে যায়। কিন্তু মানের কোন পরিবর্তন হয় না। যেমন, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$ $[r_1 \Leftrightarrow r_3]$
- কোন নির্ণায়কের দুটি সারি বা কলামের অনুরূপ ভুক্তিগুলো অভিন্ন হলে, এর মান শূন্য হবে। অর্থাৎ $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_1 & a_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$
- কোন নির্ণায়কের যে কোন সারি বা কলামের প্রত্যেক ভুক্তিকে একই রাশি দ্বারা গুণ করলে নির্ণায়কটির মানও ঐ রাশি দ্বারা গুণ হয়।

  অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
- কোন নির্ণায়কের পাশাপাশি 2 টি সারি/কলাম এর ভুক্তিগুলো যদি সমান্তর প্রগমনে থাকে এবং অপর 2 টি সারি/কলাম এর ভুক্তিগুলোও যদি সমান্তর প্রগমনে থাকে, তাহলে উক্ত নির্ণায়কের মান 0 হবে।

  যেমন: $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 \\ -1 & 3 & 8 \\ 2 & 6 & 11 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটি লক্ষ কর।

  c_2 এবং c_1 এর অনুরূপ সারির ভুক্তিগুলোর সাধারণ অন্তর 4.

c_3 এবং c_2 এর অনুরূপ সারির ভুক্তিগুলোর সাধারণ অন্তর 5.

$$\begin{vmatrix} 1 \xrightarrow{+4} & 5 \xrightarrow{+5} & 10 \\ -1 \xrightarrow{+4} & 3 \xrightarrow{+5} & 8 \\ 2 \xrightarrow{+4} & 6 \xrightarrow{+5} & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} [c_2' = c_2 - c_1; c_3' = c_3 - c_2]$$

$= 4 \times 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} [c_2' = \frac{c_2}{4}, c_3' = \frac{c_3}{5}] = 4 \times 5 \times 0 = 0$ [∵ নির্ণায়কটির 2 টি কলাম একই, তাই এর মান 0]

➢ কোন নির্ণায়কের পাশাপাশি 2 টি সারি/কলামের ভুক্তিগুলো যদি গুণোত্তর প্রগমনে থাকে, তাহলে উক্ত নির্ণায়কের মান 0 হবে।

যেমন: $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ -1 & -3 & 8 \\ 3 & 9 & 9 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটি লক্ষ কর।

c_2 এবং c_1 এর অনুরূপ সারির ভুক্তিগুলোর সাধারণ অনুপাত 3.

$$\begin{vmatrix} 2 \xrightarrow{\times 3} & 6 & 7 \\ -1 \xrightarrow{\times 3} & -3 & 8 \\ 3 \xrightarrow{\times 3} & 9 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & 8 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} \left[c_2' = \frac{c_2}{3}\right] = 3 \times 0 = 0$$

[∵ নির্ণায়কটির 2টি কলাম একই তাই এর মান 0]

অনুরাশি ও সহগুণক

একটি নির্ণায়কে কোন ভুক্তি যে সারি ও কলামে অবস্থিত, সেই সারি ও কলামকে বাদ দিলে যে নির্ণায়কটি পাওয়া যায়, তাকে ঐ ভুক্তির অনুরাশি বলে। যেমন, $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটিতে '8'-এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ '7'-এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$

অনুরাশির আগে 'অবস্থান-সূচক চিহ্ন' বসালে যা পাওয়া যায়, তাই উক্ত ভুক্তির সহগুণক। চিহ্ন নির্ণয়ের নিম্নলিখিত উপায় অবলম্বন করা যেতে পারে। $(-1)^{r+c}$; $r =$ ভুক্তিটির সারি নম্বর, $c =$ ভুক্তিটির কলাম নম্বর বা, $(r+c)$ জোড় সংখ্যা হলে, চিহ্ন (+) বা, $(r+c)$ বিজোড় সংখ্যা হলে, চিহ্ন (−)।

সুতরাং, 8 এর সহগুণক $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ [∵ 8 এর জন্য, $r = 2; c = 2 \therefore r + c = 4$; যা জোড় সংখ্যা]

আবার, 2 এর সহগুণক $= -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ [∵ 2 এর জন্য, $r = 2; c = 1 \therefore r + c = 3$; যা বিজোড় সংখ্যা]

Shortcut

$$A = \begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ \overset{-}{a_{21}} & \overset{+}{a_{22}} & \overset{-}{a_{23}} \\ \overset{+}{a_{31}} & \overset{-}{a_{31}} & \overset{+}{a_{33}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

Type–01: ম্যাট্রিক্সের গঠন সংক্রান্ত

Concept

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 10 & 14 \end{bmatrix}$ একটি 3×4 ক্রমের ম্যাট্রিক্স কেননা এতে 3 টি সারি ও 4 টি কলাম আছে।

সংক্ষেপে $A_{m,n} = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \\ i,j,m,n \in N}}$ আকারে প্রকাশ করা যায়। যেখানে, a_{ij} ম্যাট্রিক্সটির উপাদান প্রকাশ করে এবং m ম্যাটিক্সটির সারি সংখ্যা ও n কলাম সংখ্যা নির্দেশ করে।

Problems

Example-01: $A = [a_{ij}]_{2\times2}$ ম্যাট্রিক্সটি গঠন কর যখন, $a_{ij} = \frac{i}{j}$

Solⁿ: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ **(Ans.)**

Example-02: $A = [a_{ij}]_{3\times2}$ ম্যাট্রিক্সটি গঠন কর যখন, $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$

Solⁿ: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} \frac{(1+2\cdot1)^2}{2} & \frac{(1+2(2))^2}{2} \\ \frac{(2+2(1))^2}{2} & \frac{(2+2(2))^2}{2} \\ \frac{(3+2(1))^2}{2} & \frac{(3+2(2))^2}{2} \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \\ \frac{25}{2} & \frac{49}{2} \end{bmatrix}_{3\times2}$ **(Ans.)**

Example-03: $A = [a_{ij}]_{2\times2}$ যেখানে, $\left\{a_{ij} = \begin{matrix} 1, i \neq j \\ 0, i = j \end{matrix}\right.$ তাহলে, $A^2 = ?$

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solⁿ: (d); $A = [a_{ij}]_{2\times2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \therefore A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

Example-04: $A = [a_{ij}]_{2\times2}$ যেখানে $\begin{cases} \frac{i-j}{2}; i > j \\ 2i - j; i = j \\ \frac{i+2j}{2}; i < j \end{cases}$ হলে, A ম্যাটিক্সটি নির্ণয় কর।

Solⁿ: শর্তমতে, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2}$ হলে, ……… (i) $\therefore a_{11}$ এর জন্য, $i = j \therefore 2i - j = (2 \times 1 - 1) = 1$

a_{12} এর জন্য, $i < j \therefore \frac{i+2j}{2} = \frac{1+2\times2}{2} = \frac{5}{2}$; a_{21} এর জন্য, $i > j \therefore \frac{i-j}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

a_{22} এর জন্য, $i = j \therefore 2i - j = 2 \times 2 - 2 = 2 \therefore$ নির্ণেয় ম্যাট্রিক্স হবে, $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}_{2\times2}$ **(Ans.)**

Type–02: ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ সংক্রান্ত

Concept

এখানে 'গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা'র ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদে থাকা সংজ্ঞাগুলো ব্যবহার করতে হবে।

Problems

Example-05: যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের অশূন্য ভুক্তিগুলি সমান হয়, তাকে____বলে। **[JU'18-19]**

Solⁿ: স্কেলার ম্যাট্রিক্স

Example-06: Idempotent ম্যাট্রিক্সের শর্ত হল – **[CU'22-23]**

(a) $A^2 = 1$ (b) $A \times 1 = 1$ (c) $A^2 = B$ (d) $A^2 = A$

Solⁿ: (d); Idempotent বা সমঘাতী Matrix এ, $A^n = A\ [n \in \mathbb{N}] \therefore$ এক্ষেত্রে, $A^2 = A$ হবে $[\because 2 \in \mathbb{N}]$

Example-07: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ একটি- **[KU'18-19] [Ans: d]**

(i) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (ii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স (iii) অভেদক ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সত্য?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

Example-08: নিচের কোনটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স? **[RU'17-18] [Ans: b]**

(a) $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} b & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & b \end{bmatrix}$

Example-09: নিচের কোনটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স? **[RU'20-21] [Ans: c]**

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

Example-10: $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 5 \\ -2 & b & -3 \\ -5 & 3 & c \end{bmatrix}$ একটি বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে, a, b, c এর মানগুলো- **[DU'17-18]**

Sol^n: বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের জন্য, $A^T = -A$ এবং এক্ষেত্রে মুখ্য কর্ণের প্রতিটি ভুক্তির মানই শূন্য। $\therefore a = b = c = 0$ **(Ans.)**

Example-11: নিচের কোনটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স? **[RU'20-21] [Ans: b]**

(a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

Sol^n: A একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স হলে, $A^2 = A$, শুধুমাত্র (b) এর জন্য $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 & 2-1 \\ -4+2 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

Type–03: ম্যাট্রিক্সের ট্রেস সংক্রান্ত

Concept

ম্যাট্রিক্সের ট্রেস (Trace of a matrix): কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলোর যোগফলকে ট্রেস বলে।

যেমন,

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

মুখ্য কর্ণ

A একটি ম্যাট্রিক্স হলে, A ম্যাট্রিক্সের ট্রেস; Trace (A) = a + e + i, $\therefore$ tr (A) =$\therefore \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Problems

Example-12: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ট্রেস (Trace) কোনটি? **[JU'19-20]**

Sol^n: Trace = 1 + 4 + 3 = 8

Example-13: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2k+1 & 7 \\ 8 & 3 & -9 \end{bmatrix}$ এবং Trace (A) = 15 হলে k এর মান কত?

Sol^n: দেওয়া আছে, Trace $(A) = 15 \Rightarrow 3 + 2k + 1 + (-9) = 15 \Rightarrow 2k = 20 \therefore k = 10$ **(Ans.)**

Example-14: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 9 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, tr (AB) =?

(a) 0 (b) 46 (c) −46 (d) −44

Sol^n: (c); $AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 9 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-16-6 & 4+0+9 & 6+36+3 \\ 8-8+10 & 16+0-15 & 24+18-5 \\ 6+20+0 & 12+0+0 & 18-45+0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -20 & 13 & 45 \\ 10 & 1 & 37 \\ 26 & 12 & -27 \end{bmatrix} \therefore \text{tr}(AB) = -20 + 1 - 27 = -46$ **(Ans.)**

Shortcut: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 9 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-16-6 & \times & \times \\ \times & 16+0-15 & \times \\ \times & \times & 18-45+0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -20 & \times & \times \\ \times & 1 & \times \\ \times & \times & -27 \end{bmatrix} \therefore \text{tr}(AB) = -20 + 1 - 27 = -46$ **(Ans.)**

Example-15: A ও B দুইটি বর্গ এবং সম-মাত্রার ম্যাট্রিক্স হলে, tr (λA + μB) =?

(a) λ tr (A) + μ tr (B) (b) (λ + μ)tr (A + B) (c) λμ tr (A + B) (d) (λ + μ)tr (AB)

Sol^n: (a) tr (λA + μB) = tr (λA) + tr(μB)[∵ (A + B) = tr(A) + tr(B)][∵ tr(KA) = k tr (A)]

Type–04: ম্যাট্রিক্সের সমতা সংক্রান্ত

Concept

দুইটি ম্যাট্রিক্স তখনই সমান হবে যখন তাদের ক্রম সমান হবে এবং অনুরূপ ভুক্তিগুলো সমান হবে। উল্টাভাবে বলা যায় দুইটি ম্যাট্রিক্স সমান হলে তাদের অনুরূপ ভুক্তিগুলো পরস্পর সমান হবে।

Problems

Example-16: $\begin{bmatrix} x+2y & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & x+y \\ a & -b \end{bmatrix}$ হলে, $x+2y-a+b$ এর মান কত?

Sol

Sol^n: $x+2y=8, x+y=5 \therefore a=2,\ b=3 \therefore x+2y-a+b = 8-2+3 = 9$ **(Ans.)**

Example-17: x ও y এর কোন মানের জন্য নিচের ম্যাট্রিক্সদ্বয় সমান হবে? $A = \begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

(a) $x=-\frac{1}{3}, y=7$ (b) $y=7, x=-\frac{2}{3}$ (c) $x=-\frac{1}{3}, y=-\frac{2}{3}$ (d) নির্ণয়যোগ্য নয়

Sol^n: (d); $\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore 3x+7=0 \ldots\ldots\ldots (i) \therefore x = -\frac{7}{3}$ এবং $y-2=5 \therefore y=7$

আবার পাই, $y+1=8 \therefore y=7$ এবং $2-3x=4; 3x=2-4=-2 \therefore x=-\frac{2}{3}$

এখন, $x=-\frac{7}{3}$ হলে, $a_{11}=b_{11}$ হয় কিন্তু $a_{22} \neq b_{22}$ হয়। আবার, $x=-\frac{2}{3}$ হলে, $a_{11} \neq b_{11}$ হয় কিন্তু $a_{22}=b_{22}$ হয়, কিন্তু দুইটি ম্যাট্রিক্স তখনই সমান হবে যখন তাদের ক্রম সমান হবে এবং অনুরূপ ভুক্তিগুলো সমান হবে। ∴Option (d) is correct.

Example-18: যদি $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ হয়, তাহলে α এর মান কত হলে $A + A^T = I$ হবে? **[RU'19-20]**

Sol^n: $A + A^T = I \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 2\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \therefore 2\cos\alpha = 1 \therefore \cos\alpha = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \therefore \alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}\ [n \in \mathbb{Z}]$

Example-19: এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে এবং $\begin{bmatrix} -1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & -1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ হলে, xyz =?

Sol^n: $\begin{bmatrix} -1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & -1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\omega+\omega^3+\omega^2 \\ \omega^3-\omega^2+\omega \\ \omega^2+\omega^4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2\omega \\ -2\omega^2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ [এখানে, $1+\omega+\omega^2=0, \omega^3=1$]

$\therefore x=-2\omega,\ y=-2\omega^2,\ z=-2\ ; xyz = (-2\omega)(-2\omega^2)(-2) = -8$ **(Ans.)**

Type–05: ম্যাট্রিক্সের যোগ, বিয়োগ ও গুণ সংক্রান্ত

Concept

- দুইটি ম্যাট্রিক্স যোগ-বিয়োগ করা যাবে যদি ম্যাট্রিক্স দুটির ক্রম (order) সমান থাকে। দুটি ম্যাট্রিক্সের একই স্থানের ভুক্তিগুলো যোগ বা বিয়োগ করে যেই ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাই যোগফল বা বিয়োগফল।
- একটি ম্যাট্রিক্সের সাথে কোনো সংখ্যা গুণ করা হলে, ম্যাট্রিক্সের সবগুলো ভুক্তির সাথে সংখ্যাটি গুণ হয়ে যাবে।

$$k\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}$$

- দুটি ম্যাট্রিক্স গুণ করা যাবে যদি প্রথমটির কলাম সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারি সংখ্যার সমান হয়। A এর ক্রম $m \times n$ এবং B এর ক্রম $n \times p$ হলে, AB নির্ণয়যোগ্য কিন্তু BA নির্ণয়যোগ্য নয়। AB গুণফল ম্যাট্রিক্সটির ক্রম হবে $= m \times p$

$$A \times B = C$$

$$m \times \boxed{n \quad n} \times p \longrightarrow \text{A এর Column সংখ্যা} = \text{B এর Row এর সংখ্যা}$$

$$m \times p \ (\text{C এর ক্রম})$$

Problems

Example-20: P ও Q ম্যাট্রিক্সের মাত্রা যথাক্রমে $2 \times 3, m \times n$ হলে কোন শর্তে $P + Q, P - Q, PQ, QP$ নির্ণয়যোগ্য হবে এবং এদের মাত্রা কী হবে?

Solⁿ: $P + Q, P - Q$ নির্ণয়যোগ্য হবে যদি $m = 2, n = 3$ হয়। PQ নির্ণয়যোগ্য হবে যদি $m = 3$ হয় এবং মাত্রা হবে $2 \times n$, QP নির্ণয়যোগ্য হবে যদি $n = 2$ হয় এবং মাত্রা হবে $m \times 3$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** যে সকল University তে calculator ব্যবহার করা যায় সেখানে Matrix এর গুণ, বর্গ, ঘন করার ক্ষেত্রে calculator ব্যবহার করতে পারো।

Example-21: তিনটি ম্যাট্রিক্স A, B ও C এর order যথাক্রমে $2 \times 3,\ 4 \times 2,\ 5 \times 4$ হলে, CBA ম্যাট্রিক্সটির order কত হবে?

Solⁿ: A এর ক্রম 2×3, B এর ক্রম 4×2, C এর ক্রম 5×4 **[RU'17-18]**

$\therefore$ BA এর ক্রম $= 4 \times 3$; CBA এর ক্রম 5×3 **(Ans.)**

Example-22: যদি A, B, C ম্যাট্রিক্স তিনটির আকার যথাক্রমে $4 \times 5, 5 \times 4$ এবং 4×2 হয়, তবে $(A^T + B)C$ ম্যাট্রিক্সটির আকার কী?

Solⁿ: $(A^T_{5\times4} + B_{5\times4})C_{4\times2} = P_{5\times2}$ **[DU'20-21]**

Example-23: $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}$ এবং $i = \sqrt{-1}$ হলে AB এর মান কত? **[DU'12-13, CU' 18-19, RU'17-18]**

Solⁿ: $AB = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i - i & -1 + 1 \\ 1 - 1 & i - i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

Example-24: $P + Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $P - Q = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ হলে, P= কত? **[RU'22-23]**

(a) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$

Solⁿ: (b); $P + Q + P - Q = 2P = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \therefore P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

Example-25: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হলে AB এবং BA নির্ণয় কর। **[JU' 16-17]**

Solⁿ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4-3 \\ 0+5+0 & 8+10-6 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+8 & 0+10 & 0+12 \\ 1+8 & 2+10 & 3+12 \\ 0-4 & 0-5 & 0-6 \end{bmatrix} \Rightarrow BA = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

Example-26: ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ হলে A^2 এর মান কত? **[RU'17-18, CU'18-19]**

Solⁿ: $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$

Note: কোন ম্যাট্রিক্স A হলে যদি $A^2 = A$ হয় তাহলে A ম্যাট্রিক্সকে সমঘাতি বা একক্ষম (Idempotent) ম্যাট্রিক্স বলে।

Example-27: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ এবং $A^2 + 2A - 11x = 0$ হলে x এর মান কত? **[KU'19-20]**

Sol^n: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \therefore 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \therefore 2A + A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} - 11x = 0 \Rightarrow 11x = 11\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Example-28: A ও B দুইটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে AB − BA কোন ধরনের ম্যাট্রিক্স? **[RU'19-20]**

Sol^n: Let, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} \therefore AB = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + bq & aq + br \\ bp + cq & bq + cr \end{bmatrix}$

$\therefore BA = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + qb & bp + cq \\ aq + br & bq + cr \end{bmatrix}$

$\therefore AB - BA = \begin{bmatrix} 0 & aq + br - bp - cq \\ bp + cq - aq - br & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & aq + br - bp - cq \\ -(aq + br - bp - cq) & 0 \end{bmatrix}$

∴ AB − BA একটি বিপ্রতিসম/বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

বিকল্প: যেহেতু A ও B প্রতিসম ম্যাট্রিক্স $\therefore A' = A$ ……… (i) এবং $B' = B$ ……… (ii)

এখন, (AB − BA) একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হতে হলে $(AB - BA)' = -(AB - BA)$ প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে,

$\therefore (AB - BA)' = (AB)' - (BA)'$ $[\because (A \pm B)' = A' \pm B']$

$= B'A' - A'B'$ $[\because (AB)' = B'A'$ বা $(ABC)' = C'B'A'$ হয়।$]$

$= BA - AB$ [(i) ও (ii) হতে] $= -(AB - BA)$ হল। (প্রমাণিত)

Type–06: ম্যাট্রিক্স এর ভুক্তি নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

যদি অজানা ম্যাট্রিক্সের মাত্রা দেয়া না থাকে তাহলে প্রথমে মাত্রা বের করে নিতে হবে। এরপর x, y, z ইত্যাদি বসিয়ে ঐ মাত্রার অজানা ম্যাট্রিক্স গঠন করতে হবে। এরপর প্রশ্নে উল্লিখিত শর্ত অনুসারে সমাধান করে x, y, z ইত্যাদির মান বের করে ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় করতে হবে।

Problems

Example-29. যদি $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ হয়, তাহলে A ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ সুতরাং, $B \times A = C$

এখন B এর ক্রম $= 3 \times 1$ এবং C এর ক্রম $= 3 \times 3$ সুতরাং A এর ক্রম $= 1 \times 3$; $[\because B_{(3\times1)} \times A_{(1\times3)} = C_{(3\times3)}]$

ধরি, $A = [x \quad y \quad z]$ সুতরাং, $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times [x \quad y \quad z] = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4x & 4y & 4z \\ x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ ……… (i)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $4x = -4 \Rightarrow x = -1; 4y = 8 \Rightarrow y = 2; 4z = 4 \Rightarrow z = 1$

সুতরাং, নির্ণেয় $A = [x \quad y \quad z] = [-1 \quad 2 \quad 1]$

Example-30. $A = [1 \quad 2 \quad 3], BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে B ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। **[DU'21-22]**

Sol^n: $A = [1 \quad 2 \quad 3]_{1\times3}$

$BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$ ∴ B একটি 3 × 1 ম্যাট্রিক্স

ধরি, $B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times1} \therefore BA = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}[1 \quad 2 \quad 3] = \begin{bmatrix} x & 2x & 3x \\ y & 2y & 3y \\ z & 2z & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \therefore x = 2, y = 3, z = 1 \therefore B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

Example-31. যদি $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ হয় তবে B ম্যাট্রিক্স এর উপাদানসমূহ বের কর।

Sol^n: ধরি, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

এখন, $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a+3c & 4b+3d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{matrix} 4a+3c=10 & 4b+3d=17 \\ 2a+c=4 & 2b+d=7 \end{matrix}$

সমাধান করে পাই, $\begin{matrix} a=1 & b=2 \\ c=2 & d=3 \end{matrix}$ $\therefore B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

বিকল্প: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ এখন, $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}.AB = A^{-1}.\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow I.B = B = A^{-1}.\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}; \left[\because \begin{matrix} A^{-1}.A = I \\ I.B = B \end{matrix}\right]$

$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Type–07: নির্ণায়কের অনুরাশি ও সহগুণক সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

মনে করি, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

- a_1 এর অনুরাশি নির্ণয়ের জন্য a_1 এর সারি এবং কলাম বাদ দিতে হবে এভাবে $\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} & \cancel{c_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

  এরপর $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান $b_2c_3 - b_3c_2$ -ই a_1 এর অনুরাশি।

অর্থাৎ, একটি নির্ণায়কে কোন ভুক্তি যে সারি ও কলামে অবস্থিত, সেই সারি ও কলামকে বাদ দিয়ে যে নির্ণায়কটি পাওয়া যায়, তাকে ঐ ভুক্তির অনুরাশি (Minor) বলে।

- কোনো ভুক্তির সহগুণক $= (-1)^{r+c} \times$ অনুরাশি
- $a_1, b_1, c_1, a_2 \ldots\ldots$ এর সহগুণককে সাধারণত $A_1, B_1, C_1, A_2 \ldots\ldots$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- a_1 এর সহগুণক, $A_1 = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - c_2b_3$ এভাবে প্রত্যেকটির জন্য নির্ণয় করা যাবে।

Problems

Example-32: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & -7 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির 1, −3 ও 5 এর অনুরাশি এবং সহগুণক নির্ণয় কর।

Sol^n: 1 এর অনুরাশি $= \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} = 21 + 20 = 41$ $\therefore$ 1 এর সহগুণক $= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} = 41$

−3 এর অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -7 + 3 = -4$ $\therefore$ −3 এর সহগুণক $= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -7 + 3 = -4$

5 এর অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 12 = -16$

$\therefore$ 5 এর সহগুণক $= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$

$= -\{1 \times (-4) - 3 \times 4\} = -(-16) = 16$ **(Ans.)**

Example-33. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সে a_{ij} এর সহগুণকA_{ij} হলে, $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$ এর মান কত?

Sol^n: a_{11} এর সহগুণক, $A_{11} = (-1)^{1+1}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$

a_{12} এর সহগুণক, $A_{12} = (-1)^{1+2}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$

a_{13} এর সহগুণক, $A_{13} = (-1)^{1+3}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$

এখন, $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = a_{21}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{22}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{23}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

$= a_{21}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{23}a_{32} + a_{22}a_{23}a_{31} - a_{21}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{23}a_{32} - a_{22}a_{23}a_{31} = 0$

Type–08: ব্যতিক্রমী, অব্যতিক্রমী এবং ইনভার্স/ বিপরীত ম্যাট্রিক্স সংক্রান্ত

Concept

কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান Non-Zero [$|A| \neq 0$; Non-singular (অব্যতিক্রমী) Matrix] হলেই বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করা যাবে। $A.\text{Adj}(A) = |A|I \Rightarrow A.\text{Adj}(A) = |A|\,A.A^{-1} \therefore A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|}$

Shortcut

2 × 2 ম্যাট্রিক্সের জন্য বিপরীত ম্যাট্রিক্স সহজে নির্ণয় করা যায়। 2 × 2 ম্যাট্রিক্সের Adjoint নির্ণয়ের জন্য একটি ছন্দ মনে রাখবে- মুখ্য কর্ণ বরাবর উপাদান Change এবং গৌণ কর্ণ বরাবর চিহ্ন Change. এরপর এই Adjoint matrix কে নির্ণায়কের মান দ্বারা ভাগ করবে।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; Adj A নির্ণয় করতে হলে $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ অর্থাৎ, a ও d স্থান বিনিময় করবে এবং b ও c এর আগে (–) চিহ্ন বসবে। একে ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়কের মান (ad – bc) দ্বারা ভাগ করতে হবে বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করার জন্য।

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (Ans.)

Problems

Example-34. নিচের কোনটি ব্যতিক্রমী (singular) ম্যাট্রিক্স? **[CU'20-21] [Ans: d]**

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Sol^n: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স কারণ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - (3 \times 4) = 12 - 12 = 0$

Example-35: $\beta = 3, -5$ হলে, দেখাও যে $A = \begin{bmatrix} \beta+2 & 3 \\ 5 & \beta \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। **[JU'19-20]**

Sol^n: $\beta = 3$ এর জন্য $A = \begin{bmatrix} \beta+2 & 3 \\ 5 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \therefore |A| = 5 \times 3 - 3 \times 5 = 0$

$\beta = -5$ এর জন্য $A = \begin{bmatrix} \beta+2 & 3 \\ 5 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+2 & 3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \therefore |A| = (-3) \times (-5) - 3 \times 5 = 0$

$\therefore \beta = 3, -5$ হলে, $A = \begin{bmatrix} \beta+2 & 3 \\ 5 & \beta \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হবে।

Example-36: $A = \begin{bmatrix} a+3 & 6 \\ 4 & a-2 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স এবং $f(x) = (x+1)^2$ ও $a > 0$ হলে, f(a) এর মান কত? **[RU'18-19]**

Sol^n: $(a+3)(a-2) - 4 \times 6 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 30 = 0$

$\Rightarrow a = 5, -6 \therefore a = 5\ [\because a > 0]$

$f(a) = f(5) = (5+1)^2 = 36\ \ [a > 0]$

Example-37: $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ হলে Adj (A), A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। [JnU' 07-08]

Sol^n: $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$; $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}}{5+6} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

Example-38: যদি $A = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ x & x \end{bmatrix}$ এবং $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ হয়, তাহলে x এর মান কত? [RU'20-21]

Sol^n: $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ -x & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \therefore x = 1$ **(Ans.)**

Example-39: $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স এর ট্রেস (Trace) কোনটি? [JU'20-21]

Sol^n: $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $= \frac{1}{20-12}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{8} & -\frac{6}{8} \\ -\frac{2}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$

$\therefore$ বিপরীত ম্যাট্রিক্স এর ট্রেস $= \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{4+5}{8} = \frac{9}{8}$ **(Ans.)**

Example-40: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ হলে $\det(AA^{-1})$ -এর মান কত? [DU'21-22]

Sol^n: $AA^{-1} = I \therefore \det(AA^{-1}) = \det(I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1^2 - 0 = 1$ **(Ans.)**

Example-41.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ হলে, $A \times \text{Adj}(A) =$?

Sol^n: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A) \Rightarrow \text{Adj}(A) = A^{-1}|A| \Rightarrow A \times \text{Adj}(A) = AA^{-1}|A| = I|A| = |A|I \ldots\ldots\ldots (i)$

এখন, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1(10+3) - 2(-5+12) + 3(-1-8) = 13 - 14 - 27 = -28$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $A \times \text{Adj}(A) = |A|I = -28 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & -28 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

Example-42: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ হলে, $A^{-1} =$?

Sol^n: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad \therefore A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -15 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 11 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 12$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 10 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -10 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -10$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$\therefore \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -15 & 11 & 12 \\ 10 & -10 & -10 \\ 5 & -7 & -4 \end{bmatrix}, |A| = 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -45 + 40 - 5 = -10$

$\therefore A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -15 & 11 & 12 \\ 10 & -10 & -10 \\ 5 & -7 & -4 \end{bmatrix}}{-10} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$. **(Ans.)**

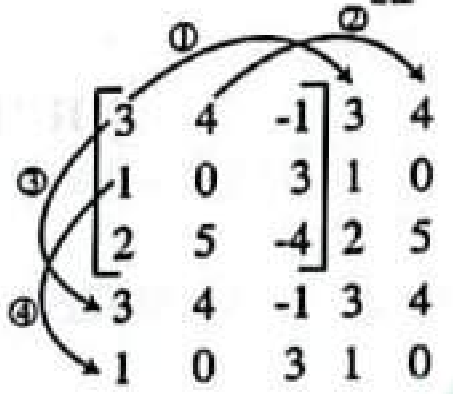
বিকল্প:

(i) Matrix এর নির্ণায়কের মান নির্ণয় (ii) Matrix এর সহগুণক matrix নির্ণয়

(iii) সহগুণক matrix এর transpose Matrix নির্ণয় (Adjoint Matrix)

(iv) Adjoint Matrix কে নির্ণায়কের মান দ্বারা ভাগ করা।

❖ **Shortcut:** $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ $\therefore |A| = -10$ [as previous]



$\therefore \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -15 & 11 & 12 \\ 10 & -10 & -10 \\ 5 & -7 & -4 \end{bmatrix}$

(1) ১ম কলাম পুনরায় লিখ [ডানে]

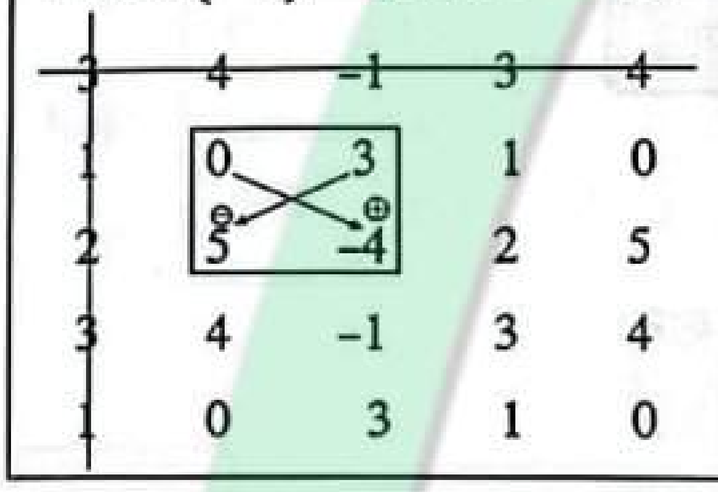
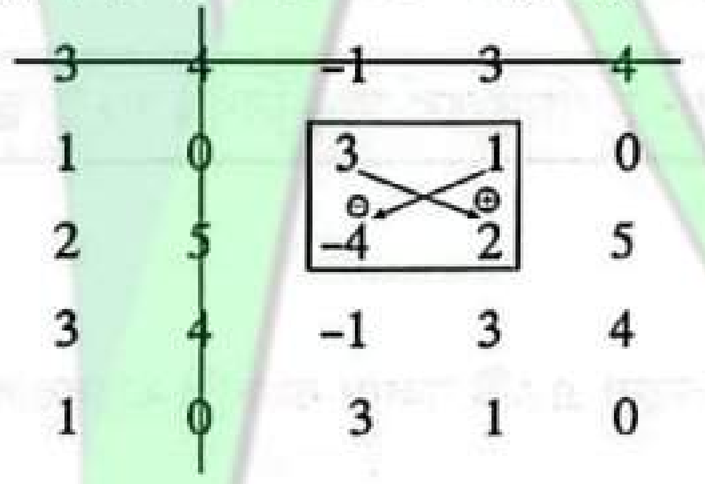
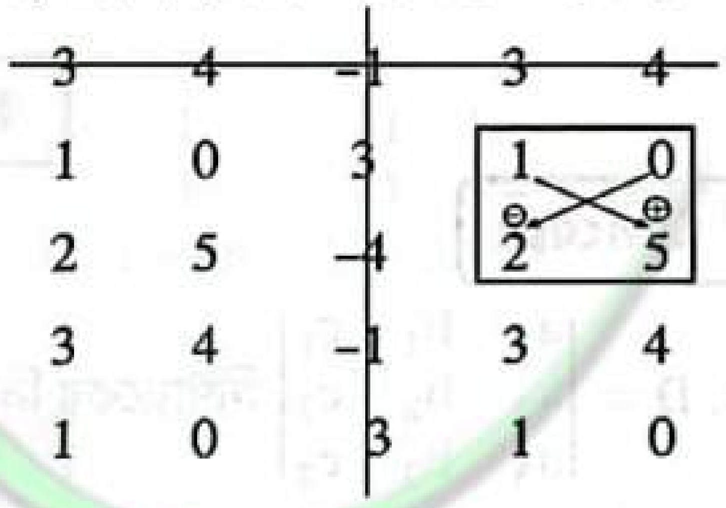
(2) ২য় কলাম পুনরায় লিখ [ডানে]

(3) ১ম সারি পুনরায় লিখ (নতুন কলাম সহ) [নিচে]

(4) ২য় সারি পুনরায় লিখ (নতুন কলাম সহ) [নিচে]

(5) সারি বরাবর 2×2 নির্ণায়ক নিয়ে সহগুণক বের করে adjoint matrix এর কলাম বরাবর বসাও

যেমন:

3 এর সহগুণক $= 0 \times (-4) - 3 \times 5 = -15$ 	4 এর সহগুণক $= 3 \times 2 - 1(-4) = 10$ 	(-1) এর সহগুণক $= 1 \times 5 - 0 \times 2 = 5$ 

প্রধান matrix -এ $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ . & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix}$ এভাবে প্রথম 'সারিতে' ছিলো তাদের সহগুণকগুলো যথাক্রমে $-15, 10, 5$ এরা adjoint matrix এর প্রথম 'কলামে' এভাবে $\begin{bmatrix} -15 & . & . \\ 10 & . & . \\ 5 & . & . \end{bmatrix}$ বসবে। এভাবে বাকিগুলোও করতে হবে।

[Note: এভাবে বের করলে সরাসরি সহগুণক পাওয়া যায় তাই চিহ্ন নিয়ে চিন্তা করার দরকার নেই]

Type–09: অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান সংক্রান্ত

Concept

যদি A একটি $n \times n$ ক্রমের বর্গ matrix হয় যেখানে $|A| \neq 0$

তাহলে, (i) $|(pA)| = p^n|A|$ (ii) $|(pA)^{-1}| = \frac{1}{p^n|A|}$ (iii) $|(pA^{-1})| = \frac{p^n}{|A|}$ (iv) $|(pA^{-1})^{-1}| = \frac{|A|}{p^n}$ **[Note:** $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$]

জেনে রাখো

অনেকে চিন্তা করছো যে যদি Matrix $n \times n$ ক্রমের না হয়ে $m \times n$ ক্রমের হয় $(m \neq n)$ তাহলে $|(PA)| =$ কত হবে।
উত্তর হলো: যদি Matrix $m \times n$ ক্রমের হয় $(m \neq n)$ তাহলে ঐ Matrix এর নির্ণায়কের মান নির্ণয় করা সম্ভব নয় কারণ শুধুমাত্র বর্গ Matrix এরই নির্ণায়ক বের করা সম্ভব।

Problems

Example-43: ধরি A হচ্ছে 3×3 ম্যাট্রিক্স এবং $|A| = -7$ তাহলে $|(2A)^{-1}|$ এর মান কত?

Sol^n: ধরি, A হচ্ছে একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স, তাহলে, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $\therefore |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -7 \ldots\ldots\ldots (i)$

এখন, $2A = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix} \Rightarrow |2A| = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$

$= 2 \times 2 \times 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2^3(-7)$[(i)হতে] $= -56 \ldots\ldots\ldots (ii)$

আবার আমরা জানি, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |(2A)^{-1}| = \frac{1}{|2A|}$ লেখা যায় $= \frac{1}{-56}$ [(ii) হতে] **(Ans.)**

Shortcut: $n \times n$ ক্রমের A ম্যাট্রিক্সের জন্য $|(PA)^{-1}| = \frac{1}{P^n|A|}$

$\therefore 3 \times 3$ ক্রমের A ম্যাট্রিক্সের জন্য $|(2A)^{-1}| = \frac{1}{2^3|A|} = \frac{1}{8(-7)} = \frac{1}{-56}$

Example-44: $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ হলে, $\det(2A^{-1})$ এর মান কত? [DU'19-20]

Sol

Sol^n: $|A| = -9 + 8 = -1 \ \therefore A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \ \therefore |2A^{-1}| \Rightarrow \det(2A^{-1}) = -36 + 32 = -4$

❖ **Shortcut:** $n \times n$ ক্রমের A ম্যাট্রিক্সের জন্য $|pA^{-1}| = \frac{P^n}{|A|}$; 2×2 ক্রমের A ম্যাট্রিক্সের জন্য $|2A^{-1}| = \frac{2^2}{|A|} = \frac{4}{-1} = -4$

Type–10: নির্ণায়কের মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

ধরি, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের বিস্তৃতি যেকোনো একটি কলাম বা সারি বরাবর করতে হবে।

$D = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$ [১ম সারি বরাবর করলে]

$D = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$ [১ম কলাম বরাবর করলে]

এভাবে যেকোনো সারি বা কলাম বরাবর বিস্তৃতি করা যায়।

Problems

Example-45: $A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ হলে, A এর মান কোনটি? [JU'19-20]

Sol^n: $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\left[c_1' = \frac{c_1}{5}, c_2' = \frac{c_2}{5}, c_3' = \frac{c_3}{5}\right] = 5^3[1(1-0) - 0 + 0] = 5^3 = 125$ **(Ans.)**

Example-46: $P = \begin{vmatrix} 16 & 5 & 9 \\ 12 & 4 & 7 \\ 17 & 6 & 10 \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় কর। [RU' 12-13]

Sol^n: $|P| = 16(4 \times 10 - 6 \times 7) - 5(12 \times 10 - 17 \times 7) + 9(12 \times 6 - 17 \times 4) = -1$ **(Ans.)**

Example-47: $\begin{vmatrix} \beta - 2 & 1 \\ -5 & \beta + 4 \end{vmatrix} = 0$ হলে, β এর মান কোনটি? [JU'19-20]

Sol^n: $(\beta - 2)(\beta + 4) + 5 = 0 \Rightarrow \beta^2 + 2\beta - 3 = 0 \ \therefore \beta = 1, -3$

Example-48: $i^2 = -1$ হলে, $\begin{vmatrix} i & i^3 & i + i^3 \\ i^3 & i^5 & i^3 + i^5 \\ i^5 & i^7 & i^5 + i^7 \end{vmatrix} = ?$ [GST'20-21]

Sol^n: $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^7 = -i; \begin{vmatrix} i & i^3 & i + i^3 \\ i^3 & i^5 & i^3 + i^5 \\ i^5 & i^7 & i^5 + i^7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & -i & 0 \\ -i & i & 0 \\ i & -i & 0 \end{vmatrix} = 0$

বিকল্প: $\begin{vmatrix} i & i^3 & i + i^3 \\ i^3 & i^5 & i^3 + i^5 \\ i^5 & i^7 & i^5 + i^7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i + i^3 & i^3 & i + i^3 \\ i^3 + i^5 & i^5 & i^3 + i^5 \\ i^5 + i^7 & i^7 & i^5 + i^7 \end{vmatrix} = 0$ [∵ দুইটি কলাম একই]

Example-49: $A = \begin{vmatrix} 1 & -\omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix} =$ কত? [RU' 18-19]

Sol^n: $|A| = 1(-\omega^3 - 1) + \omega(-\omega^2 - \omega^2) + \omega^2(\omega - \omega^4)$ [প্রথম সারি সাপেক্ষে বিস্তৃতি করে]

$= -2 - 2\omega^3 + \omega^2 \times (\omega - \omega)$ [∵ $\omega^4 = \omega^3.\omega = 1.\omega = \omega$] $= -2 - 2.1 + 0 = -4$ **(Ans.)**

Example-50: $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, x-এর কোন মানের জন্য $|A| = |B|$ হবে? **[RU'22-23]**

(a) 1 (b) −1 (c) 0 (d) 2

Sol^n: (a); $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6$ এবং $|B| = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = x(4+2) = 6x$

প্রশ্নমতে, $|A| = |B| \Rightarrow 6x = 6 \therefore x = 1$

Example-51: (বিস্তার না করে) নির্ণায়কটির মান নির্ণয় কর: $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} + b & \frac{1}{b} + c & \frac{1}{c} + a \end{vmatrix}$

Sol^n: $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} + b & \frac{1}{b} + c & \frac{1}{c} + a \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & abc & abc \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 + ab & 1 + bc & 1 + ca \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 + ab & 1 + bc & 1 + ca \end{vmatrix} = 0$ **(Ans.)**

Type–11: সমাধান ও মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

কোন 3×3 নির্ণায়কের ১ম বা ৩য় সারি বা কলামে 0, 0, 1 থাকলে 1 সংখ্যাটি যে সারি ও কলামে আছে তা বাদ হয়ে যায়, নির্ণায়কের মান অপরিবর্তিত থাকে।

$$\begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{\textcircled{1}} \\ a_1 & b_1 & \cancel{c_1} \\ a_2 & b_2 & \cancel{c_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Shortcut

MCQ-এ নির্ণায়কের সকল বা কিছু ভুক্তি যদি চলক (x, y, z) এর মাধ্যমে দেওয়া থাকে তাহলে, চলকগুলোর কিছু সাংখ্যিক মান ধরে নিতে হবে। [যেমন $x = 2, y = 3, z = 4$ এরকম]। এরপর প্রাপ্ত সাংখ্যমানবিশিষ্ট নির্ণায়কের মান নির্ণয় করতে হবে। তারপর Option-এ ও x, y, z এর উক্ত মান গুলো বসিয়ে সেটির মান প্রাপ্ত নির্ণায়কের যে মানের সাথে মিলে যাবে সেটিই উত্তর হিসেবে গ্রহণ করতে হবে।

জেনে রাখো

প্রাপ্ত নির্ণায়কটির মানের সাথে Option এ x, y, z এর মান বসানোর পর প্রাপ্ত মানগুলোর একাধিক উত্তর মিলে গেলে যেকোন একটি চলকের অন্য একটি মান ধরে উক্ত Process- এ আরেকবার option test করতে হবে।

Example: $\begin{vmatrix} 1 + x & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1 + x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1 + x_3 \end{vmatrix} = ?$

(a) $x_1 + x_2 + x_3$ (b) $1 + x_1 + x_2 + x_3$ (c) $x_1x_2x_3$ (d) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Sol^n: ধরি, $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4 \therefore$ নির্ণায়কটি $= \begin{vmatrix} 1 + 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 + 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 + 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$= 3(4 \times 5 - 4 \times 3) - 3(2 \times 5 - 4 \times 2) + 4(3 \times 2 - 4 \times 2) = 3 \times 8 - 3 \times 2 + 4 \times (-2) = 24 - 6 - 8 = 10$

এখন,

(a) $x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 3 + 4 = 9 [\neq 10]$ (b) $1 + x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ [সঠিক উত্তর]

(c) $x_1x_2x_3 = 2 \times 3 \times 4 = 24 [\neq 10]$ (d) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 29 [\neq 10]$

$\therefore$ Ans:(b) $1 + x_1 + x_2 + x_3$

Problems

Example-52: $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2x+7 \\ 2 & 7x & 9+5x \\ 0 & 0 & 2x+5 \end{vmatrix} = 0$ হলে, x এর মান? **[DU'13-14]**

Sol^n: তৃতীয় Row দুইটি 0 থাকায় এর বরাবর বিস্তার করে $(2x+5)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 7x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6(2x+5) = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$ **(Ans.)**

Example-53: নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ এর মান কত? **[JU'18-19]**

Sol^n: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \times \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c) \times 0 = 0$ $[c_1, c_3$ অভিন্ন$]$

Example-54: $\begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix} = ?$

Sol^n: $\begin{vmatrix} \log x - \log y & \log y - \log z & \log z \\ \log 2x - \log 2y & \log 2y - \log 2z & \log 2z \\ \log 3x - \log 3y & \log 3y - \log 3z & \log 3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \log z \\ \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \log 2z \\ \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \log 3z \end{vmatrix} = \log\frac{x}{y}.\log\frac{y}{z}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \log z \\ 1 & 1 & \log 2z \\ 1 & 1 & \log 3z \end{vmatrix} = 0$

Type–12: নির্ণায়কের প্রমাণ সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

এক্ষেত্রে নির্ণায়কের বিভিন্ন ধর্মাবলী ব্যবহার করে প্রমাণ করতে হবে।

Problems

Example-55: প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & 2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & -2a \\ -2b & 2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$

Sol^n: $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & 2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & -2a \\ -2b & 2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= (1+a^2+b^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & -2a \\ -b & a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 + bc_3 \\ c_2' = c_2 - ac_3 \end{bmatrix}$

$= (1+a^2+b^2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2b \\ 0 & 1 & -2a \\ -b & a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= (1+a^2+b^2)^2[1-a^2-b^2+2a^2+2b^2] = (1+a^2+b^2)^3$ **(Proved)**

Example-56: দেখাও যে, $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = xyz(x-y)(y-z)(z-x).$

Sol^n: L.S.$=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = xyz\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \left[c_1' = \frac{c_1}{x}, c_2' = \frac{c_2}{y}, c_3' = \frac{c_3}{z}\right]$

$= xyz\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-y & y-z & z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \end{vmatrix} [c_1' = c_1 - c_2;\ c_2' = c_2 - c_3]$

$= xyz\,(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & z \\ x+y & y+z & z^2 \end{vmatrix} \left[c_1' = \frac{c_1}{x-y}, c_2' = \frac{c_2}{y-z}\right]$

$= xyz\,(x-y)(y-z)[0-0+1(y+z-x-y)]$ $[r_1$ বরাবর বিস্তৃতি করে$]$

$= xyz(x-y)(y-z)(z-x) =$ R.S. **[Showed]**

Example-57: দেখাও যে, $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & k & k^2\\ 1 & k^2 & k^4\end{vmatrix} = k\,(k-1)^3(k+1)$

Sol^n: $L.S = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & k & k^2\\ 1 & k^2 & k^4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & k-1 & k^2-k\\ 1 & k^2-1 & k^4-k^2\end{vmatrix}$ $[c_2' = c_2 - c_1,\ c_3' = c_3 - c_2]$

$= \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & k-1 & k(k-1)\\ 1 & (k+1)(k-1) & k^2(k+1)(k-1)\end{vmatrix} = (k-1)k(k-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & k+1 & k(k+1)\end{vmatrix}\left[c_2' = \frac{c_2}{k-1}, c_3' = \frac{c_3}{k(k-1)}\right]$

$= k(k-1)^2\,[1\{k(k+1) - (k+1)\} - 0 + 0] = k(k-1)^2\,(k+1)(k-1)$

$= k(k-1)^3(k+1) = R.S$ **[Showed]**

Example-58: প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix}x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1\end{vmatrix} = (xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x)$

Sol^n: $L.S = \begin{vmatrix}x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\\ x^3 & y^3 & z^3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$= xyz\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 1 & 1\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}$ [প্রথম নির্ণায়কে $c_1' = \frac{c_1}{x}, c_2' = \frac{c_2}{y}, c_3' = \frac{c_3}{z}$, ২য় নির্ণায়কে $r_2 \leftrightarrow r_3$]

$= xyz\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}$ [২য় নির্ণায়কে $r_1 \leftrightarrow r_2$]

$= (xyz-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}$ $\left[\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}\right.$ common নিয়ে$\left.\right]$

$= (xyz-1)\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x-y & y-z & z\\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2\end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 - c_2,\ c_2' = c_2 - c_3]$

$= (xyz-1)(x-y)(y-z)\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & z\\ x+y & y+z & z^2\end{vmatrix}\left[c_1' = \frac{c_1}{x-y},\ c_2' = \frac{c_2}{y-z}\right]$

$= (xyz-1)(x-y)(y-z)[0 - 0 + 1\{(y+z) - (x+y)\}]$ [r_1 বরাবর বিস্তৃতি করে]

$= (xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x) = R.S$ [প্রমাণিত]

Type–13: বহুচলকবিশিষ্ট সমীকরণজোটের সমাধান

Concept

Process-1: ক্রেমারের (Cramer) সূত্রের সাহায্যে:

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, a_2x + b_2y + c_2z = d_2, a_3x + b_3y + c_3z = d_3$(ক্রেমারের সূত্রানুসারে উপরোক্ত সমীকরণগুলো সমাধান করার জন্য নিম্ন লিখিত নির্ণায়ক গুলো তৈরি করতে হবে।)

এখানে, $D \neq 0$ হতে হবে। D এর মান 0 হলে সমীকরণ জোটের কোনো সমাধান থাকবে না, অন্যথায় অসংখ্য সমাধান থাকবে যা সূত্রের সাহায্যে পাওয়া যায় না।

$D = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}$

$D_z = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}$ $\therefore x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$ এবং $z = \frac{D_z}{D}$

Process-2: Inverse ম্যাট্রিক্সের ধারণা ব্যবহার করে:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \quad \text{ধরি, } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

এখানে, $\boxed{AX = B} \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$

Problems

Example-59: $2x + y = 4$; $3x + y = 5$ সমীকরণ দুটিকে ম্যাট্রিক্সের মাধ্যমে সমাধান কর।

Sol^n: Process-01: ক্রেমারের **(Cramer)** সূত্রের সাহায্যে:

$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 3 \times 1 = -1$

$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - 5 \times 1 = -1$

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 4 \times 3 = -2$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1}{-1} = 1$ এবং $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{-1} = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (1, 2)$ **(Ans.)**

Process-02: Inverse ম্যাট্রিক্সের ধারণা ব্যবহার করে:

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 4 - 5 \\ -12 + 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \therefore x = 1; y = 2$ **(Ans.)**

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

- $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}, |A| \neq 0$
- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^TA^T$ যেখানে A ও B এর মাত্রা যথাক্রমে $(m \times n)$ ও $(n \times p)$
- $IA = AI$
- $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ যেখানে, A ও B উভয়ই বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $|A|, |B|, |AB| \neq 0$.
- $A(B + C) = AB + AC, \ (B + C)A = BA + CA$
- সাধারণত $AB \neq BA$; [ম্যাট্রিক্স বিনিময় বিধি মেনে চলে না]
- $A(BC) = (AB)C$; [এক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্স তিনটির মাত্রা (order) অবশ্যই ম্যাট্রিক্স গুণের শর্ত মেনে চলবে]
- $AX = B$ হলে, $X = A^{-1}B$ হবে, $X = BA^{-1}$ সঠিক নয়।
- A এবং B দুটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে,
  (i) $tr\,(AB) = tr(BA)$
  (ii) $tr\,(KA) = k\,tr\,(A)$
  (iii) $tr\,(A \pm B) = tr\,(A) \pm tr\,(B)$
  (iv) $tr\,(A) = tr\,(A^T)$
  (v) $tr\,(ABC) = tr\,(BCA) = tr(CAB)$ [Cyclic Property এবং A, B, C বর্গ ম্যাট্রিক্স]
  (vi) $|adjA| = |A|^{n-1}$

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম

MCQ

01. যদি AB = A এবং BA = B হলে-

(a) $B = I$　(b) $A = B = I$　(c) $B^2 = I$　(d) $A^2 = A$

02. $\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$ এর মান হবে-

(a) 0　(b) $abc(a+b)(b+c)(c+a)$

(c) abc　(d) $(a+b)(b+c)(c+a)$

03. নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$ এর মান কত?

(a) $abc(a+b)(b+c)(c+a)$　(b) $abc(a+b+c)$

(c) 1　(d) 0

04. ω যদি এককের একটি জটিল ঘনমূল হয়, তবে প্রদত্ত নির্ণায়কটির মান: $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} =?$

(a) 0　(b) 1　(c) ω　(d) ω^2

05. $\begin{pmatrix} p+4 & 8 \\ 2 & p-2 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে যদি p এর মান-

(a) −6, 4　(b) −4, 6　(c) −4, 2　(d) −2, 4

06. $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$ হলে $A^{-1} =?$

(a) $\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$　(c) $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$　(d) $\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$

07. নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ এর মান-

(a) 4xyz　(b) 3xyz　(c) 2xyz　(d) xyz

08. $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & x \\ \beta & \beta & \beta \\ \theta & x & \theta \end{vmatrix} = 0, x =?$

(a) α, β, θ　(b) α, θ　(c) β, θ　(d) α, β

09. $\begin{vmatrix} 10 & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান-

(a) 0　(b) 1　(c) 10　(d) 5

10. যদি $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ হয় তবে AB সমান-

(a) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$　(c) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$　(d) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 50 & 60 & 70 \\ 10 & 20 & 30 \\ 30 & 60 & 90 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান-

(a) 1　(b) 2　(c) 3　(d) 0

12. ম্যাট্রিক্স A এর মাত্রা 2 × 4 এবং ম্যাট্রিক্স B এর মাত্রা 4 × 3 হলে, AB -এর মাত্রা-

(a) 2 × 3　(b) 4 × 2　(c) 3 × 2　(d) 3 × 4

13. ম্যাট্রিক্স A এর মাত্রা 3 × 4 এবং ম্যাট্রিক্স B এর মাত্রা 4 × 3 হলে AB এর মাত্রা-

(a) 3 × 3　(b) 4 × 2　(c) 3 × 2　(d) কোনটিই নয়

14. যদি A একটি $m \times n$ আকারের ম্যাট্রিক্স এবং B একটি $n \times p$ আকারের ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে তাদের গুণফল AB এর আকার হবে-

(a) $n \times n$ (b) $n \times p$ (c) $m \times p$ (d) $m \times m$

15. $3\begin{vmatrix} 1 & 1 & y+z \\ 1 & 1 & z+x \\ 1 & 1 & x+y \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান কত?

(a) $3+x+y+z$ (b) $3(x+y+z)$ (c) 3 (d) কোনটিই নয়

16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = ?$

(a) 1 (b) 15 (c) −1 (d) কোনটিই নয়

17. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = ?$

(a) 27 (b) 0 (c) 54 (d) 12

18. একটি 2×3 আকারের ম্যাট্রিক্স A এবং একটি 5×3 আকারের ম্যাট্রিক্স B গুণ করা হলে গুণফল AB ম্যাট্রিক্সের আকার কত হবে?

(a) 2×5 (b) 3×3 (c) অসম্ভব (d) 3×5

19. $A = [2 \quad 1]$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ হলে AB=?

(a) $[6 \quad 1 \quad -3]$ (b) $[2 \quad 1 \quad -3]$ (c) $[6 \quad 4 \quad -3]$ (d) $[1 \quad 1 \quad -2]$

20. $\begin{vmatrix} 28 & 29 & 30 \\ 31 & 33 & 35 \\ 34 & 37 & 40 \end{vmatrix} = ?$

(a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) 9

21. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}, B = [3 \quad 2]$ ম্যাট্রিক্স দুটির গুণফল হবে-

(a) $\begin{bmatrix} 18 & 12 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 18 & 12 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ হলে A^2 এর মান কত?

(a) −1 (b) +2 (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$ এর মান কত?

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) $a+b+c$

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ হলে $A^2 + 2A - 11I$ এর মান কত?

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) কোনটিই নয়

25. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ হলে, BA =?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) A

26. $\begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix}^2$ এর মান কত?

(a) $(a+b+c)^3$ (b) $(a-b)^3$ (c) $(a-b)(b-c)(c-a)$ (d) 0

27. $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ হলে 2A − 3I এর মান হয়—

(a) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 8 & 3\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ -8 & 3\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 8 & 3\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 8 & 3\end{bmatrix}$

28. নির্ণায়ক $\begin{vmatrix}1 & 7 & 8\\ 2 & 9 & 11\\ 3 & 4 & 7\end{vmatrix}$ এর মান কত?

(a) 0 (b) 296 (c) 90 (d) 7

29. যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ হয় তবে $A^2=$?

(a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 15 & 16\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & 15\\ 0 & 16\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}15 & 16\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 16 & 12\end{bmatrix}$

30. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ এবং $B=[-2\ \ 3]$ হলে, তাদের যোগফল কত?

(a) $\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ (d) যোগ করা যাবে না

31. $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ -7 & 1 & 8\end{bmatrix}, A+B=$?

(a) $\begin{bmatrix}-4 & 2 & 4\\ 3 & 6 & 12\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}4 & -2 & -4\\ -3 & 6 & 14\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}4 & -2 & 4\\ 3 & 6 & 14\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}4 & -2 & 4\\ -3 & 6 & 14\end{bmatrix}$

32. $G=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}$ হলে G এর মান হচ্ছে–

(a) −15 (b) −30 (c) −25 (d) 0

33. $a\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ -4 & -5 & -6\\ -7 & -8 & -9\end{pmatrix}$ হলে a এর মান হচ্ছে–

(a) 1 (b) −1 (c) ±1 (d) 0

34. যদি একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A এমন হয় যে, $3A^3-2A^2+5AI+I=0$ হয়, তবে $A^{-1}=$?

(a) $3A^2+2A+5I$ (b) $2A-3A^2-5I$ (c) $3A^2-2A-I$ (d) $3A^2-2A+5I$

35. $\begin{vmatrix}1 & 5 & 7\\ 2 & 3 & 9\\ 4 & 6 & 8\end{vmatrix}$ নির্ণায়কের 3- এর সহগুণক-

(a) 20 (b) − 20 (c) − 5 (d) 5

36. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ –এর ইনভার্স ম্যাট্রিক্স কোনটি?

(a) $\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}\frac{4}{-2} & \frac{3}{-2}\\ 2 & \frac{1}{-2}\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{-2}\end{bmatrix}$ (d) কোনটিই নয়

37. $\begin{vmatrix}1 & 3 & 7\\ 4 & 5 & 8\\ 2 & 9 & 6\end{vmatrix}$ নির্ণায়কে 8 এর অনুরাশি কত?

(a) −3 (b) 3 (c) −26 (d) 26

38. $\begin{vmatrix}7 & 8 & 9\\ 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15\end{vmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের ট্রেস কত?

(a) 33 (b) 24 (c) 42 (d) 32

39. A Matrix এর মাত্রা 2 × 3 হলে A^t এর মাত্রা হবে-

(a) 5 × 3 (b) 3 × 2 (c) 2 × 3 (d) 3 × 3

40. $\begin{vmatrix}x+4 & 3 & 3\\ 3 & x+4 & 5\\ 5 & 5 & x+4\end{vmatrix}=0$ হলে x =?

(a) 1,2,3 (b) 1, −1, −12 (c) − 1,1,12 (d) 0,1,0

41. নির্ণায়কের ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?

(a) $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$

(b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(d) কোনটিই নয়।

42. কোন ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ (d) কোনটিই নয়

43. কোনটি ভুল?

(a) $(A^T)^T = A$ (b) $IA = AI$ (c) $(AB)^T = A^T.B^T$ (d) $A(BC) = (AB)C$

44. $A = \begin{bmatrix} a & 7 & -3 \\ -7 & b & -3 \\ 3 & 3 & c \end{bmatrix}$ একটি Skew symmetric matrix তাহলে এর ট্রেস-

(a) $(a + b + c)$ (b) 0 (c) নির্ণয়যোগ্য নয় (d) a ও b উভয়ই

45. A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স যেখানে, $A^2 = A$; তাহলে, $(I + A)^3 - 7A = ?$

(a) A (b) $I - A$ (c) I (d) 3A

46. $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে কোনটি সত্য?

(a) $m \geq n$ (b) $m \leq n$ (c) $m = n$ (d) None

47. $x + y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $x - y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, x =?

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

48. যদি X, Y, W, P ম্যাট্রিক্সগুলোর আকার যথাক্রমে $2 \times n, 3 \times k, n \times 3, z \times k$ হয় তবে PY + WY নির্ণয় সম্ভব হবে যখন?

(a) $k = 3, z = n$ (b) $k = 2, z = 3$ (c) $k = 3, z = 1$ (d) $k = 1, z = 3$

49. $\begin{vmatrix} 2 & a & 6-a \\ 3 & b & 9-b \\ 9 & c & 27-c \end{vmatrix} = ?$

(a) 0 (b) 2 (c) 1 (d) 4

50. A ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম ও বিপ্রতিসম হলে নিচের কোনটি সত্য?

(a) A হবে একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স (b) A হবে শূন্য ম্যাট্রিক্স

(c) A হবে কর্ণ ম্যাট্রিক্স (d) কোনটিই নয়

Written

51. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

52. A ও B যদি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয়, তাহলে দেখাও যে, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ । [ধরে নাও, ইনভার্সগুলোর অস্তিত্ব আছে]

53. সমাধান কর: $\begin{vmatrix} x+3 & 4 & 2 \\ 4 & x+2 & 3 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$

54. ক্রেমারের (Cramer) সূত্রের সাহায্যে সমীকরণটির জোট সমাধান নির্ণয় কর: $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 13 \\ x - y + 6z &= 17 \\ 5x + 10y - 6z &= 7 \end{aligned}$

55. $\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\1 & b & c+a\\1 & c & a+b\end{vmatrix} = ?$

56. সমাধান কর: $\begin{vmatrix}1 & 4 & x\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}22 & 4 & x\\26 & 5 & 8\\30 & 6 & 9\end{vmatrix}$

57. যদি $A = \begin{pmatrix}-2 & 1\\\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ হয়, তবে A^{-1} এর মান নির্ণয় কর।

58. $A = \begin{bmatrix}3 & -2\\4 & -2\end{bmatrix}$ এবং $A^2 = kA - 2I_2$ হলে, $k = ?$

59. সমাধান কর: $\begin{vmatrix}x+a & b & c\\c & x+b & a\\a & b & x+c\end{vmatrix} = 0$

60. সমাধান কর: $\begin{vmatrix}x^4 & x^4 & 1\\3 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0$

61. $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos t & \sin t\\0 & -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের ট্রেস $= \sqrt{2} + 1$ হলে, $t = ?$ যখন $-\pi \leq t < \pi$

62. $A = \begin{bmatrix}d_1 & 0\\0 & d_2\end{bmatrix}$ একটি সমঘাতী ম্যাট্রিক্স হলে, d_1 ও d_2 এর মান নির্ণয় কর।

প্র্যাক্টিস প্রবলেমের সমাধান

MCQ

01. **Sol^n: (b);** $AB = A \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}A$
$\Rightarrow (A^{-1}A)B = A^{-1}A$; [Associativity]$\Rightarrow IB = I\ [\because X^{-1}X = I] \Rightarrow B = I$; $[\because IX = X]$ একইভাবে, $A = I \therefore A = B = I$.

02. **Sol^n: (a);** $\begin{vmatrix}a & 1 & b+c\\b & 1 & c+a\\c & 1 & a+b\end{vmatrix}\ [c_1' = c_1 + c_3]$
$= \begin{vmatrix}a+b+c & 1 & b+c\\a+b+c & 1 & c+a\\a+b+c & 1 & a+b\end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & b+c\\1 & 1 & c+a\\1 & 1 & a+b\end{vmatrix} = 0$ [c_1 ও c_2 অভিন্ন]

03. **Sol^n: (d);** $\begin{vmatrix}1 & bc & bc(b+c)\\1 & ca & ca(c+a)\\1 & ab & ab(a+b)\end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix}a & abc & abc(b+c)\\b & abc & abc(c+a)\\c & abc & abc(a+b)\end{vmatrix} = \frac{1}{abc}.abc.abc.\begin{vmatrix}a & 1 & b+c\\b & 1 & c+a\\c & 1 & a+b\end{vmatrix}$
$= abc\begin{vmatrix}a+b+c & 1 & b+c\\a+b+c & 1 & c+a\\a+b+c & 1 & a+b\end{vmatrix} = abc(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & b+c\\1 & 1 & c+a\\1 & 1 & a+b\end{vmatrix} = 0$ [c_1ও c_2 অভিন্ন]

04. **Sol^n: (a);** $\begin{vmatrix}1 & \omega & \omega^2\\\omega & \omega^2 & 1\\\omega^2 & 1 & \omega\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2\\1+\omega+\omega^2 & \omega^2 & 1\\1+\omega+\omega^2 & 1 & \omega\end{vmatrix} = 0\ [\because 1+\omega+\omega^2 = 0]$

05. **Sol^n: (a);** ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী তাই এর নির্ণায়কের মান শূন্য। $\therefore \begin{vmatrix}p+4 & 8\\2 & p-2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (p+4)(p-2) - 16 = 0$
$\Rightarrow P^2 + 2p - 8 - 16 = 0 \Rightarrow p^2 + 2P - 24 = 0 \Rightarrow p^2 + 6p - 4p - 24 = 0 \Rightarrow p(p+6) - 4(p+6) = 0$
$\Rightarrow (p+6)(p-4) = 0 \therefore p = -6, 4$

06. **Sol^n: (c);** $A = \begin{bmatrix}7 & 6\\8 & 7\end{bmatrix} \therefore$ A এর Adjoint Matrix $= \begin{bmatrix}7 & -6\\-8 & 7\end{bmatrix}$; $|A| = 1 \therefore A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \begin{bmatrix}7 & -6\\-8 & 7\end{bmatrix}$

07. **Sol^n: (a);** $(x,y,z) \equiv (1,1,1)$ হলে, $\begin{vmatrix}x+y & x & y\\x & x+z & z\\y & z & y+z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{vmatrix} = 4$
$= 4.1.1.1 = 4xyz$ যেহেতু এটি একটি অভেদ, সেহেতু x, y, z -এর সকল মানের জন্য ইহা সত্য হবে।

08. **Sol^n: (b);** যদি, $x = \alpha$; $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ \theta & \alpha & \theta \end{vmatrix} = \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \theta & \alpha & \theta \end{vmatrix} = 0$

যদি, $x = \theta$; $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \theta \\ \beta & \beta & \beta \\ \theta & \theta & \theta \end{vmatrix} = \beta\theta \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \theta \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; যদি,$x = \beta$; $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta \\ \theta & \beta & \theta \end{vmatrix} \neq 0$ or, $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & x \\ \beta & \beta & \beta \\ \theta & x & \theta \end{vmatrix} \neq 0$

বিকল্প: $\beta[\alpha(\theta - x) - \alpha(\theta - \theta) + x(x - \theta)] = 0 \Rightarrow \beta(\alpha - x)(\theta - x) = 0 \therefore x = \theta, \alpha$

09. **Sol^n: (a);** $\begin{bmatrix} 10 & 13 & 16 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} r_2' = r_2 - r_1 \\ r_3' = r_3 - r_2 \end{bmatrix}$

10. **Ans:** (c) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

11. **Sol^n: (d);** $[c_3' = c_3 - c_2, c_2' = c_2 - c_1]$

12. **Ans:** (a) 2×3

13. **Ans:** (a) 3×3

14. **Ans:** (c) $m \times p$

15. **Sol^n: (d);** আমরা জানি, কোন নির্ণায়কের দুটি সারি বা কলাম একই হলে এর মান 0 হয়।

16. **Sol^n: (d);** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1(54 - 28) + 2 \times (14 - 30) + 3(20 - 18) = 26 - 32 + 6 = 0$

17. **Sol^n: (b);** দুইটি সারি বা কলাম একই হলে এদের নির্ণায়ক শূন্য হবে।

18. **Ans:** (c) অসম্ভব

19. **Ans:** (a) $[6 \quad 1 \quad -3]$

20. **Ans:** (a); সমান্তর প্রগমনে আছে

21. **Ans:** (b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 18 & 12 \end{bmatrix}$

22. **Ans:** (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

23. **Ans:** (c) 0

24. **Ans:** (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

25. **Ans:** (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

26. **Ans:** (d) 0

27. **Sol^n: (c);** $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $2A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

28. **Ans:** (a) 0

29. **Ans:** (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$

30. **Sol^n: (d);** Matrix দুটি সম-মাত্রার নয়।

31. **Ans:** (d) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -3 & 6 & 14 \end{bmatrix}$

32. **Ans:** (d) 0

33. **Ans:** (b) -1

34. **Sol^n: (b);** $I = -(3A^3 - 2A^2 + 5AI) = 2A^2 - 3A^3 - 5AI$

$\Rightarrow A^{-1} = 2A - 3A^2 - 5I \; [\because A^{-1}A = I, IA = A]$

35. **Ans: (b);** $(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 28 = -20$

36. **Sol^n: (c);** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \therefore A^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

37. **Sol^n: (a);** 8 এর অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3$

38. **Sol^n: (a);** ট্রেস $= 7 + 11 + 15 = 33$

39. **Ans:** (b) 3×2

40. **Ans:** (b) $1, -1, -12$

41. **Ans:** (c) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

42. **Ans:** (c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

43. **Ans:** (c) $(AB)^T = A^T.B^T$

44. **Ans:** (d) a ও b উভয়ই

45. **Sol^n: (c);** $A^2 = A \ldots\ldots\ldots (i)$ এবং $(I + A)^3 - 7A = I^3 + A^3 + 3I^2A + 3IA^2 - 7A$
$= I + A^2 \cdot A + 3A + 3A - 7A = I + A^2 - A = I + A - A = I$ **(Ans.)**

46. **Ans:** (c) $m = n$

47. **Ans:** (a) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

48. **Sol^n:** (a) $k = 3, z = n$

$$\overline{P_{z\times k}\ Y_{3\times k}} + \underbrace{W_{n\times 3}\ Y_{3\times k}} = \boxed{}_{z\times k} + \boxed{}_{n\times k}$$ হবে

$\therefore k = 3$ হবে।

যেহেতু যোগ অতএব order same হতে হবে

$\therefore z = n$ এবং $k = 3$ হবে। **(Ans.)**

49. **Ans:** (a) 0

50. **Sol^n: (b);** দেওয়া আছে, $A' = A \ldots\ldots\ldots (i)$ এবং $A' = -A \ldots\ldots\ldots (ii)$
$\therefore$ (i) ও (ii) হতে: $A' + A' = 0; 2A' = 0 \Rightarrow A' = 0$
যেহেতু, $A' = 0$ বা Null Matrix so, $A = 0$ হবে। $\therefore$ শূন্য ম্যাট্রিক্সের transpose matrix এ কোনো পরিবর্তন হবে না।

Written

51. **Sol^n:** A এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স, Adj (A) $= \begin{bmatrix} 1+0 & -(-2+0) & 2+1 \\ -(-4+2) & 3+2 & -(-3-4) \\ 0-2 & -(0+4) & 3-8 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

52. **Sol^n:** $(AB)^{-1}$ হল সেই অনন্য ম্যাট্রিক্স যা নিচের সমীকরণকে সিদ্ধ করে $(AB)(AB)^{-1} = (AB)^{-1}(AB) = I \ldots\ldots (i)$
এখন খেয়াল করি, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B.B^{-1})A^{-1}$
$= A.IA^{-1} = A.A^{-1} = I$ এবং $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}.A)B = B^{-1}.I.$
$B = B^{-1}.B = I \therefore (AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I \ldots\ldots (ii)$
যেহেতু, বর্গ ম্যাট্রিক্স ইনভার্স অনন্য, তাই (i) ও (ii) তুলনা করে পাই $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

53. **Sol^n:** $(x+9)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 1 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0\ [c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$\Rightarrow (x+9)\begin{vmatrix} 0 & 2-x & -1 \\ 0 & x-1 & -(x+1) \\ 1 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0\ \ [r_1' = r_1 - r_2,\ r_2' = r_2 - r_3]$

$\Rightarrow (x+9)\begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ x-1 & -(x+1) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+9)\{-(2-x)(x+1) + (x-1)\} = 0$

$\Rightarrow (x+9)(x^2-3) = 0 \therefore x = -9, \pm\sqrt{3}$

54. **Sol^n:** $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 5 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 2(6-60) - 1(-6-30) + 3(10+5) = -27$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 1 & 3 \\ 17 & -1 & 6 \\ 7 & 10 & -6 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{13(6-60)-1(-102-42)+3(170+7)}{-27} = 1$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 & 3 \\ 1 & 17 & 6 \\ 5 & 7 & -6 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-54}{-27} = 2,\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & 17 \\ 5 & 10 & 7 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-81}{-27} = 3.$

55. **Sol^n:** $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} [c_3' = c_3 + c_2] = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$ [c_1 ও c_3 অভিন্ন]

56. **Sol^n:** $\begin{vmatrix} 22-1 & 4 & x \\ 26-2 & 5 & 8 \\ 30-3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 21 & 4 & x \\ 24 & 5 & 8 \\ 27 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \therefore x = 7$

57. **Sol^n: (d);** $|A| = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

A^T এর Adjoint matrix $= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix} \therefore A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}}{-\frac{1}{2}} = -2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

58. **Sol^n:** $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

এখন, $A^2 = kA - 2I_2 \Rightarrow A^2 + 2I_2 = kA \Rightarrow kA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow kA = A \Rightarrow kA \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} \left(A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \right) \therefore k = I_2 = 1$

59. **Sol^n:** $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ c & x+b & a \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ x+a+b+c & x+b & a \\ x+a+b+c & b & x+c \end{vmatrix} = 0\ [c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 \begin{bmatrix} R_3' = R_3 - R_1 \\ R_2' = R_2 - R_1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (x+a+b+c)(x \cdot x - 0) = 0 \Rightarrow (x+a+b+c)x^2 = 0$

$x+a+b+c = 0 \therefore x = -(a+b+c)$ অথবা, $x^2 = 0 \therefore x = 0$

60. **Sol^n:** $\begin{vmatrix} x^4 & x^2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2-3) = 0; x^2 = 0 \therefore x = 0$

অথবা, $x^2 - 3 = 0 \therefore x = \pm\sqrt{3} \therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 0, \pm\sqrt{3}$

61. **Sol^n:** $\sqrt{2} + 1 = 1 + \cos t + \cos t \Rightarrow 2\cos t = \sqrt{2} \Rightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} [n \in z]$

$\therefore n = 0$ হলে, $t = \pm\frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

62. **Sol^n:** $A^2 = A \Rightarrow \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} d_1^2 & 0 \\ 0 & d_2^2 \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}_{2\times2}$ ∴ ম্যাট্রিক্স সমতা হতে: $d_1^2 = d_1 \Rightarrow d_1(d_1 - 1) = 0 \therefore d_1 = 0, 1$

এবং $d_2^2 = d_2 \Rightarrow d_2(d_2 - 1) = 0 \therefore d_2 = 0, 1$

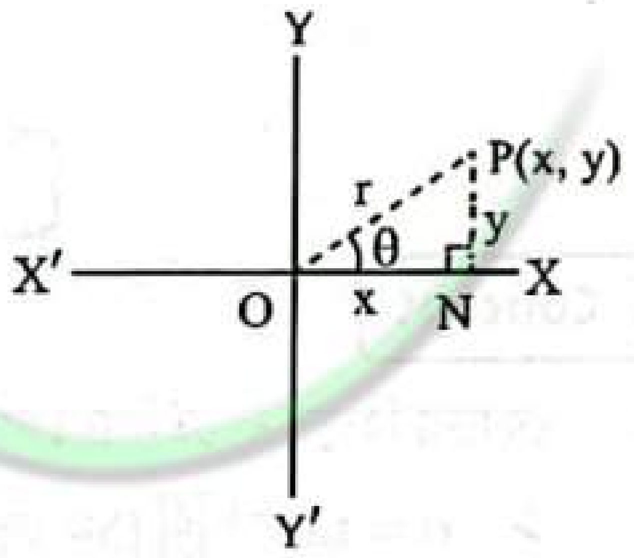
> তোমার জীবনে কিছু মানুষ আর্শীবাদ হিসেবে আসবে, কেউ কেউ আসবে শিক্ষা হিসেবে!
>
> মাদার তেরেসা

অধ্যায় ০৩

সরলরেখা

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

১ **কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক এবং পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক: (Relation between Cartesian and Polar Coordinates):**



চিত্রটি থেকে আমরা পাই, $\frac{PN}{OP} = \sin\theta \Rightarrow \frac{y}{r} = \sin\theta \Rightarrow y = r\sin\theta$ ……… (i)

আবার, $\frac{ON}{OP} = \cos\theta \Rightarrow \frac{x}{r} = \cos\theta \Rightarrow x = r\cos\theta$ ……… (ii)

আবার, (i) নং এবং (ii) নং সমীকরণকে বর্গ করে যোগ করে পাই, $r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore r = \sqrt{x^2+y^2}$ ……… (iii)

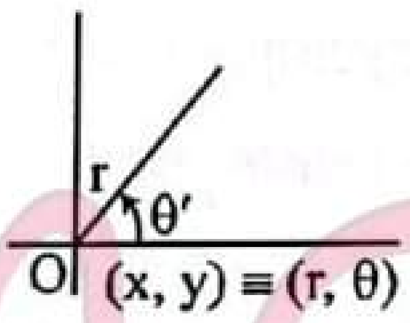
সমীকরণ (i) কে সমীকরণ (ii) দ্বারা ভাগ করে পাই, $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ ………… (iv)

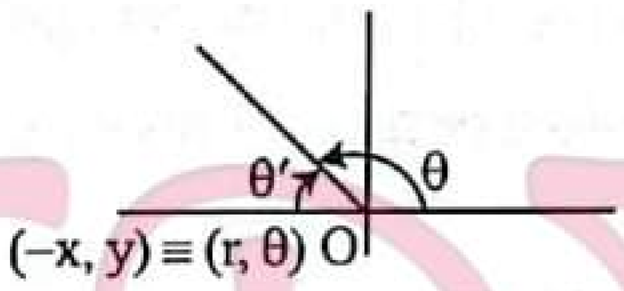
(i) এবং (ii) সমীকরণদ্বয় ব্যবহার করে পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে রূপান্তর করা যায়।

আবার, (iii) এবং (iv) সমীকরণদ্বয় ব্যবহার করে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে রূপান্তর করা যায়।

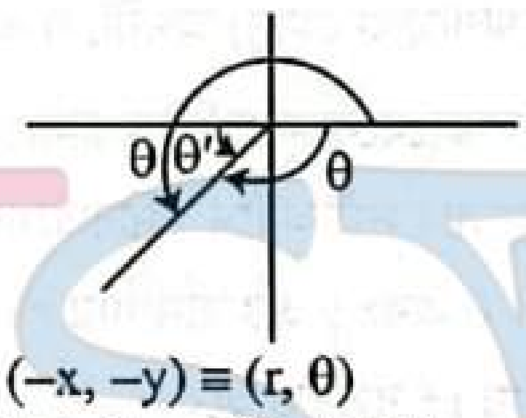
- θ এর মান অনেক সময় সমস্যার সৃষ্টি করে, তা দূর করার লক্ষ্যে নিম্নের চিত্রগুলো খেয়াল করতে হবে।



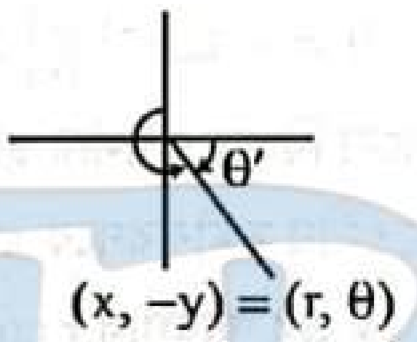
এখানে, $\theta = \theta'$



এখানে, $\theta = \pi - |\theta'|$



এখানে, $\theta = -\pi + \theta'$ বা $\pi + \theta'$



এখানে, $\theta = -\theta'$ বা $2\pi - \theta'$

$\tan^{-1}\frac{y}{x}$ = x অক্ষের সাথে উৎপন্ন সূক্ষ্ম কোণ θ = x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন ক্ষুদ্রতম কোণ। $x > 0, y > 0$ হলে,

অর্থাৎ, (x, y) বিন্দুর ক্ষেত্রে (১ম চতুর্ভাগে), $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [ধনাত্মক কোণ]

$(-x, y)$ বিন্দুর ক্ষেত্রে (২য় চতুর্ভাগে), $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [ধনাত্মক কোণ]

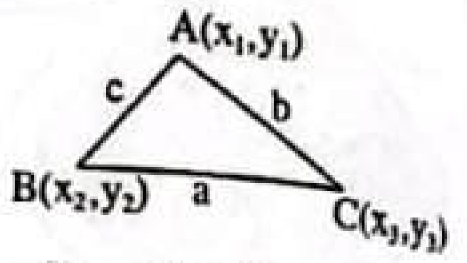
$(-x, -y)$ বিন্দুর ক্ষেত্রে (৩য় চতুর্ভাগে), $\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [ঋণাত্মক কোণ] অথবা, $\theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [ধনাত্মক কোণ]

$(x, -y)$ বিন্দুর ক্ষেত্রে (৪র্থ চতুর্ভাগে), $\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [ঋণাত্মক কোণ] অথবা, $\theta = 2\pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [ধনাত্মক কোণ]

- $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
- x অক্ষ হতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $= |y|$ এবং y অক্ষ হতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $= |x|$
- (r_1, θ_1) এবং (r_2, θ_2) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$
- $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে $C(x, y)$ বিন্দুটি $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে, $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$ এবং $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$
- $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে $C(x, y)$ বিন্দুটি $m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে, $x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$ এবং $y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$
- $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দু $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

- $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

  ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র: $\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$ যেখানে a, b, c বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য।



- $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ বিন্দুত্রয়ের সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল-

$$\Delta = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right| \text{ বর্গএকক} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ বর্গএকক} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \text{ বর্গএকক}$$

- আয়তক্ষেত্র/সামন্তরিক/রম্বসের তিনটি শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ হলে এর চতুর্থ শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে, $(x_1 + x_3 - x_2, \ y_1 + y_3 - y_2)$

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

Type–01: স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার রূপান্তর সম্পর্কিত সমস্যা

Concept

(i) কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক থেকে পোলার স্থানাঙ্কের রূপান্তরের ক্ষেত্রে: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

- ➢ $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [১ম চতুর্ভাগ]
- ➢ $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [২য় চতুর্ভাগ]
- ➢ $\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (ঋণাত্মক কোণ) অথবা, $\theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (ধনাত্মক কোণ) [৩য় চতুর্ভাগ]
- ➢ $\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (ঋণাত্মক কোণ) অথবা, $\theta = 2\pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (ধনাত্মক কোণ) [৪র্থ চতুর্ভাগ]

(ii) কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক থেকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে পরিবর্তনের ক্ষেত্রে: $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$

(iii) কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলার সমীকরণে পরিবর্তনের ক্ষেত্রে:

- ➢ x এর জায়গায় $r\cos\theta$ এবং y এর জায়গায় $r\sin\theta$ বসাতে হবে।
- ➢ $x^2 + y^2$ এর জায়গায় r^2 বসাতে হবে।

(iv) পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে পরিবর্তনের ক্ষেত্রে:

- ➢ r^2 এর জায়গায় $x^2 + y^2$ বসাতে হবে।
- ➢ $r\cos\theta$ ও $r\sin\theta$ এর জায়গায় যথাক্রমে x ও y বসাতে হবে।

Problems

Example-01: $(x + 5, 2y + 1) = (2y + 4, 3y)$ হলে, x এর মান কত? **[Agri. Guccho'20-21]**

Solⁿ: সমতা করে পাই, $2y + 1 = 3y \therefore y = 1$

আবার, $x + 5 = 2y + 4 \therefore x = 2y - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$

Example-02: $(x + y, -1)$ এবং $(3, x - y)$ ক্রমজোড় দুটি সমান হলে, (x, y) এর মান কত হবে- **[CU'20-21]**

Solⁿ: সমতা করে পাই,

$$\begin{array}{r} x + y = 3 \\ x - y = -1 \\ \hline \end{array}$$

$(+) \Rightarrow 2x = 2 \therefore x = 1$ এবং $(-) \Rightarrow 2y = 4 \therefore y = 2$ $\quad \therefore (x, y) = (1,2)$ **(Ans.)**

Example-03: একটি বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(-1, \sqrt{3})$ হলে, পোলার স্থানাঙ্ক কত? **[JU' 18-19, 11-12, JnU' 12-13]**

Solⁿ: $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ এবং $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right| = \frac{2\pi}{3}$ $\therefore$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ **(Ans.)**

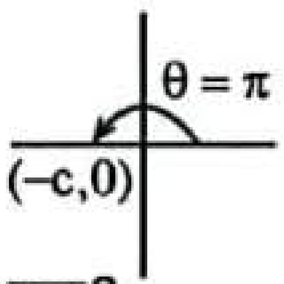
Example-04: কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (c, π) হলে বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক কত? **[DU'21-22]**

(a) $(-1, 0)$ (b) $(-c, 0)$ (c) $(c, -c)$ (d) $(-c, c)$

Sol^n: (b); $x = r\cos\theta = c\cos\pi = -c$

$y = r\sin\theta = c\sin\pi = 0$

$\therefore$ বিন্দুটি $(-c, 0)$



❖ **Shortcut:** $(-1, -\sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক কত হবে?

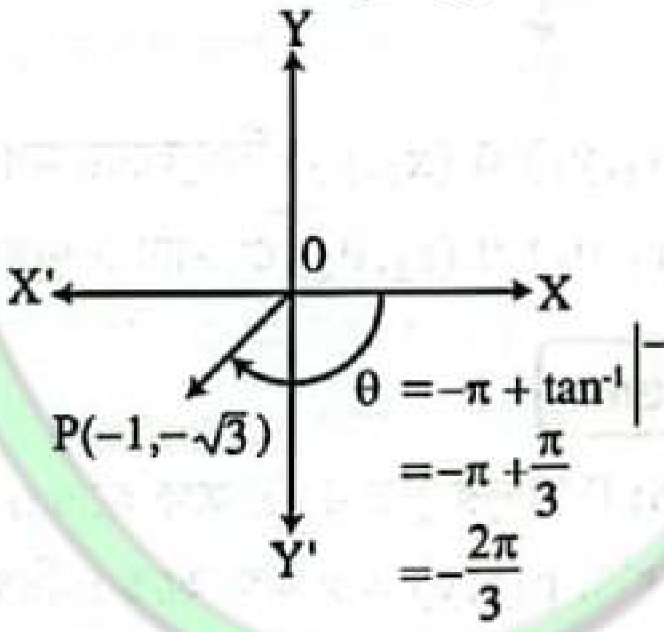
(a) $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$ (b) $\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$ (c) $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ (d) $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$

Sol^n: Step-01: xy তলে বিন্দুটি স্থাপন করলে দেখা যায় তা তৃতীয় চতুর্ভাগে।

Step-02: তৃতীয় চতুর্ভাগে $P(r, \theta)$ এর $\theta = -\frac{2\pi}{3}$ হবে প্রদত্ত $(-1, \sqrt{3})$ বিন্দুর জন্য, $[\because -\pi < \theta \leq \pi]$

Step:03: Option check দিয়ে দেখতে হবে কোন option, $\theta = -\frac{2\pi}{3}$ আছে এবং $r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ আছে,

Step:04: Option (a) is correct.



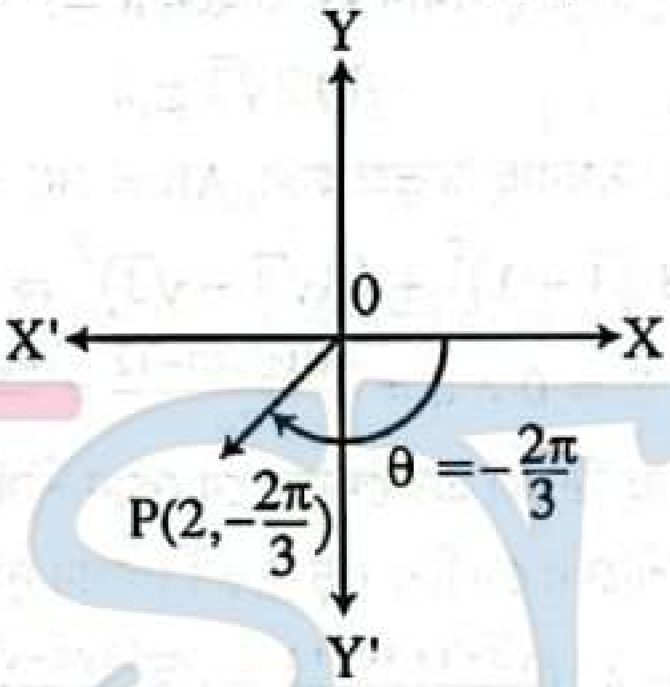
আবার $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$ বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক কত হবে?

(a) $(-1, -\sqrt{3})$ (b) $(-1, \sqrt{3})$ (c) $(1, -\sqrt{3})$ (d) $(0, -\sqrt{3})$

Sol^n: Step:01: xy তলে (r, θ) তথা প্রদত্ত বিন্দুটিকে স্থাপন করতে হবে।

Step:02: প্রদত্ত $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$ বিন্দুটি তাহলে তৃতীয় চতুর্ভাগ -এ অবস্থিত এবং সেক্ষেত্রে কার্তেসীয় বিন্দুর ভুজ $= -$ve এবং কোটি $= -$ve হবে।

Step:03: Option check দিয়ে দেখতে হবে কোন option ভুজ ও কোটি উভয়ই ঋণাত্মক আছে। $\therefore$ Option (a) is correct.



Example-05: পোলার সমীকরণ থেকে কার্তেসীয় সমীকরণে রূপান্তর কর: **[DU'18-19]**

(i) $r^2 = a^2\cos 2\theta$ (ii) $r = a\sin\theta$ (iii) $2r\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$

Sol^n: (i) $r^2 = a^2\cos 2\theta \Rightarrow r^2 . r^2 = a^2 . r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ **(Ans.)**

(ii) $r = a\sin\theta \Rightarrow r^2 = a\,r\sin\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = ay$ **(Ans.)**

(iii) $r(1 - \cos\theta) = 1 \Rightarrow r - r\cos\theta = 1 \Rightarrow r^2 = (1 + r\cos\theta)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = (1 + x)^2 \Rightarrow y^2 = 1 + 2x$ **(Ans.)**

Example-06: কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলারে রূপান্তরিত কর- (i) $y^2 = 4(x + 1)$ এবং (ii) $x^2 - y^2 = a^2$

Sol^n: (i) $y^2 = 4x + 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 2.x.2 + 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (x + 2)^2$

$\Rightarrow r^2 = (r\cos\theta + 2)^2 \therefore r = r\cos\theta + 2$ **(Ans.)**

(ii) $x^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2 \therefore r^2\cos 2\theta = a^2$ **(Ans.)**

Example-07: কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(-1, -\sqrt{3})$ হলে পোলার স্থানাঙ্ক কত? (যখন $r \geq 0$ এবং $\theta \in [0, 2\pi$ [এবং $\theta \in] -\pi, \pi]$

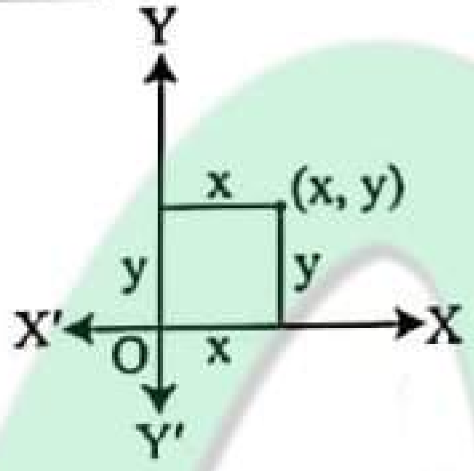
[IU'16-17] [Ans: a]

(a) $\left(2, 4\frac{\pi}{3}\right)$ অথবা $\left(2, -2\frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\left(-2, 4\frac{\pi}{3}\right)$ অথবা $\left(2, -2\frac{\pi}{3}\right)$

(c) $\left(2, 3\frac{\pi}{4}\right)$ অথবা $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ (d) $\left(2, 4\frac{\pi}{3}\right)$ অথবা $\left(2, 2\frac{\pi}{3}\right)$

Type–02: দূরত্ব নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা

Concept



- কার্তেসীয় তলে (x, y) বিন্দুর, x-অক্ষ থেকে দূরত্ব = |y| এবং y-অক্ষ থেকে দূরত্ব = |x|
- (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
- (r_1, θ_1) ও (r_2, θ_2) পোলার বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$

Problems

Example-08: P বিন্দুর ভুজ 4। x অক্ষ হতে p বিন্দুর দূরত্ব y অক্ষ হতে এর দূরত্বের দ্বিগুণ হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, $p(x,y)$ $\therefore$ x অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব = |y| এবং y অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব = |x|

শর্তমতে, $|y| = 2|x| \Rightarrow \pm y = 2|4| = 8 \therefore y = \pm 8 \therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে, (4,8) অথবা (4, −8) **(Ans.)**

Example-09: ABC সমবাহু ত্রিভুজ এবং a এর যে কোন মানের জন্য $B(\sqrt{3}+1, 3\sqrt{3})$ এবং $C(3\sqrt{3}+1, \sqrt{3})$ বিন্দু থেকে $A(a+1, a)$ বিন্দুর দুরত্ব সমান হয় তাহলে a =?

(a) $2\sqrt{3} \pm 3$ (b) $2\sqrt{3} \pm 2$ (c) $3\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ (d) $4 \pm \sqrt{3}$

Sol^n: (a); ABC সমবাহু ত্রিভুজ হলে, AB = BC = CA হবে, $\therefore AB^2 = BC^2 \Rightarrow (a+1-\sqrt{3}-1)^2 + (a-3\sqrt{3})^2$
$= (\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}-1)^2 + (3\sqrt{3}-\sqrt{3})^2 \Rightarrow a^2 - 2\sqrt{3}a + 3 + a^2 - 6\sqrt{3}a + 27 = 12 + 12$
$\Rightarrow a^2 - 4\sqrt{3} + 3 = 0 \therefore a = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48-12}}{2.1} = \frac{4\sqrt{3} \pm 6}{2} = 2\sqrt{3} \pm 3$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** সমবাহু ত্রিভুজ এর ক্ষেত্রে: যে কোন শীর্ষ = {(অপর দুই শীর্ষের ভুজের গড় $\pm\sqrt{3}$ (অপর দুই শীর্ষের কোটির বিয়োগের গড়), (অপর দুই শীর্ষের কোটির গড় $\pm\sqrt{3}$ (অপর দুই শীর্ষের ভুজের বিয়োগের গড়)}

$\therefore A(a+1, a) = A\left\{\left(\frac{\sqrt{3}+1+3\sqrt{3}+1}{2} \pm \sqrt{3}\frac{(3\sqrt{3}-\sqrt{3})}{2}\right), \left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{3}\frac{(\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}-1)}{2}\right)\right\}$

$\therefore a = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{3}\frac{(\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}-1)}{2} = 2\sqrt{3} \pm 3$ **(Ans.)**

Example-10: $(3, 90°), (3, 30°)$ বিন্দুদ্বয় পোল বিন্দুর সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করবে?

(a) সমবাহু (b) সমকোণী (c) সমদ্বিবাহু (d) বিষমবহু

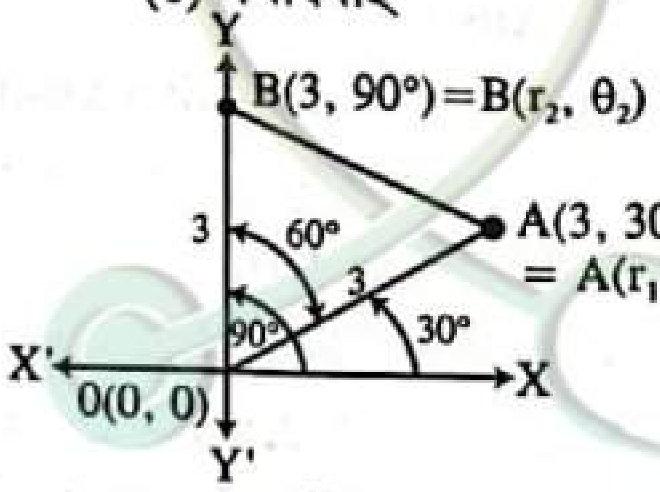
Sol^n: (a); চিত্র হতে, $OA = OB\ [r_1 = r_2 = 3]$

এবং $\angle AOB = 90° - 30° = 60°$

$\therefore \angle OBA = \angle OAB$

$= 60° [\because OA = OB]$

$\therefore \Delta AOB$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ হবে।



Example-11: x অক্ষ থেকে (4,2) বিন্দুর দূরত্ব (6, 2) এবং (a, 2) এর মধ্যবর্তী দূরত্বের দ্বিগুণ হলে a =? [JU'16-17]

(a) 6 or 8 (b) 4 or 2 (c) 1 (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Sol^n: (সঠিক উত্তর নেই); x অক্ষ থেকে (4,2) বিন্দুর দূরত্ব = |2| = 2 এবং (6, 2) ও (a, 2) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(a-6)^2 + (2-2)^2}$

শর্তমতে, $2 = 2\sqrt{(a-6)^2} \Rightarrow 1 = (a-6)^2 \Rightarrow a = 6 \pm 1 = 7$ or 5

Note: Option-এ সঠিক উত্তর নেই।

Example-12: $(4,0),(8,0)$ এবং $(3,4)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের জন্য তৃতীয় শীর্ষ হতে অপর বাহুর উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য হবে-

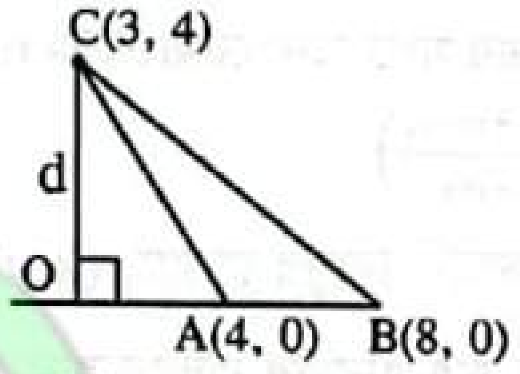
(a) 8 (b) 4 (c) 3 (d) 2

Sol^n: (b); AB রেখা: $y = 0$

বা, x-অক্ষ।

$\therefore C(3,4)$ হতে AB এর উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$= 4 = |c \text{ বিন্দুর কোটি}| = |4|$



Example-13: x অক্ষস্থ P বিন্দু থেকে (0, 2) এবং (6, 4) বিন্দু দুটি সমদূরবর্তী হলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? **[RU' 09-10]**

Sol^n: ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, 0) [x অক্ষের উপর কোটি শূন্য]

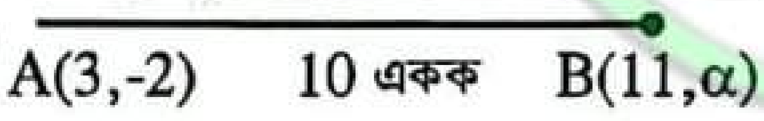
$(x,0)$ ও $(0,2)$ বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{x^2+4}$ এবং $(x,0)$ ও $(6,4)$ বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(x-6)^2+4^2}$

প্রশ্নমতে, $x^2+4 = x^2-12x+36+16 \Rightarrow 12x = 48 \Rightarrow x = 4 \therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 0) **(Ans.)**

Example-14: 10 একক লম্ব একটি সরলরেখার একটি প্রান্তবিন্দু $(3,-2)$, অপর প্রান্তবিন্দুর ভুজ 11 হলে কোটি কত?

(a) −2 (b) 10 (c) 4 (d) −4

Sol^n: (c); $A(3,-2)$ এবং অপর প্রান্তবিন্দু $B(11,\alpha)$



$\therefore$ শর্তমতে, $\sqrt{(11-3)^2+(\alpha+2)^2} = 10 \Rightarrow 64+\alpha^2+4\alpha+4-100 = 0 \Rightarrow \alpha^2+4\alpha-32 = 0$

$\therefore \alpha = \frac{-4\pm\sqrt{16-4.1(-32)}}{2.1} = \frac{-4\pm12}{2} = -8 \text{ or } 4$

Example-15: x-অক্ষ এবং $(-5,-7)$ বিন্দু থেকে (4, a) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a- এর মান কত? **[JU'18-19, 11-12, RU'17-18]**

Sol^n: $a^2 = (4+5)^2+(a+7)^2 \Rightarrow a^2 = 81+a^2+14a+49 \therefore a = -\frac{65}{7}$

Example-16: $x-3y-2 = 0$ রেখার ওপর অবস্থিত P বিন্দুটি (2, 3) এবং $(6,-5)$ হতে সমদূরবর্তী হলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? **[DU'21-22]**

(a) (4, 14) (b) $(-10,4)$ (c) (14, 4) (d) $(4,-10)$

Sol^n: (c); $x-3y-2 = 0$

$\alpha-3\beta-2 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

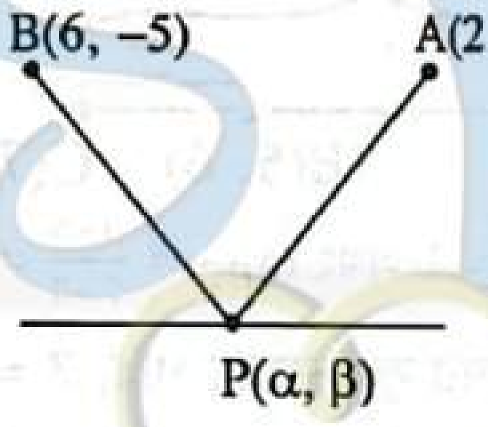
$PA^2 = PB^2 \Rightarrow (\alpha-6)^2+(\beta+5)^2$

$= (\alpha-2)^2+(\beta-3)^2$

$\Rightarrow -8\alpha+16\beta+48 = 0$

$\Rightarrow \alpha-2\beta-6 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) নং সমাধান করে $P(14,4)$



Example-17: একটি সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,-4)$ ও $(0,4)$; এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।**[JU'10-11]**

Sol^n: Process-01: $BC = \sqrt{(4+4)^2} = 8, AB = BC$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y+4)^2} = \sqrt{x^2+(y-4)^2}$

$\Rightarrow (y+4)^2-(y-4)^2 = 0 \Rightarrow y = 0$

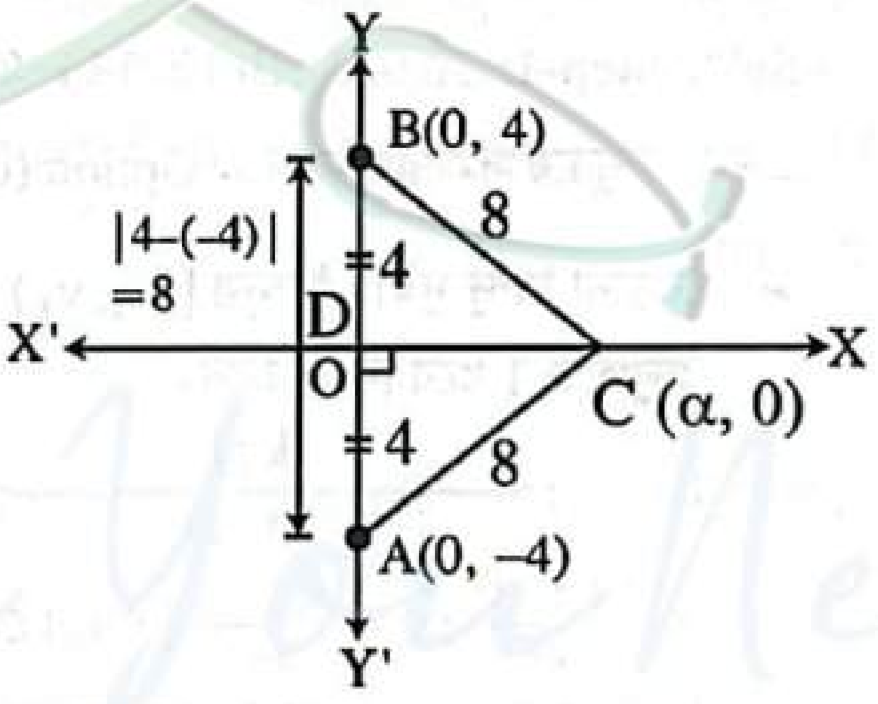
$\therefore AB = BC \Rightarrow x^2+(0+4)^2 = 64$

$\Rightarrow x = \pm4\sqrt{3} \therefore A(\pm4\sqrt{3},0)$ **(Ans.)**

Process-02: $\therefore CD = \sqrt{AC^2-AD^2}$

$= \sqrt{8^2-4^2} = \pm4\sqrt{3}$

$\therefore$ তৃতীয় শীর্ষটি হবে, $(\pm4\sqrt{3},\ 0)$ **(Ans.)**

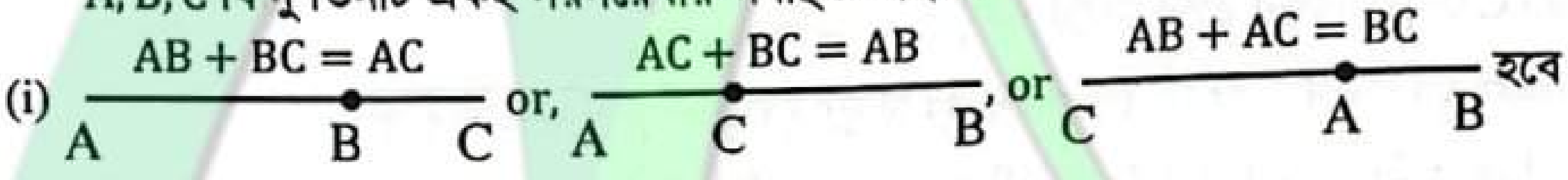


❖ **Shortcut:** তৃতীয় শীর্ষ $\equiv \left\{\left(\frac{0+0}{2}\pm\sqrt{3}\frac{(4-(-4))}{2}\right),\ \left(\frac{4-4}{2}\pm\sqrt{3}\left(\frac{0+0}{2}\right)\right)\right\} \equiv (\pm4\sqrt{3},\ 0)$ **(Ans.)**

Type–03: দুইটি বিন্দুর সংযোগ রেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তিকরণ সম্পর্কিত সমস্যা

Concept

- (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) এর সংযোজন রেখাংশকে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক,
$(x, y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$
$m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $(x, y) = \left(\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$
- উপরোক্ত বিভক্তিকরণ সূত্র ব্যবহার করতে হলে বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থান তথা সমরেখ হতে হবে ধরা যাক, A, B, C বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত তাহলে:

(i) 

(ii) $\Delta ABC = 0$ হবে

(iii) AB এর ঢাল = BC এর ঢাল অথবা AC এর ঢাল = BC এর ঢাল অর্থাৎ $m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$ হবে

[$A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ হলে AB এর ঢাল $m_{AB} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$]

Problems

Example-18: $(t+1,1), (2t+1,3), (2t+2,2t)$ বিন্দুগুলো সমরেখ হলে $t =$?

(a) $2, \text{or} -\frac{1}{2}$ (b) $-2 \text{ or} \frac{1}{2}$ (c) $2 \text{ or} \frac{1}{2}$ (d) $-2 \text{ or} -\frac{1}{2}$

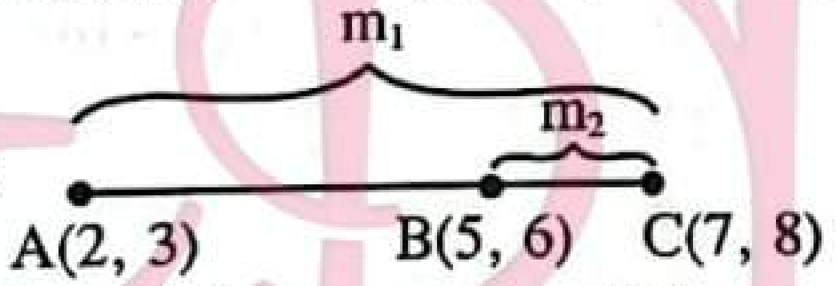
Sol^n: (a); প্রদত্ত বিন্দুত্রয় $A(t+1,1), B(2t+1,3)$ এবং $C(2t+2,2t)$ হলে:

শর্তমতে: $m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{3-1}{2t+1-t-1} = \frac{2t-3}{2t+2-2t-1} \Rightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \therefore t = \frac{3\pm\sqrt{9-4.2(-2)}}{2.2} = \frac{3\pm5}{4} = 2 \text{ or} -\frac{1}{2}$ (Ans.)

Example-19: $(2,3)$ এবং $(5,6)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা $(7,8)$ বিন্দুতে যে অনুপাতে বিভক্ত হবে।

(a) 2: 5 (বহিঃস্থভাবে) (b) 2: 5 (অন্তস্থঃভাবে) (c) 5: 2 (বহিঃস্থভাবে) (d) None of these

Sol^n: (c);



Step-1: $m_{AB} = \frac{6-3}{5-2} = 1$ এবং $m_{BC} = \frac{8-6}{7-5} = 1 \therefore m_{AB} = m_{BC}$; অর্থাৎ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় সমরেখ।

Step-2: বহির্বিভক্তকরণের সূত্রানুসারে পাই, $7 = \frac{m_1(5)-m_2(2)}{m_1-m_2} \Rightarrow 7m_1 - 5m_1 = 7m_2 - 2m_2$

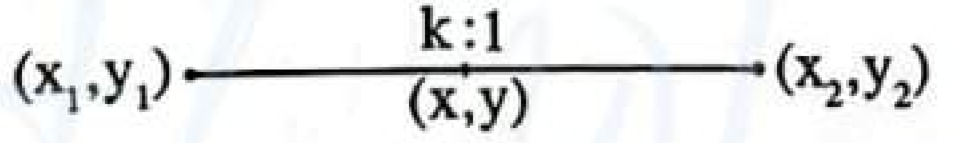
$\Rightarrow 2m_1 = 5m_2 \therefore m_1 : m_2 = 5 : 2$ **(Ans.)**

Example-20: $(5,3)$ এবং $(13,11)$ বিন্দু দুটির সংযোগ রেখাকে $(6,8)$ বিন্দুটি যে অনুপাতে বিভক্ত করে?

(a) 1: 7 (b) 5: 3 (c) 2: 3 (d) None of these

Sol^n: Step-1: $A(5,3), B(13,11)$ এবং $C(6,8)$ হলে $m_{AB} = \frac{11-3}{13-5} = \frac{8}{8} = 1, m_{BC} = \frac{11-8}{13-6} = \frac{3}{7} \therefore m_{AB} \neq m_{BC}$ অর্থাৎ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় সমরেখ নয়। ∴ Option (d) is correct.

- কোনো বিন্দু দুইটি বিন্দুর $[(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)]$ সংযোজক রেখাংশকে কী অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয়ের জন্য অনুপাত 1 ধরে নিতে হবে।



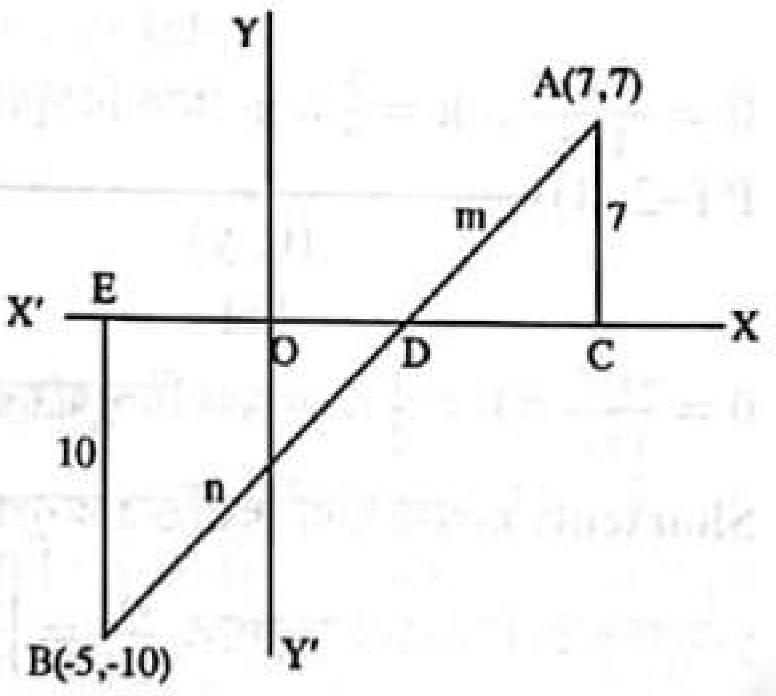
$x = \frac{kx_2+x_1}{k+1}; y = \frac{ky_2+y_1}{k+1}$ [এখান থেকে k এর মান নির্ণয় করতে হবে।]

k এর মান +ve হলে, k: 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

k এর মান −ve হলে, k: 1 অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়।

সমস্যা: $(7,7)$ ও $(-5,-10)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে x অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর ভুজ কত?

সনাতন পদ্ধতি: ধরি, x-অক্ষের উপরিস্থিত $P(x, 0)$ বিন্দুটি $(7, 7)$ ও $(-5,-10)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।



$\therefore x = \frac{-5k+7}{k+1}$ ……… (i)

$0 = \frac{-10k+}{k+1} \Rightarrow -10k + 7 = 0 \Rightarrow k = \frac{7}{10}$

$\therefore k:1 = 7:10 \therefore (7,7)$ ও $(-5,-10)$

বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x অক্ষরেখা 7:10 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

স্মার্ট পদ্ধতি: ACD ও BDE সদৃশ ত্রিভুজ হতে পাই,

$\frac{m}{n} = \frac{AC}{BE} = \frac{7}{10} \therefore m:n = 7:10$ **(Ans.)**

Shortcut

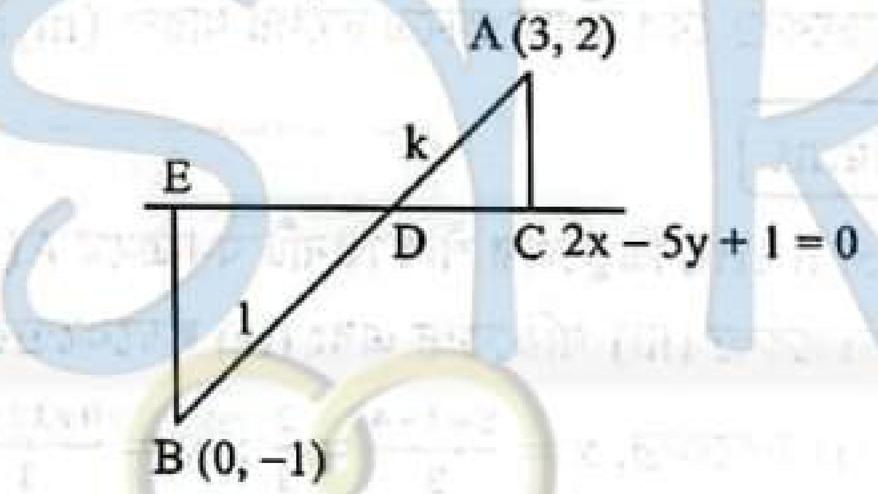
যেকোন লিখিত পরীক্ষায়ও নিয়মটি ব্যবহার করা যাবে।

- (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে-
  - x-অক্ষ $\left|\frac{y_1}{y_2}\right|$ অনুপাতে বিভক্ত করে। [$\frac{y_1}{y_2}$ ধনাত্মক (+ve) হলে বহির্বিভক্ত এবং ঋণাত্মক (−ve) হলে অন্তর্বিভক্ত]
  - y-অক্ষ $\left|\frac{x_1}{x_2}\right|$ অনুপাতে বিভক্ত করে। [$\frac{x_1}{x_2}$ ধনাত্মক (+ve) হলে বহির্বিভক্ত এবং ঋণাত্মক (−ve) হলে অন্তর্বিভক্ত]
  - $ax + by + c = 0$ রেখাটি $\frac{|ax_1+by_1+c|}{|ax_2+by_2+c|}$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

    [$\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$ ধনাত্মক (+ve) হলে বহির্বিভক্ত এবং ঋণাত্মক (−ve) হলে অন্তর্বিভক্ত]

সমস্যা: $(3,2)$ এবং $(0,-1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে $2x - 5y + 1 = 0$ রেখাটি যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

স্মার্ট পদ্ধতি (লিখিত ও **MCQ** পরীক্ষার জন্য):



এখানে, $AC = \frac{6-10+}{\sqrt{4+25}}$

$= \frac{-3}{\sqrt{29}}$ এবং $BE = \frac{0+5+1}{\sqrt{4+25}} = \frac{6}{\sqrt{29}}$

$\therefore$ সদৃশ ত্রিভুজ হতে পাই, $\frac{k}{1} = \frac{AC}{BE} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \therefore k:1 = 1:2$

[অন্তর্বিভক্ত কারণ AC ও BE বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট]

Shortcut for MCQ

$k = \frac{L_1}{L_2} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$; যেখানে, L_1 = ১ম বিন্দুটি প্রদত্ত সরলরেখায় বসিয়ে প্রাপ্ত মান। L_2 = ২য় বিন্দুটি প্রদত্ত সরলরেখায় বসিয়ে প্রাপ্ত মান।

Example-21: ABC ত্রিভুজের একটি বিন্দু $A(8, 2)$ এবং BC বাহুর মধ্যবিন্দু $D(5, 2)$ হলে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি? **[RU'19-20]**

Sol^n: $\underset{2:1}{\overline{A(8,2) \quad G(x,y) \quad D(5,2)}}$

$x = \frac{8\times1+5\times2}{2+1} = 6; y = \frac{2\times1+2\times2}{2+1} = 2 \therefore G(x,y) = (6,2)$

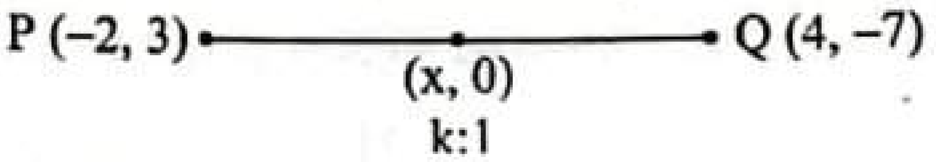
Example-22: যে বিন্দু $(1, 4)$ এবং $(9,-12)$ বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাকে 5:3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত এবং বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **[DU' 05-06, 14-15, JU' 18-19]**

Sol^n: অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দু $\left(\frac{5\times9+3\times1}{5+3}, \frac{-60+34}{5+3}\right) = (6,-6)$

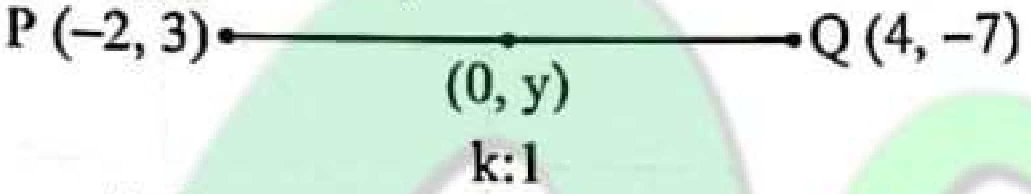
বহির্বিভক্তকারী বিন্দু $\left(\frac{5\times9-3\times1}{5-3}, \frac{-60-1}{5-3}\right) = (21,-36)$ **(Ans.)**

Example-23: $P(-2,3)$ ও $Q(4,-7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x- অক্ষ এবং y- অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [RU' 07-08, 09-10]

Solⁿ:



$0 = \frac{-7k+3}{k+1} \therefore k = \frac{3}{7} \therefore$ x- অক্ষ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 3: 7 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।



$0 = \frac{4k-2}{k+1} \therefore k = \frac{1}{2} \therefore$ y-অক্ষ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 1: 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

❖ **Shortcut:** x-অক্ষ দ্বারা বিভক্তির অনুপাত, $\frac{m_1}{m_2} = \left|\frac{3}{-7}\right|$ [অনুপাত 3:7 (অন্তর্বিভক্ত)]

y-অক্ষ দ্বারা বিভক্তির অনুপাত, $\frac{m_1}{m_2} = \left|\frac{-2}{4}\right| = \frac{1}{2}$ [অনুপাত 1:2 অন্তর্বিভক্ত)]

Example-24: (4, 7), (0, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে x-অক্ষ কোন অনুপাতে বিভক্ত করে? [JU'19-20]

Solⁿ: x অক্ষ দ্বারা বিভক্তির অনুপাত, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{7}{3}$ [কোটিদ্বয়ের অনুপাত]

$\because \frac{m_1}{m_2}$ ধনাত্মক $\therefore$ এটা বহির্বিভক্তি নির্দেশ করে। $\therefore$ অনুপাত 7:3 (বহির্বিভক্ত)

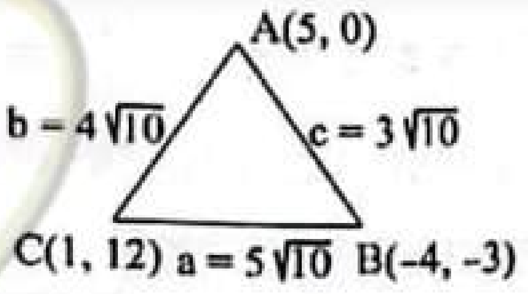
Type–04: ত্রিভুজের বিভিন্ন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়

Concept

- $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ এবং $C(x_3,y_3)$ বিন্দুদ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজের:
  (i) ভরকেন্দ্র $= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$
  (ii) অন্তঃকেন্দ্র $= \left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$ সেখানে $BC = a, CA = b$ এবং $AB = c$
  (iii) লম্ববিন্দু/লম্বকেন্দ্রঃ ত্রিভুজের একটি শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুগুলোর উপর অঙ্কিত লম্বগুলোর ছেদবিন্দুকে লম্ববিন্দু/লম্বকেন্দ্র বলে।
- লম্বকেন্দ্র বের করার ক্ষেত্রে ঢালের ধারণা $(m_1m_2 = -1)$ ব্যবহার করতে হবে।

Problems

Example-25. ΔABC ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি যথাক্রমে $A(5,0), B(-4,-3)$ & $C(1,12)$ । এর (i) ভরকেন্দ্র (ii) অন্তঃকেন্দ্র (iii) পরিকেন্দ্র এবং (iv) লম্বকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [SUST'11-12]



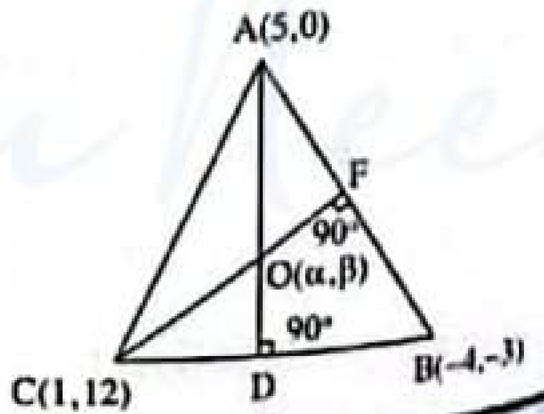
Solⁿ: (i) ভরকেন্দ্র, $x = \frac{5+1-4}{3} = \frac{2}{3}$; $y = \frac{0+12-3}{3} = 3 \therefore \left(\frac{2}{3}, 3\right)$ **(Ans.)**

(ii) অন্তঃকেন্দ্র, $x = \frac{5\sqrt{10}\times5+4\sqrt{10}\times(-4)+1\times3\sqrt{10}}{4\sqrt{10}+3\sqrt{10}+5\sqrt{10}} = \frac{25-16}{12} = 1$

$y = \frac{5\sqrt{10}\times0+3\sqrt{10}\times12+4\sqrt{10}\times(-3)}{4\sqrt{10}+3\sqrt{10}+5\sqrt{10}} = \frac{36-1}{12} = 2 \therefore (1,2)$ **(Ans.)**

(iii) পরিকেন্দ্র $P(x,y)$ হলে $\therefore AP = BP = CP \therefore AP^2 = BP^2 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-0)^2 = (x+4)^2 + (y+3)^2$
$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 \Rightarrow 18x + 6y = 0 \Rightarrow 3x + y = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$
আবার, $AP^2 = CP^2 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-0)^2 = (x-1)^2 + (y-12)^2$
$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 24y + 144 \Rightarrow 8x - 24y + 120 = 0$
$\Rightarrow x - 3y + 15 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) & (ii) সমাধান করে পাই, $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{9}{2} \therefore$ পরিকেন্দ্র $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

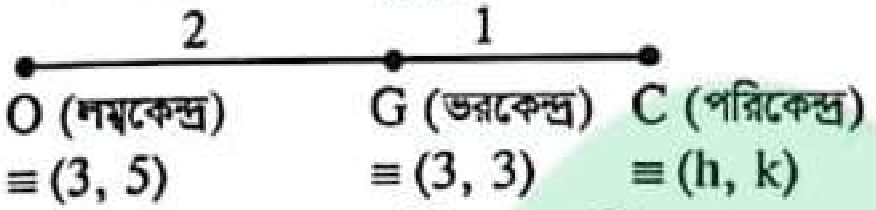


(iv) লম্ব বিন্দু: $m_{AD} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{\beta-0}{\alpha-5} \times \frac{-3-12}{-4-1} = -1 \therefore \alpha + 3\beta = 5 \ldots\ldots\ldots (i)$
$m_{CF} \times m_{AB} = -1 \Rightarrow \frac{\beta-12}{\alpha-1} \times \frac{-3-0}{-4-5} = -1 \therefore 3\alpha + \beta = 15 \ldots\ldots\ldots (ii)$
(i) ও (ii) সমাধান করে পাই, $\alpha = 5,\ \beta = 0\ \therefore$ লম্ববিন্দু $O(5,0)$

Example-26: যদি কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্কযথাক্রমে $(3,5)$ ও $(3,3)$ হয়, তবে পরিকেন্দ্রের স্থানাঙ্ককত?

(a) $(0,4)$ (b) $(4,0)$ (c) $(2,1)$ (d) $(3,2)$

Sol^n^: (d); $3=\frac{2\times4+1\times3}{2+1}\Rightarrow x=3$ এবং $3=\frac{2\times k+1\times5}{2+1}\therefore k=2\therefore$ পরিকেন্দ্র $(3,2)$ **(Ans.)**



Note: ভরকেন্দ্র, লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র কে 2: 1 অনুপাতে অর্ন্তবিভক্ত করে।

Example-27: $(at_1^2,2at_1),(at_2^2,2at_2)$ এবং $(at_3^2,\ 2at_3)$ শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রটি x অক্ষের উপর অবস্থিত হলে:

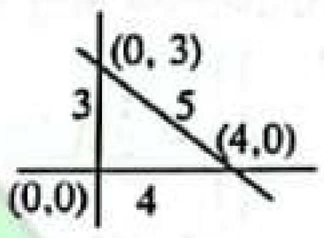
(a) $t_1-t_2+t_3=0$ (b) $t_1+t_2=-t_3$ (c) $t_1+t_2=t_3$ (d) $t_1^2+t_2^2+t_3^2=0$

Sol^n^: (b); ভরকেন্দ্র $(\alpha,0)$ হলে: $0=\frac{2at_1+2at_2+2at_3}{3}\Rightarrow 2a(t_1+t_2+t_3)=0\ [\therefore a\neq0]\therefore t_1+t_2+t_3=0$ **(Ans.)**

Example-28: একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে (0, 0), (0, 3) ও (4, 0)। এর ভরকেন্দ্র ও অন্ত:কেন্দ্র নির্ণয় কর। **[BAU' 14-15]**

Sol^n^: ভরকেন্দ্র (x,y) হলে, $x=\frac{0+0+4}{3}=\frac{4}{3};\ y=\frac{0+3+0}{3}=1\ \therefore\left(\frac{4}{3},1\right)$

অন্ত:কেন্দ্র $=\left(\frac{0\times5+4\times0+3\times4}{3+4+5},\frac{0\times5+4\times3+3\times0}{3+4+5}\right)=(1,1)$ **(Ans.)**



Example-29: কোন ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র (6, 4) এবং দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (6, 1) এবং (2, 7) তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে-

Sol^n^: ধরি, তৃতীয় শীর্ষবিন্দু $(x,y)\therefore\frac{x+6+2}{3}=6\Rightarrow x=10$ এবং $\frac{y+1+7}{3}=4\Rightarrow y=4\therefore$ তৃতীয় শীর্ষবিন্দু $(10,4)$ **(Ans.)**

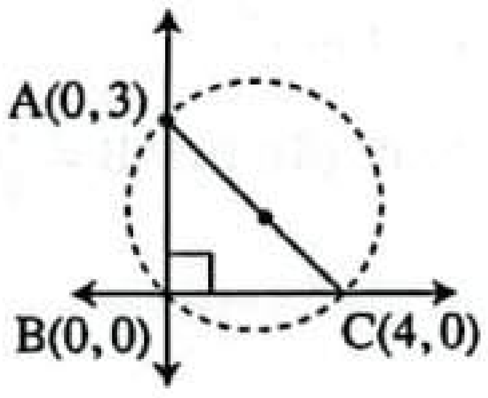
Example-30: (0, 0), (4, 0) ও (0, 3) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র এবং পরিব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

Sol^n^: A, B, C বিন্দুত্রয় দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তই পরিবৃত্ত। যেহেতু $\angle B=90^\circ$।

তাই বলা যায় ∠B অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এবং AC বৃত্তটির ব্যাস।

$\therefore$ পরিবৃত্তের কেন্দ্র $\equiv\left(\frac{0+4}{2},\frac{3+0}{2}\right)\equiv\left(2,\frac{3}{2}\right)$ [অতিভুজের মধ্যবিন্দু]

$\therefore$ পরিব্যাসার্ধ $=\frac{1}{2}\times AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{3^2+4^2}=\frac{5}{2}$ একক **(Ans.)**



- **Shortcut:** সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র = অতিভুজের মধ্যবিন্দু এবং পরিব্যাসার্ধ হলো অতিভুজের দৈর্ঘ্যের অর্ধেক।

Type–05: ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা

Concept

- $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ ও $C(x_3,y_3)$ বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$$\Delta=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2&y_2\\x_3&y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_3&y_3\\x_1&y_1\end{vmatrix}\right|\text{ বর্গএকক}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3&x_1\\y_1&y_2&y_3&y_1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}\text{ বর্গ একক}$$

- একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 0 হলে, ত্রিভুজের তিনটি বিন্দু সমরেখ হবে (বা আসলে কোন ত্রিভুজ গঠিত হবে না)

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে টিসমিস পদ্ধতি

একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 3), (5, 1) ও (7, 8) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

কার্যপ্রণালী

(a) যে কোন একটি বিন্দুকে টিসমিস করে (0, 0) বানাতে হবে।

(b) যে বিন্দুকে (0, 0) বানাবে, অপর বিন্দুদ্বয় হতে সেটি বিয়োগ করে নতুন দুটি বিন্দু পাওয়া যাবে।

$$\text{অর্থাৎ, }\begin{matrix}(1,3)&(5,1)&(7,8)\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\(0,0)&(4,-2)&(6,5)\end{matrix}$$

(0, 0) বিন্দুবাদে প্রাপ্ত বিন্দুদ্বয়: $(4,-2)(6,5)$

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$(ভুল করে − করোনা ভুল)

↓ ↓ ↓ ↓

ভুজ$_1$ কোটি$_2$ কোটি$_1$ ভুজ$_2$

(4, −2) (6, 5)

∴ ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}\{4\times5-(-2)\times6\}=\frac{1}{2}(20+12)=16$ বর্গ একক।

Problems

Example-31: একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 5 যার দুটি কৌণিক শীর্ষবিন্দু $(2,1)$ এবং $(3,-2)$ এবং তৃতীয় কৌণিক বিন্দু $y=x+3$ রেখার উপর অবস্থিত। তৃতীয় কৌণিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

(a) $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ (c) $\left(\frac{7}{2},-\frac{13}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{4},\frac{11}{4}\right)$

Sol^n: (a); যেহেতু ৩য় কৌণিক বিন্দু $y=x+3$ রেখার উপর অবস্থিত। তাই এর সহগগুলোর আকার হবে $(x,x+3)$।

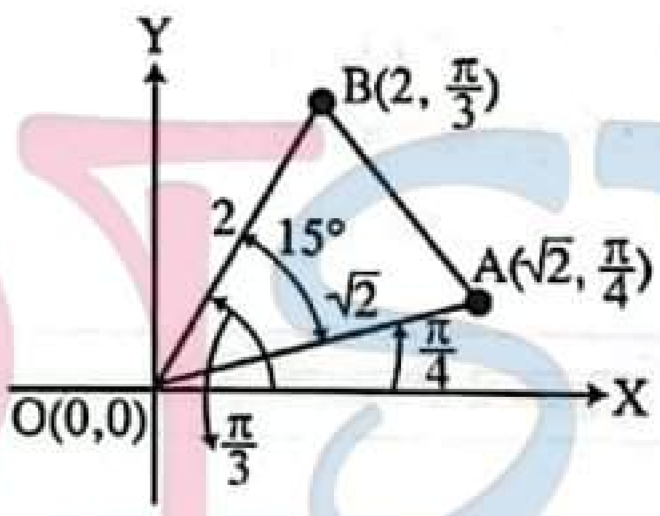
$$\therefore 5=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x & x+3 & 1\\2 & 1 & 1\\3 & -2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|(4x-4)|=|2x-2|\therefore 2x-2=\pm5\therefore x=-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\therefore y=\frac{3}{2},\frac{13}{2}$$

∴ ৩য় শীর্ষ $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ or $\left(\frac{7}{2},\frac{13}{2}\right)$ **(Ans.)**

Example-32: একটি ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুসমূহের পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে পোল বিন্দু, $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right),\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বর্গ এককে হবে?

(a) $1+\sqrt{3}$ (b) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (c) $1-\sqrt{3}$ (d) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Sol^n: (d); $\Delta OAB=\frac{1}{2}(OA)(OB)\sin15°=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ **(Ans.)**



$\left[\sin15°=\sin(45°-30°)=\sin45°\cos30°-\cos45°\sin30°=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right]$

Example-33: OPQ ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $(0,0),(A\cos\beta,-A\sin\beta)$ এবং $(A\sin\alpha,A\cos\alpha)$ ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবে নিচের কোন শর্তে?

(a) $\alpha=\beta$ (b) $\alpha+\beta=0$ (c) $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ (d) $\alpha=2\beta$

Sol^n: (a); $\Delta OPQ=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & A\cos\beta & A\sin\alpha & 0\\0 & -A\sin\beta & A\cos\alpha & 0\end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}|A^2\cos\alpha\cos\beta+A^2\sin\alpha\sin\beta|=\frac{1}{2}A^2\cos(\alpha-\beta)$

∴ ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবে যদি $\cos(\alpha-\beta)=1$ হয় অর্থাৎ $\alpha=\beta$ হতে হবে।**(Ans.)**

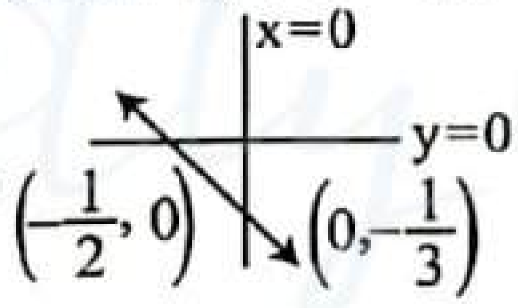
Example-34: ABCD চর্তুভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলো যথাক্রমে $(a,0),(-b,0)$ ও $(0,a)$ এবং $(0,-b)$: ΔACB এর ক্ষেত্রফল কত?

(a) $0.5(a-b)a$ (b) $0.5(b-a)b$ (c) $0.5(a+b)a$ (d) $0.5(a-b)c$

Sol^n: (c); $\Delta ACB=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a & 0 & -b & a\\0 & a & 0 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|a^2+ab|=\frac{1}{2}(a+b)a$ **(Ans.)**

Example-35: $2x+3y+1=0, x=0,\ y=0$ রেখা তিনটি দ্বারা আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল কত? **[JU'19-20]**

Sol^n:



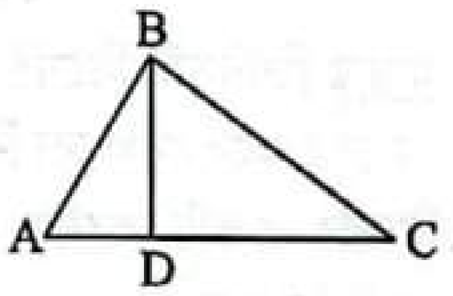
$2x+3y+1=0\Rightarrow\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{-\frac{1}{3}}=1$; $\Delta=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)$ বর্গ একক $=\frac{1}{12}$ বর্গ একক।

Example-36: ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $A(-3,-2), B(-3,9)$ এবং $C(5,-8)$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে B হতে CA এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Sol^n: $A(-3,-2), B(-3,9)$ এবং $C(5,-8)$ শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -3 & 9 & 1 \\ 5 & -8 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}|-3(9+8)+2(-3-5)+1(24-45)|$

$= \frac{1}{2}|-51-16-21| = \frac{1}{2}|-88| = 44$ বর্গ একক



মনে করি, শীর্ষবিন্দু B হতে বিপরীত বাহু AC এর উপর অঙ্কিত লম্ব BD

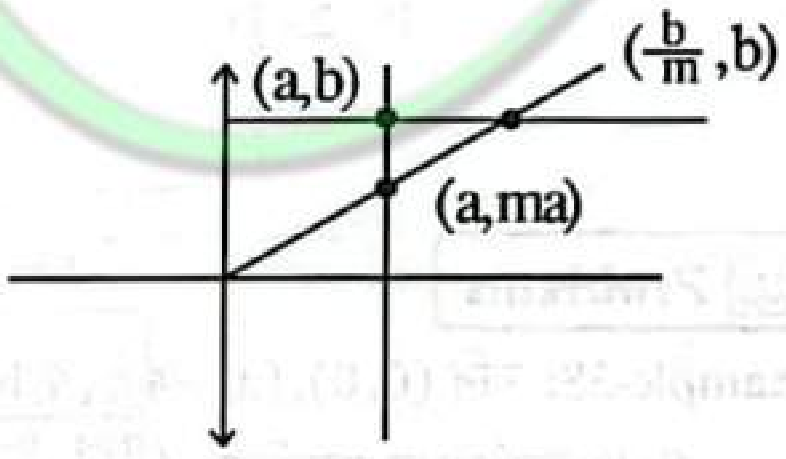
তাহলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (AC × BD)

এখানে $AC^2 = (-3-5)^2 + (-2+8)^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow AC = 10$

প্রথমাংশের ফল ব্যবহার করে, $\frac{1}{2}.10.BD = 44 \Rightarrow BD = \frac{44}{5} = 8\frac{4}{5}$ একক। **(Ans.)**

Example-37: $x = a, y = b, y = mx$ রেখা তিনটি যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল কোনটি? **[CU'20-21]**

Sol^n: সরলরেখাত্রয়ের ছেদবিন্দুগুলো হলো, $(a,b), (a,ma), \left(\frac{b}{m}, b\right)$



ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & a & \frac{b}{m} & a \\ b & ma & b & b \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\left(ma^2 + ab + \frac{b^2}{m}\right) - (ab + ab + ab)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{m^2a^2+b^2-2abm}{m}\right\} = \frac{1}{2m}\{(ma)^2 - 2.ma.b + (b)^2\}$

$= \frac{1}{2m}(b-ma)^2 = \frac{1}{2m}(ma-b)^2$

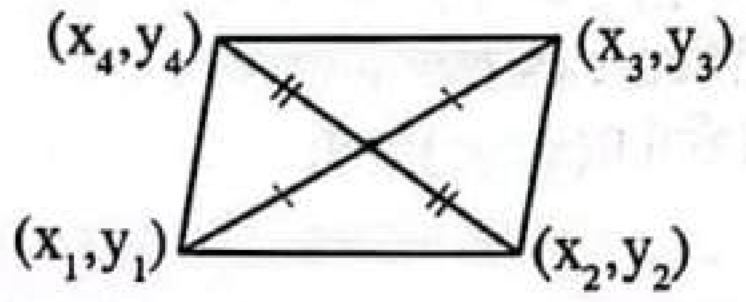
Type–06: সামান্তরিকের চতুর্থ শীর্ষ এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয়

Concept

- $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$ ও $D(x_4,y_4)$ দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজ ABCD এর ক্ষেত্রফল,

$\Delta = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

- যেই চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান ও সমান্তরাল তাকে সামান্তরিক বলে। আয়ত, বর্গ, রম্বস এরা সবই সামান্তরিক। সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। সামান্তরিকের তিনটি বিন্দু দেওয়া থাকলে এই concept এর মাধ্যমে চতুর্থ বিন্দু নির্ণয় করা যায়।



ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right) \equiv \left(\frac{x_2+x_4}{2}, \frac{y_2+y_4}{2}\right)$

$\therefore x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \mid y_1 + y_3 = y_2 + y_4$

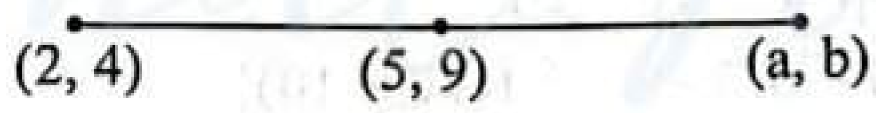
$\therefore x_4 = x_1 + x_3 - x_2 \mid y_4 = y_1 + y_3 - y_2$

Shortcut

নির্ণেয় শীর্ষের বিপরীত শীর্ষের স্থানাঙ্ক বিয়োগ করতে হবে।

- যদি বলা হয়, দুটি বিন্দুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 9) এবং বিন্দু দুটির একটির স্থানাঙ্ক (2, 4) হলে অপর বিন্দুর স্থানাঙ্ক কী হবে?

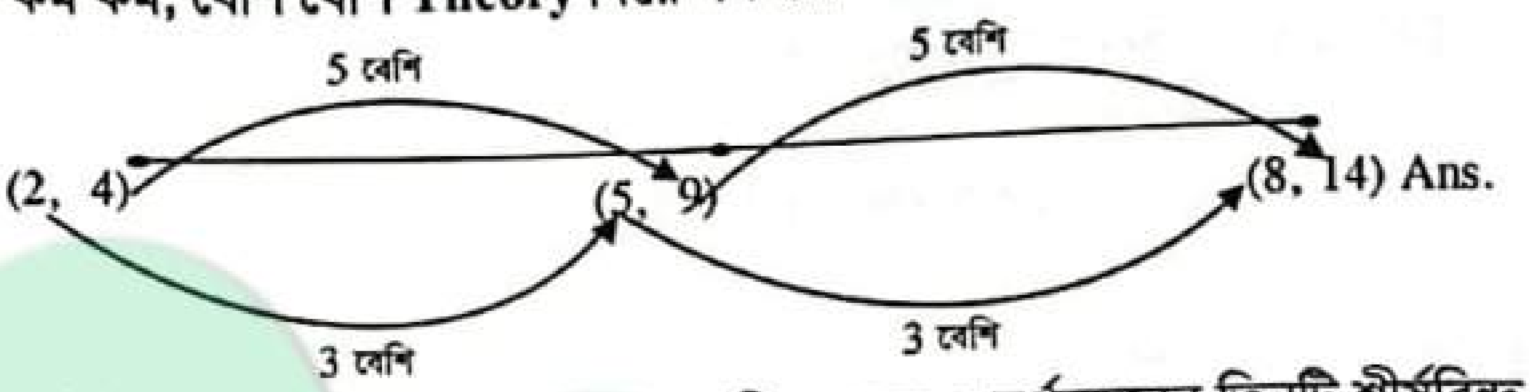
ধরি, অপর বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (a, b)



$\therefore 5 = \frac{2+a}{2} \Rightarrow a = 8;\ 9 = \frac{4+b}{2} \Rightarrow b = 14$

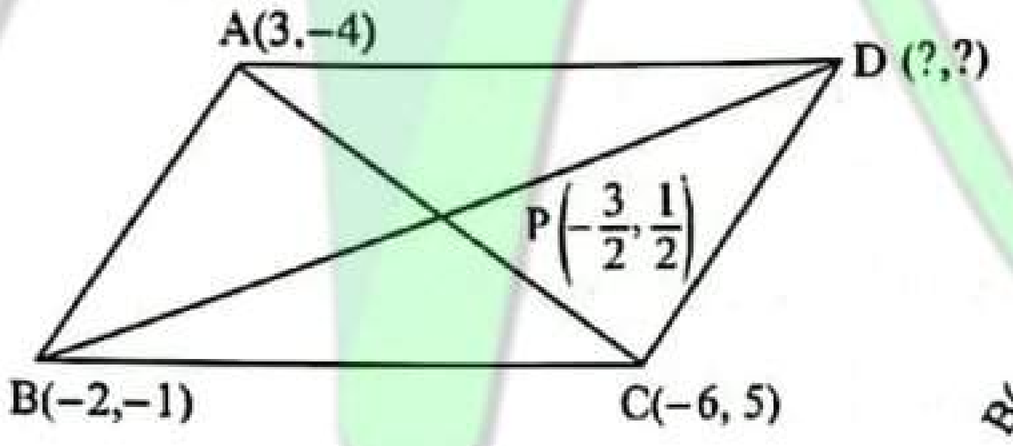
∴ অপর বিন্দুটির স্থানাঙ্ক হবে (8, 14)

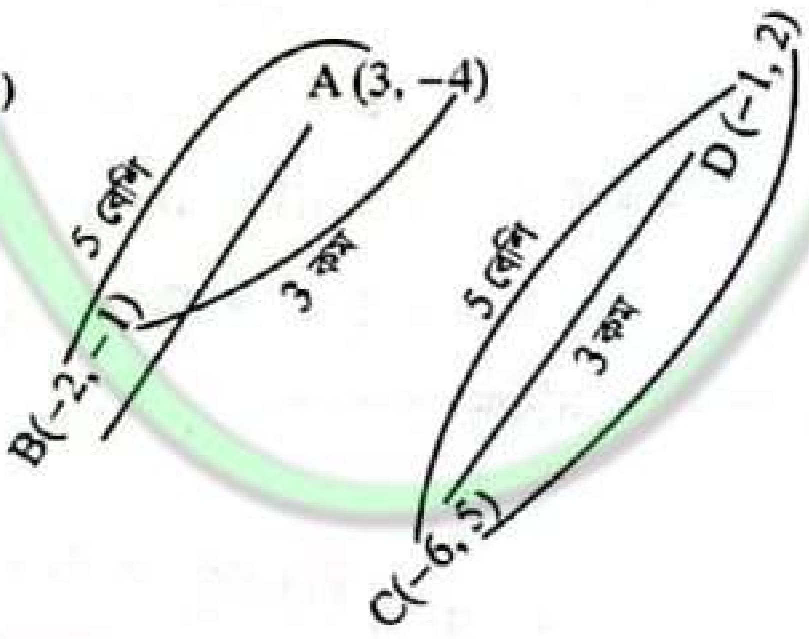
এবার চলো আমরা কম কম, বেশি বেশি **Theory** দিয়ে সমস্যাটি করে ফেলি।



হ্যাঁ এবার এই মজার জিনিসটি দিয়েই আয়তক্ষেত্র, সামান্তরিক, রম্বস ও বর্গক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দু দেওয়া থাকলে চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক বের করে ফেলবো নিমেষেই।

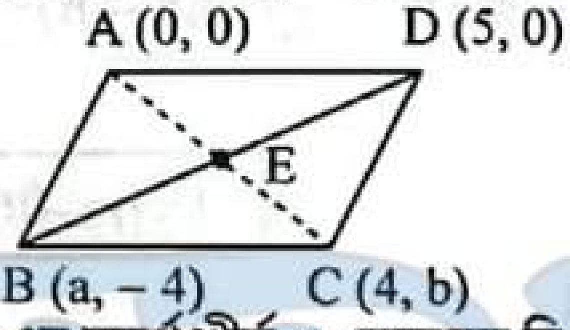
সমস্যা: কোন সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দুদ্বয় $(3,-4)$ এবং $(-6,5)$। তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2,-1)$ হলে চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।





Problems

Example-38: যদি $(0,0), (a,-4), (4,b)$ এবং $(5,0)$ একটি রম্বসের শীর্ষবিন্দু হয়, তাহলে রম্বসের কর্ণ দুটির ছেদবিন্দু কত? [JU'19-20]



Sol^n: কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু: $\left(\frac{0+4}{2},\frac{0+b}{2}\right) \equiv \left(\frac{a+5}{2},-\frac{4}{2}\right) \therefore 4 = a+5 \therefore a=-1$

$\frac{B}{2} = -2 \therefore b = -4$

$\therefore$ কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(2,-2)$

Example-39: একটি আয়তক্ষেত্রের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে $(3,2), (2,-1)$ এবং $(8,-3)$ । এর চতুর্থ শীর্ষ ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [JU' 10-11, KU' 06-07]

Sol^n: চতুর্থ শীর্ষ $= (3+8-2,\ 2-3+1) = (9,0)$

ক্ষেত্রফল $= 2 \times \frac{1}{2}\{3(-1+3)+2(-3-2)+8(2+1)\} = (3\times 2)+2\times(-5)+24 = 20$ বর্গ একক। **(Ans.)**

Example-40: $(-2,3), (-3,-4), (5,-1)$ ও $(2,2)$ বিন্দু চারটি ক্রমান্বয়ে নিয়ে যে চতুর্ভুজ গঠিত হয় তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sol^n: ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|(8+3+10+6)-(-9-20-2-4)| = 31$ বর্গ একক **(Ans.)**

[উল্লেখ ত্রিভুজ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় এর ক্ষেত্রে বিন্দুত্রয়কে যে কোন ক্রমে নেয়া যাবে কিন্তু অন্যান্য বহুভুজের ক্ষেত্রে প্রশ্নে যে ক্রম উল্লেখ থাকবে তা দিয়েই করতে হবে]

Example-41: ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু $(1,2), (4,4)$ এবং $(2,8)$ হলে শীর্ষত্রয় ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sol^n: $A(x_1,y_1), B(x_2,\ y_2)$ এবং $C(x_3,y_3)$ হলে, DFEB সামন্তরিকের চতুর্থ শীর্ষ $B(x_2,y_2)$ হবে:

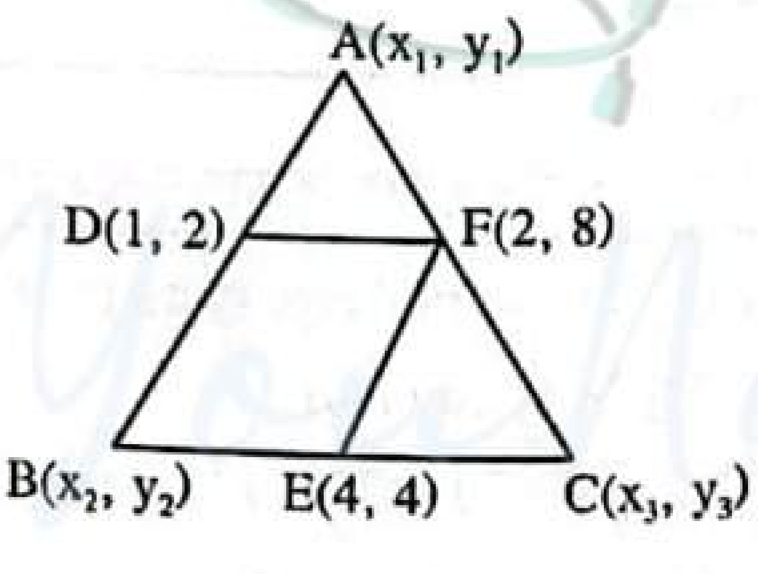
$x_2 = 1+4-2 = 3, y_2 = 2+4-8 = -2 \therefore B(3,-2)$

আবার, EDFC সামান্তরিকে চতুর্থ শীর্ষ (x_3,y_3) এর জন্য:

$x_3 = 4+2-1 = 5$ এবং $y_3 = 4+8-2 = 10 \therefore C(5,10)$

অনুরূপভাবে EDAF সামান্তরিক হতে, $A(x_1,y_1) = A(-1,6)$

$\therefore$ শীর্ষত্রয় হবে: $A(-1,6), B(3,-2)$ এবং $C(5,10)$ **(Ans.)**



এখন, ক্ষেত্রফল $= \Delta\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -1 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & 1 \end{matrix}\right\|$

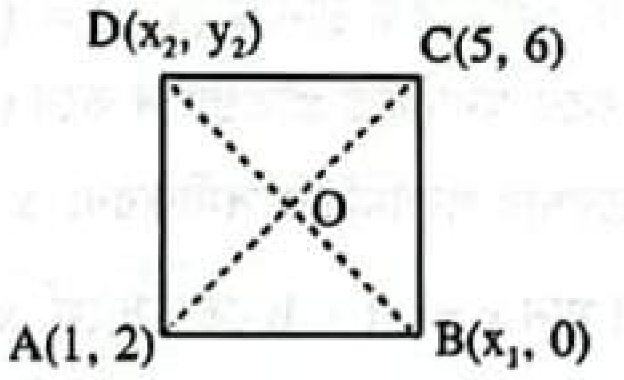
$= \frac{1}{2}|-1(-2-10)-6(3-5)+1(30+10)|$

$= \frac{1}{2}|12+12+40| = \frac{64}{2} = 32$ বর্গ একক।

❖ **Shortcut:** $\Delta ABC = 4 \times \Delta DEF \therefore DEF = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|1(4-8) - 2(4-2) + 1(32-8)|$

$= \frac{1}{2}|-4-4+24| = 8$ বর্গ একক। $\therefore \Delta ABC = 4 \times 8 = 32$ বর্গ একক। **(Ans.)**

Example-42: ABCD রম্বসের $A(1,2), C(5,6)$ এবং B শীর্ষ x অক্ষের উপর অবস্থিত। B ও D শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্কনির্ণয় কর।



Solⁿ: $AC = \sqrt{(5-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{32}$; ABCD রম্বস বলে: $AB = BC = CD = DA$

$\therefore AB^2 = BC^2 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 + (0-2)^2 = (x_1 - 5)^2 + (0-6)^2$

$\Rightarrow x_1^2 - 2x_1 + 1 + 4 = x_1^2 - 10x_1 + 25 + 36$

$\therefore x_1 = 7 \therefore B(x_1, 0) = B(7,0)$ **(Ans.)**

আবার, AC কর্ণের মধ্যবিন্দুটি হবে $0(3,4)$, যা BD কর্ণেরও মধ্যবিন্দু।

$\therefore 3 = \frac{x_2+7}{2} \therefore x_2 = -1$ এবং $4 = \frac{y_2+0}{2} \therefore y_2 = 8 \therefore D(x_2, y_2) = D(-1,8)$ **(Ans.)**

Example-43: চিত্রের আয়তক্ষেত্রের AB বাহুর দৈর্ঘ্য 3 একক এবং AD বাহুর দৈর্ঘ্য 2 একক হলে কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ককত?

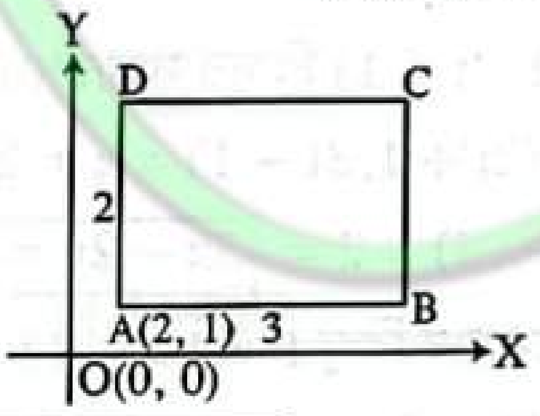
(a) $\left(\frac{7}{2}, 2\right)$ (b) $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ (c) $(3, 2)$ (d) $(6, 3)$

Solⁿ: (a); চিত্রানুসারে $B(2+3,1) = B(5,1)$

এবং $D(2, 1+2) = D(2,3)$ হবে,

$\therefore$ BD কর্ণের মধ্যবিন্দু তথা কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুটি

$\left(\frac{5+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$ হবে,



Type–07: সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

বিন্দু দুই রকম হতে পারে- স্থির বিন্দু এবং চলমান বিন্দু। স্থির বিন্দুর স্থানাঙ্ক স্থির থাকে। আর চলমান বিন্দু কোনো শর্ত সাপেক্ষে move করতে থাকবে। এই চলমান বিন্দুর চলার পথকে mathematically প্রকাশ করলেই সঞ্চারপথ পাওয়া যায়। উদাহরণস্বরূপ- তোমাকে বলা হলো একটি চলমান বিন্দু $(0, 0)$ থেকে সর্বদা 5 একক দূরত্বে থাকে। সঞ্চারণপথ নির্ণয় কর। উত্তর হবে- $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5^2$, তাই সঞ্চারপথ নির্ণয় করতে বললে শর্ত বুঝে সমীকরণ নির্ণয় করবে।

Problems

Example-44: $(2, 0)$ এবং $(-4, 0)$ হতে সমদূরবর্তী এরূপ বিন্দু সমূহের সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: মনে করি $P(x,y)$ সঞ্চারপথের উপর যেকোন বিন্দু

প্রশ্নমতে, $P(x,y)$ হতে $(2,0)$ বিন্দুর দূরত্ব $= P(x,y)$ হতে $(-4,0)$ বিন্দুর দূরত্ব,

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2}$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2 \Rightarrow 12x + 12 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$ **(Ans.)**

Example-45: একটি সেটের বিন্দুসমূহ x অক্ষ থেকে দূরত্ব y অক্ষ থেকে দূরত্বের দ্বিগুণ। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: মনে করি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (x,y); প্রশ্নমতে, $|y| = 2|x| \therefore y = \pm 2x$ **(Ans.)**

Example-46: $(0,-1)$ বিন্দু এবং $y = 1$ সরলরেখা থেকে সমান দূরত্বের বিন্দুর সঞ্চারপথ কোনটি? **[GST'20-21]**

(a) $y^2 + 4x = 0$ (b) $y^2 - 4x = 0$ (c) $x^2 + 4y = 0$ (d) $x^2 - 4y = 0$

Solⁿ: (c); সঞ্চারপথের বিন্দু (x,y)।

এখন, $\sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2} = |y-1| \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow x^2 + 4y = 0$

Example-47: x অক্ষ থেকে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব সর্বদাই মূলবিন্দু থেকে এর দূরত্বের অর্ধেক। উক্ত সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[JU' 09-10]**

Solⁿ: মনে করি, $P(x,y)$ সঞ্চারপথের উপর যেকোন বিন্দু x অক্ষ হতে $P(x,y)$ এর দূরত্ব $= |y|$

মূলবিন্দু হতে $P(x,y)$ এর দূরত্ব $= \sqrt{x^2 + y^2}$; প্রশ্নমতে, $|y| = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4y^2 \Rightarrow x^2 = 3y^2$ **(Ans.)**

Type–08: পরামিতিক সমীকরণ সংক্রান্ত

Concept

সঞ্চারপথের কোন বিন্দুর x ও y চলককে তৃতীয় কোন চলক (t, θ ইত্যাদি) দ্বারা প্রকাশ করে যে সমীকরণ পাওয়া যায়, তাকে পরামিতিক সমীকরণ বলে। এক্ষেত্রে তৃতীয় চলককে বলা হয় পরামিতি।

একটি পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(x, y) = (f(t), g(t))$ হলে [t হচ্ছে পরামিতি] $x = f(t)$ ও $y = g(t)$ ধরে যেকোনো একটি হতে t এর মান বের করে অন্যটিতে প্রতিস্থাপন করে t বর্জিত আকারে x ও y সম্বলিত সমীকরণ পাওয়া যাবে যা নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

সরলরেখার পরামিতিক সমীকরণ: $x = at + b$; $y = ct + d$; লক্ষ করো, $y = ct + d \therefore t = \frac{y-d}{c}$

t এর মান $x = at + b$ তে বসালে, $x = a.\frac{y-d}{c} + b \Rightarrow cx = ay - ad + bc \therefore \boxed{cx - ay + (ad - bc) = 0}$

যা x ও y এর একঘাত সংবলিত সমীকরণ বা সরলরেখার সমীকরণ। ($ax + by + c = 0$ এর অনুরূপ)

Problems

Example-48: $(2t + 1, 3t - 1)$ বিন্দুর সঞ্চারপথ কী হবে যেখানে t পরিবর্তনশীল।

Solⁿ: $(x, y) = (2t + 1, 3t - 1) \therefore x = 2t + 1 \ldots\ldots$ (i); $y = 3t - 1 \ldots\ldots$ (ii)

এখন, (i) × 3 − (ii) × 2 ⇒ $\boxed{3x - 2y = 5}$ ইহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

Example-49. একটি চলমান বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক $(t + 1,\ 2t + 3)$ যেখানে t পরিবর্তনশীল। P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

Solⁿ: মনে করি, $P(x, y)$; $x = t + 1 \cdots\cdots$ (i) এবং $y = 2t + 3 \cdots\cdots$ (ii)

এখন (i) × 2 − (ii) ⇒ $2x - y + 1 = 0$ **(Ans.)**

Example-50. একটি চলমান বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ যেখানে θ পরিবর্তনশীল। P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

Solⁿ: মনে করি, $P(x, y)$; $x = a\cos\theta \Rightarrow \frac{x}{a} = \cos\theta \cdots\cdots$ (i) ; $y = b\sin\theta \Rightarrow \frac{y}{b} = \sin\theta \cdots\cdots$ (ii)

এখন, $(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **(Ans.)**

Type–09: ঢাল নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

কোনো সরলরেখা (যা x –অক্ষের উপর লম্ব নয়) x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণের ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্টের মানকে রেখাটির ঢাল বলে।

ঢালকে সাধারণত m দ্বারা সূচিত করা হয়। AB সরলরেখা x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\theta(0° \le \theta < 180° ; \theta \ne 90°)$ কোণ উৎপন্ন করলে, তার ঢাল $m = \tan\theta$ । ভুজ এর প্রতি একক পরিবর্তনের সাথে সাথে কোটির পরিবর্তনের হারই ঢাল।

(i) (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল, $m = \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}}$

(ii) $ax + by + c = 0$ সরলরেখার ঢাল, $m = -\frac{a}{b} = -\frac{\text{x এর সহগ}}{\text{y এর সহগ}}$

Problems

Example-51: (6, 3) এবং (3, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর। [JU' 15-16]

Solⁿ: $\boxed{\text{সরলরেখার ঢাল} = \frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}}} \therefore m = \frac{3-2}{6-3} = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

Example-52: $(0, 2)$ এবং $(-2, 0)$ বিন্দুগামী সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কী কোণ উৎপন্ন করে? [DU'22-23]

(a) 30°
(b) 45°
(c) 60°
(d) 120°

Solⁿ: (b); $(0, 2)$ এবং $(-2, 0)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল, $\tan\theta = \frac{2-0}{0+2} = 1 = \tan 45° \therefore \theta = 45°$

Example-53: $A(-1,3)$ এবং $B(-2,1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার উপরিস্থিত $P(a,a)$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? **[GST'22-23]**

(a) $(5,5)$ (b) $(-5,-5)$ (c) $(4,4)$ (d) $(-4,-4)$

Sol^n: (b); $A(-1,3), B(-2,\ 1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার উপরিস্থিত $P(a,\ a)$ বিন্দু

$\therefore$ AP এর ঢাল = AB এর ঢাল $\frac{a-3}{a+1} = \frac{3-1}{-1-(-2)} \Rightarrow \frac{a-3}{a+1} = \frac{2}{1} = 2$

$\Rightarrow a - 3 = 2a + 2 \Rightarrow -5 = a \therefore P(-5,-5)$

Example-54: $3x - 5y + 1 = 0$ সরলরেখাটির ঢাল নির্ণয় কর। **[JU'19-20]**

Sol^n: $\therefore$ $\boxed{\text{সরলরেখার ঢাল} = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}}}$ $\therefore m = -\frac{3}{-5} = \frac{3}{5}$ **(Ans.)**

Example-55: যদি $\frac{3}{2}$ ঢালবিশিষ্ট একটি সরলরেখার সমীকরণ $ax + 3y - 7 = 0$ হয়, তবে 'a' এর মান কত?

Sol^n: $ax + 3y - 7 = 0$ রেখার ঢাল, $m = -\frac{a}{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{9}{2}}$ **(Ans.)**

Example-56: $x - y + 4 = 0$ সরলরেখাটি y অক্ষের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে? **[DU' 18-19]**

Sol^n: x অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\theta_x = \tan^{-1}(\text{ঢাল})$

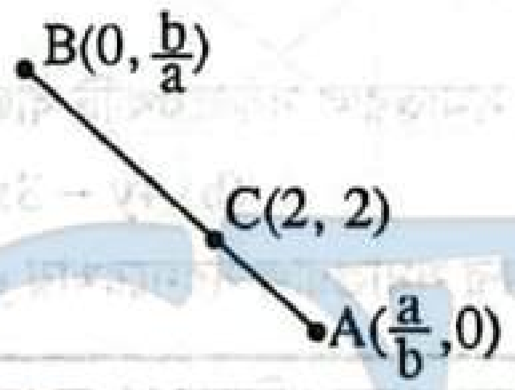
এখানে, ঢাল $= -\frac{1}{-1} = 1 \therefore \theta_x = \tan^{-1}(1) = 45°$

$\therefore$ y অক্ষের সাথে কোণ, $\theta_y = 90° - 45° = 45°$ **(Ans.)**

Example-57: $\left(\frac{a}{b},0\right), \left(0,\frac{b}{a}\right), (2,2)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, $(a+b)$ এর মান নিচের কোনটি? **[CU'22-23]**

(a) $\sqrt{\frac{1}{2}ab}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{ab}}$ (c) $\sqrt{\frac{5}{2}ab}$ (d) $\frac{5}{2\sqrt{ab}}$

Sol^n: (c); $A\left(\frac{a}{b},0\right), B\left(0,\frac{b}{a}\right), C(2,2)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে,



$m_{AC} = m_{AB} = m_{AB} = m_{BC}$ হবে

$\therefore \frac{\frac{b}{a}-0}{0-\frac{a}{b}} = \frac{2-0}{2-\frac{a}{b}} [\therefore m_{AB} = m_{AC}$ হতে$]$

$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{2b}{2b-a} \Rightarrow -2b^2 + ab = 2a^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{2}ab \Rightarrow (a + b^2) = \frac{5}{2}ab \therefore a + b = \sqrt{\frac{5}{2}ab}$ **(Ans.)**

Example-58: একটি সরলরেখা $(1,-2)$ বিন্দুগামী ও অক্ষদ্বয় হতে সমান অংশ খন্ডিত করলে রেখাটির ঢাল হবে:

(a) 45° (b) 135° (c) 60° (d) 30°

Sol^n: (b); শর্তমতে, রেখাটির সমীকরণ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x + y = a$ যা $(1,-2)$ বিন্দুগামী $\therefore a = -1$

$\therefore x + y = -1 \Rightarrow y = -x - 1$ যা $y = mx + c$ এর সাথে তুলনা করে বলা যায় নির্ণেয় ঢাল $= -1 \therefore$ ঢাল $= 135°$ **(Ans.)**

Example-59: $x = 3, x = 5, y = 4, y = 5$ রেখাগুলো দ্বারা উৎপন্ন বর্গের একটি কর্ণের ঢাল?

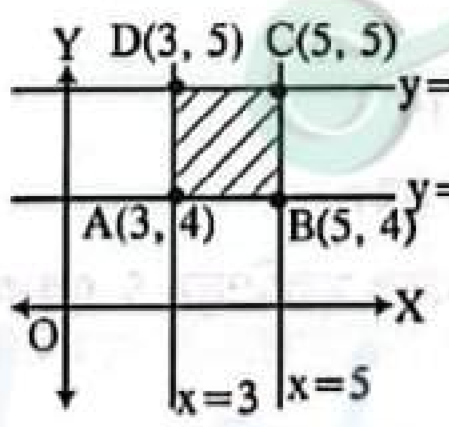
(a) 1 (b) 0 (c) 0.5 (d) −1.5

Sol^n: (c); কর্ণ AC এর ঢাল $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{5-4}{5-3} = \frac{1}{2} = 0.5$

কর্ণ BD এর ঢাল $= \frac{4-5}{5-3}$

$= \frac{-1}{2} = -0.5$



Example-60: $y = \frac{x}{|x|}; x > 0$ কিসের সমীকরণ? **[Ans: c]**

(a) বক্র রেখা (b) উপবৃত্ত (c) সরল রেখা (d) পরাবৃত্ত

Example-61: $a^2x + b^2y + c = 0$ (a, b, c ধ্রুবক) সমীকরণটির জ্যামিতিক পরিচয় হল: **[Ans: c]**

(a) বৃত্ত (b) পরাবৃত্ত (c) সরলরেখা (d) উপবৃত্ত

Type–10: বিভিন্ন শর্তের সাপেক্ষে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়

Case-01: সরলরেখা যে কোন অক্ষের সমান্তরাল ও একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হলে

Concept

(i) y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $\boxed{x = a}$

(ii) x অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $\boxed{y = b}$

Shortcut

মনে রাখবে, x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণে কোন x থাকবে না আর y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণে কোন y থাকবে না।

Problems

Example-62: একটি সরলরেখা x অক্ষের সমান্তরাল এবং তা (3, 4) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সাধারণ সমীকরণ, $y = b$ রেখাটি (3, 4) বিন্দুগামী হলে, $4 = b \therefore b = 4$

$\therefore$ সঞ্চারপথের সমীকরণ $y = 4$ **(Ans.)**

Example-63: y অক্ষের সমান্তরাল এবং (5, 1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ-

Sol^n: $x = 5$

❖ **Shortcut:** মনে রাখবে, যে অক্ষের সমান্তরাল ঐ চলকটি অনুপস্থিত থাকবে এবং বিন্দুটির অপর চলকের মানই হবে সরলরেখার সমীকরণ।

Example-64: y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাটি বাছাই কর:

(a) $4y - 3 = 0$ (b) $4y - 3x = 0$ (c) $4y - 3x - 1 = 0$ (d) $4x - 3 = 0$

Sol^n: (d); y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখায় y থাকে না।

Case-02: ঢাল ও y অক্ষ থেকে খন্ডিতাংশ দেওয়া থাকলে

Concept

কোনো সরলরেখার ঢাল m এবং y অক্ষ থেকে কর্তিত অংশ c হলে সরলরেখাটির সমীকরণ ⇒ $\boxed{y = mx + c}$

Problems

Example-65: $y = mx + c$ সরলরেখাটির ক্ষেত্রে- [KU'19-20]

(i) রেখাটি মূলবিন্দুগামী (ii) m হলো রেখার ঢাল (iii) c হলো y-অক্ষের খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

Sol^n: (b); মূলবিন্দুগামী রেখায় $c = 0$ হয়।

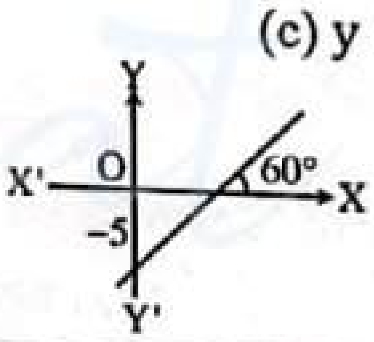
Example-66: নিচের কোন সমীকরণটি y অক্ষকে মূলবিন্দুর 5 একক নিচে ছেদ করে এবং x অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে? [RU'08-09]

(a) $4 = \frac{1}{\sqrt{3}x-5}$ (b) $4 = \frac{1}{\sqrt{3}x+5}$ (c) $y = \sqrt{3}x - 5$ (d) $y = \sqrt{3}x + 5$

Sol^n: (c); $y = mx + c$ হতে পাই,

$m = \tan 60° = \sqrt{3}, c = -5$

$\therefore y = \sqrt{3}x - 5$ **(Ans.)**



Case-03: বিন্দু ও ঢাল দেওয়া

Concept

(x_1, y_1) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল m হলে, সরলরেখাটির সমীকরণ $\Rightarrow \boxed{(y-y_1) = m(x-x_1)}$

Problems

Example-67: (5, 2) বিন্দুগামী এবং 3 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $y-2 = 3(x-5) \Rightarrow 3x-y-13 = 0$ **(Ans.)**

Example-68: একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, -2)$ বিন্দুগামী এবং x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 135° কোণ উৎপন্ন করে।

Sol^n: এখানে ঢাল, $m = \tan 135° = -1$

$\therefore (3, -2)$ বিন্দুগামী এবং -1 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y-(-2) = -1(x-3) \Rightarrow x+y-1 = 0$ **(Ans.)**

Case-04: দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হলে

Concept

একটি সরলরেখা (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী হলে সরলরেখাটির সমীকরণ $\Rightarrow \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}$

Problems

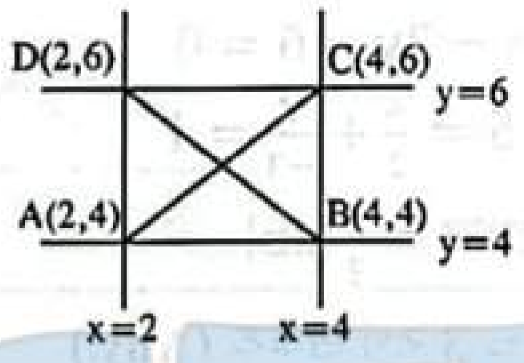
Example-69: $x = 2, x = 4, y = 4$ এবং $y = 6$ রেখা দ্বারা গঠিত বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ বের কর। **[DU' 19-20]**

Sol^n: বর্গের শীর্ষবিন্দুগুলো হলো-$A(2,4), B(4,4), C(4,6), D(2,6)$

$\therefore$ AC কর্ণের সমীকরণ: $\frac{x-2}{2-4} = \frac{y-4}{4-6} \Rightarrow x-y+2 = 0$ **(Ans.)**

BD কর্ণের সমীকরণ: $\frac{x-4}{4-2} = \frac{y-4}{4-6}$

$\Rightarrow x+y-8 = 0$ **(Ans.)**



Example-70: (3, 4) ও (5, 2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $\frac{y-4}{4-2} = \frac{x-3}{3-5} \Rightarrow x+y-7 = 0$ **(Ans.)**

Example-71: $A(h, k)$ বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $B(k, h)$ বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত। AB সরলরেখাটির সমীকরণ হবে?

(a) $3x+5y-3 = 5$ (b) $x+y-6 = 0$ (c) $2x-5y+5 = 0$ (d) $2x-5y-5 = 0$

Sol^n: (b); $A(h, k)$ বিন্দুটি, $6x-y-1 = 0$ রেখাস্থ বলে, $6h-k-1 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i) এবং $B(k, h)$ বিন্দুটি,

$2x-5y-5 = 0$ রেখাস্থ বলে, $2k-5h-5 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) ও (ii) সমাধান করে, $h = 1$ এবং $k = 5 \therefore A(h,k) = (1,5)$ ও $B(k,h) = (5,1)$ হবে,

এবং AB রেখার সমীকরণ: $y-5 = \frac{5-1}{1-5}(x-1) \Rightarrow x+y-6 = 0$ **(Ans.)**

Case-05: উভয় অক্ষ থেকে খন্ডিতাংশ দেওয়া থাকলে

Concept

একটি সরলরেখার x অক্ষের খণ্ডিতাংশ a এবং y অক্ষের খণ্ডিতাংশ b হলে সরলরেখাটির সমীকরণ $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1}$

সরলরেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশ অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|ab|$

Problems

Example-72: $3x - 2y + 6 = 0$ সরলরেখা দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশ কত একক? **[JU'19-20]**

Sol^n: $3x-2y = -6 \Rightarrow \frac{x}{-2}+\frac{y}{3} = 1 \therefore$ x অক্ষর খন্ডিতাংশ 2 একক।

Example-73: x- অক্ষ এবং y-অক্ষ হতে কোন সরলরেখা দ্বারা খণ্ডিত অংশদ্বয়ের যোগফল 8 হলে রেখাটির সমীকরণ নিচের কোনটি? [JU'20-21]

(a) $5x + 3y = 15$ (b) $x + y = 8$ (c) $5x + 3y = 1$ (d) $5x + 3y = 8$

Sol^n: (a); $5x + 3y = 15 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1 ; 3 + 5 = 8$ **(Ans.)**

Example-74: AB সরলরেখাটি $P(5,0)$ এবং $Q(0,-5)$ বিন্দু দুইটি দ্বারা সমত্রিখন্ডিত হয়। রেখাটি x-অক্ষের সাথে কত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করেছে? [JU'19-20]

Sol^n: P, Q বিন্দুদ্বয় AB রেখার উপর অবস্থিত।

$\frac{x}{5} + \frac{y}{-5} = 1 \Rightarrow x - y = 5 \therefore y = x - 5 \therefore$ ঢাল, $\tan\theta = 1 \therefore \theta = 45°$ **(Ans.)**

Example-75: $x - y + \sqrt{3} = 0$ সমীকরণটির বৈশিষ্ট্য নিচের কোনটি? [JU'19-20]

(a) x-অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে (b) উভয় অক্ষের খন্ডিত অংশ সমান

(c) y-অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে (d) কোনোটিই নয়

Sol^n: (b); $x + \sqrt{3} = y \Rightarrow x - y = -\sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{-\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 1 \therefore$ উভয় অক্ষের খন্ডিত অংশের মান $\sqrt{3}$ একক (সমান)।

ঢাল $= \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45° \therefore$ x অক্ষের সাথে 45° এবং y অক্ষের সাথে $(90° - 45°)$ বা 45° কোণ উৎপন্ন করে।

Example-76: একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে এবং (3, 2) বিন্দুগামী। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

এখানে, $a = b$ বলে $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x + y = a$ যা $(3,2)$ বিন্দুগামী $\therefore 3 + 2 = a \therefore$ সরলরেখার সমীকরণ $x + y = 5$ **(Ans.)**

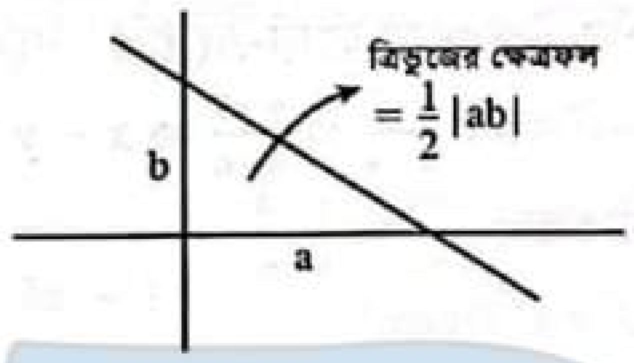
Example-77: $3x - 2y - 6 = 0$ রেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সাথে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sol^n: এখানে $3x - 2y - 6 = 0$

$\Rightarrow 3x - 2y = 6 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|ab|$

$= \frac{1}{2}|2.(-3)| = 3$ বর্গ একক **(Ans.)**



Example-78: $y = 1 + \frac{1}{2+x}$ বক্ররেখা x-অক্ষকে A বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করলে AB সরলরেখার সমীকরণ নিচের কোনটি? [DU'22-23]

(a) $x + 2y + 3 = 0$ (b) $x + 2y - 3 = 0$ (c) $x - 2y + 3 = 0$ (d) $x - 2y - 3 = 0$

Sol^n: (c); $y = 1 + \frac{1}{2+x}$; x অক্ষের উপর $y = 0 \Rightarrow 0 = 1 + \frac{1}{2+x} \Rightarrow -1 = \frac{1}{2+x} \Rightarrow -1 = 2 + x \therefore x = -3 \therefore A(-3,0)$

আবার, y অক্ষের উপর $x = 0 \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{2+0} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \therefore B\left(0,\frac{3}{2}\right)$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{2y}{3} = 1 \Rightarrow \frac{-x+2y}{3} = 1 \Rightarrow -x + 2y = 3 \therefore x - 2y + 3 = 0$

Example-79: মূলবিন্দু এবং $x + 3y - 12 = 0$ রেখার অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের ত্রিখণ্ডক বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow \frac{x}{12} + \frac{y}{4} = 1$ ……… (i)

$\therefore$ (i) নং রেখা x অক্ষকে $A(12,0)$ ও y অক্ষকে $B(0,4)$ বিন্দুতে ছেদ করে,

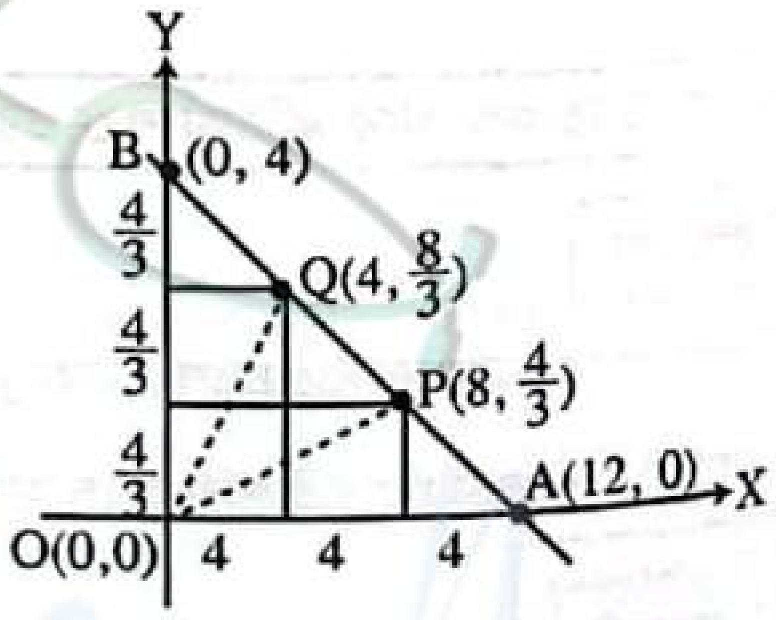
ধরি, P ও Q বিন্দু দুইটি AB কে সমান তিনভাগে বিভক্ত করে।

$\therefore$ চিত্র হতে পাই, সমত্রিখণ্ডক বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক $P\left(8,\frac{4}{3}\right)$ ও $Q\left(4,\frac{8}{3}\right)$

$\therefore$ OP রেখার সমীকরণ; $y = \frac{\frac{4}{3}}{8}x \Rightarrow x - 6y = 0$ **(Ans.)**

[$O(0,0)$ ও (x_1, y_1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার সমীকরণ: $y = \frac{y_1}{x_1}x$]

OQ এর সমীকরণ, $y = \frac{\frac{8}{3}}{4}x \Rightarrow 2x - 3y = 0$ **(Ans.)**



Case-06: সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হলে এবং উভয় অক্ষ থেকে খন্ডিতাংশ এর মধ্যে সম্পর্ক দেওয়া থাকলে-

Problems

Example-80: একটি সরলরেখা $(-2, -5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y-অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, যখন $OA + 2.OB = 0$ এবং O মূল বিন্দু।

Sol^n: রেখাটি, $\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-2.OB} + \frac{y}{OB} = 1 \Rightarrow -x + 2y = 2.OB$

ইহা $(-2, -5)$ বিন্দু দিয়ে যায় বলে, $-(-2) + 2(-5) = 2.OB \Rightarrow 2.OB = -8$

$\therefore$ রেখাটি: $-x + 2y = -8 \Rightarrow x - 2y - 8 = 0$ **(Ans.)**

Example-81: একটি সরলরেখা (α, β) বিন্দুগামী এবং x, y অক্ষের খণ্ডিত অংশকে এই বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে, সরলরেখার সমীকরণ?

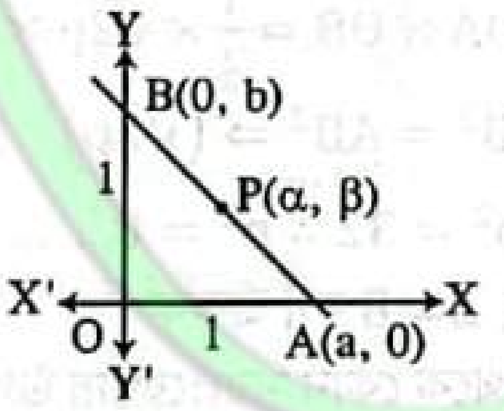
(a) $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$ (b) $\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = 1$ (c) $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 2$ (d) None of these

Sol^n: (c); নির্ণেয় রেখার সমীকরণ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \dots\dots\dots (i)$

যা x ও y অক্ষকে $A(a, 0)$ ও $B(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে

এবং প্রদত্ত শর্তমতে, $\alpha = \frac{a+0}{2}$ এবং $\beta = \frac{0+b}{2} \therefore a = 2\alpha$ এবং $b = 2\beta$

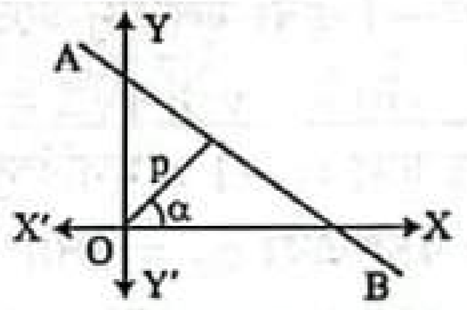
$\therefore$ (i) হতে পাই: $\frac{x}{2\alpha} + \frac{y}{2\beta} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 2$ **(Ans.)**



Case-07: $\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha = p}$ সূত্র সংক্রান্ত-

মূলবিন্দু থেকে একটি সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং উক্ত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ তৈরি করলে সরলরেখাটির সমীকরণ:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$



Shortcut

উপরোক্ত সরলরেখা x ও y অক্ষদ্বয়ের সাথে Δ বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করলে এবং মূলবিন্দু থেকে সরলরেখাটির উপর অঙ্কিত লম্ব ধনাত্মক x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে তার সমীকরণ: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \sqrt{\Delta\sin 2\alpha}$

জেনে রাখো

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = P \Rightarrow \frac{x}{\frac{P}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{P}{\sin\alpha}} = 1 \therefore \Delta OAB = \frac{1}{2}OB \cdot OA = \frac{1}{2} \times \frac{P}{\cos\alpha} \times \frac{P}{\sin\alpha} \Rightarrow \Delta = \frac{P^2}{\sin 2\alpha} \therefore P = \sqrt{\Delta\sin 2\alpha}$

Problems

Example-82: একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে $\frac{50}{\sqrt{3}}$ বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু হতে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্ব x অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটির সমীকরণ কোনটি? **[RU'18-19]**

Sol^n: ধরি, রেখাটি হবে, $x\cos 30° + y\sin 30° = p$; আবার, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \therefore a = \frac{2p}{\sqrt{3}}, b = 2p$

আবার, $\frac{1}{2}ab = \frac{50}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{4p^2}{\sqrt{3}} = \frac{100}{\sqrt{3}} \Rightarrow p = 5 \therefore$ সমীকরণ: $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 5 \Rightarrow \sqrt{3}x + y = 10$

❖ **Shortcut:** $x\cos 30° + y\sin 30° = \sqrt{\frac{50}{\sqrt{3}}\sin(2 \times 30°)} \Rightarrow x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + y.\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{50}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 5 \Rightarrow \sqrt{3}x + y = 10$

Example-83: একটি সরলরেখা মূলবিন্দু থেকে $y - x = 0$ রেখাকে 3 একক দূরত্বে লম্বভাবে ছেদ করে। রেখাটির সমীকরণ কোনটি? **[RU'22-23]**

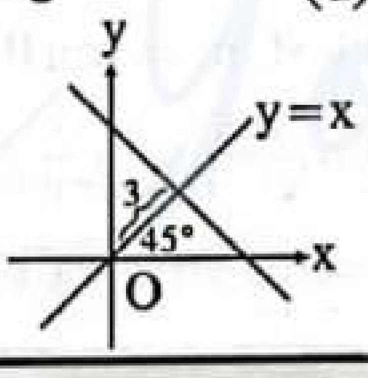
(a) $x + y = 3\sqrt{2}$ (b) $x - y = 3$ (c) $2x + y = 3$ (d) কোনটিই নয়

Sol^n: (a); $y - x = 0 \Rightarrow y = x$ রেখার ঢাল $= \tan\alpha = 1 \therefore \alpha = 45°$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$

$\Rightarrow x\cos 45° + y\sin 45° = 3 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 3$

$\therefore x + y = 3\sqrt{2}$ **(Ans.)**



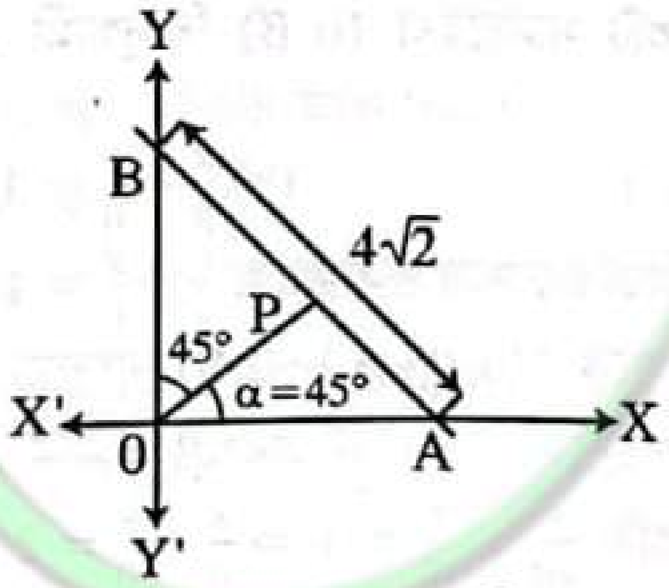
Example-84: মূলবিন্দু থেকে $x\sin\alpha + y\cos\alpha = P$ রেখার উপর লম্ব অঙ্কিত হলো। এ লম্ব রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার মান কত? [BAU' 18-19]

(a) α (b) $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (c) $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (d) $\pi + \alpha$

Sol^n: (b); $x\sin\alpha + y\cos\alpha = P \therefore x\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + y\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = P \therefore$ নির্ণেয় কোণ $= \frac{\pi}{2} - \alpha$

Example-85: $4\sqrt{2}$ একক দৈর্ঘ্যের একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে একটি ত্রিভুজ তৈরি করে এবং মূলবিন্দু থেকে উক্ত রেখার উপর অংকিত লম্ব x অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল: [JU' 09-10]

(a) 4 বর্গ একক (b) 8 বর্গ একক (c) 16 বর্গ একক (d) 9 বর্গ একক



Sol^n: (b); AB রেখা: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

$\Rightarrow x\cos 45° + y\sin 45° = p\ [\because \alpha = 45°]$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}p} + \frac{y}{\sqrt{2}p} = 1$

$\therefore \Delta OAB = \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}p \times \sqrt{2}p = p^2 \ldots\ldots\ldots (i)$

আবার, $OA^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow (\sqrt{2}p)^2 + (\sqrt{2}p)^2$

$= (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow 4p^2 = 32 \therefore p^2 = 8 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$\therefore$ (i) ও (ii) হতে, $\Delta =$ 8 বর্গ একক

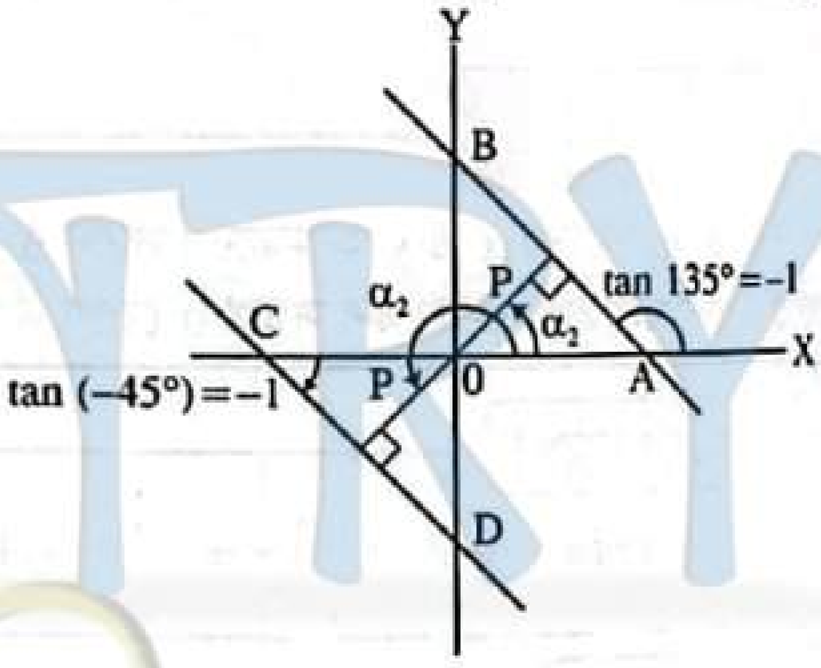
Example-86: মূলবিন্দু থেকে কোন সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য 3 একক হলে সরল রেখাটির সমীকরণ হবে- [RU' 08-09] [Ans: b]

(a) $y = 3x$ (b) $x\cos\theta + y\sin\theta = 3$ (c) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 5$ (d) $x = 3y = 6$

Example-87: কোন সরলরেখার ঢাল -1 এবং মূলবিন্দু হতে উহার দূরত্ব 4 একক হলে সরলরেখাটির সমীকরণ হবে:

(a) $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$ (b) $x - y \pm 4\sqrt{2} = 0$ (c) $2x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$ (d) $x + y \pm \sqrt{2} = 0$

Sol^n: (a); যেহেতু সরলরেখার ঢাল $= -1 \therefore$ মূলবিন্দু হতে উক্ত রেখার উপর অংকিত লম্ব x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α_1 ও α_2 কোণ উৎপন্ন করলে $\alpha_1 = 45°$ এবং $\alpha_2 = 180° + 45° = 225°$ হবে।



$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ: $x\cos 45° + y\sin 45° = 4$

$\Rightarrow x + y = 4\sqrt{2} \Rightarrow x + y - 4\sqrt{2} = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

এবং CD রেখার সমীকরণ:

$x\cos(180° + 45°) + y\sin(180° + 45°) = 4$

$\Rightarrow -x\cos 45° - y\sin 45° = 4$

$\Rightarrow -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow -x - y = 4\sqrt{2} \Rightarrow x + y + 4\sqrt{2} = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তে প্রযোজ্য রেখার সমীকরণ: $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$ **(Ans.)**

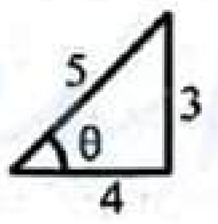
Case-08: $\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = \pm r$ সূত্র সংক্রান্ত।

Concept

$A(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ বরাবর r দূরত্বে অপর কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = \pm r$, যেখানে (x, y) বিন্দু হতে (x_1, y_1) বিন্দুর দূরত্ব $= r$, এক্ষেত্রে $m = \tan\theta$ এর মান দেওয়া থাকলে এটি ধনাত্মক হলে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর চিহ্ন একই এবং $\tan\theta$ এর মান ঋণাত্মক হলে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর চিহ্ন বিপরীত নিতে হবে।

Problems

Example-88: $(5, 7)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{3}{4}$। এই রেখার উপর $(5, 7)$ বিন্দু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্কনির্ণয় কর।



Sol^n: নির্ণেয় সরলরেখার ঢাল, $m = \tan\theta = \frac{3}{4} \therefore \sin\theta = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\theta = \frac{4}{5}$

ধরি, নির্ণেয় বিন্দু $(x, y) \therefore \frac{y-5}{\cos\theta} = \frac{y-7}{\sin\theta} = \pm r \Rightarrow \frac{x-5}{\frac{4}{5}} = \frac{y-7}{\frac{3}{5}} = \pm 15$

$\therefore x = 17, -7$ এবং $y = 16, -2 \therefore (17, 16)$ অথবা $(-7, -2)$

Type–11: দুইটি সমীকরণ একই সরলরেখা নির্দেশ করার শর্ত

Concept

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সরলরেখাদ্বয় একই সরলরেখা নির্দেশ করলে, $\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$

Problems

Example-89: যদি $2x - 3y + 5 = 0$ এবং $3x + ky + p = 0$ রেখাদ্বয় একই সরলরেখা নির্দেশ করে, k এবং p এর মান নির্ণয় কর। **[CU' 14-15, KU' 12-13]**

Sol^n^: $\frac{2}{3} = \frac{-3}{k} = \frac{5}{p} \therefore \frac{2}{3} = \frac{-3}{k} \Rightarrow k = \frac{-9}{2} = -\frac{9}{2}$ এবং $\frac{2}{3} = \frac{5}{p} \Rightarrow p = \frac{15}{2}$

Example-90: $3x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা হলে α এবং p এর মান নির্ণয় কর। **[RU'19-20]**

Sol^n^: $3x + \sqrt{3}y + 2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{\frac{-2}{3}} + \frac{y}{\frac{-2}{\sqrt{3}}} = 1 \ldots\ldots (i)$; $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \Rightarrow \frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}} = 1 \ldots\ldots (ii)$

$\frac{p}{\cos\alpha} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3p}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$; $\frac{p}{\sin\alpha} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}p}{-2} \ldots\ldots\ldots\ldots (iv)$

$(iii)^2 + (iv)^2 \Rightarrow 1 = p^2\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right) \Rightarrow 1 = p^2\left(\frac{12}{4}\right) \Rightarrow 1 = p^2 \times 3 \therefore p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

$(iv) \div (iii) \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30° = \tan(180° + 30°) \therefore \alpha = 210°$ **(Ans.)**

[$\because$ sin α, cos α উভয়ই ঋণাত্মক তাই α তৃতীয় চতুর্ভাগে আছে]

Type–12: তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়া সম্পর্কিত সমস্যা

Concept

$a_1x + b_1y + c_1 = 0; a_2x + b_2y + c_2 = 0; a_3x + b_3y + c_3 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে যদি, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ হয়।

Problems

Example-91: $2x + by + 4 = 0, 4x - y - 2b = 0$ এবং $3x + y - 1 = 0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে b এর মান নির্ণয় কর। **[DU' 14-15]**

Sol^n^: এক্ষেত্রে $\begin{vmatrix} 2 & b & 4 \\ 4 & -1 & -2b \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(1 + 2b) - b(-4 + 6b) + 4(4 + 3) = 0$

$\Rightarrow 6b^2 - 8b - 30 = 0 \therefore b = 3$ অথবা, $-\frac{5}{3}$ **(Ans.)**

Example-92: $x - 3y + 4 = 0, x - 6y + 5 = 0, x + ay + 2 = 0$ রেখাদ্বয় সমবিন্দুগামী হইলে তৃতীয় রেখার সাথে লম্ব এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ কোনটি?

(a) $4x - 3y = 0$ (b) $3x - y = 0$ (c) $5x - y + 20 = 0$ (d) $4x^2 - 3y^2 = 25x$

Sol^n^: (b); $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -6 & 5 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow |(-12 - 5a) + 3(2 - 5) + 4(a + 6) = 0 \therefore a = 3$

$\therefore x + 3y + 2 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখা: $3x - y + k = 0$ যা মূলবিন্দুগামী হবে, $\therefore k = 0 \therefore 3x - y = 0$ **(Ans.)**

Type–13: সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়

Concept

- দুটি সরলরেখা সমান্তরাল হবে যদি তাদের ঢাল সমান থাকে।
- কোনো সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ বের করতে বললে, x ও y উভয়ের সহগই একই রেখে নতুন ধ্রুবক যোগ করতে হবে। যেমন: $ax + by + c = 0$ এর সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $\boxed{ax + by + k = 0}$

Shortcut

- ➢ (x_1, y_1) বিন্দুগামী $ax + by + c = 0$ এর সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $\Rightarrow ax + by = ax_1 + by_1$ [এখানে x, y চলক; x_1, y_1 ধ্রুবক]
- ➢ (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) এর সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}(x - x_1)}$

Example-93: α এর কোন মানের জন্য $(\alpha - 1)x + (\alpha + 1)y - 7 = 0$ রেখাটি $3x + 5y + 4 = 0$ রেখার সমান্তরাল হবে? [RU'08-09]

Solⁿ: সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে, $-\frac{\alpha-1}{\alpha+1} = -\frac{3}{5} \Rightarrow 5\alpha - 5 = 3\alpha + 3 \Rightarrow 2\alpha = 8 \therefore \alpha = 4$ **(Ans.)**

Example-94: $2x + 3y - 6 = 0$ এবং $kx - 2y + 5 = 0$ পরস্পর সমান্তরাল হলে, k এর মান নির্ণয় কর?

Solⁿ: $\frac{2}{k} = \frac{3}{-2}; k = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** [সমান্তরাল হবার শর্ত, x এর সহগের অনুপাত = y এর সহগের অনুপাত $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}\right)$]

Example-95: $3x + 4y + 5 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (1, 2) বিন্দুগামী। [JU' 18-19, RU' 09-10]

Solⁿ: মনে করি, রেখাটির সমীকরণ $3x + 4y + k = 0$ যা (1, 2) বিন্দুগামী।

$\therefore 3 \times 1 + 4 \times 2 + k = 0 \Rightarrow k = -11 \therefore 3x + 4y - 11 = 0$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $3x + 4y = 3.1 + 4.2 \Rightarrow 3x + 4y - 11 = 0$ **(Ans.)**

Type–14: লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয়

Concept

- ➢ দুটি সরলরেখার ঢাল m_1 ও m_2 হলে, রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি $m_1 . m_2 = -1$ হয়।
- ➢ কোনো সরলরেখার উপরে লম্বরেখার সমীকরণ বের করতে বললে, x ও y এর সহগদ্বয় interchange করবে এবং যেকোনো একটি সহগের চিহ্ন change করবে এবং একটি নতুন ধ্রুবক যোগ করবে। যেমন: $ax + by + c = 0$ এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $\boxed{bx - ay + k = 0}$

Shortcut

- ➢ (x_1, y_1) বিন্দুগামী $ax + by + c = 0$ এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $\boxed{bx - ay = bx_1 - ay_1}$ [এখানে x, y চলক; x_1, y_1 ধ্রুবক]
- ➢ (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার লম্ব সরলরেখার সমীকরণ $\boxed{y - y_1 = -\frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}(x - x_1)}$

Problems

Example-96: $2x - y + 7 = 0$ এবং $3x - ay - 5 = 0$ রেখা দুইটি লম্ব হলে 'a' এর মান কোনটি? [CU'20-21]

Solⁿ: $2x - y + 7 = 0 \Rightarrow y = 2x + 7 ; m_1 = 2$

$3x - ay - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{a}x - \frac{5}{a} ; m_2 = \frac{3}{a}$; লম্ব হলে, $m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \frac{6}{a} = -1 \therefore a = -6$

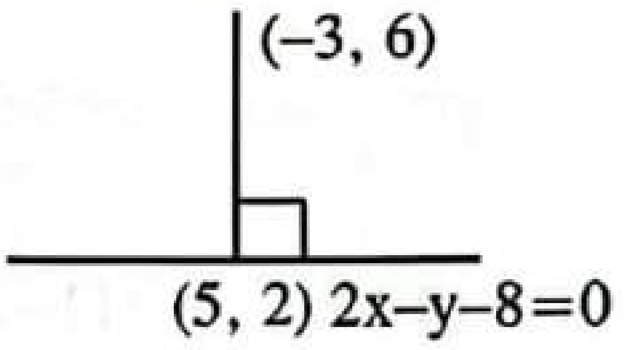
❖ **Shortcut:** মনে রাখবে, লম্ব হতে হলে, সরলরেখাদ্বয়ের x এর সহগদ্বয়ের গুণফল + y এর সহগদ্বয়ের গুণফল = 0 বা, $\boxed{a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0}$ এখানে, $2 \times 3 + (-1) \times (-a) = 0 \Rightarrow a = -6$ **(Ans.)**

Example-97: $3x + 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (3, 4) বিন্দুগামী। [RU' 08-09]

Solⁿ: মনে করি, রেখাটির সমীকরণ $4x - 3y + k = 0$ যা (3, 4) বিন্দুগামী।

$\therefore 4 \times 3 - 3 \times 4 + k = 0 \Rightarrow k = 0 \therefore 4x - 3y = 0$ **(Ans.)**

Example-98: $(-3, 6)$ বিন্দু হতে $2x - y - 8 = 0$ সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্কও লম্ব দুরত্ব নির্ণয় কর।



Sol^n: লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{2(-3)-6-8}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right| = \left|\frac{-20}{\sqrt{5}}\right| = 4\sqrt{5}$ **(Ans.)**

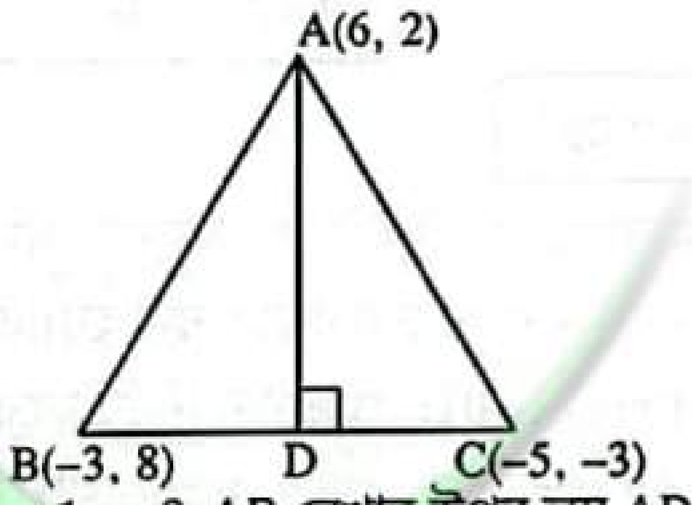
$(-3, 6)$ বিন্দুগামী এবং $2x - y - 8 = 0 \dots\dots\dots$ (i)

রেখার উপর লম্ব রেখা হবে: $x + 2y = -3 + 2 \times 6 \Rightarrow x + 2y - 9 = 0 \dots\dots\dots$ (ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) সমাধান করে পাদবিন্দু হবে $= (5, 2)$ **(Ans.)**

$\therefore$ লম্ব দূরত্ব $= \sqrt{(-3\ -5)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ একক।

Example-99: ΔABC এর শীর্ষ বিন্দু $A(6, 2), B(-3, 8)$ এবং $C(-5, -3)$ হইলে A বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী উচ্চতা নির্দেশক রেখার সমীকরণ হবে?



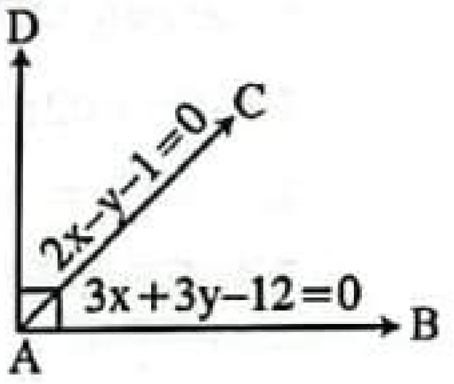
Sol^n: $A(6, 2)$ বিন্দুগামী এবং BC এর উপর লম্ব তথা উচ্চতা নির্দেশক রেখা, AD এর সমীকরণ:

$y - 2 = -\frac{-3-(-5)}{8-(-3)}(x - 6)$

$\Rightarrow y - 2 = -\frac{2}{11}(x - 6)$

$\therefore 2x + 11y - 34 = 0$ **(Ans.)**

Example-100: AB ও AC রেখা দুটির সমীকরণ যথাক্রমে $3x + 3y - 12 = 0$ ও $2x - y - 1 = 0$, AB রেখার উপর লম্ব AD রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।



Sol^n: $3x + 3y - 12 = 0 \dots\dots\dots$ (i); $2x - y - 1 = 0 \dots\dots\dots$ (ii)

(i) ও (ii) থেকে বজ্রগুণন হতে পাই, $\frac{x}{-3-12} = \frac{y}{-24+3} = \frac{1}{-3-6} \Rightarrow \frac{x}{-15} = \frac{y}{-21} = \frac{1}{-9} \therefore x = \frac{5}{3}, y = \frac{7}{3}$

$\therefore A \equiv \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$; $m_{AB} = -1 \therefore m_{AD} = 1$ হবে,

$\therefore$ AD এর সমীকরণ, $y - \frac{7}{3} = 1\left(x - \frac{5}{3}\right)$

$\Rightarrow \frac{3y-7}{5} = \frac{3x-5}{3} \Rightarrow 3y - 7 = 3x - 5 \therefore 3x - 3y + 2 = 0$

Example-101: $4x + 7y = 11$ সরলরেখার উপর লম্ব এবং যাহা y অক্ষ রেখাকে 2 একক দূরত্বে ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ হবে:

(a) $3x - 2y \pm 6 = 0$ (b) $7x - 4y \pm 8 = 0$ (c) $3x - 7y \pm 4 = 0$ (d) None to these

Sol^n: (b); নির্ণেয় রেখা: $\frac{x}{a} + \frac{y}{\pm 2} = 1 - - -$ (i) এবং এর ঢাল $= -\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{\pm 2}} = \frac{\pm 2}{a}$ আবার, $4x + 7y = 11$ এর ঢাল $= -\frac{4}{7}$

শর্তমতে, $\left(-\frac{4}{7}\right)\left(\frac{\pm 2}{a}\right) = -1$ হবে $\Rightarrow a = \frac{\pm 8}{7} \therefore$ (i) হতে পাই, $\frac{x}{\frac{\pm 8}{7}} + \frac{y}{\pm 2} = 1 \Rightarrow 7x - 4y = \pm 8 \Rightarrow 7x - 4y \pm 8 = 0$ **(Ans.)**

Type–15: লম্ব-সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

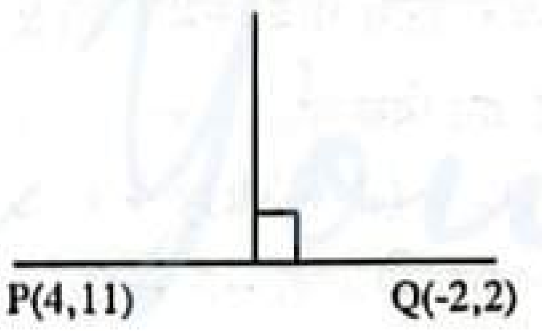
Concept

$A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখন্ডের সমীকরণ,

$$\boxed{(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2\right)}$$

Problems

Example-102: $P(4, 11)$ ও $Q(-2, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।



Sol^n: PQ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{4-2}{2}, \frac{11+2}{2}\right) = \left(1, \frac{13}{2}\right)$

PQ রেখার ঢাল $= \frac{11-2}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ PQ রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $= -\frac{2}{3}$ [যেহেতু $m_1 \times m_2 = -1$]

এখন, $\left(1, \frac{13}{2}\right)$ বিন্দুগামী এবং $-\frac{2}{3}$ ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ $y - \frac{13}{2} = -\frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow 4x + 6y - 43 = 0$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $P(4,11)$ ও $Q(-2,2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার লম্বসমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ হবে

$$\overset{\substack{\text{ভুজের অন্তর}\\ \uparrow}}{(4+2)x} + \overset{\substack{\text{কোটির অন্তর}\\ \uparrow}}{(11-2)y} = \frac{1}{2}\,\overset{\substack{\text{প্রথম বিন্দুর}\\ \text{স্থানাঙ্কের বর্গ সমষ্টি}\\ \uparrow}}{(4^2+11^2} - \overset{\substack{\text{দ্বিতীয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক}\\ \text{বর্গদ্বয় বিয়োগ করতে হবে}\\ \uparrow}}{\{(2)^2-(-2^2)\}}$$

$\Rightarrow 6x + 9y = \frac{1}{2}(129) \Rightarrow 12x + 18y - 129 = 0 \therefore 4x + 6y - 43 = 0$

Type–16: দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ সংক্রান্ত

Concept

এই সমস্যাগুলোতে দুইটি সরলরেখার সমীকরণ দেওয়া থাকে। তাদের ছেদবিন্দুগামী (এবং অপর একটি শর্তের সাপেক্ষে) সরলরেখার সমীকরণ বের করতে বলা হয়। এই সমস্যাগুলোর জন্য নিম্নলিখিত পদ্ধতিদ্বয় ব্যবহার করা যেতে পারে।

Process-01: ছেদবিন্দু নির্ণয় করে সমাধান:

এই পদ্ধতিতে প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয় করতে হয়। এরপর, ঐ ছেদবিন্দুগামী এবং অপর শর্তটি মেনে সরলরেখার সমীকরণই নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

Process-02: ছেদবিন্দু নির্ণয় না করে সমাধান: এই পদ্ধতিতে আমরা পাশের সূত্রটি ব্যবহার করবো।

$L_1\,(x,y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $L_2(x,y) = a_2x + b_2y + c_2 = 0$

সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$

বা, $L_1 + k.L_2 = 0$ [অথবা, $a_2x + b_2y + c_2 + k(a_1x + b_1y + c_1) = 0$ বা $L_2 + k.L_1 = 0$]

জেনে রাখো

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং (α,β) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} = \frac{a_1\alpha+b_1\beta+c_1}{a_2\alpha+b_2\beta+c_2}$ অর্থাৎ $\frac{\text{১ম সরলরেখা}}{\text{২য় সরলরেখা}} = \frac{\text{প্রদত্ত বিন্দুটি ১ম সরলরেখায় বসাও}}{\text{প্রদত্ত বিন্দুটি ২য় সরলরেখায় বসাও}}$

Problems

Example-103. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x + 2y - 5 = 0$ এবং $2x + 3y - 8 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী

(i) মূলবিন্দুগামী (ii) $(5, 7)$ বিন্দুগামী (iii) x অক্ষের সমান্তরাল (iv) y অক্ষের সমান্তরাল

(v) $3x + 4y + 5 = 0$ রেখার সমান্তরাল (vi) $3x + 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব।

Sol^n: (i) Process-01: $x + 2y - 5 = 0$ এবং $2x + 3y - 8 = 0$ এর ছেদবিন্দু $(1, 2)$. তাহলে $(1, 2)$ এবং মূলবিন্দু $(0,$ গামী সরলরেখার সমীকরণ, $y = \frac{2}{1}x$ $\left[y = \frac{y_1}{x_1}x\right] \therefore y = 2x$

❖ **Shortcut:** নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x+2y-}{2x+3y} = \frac{0+2.0-5}{2.0+3.0-8} = \frac{5}{8} \therefore y = 2x$

(i) Process-02: $x + 2y - 5 = 0$ এবং $2x + 3y - 8 = 0$ এর ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$x + 2y - 5 + k(2x + 3y - 8) = 0$ ……… (i)

(i) নং রেখাটি $O(0,0)$ বিন্দুগামী হলে পাই, $0 + 0 - 5 + k(0 + 0 - 8) = 0 \therefore k = -\frac{5}{8}$

k এর মান (i) -এ বসালে পাই, সমীকরণ $x + 2y - 5 - \frac{5}{8}(2x + 3y - 8) = 0 \therefore y = 2x$

(i) Process-02 এর বিকল্প:

(1) $\Rightarrow (1 + 2k)x + (2 + 3k)y + (-5 - 8k) = 0$ ……… (2)

(2) রেখাটি মূলবিন্দুগামী হলে $-5 - 8k = 0 \Rightarrow k = -\frac{5}{8}$ [$ax + by + c = 0$ রেখাটি মূলবিন্দুগামী হলে $c = 0$]

k এর মান (2) [বা (1)] নং সমীকরণে বসালে পাই, $\left\{1 + 2\left(-\frac{5}{8}\right)\right\}x + \left\{2 + 3\left(-\frac{5}{8}\right)\right\}y + 0 = 0 \therefore y = 2x$ (Ans.)

(ii) Process-01: $x+2y-5=0$ এবং $2x+3y-8=0$ এর ছেদবিন্দু (1, 2).
এখন, (1, 2) এবং (5, 7) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{y-2}{2-7}=\frac{x-1}{1-5}\Rightarrow\frac{y-2}{-5}=\frac{x-1}{-4}$
$\Rightarrow -4y+8=-5x+5 \therefore 5x-4y+3=0$

❖ **Shortcut:** $\frac{x+2y-5}{2x+3y-8}=\frac{5+2.7-5}{2.5+3.7-8}=\frac{14}{23}\therefore 5x-4y+3=0$

(ii) Process-02: $x+2y-5=0$ এবং $2x+3y-8=0$ এর ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,
$x+2y-5+k(2x+3y-8)=0\ldots\ldots\ldots(1)$
(1) নং রেখাটি (5, 7) বিন্দুগামী হলে পাই, $5+2.7-5+k(2.5+3.7-8)=0\therefore k=-\frac{14}{23}$
k এর মান (1) এ বসালে পাই, $x+2y-5-\frac{14}{23}(2x+3y-8)=0\Rightarrow 5x-4y+3=0$

(iii) Process-01: $x+2y-5=0$ এবং $2x+3y-8=0$ এর ছেদবিন্দু (1, 2)
এখন, x অক্ষের সমান্তরাল এবং (1,2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\therefore y=2$ **(Ans.)**

(iii) Process-02: $x+2y-5=0$ এবং $2x+3y-8=0$ এর ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,
$x+2y-5+k(2x+3y-8)=0\ldots\ldots\ldots(1)\Rightarrow(1+2k)x+(2+3k)y+(-5-8k)=0\ldots\ldots\ldots(2)$
(2) নং সমীকরণ x অক্ষের সমান্তরাল হলে, $1+2k=0\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$ [x অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণের x এর সহগ = 0]
এখন, (2) অথবা (1) নং সমীকরণে k এর মান বসালে পাই, $0.x+\left\{2+\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}y+\left(-5+\frac{8}{2}\right)=0\therefore y=2$ **(Ans.)**

(iv) Process-01: $x+2y-5=0$ এবং $2x+3y-8=0$ এর ছেদবিন্দু (1, 2)
এখন, y অক্ষের সমান্তরাল এবং (1, 2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $x=1$ **(Ans.)**

(iv) Process-02: $x+2y-5=0$ এবং $2x+3y-8=0$ এর ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,
$x+2y-5+k(2x+3y-8)=0\ldots\ldots\ldots(1)\Rightarrow(1+2k)x+(2+3k)y+(-5-8k)=0\ldots\ldots\ldots(2)$
(2) নং সমীকরণ y অক্ষের সমান্তরাল হলে, $2+3k=0\therefore k=-\frac{2}{3}$
এখন, (2) [অথবা (1)] নং সমীকরণে k এর মান বসালে পাই, $\left\{1+2\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}x+0.y+\left\{-5-8\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}=0\therefore x=1$

(v) Process-01: $x+2y-5=0$ এবং $2x+3y-8=0$ এর ছেদবিন্দু (1, 2);
এখন, (1,2) বিন্দুগামী $3x+4y+5=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ,
$3x+4y=3.1+4.2\therefore 3x+4y=11$ **(Ans.)**

(v) Process-02: $x+2y-5=0$ এবং $2x+3y-8=0$ এর ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,
$x+2y-5+k(2x+3y-8)=0\ldots\ldots\ldots(1)\Rightarrow(1+2k)x+(2+3k)y+(-5-8k)=0\ldots\ldots\ldots(2)$
(2) নং এবং $3x+4y+5=0$ রেখা সমান্তরাল হলে, $\frac{1+2k}{3}=\frac{2+3k}{4}\Rightarrow 4+8k=6+9k\therefore k=-2$
k এর মান (2) নং [বা (1) নং] – এ বসিয়ে পাই, $[1+2(-2)]x+[2+3(-2)]y+\{-5-8(-2)\}=0$
$\Rightarrow -3x-4y+11=0\therefore 3x+4y=11$ **(Ans.)**

(vi) Process-01: $x+2y-5=0$ এবং $2x+3y-8=0$ এর ছেদবিন্দু (1,2).
এখন, (1,2) বিন্দুগামী এবং $3x+4y+5=0$ এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,
$4x-3y=4.1-3.2\therefore 4x-3y+2=0$ **(Ans.)**

(vi) Process-02: $x+2y-5=0$ এবং $2x+3y-8=0$ এর ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,
$x+2y-5+k(2x+3y-8)=0\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$
$\Rightarrow(1+2k)x+(2+3k)y+(-5-8k)=0\ldots\ldots.(2)$
(2) নং রেখাটি $3x+4y+5=0$ এর লম্ব হলে,
$(1+2k).3+(2+3k).4=0\Rightarrow 3+6k+8+12k=0\Rightarrow 18k=-11\therefore k=-\frac{11}{18}$
k এর মান (2) [বা, (1) নং] নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$\left\{1+2\left(-\frac{11}{18}\right)\right\}x+\left\{2+3\left(-\frac{11}{18}\right)\right\}y+\left\{-5-8\left(-\frac{11}{18}\right)\right\}=0$
$\therefore 4x-3y+2=0$ **(Ans.)**

Example-104: y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 7y + 11 = 0$ ও $x + 3y - 8 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ নিচের কোনটি? [DU'22-23]

(a) $13x - 23 = 0$ (b) $3x - 7 = 0$ (c) $7x - 3 = 0$ (d) $23x - 13 = 0$

Sol^n: (a); রেখাটি y অক্ষের সমান্তরাল ∴ সমীকরণ হবে $x = a$; এখন প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের সমীকরণ

$2x - 7y + 11 = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

$x + 3y - 8 = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$

$(1) \times 3 \Rightarrow 6x - 21y + 33 = 0$

$(2) \times 7 \Rightarrow 7x + 21y - 56 = 0$

$(+) \Rightarrow \quad 13x - 23 = 0$ ইহাই নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

Example-105: $x - y - 6 = 0$ এবং $3x - 8y + 3 = 0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী যা মূলবিন্দু দিয়ে যায়, এরূপ রেখার সমীকরণ হল – [CU'22-23]

(a) $x - y = 0$ (b) $3x - 8y = 0$ (c) $y = mx + c$ (d) $7x - 17y = 0$

Sol^n: (d); সমীকরণ ২টি সমাধান করে পাই, $x = \frac{51}{5}, y = \frac{21}{5}$

∴ নির্ণেয় মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ: $y = \frac{\frac{21}{5}}{\frac{51}{5}}x$ বা, $21x - 51y = 0$ বা, $7x - 17y = 0$

Example-106: k এর যে কোন মানের জন্য $(2k - 3)x + (3k - 2)y - 4k + 1 = 0$ রেখাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(a) $(-1, 2)$ (b) $(-1, -2)$ (c) $(1, -2)$ (d) $(1, 2)$

Sol^n: (a); $(2k - 3)x + (3k - 2)y - 4k + 1 = 0$

$\Rightarrow (-3x - 2y + 1) + k(2x + 3y - 4) = 0$

∴ k এর যে কোন মানের জন্য প্রদত্ত রেখাটি, $-3x - 2y + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

এবং $2x + 3y - 4 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

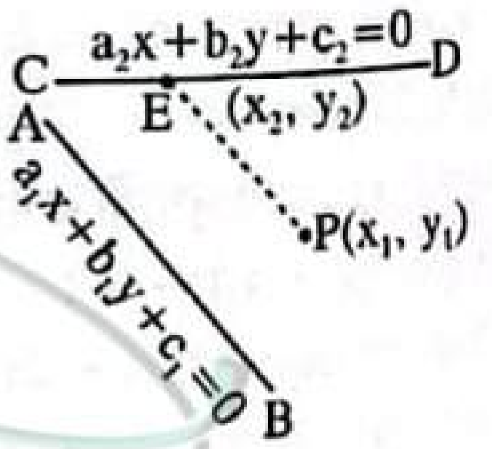
রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়। ∴ (i) × 2 + (ii) × 3 হতে; $5y - 10 = 0 \Rightarrow y = 2$

∴ $-3x - 2 \times 2 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ∴ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $(-1, 2)$ **(Ans.)**

Type–17: একটি সরলরেখার লম্ব ও সমান্তরাল দিকে কোন বহিঃস্থ বিন্দু থেকে অপর একটি সরলরেখার দূরত্ব নির্ণয়

Concept

(1) সমান্তরাল দিকে: $AB[a_1x + b_1y + c_1 = 0]$ রেখার সমান্তরাল দিকে $P(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $CD[a_2x + b_2y + c_2 = 0]$ রেখার দূরত্ব (PE) নির্ণয় করতে হবে। ধাপগুলো নিম্নে বর্ণনা করা হলো:

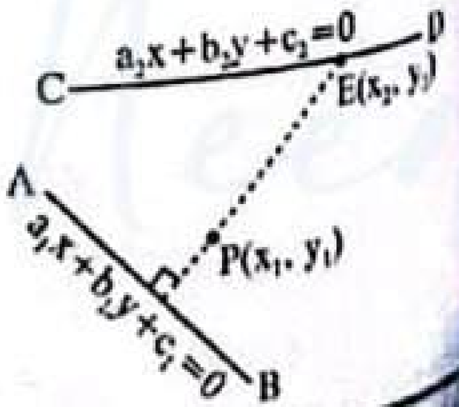


(i) $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী $AB[a_1x + b_1y + c_1 = 0]$ এর সমান্তরাল রেখার (PE রেখার) সমীকরণ নির্ণয় কর। যা হবে $\boxed{a_1x + b_1y = a_1x_1 + b_1y_1}$

(ii) PE এবং CD রেখার ছেদবিন্দু E নির্ণয় কর। [ধরি $E(x_2, y_2)$]

(iii) PE রেখাংশের দৈর্ঘ্যই নির্ণেয় দূরত্ব। $PE = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

(2) লম্ব দিকে: $AB[a_1x + b_1y + c_1 = 0]$ রেখার লম্ব দিকে $P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $CD[a_2x + b_2y + c_2 = 0]$ রেখার দূরত্ব (PE) নির্ণয় করতে হবে। ধাপগুলো নিম্নে বর্ণনা করা হলো:



(i) $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী $AB[a_1x + b_1y + c_1 = 0]$ এর লম্ব রেখার (PE রেখার) সমীকরণ নির্ণয় কর। যা হবে, $\boxed{b_1x - a_1y = b_1x_1 - a_1y_1}$

(ii) PE ও CD রেখার ছেদবিন্দু E নির্ণয় কর। [ধরি, $E(x_2, y_2)$]

(iii) PE রেখাংশের দৈর্ঘ্যই নির্ণেয় দূরত্ব $PE = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Problems

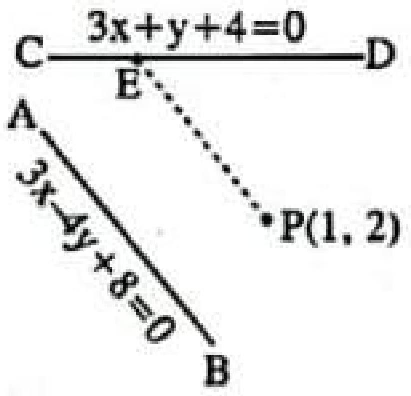
Example-107. $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল দিকে $3x + y + 4 = 0$ রেখা হতে $(1, 2)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

Sol^n: $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার (AB রেখার) সমান্তরাল এবং $P(1, 2)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, [PE রেখার সমীকরণ],

$3x - 4y = 3.1 - 4.2 \therefore \boxed{3x - 4y + 5 = 0} \ldots\ldots\ldots (i)$

CD $[3x + y + 4 = 0]$ এবং PE$[3x - 4y + 5 = 0]$ এর ছেদবিন্দু $E\left(-\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$

এখন, $PE = \sqrt{\left(1 + \frac{7}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{5}\right)^2}$ $\boxed{\therefore PE = 3 \text{ একক}}$ **(Ans.)**



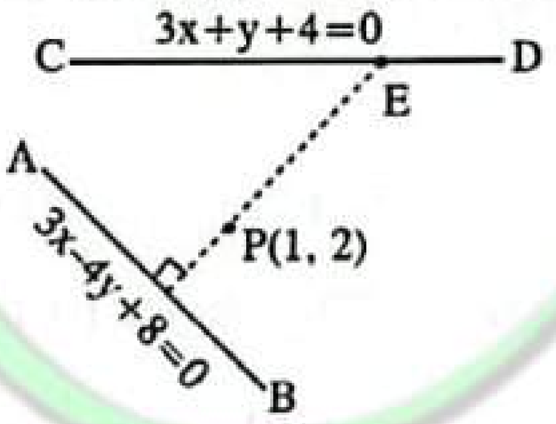
Example-108. $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার লম্ব দিকে $3x + y + 4 = 0$ রেখা হতে $(1, 2)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

Sol^n: $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার (AB রেখার) উপর লম্ব এবং $P(1, 2)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, [PE রেখার সমীকরণ],

$4x + 3y = 4.1 + 3.2 \therefore \boxed{4x + 3y = 10} \ldots\ldots\ldots (i)$

CD$[3x + y + 4 = 0]$ এবং PE$[4x + 3y = 10]$ এর ছেদবিন্দু $E\left(-\frac{22}{5}, \frac{46}{5}\right)$

এখন, $PE = \sqrt{\left(1 + \frac{22}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{46}{5}\right)^2}$ $\boxed{\therefore PE = 9 \text{ একক}}$ **(Ans.)**



Type–18: সরলরেখার সাপেক্ষে বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়

Concept

(x_1, y_1) বিন্দুটি $ax + by + c = 0$ রেখার-

- ধনাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত হবে যদি $ax_1 + by_1 + c > 0$ (+ve) হয়
- ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত হবে যদি $ax_1 + by_1 + c < 0$ (−ve) হয়।

দুটি বিন্দু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2), $ax + by + c = 0$ রেখার

- একই পার্শ্বে অবস্থিত হবে যদি, $(ax_1 + by_1 + c)$ ও $(ax_2 + by_2 + c)$ এর উভয়ই একই চিহ্নবিশিষ্ট হয়।
- বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হবে যদি $(ax_1 + by_1 + c)$ ও $(ax_2 + by_2 + c)$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হয়।

Problems

Example-109: $3x + 4y + 5 = 0$ রেখার সাপেক্ষে $(1, 2)$ ও $(-3, -4)$ বিন্দু কীভাবে অবস্থিত?

Sol^n: $(1, 2)$ এর জন্য $3 \times 1 + 4 \times 2 + 5 = 16 > 0$ (+ve)

$(-3, -4)$ এর জন্য $3 \times (-3) + 4(-4) + 5 = -20 < 0$ (−ve)

যেহেতু বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট সুতরাং বিন্দুদ্বয় সরলরেখাটির বিপরীত পাশে অবস্থিত।

Type–19: বহিঃস্থ বিন্দু হতে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব সম্পর্কিত সমস্যা

Concept

(x_1, y_1) বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব দূরত্ব, $d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

Problems

Example-110: $(-2, 1)$ বিন্দু হতে $4x - 3y + 1 = 0$ সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[JU' 10-11]**

Sol^n: নির্ণেয় লম্বের দৈর্ঘ্য d হলে, $d = \left|\frac{4(-2) - 3.1 + 1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}\right| = \left|\frac{-8-3+1}{\sqrt{16+9}}\right| = 2$ একক **(Ans.)**

Example-111: $(-2, 3)$ বিন্দু হতে $x - y = 5$ রেখার লম্ব দূরত্ব কত? **[JU'19-20]**

Sol^n: $d = \frac{|-2-3-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$ একক **(Ans.)**

Example-112: $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c+3)$ রেখা দুইটি হতে মূলবিন্দু সমদূরবর্তী। c এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। [RU' 08-09]

Solⁿ: $4x + 3y - c = 0$ হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব $= \left|\frac{4.0+3.0-c}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \left|\frac{-c}{5}\right|$

$12x - 5y - 2(c+3) = 0$ হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব $= \left|\frac{-2(c+3)}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}\right| = \left|\frac{-2(c+3)}{13}\right| \therefore \left|\frac{-c}{5}\right| = \left|\frac{-2(c+3)}{13}\right| \Rightarrow -\frac{c}{5} = \pm\frac{-2(c+3)}{13}$

(+) ধরে, $-\frac{c}{5} = \frac{-2(c+3)}{13} \Rightarrow c = 10$

(−) ধরে, $-\frac{c}{5} = -\frac{-2(c+3)}{13} \Rightarrow c = -\frac{30}{23}$ ∴ c এর ধনাত্মক মান = 10 **(Ans.)**

Example-113: $(0,-1)$ বিন্দু এবং $y = 1$ সরলরেখা থেকে সমান দূরত্বের বিন্দুর সঞ্চার পথ নির্ণয় কর। [GST'20-21]

Solⁿ: সঞ্চারপথের বিন্দু (x, y)।

$\sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2} = \frac{|y-1|}{\sqrt{1^2+0^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow x^2 + 4y = 0$

Example-114: y অক্ষের উপরিস্থিত যে বিন্দুগুলো হতে $3y = 4x - 10$ রেখার উপর অংকিত লম্ব দূরত্ব 4 একক হয়, তবে তাদের স্থানাঙ্ক কত?

(a) $(0,10)$ এবং $\left(0,\frac{-10}{3}\right)$ (b) $(0,10)$ এবং $\left(0,\frac{10}{3}\right)$ (c) $(0,-10)$ এবং $\left(0,\frac{10}{3}\right)$ (d) $(10,0)$ এবং $\left(0,\frac{10}{3}\right)$

Solⁿ: (c) ধরি, বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,b)$ এবং প্রদত্ত রেখা: $4x - 3y - 10 = 0$ ∴ প্রশ্নমতে, $\left|\frac{4(0)-3b-10}{\sqrt{16+9}}\right| = 4$

$\Rightarrow 3b + 10 = \pm 20 \therefore b = \frac{10}{3}, -10$ ∴ নির্ণেয় বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক, $(0,-10)$ এবং $\left(0,\frac{10}{3}\right)$ **(Ans.)**

Type–20: সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব সম্পর্কিত সমস্যা

Concept

দুটি সমান্তরাল সরলরেখা $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = \left|\frac{c_1-c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Problems

Example-115: $y = x + 4$ হতে $y = x$ রেখার লম্ব দূরত্ব কত? [Agri. Guccho'20-21]

Solⁿ: $\left|\frac{c_1-c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\frac{4-0}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = 2\sqrt{2}$ **(Ans.)**

Example-116: $3x - 2y = 1$ এবং $6x - 4y + 9 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

Solⁿ: $3x - 2y - 1 = 0 \ldots.(i)$

$6x - 4y + 9 = 0 \Rightarrow 3x - 2y + \frac{9}{2} = 0 \ldots.(ii)$

Note: [x এবং y এর সহগ একই করে নিতে হবে]

(i) নং এবং (ii) নং এর মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= \left|\frac{-1-\frac{9}{2}}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}\right| = \frac{\left|-\frac{11}{2}\right|}{\sqrt{13}} = \frac{11}{2\sqrt{13}}$

Example-117: $2x + 6y + 4 = 0$ এবং $3x + 9y - 4 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্বদূরত্ব কত একক? [RU'22-23]

(a) 8 (b) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ (c) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ (d) কোনটিই নয়

Solⁿ: (b); $2x + 6y + 4 = 0 \Rightarrow x + 3y + 2 = 0$ এবং $3x + 9y - 4 = 0 \Rightarrow x + 3y - \frac{4}{3} = 0$

∴ লম্ব দূরত্ব $= \frac{\left|2+\frac{4}{3}\right|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

Example-118: $3x + 4y + 5 = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং তা থেকে 10 একক দূরবর্তী অপর রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: মনে করি, সরলরেখাটি $3x + 4y + k = 0 \therefore \left|\frac{k-5}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 10 \Rightarrow \frac{k-5}{5} = \pm 10$

(+) নিয়ে $k = 55 \therefore 3x + 4y + 55 = 0$; (−) নিয়ে $k = -45 \therefore 3x + 4y - 45 = 0$

Example-119: α সূক্ষ্মকোণ হলে $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 4$ এবং $4x + 3y = 5$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব কত? [RU' 09-10]

Solⁿ: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - 4 = 0 \ldots\ldots\ldots(i)$ এবং $4x + 3y - 5 = 0 \ldots\ldots\ldots(ii)$

Note: যেহেতু এখানে সহগ ভিন্ন ভিন্ন সুতরাং মূলবিন্দুর সাপেক্ষে দূরত্ব হিসাব করতে হবে।

(i) নং এবং (ii) নং এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \left|\frac{0\times\cos\alpha+0.\sin\alpha-}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}} - \frac{4.0+3.0-5}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = |-4+1| = 3$ **(Ans.)**

Type–21: দুইটি রেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা

Concept

- দুইটি সরলরেখার ঢাল m_1 ও m_2 হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ যদি θ হয় তবে, $\boxed{\tan\theta = \pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}}$
- $\tan\theta$ এর +ve মান নিয়ে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ পাওয়া যায়।
- $\tan\theta$ এর −ve মান নিয়ে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী স্থূলকোণ পাওয়া যায়।

Problems

Example-120: $x + y = 1$ এবং $x = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ কত হবে? **[RU'19-20]**

Solⁿ: $y = -x + 1$

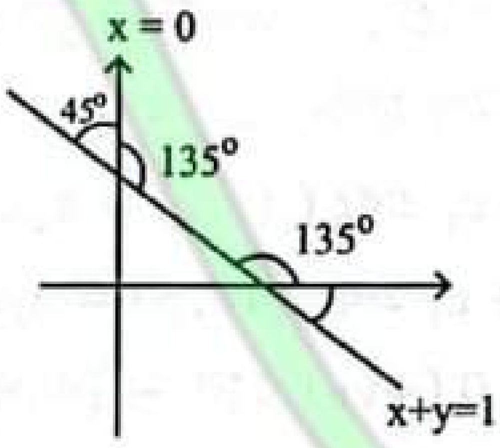
$m = -1$

$\Rightarrow \tan\theta = -1$

$\therefore \theta = 135^\circ$

∴ উৎপন্ন কোণ 135°

অথবা 45°.



Example-121: $y = 2$ এবং $2x - 2y + 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত কোণ কত? **[Agri. Guccho'20-21]**

Solⁿ: $y = 2, m_1 = 0\,; 2x - 2y + 3 = 0, m_2 = \frac{-2}{-2} = 1 \therefore \tan\theta = \pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} = \pm\frac{0-1}{1+0\times1} \therefore \theta = 135^\circ, 45^\circ$

∴ অন্তর্গত কোণ সূক্ষ্মকোণ 45° এবং স্থূলকোণ 135°.

Example-122: $2x + 3y - 1 = 0$ ও $x - 2y + 3 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর। **[DU' 18-19, 08-09, JU' 18-19]**

Solⁿ: $2x + 3y - 1 = 0$ রেখার ঢাল $= -\frac{2}{3}$; $x - 2y + 3 = 0$ রেখার ঢাল $= -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

এখানে, $m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{2}{3}$ [সর্বদা বড় ঢালকে m_1 ধরবে]

∴ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ, $\theta = \tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{3}\right)}{1+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = \tan^{-1}\frac{7}{4}$ **(Ans)**

Note: [সূক্ষ্মকোণের জন্য '+' ধরা হয়েছে স্থূলকোণ হলে ' − ' ধরতে হবে]

Example-123: দুইটি সরলরেখা $(-1, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং এরা $3x - y + 5 = 0$ রেখার সহিত 45° কোণ উৎপন্ন করে, রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $y - 2 = m(x + 1)$ এবং প্রদত্ত রেখার ঢাল $= 3$

$\therefore \tan 45^\circ = \pm\frac{m-3}{1+3m} \Rightarrow 3m + 1 = \pm(m - 3)$

(+) চিহ্ন নিয়ে, $3m + 1 = m - 3 \therefore m = -2$; (−) চিহ্ন নিয়ে, $3m + 1 = -m + 3 \therefore m = \frac{1}{2}$

রেখা, $y - 2 = -2(x + 1) \Rightarrow 2x + y = 0$ এবং $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$ (Ans.)

Example-124: $px + qy + 12 = 0$ এবং $px + qy + 20 = 0$ রেখাদ্বয়ের অর্ন্তভুক্ত কোণ? **[RU' 10-11]**

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) None of these

Solⁿ: **(d);** প্রদত্ত রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল, ∴ মধ্যবর্তী কোণ $= 0^\circ$

Example-125: $3x + 4y = 10$ এবং $4x - 3y = 5$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ কত? **[Ru' 10-11]**

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) None of these

Solⁿ: **(b);** প্রদত্ত রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব। ∴ অন্তর্ভুক্ত কোণ $= 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

Example-126: $y = x - 6$ এবং $y = mx + 6$ সরলরেখার মাঝে কোণ 60° হলে m এর মান কত?

(a) $\frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}+1}{-\sqrt{3}+1}$ (c) $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ (d) b & c both

Solⁿ: **(d);** এখানে $m_1 = 1$ এবং $m_2 = m \therefore \tan 60^\circ = \frac{m-1}{1+1.m} \Rightarrow \sqrt{3} + \sqrt{3}m - m + 1 = 0$

$\Rightarrow m(\sqrt{3} - 1) = -(\sqrt{3} + 1) \Rightarrow m = -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}+1}{-\sqrt{3}+1}$ যা option (b)

আবার $\tan 60^\circ = \frac{1-m}{1+1.m} \Rightarrow \sqrt{3} + \sqrt{3}m + m - 1 = 0 \Rightarrow m(\sqrt{3} + 1) = 1 - \sqrt{3} \therefore m = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ যা option (c)

∴ Option (d) is correct.

Type–22: কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ সম্পর্কিত সমস্যা

Concept

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখা দুটির অন্তর্গত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$$\Rightarrow \frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

- $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ হলে রেখাদ্বয় লম্ব।
- $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ (+ve) হলে, (+ve) নিয়ে স্থূলকোণ এবং −ve নিয়ে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যায়।
- $a_1a_2 + b_1b_2 < 0$ (−ve) হলে, (−ve) নিয়ে স্থূলকোণ এবং +ve নিয়ে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যায়।
- সমদ্বিখণ্ডদ্বয় সর্বদা পরস্পর লম্ব হবে।
- $f_1(x,y) = a_1x + b_1y + c_1$ এবং $f_2(x,y) = a_2x + b_2y + c_2$ হলে এবং (α,β) একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হলে,
  $f_1(\alpha,\beta) = a_1\alpha + b_1\beta + c_1$ এবং $f_2(\alpha,\beta) = a_2\alpha + b_2\beta + c_2$

এখন, $f_1(\alpha,\beta) \times f_2(\alpha,\beta) > 0$ (+ve) হলে → (+ve) চিহ্ন নিলে প্রাপ্ত সমীকরণ (α,β) বিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ এবং $f_1(\alpha,\beta) \times f_2(\alpha,\beta) < 0$ (−ve) হলে → (−ve) চিহ্ন নিলে প্রাপ্ত সমীকরণ (α,β) বিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ।

- c_1 ও c_2 বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হলে → (−ve) চিহ্ন নিলে প্রাপ্ত সমীকরণ মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ।
  c_1 ও c_2 একই চিহ্নবিশিষ্ট হলে → (+ve) চিহ্ন নিলে প্রাপ্ত সমীকরণ মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ।

Problems

Example-127: $3x - 4y - 2 = 0$ এবং $4x - 3y = -1$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ এবং স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্ণয় কর।

Sol^n: $\frac{3x-4y-2}{5} = \pm\frac{4x-3y+1}{5} \Rightarrow 3x - 4y - 2 = \pm(4x - 3y + 1)$

এখানে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 3.4 + (-4)(-3) = 24 > 0$

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক হবে, $3x - 4y - 2 = -(4x - 3y + 1) \Rightarrow 7x - 7y - 1 = 0$

এবং স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক হবে, $3x - 4y - 2 = 4x - 3y + 1 \Rightarrow x + y + 3 = 0$ **(Ans.)**

Example-128: $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ রেখা দুইটির অন্তবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক y অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দৈর্ঘ্য কত? [KU'13-14]

Sol^n: $y - 2x - 1 = 0$ ও $2y - x - 4 = 0$ রেখা দুইটির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় হচ্ছে,

$\frac{y-2x-1}{\sqrt{1^2+2^2}} = \pm\frac{2y-x-}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} \therefore y + x - 3 = 0 \Rightarrow 3y - 3x - 5 = 0$

y-অক্ষের ছেদ বিন্দুদ্বয় হচ্ছে, $(0, 3)$ ও $\left(0,\frac{5}{3}\right)$; $PQ = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$ **(Ans.)**

Type–23: বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

$P(x',y')$ বিন্দুটি $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে বা সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত হবে তখন যথাক্রমে $(a_1x' + b_1y' + c_1)(a_2x' + b_2y' + c_2)(a_1a_2 + b_1b_2) > 0$ অথবা, < 0 হয়।

Problems

Example-129: $P(1,1)$ বিন্দুটি $x - y + 3 = 0$ এবং $2x + y - 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোন কোণে অবস্থিত?

Sol^n: $\{(1) - (1) + 3\} \times \{(2 \times (1) + (1) - 5)\} \times \{(2 \times 1 + (1)(-1)\} = 3 \times (-2) \times (1) = -6 < 0$

$\therefore P(1,1)$ বিন্দুটি সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত।

Type–24: প্রতিবিম্ব নির্ণয় সংক্রান্ত

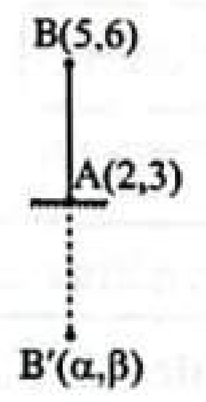
Concept

প্রতিবিম্ব নির্ণয় সংক্রান্ত: যার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব নির্ণয় করতে হবে তাকে দর্পণ ধরে নিতে হবে।

(a) বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দু:

Problems

Example-130: $A(2,3)$ বিন্দুর সাপেক্ষে $B(5,6)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।



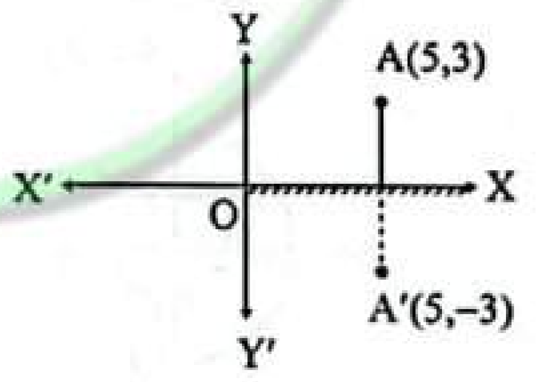
Solⁿ: $\because A(2,3)$ বিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব নির্ণয় করতে হবে, তাই A কে দর্পণ চিন্তা করতে হবে।

A এর সাপেক্ষে B এর প্রতিবিম্ব অবশ্যই B' হবে এবং BB' সরলরেখার মধ্যবিন্দু $A(2,3)$ হবে।

মনে করি, $B'(\alpha,\beta) \therefore \frac{5+\alpha}{2} = 2 \therefore \alpha = -1$; $\frac{6+\beta}{2} = 3 \therefore \beta = 0 \therefore B' \equiv (-1,0)$

(b) সরলরেখার সাপেক্ষে বিন্দু:

Case-1: x অক্ষের সাপেক্ষে বিন্দু

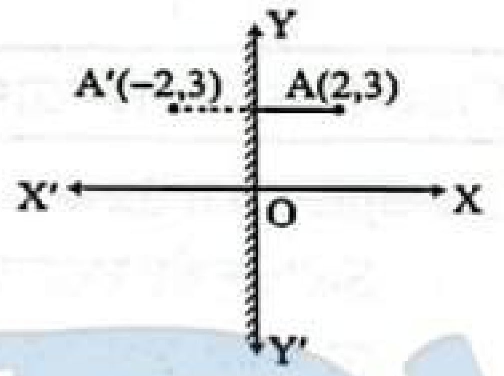


$\because$ x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব নির্ণয় করতে হবে।

সুতরাং A বিন্দুর ভুজ পরিবর্তিত হবে না শুধুমাত্র কোটির চিহ্ন পরিবর্তিত হবে।

$P(\alpha,\beta)$ বিন্দুর x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব হবে $P'(\alpha,-\beta)$

Case-2: y অক্ষের সাপেক্ষে বিন্দু

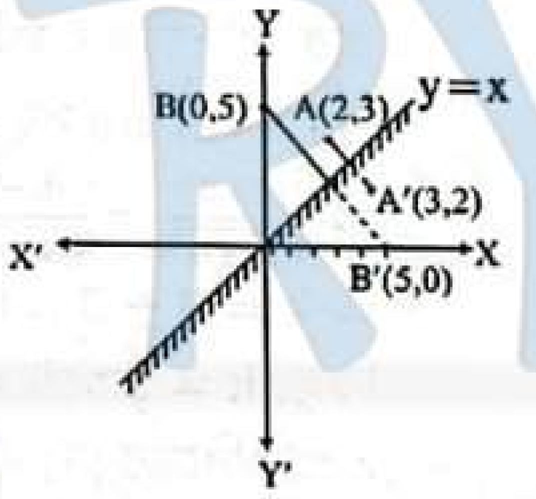


$\because$ y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব নির্ণয় করতে হবে।

সুতরাং A বিন্দুর কোটি পরিবর্তিত হবে না শুধুমাত্র ভুজের চিহ্ন পরিবর্তিত হবে।

$P(\alpha,\beta)$ বিন্দুর y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব হবে $P'(-\alpha,\beta)$

Case-3: $y = x$ অক্ষের সাপেক্ষে বিন্দু



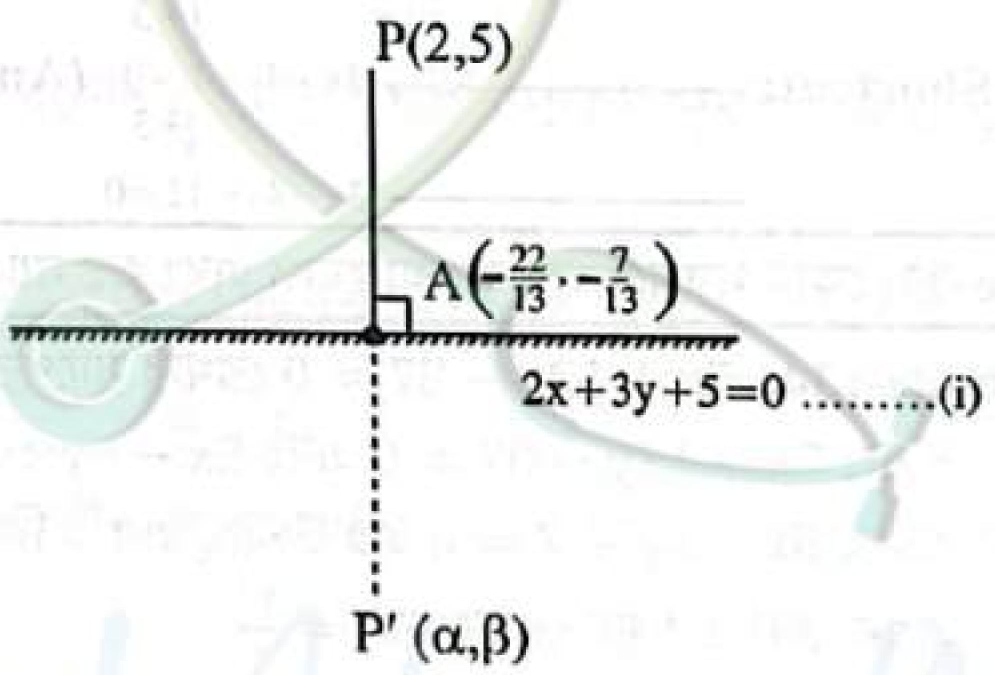
$\because y = x$ রেখার সাপেক্ষে $B(0,5)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব হলো $B'(5,0)$ এবং $A(2,3)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $A'(3,2)$

$\therefore y = x$ রেখার সাপেক্ষে $P(\alpha,\beta)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $P'(\beta,\alpha)$

Case-4: $ax + by + c = 0$ রেখার সাপেক্ষে বিন্দু

Problems

Example-131: $2x + 3y + 5 = 0$ রেখার সাপেক্ষে $P(2,5)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।



Solⁿ: প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $2x + 3y + 5 = 0$ .... (i)

$2x + 3y + 5 = 0$ এর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ,

$3x - 2y + k = 0$ .... (ii)

(ii) নং রেখাটি $P(2,5)$ বিন্দু দিয়ে গেলে পাই,

$3.2 - 2.5 + k = 0 \therefore k = 4$

$\therefore$ (ii) রেখার (AP) সমীকরণ, $3x - 2y + 4 = 0$ ....(iii)

(i) এবং (iii) এর ছেদবিন্দু $A\left(-\frac{22}{13}, \frac{-7}{13}\right)$ [Calculator দিয়ে]

এখন, $P'(\alpha,\beta)$ এবং $P(2,5)$ এর মধ্যবিন্দু $A\left(-\frac{22}{13}, -\frac{7}{13}\right)$

$\frac{2+\alpha}{2} = -\frac{22}{13}$	$\frac{5+\beta}{2} = -\frac{7}{13}$
$\therefore \alpha = -\frac{70}{13}$	$\therefore \beta = -\frac{79}{13}$

$\therefore P'\left(-\frac{70}{13}, -\frac{79}{13}\right)$ ইহাই নির্ণেয় প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক।

❖ **Shortcut:** $ax + by + c = 0$ রেখার সাপেক্ষে (α, β) এর প্রতিবিম্ব (x, y) হলে, $x = \alpha - \frac{2a(a\alpha+b\beta+c)}{a^2+b^2}$
$y = \beta - \frac{2b(a\alpha+b\beta+c)}{a^2+b^2}$ $\therefore$ $2x + 3y + 5 = 0$ রেখার সাপেক্ষে $(2, 5)$ এর প্রতিবিম্ব (x, y) হলে,
$x = 2 - \frac{2.2(2.2+3.5+5)}{2^2+3^2} = -\frac{70}{13}$; $y = 5 - \frac{2.3(2.2+3.5+5)}{2^2+3^2} = -\frac{79}{13}$ $\therefore (x, y) \equiv \left(-\frac{70}{13}, -\frac{79}{13}\right)$

(c) সরলরেখার সাপেক্ষে সরলরেখা:

Case-01: একটি রেখার লম্ব রেখার সাপেক্ষে ঐ রেখার প্রতিবিম্ব

Concept

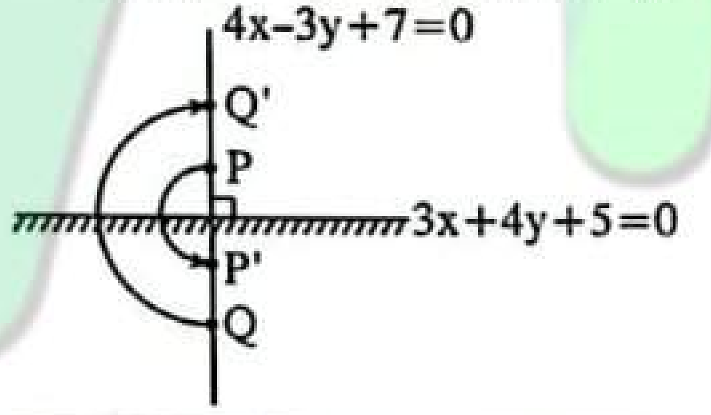
একটি রেখার লম্ব রেখার সাপেক্ষে ঐ রেখাটির প্রতিবিম্ব রেখাটি নিজেই।

Problems

Example-132: $3x + 4y + 5 = 0$ রেখার সাপেক্ষে $4x - 3y + 7 = 0$ এর প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।

Sol^n: $3x + 4y + 5 = 0$ রেখার ঢাল, $m_1 = -\frac{3}{4}$ এবং $4x - 3y + 7 = 0$ রেখার ঢাল, $m_2 = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$

$\therefore m_1 m_2 = -1$ [$\therefore$ রেখাদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব]



যেহেতু রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব $\therefore$ P বিন্দুর বিম্ব হবে P′ আবার Q বিন্দুর বিম্ব হবে Q′ (যেখানে P, P′, Q, Q′ সকলেই $4x - 3y + 7 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত)। এভাবে $4x - 3y + 7 = 0$ রেখার উপরস্থ প্রতিটি বিন্দুর বিম্ব ঐ রেখার উপরেই হবে। $\therefore$ $3x + 4y + 5 = 0$ রেখার সাপেক্ষে $4x - 3y + 7 = 0$ রেখার প্রতিবিম্ব $4x - 3y + 7 = 0$ রেখাটি নিজেই।

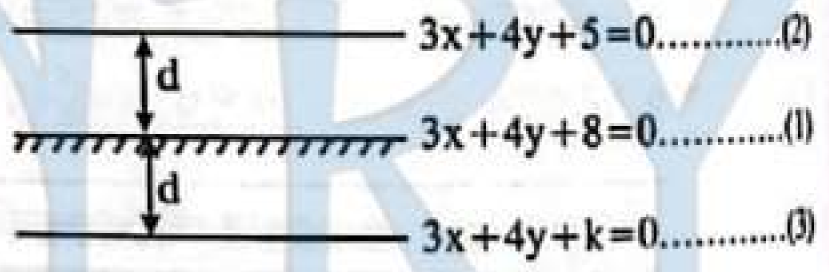
Case-02: কোন সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সাপেক্ষে ঐ সরলরেখার প্রতিবিম্ব

Example-133: $3x + 4y + 8 = 0$ রেখার সাপেক্ষে $3x + 4y + 5 = 0$ এর প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।

Sol^n: দর্পণ সরলরেখার সমীকরণ, $3x + 4y + 8 = 0 \dots\dots\dots (1)$

যে সকল রেখাটির প্রতিবিম্ব নির্ণয় করতে হবে তার সমীকরণ, $3x + 4y + 5 = 0 \dots\dots\dots (2)$

ধরি, প্রতিবিম্বের সমীকরণ, $3x + 4y + k = 0 \dots\dots\dots . (3)$



(1) ও (2) এর লম্ব দূরত্ব = (1) ও (3) এর লম্ব দূরত্ব

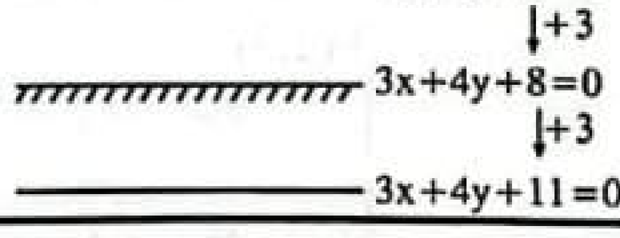
$\Rightarrow \frac{|5-8|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|k-8|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Rightarrow |k - 8| = 3 \Rightarrow k - 8 = \pm 3$

$\Rightarrow k = 8 \pm 3 \therefore k = 11, 5$

কিন্তু, $k \neq 5 \because k = 5$ হলে (1) ও (3) একই সমীকরণ হয়ে যাবে $\therefore k = 11$

$\therefore$ প্রতিবিম্বের (3) নং সমীকরণ $3x + 4y + 11 = 0$

❖ **Shortcut:**



(Ans.)

Case-03: কোন সরলরেখার অসমান্তরাল এবং লম্ব নয় এরূপ সরলরেখার সাপেক্ষে ঐ সরলরেখার প্রতিবিম্ব

Example-134: $7x + 13y - 87 = 0$ রেখার সাপেক্ষে $5x - 8y + 7 = 0$ এর প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।

Sol^n: $7x + 13y - 87 = 0$ এবং $5x - 8y + 7 = 0$ এর ছেদবিন্দু A(5,4)

এখন, $5x - 8y + 7 = 0$ এর উপরস্থ একটি বিন্দু B(13,9) [ঐ সমীকরণে $x = 13$ বসালে, $y = 9$]

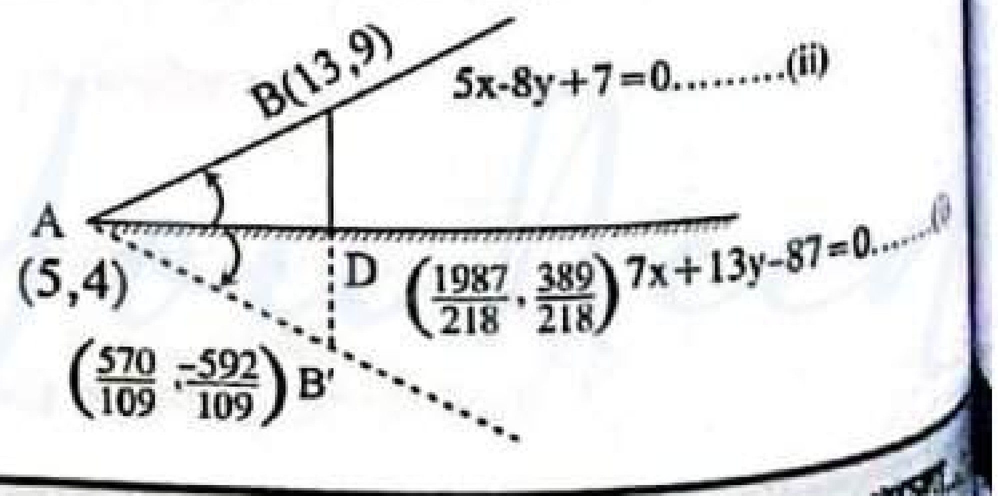
এখন, AD এর লম্ব রেখার ঢাল $= \frac{13}{7}$

$\therefore$ BD রেখার সমীকরণ, $y - 9 = \frac{13}{7}(x - 13)$

$\Rightarrow 7y - 63 = 13x - 169 \therefore 13x - 7y - 106 = 0 \dots\dots\dots (iii)$

(i) ও (iii) এর ছেদবিন্দু $D\left(\frac{1987}{218}, \frac{389}{218}\right)$

$\therefore$ B′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{570}{109}, \frac{-592}{109}\right)$ (রেখার সাপেক্ষে বিন্দুর প্রতিবিম্ব)



এখন, $A(5,4)$ এবং $B\left(\frac{570}{109},\frac{-592}{109}\right)$ রেখার সমীকরণ

$$\frac{y-4}{4+\frac{592}{109}}=\frac{x-5}{5-\frac{570}{109}}\Rightarrow\frac{y-5}{\frac{1028}{109}}=\frac{x-5}{-\frac{25}{109}}\Rightarrow-25(y-4)=1028(x-5)\Rightarrow-25y+100=1028x-5140$$

$\therefore 1028x+25y=5240$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $f(x,y)=ax+by+c=0$ এর সাপেক্ষে $g(x,y)=a_1x+b_1y+c_1=0$ এর প্রতিবিম্ব হবে,

$(a^2+b^2)\,g(x,y)-2(aa_1+bb_1)f(x,y)=0$

$f(x,y)=7x+13y-87=0$ এর সাপেক্ষে $g(x,y)=5x-8y+7=0$ এর প্রতিবিম্ব হবে,

$(7^2+13^2)(5x-8y+7)-2\{5.7+13.(-8)\}\,(7x+13y-87)=0\Rightarrow 1028x+25y=5240$ **(Ans.)**

Example-135: একটি আলোক রশ্মি $x-2y-3=0$ সরলরেখা বরাবর পাঠানো হয়, $3x-2y-5=0$ সরলরেখাতে আসার পর তা প্রতিফলিত হয়। প্রতিফলিত রশ্মি বরাবর সমীকরণ নির্ণয় কর।

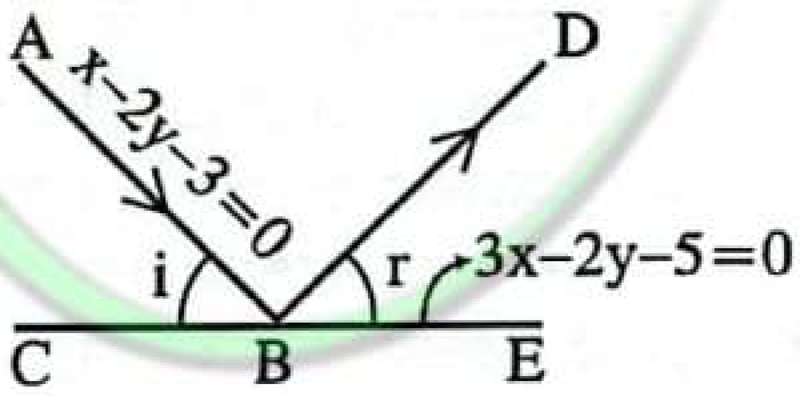
Sol^n: AB এর সমীকরণ: $x-2y-3=0$ ……… (i) এবং CB এর সমীকরণ: $3x-2y-5=0$ ……… (ii)

$\therefore$ (i) – (ii) হতে পাই: $x=1, y=-1$

$\therefore$ BD এর সমীকরণ: $y+1=m(x-1)$ ……… (iii)

শর্তমতে, $\angle i=\angle r$ হবে, এখন (i) এর ঢাল $m_1=\frac{1}{2}$

এবং (ii) এর ঢাল $m_2=\frac{3}{2}\therefore\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{m-\frac{3}{2}}{1+\frac{3m}{2}}\Rightarrow\frac{2(3-1)}{4+3}=\frac{2m-3}{2+3m}\Rightarrow m=\frac{29}{2}$



$\therefore$ (iii) হতে নির্ণেয় সমীকরণ: $y+1=\frac{29}{2}(x-1)\Rightarrow 29x-2y-31=0$ **(Ans.)**

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

01. **y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা:** একটি সরলরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং x-অক্ষের ছেদক অংশ a হলে রেখাটির সমীকরণ $x=a$
02. **x-অক্ষের সমান্তরাল রেখা:** একটি সরলরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ b, রেখাটির সমীকরণ $y=\ b$।
03. **ঢাল মূল রেখা:** একটি সরলরেখা মূলবিন্দুগামী এবং এর ঢাল m হলে রেখাটির সমীকরণ, $y=mx=\frac{y_1}{x_1}x$।
04. **ঢাল ছেদক রেখা:** একটি সরলরেখার ঢাল m এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ c হলে সরলরেখাটির সমীকরণ হবে $y=mx+c$।
05. **ঢাল বিন্দুরেখা:** একটি সরলরেখার ঢাল m এবং রেখাটি (x_1,y_1) বিন্দুগামী হলে রেখাটির সমীকরণ হবে $y-y_1=m(x-x_1)$।
06. **অক্ষছেদকারী রেখা:** একটি সরলরেখার X এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ যথাক্রমে a এবং b হলে রেখাটির সমীকরণ হবে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$।
07. **দ্বিবিন্দু রেখার সমীকরণ:** A এবং B এর স্থানাঙ্ক $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ হলে AB রেখার সমীকরণ, $\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}$।
08. **লম্বকোণ রেখা:** মূলবিন্দু থেকে যে কোন রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং উক্ত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ তৈরি করলে, এরূপ রেখার সমীকরণ, $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$।
09. $A(x_1,y_1)$ বিন্দু থেকে x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে আনত θ কোণ বরাবর r দূরত্বে অপর কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x,y) হলে, $\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=\pm r$
10. $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ সমীকরণদ্বয় একই সরলরেখা নির্দেশ করার শর্ত: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$।
11. **দুটি রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ:** $\phi=\pm\tan^{-1}\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\ _1\tan\theta_2}=\pm\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm\tan^{-1}\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}$।
    সাধারণভাবে কোণ নির্ণয় করতে বললে '+' চিহ্ন ব্যবহার করা হয় আর দুটি কোণের শর্ত বা শর্ত প্রতিপাদন বা রেখার সমীকরণ নির্ণয়ে ± use করা হয়।
12. দুটি রেখা পরস্পর লম্ব হলে, $m_1\times m_2=-1$ এবং দুটি রেখা পরস্পর সমান্তরাল হলে, $m_1=m_2\therefore\theta_1=\theta_2$।
13. $a_1x+b_1y+c_1=0, a_2x+b_2y+c_2=0, a_3x+b_3y+c_3=0$ সমবিন্দু হলে, $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0$ হবে।
14. **লম্বদূরত্ব:** $ax+by+c=0$ রেখা হতে $P\,(x_1,y_1)$ বিন্দুর দূরত্ব $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$।

15. সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব: AB||CD হলে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$।

16. কোণের সমদ্বিখণ্ডক: AB ও CD রেখার অন্তর্গত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হলো- $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$।

17. $(a_1a_2 + b_1b_2) > 0$ হলে, ধনাত্মক (+ve) ধরে স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক; ঋণাত্মক (−ve) ধরে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক।

18. $(a_1a_2 + b_1b_2) < 0$ ধনাত্মক (+ve) ধরে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক; ঋণাত্মক (−ve) ধরে স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক।
[লক্ষণীয় সূত্র প্রয়োগ করার সময় c_1 ও c_2 এর চিহ্ন ধনাত্মক রাখতে হবে]

19. রেখার সাপেক্ষে বিন্দুর প্রতিবিম্ব: (x_1, y_1) বিন্দুর প্রতিবিম্ব
   - x-অক্ষের সাপেক্ষে $(x_1, -y_1)$
   - y-অক্ষের সাপেক্ষে $(-x_1, y_1)$
   - $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব (y_1, x_1)
   - $ax + by + c = 0$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব (x', y') হলে, $\frac{x'-x_1}{a} = \frac{y'-y_1}{b} = \frac{-2(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$

20. রেখার সাপেক্ষে রেখার প্রতিবিম্ব: $ax + by + c = 0$ রেখার প্রতিবিম্ব
   - x-অক্ষের সাপেক্ষে $ax - by + c = 0$
   - y-অক্ষের সাপেক্ষে $-ax + by + c = 0$

   [যে অক্ষের সাপেক্ষে বলবে তার বিপরীত অক্ষের চলকের চিহ্ন উল্টে দিলে প্রতিবিম্বের সমীকরণ পাওয়া যাবে]

21. রেখার সাপেক্ষে বিন্দুর অবস্থান:
   - (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় $ax + by + c = 0$ রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত হবে যদি $ax_1 + by_1 + c$ এবং $ax_2 + by_2 + c$ রাশিদ্বয় একই সমচিহ্নবিশিষ্ট হয়।
   - (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় $ax + by + c = 0$ রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হবে যদি $ax_1 + by_1 + c$ এবং $ax_2 + by_2 + c$ রাশিদ্বয় বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হয়।

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম

MCQ

01. একটি সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(3, -4), (-6, 5)$; এর ৩য় শীর্ষবিন্দু $(-2, -1)$ হলে ৪র্থ শীর্ষবিন্দু স্থানাঙ্ক–
(a) $(1, -2)$ (b) $(0, -2)$ (c) $(-1, 2)$ (d) $(-1, 1)$

02. $(-5, 7)$ ও $(3, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ–
(a) $y - 3 = x + 1$ (b) $y + 1 = x - 3$ (c) $y + 3 = x - 1$ (d) $y - 1 = x + 3$

03. $4x - 2y + 7 = 0$ সরলরেখার উপর কোন বিন্দুটি $(2, 3)$ও $(-2, 4)$ বিন্দু দুটি থেকে সমদূরবর্তী?
(a) $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ (b) $\left(0, \frac{7}{2}\right)$ (c) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (d) $(1, 1)$

04. $(2, 1)$ বিন্দু থেকে যে সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব 4 একক সেই সেট নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ–
(a) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ (b) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4^2$
(c) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ (d) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4^2$

05. $3x + 7y = 21$ এবং $2ax - 3by + 6 = 0$ সমীকরণদ্বয় একই সরলরেখা নির্দেশ করলে a ও b এর মান হবে যথাক্রমে-
(a) $\frac{3}{7}$ ও $-\frac{2}{3}$ (b) $\frac{3}{7}$ ও $\frac{4}{3}$ (c) $-\frac{3}{7}$ ও $\frac{2}{3}$ (d) কোনটিই নয়

06. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় $(ap^2, 2ap), (aq^2, 2aq), (ar^2, 2ar)$ এবং এর ভরকেন্দ্র x অক্ষের উপর অবস্থিত হলে-
(a) $p + q + r = 1$ (b) $p + q + r = 0$ (c) $pqr = 1$ (d) $pqr = 0$

07. $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = c + 8$ রেখা দুইটি মূলবিন্দু থেকে সমদূরবর্তী হলে, c এর মান কত?
(a) 5 (b) 10 (c) 2.5 (d) None

08. A ও B দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ এবং $(4, -5)$, AB রেখা C পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন $AB = 3BC$ হয়, C বিন্দু স্থানাঙ্ককত?
(a) $(7, -8)$ (b) $(6, -5)$ (c) $(6, -8)$ (d) $(9, -8)$

09. ΔABC এর ভরকেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4,-7)$ ও $(-2,5)$ হলে C এর স্থানাঙ্ক কত?
(a) $(-1,1)$ (b) $(-2,2)$ (c) $(3,4)$ (d) $(1,3)$

10. $ax+by+c=0, bx+cy+a=0, cx+ay+b=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দুগামী হওয়ার শর্ত কোনটি?
(a) $a+b+c=0$ (b) $a-b+c=0$ (c) $a+b=c$ (d) $a=b=c$

11. x-অক্ষস্থ P বিন্দু থেকে (0,2) এবং (6,4) বিন্দু দুটি সমদূরবর্তী হলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?
(a) $(2,0)$ (b) $(4,0)$ (c) $(5,0)$ (d) $(6,8)$

12. যদি $A(2,3), B(5,6)$ এবং $D(6,8)$, বিন্দু তিনটি ABCD রম্বসের শীর্ষ বিন্দু হয় তাহলে C এর স্থানাঙ্ক কত?
(a) $(8,11)$ (b) $(9,11)$ (c) $(9,12)$ (d) $(8,13)$

13. $(1,2),(-3,1),(-2,-3),(2,-2)$ বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রটি হবে–
(a) আয়তক্ষেত্র (b) বর্গক্ষেত্র (c) ট্রাপিজিয়াম (d) সামান্তরিক

14. কোন বৃত্তের কেন্দ্র $(3,5)$ এবং তার একটি ব্যাসের একপ্রান্ত $(7,3)$ হলে অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক কত?
(a) $(3,2)$ (b) $(4,1)$ (c) $(-1,7)$ (d) $(2,5)$

15. ABCD সামান্তরিকের A, B, C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্কযথাক্রমে $(1,2),(3,4),(1,0)$ হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল কত?
(a) 2 বর্গ একক (b) 4 বর্গ একক (c) 6 বর্গ একক (d) কোনটিই নয়

16. y-অক্ষ ও $(7,2)$ বিন্দু হতে $(a,5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে a এর মান–
(a) 6 (b) $\frac{29}{7}$ (c) 17 (d) $\frac{20}{7}$

17. $(2,-4)$ ও $(-3,6)$ বিন্দুদ্বয় সংযোগ রেখাকে y-অক্ষরেখা যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা হলো–
(a) $3:4$ (b) $2:3$ (c) $1:2$ (d) $4:3$

18. $(3,2)$ এবং $(6,8)$ বিন্দু দুটির সংযোগ রেখার সমদ্বিখন্ডন বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি?
(a) $\left(\frac{9}{2},6\right)$ (b) $\left(\frac{9}{2},5\right)$ (c) $\left(6,\frac{5}{2}\right)$ (d) $\left(5,\frac{5}{2}\right)$

19. $(P,P-2),(P+3,P)$ এবং $(P+2,P+2)$ বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কোনটি?
(a) 4 বর্গ একক (b) 4P বর্গ একক (c) $4P^2$ বর্গ একক (d) সবগুলো

20. $3x+7y-2=0$ সরলরেখার উপর লম্ব এবং $(2,1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ–
(a) $3x+7y-13=0$ (b) $7x-3y-11=0$ (c) $7x+3y-17=0$ (d) $7x-3y-2=0$

21. $y=3x+7$ এবং $3y-x=8$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ–
(a) $\tan^{-1}(1)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (c) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

22. $(2,5)$ এবং $(5,6)$ বিন্দুগামী সরলরেখা কোনটি?
(a) $x-3y+13=0$ (b) $3x-y+13=0$ (c) $3x-y-13=0$ (d) $x-3y-13=0$

23. $(4,-2)$ বিন্দু থেকে $5x+12y=3$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য–
(a) $-\frac{7}{13}$ (b) $\frac{8}{9}$ (c) $-\frac{8}{9}$ (d) $\frac{7}{13}$

24. $ax+y+c=0$ এবং $x+by-8=0$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে নিম্নের কোনটি সঠিক?
(a) $c=8$ (b) $b=-a$ (c) $b=a$ (d) $b=-c$

25. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ $(2,3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। সরলরেখাটির সমীকরণ–
(a) $2x+3y-12=0$ (b) $3x+2y-12=0$ (c) $2x+3y-6=0$ (d) $3x+2y-6=0$

26. $(1,-1)$ এবং $(2,4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ–
(a) $x+3y-6=0$ (b) $x+5y-9=0$ (c) $x-3y-6=0$ (d) $x-5y-6=0$

27. সরলরেখা $3x+4y-12=0$ দ্বারা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য–
(a) 7 (b) 5 (c) 9 (d) 8

28. $(-5,7)$ ও $(-3,-1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ কী?
(a) $x-4y+16=0$ (b) $y+3=x-3$ (c) $y+3=x-1$ (d) $y-3=x+3$

29. $x+y=3$ এবং $y-x=1$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ–
(a) $y=2$ (b) $2y=3$ (c) $x=1$ (d) $x+3=0$

30. দুইটি সরলরেখা $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত কোনটি?
(a) $a_1a_2+b_1b_2=0$ (b) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ (c) $a_1a_2-b_1b_2=0$ (d) $a_1a_2=b_1b_2$

31. $2x-5y+10=0$ দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা বেষ্টিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?
(a) 10 (b) 20 (c) 50 (d) 5

32. $(4,-5)$ বিন্দুগামী x অক্ষের উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ–
(a) $y+5=0$ (b) $x-4=0$ (c) $y-5=0$ (d) $x+4=0$

33. $3x-4x-12=0$ রেখাটির অক্ষদ্বয় হতে খণ্ডিত অংশের পরিমাণ যথাক্রমে–
(a) $-3,-4$ (b) $4,-3$ (c) $-4,-3$ (d) $-3,4$

34. $(5,7)$ এবং $(2,4)$ দুইটি বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার ঢাল হবে–
(a) 1 (b) 5 (c) 7 (d) 11

35. $2x+3y+c=0$ রেখার সহিত 45° কোণে ছেদকারী রেখার সমীকরণ হলো–
(a) $x+5y+6=0$ (b) $x+y+7=0$ (c) $5x+y+7=0$ (d) $2x+2y+7=0$

36. $4x-3y=5$ এবং $8x-6y=40$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু–
(a) $(2,1)$ (b) $(1,-1)$ (c) $(5,0)$ (d) কোনটিই নয়

37. $y=2$ এবং $y+x-3=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ–
(a) 90° (b) 45° (c) 60° (d) 0°

38. $5x+12y=2$ এবং $5x+12y+29=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব–
(a) $\frac{31}{13}$ একক (b) $\frac{27}{13}$ একক (c) $\frac{31}{15}$ একক (d) $\frac{27}{14}$ একক

39. কোন সরলরেখার ঢাল -1 এবং মূলবিন্দু হতে উহার দূরত্ব 4 একক হলে সরলরেখাটির সমীকরণ হবে–
(a) $x+y\pm4\sqrt{2}=0$ (b) $x-y\pm4\sqrt{2}=0$ (c) $2x+y\pm4\sqrt{2}=0$ (d) $x+y\pm\sqrt{2}=0$

40. একটি সরলরেখা মূল বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x অক্ষের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন করে। উহার সমীকরণ কোনটি?
(a) $x-\frac{1}{\sqrt{3}}y=0$ (b) $y+\sqrt{3}x=0$ (c) $x+\sqrt{3}y=0$ (d) $x-\sqrt{3}y=0$

41. $2x-5y=1$ ও $5x+5y=3$ রেখাদ্বয় কোন চতুর্ভাগে ছেদ করবে?
(a) I (b) II (c) III (d) IV

42. $x-y\sqrt{3}=7$ এবং $x\sqrt{3}-y=5$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ কত?
(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 12°

43. $y=3x+3$ রেখাটি x -অক্ষকে ছেদ করে কোন বিন্দুতে?
(a) $(3,0)$ (b) $(1,0)$ (c) $(-1,0)$ (d) $(-3,0)$

44. সরলরেখার সমীকরণ কোনটি যে y অক্ষকে 8 একক দূরে ছেদ করে এবং x অক্ষের সাথে 45° হেলানো অবস্থায় আছে।
(a) $x+y+8=0$ (b) $x-y+8=0$ (c) $y=8$ (d) $x=8$

45. $5x^2-11x-12=0$ সমীকরণে x এর মান কত?
(a) $\pm\frac{2}{3}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $-\frac{4}{3}$ (d) $-\frac{4}{5}$

46. $2y-x=6$ রেখাটির দ্বারা y অক্ষের ছেদাংশ কত?
(a) 6 (b) 7 (c) 3 (d) 4

47. $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখা পরস্পর সমান্তরাল হবে–
(a) $a_1b_2=a_2b_1$ (b) $a_1b_1=a_2b_2$ (c) $b_1c_1=b_2c_2$ (d) $a_1c_1=a_2c_2$

48. $(2,-1),(a+1,a-3)$ ও $(a+2,a)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে a এর মান–
(a) 4 (b) 2 (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$

49. যে বিন্দু $(1,4)$ এবং $(9,-12)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাংশকে অন্তঃস্থভাবে 3 : 5 অনুপাতে বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক
(a) $(4,-2)$ (b) $(2,-4)$ (c) $(-4,2)$ (d) $(4,2)$

50. $y=2x+1$ ও $2y-x=4$ রেখা দুইটির অন্তবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক y অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দৈর্ঘ্য কত?
(a) 4 (b) 2 (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

51. কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ $(-1,-2), (2,5)$ এবং $(3,10)$ হলে তার ক্ষেত্রফল–
(a) 10 sq. units (b) 15 sq. units (c) 4 sq. units (d) 18 sq. units

52. $(3,-1)$ এবং $(5,2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী সরলরেখাকে $3:4$ অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক–
(a) $\left(\frac{17}{3},3\right)$ (b) $\left(\frac{27}{7},\frac{2}{7}\right)$ (c) $\left(\frac{27}{4},\frac{4}{3}\right)$ (d) None

53. $5x+4y=20$ রেখা, x-অক্ষ ও y-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল–
(a) 10 বর্গ একক (b) 12 বর্গ একক (c) 9 বর্গ একক (d) 8 বর্গ একক

54. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় $A(3,x), B(3,9), C(-5,-8)$ এবং $\Delta ABC = 44$ হলে $x=$?
(a) -4 (b) 3 (c) -2 (d) 6

55. একটি সমবাহু ত্রিভুজের দুটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,-4)$ ও $(0,4)$; এর ৩য় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক–
(a) $(4\sqrt{3},0)$ (b) $(4,0)$ (c) $(2\sqrt{3},0)$ (d) None

56. ABCD চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো যথাক্রমে $(a,0), (-b,0), (0,a), (0,-b)$; Δ ACB এর ক্ষেত্রফল–
(a) $0.5(a-b)a$ (b) $0.5(b-a)b$ (c) $(a+b)a$ (d) None

57. $3x-4y=12, 4x-3y+6=0$ এবং $5x+12y=27$ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ককত?
(a) $\left(\frac{25}{68},-\frac{3}{98}\right)$ (b) $\left(\frac{45}{98},-\frac{6}{68}\right)$ (c) $\left(\frac{25}{98},-\frac{9}{98}\right)$ (d) $\left(\frac{45}{98},\frac{3}{68}\right)$

58. একটি সরলরেখা (α,β) বিন্দুগামী এবং X, Y অক্ষের কর্তিত অংশ এই বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। সরলরেখার সমীকরণ-
(a) $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ (b) $\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}=1$ (c) $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=2$ (d) None

59. কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $x+3y=4$ এবং $6x-2y=-7$ হলে, সামান্তরিকটি-
(a) রম্বস (b) সামান্তরিক (c) আয়ত (d) ট্রাপিজিয়াম

60. মূলবিন্দু হতে $12x+5y=7$ রেখার লম্ব দূরত্ব কত?
(a) $\frac{7}{13}$ (b) $\frac{12}{13}$ (c) $\frac{5}{13}$ (d) $\frac{1}{13}$

61. y-অক্ষের উপর লম্ব রেখার ঢাল কত?
(a) 1 (b) 0 (c) অসীম (d) অসংজ্ঞায়িত

62. অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্নকারী সরলরেখাসমূহের ঢাল কত?
(a) 1 (b) -1 (c) ± 1 (d) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

63. y-অক্ষের সাপেক্ষে $(-1,-3)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব কত?
(a) $(1,3)$ (b) $(1,-3)$ (c) $(-1,3)$ (d) কোনটিই নয়

64. $(4, 7)$ বিন্দুগামী এবং y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাটির সমীকরণ-
(a) $y=4$ (b) $x=7$ (c) $x=4$ (d) $y=7$

65. $(1, 2)$ বিন্দু হইতে $x-\sqrt{3}y+4=0$ রেখার ওপর লম্ব অঙ্কন করা হলো। মূলবিন্দু হতে ঐ লম্বের দূরত্ব কত?
(a) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ (d) $\frac{1+\sqrt{3}}{5}$

66. $(-1,3)$ এবং $(4,-2)$ বিন্দুগামী রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কত?
(a) $2\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{2}$ (c) 2 (d) $2\sqrt{2}$

67. A ও B দুইটি স্থির বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3,4)$ ও $(3,6)$, AB বাহুর উপর অংকিত সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর C বিন্দুটি AB রেখার সাপেক্ষে, মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত হলে C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **[RU'06-07]**
(a) $(3+\sqrt{3},5)$ (b) $(3+2\sqrt{3};5)$ (c) $(2+\sqrt{3},5)$ (d) $(3+\sqrt{3},3)$

68. $(2\sqrt{3},90°), (2,120°)$ এবং $(2,60°)$ বিন্দুত্রয় যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হবে-
(a) সমবাহু (b) সমদ্বিবাহু (c) সমকোণী (d) কোনটিই নয়

69. $(5,6)$ বিন্দু হতে 4 একক দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুর কোটি 6 হলে ভুজ কত? **[CU'20-21]**

70. P বিন্দুর কোটি -6; x অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y অক্ষ হতে এর দূরত্বের অর্ধেক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

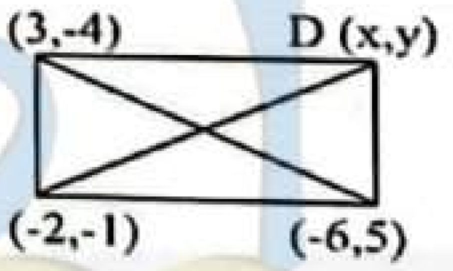
71. $(x,y), (x',y')$ ও $(x-x',y-y')$ বিন্দুগুলো সমরেখ হলে-
(a) $xy=x'y'$ (b) $x'y=xy'$ (c) $\frac{x}{x'}=\frac{y'}{x'}$ (d) $x(x-x')=y(y-y)$

Written

72. $r = 6\cos\theta - 2\sin\theta$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর।
73. $y^2 = 2 - 2x$ কে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর।
74. কোন বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ হলে, কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক কত?
75. x অক্ষ ও $(-5,-7)$ থেকে $(4,k)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর।
76. $(3,-2)$ ও $(2,-3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে x অক্ষ ও y অক্ষ কি অনুপাতে বিভক্ত করে?
77. a এর মান কত হলে, $(a, 2-2a)$, $(1-a, 2a)$ এবং $(-4-a, 6-2a)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হবে?
78. t এর যে কোন মানের জন্য p বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(t+3,\ t-1)$ । p বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।
79. $3x - 4y + 9 = 0$ রেখাটির অক্ষ দুইটির খণ্ডিতাংশ নির্ণয় কর।
80. কোন সরলরেখার অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশ $(4,-2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তবে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
81. $3x + 4y + 5 = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং $(3,4)$ বিন্দু থেকে 10 একক দূরবর্তী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
82. k এর মান কত হলে $5x + 4y - 1 = 0$ এবং $2x + ky - 7 = 0$ রেখা ২টি সমান্তরাল হবে?
83. $(-2,5)$ এবং $(1,-5)$ বিন্দুদ্বয়কে y অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।
84. কোন সঞ্চারপথের সমীকরণটি $(a,0)$ ও $(-a,0)$ বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী?
85. a এর মান কত হলে $2x - y + 3 = 0$ এবং $3x + ay - 2 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে?
86. $P(2,5)$ এবং $Q(-1,3)$ বিন্দুদ্বয় $3x - 2y + 7 = 0$ রেখার কোন পাশে অবস্থিত?
87. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $(6,2)$ বিন্দুতে 2:3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়, সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
88. $3x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ ও $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে α ও p এর মান নির্ণয় কর।
89. $3x - 4y - 7 = 0$ এবং $4x - 3y - 8 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্র্যাক্টিস প্রবলেমের সমাধান

MCQ



01. **Sol^n: (c);** $x = 3 - 6 - (-2) = -1$
    $y = -4 + 5 - (-1) = 2$
02. **Sol^n: (a);** $(-5,7)$ ও $(3,-1)$ এর মধ্যবিন্দু $(-1,3)$
    $(-5,7)$ ও $(3,-1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাংশের ঢাল $m_1 = \frac{-8}{8} = -1$
    ∴ লম্বসমদ্বিখণ্ডক রেখার ঢাল $m_2 = 1$ ∴ লম্বসমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ $y - 3 = 1(x+1) \Rightarrow y - 3 = x + 1$
03. **Sol^n: (b);** একমাত্র এই বিন্দুটি সমীকরণ সিদ্ধ করে।
04. **Ans:** (b) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4^2$
05. **Sol^n: (c);** $\frac{3}{2a} = \frac{7}{-3b} = \frac{-21}{6}; a = -\frac{3}{7}$ এবং $b = \frac{2}{3}$
06. **Sol^n: (b);** ভরকেন্দ্র x অক্ষের উপর হলে এর কোটি $= 0$
    $\therefore \frac{2ap+2aq+2ar}{3} = 0 \Rightarrow 2a(p+q+r) = 0 \therefore p+q+r = 0$
07. **Sol^n: (a);** $\frac{|c|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|c+8|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} \Rightarrow \frac{c}{5} = \frac{c+8}{13}$ বা, $13c = 5c + 40; c = 5$
08. **Sol^n: (c);** $AC = AB + BC = 3BC + BC \therefore \frac{AC}{BC} = \frac{4}{1} \therefore$ এর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{4\times4+2\times1}{4-1}, \frac{-4\times5-4\times1}{4-1}\right) = (6,-8)$
09. **Sol^n: (b);** $4 - 2 + x = 0$ or, $x = -2$; $-7 + 5 + y = 0$ or, $y = 2$
10. **Ans:** (a) $a + b + c = 0$
11. **Sol^n: (b);** $P(x,0)$, $x^2 + 2^2 = (x-6)^2 + 4^2; \Rightarrow x = 4 \therefore P(4,0)$
12. **Sol^n: (b);** $x = 5 + 6 - 2 = 9; y = 6 + 8 - 3 = 11; C(9,11)$

13. **Ans: (b)** বর্গক্ষেত্র

14. **Ans: (c);** $\frac{x+7}{2}=3 \Rightarrow x=-1, \frac{y+3}{2}=5 \Rightarrow y=7; (-1,7)$

15. **Sol^n: (b);** $\Delta ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 0 & 2\end{vmatrix}=2.$ বর্গ একক; ABCD এর ক্ষেত্রফল $=2\times\Delta ABC=4$ বর্গ একক

16. **Sol^n: (b);** $|a|=\sqrt{(a-7^2)+3^2} \Rightarrow 14a=58 \Rightarrow a=\frac{29}{7}$

17. **Sol^n: (b);** অনুপাত $=\left|\frac{2}{-3}\right| \therefore 2:3$ অনুপাতে অন্ত:র্বিভক্ত করে

18. **Sol^n: (b);** $x=\frac{3+6}{2}=\frac{9}{2}; y=\frac{2+8}{2}=5$

19. **Sol^n: (a);** $\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}P & P-2\\ P+3 & P\\ P+2 & P+2\\ P & P-2\end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}(P^2+P^2+5P+6+P^2-4-P^2-P+6-P^2-2P-P^2-2P)=\frac{1}{2}\times(8)=4$ বর্গ একক

20. **Sol^n: (b);** $3x+7y-2=0$ রেখার লম্বরেখার সমীকরণ: $7x-3y+k=0$ ইহা $(2,1)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 7(2)-3(1)+k=0 \Rightarrow k=-11 \therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $7x-3y-11=0$

21. **Sol^n: (c);** $m_1=3, m_2=\frac{1}{3} \therefore \theta=\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\tan^{-1}\frac{\frac{8}{3}}{2}=\tan^{-1}\frac{4}{3}$

22. **Ans: (a)** $x-3y+13=0$

23. **Sol^n: (d);** লম্বের দৈর্ঘ্য $=\left|\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\frac{5\times4+12(-2)-3}{\sqrt{5^2+12^2}}\right|=\left|-\frac{7}{13}\right|=\frac{7}{13}$

24. **Sol^n: (b);** $a+b=0 \Rightarrow a=-b \Rightarrow b=-a$

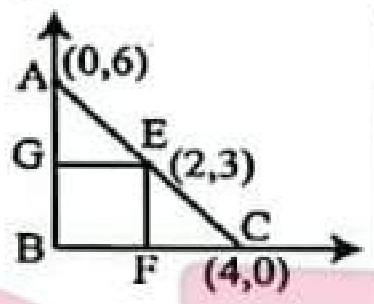
25. **Sol^n: (b);**

ΔABC ও ΔEFC সদৃশ। $\therefore BC=4$

ΔABC ও ΔAGE সদৃশ। $\therefore AB=6$

$\therefore$ A ও C সংযোগকারী রেখার সমীকরণ:

$\frac{x-0}{0-4}=\frac{y-6}{6-0} \Rightarrow 3x+2y-12=0$



Alternative:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \therefore \frac{a+0}{2}=2 \Rightarrow a=4$

$\therefore \frac{0+b}{2}=3 \Rightarrow b=6$

$\therefore \frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1 \Rightarrow 3x+2y-12=0$

26. **Sol^n: (b);** $(1,1)$ এবং $(2,4)$ বিন্দু সংযোগকারী রেখার ঢাল $=\frac{4+1}{2-1}=5$

$\therefore$ এর লম্ব রেখার ঢাল $=-\frac{1}{5} \therefore$ লম্ব রেখার সমীকরণ: $y=-\frac{1}{5}x+c$

যেহেতু $\left(\frac{2+1}{2},\frac{4-1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ বিন্দু দিয়ে যায়

$\therefore \frac{3}{2}=-\frac{1}{5}\times\frac{3}{2}+c \therefore c=\frac{18}{10}=\frac{9}{5} \;\therefore y=-\frac{1}{5}x+\frac{9}{5} \Rightarrow x+5y-9=0$

27. **Sol^n: (b);** $3x+4y-12=0$; $x=0$ বসিয়ে $y=3$; $y=0$ বসিয়ে $x=4 \therefore$ খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{3^2+4^2}=5$

28. **Sol^n: (a);** $(-5,7)$ আর $(-3,-1)$ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-5-3}{2},\frac{7-1}{2}\right)=(-4,3)$

ধরি, নির্ণেয় সমীকরণ, $y=mx+c$

এখন, $(-5,7)$ আর $(-3,-1)$ এর সংযোগকারী রেখার ঢাল $=\frac{7+1}{-5+3}=-4 \therefore$ এর লম্ব রেখার ঢাল $=\frac{1}{4}$

আবার রেখাটি $(-4,3)$ বিন্দু দিয়ে যাবে।

$\therefore 3=\frac{1}{4}\times(-4)+c \Rightarrow c=4 \therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y=\frac{x}{4}+4 \Rightarrow x-4y+16=0$

29. **Sol^n: (a);** $x+y=3 \ldots\ldots(1); y-x=1; (1),(2)$ solve করে $x=1, y=2$

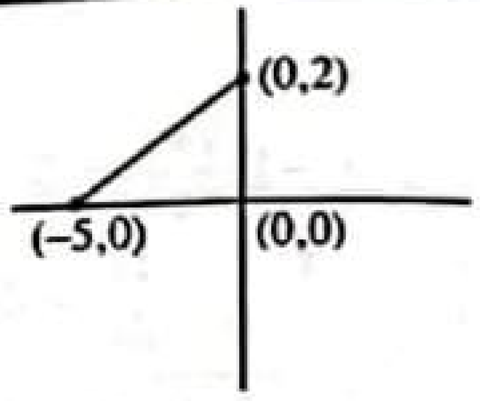
x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $y=2$

30. **Sol^n: (a);** প্রথম সরলরেখার ঢাল $=-\frac{a_1}{b_1}$; দ্বিতীয় সরলরেখার ঢাল $=-\frac{a_2}{b_2}$।

প্রশ্নমতে, রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব। $\therefore \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)=-1$

$\therefore a_1a_2=-b_1b_2 \therefore a_1a_2+b_1b_2=0$

31. **Sol^n: (d);** $2x - 5y + 10 = 0$
$\Rightarrow 2x - 5y = -10 \Rightarrow -\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$
ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5$



32. **Sol^n: (b);** $x = a$; (4,5) বিন্দু দিয়ে যায় বলে, $x = 4 \therefore x - 4 = 0$

33. **Sol^n: (b);** $3x - 4x - 12 = 0 \Rightarrow 3x - 4y = 12 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 0 \therefore$ খণ্ডিত অংশ $4, -3$

34. **Ans:** (a) 1

35. **Ans:** (c) $5x + y + 7 = 0$

36. **Sol^n: (d);** যেহেতু দুটি সমান্তরাল তাই তাদের ছেদ বিন্দু নেই।

37. **Sol^n: (b);** $y = 2$ রেখার ঢাল, $m_1 = 0; x + y - 3$ রেখার ঢাল, $m_2 = 1$
$\therefore \tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 1 \therefore \theta = 45°$

38. **Sol^n: (a);** $5x + 12y = 2$ এবং $5x + 12y + 29 = 0 \therefore$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \left|\frac{29\ \ (-2)}{\sqrt{5^2 + 1\ ^2}}\right| = \left|\frac{31}{13}\right| = \frac{31}{13}$

39. **Ans:** (a) $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$

40. **Sol^n: (b);** $y = mx \Rightarrow m = \tan 120° = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -\sqrt{3}x \Rightarrow y + \sqrt{3}x = 0$

41. **Sol^n: (a);** $2x - 5y = 1 \quad 5x + 5y = 3 \Rightarrow 7x = 4$
$\therefore x = \frac{4}{7} = 5y \Rightarrow \frac{1}{7\times5} = y = \frac{1}{35} \therefore (x, y) = \left(\frac{4}{7}, \frac{1}{35}\right)$ যা প্রথম চতুর্ভাগে।

42. **Sol^n: (a);** $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$

43. **Ans:** (c) $(-1, 0)$

44. **Ans:** (b) $x - y + 8 = 0$

45. **Ans:** (d) $-\frac{4}{5}$

46. **Ans:** (c) 3

47. **Ans:** (a) $a_1b_2 = a_2b_1$

48. **Sol^n: (d);** $(2, -1), (a + 1, a - 3)$ ও $(a + 2, a)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ।
$\therefore \frac{(a+1)-2}{(a-3)-(-1)} = \frac{(a+2)-(a+1)}{a-(a-3)} \Rightarrow \frac{a-1}{a-2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a - 3 = a - 2 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

49. **Sol^n: (a);** $\left(\frac{3.9+5.1}{3+5}, \frac{3.(-12)+5.4}{3+5}\right) = (4, -2)$

50. **Sol^n: (c);** $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ রেখা দুইটির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় হচ্ছে, $\frac{y-2x-1}{\sqrt{1^2+2^2}} = \pm\frac{2y-x-4}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$
$\therefore y + x - 3 = 0$ & $3y - 3x - 5 = 0$
y-অক্ষের ছেদ বিন্দুদ্বয় হচ্ছে, $(0, 3)$ ও $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ $PQ = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$

51. **Sol^n: (c);** $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[-1(5 - 10) + 2(2 - 3) + 1(20 - 15)] = \frac{1}{2}[5 - 2 + 5] = 4$

52. **Sol^n: (d);** বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করায়, $x = \frac{4\times3-5\times3}{3-4} = 3$; $y = \frac{4\times(-1)-2\times3}{3-4} = 10$

53. **Ans: (a);** $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$; x অক্ষের ছেদবিন্দু (4,0) ও y অক্ষের ছেদবিন্দু= (0,5) ∴ক্ষেত্রফল= $\frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$ বর্গ একক

54. **Sol^n: (c);** $44 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ -5 & -8 & 1 \end{vmatrix}$
$\Rightarrow 88 = 3(9 + 8) + x(-5 - 3) + 1(-24 + 45) \Rightarrow 88 = 51 - 8x + 21 \Rightarrow x = -2$

55. **Sol^n: (a);** $BC = \sqrt{(4 + 4)^2} = 8$
$AB = BC \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y + 4)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 4)^2} \Rightarrow (y + 4)^2 - (y - 4)^2 = 0 \Rightarrow y = 0$
$\therefore A(4\sqrt{3}, 0) \therefore AB = BC \Rightarrow x^2 + (0 + 4)^2 = 64 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$

56. **Sol^n: (d);** $\Delta ACB = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & 0 & -b & a \\ 0 & a & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[a^2 + ab]$

57. **Sol^n: (c);** একমাত্র এই বিন্দু থেকেই তিন বাহুর দূরত্ব সমান।

58. **Sol^n: (c);** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ [ধরি]

X ও Y অক্ষের কর্তিত অংশ এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \therefore (\alpha, \beta) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \Rightarrow a = 2\alpha, b = 2\beta \therefore \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 2$

59. **Sol^n: (a);** $m_1m_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{2}\right) = -1 \therefore$ লম্ব। সুতরাং এটি একটি রম্বস।

60. **Sol^n: (a);** $d = \left|\frac{12(0)+5(0)-7}{\sqrt{12^2+5^2}}\right| = \frac{7}{13}$

61. **Ans: (b) 0**

62. **Ans: (c) ± 1**

63. **Ans: (b) $(1, -3)$**

64. **Ans: (c) $x = 4$**

65. **Sol^n: (b);** $x - \sqrt{3y} + 4 = 0$ রেখার লম্বরেখা

$\sqrt{3}x + y + k = 0 \dots\dots\dots$ (i) যা $(1, 2)$ বিন্দুগামী $\therefore \sqrt{3} + 2 + k = 0 \therefore k = -(2 + \sqrt{3})$

$\therefore$ লম্বরেখা $\sqrt{3}x + y - (2 + \sqrt{3}) = 0$ $\therefore$ মূলবিন্দু থেকে এর দূরত্ব, $d = \left|\frac{0+0-(2+\sqrt{3})}{\sqrt{1+3}}\right| = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

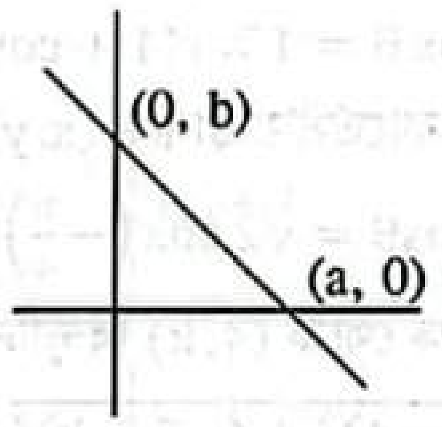
66. **Sol^n: (d);** সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \dots\dots\dots$ (i)

(i) নং $(-1, 3)$ এবং $(4, -2)$ বিন্দুগামী।

$\therefore \frac{-1}{a} + \frac{3}{b} = 1 \dots\dots\dots$ (ii) এবং $\frac{4}{a} + \frac{-2}{b} = 1 \dots\dots\dots$ (iii)

সমাধান করে, $a = 2, b = 2$

$\therefore$ অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশ $= \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$



67. **Sol^n: (a);** ABC সমবাহু ত্রিভুজ,

$\therefore AB = BC = CA,$

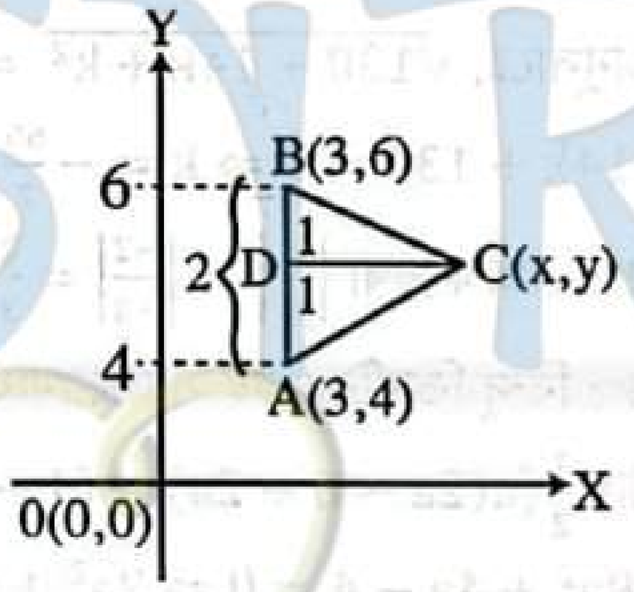
এবং $AB = (6 - 4) = 2$

এখন $CD \perp AB$ হলে, $AD = BD = \frac{2}{2}$

$\therefore \angle ADC = 90°$

$\therefore CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \frac{1}{\sqrt{2^2-1^2}} = \sqrt{3}$

$\therefore C(x, y)$ হবে $C(3 + \sqrt{3}, 4 + 1) = C(3 + \sqrt{3}, 5)$



নোট: AB রেখার সাপেক্ষে, মূলবিন্দুর একই পার্শ্বে অবস্থিত হলে C বিন্দুর স্থানাঙ্ক হত: $C(3 - \sqrt{3}, 4 + 1) = c(3 - \sqrt{3}, 5)$

❖ **Shortcut:** $C(x, y) = C\left\{\frac{3+3}{2} \pm \sqrt{3}\left(\frac{6-4}{2}\right), \left(\frac{6+4}{2} \pm \sqrt{3}\left(\frac{3-3}{2}\right)\right)\right\} = C(3 \pm \sqrt{3}, 5)$

AB রেখার সাপেক্ষে মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত হলে, $C(3 + \sqrt{3},\ 5)$, আর একই পাশে অবস্থিত হলে $C(3 - \sqrt{3}, 5)$ হবে।

68. **Sol^n:** (a); $A(2\sqrt{3}, 90°), B(2, 120°)$ এবং $C(2, 60°)$ হলে,

$AB = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

$= \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 - 2.2\sqrt{3}.2\cos(120° - 90°)} = \sqrt{16 + 12} = 2$

$AC = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 - 2.2\sqrt{3}.2\cos(90° - 60°)} = \sqrt{4} = 2$

$BC = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2.2.2\cos(120° - 60°)} = \sqrt{4} = 2 \therefore AB = AC = BC \therefore$ সমবাহু ত্রিভুজ হবে। **(Ans.)**

69. **Sol^n:** মনে করি, বিন্দুটির ভুজ x।

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(5-x)^2+(6-6)^2}=4 \Rightarrow (5-x)^2=16$

$\Rightarrow 5-x=\pm4 \Rightarrow x=5\pm4 \therefore x=9$ অথবা 1 **(Ans.)**

70. **Sol^n:** ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x,-6) \therefore$ x অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $|-6|=6$

y-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $=|x|$প্রশ্নমতে, $6=\frac{1}{2}|x| \Rightarrow |x|=12 \Rightarrow x=\pm12$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(12,-6)$ বা $(-12,-6)$ **(Ans.)**

71. **Sol^n: (b);** $A(x,y), B(x',y')$ এবং $C(x-x',y-y')$ হলে: $m_{AB}=m_{BC}$ হবে

$\therefore$ যেহেতু বিন্দুগুলো সমরেখ, $\frac{y'-y}{x'-x}=\frac{y-y'-y'}{x-x'-x'} \Rightarrow \frac{y'-y}{x'-x}=\frac{y-2y'}{x-2x'}$

$\Rightarrow x'y-2x'y'-xy+2xy'=xy'-xy-2x'y'+2x'y \Rightarrow xy'=x'y$ **(Ans.)**

Written

72. **Sol^n:** এখন, $r=6\cos\theta-2\sin\theta \Rightarrow r^2=6r\cos\theta-2r\sin\theta$

$\Rightarrow x^2+y^2=6x-2y \therefore x^2+y^2-6x+2y=0$

73. **Sol^n:** এখন, $y^2=1-2x \Rightarrow x^2+y^2=1-2x+x^2 \Rightarrow x^2+y^2=(1-x)^2$

$\Rightarrow r^2=(1-r\cos\theta)^2 \Rightarrow r=1-r\cos\theta$

$\Rightarrow r+r\cos\theta=1 \therefore r(1+\cos\theta)=1$

74. **Sol^n:** ধরি, কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x,y)

$\therefore x=r\cos\theta=\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1 \;\Big|\; y=r\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \therefore$ বিন্দুটি হল $(1,-1)$

75. **Sol^n:** x-অক্ষ থেকে $(4,k)$ বিন্দুটির দূরত্ব $=|k|$ আবার, $(-5,-7)$ থেকে $(4,k)$এর দূরত্ব

$=\sqrt{(-5-4)^2+(-7-k)^2}$

$=\sqrt{81+49+14k+k^2}=\sqrt{130+14k+k^2}$

শর্তানুসারে, $\sqrt{130+14k+k^2}=|k| \Rightarrow k^2+14k+130k=k^2$

$\Rightarrow 14k+130=0 \Rightarrow k=-\frac{65}{7}$ **(Ans)**

76. **Sol^n:** x-অক্ষরেখা $\left|\frac{y_1}{y_2}\right|=\left|\frac{-2}{-3}\right|=\frac{2}{3}=2:3$ অনুপাতে বিভক্ত করে। y-অক্ষরেখা $\left|\frac{x_1}{x_2}\right|=\left|\frac{3}{2}\right|=3:2$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

77. **Sol^n:** বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে, তাদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে।

অর্থাৎ $\frac{1}{2}\{a(2a-6+2a)+(1-a)(6-2a-2+2a)+(-4-a)(2-2a-2a)\}=0$

$\Rightarrow 8a^2+4a-4=0 \Rightarrow 2a^2+a-1=0$

$\Rightarrow 2a^2+2a-a-1=0 \Rightarrow (2a-1)(a+1)=0 \therefore a=-1,\frac{1}{2}$

অথবা, ১ম ও ২য় বিন্দুর ঢাল = ২য় ও ৩য় বিন্দুর ঢাল

$\Rightarrow \frac{2a-2+2a}{1-a-a}=\frac{6-2a-2a}{-4-a-1+a} \Rightarrow \frac{4a-2}{1-2a}=\frac{6-4a}{-5}$

$\Rightarrow -20a+10=6-4a-12a+8a^2$

$\Rightarrow 8a^2+4a-4=0 \Rightarrow 2a^2+a-1=0 \therefore a=-1,\frac{1}{2}$

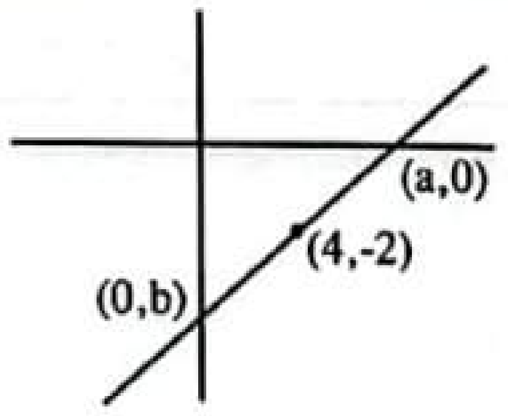
78. **Sol^n:** মনে করি, বিন্দুটি (x,y); $x=t+3,\ y=t-1$;

t প্রতিস্থাপন করে পাই, $x-y=4$

79. **Sol^n:** $3x-4y+9=0 \Rightarrow 3x-4y=-9 \Rightarrow \frac{3x}{-9}-\frac{4y}{-9}=1 \Rightarrow \frac{x}{-3}+\frac{y}{\frac{9}{4}}=1$

$\therefore$ x-অক্ষ হতে খন্ডিত অংশ $=-3$; y-অক্ষ হতে খন্ডিত অংশ $=\frac{9}{4}$

80. **Sol^n:** এখানে মধ্যবিন্দু $(4,-2)$ $\therefore \frac{a}{2}=4$; $\frac{b}{2}=-2$
$\Rightarrow a=8 \Rightarrow b=-4$
$\therefore$ সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x}{8}+\frac{y}{-4}=1$
$\Rightarrow x-2y-8=0$



81. **Sol^n:** মনে করি, রেখাটি $3x+4y+k=0$
$\left|\frac{3.3+4.4+k}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=10 \Rightarrow \frac{25+k}{5}=\pm10$; (+) নিয়ে পাঠ, $k=25$; (−) নিয়ে পাঠ, $k=-75$
$\therefore 3x+4y+25=0$; $3x+4y-75=0$

82. **Sol^n:** এখন, $5x+4y-1=0 \Rightarrow 4y=-5x+1 \therefore y=-\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}$ $\therefore$ ঢাল $=m=-\frac{5}{4}$
আবার, $2x+ky-7=0 \Rightarrow ky=-2x+7 \therefore y=-\frac{2}{k}x+\frac{7}{k}$ এখন, $-\frac{2}{k}=-\frac{5}{4} \therefore k=\frac{8}{5}$

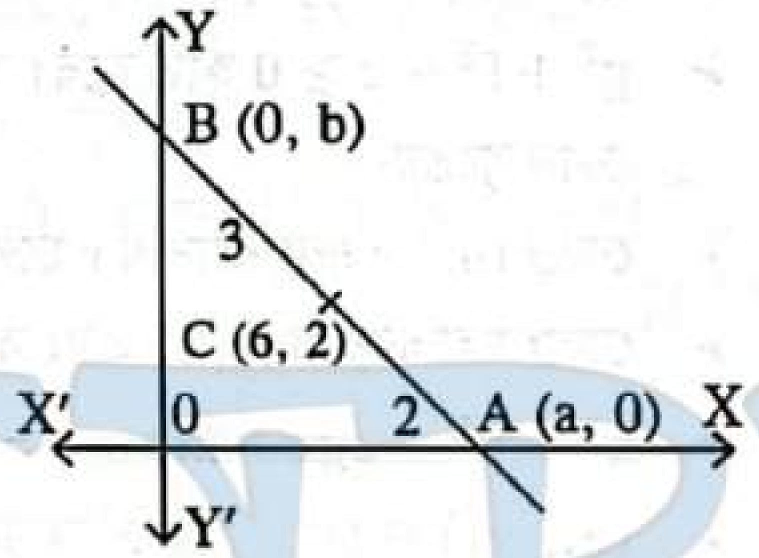
83. **Sol^n:** $(-2,5)\ \underset{k:1}{\overset{(0,y)}{\bullet\!\!\rule[0.5ex]{6em}{0.4pt}\!\!\bullet}}\ (1,-5)$; $0=\frac{k-2}{k+1} \therefore k=2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হবে।

84. **Sol^n:** $\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$
$\Rightarrow (x+a)^2-(x-a)^2=0 \Rightarrow 4ax=0 \therefore x=0$

85. **Sol^n:** $m_1=-\frac{2}{-1}=2$; $m_2=-\frac{3}{a}$; $m_1\times m_2=-1 \Rightarrow 2\times\frac{-3}{a}=-1 \therefore a=6$

86 **Sol^n:** $f(x,y)\equiv 3x-2y+7=0$; $f(2,5)\equiv 3(2)-2(5)+7=3>0$
$f(-1,3)\equiv 3(-1)-2(3)+7=-2<0$ ∴বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

87. **Sol^n:** মনে করি, রেখাটির সমীকরণ: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ……… (i)
রেখাটি x অক্ষকে $A(a,0)$ ও y অক্ষকে $B(0,b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
এখন, AB রেখাটি $C(6,2)$ বিন্দুতে $2:3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।
$\therefore 6=\frac{2\times0+3\times a}{2+3}=\frac{3a}{5} \Rightarrow 3a=30 \therefore a=10$
আবার, $2=\frac{2\times b+3\times0}{2+3} \Rightarrow 2b=10$
$\therefore b=5$ $\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $\frac{x}{10}+\frac{y}{5}=1$



88. **Sol^n:** $3x+\sqrt{3}y+2=0$ …… (i) ; $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ …. (ii)
(i) ও (ii) একই রেখা নির্দেশ করলে, $\frac{3}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}=\frac{2}{-p}$
$\therefore \cos\alpha=\frac{-3}{2}, \sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}\,P}{2}$
$\therefore \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\frac{9p^2}{4}+\frac{3p^2}{4}=3p^2 \Rightarrow p=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
$p=\frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে $\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha=\frac{-1}{2}$ $\therefore$ ৩য় চতুর্ভাগে বলে $\alpha=210°$

89 **Sol^n:** $3x-4y-7=0$ ……… (i); $4x-3y-8=0$ ……… … (ii)
$\therefore a_1a_2+b_1b_2=12+12=24>0$
$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ: $\frac{3x-4y-7}{\sqrt{9+16}}=-\frac{4x-3y-8}{\sqrt{16+9}}$
$\Rightarrow 4x-3y-8+3x-4y-7=0 \Rightarrow 7x-7y-15=0$

> আমি মানে অতি ক্ষুদ্র, আমরা মানে মহাসমুদ্র!
>
> Ryunosuke Satoro

অধ্যায় ০৪

বৃত্ত

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

বৃত্ত: একটি স্থির বিন্দু হতে যে সব বিন্দুর দূরত্ব সমান তাদের সেটকে বৃত্ত বলে। স্থির বিন্দুকে বৃত্তটির কেন্দ্র এবং স্থির দূরত্বকে ইহার ব্যাসার্ধ বলা হয়। মনে রাখতে হবে, বৃত্ত বলতে কেবল পরিধির উপরে বিন্দুগুলোকেই বুঝায়।

- বৃত্ত হওয়ার শর্ত: $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$
  সমীকরণটি বৃত্ত হবে যখন:
  - $\Delta \neq 0$
  - $a = b \neq 0$ অর্থাৎ x^2 এবং y^2 এর সহগ একই হবে।
  - $h = 0$ অর্থাৎ xy যুক্ত কোন পদ থাকবে না।
  - $g^2 + f^2 - c \geq 0$ হতে হবে। অর্থাৎ, $r \geq 0$ হতে হবে।

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$
$$= abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

কোন বৃত্তের-

- কেন্দ্র (h, k) এবং ব্যাসার্ধ r হলে, বৃত্তের সমীকরণ, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
- কেন্দ্র মূলবিন্দুতে (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ r হলে, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = r^2$
- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ হলো বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ যার কেন্দ্র $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
- (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) কোন বৃত্তের একটি ব্যাসের দুইটি প্রান্তবিন্দু হলে বৃত্তের সমীকরণ
  $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

Type–01: বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করার শর্ত

Concept

বৃত্তের সমীকরণ হতে হলে x^2, y^2 এর সহগ সমান হতে হবে কিন্তু 0 হতে পারবে না এবং xy এর সহগ শূন্য হতে হবে অর্থাৎ xy সম্বলিত পদ থাকা যাবে না।

Problems

Example-01: $(x + y - 3)^2 + (ky - 5)(x + 3) = 0$ সমীকরণটি বৃত্ত নির্দেশ করলে k এর মান কত?

[Argi Guccho'20-21, DU' 08-09, 00-01]

(a) −2 (b) 2 (c) −1 (d) 1

Sol^n: (a); $(x + y - 3)^2 + (ky - 5)(x + 3) = 0$

$\Rightarrow 2xy + kxy = 0 \Rightarrow xy(k + 2) = 0$ হবে।$\therefore k + 2 = 0 \therefore k = -2$

[$\therefore$ xy সম্বলিত পদ থাকবে না এবং x^2 ও y^2 এর সহগ সমান হতে হবে $\therefore$ x ও y এর সাথে যুক্ত পদ গুলো আমরা বাদ দিয়ে হিসাব করবো: MCQ এর জন্য।]

Example-02: $ax^2+by^2=c$ সমীকরণটি একটি বৃত্তকে নির্দেশ করবে যদি- **[Ans: c]**

(a) $c=10$ (b) $c=1$ (c) $\frac{a}{b}=1$ (d) $a\neq b$

Example-03: $x^2+y^2=0$ কিসের সমীকরণ? **[Ans: c]**

(a) সরলরেখার সমীকরণ (b) বৃত্তের সমীকরণ (c) বিন্দু বৃত্তের সমীকরণ (d) উপবৃত্তের সমীকরণ

Type–02: বৃত্তের কেন্দ্র, ব্যাসার্ধ, খণ্ডিত অংশ নির্ণয়

Concept

বৃত্তের সমীকরণ যেভাবেই দেওয়া থাকুক না কেন, তা আদর্শ রূপ নিয়েই সব সূত্রের প্রয়োগ করতে হবে। যেমন, $2x^2+2y^2+6x+4y-12=0$ আকারে সমীকরণ দেওয়া থাকলে $x^2+y^2+3x+2y-6=0$ আকারে নিয়ে সূত্রের প্রয়োগ করতে হবে অন্যথায় ভুল উত্তর আসবে।

Problems

Example-04: $3x^2+3y^2-36x+12y-27=0$ বৃত্তের কেন্দ্র, ব্যাসার্ধ, ব্যাস, x-অক্ষ হতে খণ্ডিত অংশ এবং y-অক্ষ হতে খণ্ডিত অংশ নির্ণয় কর। **[DU' 18-19, JU' 18-19, 11-12, 10-11, CU' 18-19]**

Sol^n^: প্রদত্ত বৃত্ত, $3x^2+3y^2-36x+12y-27=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-12x+4y-9=0$

কেন্দ্র $(6,-2)$, ব্যাসার্ধ $=\sqrt{36+4+9}=7 \therefore$ ব্যাস $=2.7=14$

x-অক্ষ হতে খণ্ডিত অংশ $=2\sqrt{(-6)^2+9}=6\sqrt{5}$; y-অক্ষ হতে খণ্ডিত অংশ $=2\sqrt{2^2+9}=2\sqrt{13}$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{x \text{ এর সহগ}}{-2},\frac{y \text{ এর সহগ}}{-2}\right)$ বা, $\left(\frac{2g}{-2},\frac{2f}{-2}\right)$ বা, $(-g,-f)$ ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$; (i) x অক্ষের খণ্ডিতাংশ $=2\sqrt{g^2-c}$ (ii) y অক্ষের খণ্ডিতাংশ $=2\sqrt{f^2-c}$

Example-05: $x^2+y^2-gx=0$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? **[JU'22-23]**

(a) $\frac{1}{8}\pi g^2$ (b) $\frac{1}{4}\pi g^2$ (c) $\frac{1}{2}\pi g^2$ (d) πg^2

Sol^n^: (b); $x^2+y^2-gx=0 \Rightarrow x^2-2x.\frac{g}{2}+\left(\frac{g}{2}\right)^2+y^2-\left(\frac{g}{2}\right)^2=0 \Rightarrow \left(x-\frac{g}{2}\right)^2+y^2-\left(\frac{g}{2}\right)^2=0$

$\therefore \left(x-\frac{g}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{g}{2}\right)^2 \therefore$ কেন্দ্র $\left(\frac{g}{2},0\right)$, ব্যাসার্ধ, $r=\frac{g}{2} \therefore$ ক্ষেত্রফল $=\pi r^2=\pi\left(\frac{g}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\pi g^2$

Example-06: $x^2+y^2-5x=0$ ও $x^2+y^2+3x=0$ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? **[JU'22-23]**

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Sol^n^: (d); $x^2+y^2-5x=0$ এর কেন্দ্র $\equiv\left(\frac{5}{2},0\right)$

$x^2+y^2+3x=0$ এর কেন্দ্র $\equiv\left(-\frac{3}{2},0\right)$

$\therefore$ কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{5}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)=4$ একক।

Example-07: $x^2+y^2-2x+4y+6=0$ বৃত্তের কেন্দ্র কত?

(a) $(1,-2)$ (b) $(-1,-2)$ (c) $(1,\ 2)$ (d) None of these

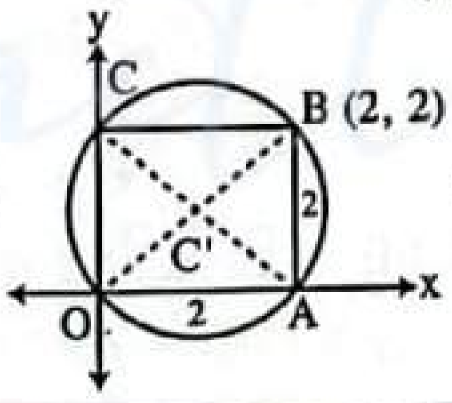
Sol^n^: (d); প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ হতে, $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{1^2+(-2)^2-6}=\sqrt{-1}$

অর্থাৎ, প্রদত্ত বৃত্তটি বাস্তব বৃত্ত নয়, $\therefore$ Option (d) is Correct.

Example-08: 2 একক বাহুবিশিষ্ট OABC একটি বর্গ, OA ও OC কে অক্ষ ধরে অঙ্কিত পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ-

(a) $\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$ (c) 2 (d) $4\sqrt{2}$

Sol^n^: (a);



$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=\frac{1}{2}\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

Example-09: $ax^2 + 2bxy - 2y^2 + 8x + 12y + 6 = 0$ একটি বৃত্ত নির্দেশ করলে এর ব্যাসার্ধ কত?

(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 4

Sol^n: (d); $b = 0$ এবং $a = -2$ হবে $\therefore x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ $\therefore$ ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 3} = 4$

Example-10: বৃত্ত $x^2 + y^2 - 2ky - 4 = 0$ এর একটি ব্যাসের সমীকরণ $2x - 3y + 1 = 0$ হলে k এর মান =?

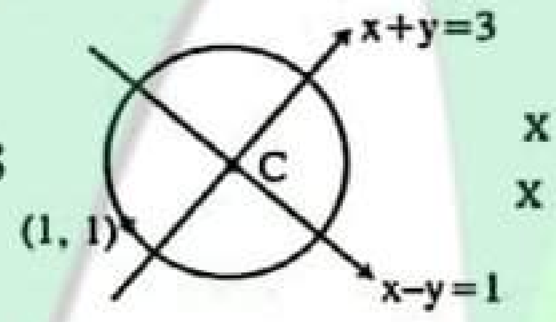
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) −1

Sol^n: (a); প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(0, k)$ যা $2x - 3y + 1 = 0$ রেখার উপরস্থ $\therefore 2 \times 0 - 3 \times k + 1 = 0$ $\therefore k = \frac{1}{3}$

Example-11: যে বৃত্তটি (1,1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার দুটি ব্যাসের সমীকরণ $x - y = 1, x + y = 3$ তার ব্যাসার্ধ হল–

(a) 2 (b) 1 (c) 3 (d) 4

Sol^n: (b);



$$\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \ldots\ldots\ldots (i) \\ x + y &= 3 \ldots\ldots\ldots (ii) \end{aligned}\right\}$$ এর ছেদবিন্দু (2,1)

$\therefore$ (2,1) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2} = 1$

Type–03: বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ থেকে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয়

Concept

- বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ, $x = h + r\cos\theta$; $y = k + r\sin\theta$ [θ পরামিতিক]
- বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ থেকে কার্তেসীয় সমীকরণ, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$ যেখানে, কেন্দ্র $C \equiv (h, k)$ এবং ব্যাসার্ধ = r

Problems

Example-12: একটি বৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক, $x = 2 + 3\cos\theta$ এবং $y = -3 + 3\sin\theta$। বৃত্তের সমীকরণ, কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [JnU'15-16]

Sol^n: $x = 2 + 3\cos\theta \Rightarrow (x - 2) = 3\cos\theta \ldots\ldots\ldots (i)$; $y = -3 + 3\sin\theta \Rightarrow (y + 3) = 3\sin\theta \ldots\ldots\ldots (ii)$

এখন, $(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = (3\cos\theta)^2 + (3\sin\theta)^2 = 3^2$

$\therefore (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$; একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র, $C \equiv (2, -3)$, ব্যাসার্ধ = 3 একক **(Ans.)**

Example-13: $x = a\cos\theta + b\sin\theta, y = a\sin\theta - b\cos\theta$ কোন কনিকের সমীকরণ? [DU'20-21; CU'22-23]

Sol^n: $x = a\cos\theta + b\sin\theta$; $y = a\sin\theta - b\cos\theta$; $x^2 + y^2 = (a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (a\sin\theta - b\cos\theta)^2$

$= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\ \sin\theta\cos\theta - 2ab\ \sin\theta\cos\theta$

$= a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = a^2 + b^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \rightarrow$ বৃত্ত

Type–04: শর্ত সাপেক্ষে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়

- এই টাইপের Math খুবই diversified। তাই Case বুঝে সমস্যার সমাধান করতে হবে।

Case-01: কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ দেওয়া থাকলে

Concept

বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) এবং ব্যাসার্ধ = r হলে বৃত্তের সমীকরণ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Problems

Example-14: বৃত্তের কেন্দ্র (3, 4) ও ব্যাসার্ধ 5 হলে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$ **(Ans.)**

Case-02: কেন্দ্র (h, k) দেওয়া থাকলে এবং বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে

Concept

এক্ষেত্রে বৃত্তের সমীকরণ, $(x-h)^2+(y-k)^2=(x_1-h)^2+(y_1-k)^2$

Problems

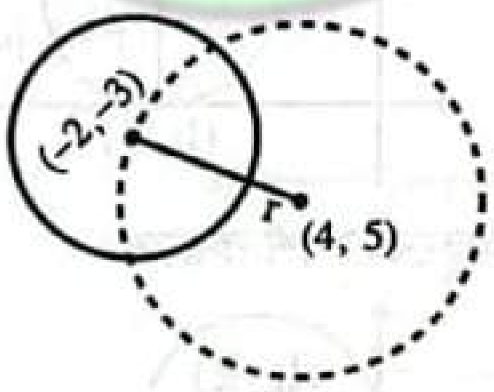
Example-15: বৃত্তের কেন্দ্র (3, 4) ও বৃত্তটি (1, 2) বিন্দুগামী। বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[DU'03-04, JU'10-11]**

Solⁿ: $(x-3)^2+(y-4)^2=(1-3)^2+(2-4)^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=8$ **(Ans.)**

Example-16: $x^2+y^2+4x+6y-12=0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে গমনকারী বৃত্তের কেন্দ্র (4, 5) হলে, তার সমীকরণ কোনটি? **[RU'22-23]**

(a) $x^2+y^2+8x+10y+59=0$
(b) $x^2+y^2-8x-10y+59=0$
(c) $x^2+y^2-8x-10y-59=0$
(d) $x^2+y^2+8x+10y-59=0$

Solⁿ: (c); $x^2+y^2+4x+6y-12=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $\equiv\left(\frac{4}{-2},\frac{6}{-2}\right)\equiv(-2,-3)$



∴ নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=\sqrt{(-2-4)^2+(-3-5)^2}=10$

∴ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x-4)^2+(y-5)^2=10^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-8x-10y+16+25-100=0$

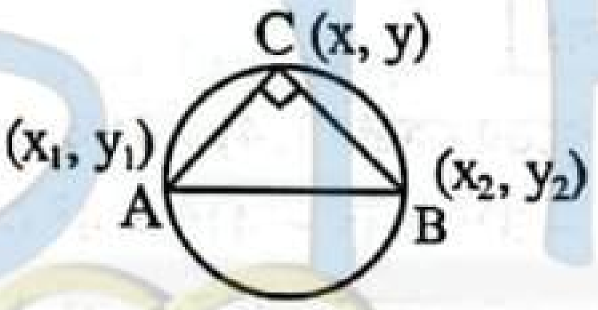
$\therefore x^2+y^2-8x-10y-59=0$

Case-03: ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দেওয়া থাকলে

Concept

ধরি, একটি বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)।

তাহলে চিত্রানুযায়ী $\angle C=90^\circ$ হবে। [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]



$\therefore m_{AC}\times m_{BC}=-1 \Rightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1}\times\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1$

$\therefore \boxed{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0}$ এটিই নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।

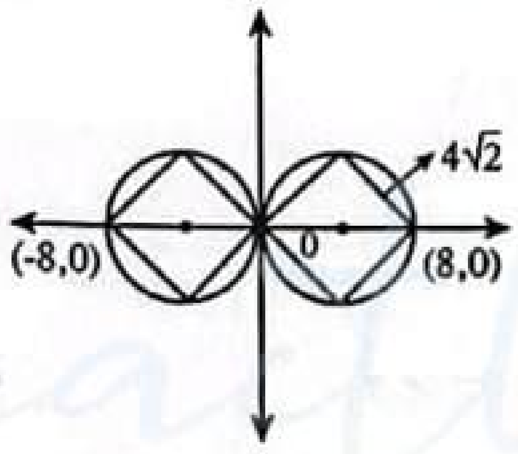
Problems

Example-17: (2, −3), (−6, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[JU'09-10]**

Solⁿ: $(x-2)(x+6)+(y+3)(y-3)=0 \Rightarrow x^2+y^2+4x-21=0$ **(Ans.)**

Example-18: $4\sqrt{2}$ বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গের একটি শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে এবং বিপরীত শীর্ষবিন্দু x অক্ষের উপর অবস্থিত। বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ কী হবে?

Solⁿ:



বাহু, $a=4\sqrt{2}$;

কর্ণ $=a\sqrt{2}=4\sqrt{2}\times\sqrt{2}=8$; ব্যাসের প্রান্তবিন্দু (0, 0) এবং (±8, 0)

বৃত্তের সমীকরণ: $(x-0)(x\pm8)+(y-0)(y-0)=0 \therefore x^2+y^2\pm8x=0$ **(Ans.)**

Example-19: (0, −1) এবং (2,3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তটি x-অক্ষ থেকে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে হবে-

(a) 4　(b) 2　(c) 3　(d) $3\sqrt{2}$

Sol^n: (a); বৃত্তটি হবে: $x(x-2)+(y+1)(y-3)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-2x-2y-3=0 \therefore$ x অক্ষ থেকে ছেদক অংশ $= 2\sqrt{g^2-c} = 2\sqrt{1^2+3} = 4$ **(Ans.)**

Example-20: $(x+4)(x-12)+(y-3)(y+1)=0$ বৃত্তের কেন্দ্র কত?

(a) (2, 4)　(b) (4, 1)　(c) (−4, −1)　(d) (1, 4)

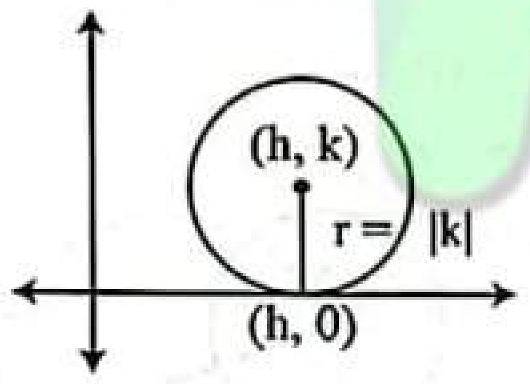
Sol^n: (b); $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1).(y-y_2)=0$

বৃত্তের সাথে তুলনা করে পাই কেন্দ্র $\equiv \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-4+12}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (4,1).$

Case-04: বৃত্তের কেন্দ্র দেওয়া থাকলে এবং বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট অক্ষকে স্পর্শ করলে

Concept

(i) x -অক্ষকে স্পর্শ করলে-

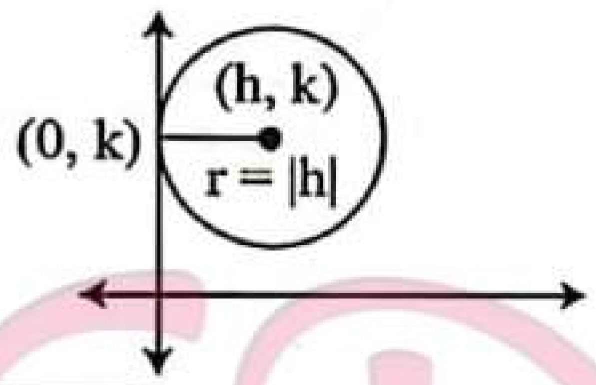


r = |k| [বৃত্তের কেন্দ্রের কোটির পরমমান বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান]

বৃত্তের সমীকরণ, $(x-h)^2+(y-k)^2=k^2$

x অক্ষের স্পর্শবিন্দু (h, 0)

(ii) y-অক্ষকে স্পর্শ করলে-



r = |h| [বৃত্তের কেন্দ্রের ভুজের পরমমান বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান]

বৃত্তের সমীকরণ, $(x-h)^2+(y-k)^2=h^2$

y-অক্ষের স্পর্শবিন্দু (0, k)

Problems

Example-21: বৃত্তের কেন্দ্র (3, 4) এবং তা x অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [DU'11-12, JU'18-19]

Sol^n: $(x-3)^2+(y-4)^2=4^2$ **(Ans.)** [বিঃ দ্রঃ x অক্ষকে স্পর্শ করলে কেন্দ্রের কোটির পরমমান হবে বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান]

Example-22: k এর কোন মানের জন্য $x^2+y^2+kx+2y+25=0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে?

(a) 5　(b) −5　(c) 10　(d) None of these

Sol^n: (c); x অক্ষকে স্পর্শ করবে যদি, $2\sqrt{g^2-c}=0$ হয়

$\Rightarrow \sqrt{\left(-\frac{k}{2}\right)^2-25}=0 \Rightarrow \frac{k^2}{4}=25 \Rightarrow k^2=100 \Rightarrow k=\pm 10 \therefore k=+10$ **(Ans.)**

Case-05: যেকোন একটি অক্ষকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করলে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হলে

Concept

Case-4 এর অনুরূপ।

Problems

Example-23: (3, −1) বিন্দুগামী বৃত্ত x অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [RU'10-11]

Sol^n: কেন্দ্র (2, k) বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2+(y-k)^2=k^2$

$x=3, y=-1$ হলে, $(3-2)^2+(-1-k)^2=k^2 \Rightarrow k=-1 \therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2+(y+1)^2=1^2$ (Ans.)

Case-06: বৃত্ত উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হলে

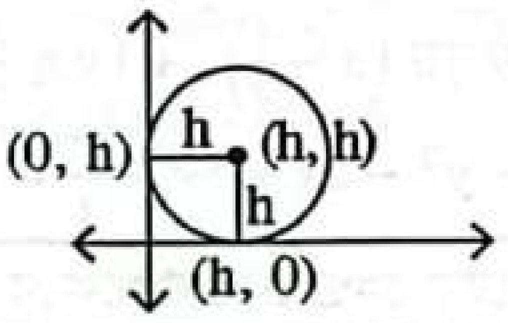
Concept

বৃত্ত উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে-

(i) $r = |h| = |k|$ [বৃত্তের কেন্দ্রের ভুজ এবং কোটি উভয়ই ব্যাসার্ধের সমান]

বৃত্তের সমীকরণ, $(x-h)^2 + (y-h)^2 = h^2$

x অক্ষের স্পর্শবিন্দু $(h, 0)$, y অক্ষের স্পর্শবিন্দু $(0, h)$



Problems

Example-24: $x^2 + y^2 + 8x + 2ky + c = 0$ বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে k এবং c এর মান কত? **[RU'20-21]**

Sol^n: $g = 4, f = k$; বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে $\therefore c = f^2 = g^2 \Rightarrow c = k^2 = 4^2 \therefore k = \pm 4$ এবং $c = 16$ **(Ans.)**

Example-25: বৃত্ত x ও y উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(6, 3)$ বিন্দুগামী হলে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[JU' 09-10]**

Sol^n: উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে কেন্দ্রের ভুজ = কেন্দ্রের কোটি = বৃত্তের ব্যাসার্ধ

$\therefore (x-h)^2 + (y-h)^2 = h^2$; বৃত্তটি $(6, 3)$ বিন্দুগামী হলে, $(6-h)^2 + (3-h)^2 = h^2$

$\Rightarrow h = 15, 3$ $\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3^2$; $(x-15)^2 + (y-15)^2 = 15^2$ **(Ans.)**

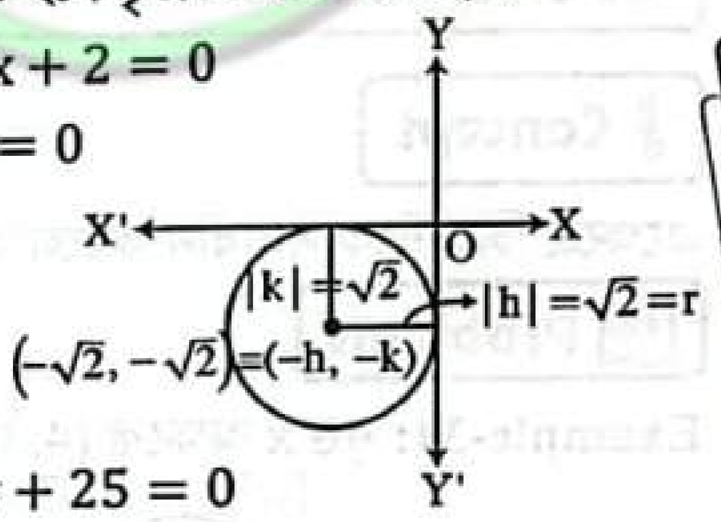
Example-26: একটি বৃত্ত অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করে যায় কেন্দ্র তৃতীয় চতুর্ভাগে এ অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $\sqrt{2}$ হলে বৃত্তটির সমীকরণ হবে–

(a) $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + \sqrt{2}y + \sqrt{2}x + 2 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 2 = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$

Sol^n: (a); চিত্র হতে নির্ণেয় বৃত্তটি হবে, $(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2$

$= (\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$ **(Ans.)**



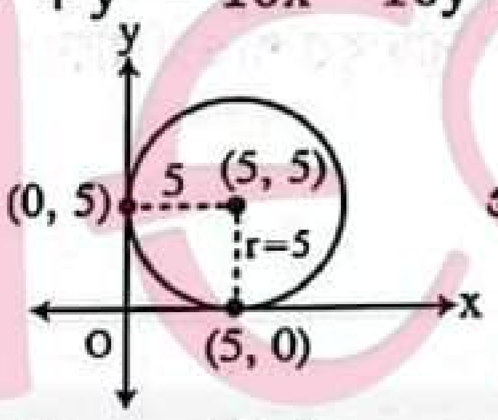
Example-27: $(5, 0)$ এবং $(0, 5)$ বিন্দুতে অক্ষদ্বয়কে স্পর্শকারী বৃত্তের সমীকরণ–

(a) $x^2 + y^2 + 10x - 10y - 25 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

Sol^n: (d); $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

Process-01:



প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় হতে যে কোন 1টি বিন্দু দ্বারা Option test (সিদ্ধ হবে) করলে Option (d) is correct.

Process-02: চিত্র হতে নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র $(5,5)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 5$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্ত: $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

Case-07: বৃত্ত উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং কোন অক্ষের সমান্তরাল রেখাকে স্পর্শ করে

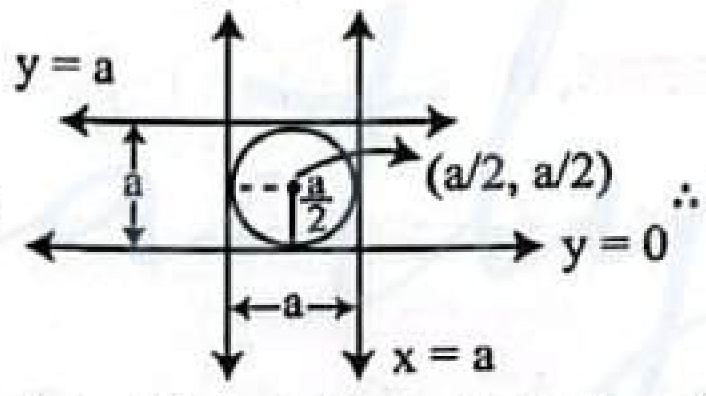
Concept

এক্ষেত্রে চিত্র এঁকে সমাধান করতে হবে।

Problems

Example-28: একটি বৃত্ত $x = 0, y = 0, x = a$ এবং $y = a$ সমীকরণগুলিকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ- **[RU'19-20]**

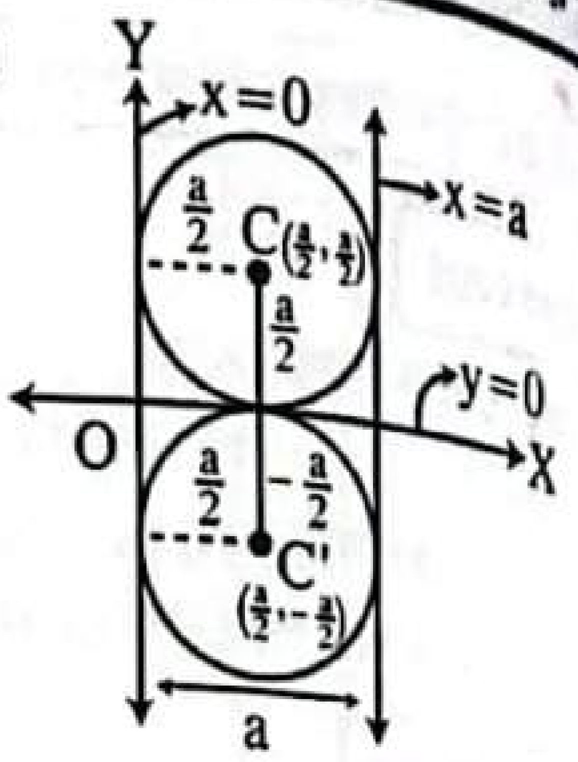
Sol^n:



$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - ax - ay + \frac{a^2}{4} = 0$

$\therefore 4(x^2 + y^2) - 4a(x+y) + a^2 = 0$ **(Ans.)**

Example-29: $x = 0, y = 0, x = a$ রেখা তিনটিকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।



Solⁿ: ∴ নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}\right)$

এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{a}{2}$ হবে।

∴ নির্ণেয় বৃত্ত $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y \pm \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - ax \pm ay + \frac{a^2}{4} = 0$

Case-08: বৃত্তের কেন্দ্র দেওয়া থাকলে এবং বৃত্ত যে কোন রেখাকে স্পর্শ করলে

Concept

বৃত্তের কেন্দ্র থেকে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান।

Problems

Example-30: $3x + 4y - 5 = 0$ রেখাটি (3, 4) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে। বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [CU'07-08]

Solⁿ: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$; $r = \left|\frac{3\times3+4\times4-5}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \frac{20}{5} = 4$ ∴ $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4^2$ (Ans.)

Case-09: বৃত্ত একটি অক্ষকে স্পর্শ করলে এবং অপর অক্ষকে ছেদ করলে

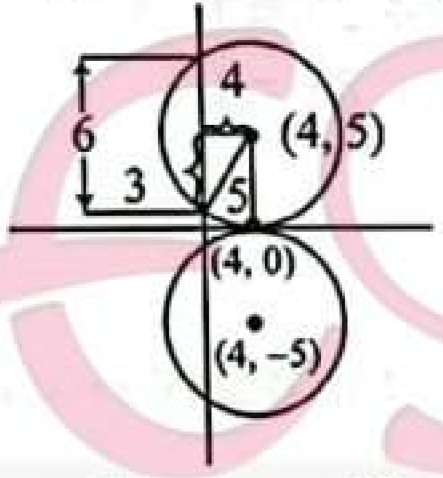
Concept

এক্ষেত্রে চিত্র এঁকে সমাধান করলে অনেক সহজে করা যাবে।

Problems

Example-31: বৃত্ত x অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ জ্যা খণ্ডিত করে। বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ:



কেন্দ্র (4, 5) ; ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ একক এরূপ দুটি বৃত্ত পাওয়া যাবে।

∴ $(x-4)^2 + (y \pm 5)^2 = 5^2$ (Ans.)

Case-10: বৃত্ত উভয় অক্ষকে ছেদ করলে এবং মূলবিন্দুগামী হলে

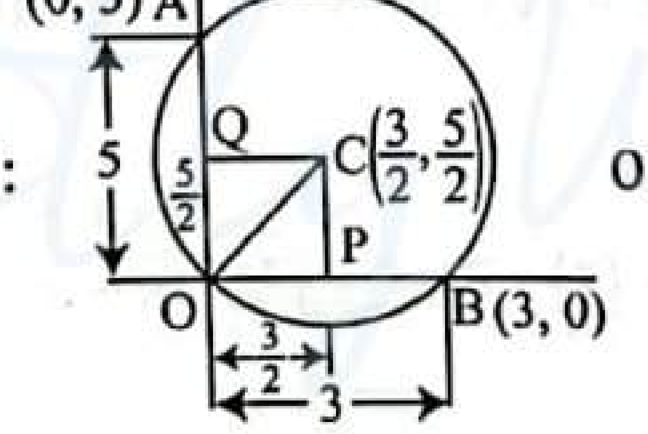
Concept

Case-09 এর অনুরূপ

Problems

Example-32: মূলবিন্দুগামী একটি বৃত্ত দুই অক্ষকে ছেদ করে এবং x ও y অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে যথাক্রমে 3 ও 5 একক অংশ ছেদ করে। বৃত্তটির সমীকরণ বের কর।

Solⁿ:



$OP = \frac{3}{2}; CP = OQ = \frac{5}{2}$ ∴ কেন্দ্র $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$; ব্যাসার্ধ, $OC = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{2}}$ একক

∴ বৃত্তের সমীকরণ: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{2} \Rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{17}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$ (Ans)

Note: মূলবিন্দুগামী বৃত্তের আদর্শ সমীকরণে $c = 0$ হয়।]

বিকল্প: B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 0)$; A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 5)$; A ও B একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ: $x(x-3) + y(y-5) = 0 \therefore x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$

- **Shortcut:** মূলবিন্দুগামী একটি বৃত্ত ধনাত্মক x ও y অক্ষ হতে যথাক্রমে 'm' ও 'n' অংশ খণ্ডন করলে বৃত্তটির সমীকরণ $\boxed{x^2 + y^2 - mx - ny = 0}$ ঋণাত্মক x ও y অক্ষ হলে উক্ত সমীকরণের m ও n এর ঋণাত্মক মান বসাতে হবে।

Case-11: বৃত্ত তিনটি নিৰ্দিষ্ট বিন্দুগামী হলে

Concept

Process-01: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য,

(i) ধরি, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

(ii) (1) নং বৃত্তটি A, B, C বিন্দুগুলো দিয়ে যায় তাই বিন্দুগুলো দ্বারা সিদ্ধ করলে g, f এবং c যুক্ত 3 টি সমীকরণ পাওয়া যাবে।

(iii) উক্ত সমীকরণগুলো সমাধান করলে g, f, c এর মান নির্ণয় করা যাবে।

(iv) g, f এবং c এর মান (1) নং সমীকরণে বসালে বৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

Process-02: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ বিন্দুত্রয় দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ হবে:

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)}{(x-x_1)(y_1-y_2)-(y-y_1)(x_1-x_2)} = \frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)+(y_3-y_1)(y_3-y_2)}{(x_3-x_1)(y_1-y_2)-(y_3-y_1)(x_1-x_2)}$$

Problems

Example-33: $(2, 1), (10, 1), (2, -5)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: Process-1: মনে করি, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

(i) বৃত্তটি (2, 1) বিন্দুগামী হলে, $2^2 + 1^2 + 2.g.2 + 2.f.1 + c = 0 \therefore 4g + 2f + c = -5 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) বৃত্তটি (10, 1) বিন্দুগামী হলে, $10^2 + 1^2 + 2.g.10 + 2.f.1 + c = 0 \therefore 20g + 2f + c = -101 \ldots\ldots\ldots (iii)$

(i) বৃত্তটি (2, −5) বিন্দুগামী হলে, $2^2 + (-5)^2 + 2.g.(2) + 2.f.(-5) + c = 0 \therefore 4g - 10f + c = -29 \ldots\ldots\ldots (iv)$

(ii), (iii) ও (iv) সমাধান করে পাই, $g = -6, f = 2, c = 15 \therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ ((i) হতে), $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 15 = 0$ **(Ans.)**

Process-2: $\frac{(x-2)(x-10)+(y-1)(y-1)}{(x-2)(1-1)-(y-1)(2-10)} = \frac{(2-2)(2-1)+(-5-1)(-5-1)}{(2-2)(1-1)-(-5-1)(2-10)} \Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 4y + 15 = 0$ **(Ans.)**

Case-12: বৃত্তের কেন্দ্র কোনো নির্দিষ্ট রেখার উপর এবং বৃত্তটি দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে

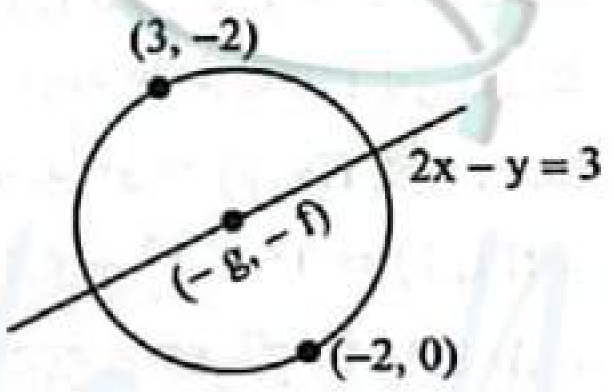
Concept

এক্ষেত্রে বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ধরে সমাধান করতে হবে। [Example দ্রষ্টব্য]

Problems

Example-34: $2x - y = 3$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, -2)$ ও $(-2, 0)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **[CU' 13-14]**

Sol^n: মনে করি, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$



(i) নং বৃত্তটি $(-2, 0)$ বিন্দুগামী $\therefore 4 + 0 - 4g + 0 + c = 0$

$\therefore 4g - c = 4 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) নং বৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দুগামী $\therefore 9 + 4 + 6g - 4f + c = 0$

$\therefore 6g - 4f + c = -13 \ldots\ldots\ldots (iii)$

বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$, $2x - y = 3$ এর উপর অবস্থিত $\therefore -2g + f = 3 \ldots\ldots\ldots (iv)$

(ii), (iii), (iv) সমাধান করে পাই, $g = \frac{3}{2}, f = 6, c = 2$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2.\frac{3}{2}x + 2.6.y + 2 = 0 \therefore x^2 + y^2 + 3x + 12y + 2 = 0$ **(Ans.)**

Case-13: কোনো নির্দিষ্ট অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে

Concept

- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর থাকলে $f = 0$
- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর থাকলে $g = 0$
- বৃত্ত মূলবিন্দুগামী হলে, $c = 0$

Problems

Example-35: $(3, 1)$ এবং $(-4, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [JU'19-20]

Solⁿ: মনে করি, বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2fy + c = 0$ ……… (i)

[y অক্ষের উপর কেন্দ্র থাকায় $g = 0$]

(i) বৃত্তটি (3, 1) বিন্দুগামী। $\therefore 3^2 + 1^2 + 2.f.1 + c = 0 \Rightarrow 2f + c = -10$ ……… (ii)

আবার, (i) বৃত্তটি $(-4, 1)$ বিন্দুগামী। $\therefore (-4)^2 + 1^2 + 2.f(1) + c = 0 \Rightarrow 2f + c = -17$ ……… (iii)

(ii) ও (iii) একত্রে সত্য হওয়া অসম্ভব কারণ তাহলে -10 এবং -17 সমান হয়ে যাবে।

∴ এরকম কোন বৃত্ত আঁকা অসম্ভব। ∴ প্রশ্নের শর্ত পূরণ করবে এরূপ কোন বৃত্তের অস্তিত্ব নেই।

Example-36: y-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত মূলবিন্দু এবং (p, q) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ …… (i)

(i) বৃত্তটির কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত। $\therefore g = 0$

বৃত্তটি মূলবিন্দু (0,0) ও (p, q) বিন্দুগামী। $\therefore 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$ এবং $p^2 + q^2 + 2qf + 0 = 0 \Rightarrow f = -\frac{p^2+q^2}{2q}$

(i) এ g, f ও c এর মান বসিয়ে পাই, $x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{p^2+q^2}{2q}\right)y = 0 \therefore q(x^2 + y^2) = (p^2 + q^2)y$ **(Ans.)**

Type–05: বৃত্তের ব্যাসের একটি প্রান্তবিন্দু দেওয়া থাকলে অপর প্রান্তবিন্দু নির্ণয়

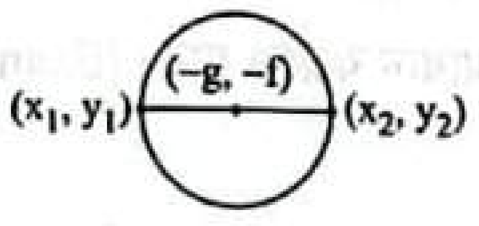
Concept

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $\equiv (-g, -f)$।

বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু (x_1, y_1) হলে, অপর প্রান্তবিন্দু $(x_2, y_2) \equiv (-2g - x_1, -2f - y_1)$

$\frac{x_1+x_2}{2} = -g \therefore \boxed{x_2 = -2g - x_1}$

$\frac{y_1+y_2}{2} = -f \therefore \boxed{y_2 = -2f - y_1}$



Problems

Example-37: দেখাও যে, A(1, 1) বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত। A বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Solⁿ: ধরি, $f(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$

$\therefore f(1, 1) = 1^2 + 1^2 + 4.1 + 6.1 - 12 = 1 + 1 + 4 + 6 - 12 = 0$

∴ A(1, 1) বিন্দুটি প্রদত্ত বৃত্তের উপর অবস্থিত। ২য় অংশ: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $= \left(\frac{4}{-2}, \frac{6}{-2}\right) = (-2, -3)$

ধরি, A(1, 1) বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দু $B(\alpha, \beta)$. $\therefore \frac{1+\alpha}{2} = -2 \Rightarrow 1 + \alpha = -4$

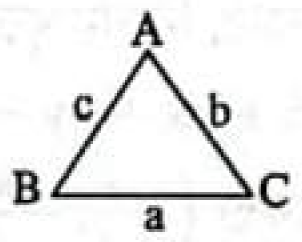
$\Rightarrow \alpha = -5$ এবং $\frac{1+\beta}{2} = -3 \Rightarrow 1 + \beta = -6 \Rightarrow \beta = -7 \therefore$ ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-5, -7)$ **(Ans.)**

Type–06: পরিবৃত্ত সংক্রান্ত

Concept

একটি বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে বৃত্ত আঁকলে উক্ত বৃত্তটি ঐ বর্গের পরিবৃত্ত হবে।

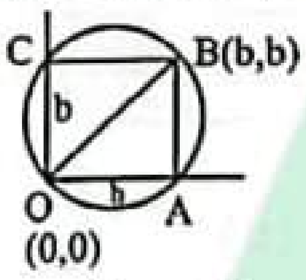
ত্রিভুজের সাইন সূত্রানুযায়ী, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ যেখানে, R = ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ



Problems

Example-38: b বাহুবিশিষ্ট OABC একটি বর্গ। OA ও OC কে অক্ষ ধরে বর্গটির পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

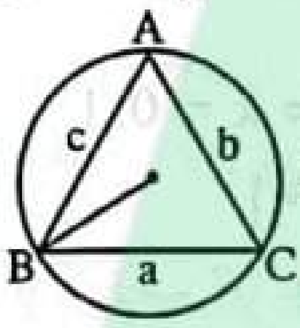
Solⁿ:



$(x-0)(x-b)+(y-0)(y-b)=0 \Rightarrow x^2+y^2=b(x+y)$

Example-39: $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ বৃত্তে অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Solⁿ:



কেন্দ্র = $(-g,-f)=(2,-3)$ ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{(-2)^2+(3)^2-(-3)}=4$ একক

সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ, $\alpha = 60°$; সাইন সূত্র হতে $\frac{a}{\sin\alpha}=2r \Rightarrow a=2\times4\sin60°=8\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ একক

ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}.(4\sqrt{3})^2=12\sqrt{3}$ বর্গ একক **(Ans.)**

Type–07: ছেদবিন্দুগামী বৃত্ত সংক্রান্ত

Concept

A.R. Khalifa এর নিয়মানুযায়ী-

- $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্ত এবং $ax+by+c=0$ সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ:
  $(x^2+y^2+2gx+2fy+c)+k\,(ax+by+c)=0$
- দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ বললে, আগে সাধারণ জ্যা (x^2 ও y^2 এর সহগদ্বয়কে 1 রেখে বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ বিয়োগ করলে সাধারণ জ্যায়ের সমীকরণ পাওয়া যাবে।) এর সমীকরণ বের করে নিতে হবে। এরপর (i) নং নিয়ম apply করলে সমস্যা সমাধান সহজ হয়। অথবা, $\boxed{\text{১ম বৃত্তের সমীকরণ} + k\,(\text{২য় বৃত্তের সমীকরণ}) = 0}$ দ্বারাও সমস্যা সমাধান করা যায়।

Problems

Example-40: $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ বৃত্ত ও $2x+3y+1=0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দুগামী।

Solⁿ: $x^2+y^2-2x-4y-4+k\,(2x+3y+1)=0$ যা, (0, 0) বিন্দুগামী।

$\therefore -4+k=0 \therefore k=4 \therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2+6x+8y=0$ **(Ans.)**

Example-41: নিচের কোন বৃত্তটি $x^2+y^2=2ax$ এবং $x^2+y^2=2by$ বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র $bx-ay=2ab$ রেখার উপর অবস্থিত? **[RU'22-23]**

(a) $x^2+y^2+3ax+by=0$
(b) $x^2+y^2-3ax+by=0$
(c) $x^2+y^2-3ax-by=0$
(d) $x^2+y^2+3ax-by=0$

Solⁿ: (b); $x^2+y^2=2ax$ ……… (i) এবং $x^2+y^2=2by$ এখন, (i) − (ii) $\Rightarrow 2ax-2by=0 \therefore ax-by=0$

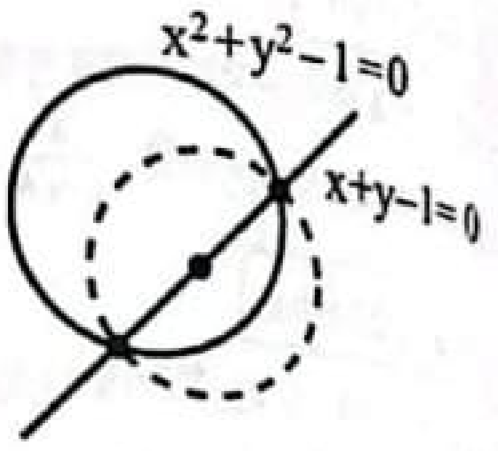
এখন, নির্ণেয় বৃত্ত: $x^2+y^2-2ax+k(ax-by)=0 \Rightarrow x^2+y^2+(ak-2a)x-bky=0$ ……… (iii)

$\therefore$ কেন্দ্র $\equiv\left(-\frac{ak-2a}{2},\frac{bk}{2}\right)\equiv\left(\frac{2a-ak}{2},\frac{bk}{2}\right)$ বিন্দুটি $bx-ay=2ab$ এর উপর অবস্থিত। $\therefore b\cdot\frac{2a-ak}{2}-a\cdot\frac{bk}{2}=2ab$

$\Rightarrow 2ab-abk-abk-4ab=0 \Rightarrow k=-1$

$k=-1$, (iii) এ বসিয়ে, $x^2+y^2+(-a-2a)x+by=0 \therefore x^2+y^2-3ax+by=0$ **(Ans.)**

Example-42: $x^2+y^2=1$ বৃত্তের $x+y-1=0$ সরলরেখা দ্বারা খণ্ডিত জ্যা-কে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় ক [RU'19-20]



Solⁿ: মনে করি, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2-1+k(x+y-1)=0$ ……… (i)

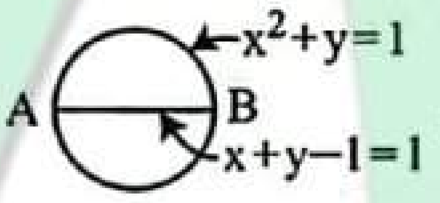
$\Rightarrow x^2+y^2+kx+ky-k-1=0$ ……… (ii)

(ii) বৃত্তের কেন্দ্র $\left(-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}\right)$, $x+y-1=0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore -\frac{k}{2}-\frac{k}{2}-1=0 \therefore k=-1$

(i) -এ k এর মান বসালে পাই, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2-1+(-1)(x+y-1)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-1-x-y+1=0 \therefore x^2+y^2-x-y=0$ **(Ans.)**

বিকল্প: 

; $x^2+y^2=1$ ……… (i); $x+y-1=0$; $y=1-x$ ……… (ii)

(i) ও (ii) সমাধান করে পাই,

$(x)^2+(1-x)^2=1 \Rightarrow x^2+x^2-2x+1=1 \Rightarrow 2x^2-2x=0 \Rightarrow 2x(x-1)=0 \Rightarrow x=0,1$

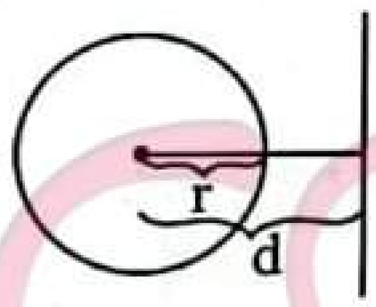
এখন, $x=0$ হলে, $y=1$ এবং $x=1$ হলে, $y=0 \therefore A\equiv(0,1);\ B\equiv(1,0)$ [ব্যাসের প্রান্তবিন্দু]

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-0)(x-1)+(y-1)(y-0)=0 \Rightarrow x^2-x+y^2-y=0 \Rightarrow x^2+y^2-x-y=0$ (Ans.)

Type–08: সরলরেখা বৃত্তকে স্পর্শ করে সম্পর্কিত

Concept

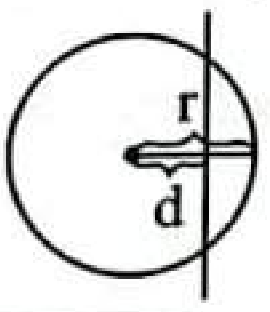
কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং কেন্দ্র থেকে কোনো সরলরেখার লম্ব দূরত্ব d হলে-

➤ 

$r<d$ হলে, রেখাটি বাহিরে অবস্থিত।

➤ 

$r=d$ হলে, রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক।

➤ 

$r>d$ হলে, রেখাটি বৃত্তকে ছেদ করেছে।

Problems

Example-43: (4, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং $5x-12y+3=0$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে এমন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [DU'19-20]

Solⁿ: $r=\left|\frac{5(4)-12(3)+3}{\sqrt{5^2+12^2}}\right|=\left|\frac{-13}{13}\right|=1 \therefore (x-4)^2+(y-3)^2=1^2 \Rightarrow x^2+y^2-8x-6y+24=0$ (Ans.)

Example-44: $3x+4y=k$ রেখাটি $x^2+y^2=10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। k -এর মান কত? [DU'21-22; CU'20-21]

(a) 8, −30 (b) −8, 30 (c) −10, 40 (d) 10, −40

সমাধান: (c); $x^2+y^2-10x=0$ বৃত্তটির কেন্দ্র $\left(\frac{-10}{-2},0\right)=(5,0)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r=5$

কেন্দ্র হতে রেখাটির লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\Rightarrow \frac{|3\cdot5+4\cdot0-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5 \Rightarrow |-k+15|=25$

$\Rightarrow -k+15=\pm25 \Rightarrow k=15\pm25 \therefore k=40,-10$

Example-45: c এর মান কত হলে $4x + 3y + c = 0$ সরলরেখা $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক হবে? **[RU' 09-10]**

Sol^n: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -2)$ ও ব্যাসার্ধ = 5 একক $\therefore \left|\frac{4.3+3(-2)+c}{5}\right| = 5 \Rightarrow c = \pm 25 - 6 = -31, 19$ **(Ans.)**

Example-46: $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি-

(a) $a^2m^2 - 2al = 1$ (b) $a^2m^2 + 2al = 1$ (c) $a^2m^2 - al = 0$ (d) a & b উভয়ই

Sol^n: (b); $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(a, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ = a

$\therefore lx + my - 1 = 0$ রেখা, প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হলে, $\left|\frac{la+m\cdot 0-1}{\sqrt{l^2+m^2}}\right| = a \Rightarrow (a \cdot l - 1)^2 = a^2(l^2 + m^2) \Rightarrow a^2m^2 + 2al = 1$

Type–09: কোন রেখার উপর লম্ব, সমান্তরাল বা অন্য কোন শর্তযুক্ত বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়

Concept

(i) প্রথমে লম্ব/ সমান্তরাল রেখার সমীকরণ লিখতে হবে (বা অন্য শর্তযুক্ত সমীকরণ লিখতে হবে)

(ii) এরপর কেন্দ্র থেকে উক্ত রেখার লম্ব দুরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ শর্ত ব্যবহার করে প্রয়োজনীয় ইচ্ছামূলক ধ্রুবকের মান নির্ণয় করলে স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

Problems

Example-47: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত যে সকল স্পর্শক $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং সমান্তরাল তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$; $C(-g, -f) \equiv (1, 2)$ $\therefore r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 4} = 3$

$3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ: $4x + 3y + k = 0$ ……… (i)

$C(1, 2)$ থেকে (i) নং রেখার দূরত্ব $\frac{|4.1+3.2+k|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 3 \Rightarrow 10 + k = \pm 15 \therefore k = \pm 15 - 10$; $k = 5, -25$

$\therefore$ স্পর্শক: $4x + 3y + 5 = 0$ **(Ans.)** ; $4x + 3y - 25 = 0$ **(Ans.)**

আবার, $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $3x - 4y + k = 0$ …………… (ii)

$C(1, 2)$ থেকে (ii) নং রেখার লম্ব দূরত্ব, $\frac{|3.1-4.2+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 3 \Rightarrow |k - 5| = 15 \Rightarrow k - 5 = \pm 15$

$\Rightarrow k = 5 \pm 15 \therefore k = 20, -10 \therefore$ স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ: $3x - 4y + 20 = 0; 3x - 4y - 10 = 0$ **(Ans.)**

Example-48: $x - 3y = c$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$ এর স্পর্শক হলে স্পর্শকটি কর্তৃক x অক্ষের খণ্ডিত অংশ কত একক হবে?

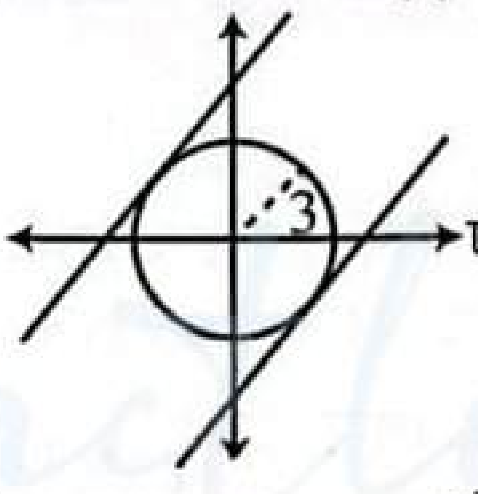
Sol^n: বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -4)$ ও ব্যাসার্ধ = $\sqrt{3^2 + (-4)^2 - 15} = \sqrt{10}$ একক

এখন, স্পর্শকের সমীকরণ, $\frac{x}{c} - \frac{3y}{c} = 1 \therefore$ স্পর্শকটির x অক্ষের খণ্ডিতাংশ = c

বৃত্তের কেন্দ্র হতে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব = ব্যাসার্ধ $\Rightarrow \left|\frac{3+12-c}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}\right| = \sqrt{10} \Rightarrow c - 15 = \pm 10 \therefore c = 25, 5$ **(Ans.)**

Example-49: $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তের স্পর্শক x-অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে, স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? **[RU'22-23]**

(a) $x + y \pm 3\sqrt{2} = 0$ (b) $x - y \pm 3\sqrt{2} = 0$ (c) $x + y \pm 2\sqrt{3} = 0$ (d) $x - y \pm 2\sqrt{3} = 0$

Sol^n: (b); 

ঢাল, $m = \tan 45° = 1$; সরলরেখাটির সমীকরণ হবে, $y = x + c \therefore x - y + c = 0$

আমরা জানি, বৃত্তের কেন্দ্র হতে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান।

$\therefore \frac{|c|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3 \Rightarrow |c| = 3\sqrt{2} \Rightarrow c = \pm 3\sqrt{2}$ $\therefore$স্পর্শকের সমীকরণ $x - y \pm 3\sqrt{2} = 0$

Example-50: $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক অক্ষদ্বয় হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। স্পর্শকের সমীকরণ বের কর।

Solⁿ: $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$

$C \equiv (-g, -f) \equiv (-2, 4)$; $r = \sqrt{2^2 + (-4)^2 - 2} = 3\sqrt{2}$

ধরি, স্পর্শকের সমীকরণ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $[a = b]$

$\Rightarrow x + y = a \dots\dots\dots (i)$

$(-2, 4)$ হতে (i) রেখার লম্ব দূরত্ব

$\frac{|-2+4-a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow 2 - a = \pm 6$

$\Rightarrow a = 2 \mp 6 = -4, 8$

[Ans: $x + y = 8,\ x + y + 4 = 0$]

Example-51: বৃত্ত $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ এর স্পর্শকগুলোর সমীকরণ বের কর যারা অক্ষদ্বয়কে সমান ও বিপরীত চিহ্নে ছেদ করে।

Solⁿ: ধরি, $\frac{x}{a} - \frac{y}{a} = 1$ স্পর্শকের সমীকরণ বা, $x - y - a = 0$

$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 2^2 + 4^2 - 2 = 18$

$\Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = (3\sqrt{2})^2$

$\therefore$ কেন্দ্র $(-2, 4)$ ও ব্যাসার্ধ $3\sqrt{2}$ একক $\therefore \left|\frac{-2-4-a}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = 3\sqrt{2}$

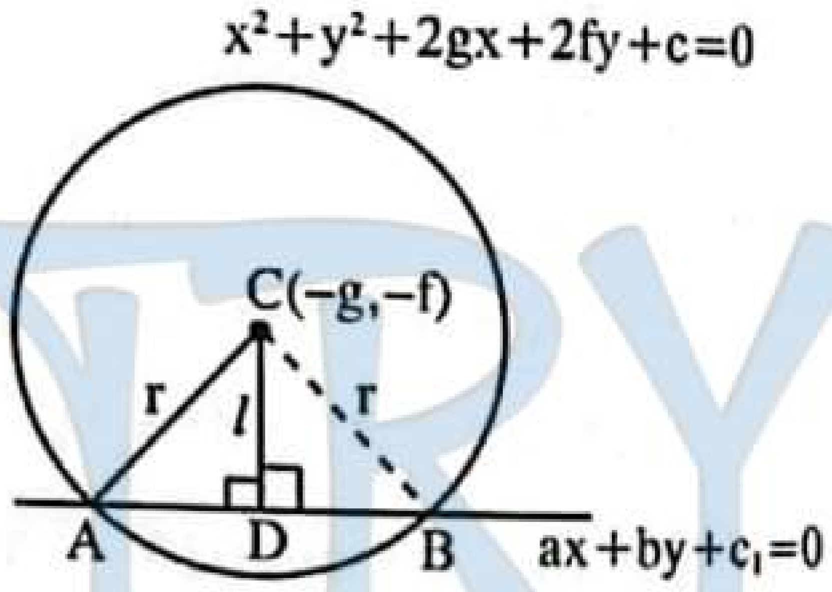
$\Rightarrow |a + 6| = 6 \Rightarrow (a + 6) = \pm 6 \therefore a = 0, -12$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ হলো, $x - y = 0$ ও $x - y + 12 = 0$ (Ans.)

Type–10: বৃত্তের জ্যা-এর দৈর্ঘ্য/সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

Case-1: বৃত্তের জ্যা-এর সমীকরণ দেওয়া থাকলে জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়

Concept



$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র $C(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

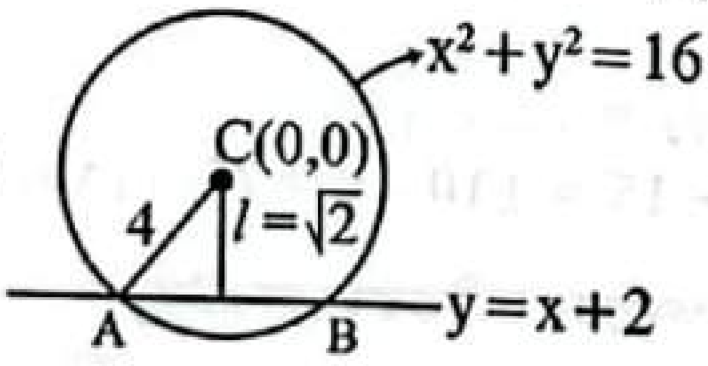
বৃত্তের কেন্দ্র C থেকে জ্যা-এর লম্ব দূরত্ব, $CD = l = \frac{|-ag-bf+c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

এখন, $AD = \sqrt{r^2 - l^2}$ তাহলে জ্যা-এর দৈর্ঘ্য, $\boxed{AB = 2AD = 2\sqrt{r^2 - l^2}}$

Problems

Example-52: $y = x + 2$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তে যে জ্যা উৎপন্ন করে সেটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [JU'22-23]

Solⁿ:



$x^2 + y^2 = 16$

$\Rightarrow x^2 + (x + 2)^2 = 16 \Rightarrow 2x^2 + 4x + 4 = 16$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 6 = 0 \therefore x = -1 \pm \sqrt{7}$

$\therefore$ দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{7})^2} = 2\sqrt{14}$ একক।

বিকল্প: $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের কেন্দ্র $C(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = 4$ একক।

জ্যা-এর কেন্দ্র $C(0, 0)$ হতে AB $[x - y + 2 = 0]$ এর লম্ব দূরত্ব, $l = \left|\frac{0-0+2}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2}$ একক

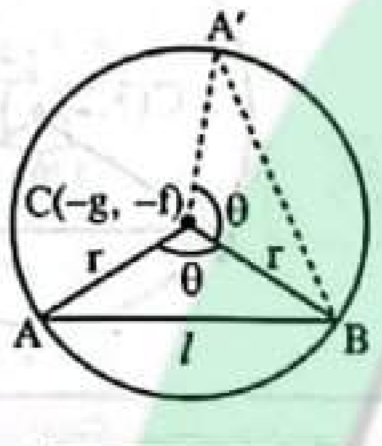
$\therefore$ AB জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{r^2 - l^2} = 2\sqrt{4^2 - (\sqrt{2})^2}$ $\therefore s = 2\sqrt{14}$ একক।

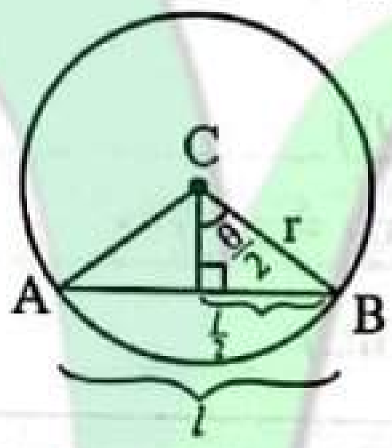
Case-2: জ্যা-এর দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ দেওয়া থাকলে জ্যা-এর দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ নির্ণয়

Concept

দৈর্ঘ্য নির্ণয়: এখানে, AB জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $= l$ [ধরি] বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$

AB জ্যা-টি বৃত্তের কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, $\cos\theta = \frac{r^2+r^2-l^2}{2.r.r}$ [ত্রিভুজের cosine Law] এখান থেকে l নির্ণয় করা যাবে।





$\Rightarrow \frac{l}{2} = r\sin\frac{\theta}{2} \therefore \boxed{l = 2r\sin\frac{\theta}{2}}$

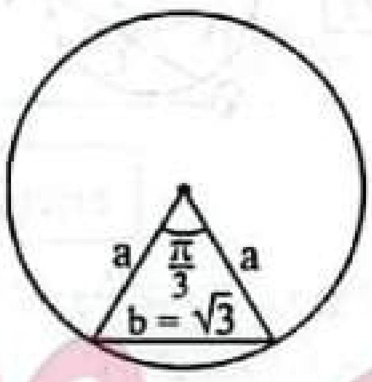
সমীকরণ নির্ণয়: সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের সাথে অপর একটি শর্ত জানা থাকা লাগবে।

[Example দেখলে বিষয়টি পরিষ্কার হবে]

Problems

Example-53: $\sqrt{3}$ একক দৈর্ঘ্যের একটি জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে $\frac{\pi}{3}$ কোণ উৎপন্ন করলে বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [GST'20-21]

Sol^n:



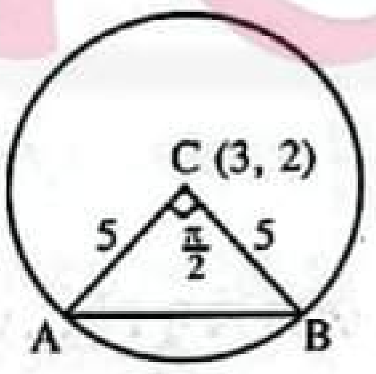
$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2+a^2-b^2}{2a^2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2a^2-(\sqrt{3})^2}{2a^2}$

$\Rightarrow a^2 = 2a^2 - 3 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3} \therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi a^2 = \pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi$ বর্গ একক

Example-54: $(x-3)^2+(y-2)^2 = 25$ বৃত্তের একটি জ্যা কেন্দ্রে $\frac{\pi}{2}$ কোণ তৈরি করে। জ্যা-টির দৈর্ঘ্য কত একক? [GST'22-23]

(a) $5\sqrt{3}$ (b) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (c) $5\sqrt{2}$ (d) $7\sqrt{3}$

Sol^n: (c);



$(x-3)^2+(y-2)^2 = 25 = 5^2$; বৃত্তের কেন্দ্র $C(3,\ 2)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = 5$

এখানে কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\angle ACB = \frac{\pi}{2} \therefore \Delta ABC$ সমকোণী এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ $5 =$ একক

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 2 \times 5^2 \therefore AB = 5\sqrt{2}$ একক।

Example-55: একটি বৃত্তের সমীকরণ হল $2x^2 + 2y^2 = 25, 5$ একক দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে কত রেডিয়ান কোণ তৈরি করবে? [SUST'05-06]

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

Sol^n: (d); $l = 2r\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow 5 = 2\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} \therefore \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ (Ans.)

বিকল্প: $l = 2r\sin\frac{\theta}{2} \therefore \theta = 2\sin^{-1}\frac{l}{2r}$

$\Rightarrow$ উৎপন্ন কোণ $= 2\sin^{-1}\frac{\text{জ্যা-এর দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের ব্যাস}} = 2\sin^{-1}\left(\frac{5}{2\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)}\right) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$ (Ans.)

Example-56: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ বৃত্তের উপরস্থ $(1, 2)$ বিন্দুগামী একটি জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে $120°$ কোণ উৎপন্ন করে। জ্যা-টির দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C\,(3, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 - 9} = 2$ একক।

কেন্দ্রে $\theta = 120°$ কোণ উৎপন্নকারী জ্যা-এর দৈর্ঘ্য, $l = 2r\sin\frac{\theta}{2} = 2 \times 2\sin\left(\frac{120°}{2}\right) = 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore l = 2\sqrt{3}$ একক।

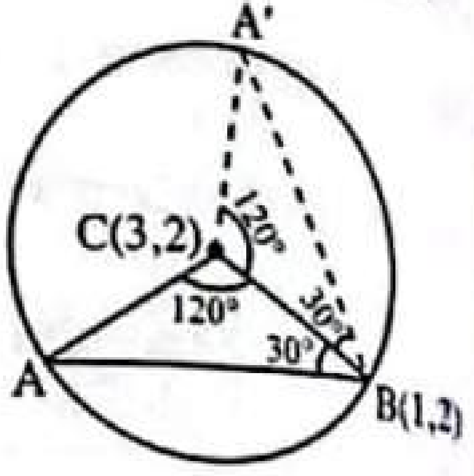
এখন, CB রেখার ঢাল, $m_{CB} = \frac{2-2}{3-1} = 0 = m_1$ (ধরি) ; AB (বা A′B) রেখার ঢাল $= m_2$ (ধরি)

AB (বা A′B) ও CB এর মধ্যবর্তী কোণ, $\theta_1 = 30°$

$[\because AC = CB = r \therefore \angle CAB = \angle CBA = \frac{180°-120°}{2} = 30°]$

এখন, $\tan\theta_1 = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow \tan 30° = \pm\frac{0 - m_2}{1 + 0.m_2} \therefore m_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

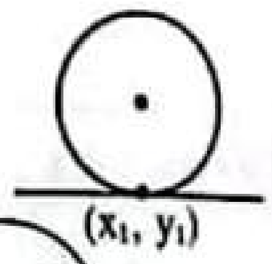
$\therefore$ AB (A′B) রেখার সমীকরণ, $y - 2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1)$ **(Ans.)**

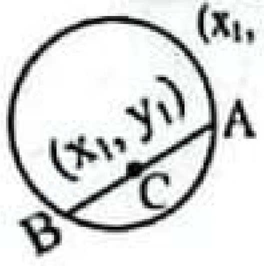


Type–11: বৃত্তের কোন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু দেওয়া থাকলে তা থেকে জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয়

Concept

- বৃত্তের সমীকরণ $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ হলে এবং এর উপরস্থ একটি বিন্দু (x_1, y_1) হলে উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $T = xx_1 + yy_1 + 2g\frac{x+x_1}{2} + 2f\frac{y+y_1}{2} + c = 0$
- বৃত্তের সমীকরণে (x_1, y_1) বসালে পাই, $S_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$, এখন, একটি বৃত্তের AB জ্যা-এর মধ্য বিন্দু $C\,(x_1, y_1)$ হলে উক্ত জ্যা-এর সমীকরণ $\boxed{T = S_1}$





Problems

Example-57: $x^2 + y^2 = 144$ বৃত্তের যে জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $(4,\ -6)$ এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$ ও $(4, -6)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= -\frac{3}{2}$

$\therefore$ জ্যা-এর সমীকরণ, $y + 6 = \frac{2}{3}(x - 4) \Rightarrow 2x - 3y - 26 = 0$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $x^2 + y^2 = 144$ এর জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $(4, -6)$ হলে জ্যা-এর সমীকরণ $\boxed{T = S_1}$

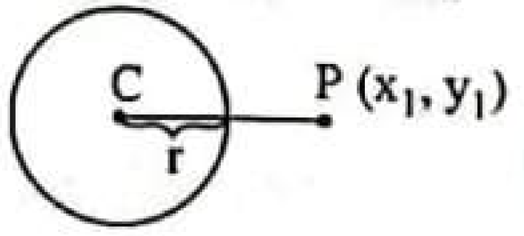
$x.4 + y(-6) - 144 = 4^2 + (-6)^2 - 144 \Rightarrow 4x - 6y = 52 \therefore 2x - 3y - 26 = 0$

Type–12: বৃত্তের সাপেক্ষে বিন্দুর অবস্থান

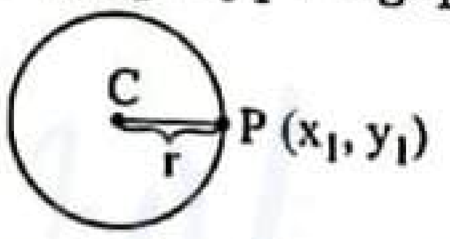
Concept

কোনো বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর ব্যাসার্ধ r ও কেন্দ্র $C(-g, -f)$ হলে, কোন বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এর অবস্থান-

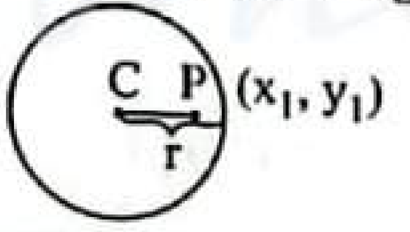
- বৃত্তের বাইরে যখন $CP > r$ বা, $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c > 0$



- বৃত্তের উপরে যখন $CP = r$ বা, $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$



- বৃত্তের ভিতরে যখন $CP < r$ বা, $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c < 0$



Problems

Example-58: (3, 5) বিন্দুটি $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 4 = 0$ বৃত্তের উপরে, ভেতরে না বাহিরে অবস্থিত? **[KU'16-17]**

Sol^n: $2.3^2 + 2.5^2 + 3.3 + 5.5 - 4 = 98 > 0$ ∴ বৃত্তের বাহিরে অবস্থিত। **(Ans.)**

Example-59: কোনো শর্ত সাপেক্ষে $(-1, 2)$ বিন্দুটি, $x^2 + y^2 - 2x + 2y + c = 0$ বৃত্তের ভিতরে অবস্থান করবে? **[SUST'15-16]**

(a) $c = 11$ (b) $c = 0$ (c) $c = -11$ (d) $c < -11$

Sol^n: (d); ভিতরে অবস্থান করলে, $\sqrt{(-1)^2 + 2^2 - 2(-1) + 2(2) + c} < 0$

$\Rightarrow \sqrt{1 + 4 + 2 + 4 + c} < 0 \Rightarrow \sqrt{11 + c} < 0 \Rightarrow 11 + c < 0 \therefore c < -11$ **(Ans.)**

Type–13: বৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়

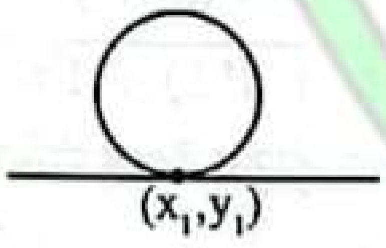
Concept

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

$xx_1 + yy_1 + 2g\left(\frac{x+x_1}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+y_1}{2}\right) + c = 0$

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

সব ধরনের কনিক-এর জন্য এই সূত্রটি প্রযোজ্য।



Shortcut

[x^2 এর পরিবর্তে xx_1, y^2 এর পরিবর্তে yy_1 , x এর পরিবর্তে $\frac{x+x_1}{2}$, y এর পরিবর্তে $\frac{y+y_1}{2}$ বসাতে হবে] [সমীকরণে xy থাকলে (i.e. −conics) এর পরিবর্তে $\frac{xy_1+yx_1}{2}$ বসাতে হবে]

Problems

Example-60: $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের (3, 4) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ কত?

Sol^n: (3, 4) বিন্দুটি বৃত্তের উপরস্থ একটি বিন্দু। সুতরাং (3, 4) বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ: $x.3 + y.4 = 25$

$\therefore 3x + 4y = 25$ **(Ans.)**

Example-61: $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$ বৃত্তের উপরস্থ (1, 2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? **[JU'22-23]**

(a) $x - 5y + 3 = 0$ (b) $5x - 2y - 3 = 0$ (c) $5x - y - 3 = 0$ (d) $2x - 5y + 3 = 0$

Sol^n: (c); $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$ বৃত্তে, কেন্দ্র $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, ব্যাসার্ধ $= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4} - 2} = \sqrt{\frac{34-8}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$

$\therefore$ (1, 2) বিন্দুতে অভিলম্ব, $\frac{y-2}{x-1} = \frac{2-\frac{5}{2}}{1+\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{y-2}{x-1} = \frac{\frac{4-5}{2}}{\frac{2+3}{2}} \Rightarrow \frac{y-2}{x-1} = \frac{-1}{5} \Rightarrow 5y - 10 = 1 - x \therefore x + 5y - 11 = 0$

$\therefore$ (1, 2) বিন্দুতে স্পর্শক, $5x - y + k = 0$ ∴ (1,2) গামী হবে স্পর্শক। $\therefore 5.1 - 2 + k = 0 \therefore k = -3$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $5x - y - 3 = 0$

Example-62: $x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের 2 ভুজ বিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $x^2 + y^2 - 20 = 0$ বৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দুটি $\equiv (2, \beta)$ হলে $\therefore 4 + \beta^2 - 20 = 0 \therefore \beta = \pm 4$ ∴ বিন্দুটি $\equiv (2, \pm 4)$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শক $\equiv x(2) + y(\pm 4) - 20 = 0 \Rightarrow x \pm 2y - 10 = 0$ **(Ans.)**

Type–14: বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু হতে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

দৈর্ঘ্য নির্ণয়:

- বৃত্তের বহিঃস্থ (x_1, y_1) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$
- আদর্শ রূপে দেয়া না থাকলে অবশ্যই আদর্শ রূপে এনে সূত্র প্রয়োগ করতে হবে। [অর্থাৎ x^2 এবং y^2 এর সহগ 1 বানাতে হবে।]

সমীকরণ নির্ণয়:

- ➢ বহিঃস্থ বিন্দুগামী m ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ লিখতে হবে। বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) হলে স্পর্শকের সমীকরণ $[y - y_1 = m(x - x_1)]$
- ➢ রেখাটি স্পর্শক হবে যদি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে রেখার লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ হয়। [একটি Example দেখলে Clear হবে]

Problems

Example-63: বৃত্তের কেন্দ্র (1, 2) মূলবিন্দু থেকে বৃত্তটির উপর অঙ্কিত একটি স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2 একক হলে- [JU'19-20]

(a) বৃত্ত y-অক্ষকে স্পর্শ করে (b) ব্যাসার্ধ = 1.5 (c) ব্যাসার্ধ = 2 (d) বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে

Sol^n: (a); মূলবিন্দু হতে বৃত্তটির উপর অঙ্কিত স্পর্শক এর দৈর্ঘ্য, $d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$

$\Rightarrow 2 = \sqrt{0+0+0+0+c} \therefore c = 4; f = -2 \therefore f^2 - c = 4 - 4 = 0 \therefore c = f^2 \therefore$ y-অক্ষকে স্পর্শ করে।

Example-64: $3x^2 + 3y^2 + 6x + 9y + 12 = 0$ বৃত্তে (1, 1) বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [RU' 09-10]

Sol^n: $3x^2 + 3y^2 + 6x + 9y + 12 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$

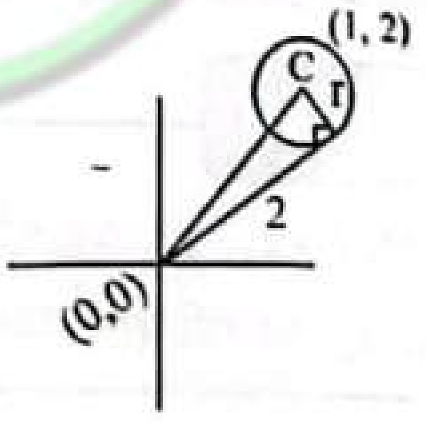
$\therefore$ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{1^2 + 1^2 + 2(1) + 3(1) + 4} = \sqrt{11}$ একক **(Ans.)**

Example-65: মূলবিন্দু থেকে (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2 একক। বৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? [RU' 09-10]

Sol^n: $r^2 + 2^2 = \left(\sqrt{1^2 + 2^2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$

$\therefore$ সমীকরণ, $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ **(Ans.)**



বিকল্প: ধরি, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

প্রশ্নমতে, $2 = \sqrt{0 + c} \Rightarrow c = 2^2 = 4$

$g = -1, f = -2 \therefore$ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ **(Ans.)**

Example-66: $(-4, 3)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তের অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Sol^n: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র (2, 3) এবং ব্যাসার্ধ = 5 একক

$(-4, 3)$ বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ, $y - 3 = m(x + 4) \Rightarrow mx - y + 4m + 3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

(i) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হলে, $\frac{2m-3+4m+3}{\sqrt{m^2+1}} = \pm 5 \Rightarrow 36m^2 = 25(m^2+1) \Rightarrow 11m^2 = 25 \Rightarrow m^2 = \frac{25}{11} \Rightarrow m = \pm\frac{5}{\sqrt{11}}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 3 = \pm\frac{5}{\sqrt{11}}(x + 4)$

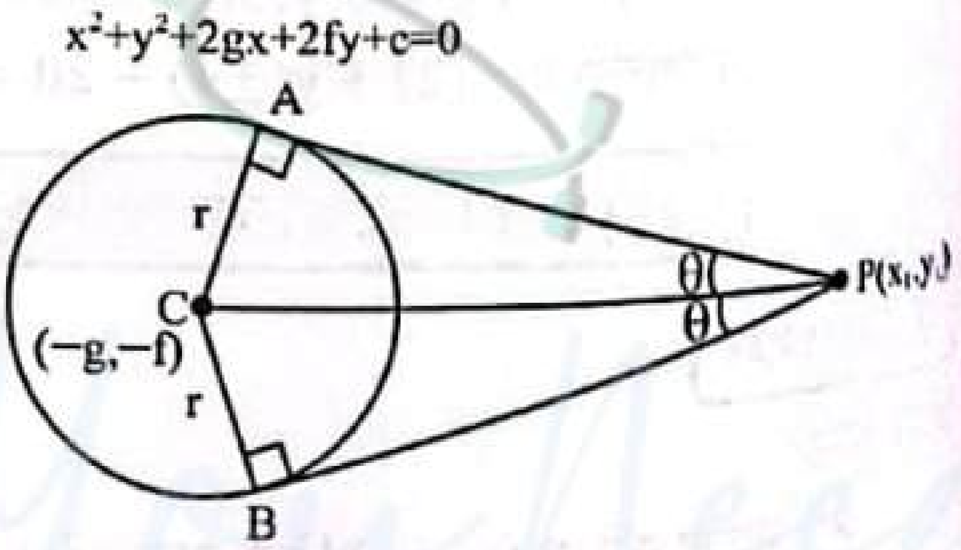
$\therefore$ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4)^2 + 3^2 - 4(-4) - 6(3) - 12} = \sqrt{11}$ একক **(Ans.)**

Type–15: কোন বহিঃস্থ বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$; বৃত্তের কেন্দ্র $C(-g, -f)$ এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} \therefore CA = CB = r$

ΔACP সমকোণী $[\angle CAP = 90°]$



এখন, $\angle APC = \theta$ হলে, $\angle APB = 2\theta = P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\tan\theta = \frac{CA}{PA} \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{CA}{PA}$

যেখানে, $PA = PB = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c} =$ বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু হতে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য।

তাহলে, স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ

$$= 2\theta = 2\tan^{-1}\frac{CA}{PA} = 2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{g^2+f^2-c}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}}\right) = 2\tan^{-1}\left(\frac{r}{\sqrt{S_1}}\right)$$

Problems

Example-67: $(-5,4)$ হতে $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

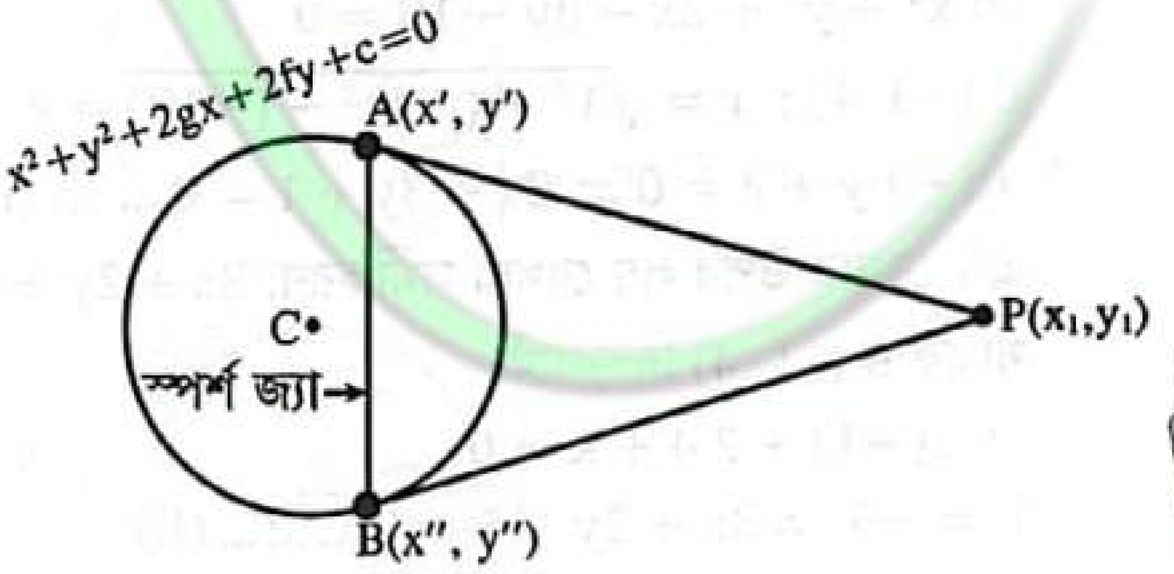
Sol^n: বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2-1}=2$ একক

বহিঃস্থ $(-5,4)$ বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{S_1}=\sqrt{(-5)^2+4^2-2(-5)-4(4)+1}=6$ একক

$\therefore$ স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $=2\tan^{-1}\frac{r}{\sqrt{S_1}}=2\tan^{-1}\frac{2}{6}=2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ **(Ans.)**

Type–16: স্পর্শ জ্যা সংক্রান্ত

Concept



স্পর্শ জ্যা: কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু হতে বৃত্তের উপর যে দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায় সেই দুইটি স্পর্শকের বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে স্পর্শ জ্যা বলে। চিত্রে, AB স্পর্শ জ্যা। বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এবং বহিঃস্থ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(x_1,y_1)$ হলে, স্পর্শ জ্যা-এর সমীকরণ $\boxed{xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0}$

বা, $\boxed{T=0}$

প্রমাণ: বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু $P(x_1,y_1)$ হতে বৃত্তের উপর অঙ্কিত দুইটি স্পর্শক বৃত্তকে যথাক্রমে $A(x',y')$ এবং $B(x'',y'')$ বিন্দুতে স্পর্শ করে [ধরি]। তাহলে, AB স্পর্শ জ্যা।

এখন, $A(x',y')$ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ, $xx'+yy'+g(x+x')+f(y+y')+c=0$ ……… (i)

আবার, $B(x'',y'')$ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ, $xx''+yy''+g(x+x'')+f(y+y'')+c=0$ ……… (ii)

(i) ও (ii) নং রেখাটি (x_1,y_1) বিন্দুগামী $\therefore x_1x'+y_1y'+g(x_1+x')+f(y_1+y')+c=0$ ……… (iii)

এবং $x_1x''+y_1y''+g(x_1+x'')+f(y_1+y'')+c=0$ ……… (iv)

(iii) এর (x',y') [অথবা (iv) এর (x'',y'')] এর পরিবর্তে (x,y) বসালে পাই, $x_1x+y_1y+g(x_1+x)+f(y_1+y)+c=0$

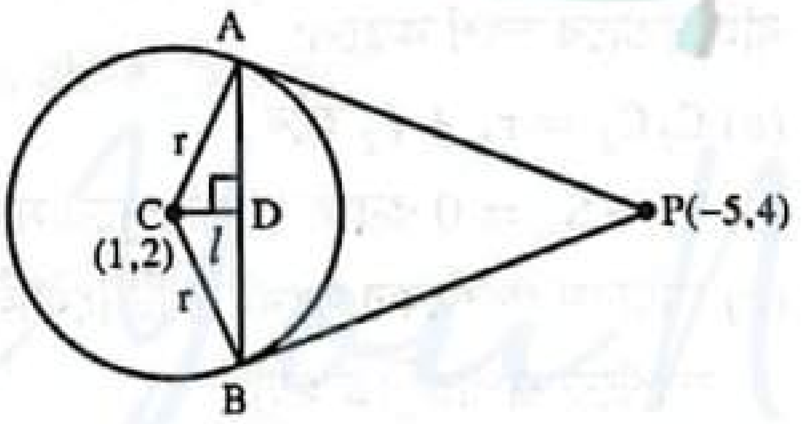
বা, $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ ……… (v)

(v) নং সমীকরণটি একটি সরলরেখার সমীকরণ (x ও y একঘাত) যা $A(x',y')$ এবং $B(x'',y'')$ দুইটি বিন্দু দিয়েই সিদ্ধ হয়। [(iii) ও (iv) সমীকরণ দ্রষ্টব্য] $\therefore$ (v) নং সমীকরণই AB স্পর্শ জ্যা-এর সমীকরণ।

$\therefore$ স্পর্শ জ্যা-এর সমীকরণ, $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ বা, $\boxed{T=0}$

Problems

Example-68: $(-5,4)$ হতে $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শ জ্যা-এর সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



Sol^n: AB স্পর্শ জ্যা-এর সমীকরণ, $x(-5)+y(4)-2\left(\frac{x-5}{2}\right)-4\left(\frac{(y+4)}{2}\right)+1=0$

$\Rightarrow -5x+4y-x+5-2y-8+1=0 \therefore 3x-y+1=0$ **(Ans.)**

AB স্পর্শ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়: $x^2+y^2-2x-4y+1=0$

বৃত্তের কেন্দ্র $C(1,2)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2-1}=2$ একক

এখন, $C(1,2)$ হতে AB এর লম্ব দূরত্ব, $CD=\frac{|3.1-2+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ একক

$\therefore$ স্পর্শ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $AB=2AD=2\sqrt{r^2-l^2}=2\sqrt{4-\frac{2}{5}}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$ একক

Type–17: কোন সরলরেখা সাপেক্ষে কোন বৃত্তের প্রতিবিম্ব নির্ণয়

Concept

(i) প্রথমে প্রদত্ত রেখার সাপেক্ষে প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্রের প্রতিবিম্ব বের করতে হবে।

(ii) নির্ণেয় প্রতিবিম্ব বিন্দুকে কেন্দ্র এবং প্রদত্ত বৃত্তের সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

Problems

Example-69: $4x = 6y - 2$ রেখার সাপেক্ষে $3x^2 + 3y^2 + 6x - 24y - 57 = 0$ বৃত্তের প্রতিবিম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: প্রথমে বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ বের করি এরপর কেন্দ্র থেকে প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ বের করি। এই দুই রেখার ছেদবিন্দুকে মধ্যবিন্দু ধরে অপর প্রান্তবিন্দু নির্ণয় করি।

$3x^2 + 3y^2 + 6x - 24y - 67 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 8y - 19 = 0$

$C(-1, 4)$; $r = \sqrt{1^2 + (-4)^2 - (-19)} = 6$

$4x - 6y + 2 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 1 = 0 \dots\dots(i)$

এই রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ: $3x + 2y + k = 0$

যা কেন্দ্র (–1, 4) বিন্দুগামী

$\therefore 3(-1) + 2.4 + k = 0$

$k = -5 \quad \therefore 3x + 2y - 5 = 0 \dots\dots\dots(ii)$

(i) ও (ii) solve করে, $(x, y) \equiv (1,1)$

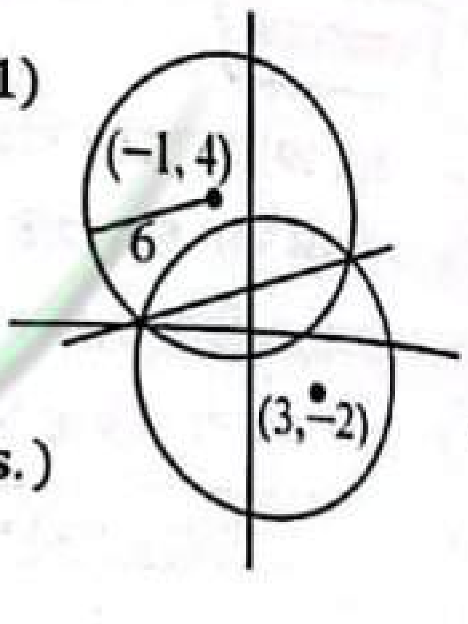
ধরি, প্রতিবিম্বের কেন্দ্র (α, β)

$\frac{-1+\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 3$; $\frac{4+\beta}{2} = 1$

$\Rightarrow \beta = -2$

$\therefore$ প্রতিবিম্ব বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 36$ **(Ans.)**



Example-70: X অক্ষ, Y অক্ষ এবং $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ বৃত্তের প্রতিবিম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: X অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব (y এর পরিবর্তে –y বসাতে হবে): $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

Y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব (x এর পরিবর্তে –x বসাতে হবে): $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$

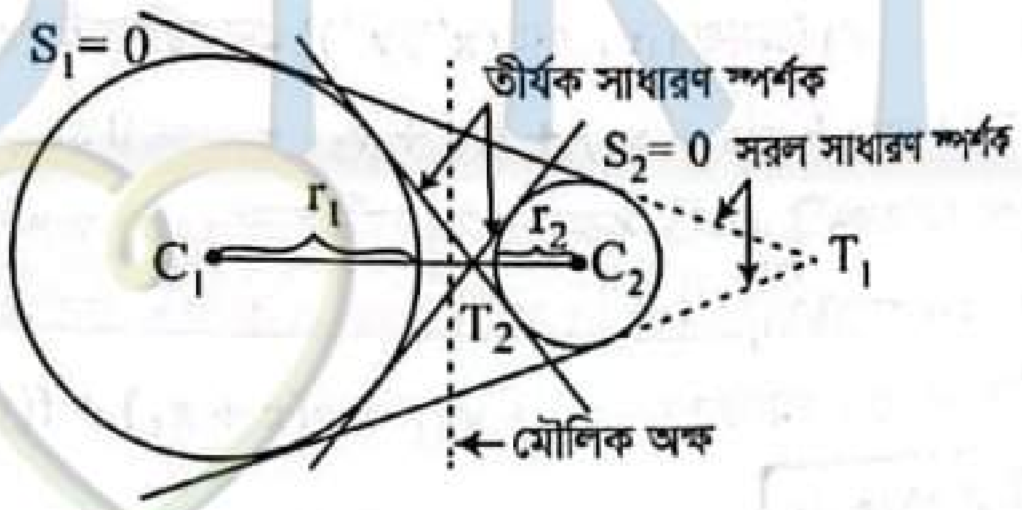
$y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব (x ও y এর স্থান পরিবর্তন করতে হবে): $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

Type–18: দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ বা ছেদ করা সংক্রান্ত সমস্যা

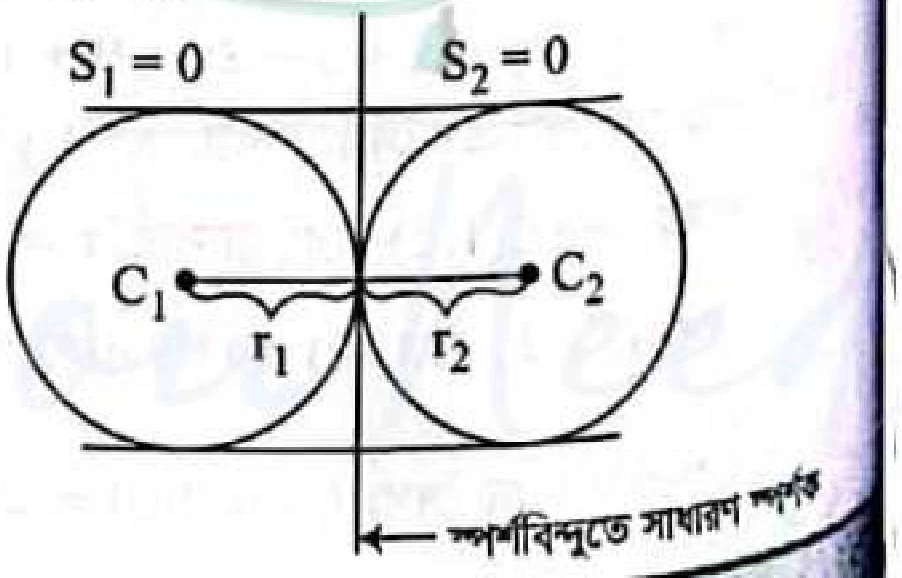
Concept

দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র C_1 ও C_2 এবং ব্যাসার্ধ r_1 ও r_2 হলে:

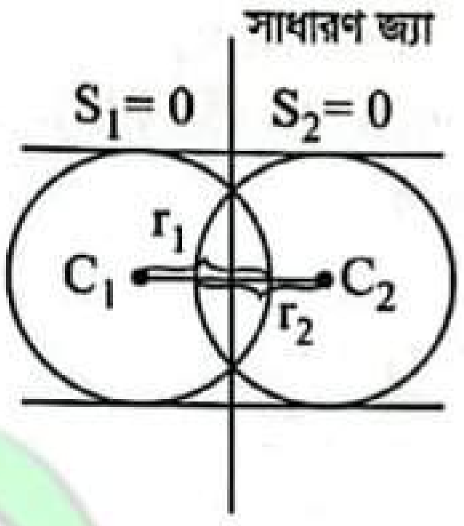
- ছেদও করবে না, স্পর্শও করবে না।
  - (a) $C_1C_2 > r_1 + r_2$
  - (b) সাধারণ স্পর্শক হবে 4 টি
  - (c) $S_1 - S_2 = 0$ মৌলিক অক্ষ নির্দেশ করে। (মৌলিক অক্ষ হলো এমন একটি সরলরেখা যার উপরস্থ যেকোন বিন্দু হতে বৃত্তদ্বয়ের উপরে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান।)
  - (d) C_1C_2 কে $r_1 : r_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে তীর্যক সাধারণ স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দু (T_2) পাওয়া যায়।
  - (e) C_1C_2 কে $r_1 : r_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে সরল সাধারণ স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দু (T_1) পাওয়া যায়।

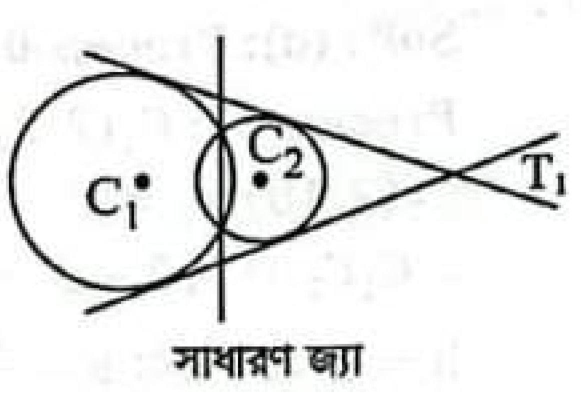


- বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে:
  - (a) $C_1C_2 = r_1 + r_2$ হবে
  - (b) $S_1 - S_2 = 0$ করলে স্পর্শবিন্দুতে সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যায়।
  - (c) সাধারণ স্পর্শকের সংখ্যা 3 টি (মৌলিক অক্ষই স্পর্শবিন্দুতে সাধারণ স্পর্শকে রূপান্তরিত হয়)
  - (d) C_1C_2 কে $r_1 : r_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুই স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক।

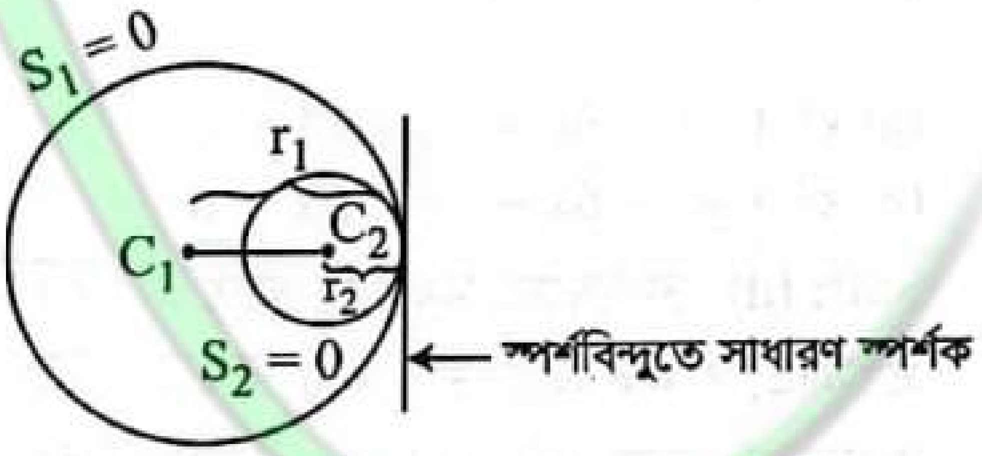


- বৃত্তদুটি পরস্পরকে ছেদ করলে:
  (a) $r_1 \sim r_2 < C_1C_2 < r_1 + r_2$
  (b) সাধারণ স্পর্শক হবে 2 টি
  (c) $S_1 - S_2 = 0$ সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ নির্দেশ করে। (মৌলিক অক্ষই সাধারণ জ্যা-তে রূপান্তরিত হয়)
  (d) C_1C_2 কে $r_1 : r_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে সরল সাধারণ স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দু (T_1) পাওয়া যায়। (যদি সরল সাধারণ স্পর্শকদ্বয় অসমান্তরাল হয় বা $r_1 \neq r_2$ হয়)

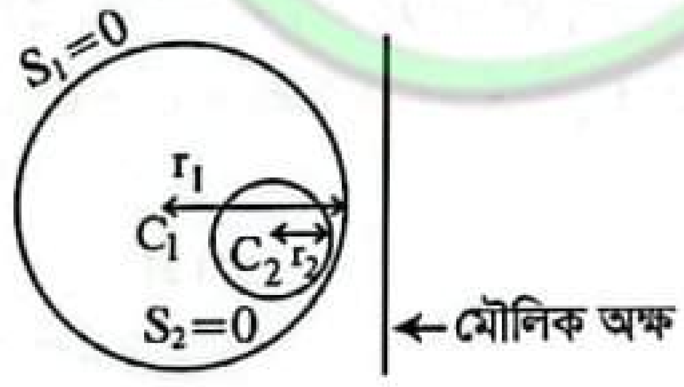




- অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে:
  (a) $C_1C_2 = r_1 \sim r_2$
  (b) সাধারণ স্পর্শক হবে 1 টি
  (c) $S_1 - S_2 = 0$ স্পর্শবিন্দুতে সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্দেশ করে। (মৌলিক অক্ষই স্পর্শবিন্দুতে সাধারণ স্পর্শকে রূপান্তরিত হয়)
  (d) C_1C_2 কে $r_1 : r_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুই স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক।



- একটি বৃত্ত আর একটি বৃত্তের অভ্যন্তরে থাকলে: (অন্তঃস্পর্শ করে না এমন)
  (a) $C_1C_2 < r_1 \sim r_2$
  (b) সাধারণ স্পর্শক নেই।
  (c) $S_1 - S_2 = 0$ মৌলিক অক্ষ নির্দেশ করে।



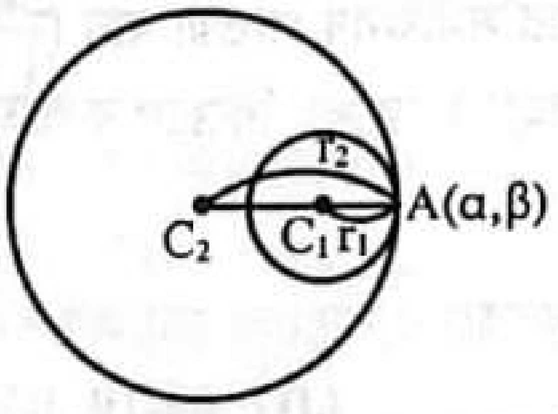
Problems

Example-71: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$ ও $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে কীভাবে স্পর্শ করে? স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর। **[DU'15-16]**

Solⁿ: এখানে, $C_1(1,-2)$; $r_1 = \sqrt{1+4+31} = 6$ একক এবং $C_2(-2,2)$; $r_2 = \sqrt{4+4-7} = 1$ একক
$C_1C_2 = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-2)^2} = 5 = r_1 - r_2$ $\therefore$ অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে।
$\therefore$ স্পর্শবিন্দু $\left(\frac{6(-2)-1.1}{6-1}, \frac{6.2-1(-2)}{6-1}\right) = \left(-\frac{13}{5}, \frac{14}{5}\right)$ **(Ans.)**

Example-72: $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ও $x^2 + y^2 - 6x - 18 = 0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করলে স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।
(a) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)$ (b) $\left(\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)$ (c) $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{9}{5}\right)$ (d) $\left(\frac{3}{5}, -\frac{9}{5}\right)$

Solⁿ: (a);



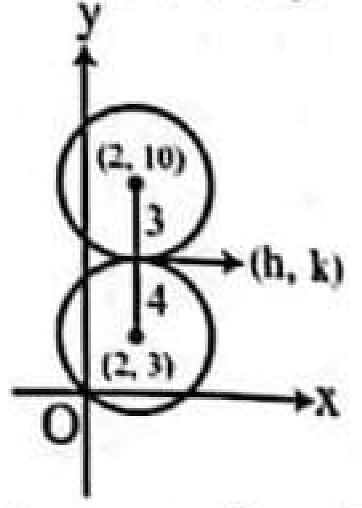
এখানে, $C_1 \equiv (0,1), r_1 = \sqrt{0+1^2-0} = 1$ এবং $C_2 \equiv (3,-3), r_2 = \sqrt{3^2+3^2+18} = 6$
$\therefore C_1(0,1)$ ও $C_2(3,-3)$ এর সংযোজক রেখাকে $A(\alpha,\beta)$ বিন্দুটি $1:6$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে,
$\therefore \alpha = \frac{1\times(3)-6\times(0)}{1-6}, \beta = \frac{1\times(-3)-6\times(1)}{1-6} \therefore \left(\frac{-3}{5}, \frac{9}{5}\right)$ **(Ans.)**

Example-73: $(x+2)^2 + y^2 = b^2$ এবং $(x-1)^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তদ্বয় বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করার শর্ত:
(a) $b - a = 3$ (b) $a + b = 3$ (c) $a^2 + b^2 = 3$ (d) $a + b = 1$

Solⁿ: (b); এখানে, $c_1 \equiv (-2,0), r_1 = b$ এবং $c_2 \equiv (1,0), r_2 = a \therefore c_1c_2 = r_1 + r_2$ হতে পাই,
$\Rightarrow \sqrt{(1+2)^2 + (0-0)^2} = a + b \therefore a + b = 3$ **(Ans.)**

Example-74: $(x-2)^2+(y-3)^2=16$ এবং $(x-2)^2+(y-10)^2=9$ বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [DU'16-17]

(a) $(2,3)$ (b) $(16,9)$ (c) $(2,10)$ (d) $(2,7)$



Sol^n: (d); Process-01: Option বিন্দুগুলি দ্বারা সিদ্ধ করে, (d) Option পাওয়া যায়,

Process-02: $C_1(2,3), r_1=4$

$C_2(2,10), r_2=3$

$\therefore C_1C_2=|10-3|=7=r_1+r_2$

$h=2$ হবে এবং $k=\frac{4\times10+3(3)}{3+4}=\frac{49}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শবিন্দু, $(h,k)\equiv(2,7)$ **(Ans.)**

Example-75: $x^2+y^2=9$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (3,4) হলে, বৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? [RU'22-23]

(a) $x^2+y^2+6x+8y+21=0$ (b) $x^2+y^2+6x+8y-21=0$
(c) $x^2+y^2+6x-8y-21=0$ (d) $x^2+y^2-6x-8y+21=0$

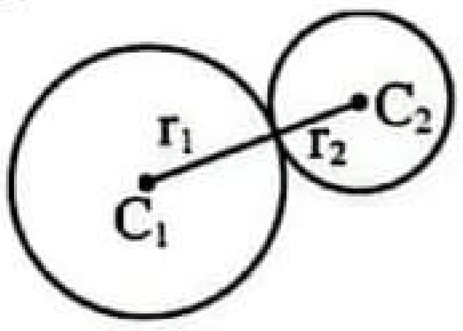
Sol^n: (d); কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$ একক

প্রশ্নমতে, $3+r=5\Rightarrow3+\sqrt{3^2+4^2-c}=5\Rightarrow25-c=4\Rightarrow c=21$

বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2-6x-8y+21=0$

Example-76: $x^2+y^2+4x-10y+k=0$, $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে k এর মান কত?

(a) 18 (b) 20 (c) 27 (d) 25



Sol^n: (d); বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে: $c_1c_2=r_1+r_2\ \ldots\ldots\ldots$ (i)

$x^2+y^2+4x-10y+k=0$ এর $c_1(-2,5), r_1=\sqrt{4+25-k}=\sqrt{29-k}$

$\therefore x^2+y^2-2x-2y-7=0$ এর $c_2\ (1,1)$ এবং $r_2=\sqrt{1+1+7}=3$

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, $\sqrt{(1+2)^2+(1-5)^2}=\sqrt{29-k}+3\Rightarrow4=29-k\therefore k=25$ **(Ans.)**

Type–19: সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয়

Concept

দুটি বৃত্তের সমীকরণ দেওয়া থাকলে একটি থেকে অপরটি বিয়োগ করলেই সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ পাওয়া যায় (যদি তারা পরস্পরকে ছেদ করে থাকে)। এই ক্ষেত্রে বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণদ্বয়কে আর্দশ রূপে নিয়ে (x^2 ও y^2 এর সহগ 1 রেখে) বিয়োগ করতে হবে।

Problems

Example-77: $x^2+y^2-2x+3y-18=0$ ও $x^2+y^2-5x+6y-15=0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [JU' 09-10, RU' 13-14, 07-08]

Sol^n: $x^2+y^2-2x+3y-18=0\cdots\cdots\cdots$ (i) ; $x^2+y^2-5x+6y-15=0\cdots\cdots\cdots\cdots$ (ii)

এখন, (i) − (ii) $\Rightarrow3x-3y-3=0\ \Rightarrow x-y-1=0$ **(Ans.)**

Type–20: বৃত্তের পোলার সমীকরণ সম্পর্কিত

Concept

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ এবং $x^2+y^2=r^2$ বৃত্তের পোলার সমীকরণ $r^2+2r\,(g\cos\theta+f\sin\theta)+c=0$

Problems

Example-78. পোলার স্থানাঙ্কে $r^2 - 2r\sin\theta = 3$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ হবে- **[DU'20-21]**

Sol^n: $r^2 - 2r\sin\theta = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \therefore g = 0, f = -1, c = -3$

$\therefore r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{0 + 1 - (-3)} = 2$ একক

Example-79. পোলার স্থানাঙ্কে $\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ কেন্দ্র ও 2 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ কোনটি?

Sol^n: $\left(x - 5\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(y - 5\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 25 - 5\sqrt{2}x - 5\sqrt{2}y = 4$

$\Rightarrow r^2 - 5\sqrt{2}r(\cos\theta + \sin\theta) + 21 = 0$

Example-80: $r = a\sin\theta$ বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ কত?

(a) $(a, 0), a$
(b) $(0, 0), 2$
(c) $\left(0, \frac{a}{2}\right), \frac{a}{2}$
(d) $\left(\frac{a}{2}, 0\right), \frac{a}{2}$

Sol^n: (c); $r = a\sin\theta \Rightarrow r^2 = ar\sin\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = ay \Rightarrow (x - 0)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \therefore$ কেন্দ্র $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $\frac{a}{2}$

Example-81: $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 9 = 0$ বৃত্তের পোলার সমীকরণ কোনটি? **[RU'22-23]**

(a) $r^2 + r(5\sin\theta + 4\cos\theta) + 9 = 0$
(b) $r^2 + r(5\sin\theta - 4\cos\theta) + 9 = 0$
(c) $r^2 - r(5\sin\theta + 4\cos\theta) + 9 = 0$
(d) $r^2 - r(5\sin\theta - 4\cos\theta) + 9 = 0$

Sol^n: (b); $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 9 = 0 \Rightarrow r^2 - 4r\cos\theta + 5r\sin\theta + 9 = 0$

$\Rightarrow r^2 + r(5\sin\theta - 4\cos\theta) + 9 = 0$ **(Ans.)**

Example-82: পোলার স্থানাংকে $r^2 - 2r\sin\theta = 3$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ হবে? **[DU'20-21]**

(a) 2
(b) 1
(c) 4
(d) 3

Sol^n: (a); $r^2 - 2r\sin\theta = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \therefore$ কেন্দ্র $\equiv (0, 1), r = \sqrt{0 + 1^2 + 3} = 2$ **(Ans.)**

Example-83: $r = 8\cos\theta + 6\sin\theta$ কনিক দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য কত একক? **[GST'22-23]**

(a) 8
(b) 6
(c) 4
(d) 3

Sol^n: (a); $r = 8\cos\theta + 6\sin\theta \Rightarrow r^2 = 8r\cos\theta + 6r\sin\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 8x + 6y \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

এখানে, $g = -4, f = -3, c = 0$

$\therefore$ x অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{(-4)^2 - 0} = 2\sqrt{4^2 - 0} = 8$ একক।

Type–21: চিত্র সংক্রান্ত

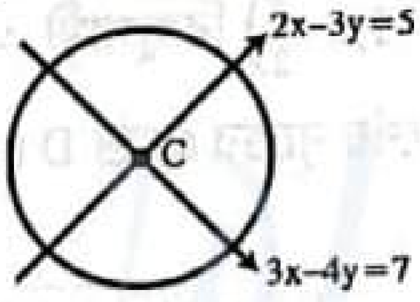
Problems

Example-84: 154 বর্গ একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসদ্বয় $2x - 3y = 5$ এবং $3x - 4y = 7$ হলে, বৃত্তের সমীকরণ হবে-

(a) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 62$
(b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 47$
(c) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 47$
(d) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 62$

Sol^n: (c); $2x - 3y - 5 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i) এবং $3x - 4y - 7 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

ব্যাসদ্বয়ের ছেদবিন্দুটিই হবে বৃত্তের কেন্দ্র,



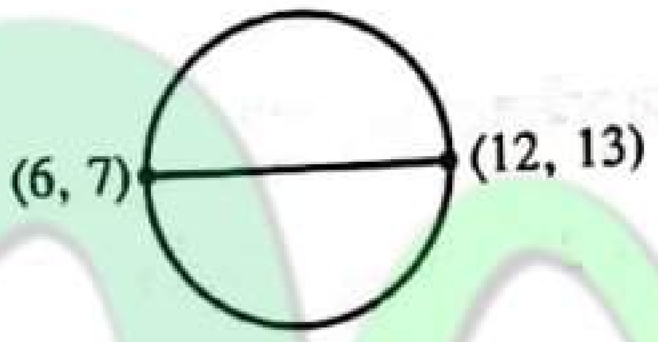
(i) ও (ii) সমাধান করে পাই, $c \equiv (1, -1)$

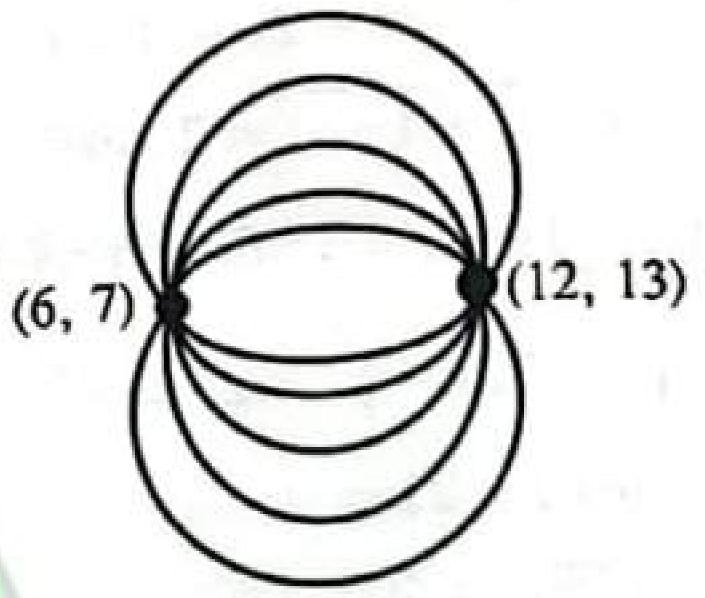
অপর শর্তে: $\pi r^2 = 154 \Rightarrow r^2 = \frac{154 \times 7}{22} = 49 \therefore r = 7$ [$\pi \approx \frac{22}{7}$ ধরে]

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তটি হবে, $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 7^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y = 47$ **(Ans.)**

Example-85: r এর মান কত হলে r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট শুধুমাত্র একটি বৃত্ত পাওয়া যাবে যা, (6, 7) ও (12, 13) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

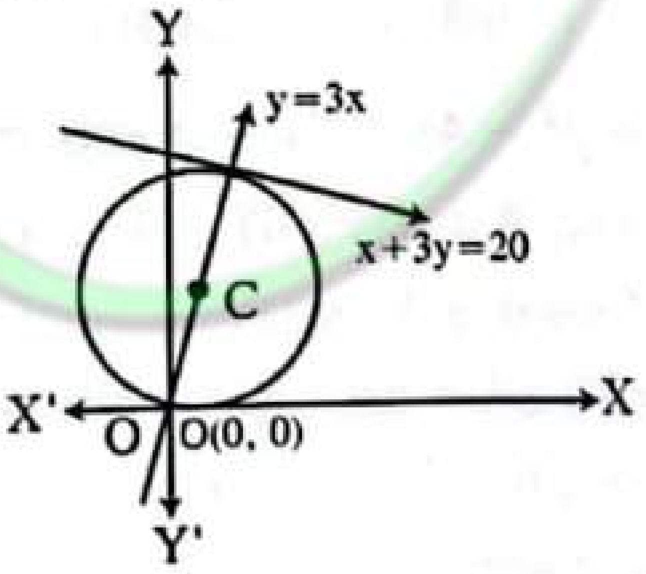
Sol^n: অর্থাৎ চিত্র হতে দেখা যায় (6, 7) ও (12, 13) বিন্দুগামী অসংখ্য বৃত্ত পাওয়া সম্ভব। তাহলে ১টি মাত্র বৃত্তের ক্ষেত্রে অবশ্যই বিন্দু ২টি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হবে।





$\therefore \sqrt{(12-6)^2+(13-7)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \therefore r = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ **(Ans.)**

Example-86: এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে $x + 3y = 20$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং যার একটি ব্যাসের সমীকরণ $y = 3x$



Sol^n: $y = 3x$ ……… (i) এর ঢাল $m_1 = 3$

$x + 3y = 20$ ……… (ii) এর ঢাল $m_2 = -\frac{1}{3}$

$\therefore m_1 \times m_2 = (3)\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

∴ (i) ও (ii) নং রেখা পরস্পর লম্ব।

অর্থাৎ, প্রদত্ত ব্যাস ও স্পর্শক পরস্পর লম্ব।

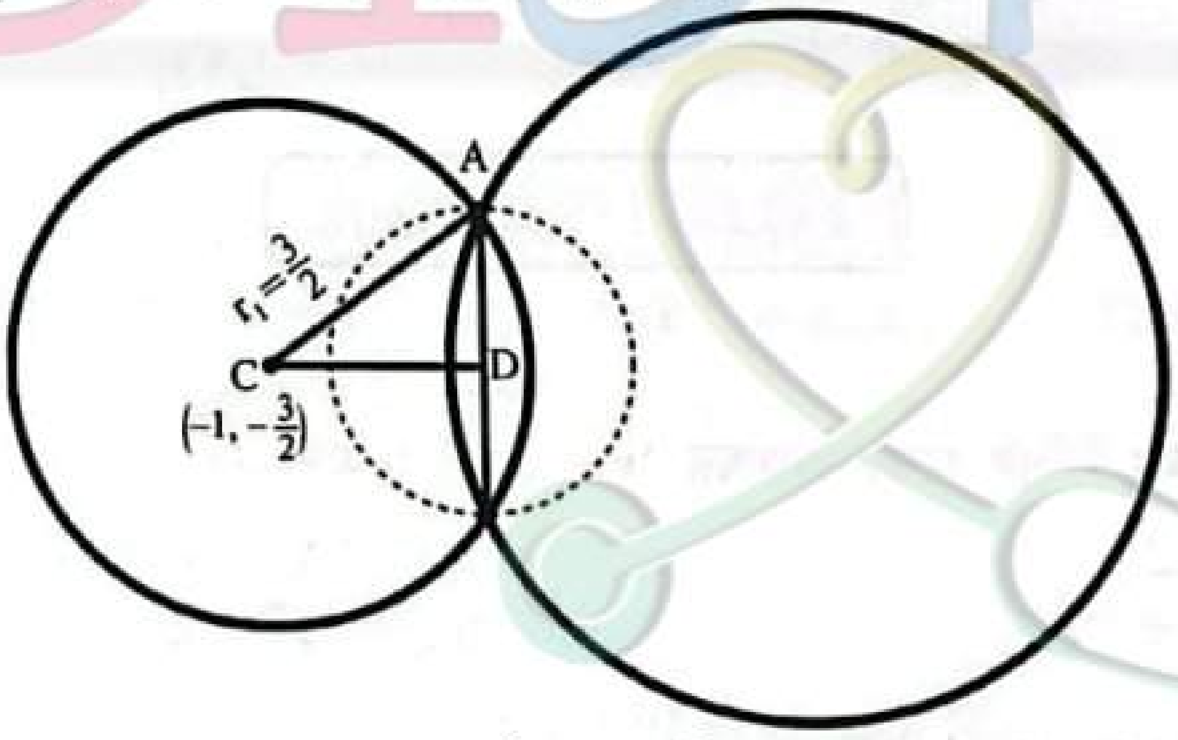
∴ এদের ছেদবিন্দু (2, 6) হবে ব্যাসের একটি প্রান্তবিন্দু। আবার নির্ণেয় বৃত্তটি এবং ব্যাসটি উভয়েই মূলবিন্দুগামী। ∴ ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দু O(0, 0) হবে।

∴ নির্ণেয় বৃত্তটি হবে, $(x-0)(x-2)+(y-0)(y-6)=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x-6y=0$ **(Ans.)**

Example-87: $x^2+y^2+2x+3y+1=0$ এবং $x^2+y^2+4x+3y+2=0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [RU'19-20]

Sol^n: Process-01: $C \equiv \left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ ও $r_1 = \sqrt{1+\frac{9}{4}-1} = \frac{3}{2}$

এখন বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা: $s_1 - s_2 = 0 \Rightarrow 2x - 4x + 3y - 3y + 1 - 2 = 0$



$\Rightarrow 2x + 1 = 0$ এর উপর লম্ব রেখা: $2y + k = 0$ যা, $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ বিন্দুগামী $\therefore 2\left(-\frac{3}{2}\right) + k = 0 \therefore k = 3$

∴ লম্ব রেখাটি $y = -\frac{3}{2} \therefore 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ ∴ নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র $D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ হবে।

আবার, $CD = \frac{|2(-1)+1|}{\sqrt{2^2+0^2}} = \frac{1}{2}$ এবং $CA = r_1 = \frac{3}{2}$

∴ নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\equiv AD = \sqrt{CA^2 - CD^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{2}$

∴ নির্ণেয় বৃত্ত: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$ **(Ans.)**

Example-88: $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$ বৃত্তে অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল-

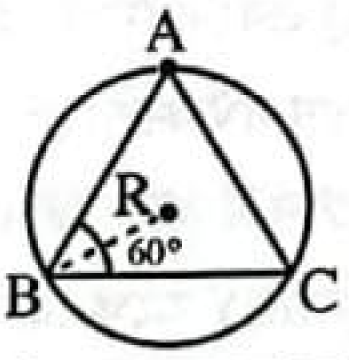
(a) $27\sqrt{3}$ বর্গ একক (b) $27\sqrt{2}$ বর্গ একক (c) $3\sqrt{3}$ বর্গ একক (d) $3\sqrt{2}$ বর্গ একক

Solⁿ: (a); ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ……… (i)

এখন, $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow a = 2 \times 6 \times \sin 60° = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

$[C \equiv (-3, 4) \therefore R = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 11} = \sqrt{9 + 16 + 11} = \sqrt{6^2} = 6]$

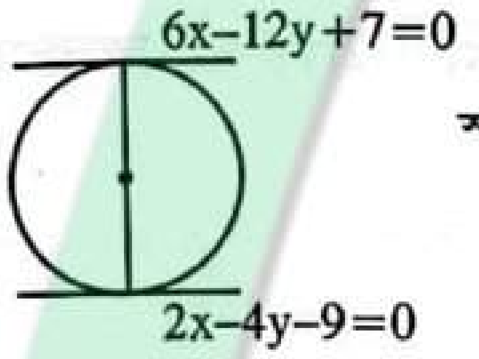
$\therefore$ (i) হতে পাই, ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} = (6\sqrt{3})^2 = 27\sqrt{3}$ বর্গ একক।



Example-89: কোন বৃত্তের দুটি স্পর্শকের সমীকরণ: $2x - 4y - 9 = 0$ এবং $6x - 12y + 7 = 0$ হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত? **[BUET'12-13]**

(a) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (b) $\frac{17}{3\sqrt{5}}$ (c) $\frac{17}{5\sqrt{3}}$ (d) $\frac{17}{6\sqrt{5}}$

Solⁿ: (d);



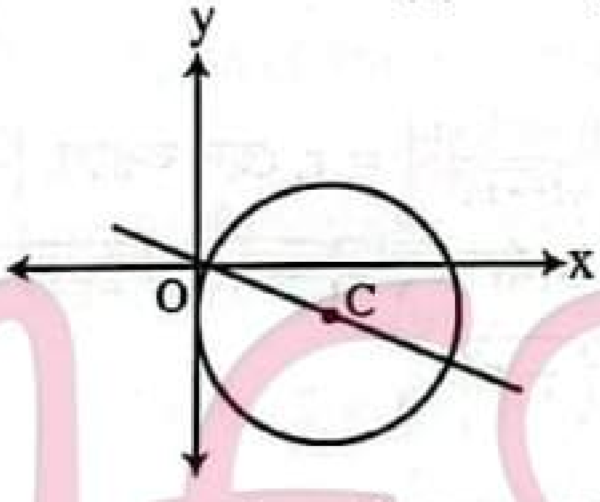
স্পর্শকদ্বয় সমান্তরাল

$= \left|\frac{\frac{7}{3}-|-9|}{\sqrt{4+16}}\right| = \frac{34}{3\sqrt{20}} = \frac{17}{3\sqrt{5}}$ যা বৃত্তের ব্যাস।∴ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $= \frac{17}{6\sqrt{5}}$ **(Ans.)**

Example-90: নিচের কোন সরলরেখাটি $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ বৃত্তকে সমান দুইভাগে বিভক্ত করে? **[SUST'13-14]**

(a) $x - 2y = 0$ (b) $3x + y = 0$ (c) $x + 3y = 0$ (d) $x - 3y = 0$

Solⁿ: (c);



প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -1)$ ∴ নির্ণেয় রেখা: $y = \frac{-1}{3}x \Rightarrow x + 3y = 0$ **(Ans.)**

Example-91: x-অক্ষ থেকে $x^2 + y^2 + 4x + 6y = 12$ বৃত্তের উপর সর্বাধিক দূরত্বে অঙ্কিত স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? **[SUST'16-17]**

(a) $(-2, -8)$ (b) $(-7, -3)$ (c) $(-2, 2)$ (d) $(3, -3)$

Solⁿ: (a); Process-01: চিত্র থেকে বলা যায় Option (a) correct হবে।

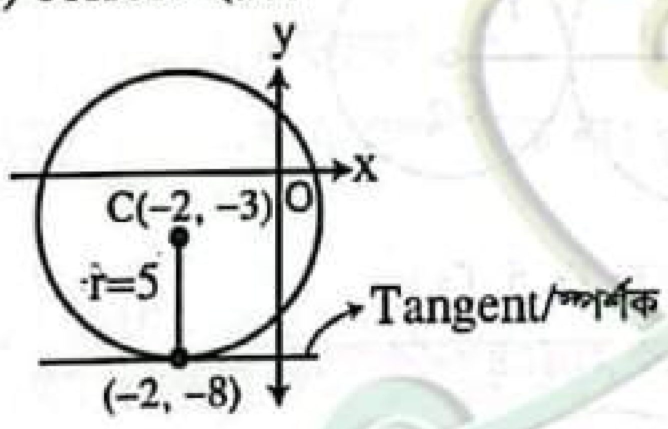
কেন্দ্র $(-2, -3)$

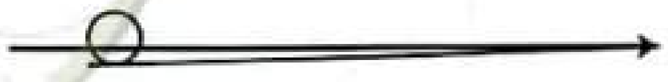
∴ স্পর্শবিন্দুতে x স্থানাঙ্ক একই হবে

এবং $r = \sqrt{2^2 + 3^2 + 12} = 5$

∴ স্পর্শবিন্দু $(-2, -3 - 5)$ $(-2, -8)$

x-অক্ষের উপরস্থ বিন্দু হতে বৃত্তের সর্বাধিক দূরবর্তী বিন্দু।





Example-92: $(-4, -3)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$ বৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর সর্বনিম্ন দূরত্ব কত একক? **[SUST'16-17]**

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8

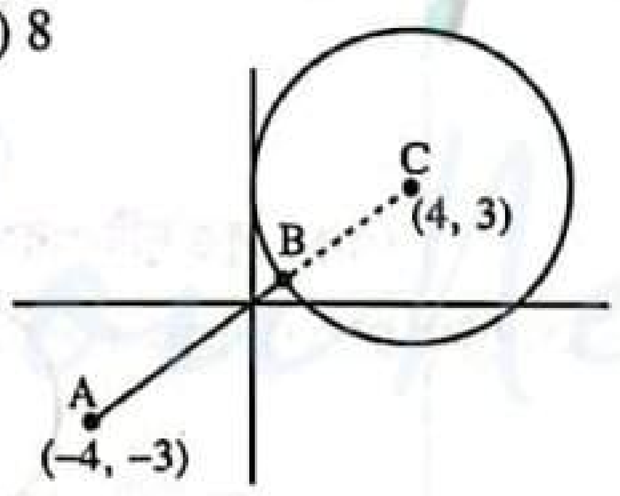
Solⁿ: (c); $C \equiv (4, 3)$,

$r = \sqrt{4^2 + 3^2 - 9} = 4$

$\therefore CA = \sqrt{(4+4)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$

$\therefore BC = 4 \therefore AB = 10 - 4 = 6$

∴ নির্ণেয় সর্বনিম্ন দূরত্ব হবে = 6 একক।



Note: $A(-4, -3)$ হতে বৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দুর সর্বোচ্চ দূরত্ব $= 6 + d = 6 + 8 = 14$ হবে।

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

01. বৃত্তের কেন্দ্র (0,0) এবং ব্যাসার্ধ r হলে, বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 = r^2$

02. কেন্দ্র (h, k) এবং ব্যাসার্ধ r হলে, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

03. বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এখানে, কেন্দ্র $(-g, -f)$; ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
সূত্র- (i): বৃত্তের X অক্ষে ছেদিত অংশ $= 2\sqrt{g^2 - c}$
সূত্র- (ii): বৃত্তের Y অক্ষে ছেদিত অংশ $= 2\sqrt{f^2 - c}$

04. বৃত্তটি X অক্ষকে স্পর্শ করলে $c = g^2$ এবং বৃত্তটি Y অক্ষকে স্পর্শ করলে $c = f^2$ হবে।

05. (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটির সংযোগ সরলরেখাকে ব্যাস ধরে আঁকা বৃত্তের সমীকরণ:
$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

06. (x_1, y_1) বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে, উপরে বা ভিতরে অবস্থান করবে যদি: $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ যথাক্রমে $>= ও < 0$ হয়।

07. C_1 ও C_2 কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 ও r_2 হলে,
(a) অন্তঃস্পর্শের ক্ষেত্রে, $C_1C_2 = r_1 - r_2 \ (r_1 > r_2)$
(b) বহিঃস্পর্শের ক্ষেত্রে, $C_1C_2 = r_1 + r_2$

08. $y = mx + c$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত: $c = \pm a\sqrt{1 + m^2}$

09. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের উপরিস্থিত (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $xx_1 + yy_1 = a^2$।

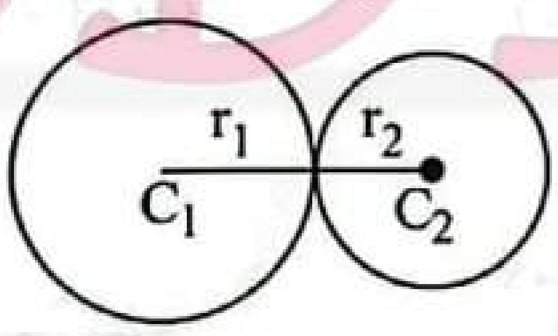
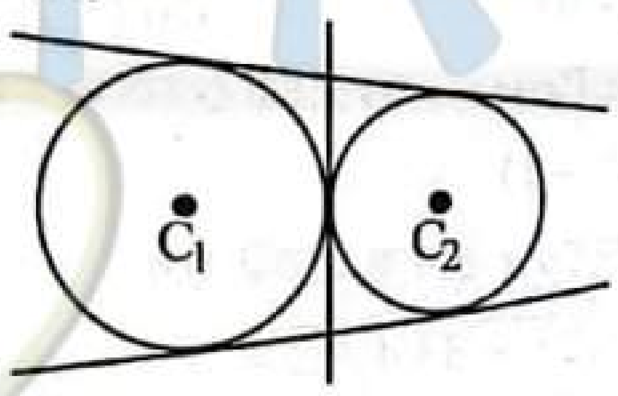
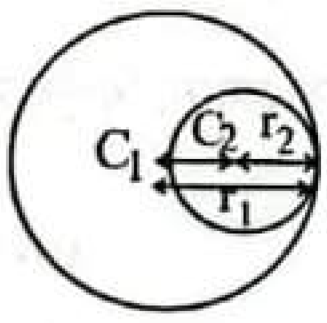
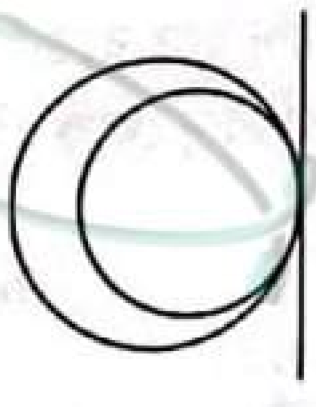
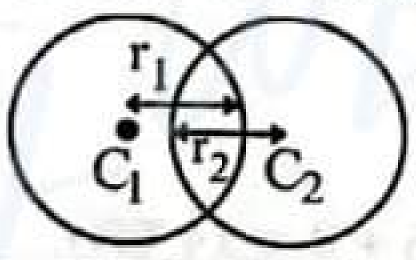
10. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপরিস্থিত (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ:
$xx_1 + yy_1 + 2g\left(\frac{x+x_1}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+y_1}{2}\right) + c = 0$

11. $lx + my + n = 0$ রেখা $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে $\left|\frac{lh+mk+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right| = r$, ছেদ করলে, $\left|\frac{lh+mk+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right| < r$

12. (x_1, y_1) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$

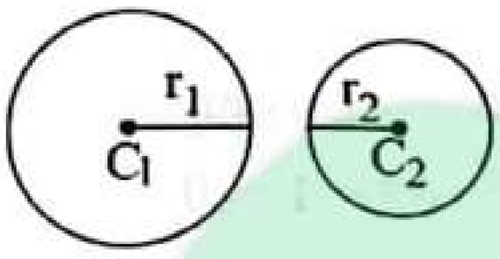
13. (x_1, y_1) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}$

14.

দুইটি বৃত্তের পারস্পরিক অবস্থান	সাধারণ স্পর্শক গণনা
(i) বৃত্ত দুটি পরস্পরকে বহঃস্থভাবে স্পর্শ করে।  $C_1C_2 = r_1 + r_2$	(i) বৃত্ত দুটি বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে স্পর্শক তিনটি 
(ii) বৃত্ত দুটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে।  $C_1C_2 = r_1 \sim r_2$	(ii) বৃত্ত দুটি অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে স্পর্শক একটি 
(iii) বৃত্ত দুটি পরস্পরকে ছেদ করলে, 	(iii) বৃত্ত দুটি পরস্পরকে ছেদ করলে স্পর্শক দুটি

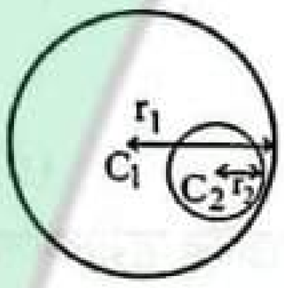
$C_1C_2 < (r_1 \sim r_2)$

(iv) বৃত্ত দুটি পরস্পরকে ছেদ করে না, স্পর্শও করে না।

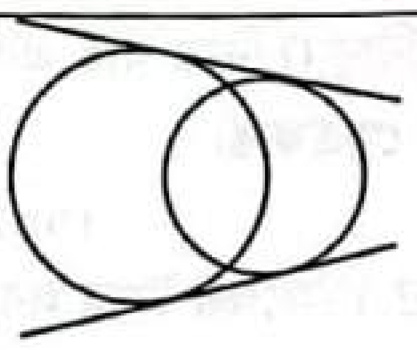


$C_1C_2 > (r_1 + r_2)$

(v) একটি বৃত্ত অপর একটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত।

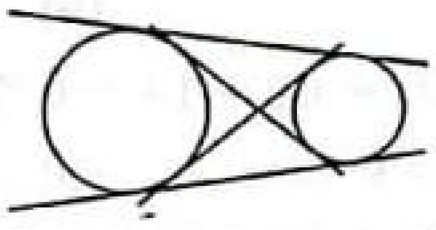


$C_1C_2 + r_2 < r_1 \therefore C_1C_2 < (r_1 \sim r_2)$

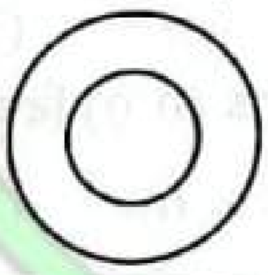


(iv) বৃত্ত দুটি পরস্পরকে স্পর্শও করে না, ছেদও করে না।

স্পর্শক চারটি



(v) একটি বৃত্তের ভিতরে অপর বৃত্ত স্পর্শক নাই।



গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাকটিস প্রবলেম

MCQ

01. (0,9) বিন্দুটি, (−1, −4) কেন্দ্র ও 6 একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের-
(a) অন্তঃস্থ (b) বহিঃস্থ (c) উপরিস্থ (d) কোনটিই নয়

02. যদি A ও B বৃত্তের পরিধি যথাক্রমে 15.614 একক এবং 6.28 একক হয় তাহলে তাদের ব্যাসার্ধের পার্থক্য কত?
(a) 5.23 একক (b) 3.0 একক (c) 1.5 একক (d) 0.5 একক

03. $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 75 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?
(a) (3, 4) (b) (3, 0) (c) (2, 4) (d) (4, 3)

04. একটি বৃত্ত (1, 0) বিন্দুতে X-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং বৃত্তটির অপর বিন্দু (2, 3) দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত?
(a) 2 (b) $\sqrt{10}$ (c) $\frac{10}{3}$ (d) None

05. k এর মান কত হলে, $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে?
(a) 40 (b) −10 (c) A, B উভয়ই (d) কোনটিই নয়

06. যদি (1, 2) কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্ত X-অক্ষকে স্পর্শ করে তবে তা Y-অক্ষকে স্পর্শ করে না। বৃত্তটি Y-অক্ষ থেকে কি পরিমাণ অংশ ছেদ করবে?
(a) $2\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3}$

07. নিম্নের কোন বিন্দুটি (−1, 0) কেন্দ্র ও 10 একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের উপরে অবস্থিত নয়?
(a) (7, 6) (b) $(-2, 3\sqrt{11})$ (c) (−1, −10) (d) (−5, 7)

08. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 2 = 0$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত?
(a) $\sqrt{11}$ (b) 2 (c) $\sqrt{2}$ (d) 1

09. (1, 3) বিন্দু হতে $3x^2 + 3y^2 = 18$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য–
(a) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (b) $\sqrt{\frac{11}{2}}$ (c) 4 (d) 2

10. একটি বৃত্ত X ও Y-অক্ষ রেখাকে ধনাত্মক দিকে মূলবিন্দু O হতে 5 একক দূরত্বে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করে; OACB বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল–
(a) 24 (b) 25 (c) 50 (d) কোনটিই নয়

11. একটি বৃত্ত মূলবিন্দু O দিয়ে যায় এবং X ও Y-অক্ষ দুটির ধনাত্মক দিক হতে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে 8 ও 4 অংশ ছেদ করে। OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল–
(a) 5.5 (b) 16 (c) 3.5 (d) 8.0

12. যে বৃত্তটির কেন্দ্র Y-অক্ষের উপর অবস্থিত তার সমীকরণ-
(a) $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - x + y = 0$
(c) $x^2 + y^2 - x + 1 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - x - 1 = 0$

13. $(-3, -2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং Y-অক্ষকে স্পর্শ করে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ–
(a) -3 (b) -2 (c) 3 (d) 2

14. $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 14 = 0$ বৃত্তের ব্যাসের সমীকরণ
(a) $4x + 7y = 0$ (b) $x + 7y = 0$ (c) $4x + y + 1 = 0$ (d) $4x + 7y + 1 = 0$

15. $4x^2 + 4y^2 = 3$ সমীকরণটি কিসের?
(a) পরাবৃত্ত (b) বৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) সরলরেখা

16. একটি বৃত্ত X -অক্ষকে $(0, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1,3)$ বিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তটির সমীকরণ কত?
(a) $x^2 + y^2 - 10 = 0$ (b) $x^2 + y^2 = \frac{10}{3}$ (c) $x^2 + y^2 = \frac{10y}{3}$ (d) $x^2 + y^2 = \frac{10x}{3}$

17. $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র কোথায় অবস্থিত?
(a) X-অক্ষের উপর (b) Y-অক্ষের উপর (c) মূল বিন্দুতে (d) কোনটিই নহে

18. যে বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং যে বৃত্ত $2x + \sqrt{5}y - 1 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ হবে-
(a) $9x^2 + 9y^2 = 1$ (b) $x^2 + y^2 = 0$ (c) $x^2 + y^2 = 9$ (d) $x^2 = y^2 = 1$

19. $2x + 3y - 5 = 0$ রেখাটি $(3, 4)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শক। বৃত্তটি Y অক্ষের যে অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ কত?
(a) -3 (b) 2 (c) 4 (d) -1

20. বৃত্ত $x^2 + y^2 - 2kx - 4 = 0$ এর একটি ব্যাসের সমীকরণ $2x - 3y + 1 = 0$ হলে k এর মান–
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{-1}{2}$ (c) 2 (d) -1

21. $3x + y = 14$ এবং $2x + 5y = 18$ রেখাদুটির ছেদ বিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু $(1, 2)$ হলে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত?
(a) 3 (b) 6 (c) 14 (d) 18

22. নিচের কোনটি বৃত্তের সমীকরণ?
(a) $x^2 + y^2 + 2gx = C$ (b) $x^2 + y^2 - 2gx + C = 0$ (c) $x^2 + y^2 = 0$ (d) সবকটি

23. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(2,3)$ এবং $x + y - 2 = 0$ রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।
(a) $2(x^2 + y^2) - 8x - 12y + 17 = 0$ (b) $2(x^2 + y^2) - 6x - 10y + 15 = 0$
(c) $2(x^2 + y^2) - 4x - 8y + 11 = 0$ (d) $2(x^2 + y^2) - 2x - 6y + 7 = 0$

24. নিচের কোন সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত বৃত্তের স্পর্শক X অক্ষ?
(a) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 25 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 25 = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 25 = 0$

25. $(8, -8)$ ও $(-5, 5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ–
(a) $x^2 + y^2 - 3x + 3y + 80 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 3x + 3y - 80 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 3x - 3y - 80 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 80 = 0$

26. $x^2 + y^2 - 5x = 0$ ও $x^2 + y^2 + 3x = 0$ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রের দূরত্ব–
(a) 4 units (b) 1 unit (c) $\sqrt{34}$ units (d) 2 units

27. বৃত্তটি $x^2 + y^2 - 8x - 3y + c = 0$; Y অক্ষকে স্পর্শ করলে $c = ?$
(a) 16 (b) 2.25 (c) 4 (d) -16

28. $(5, 0)$ এবং $(0, 5)$ বিন্দুতে অক্ষরেখাদ্বয়কে স্পর্শকারী বৃত্তের সমীকরণ:
(a) $x^2 + y^2 + 10x - 10y - 25 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

29. $x^2+y^2-24x+10y=0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ–
(a) 7
(b) 5
(c) 13
(d) 12

30. $x^2+y^2-6x-4y+c=0$ বৃত্তটি Y অক্ষকে স্পর্শ করে, c এর মান কত?
(a) 11
(b) 7
(c) 5
(d) 4

31. $x^2+y^2-6y+5=0$ বৃত্তে $x=2$ সরলরেখাটি-
(a) জ্যা
(b) ব্যাস
(c) স্পর্শক
(d) কোনটিই নয়

32. $(1,-3)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্ত X অক্ষকে $(5,0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করলে বৃত্তটির পরিধি হবে—
(a) 5π
(b) 8π
(c) 10π
(d) 15π

33. বৃত্তের কেন্দ্র $(2,3)$ ব্যাসার্ধ 6 একক। যে জ্যা এর মধ্যবিন্দু $(2,0)$ তার দৈর্ঘ্য–
(a) $2\sqrt{3}$
(b) $4\sqrt{3}$
(c) $6\sqrt{3}$
(d) $8\sqrt{3}$

34. $x^2+y^2=a^2-2ab+b^2$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ—
(a) $a-b$
(b) $b-a$
(c) $|a-b|$
(d) $\pm(a-b)$

35. $x^2+y^2-3x+10y-15=0$ বৃত্তের $(4,-11)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ—
(a) $5x-42y-152=0$
(b) $5x+12y-152=0$
(c) $5x-12y-152=0$
(d) $12x-5y+152=0$

36. $2x^2+2y^2+3x-4y+\frac{9}{8}=0$ বৃত্তটি স্পর্শ করে-
(a) X-অক্ষ
(b) Y-অক্ষ
(c) both
(d) None

37. $y=3x-c$ রেখাটি $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ বৃত্তের স্পর্শক হলে $c=?$
(a) $7+2\sqrt{10}$
(b) $7-2\sqrt{10}$
(c) $2\sqrt{10}$
(d) a & b

38. X-অক্ষের সাপেক্ষে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের প্রতিবিম্বের সমীকরণ–
(a) $x^2+y^2-2gx-2fy=0$
(b) $x^2+y^2+2gx-2fy+c=0$
(c) $x^2+y^2+2gx-2fy=0$
(d) $x^2+y^2-2gx+2fy+c=0$

39. $(x+2)^2+y^2=b^2$ এবং $(x-1)^2+y^2=a^2$ বৃত্তদ্বয় বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করার শর্ত-
(a) $b-a=3$
(b) $a^2+b^2=3$
(c) $a+b=3$
(d) $a+b=1$

40. $x=0,\ y=0, x=a$ স্পর্শকারী বৃত্তের সমীকরণ কোনটি?
(a) $x^2+y^2-ax+ay+\frac{1}{4}a^2=0$
(b) $x^2+y^2-ax\pm ay+\frac{a^2}{4}=0$
(c) $x^2+y^2\pm ax+ay+\frac{1}{4}a^2=0$
(d) $x^2+y^2+ax+ay+\frac{1}{2}a^2=0$

41. $x^2+y^2-10x+12y+48=0$ বৃত্তটির X-অক্ষ থেকে কর্তিত অংশ =?
(a) $8\sqrt{13}$
(b) $\sqrt{13}$
(c) $4\sqrt{3}$
(d) ছেদ করে না

42. $x^2+y^2-2x+4y-1=0$ এবং $2x^2+2y^2+4ax+8y+3=0$ হলে এককেন্দ্রিক হতে, $a=?$
(a) -1
(b) 1
(c) 2
(d) 3

43. 1 একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য–
(a) $\frac{3}{2}$
(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c) $\sqrt{3}$
(d) 1

44. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে তাদের কয়টি স্পর্শক বিদ্যমান?
(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

45. $y=mx+c$ রেখাটি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তটিকে স্পর্শ করার শর্ত কী?
(a) $c=a\sqrt{1+m^2}$
(b) $c=-a\sqrt{1+m^2}$
(c) $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$
(d) সব কয়টি

46. $x^2+y^2-4x-6y+4=0$ বৃত্তটি X-অক্ষ স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক–
(a) $(2,0)$
(b) $(3,0)$
(c) $(6,6)$
(d) $(4,1)$

47. OA এবং OB মূলবিন্দু হতে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের স্পর্শক এবং কেন্দ্র C হলে OACB চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল কোনটি?
(a) $\frac{1}{2}\sqrt{g^2+f^2-c}$
(b) $\sqrt{c(g^2+f^2-c)}$
(c) $\frac{1}{4}\sqrt{g^2+f^2-c}$
(d) $\sqrt{g^2+f^2-c}.\sqrt{g^2+f^2}$

48. $x + y = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত
(a) $a^2 - 2a = 1$ (b) $a^2 + 2a = -1$ (c) $a^2 + 2a = 1$ (d) $a^2 - 2a = -1$

49. $ax^2 + by^2 = 1$ সমীকরণটি a ও b এর কোন মানের জন্য জ্যামিতিতে বৃত্ত নির্দেশ করে? [CU'16-17]
(a) $a, b \neq 1$ (b) $a = b > 0$ (c) $a = b$ (d) $a = b < 0$

50. $x^2 + y^2 - 4 = 0$ বৃত্তের বাইরে অবস্থিত বিন্দুটির নাম? [IU'16-17]
(a) $(2, 1)$ (b) $(1, 3)$ (c) $(2, 3)$ (d) $(2, 5)$ (e) সবগুলো

Written

51. দেখাও যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়।
52. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(2, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ 5 একক।
53. $(3, 0)$ এবং $(-4, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ একটি বৃত্তের কেন্দ্র Y-অক্ষের উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
54. এমন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে $(4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং যার দ্বারা y-অক্ষের ছেদাংশের পরিমাপ 6 একক। দেখাও যে, এরূপ দুইটি বৃত্ত পাওয়া যাবে।
55. $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শক দুইটি লম্বভাবে ছেদ করলে ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।
56. k এর মান কত হলে, $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে?
57. একটি বৃত্ত $(1, 2)$ ও $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
58. $(4, 3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।
59. পোলগামী বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(4, 45°)$.
60. মূলবিন্দু হতে $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2 একক; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
61. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা Y-অক্ষকে $(0, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং Y-অক্ষ হতে যার কেন্দ্রের দূরত্ব 4 একক।
62. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 4)$ এবং এর অন্তর্লিখিত বর্গের ক্ষেত্রফলের মান 18 বর্গ একক। বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
63. $3x + 2y + k = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে a এর মান কত?
64. $x^2 + y^2 - by = 0$ বৃত্ত এর সমীকরণ পোলার স্থানাঙ্কের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম

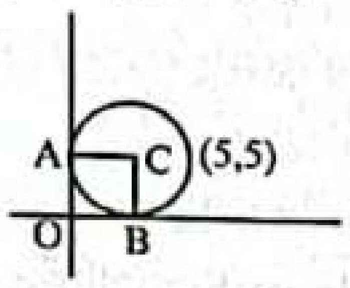
MCQ

01. **Solⁿ: (b);** দূরত্ব $= \sqrt{(0+1)^2 + (9+4)^2} = 13.03 > r$
02. **Solⁿ: (c);** $r_A = \frac{15.614}{2\times\pi} = 2.48, r_B = \frac{6.28}{2\times\pi} = 0.99, r_A - r_B = 1.5$
03. **Solⁿ: (a);** $x^2 + y^2 + 2(-3)x + 2(-4)y - 75 = 0$ কেন্দ্র $(-g, -f) = (3, 4)$
04. **Solⁿ: (c);** $g = -1, c = g^2 = 1$, passes through $(2, 3)$
$\therefore 2^2 + 3^2 - 2\times 2 + 2.f.3 + 1 = 0 \Rightarrow f = -\frac{5}{3} \therefore$ ব্যাস $= 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$
05. **Solⁿ: (c);** $\frac{3.5+4.0-k}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm 5 \Rightarrow k = 15 \pm 25 = 40, -10$
06. **Solⁿ: (a);** y-অক্ষ হতে কর্তিত অংশ $= 2\sqrt{f^2 - c}$
X-অক্ষকে স্পর্শ করে বলে, $c = g^2 \therefore$ ছেদাংশ $= 2\sqrt{f^2 - g^2} = 2\sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$
07. **Solⁿ: (d);** $(-5, 7)$ বিন্দু হতে $(-1, 0)$ বিন্দুর দূরত্ব 10 নয় বলে $(-5, 7)$ বিন্দু বৃত্তের উপরে অবস্থিত নয়।
08. **Solⁿ: (a);** ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{11}$

09. Sol^n: (d); $3x^2+3y^2=18 \Rightarrow x^2+y^2-6=0 \therefore$ দৈর্ঘ্য $=\sqrt{1^2+3^2-6}=\sqrt{10-6}=2$

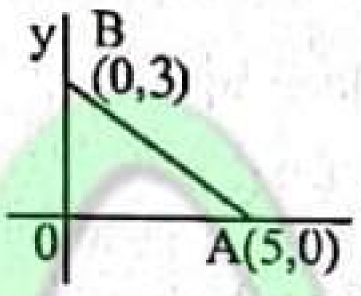
10. Sol^n: (b); OABC একটি বর্গ যার প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য $=5$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=25$



11. Sol^n: (b); $\Delta=\frac{1}{2}\times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $=\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$

অথবা, $\Delta=\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$



12. Sol^n: (a); কেন্দ্র Y-অক্ষের উপর হলে $g=0$

13. Sol^n: (c); বৃত্ত Y-অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের ভুজ| $\therefore$ ব্যাসার্ধ $=|-3|=3$

14. Sol^n: (d); $x^2+y^2-10x+6y+14=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(5,-3)$ যেহেতু ব্যাস কেন্দ্র দিয়ে যায় তাই কেন্দ্রটি অপশনের যে রেখাটিকে সিদ্ধ করে সেটিই ব্যাসের সমীকরণ হবে। $4\times 5+7\times(-3)+1=0$

15. Ans: (b) বৃত্ত

16. Sol^n: (c); যেহেতু X-অক্ষকে $(0,0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে, সেহেতু কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(0,a)$ এবং ব্যাসার্ধ $=a$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ: $(x-0)^2+(y-a)^2=a^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ay=0$; $(-1,3)$ বসিয়ে $a=\frac{10}{6}$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ: $x^2+y^2=\frac{10y}{3}$

17. Sol^n: (a); যেহেতু এখানে, $f=0$ সেহেতু ইহা X অক্ষের উপর অবস্থিত।

18. Sol^n: (a); $(x-0)^2+(y-0)^2=r^2; \frac{|0+0-1|}{\sqrt{5+4}}=r \Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt{9}}, x^2+y^2=\frac{1}{9} \Rightarrow 9x^2+9y^2=1$

19. Sol^n: (c); বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $=\frac{|6+12-5|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\sqrt{13}$; বৃত্তের সমীকরণ: $(x-3)^2+(y-4)^2=13$

$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2-8y+16=13 \Rightarrow x^2+y^2-6x-8y+12=0$

$\therefore$ Y-অক্ষের ছেদাংশ $=2\sqrt{f^2-c}=4$

20. Sol^n: (b); বৃত্তটির কেন্দ্র $2x-3y+1=0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। কেন্দ্র $=(k,0) \therefore k=-\frac{1}{2}$

21. Sol^n: (a); ছেদবিন্দু (4,2); ব্যাসার্ধ $=\sqrt{(4-1)^2+(2-2)^2}=3$

22. Ans: (d) সবকটি।

23. Sol^n: (a); ব্যাসার্ধ $=\frac{2+3-2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ বৃত্তটিঃ $(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{9}{2} \Rightarrow x^2+y^2-4x-6y+4+9=\frac{9}{2} \Rightarrow 2(x^2+y^2)-8x-12y+17=0$

24. Sol^n: (b); এক্ষেত্রে $2\sqrt{g^2-c}=0$ সুতরাং, X-অক্ষ এ বৃত্তটির স্পর্শক।

25. Sol^n: (b); নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণঃ $(x-8)(x+5)+(y+8)(y-5)=0 \Rightarrow x^2-3x-40+y^2+3y-40=0$

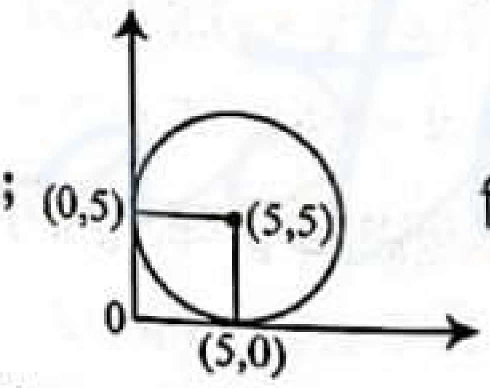
$\therefore x^2+y^2-3x+3y-80=0$

26. Sol^n: (a); বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক $(-f,-g) \therefore x^2+y^2-5x=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{5}{2},0\right)$

$\therefore x^2+y^2+3x=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{-3}{2},0\right) \therefore$ বৃত্তের দূরত্ব $=\sqrt{\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)^2}=4$ units

27. Sol^n: (b); Y-অক্ষকে স্পর্শ করলে, $\sqrt{f^2-c}=0$; $f^2=c \therefore c=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=2.25$

28. Sol^n: (d);



চিত্র থেকে কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (5,5); ব্যাসার্ধ $=5$

$\therefore$ সমীকরণ: $(x-5)^2+(y-5)^2=25 \Rightarrow x^2+y^2-10x-10y+25=0$

29. **Sol^n: (c);** বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $= \sqrt{f^2 + g^2 - c} = \sqrt{12^2 + 5^2 - 0} = 13$

30. **Sol^n: (d);** Y অক্ষকে স্পর্শ করলে Y অক্ষের ছেদাংশ, $2\sqrt{f^2 - c} = 0 \Rightarrow c = f^2 = 4$

31. **Sol^n: (c);** কেন্দ্র $(0, 3)$; $r = 2$; $\left|\frac{0-2}{\sqrt{1}}\right| = 2$

32. **Sol^n: (c);** $r = \sqrt{(1-5)^2 + (-3-0)^2} = 5 \therefore$ পরিধি $= 2\pi.5 = 10\pi$

33. **Sol^n: (c);** $d = \sqrt{(2-2)^2 + (3-0)^2} = 3 \therefore$ দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{6^2 - 3^2} = 6\sqrt{3}$

34. **Sol^n: (c);** $x^2 + y^2 = (a-b)^2$; $r = |a-b|$

35. **Sol^n: (c);** $x.4 + y.(-11) - 3.\left(\frac{x+4}{2}\right) + 10$
$\left(\frac{y-11}{2}\right) - 15 = 0 \Rightarrow 5x - 12y - 152 = 0$

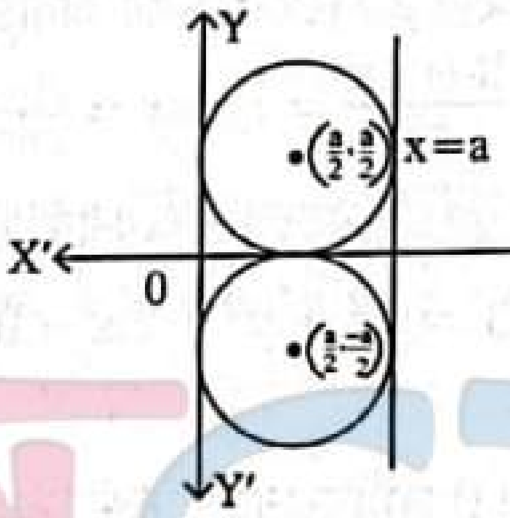
36. **Sol^n: (a);** $2x^2 + 2y^2 + 3x - 4y + \frac{9}{8} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - 2y + \frac{9}{16} = 0$
এখানে, $g = \frac{3}{4} \Rightarrow g^2 = \frac{9}{16} = c$ $\therefore$ x অক্ষকে স্পর্শ করে।

37. **Sol^n: (d);** $y = 3x - c \Rightarrow y - 3x + c = 0$; $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$
কেন্দ্র $(2, -1)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{2^2 + 1^2 - 1} = 2 \therefore \frac{|-1-3.2+c|}{\sqrt{1^2+3^2}} = 2 \Rightarrow |c - 7| = 2\sqrt{10} \Rightarrow c = 7 \pm 2\sqrt{10}$

38. **Sol^n: (b);** X অক্ষের সাপেক্ষে বৃত্তের প্রতিবিম্বের ক্ষেত্রে $y = -y$ বসিয়ে প্রাপ্ত সমীকরণ।

39. **Sol^n: (c);** প্রথম বৃত্তের কেন্দ্র $(-2, 0)$; দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র $(1, 0)$
বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করার শর্ত, $\sqrt{(-2-1)^2 + 0^2} = a + b$ $\therefore a + b = 3$

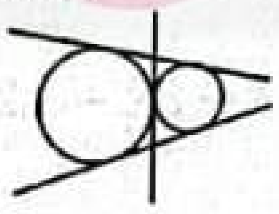
40. **Sol^n: (b);** $\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}\right)$ ও ব্যাসার্ধ $= \frac{a}{2}$
$\therefore \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y \pm \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$
$\Rightarrow x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 \pm ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - ax \pm ay + \frac{a^2}{4} = 0$



41 **Sol^n: (d);** $2\sqrt{5^2 - 48} \rightarrow$ complex. $\therefore$ছেদ করেনা।

42. **Sol^n: (a);** $2x^2 + 2y^2 + 4ax + 8y + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2ax + 4y + \frac{3}{2} = 0$ $\therefore -a = 1 \Rightarrow a = -1$

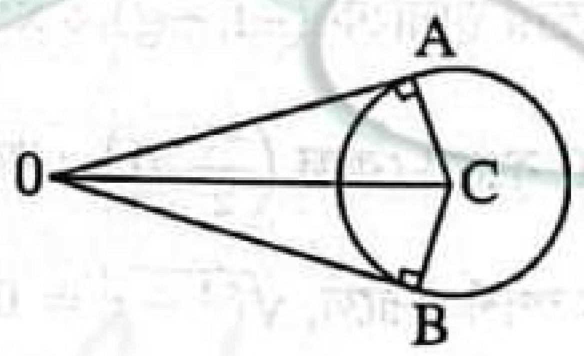
43. **Sol^n: (c);** $\frac{a}{\sin 60°} = 2R \Rightarrow a = \sqrt{3}$ $[R = 1]$

44. **Sol^n: (c);**  $\therefore$ সাধারণ স্পর্শক $= 3$টি

45. **Ans:** (d) সব কয়টি

46. **Ans:** (a) $(2, 0)$

47. **Sol^n: (b);** বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
$AC =$ ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
$OA =$ স্পর্শকের দৈঘ্য $= \sqrt{0 + c} = \sqrt{c}$
$\therefore \Delta OAC = \frac{1}{2} \times OA \times AC = \frac{1}{2}\sqrt{c(g^2 + f^2 - c)}$ $[\because AC \perp OA]$
$\therefore$ OACB চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \Delta OAC = \sqrt{c(g^2 + f^2 - c)}$



48. **Sol^n: (c);** বৃত্তের কেন্দ্র $(a, 0)$ ও ব্যাসার্ধ $= a$
রেখাটি $x + y - 1 = 0 \therefore \frac{|a+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = a \Rightarrow (a-1)^2 = a^2 \times 2 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 2a^2 \Rightarrow a^2 + 2a = 1$

49. **Ans:** (c) $a = b$

50. **Ans:** (e) সবগুলো

Written

51. **Sol^n:** $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(a, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{a^2} = a$ একক

বৃত্তের কেন্দ্র $(a, 0)$ থেকে $lx + my = 1$ অর্থাৎ $lx + my - 1 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \frac{|la-1|}{\sqrt{l^2+m^2}}$

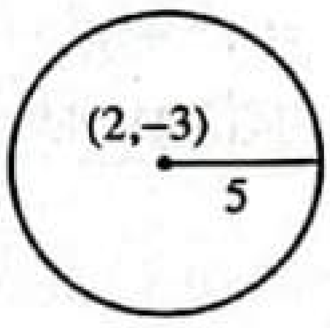
রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে। $\therefore \frac{|la-1|}{\sqrt{l^2+m^2}} = a$

$\Rightarrow |la - 1|^2 = a^2(l^2 + m^2)$ [বর্গ করে] $\Rightarrow (la - 1)^2 = a^2l^2 + a^2m^2$

$\Rightarrow l^2a^2 - 2la + 1 = a^2l^2 + a^2m^2 \therefore a^2m^2 + 2al = 1$**(Showed)**

52. **Sol^n:** আমরা জানি, কেন্দ্র (h, k) এবং r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

অতএব নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = (5)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$



53. **Sol^n:** মনে করি, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র Y-অক্ষের উপর অবস্থান করে বলে $g = 0$

$\therefore$ আমরা পাই, $x^2 + y^2 + 2fy + c = 0$

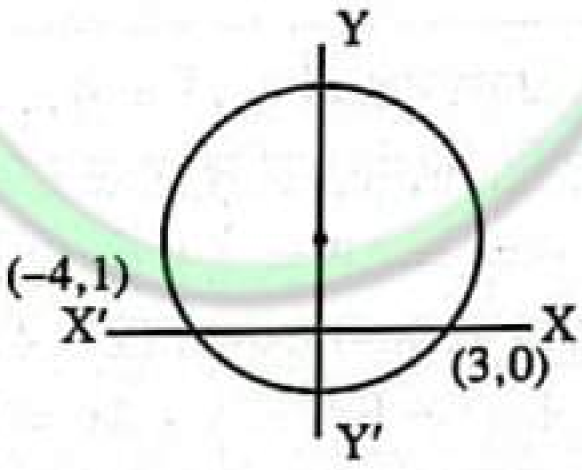
বৃত্তটি (3,0) এবং (−4,1) বিন্দু দিয়ে যায় $\therefore 9 + c = 0 \ldots\ldots$ (i)

এবং $16 + 1 + 2f + c = 0 \ldots\ldots$ (ii)

(i) থেকে $c = -9$

(ii) এ c এর মান বসিয়ে $17 + 2f - 9 = 0 \Rightarrow 2f = -8 \Rightarrow f = -4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$



54. **Sol^n:** মনে করি, বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \ldots\ldots$ (i)

বৃত্তটি X-অক্ষকে (4,0) বিন্দুতে স্পর্শ করে। সুতরাং আমরা পাই, $g^2 = c \ldots\ldots$ (ii)

এবং $16 + 8g + c = 0$ [$x = 4$ এবং $y = 0$ বসিয়ে]

$\Rightarrow 16 + 8g + g^2 = 0$ [(ii) থেকে]

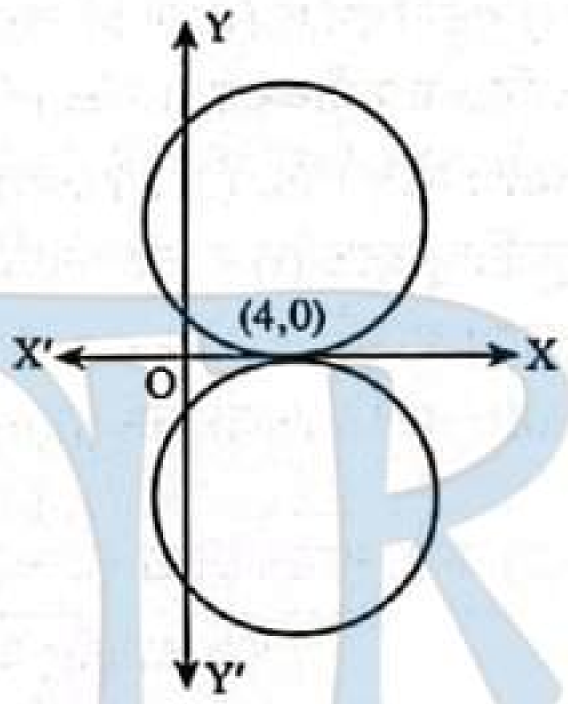
$\Rightarrow (g + 4)^2 = 0, \therefore g = -4$ এবং $c = g^2 = (-4)^2 = 16$

যেহেতু Y-অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ = 6 একক $\therefore 2\sqrt{f^2 - c} = 6 \Rightarrow \sqrt{f^2 - c} = 3$

$\Rightarrow f^2 - c = 9$ [বর্গ করে] $\Rightarrow f^2 - 16 = 9$ বা, $f^2 = 25 \therefore f = \pm 5$

f এর দুইটি মান X-অক্ষের দুই পার্শ্বে দুইটি বৃত্ত নির্দেশ করে।

অতএব বৃত্ত দুইটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 8x \pm 10y + 16 = 0$



55. **Sol^n:** আমরা জানি, $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ: $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$, যখন m = স্পর্শকের ঢাল

$\Rightarrow (y - mx)^2 = r^2(1 + m^2) \Rightarrow (x^2 - r^2)m^2 - 2xym + (y^2 - r^2) = 0$

যা m এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

ধরি, মূল দুইটি m_1, m_2. সুতরাং স্পর্শক দুইটি লম্বভাবে ছেদ করলে $m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow \frac{y^2-r^2}{x^2-r^2} = -1$, যেহেতু $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow y^2 - r^2 = -x^2 + r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2r^2$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

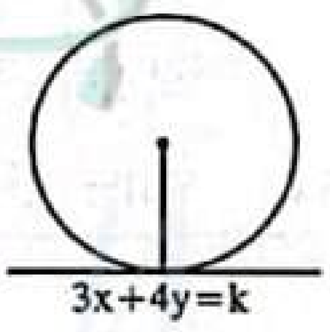
56. **Sol^n:** প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 10x$

$\Rightarrow (x^2 - 10x + 25) + y^2 = 25 \Rightarrow (x - 5)^2 + y^2 = (5)^2$ এর কেন্দ্র (5,0) এবং ব্যাসার্ধ = 5 একক

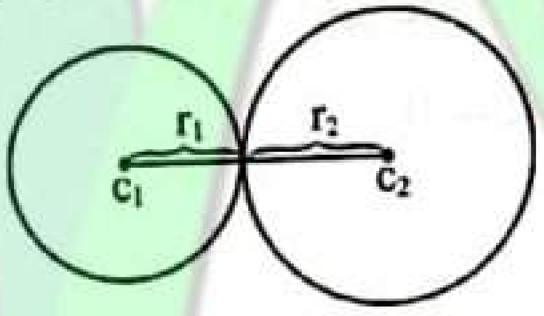
$3x + 4y = k \Rightarrow 3x + 4y - k = 0$ রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করলে বৃত্তের কেন্দ্র (5,0) থেকে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্ব দৈর্ঘ্য বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে। অর্থাৎ $\left|\frac{3.5+4.0-k}{\sqrt{9+16}}\right| = 5 \Rightarrow \frac{15-k}{5} = \pm 5 \Rightarrow 15 - k = \pm 25$

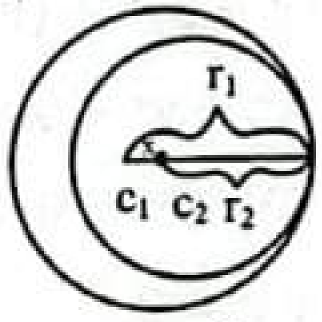
(+) নিয়ে, $15 - k = 25 \Rightarrow k = -10$. (−) নিয়ে, $15 - k = -25 \Rightarrow k = 40$

$\therefore$ নির্ণেয় k এর মান 40 অথবা −10.

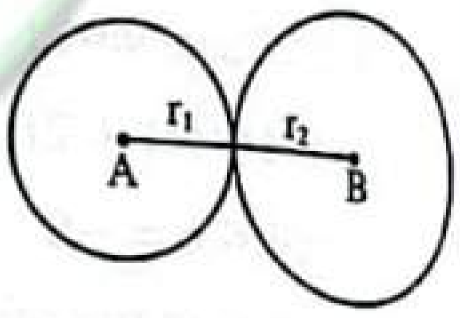


57. **Sol^n:** খলিফার নিয়মানুসারে $(1, 2)$ ও $(3, 2)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,
$(x-1)(x-3)+(y-2)(y-2)+k\{(x-1)(2-2)-(y-2)(1-3)\}=0$
$\Rightarrow x^2-4x+3+y^2-4y+4+k\{(x-1).0-(y-2)(-2)\}=0$
$\Rightarrow x^2+y^2-4x+(-4+2k)y+7-4k=0 \ldots\ldots\ldots$ (i)
(i) বৃত্তটিকে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $g=-2, f=k-2$ ও $c=7-4k$
বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে বলে, $g^2=c \Rightarrow (-2)^2=7-4k \Rightarrow 4k=7-4 \therefore k=\frac{3}{4}$
k এর মান (i) এ বসিয়ে পাই, $x^2+y^2-4x+\left(-4+2\times\frac{3}{4}\right)y+7-4\times\frac{3}{4}=0$
$\Rightarrow x^2+y^2-4x+\frac{-8+3}{2}y+4=0 \therefore 2x^2+2y^2-8x-5y+8=0$; ইহাই নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।
দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করার শর্ত: মনে করি, C_1 ও C_2 কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 ও r_2।





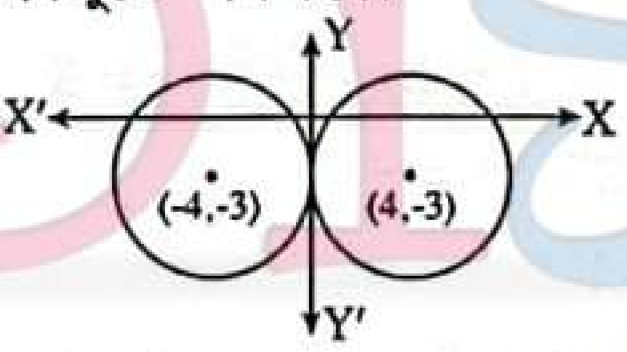
58. **Sol^n:** প্রদত্ত বৃত্ত $x^2+y^2=4 \ldots\ldots$ (i) $\therefore$ (i) বৃত্তটির কেন্দ্র $A(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1=2$ একক
মনে করি, নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $B(4,3)$ এবং ব্যাসার্ধ r_2 বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।
$\therefore r_1+r_2=AB \Rightarrow 2+r_2=\sqrt{4^2+3^2}=5 \Rightarrow r_2=3$ একক
$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x-4)^2+(y-3)^2=3^2 \Rightarrow x^2-8x+16+y^2-6y+9=9$
$\therefore x^2+y^2-8x-6y+16=0$ **(Ans.)**



59. **Sol^n:** মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ a. তাহলে বৃত্তের পোলার সমীকরণ, $a^2=r^2+4^2-2\,r.4\cos(\theta-45°) \ldots\ldots\ldots$ (i)
(i) বৃত্তটি পোল $(0, 0°)$ বিন্দুগামী বলে, $a^2=0^2+16-8.0.\cos(0°-45°) \Rightarrow a=4$
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $16=r^2+16-8r\cos(\theta-45°) \Rightarrow r^2=8r\cos(\theta-45°)$

60. **Sol^n:** মনে করি, $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2-2x-4y+c=0 \ldots\ldots\ldots$ (i)
মূলবিন্দু হতে (i) বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{c}$
প্রশ্নমতে, $\sqrt{c}=2 \Rightarrow c=4 \therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2-2x-4y+4=0$

61. **Sol^n:** বৃত্তটি Y-অক্ষকে $(0,-3)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।
মনে করি, বৃত্তের কেন্দ্র $(h,-3)$



Y-অক্ষ হতে কেন্দ্রের দূরত্ব, $|h|=4 \therefore h=\pm4 \therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র $(\pm4,-3)$, ব্যাসার্ধ $=|h|=4$ একক
$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x\pm4)^2+(y+3)^2=4^2 \Rightarrow x^2+y^2\pm8x+6y+9=0$

62. **Sol^n:** বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য a একক হলে, কর্ণ $=\sqrt{2}a$ এবং ক্ষেত্রফল $=a^2$
এখানে, $a^2=18 \Rightarrow a=3\sqrt{2}$ একক $\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r=\frac{\sqrt{2}a}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3$ একক
$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ: $(x-3)^2+(y-4)^2=3^2 \Rightarrow x^2+y^2-6x-8y+16=0$ **(Ans.)**

63. **Sol^n:** $3x+2y+k=0 \Rightarrow y=\frac{-3}{2}x-\frac{k}{2}$
আবার, $x^2+y^2=9^2$; শর্তানুসারে, $-\frac{k}{2}=\pm9\sqrt{1+\left(\frac{-3}{2}\right)^2} \Rightarrow k=\pm18\sqrt{\frac{11}{4}} \Rightarrow k=\pm9\sqrt{11}$ **(Ans.)**

64. **Sol^n:** $x^2+y^2-by=0 \Rightarrow r^2-br\sin\theta=0 \therefore r=b\sin\theta$

> হৃদয়কে অনুসরণ করো, কিন্তু মস্তিষ্ক সাথে রাখো!
>
> Alfred Adler

অধ্যায় ০৭

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

সংযুক্ত কোণ (Associated Angle): ত্রিকোণমিতিতে যেকোনো পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য $\left\{n \times \left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \theta\right\}$ বা $(n \times 90° \pm \theta)$ আকারের কোণ হল সংযুক্ত কোণ।

- $(-\theta)$ আকারের সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

- $\left\{n \times \left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \theta\right\}$ বা $(n \times 90° \pm \theta)$ আকারের সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

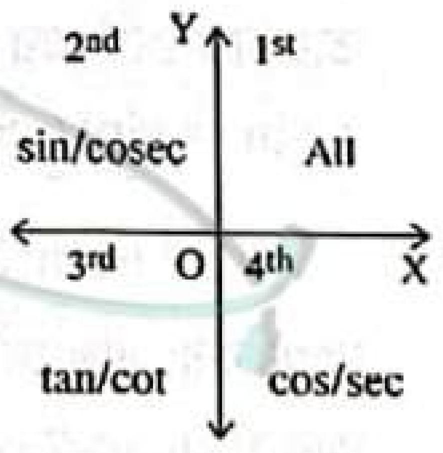
$\left\{n \times \left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \theta\right\}$ বা $(n \times 90° \pm \theta)$ আকারের সংযুক্ত কোণের ক্ষেত্রে, n এর মানের উপর অনুপাত এবং Quadrant এর উপর চিহ্ন নির্ভর করে।

(i) n বিজোড় হলে, [90° এর বিজোড় গুণিতকের জন্য]

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	ব্যাখ্যা
sine ⇌ cosine	sin পরিবর্তীত হয়ে cos এবং cos পরিবর্তীত হয়ে sin -এ পরিণত হবে।
tangent ⇌ cotangent	tan পরিবর্তীত হয়ে cot এবং cot পরিবর্তীত হয়ে tan -এ পরিণত হবে।
secant ⇌ cosecant	sec পরিবর্তীত হয়ে cosec এবং cosec পরিবর্তীত হয়ে sec -এ পরিণত হবে।

জেনে রাখো

এভাবে, 90° এর বিজোড় গুণিতকের জন্য একটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত পরিবর্তীত হয়ে অন্য একটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে রূপান্তরিত হয়। এই দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে বলা হয় পরস্পরের cofunction (কোফাংশন)। যেমন: sin এর cofunction cos এবং cos এর cofunction sin. tan এর cofunction cot এবং cot এর cofunction tan. আবার sec এর cofunction cosec এবং cosec এর cofunction sec.



(ii) n জোড় হলে, [90° এর জোড় গুণিতকের জন্য] ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর কোনো পরিবর্তন হয় না

চিহ্ন: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ১ম চতুর্ভাগে সবগুলো অনুপাত ধনাত্মক। ২য় চতুর্ভাগে শুধুমাত্র sine বা cosecant ধনাত্মক আর বাকিগুলো ঋণাত্মক। একইভাবে ৩য় চতুর্ভাগে শুধুমাত্র tangent বা cotangent এবং ৪র্থ চতুর্ভাগে শুধুমাত্র cosine বা secant ধনাত্মক।

মনে রাখার সুবিধার জন্য,

Quadrant→	1st	2nd	3rd	4th
	All	students	take	care
		↓ sin(e)	↓ tan(gent)	↓ cos(ine)

উদাহরণস্বরূপ $\sin(3\times 90^\circ+\theta)=-\cos\theta$. কারণ এক্ষেত্রে $(3\times 90^\circ+\theta)$ কোণটিতে 90° এর বিজোড় গুণিতক রয়েছে। তাই sine পরিবর্তিত হয়ে cosine হয়েছে এবং $(3\times 90^\circ+\theta)$ কোণটি ৪র্থ চতুর্ভাগে (Quadrant) অবস্থিত বলে ঋণাত্মক (−) চিহ্ন বসেছে [যেহেতু ৪র্থ চতুর্ভাগে sine এর মান ঋণাত্মক]।

আবার, $\tan(6\times 90^\circ+\theta)=\tan\theta$, কারণ এক্ষেত্রে $(6\times 90^\circ+\theta)$ কোণটিতে 90° এর জোড় গুণিতক রয়েছে। তাই tangent পরিবর্তীত হবে না এবং কোণটি তৃতীয় চতুর্ভাগে যায় বলে (+) ধনাত্মক চিহ্ন রয়েছে [∵ তৃতীয় চতুর্ভাগে tangent এর মান ধনাত্মক]।

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

Type–01: সংযুক্ত কোণ সম্বলিত ত্রিকোণমিতিক রাশি

Concept

এক্ষেত্রে, $\mathrm{TF}\left(n\times\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)$ বা $\mathrm{TF}(n\times 90^\circ\pm\theta)$ এর জন্য 'গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা'য় আলোচিত শর্তসমূহ বসিয়ে মান নির্ণয় করতে হবে। যেখানে, TF = Trigonometric Function [যেমন, sin, cos, tan, cot, sec, cosec ইত্যাদি]

Problems

Example-01: $\sin\frac{8\pi}{3}=\sin(480^\circ)$

Sol^n: Step: (i) প্রথমে প্রদত্ত কোণ কততম চতুর্ভাগে তা দেখবো। যেমন: $480^\circ=(5\times 90+30)$

∴ (ii) ঐ চতুর্ভাগে প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন (+) না কি (−) দেখবো। যেমন: ২য় চতুর্ভাগে sin(+) তাই সামনে (+) চিহ্ন হবে।

(iii) এবারে 90° এর জোড় না বিজোড় গুণিতক লক্ষ্য করব। জোড় হলে ঐ ফাংশনই বিজোড় হলে ঐ ফাংশনের কো-ফাংশন লিখবো। যেমন: 5×90 অর্থাৎ, 90 এর বিজোড় গুণিতক ∴ sin এর কো-ফাংশন cos লিখবো।

$$\therefore \sin 480^\circ=\underset{\downarrow}{\sin}(\underset{\downarrow}{5}\times 90^\circ+30^\circ)$$
$$=+\cos(30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

বিকল্প: $\sin 480^\circ=\sin(540^\circ-60^\circ)=\sin(6\times 90^\circ-60^\circ)$

(i) প্রথমে কোণ লক্ষ করব। কততম চতুর্ভাগে আছে। ঐ চতুর্ভাগে প্রদত্ত ফাংশন (+) না (−)। যেমন: sin ২য় চতুর্ভাগে (+) তারপরে 90° এর জোড় নাকি বিজোর গুণিতক এখানে জোড় গুণিতক $(6\times 90^\circ)$ তাই sin অপরিবর্তিত থাকবে।

$$\therefore \sin=\underset{\downarrow}{\sin}(\underset{\downarrow}{6}\times 90^\circ-60^\circ)$$
$$=+\sin(30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[লক্ষ কর: এখানে sin কে sin রাখার জন্য জোড় গুণিতক সাপেক্ষে কোণ নেওয়া হয়েছে। আগের পদ্ধতিটি বিজোড় গুণিতকের কারণে sin কিন্তু cos এ রূপান্তর হয়ে গেছে কিন্তু সাংখ্যিক মান ও চিহ্ন সব ক্ষেত্রেই সমান]

Example-02: $\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)=?$

Sol^n: $\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{24\pi-\pi}{6}\right)=\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(8.\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

[$8.\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$ এর ক্ষেত্রে, $\frac{\pi}{2}$ এর জোড় গুণিতক থাকার কারণে sine এর কোনো পরিবর্তন হবে না এবং $8.\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$ চতুর্থ চতুর্ভাগে যাবার কারণে চিহ্ন ঋণাত্মক (−) হবে] [চতুর্থ চতুর্ভাগে sine এর চিহ্ন ঋণাত্মক (−)]

বিকল্প: $\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{21\pi+2\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{21\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

[$\left(\frac{7\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ এর ক্ষেত্রে, $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক থাকার কারণে sine পরিবর্তীত হয়ে তার cofunction cosine -এ রূপান্তরিত হবে এবং $\left(\frac{7\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ চতুর্থ চতুর্ভাগে যাবার কারণে চিহ্ন (–) ঋণাত্মক হবে [চতুর্থ চতুর্ভাগে sine এর চিহ্ন ঋণাত্মক (–)]

Example-03. $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right) = ?$

Sol^n: $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. **(Ans.)**

Example-04: n একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে, $\text{cosec}\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

(a) ± 2 (b) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\pm\frac{1}{2}$ (d) None of these

Solution: (d); n জোড় সংখ্যা হলে, ধরি, $n = 2m$ যেখানে, m পূর্ণ সংখ্যা

$\therefore \text{cosec}\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\} = \text{cosec}\left\{\frac{2m\pi}{2}+(-1)^{2m}\frac{\pi}{6}\right\} = \text{cosec}\left\{m\pi+\frac{\pi}{6}\right\} = \pm\text{cosec}\frac{\pi}{6} = \pm 2$

আবার, n বিজোড় হলে, ধরি, $n = 2m+1$, যেখানে, $m \in \mathbb{Z}$

$\therefore \text{cosec}\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\} = \text{cosec}\left\{(2m+1)\frac{\pi}{2}+(-1)^{2m+1}\frac{\pi}{6}\right\}$

$= \text{cosec}\left\{m\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right\} = \text{cosec}\left(m\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \pm\text{cosec}\frac{\pi}{3} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

Example-05: ABCD চর্তুভূজের কোণগুলি যথাক্রমে A, B, C, D হয়, তাহলে $\sin(A+B+C)+\sin(A+B+C+2D) = ?$

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) None of these

Sol^n: (a); ABCD চর্তুভূজে $A+B+C+D = 360°$

$\therefore \sin(A+B+C)+\sin(A+B+C+2D) = \sin(A+B+C+D-D)+\sin(A+B+C+D+D)$

$= \sin(360°-D)+\sin(360°+D) = -\sin D+\sin D = 0$ **(Ans.)**

Example-06: $5\sin(x+30°)-2$ এর সর্বোচ্চ মান?

(a) 5 (b) 3 (c) -5 (d) 7

Sol^n: (b) 3

Example-07: $\cos^2 x, x \in \mathbb{R}$ এর বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান হচ্ছে যথাক্রমে-

(a) 0 এবং -1 (b) 1 এবং 0 (c) -1 এবং ∞ (d) -1 এবং 1

Sol^n: (b) 1 এবং 0

Example-08: কোনটি সঠিক নয়? **[RU'08-09]**

(a) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ (b) $\cos(-\theta) = \cos\theta$ (c) $\sec(-\theta) = \sec\theta$ (d) $\text{cosec}(-\theta) = \text{cosec}\,\theta$

Sol^n: (d) $\text{cosec}(-\theta) = \text{cosec}\,\theta$

Example-09: যখন n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা তখন $\cos n\pi$ এর মান? **[SUST'06-07]**

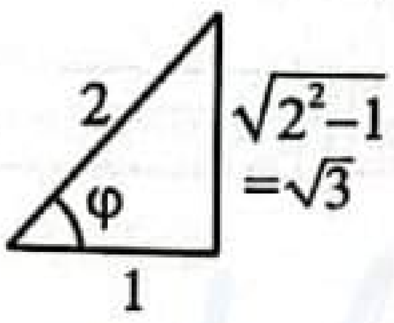
(a) 1 (b) -1 (c) $(-1)^n$ (d) 0

Sol^n: (c) $(-1)^n$

Example-10: যদি $\cos\varphi = \frac{1}{2}, \frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$ হলে $\tan\varphi$ এর মান হবে?

(a) $-\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution: (a);



$\therefore \tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} \therefore \varphi = -\sqrt{3}$ [$\frac{\sqrt{3}}{2} < \varphi < 2\pi$ চতুর্থ চতুর্ভাগে $\tan\varphi = -ve$]

Example-11: $\sum_{i=1}^{3}(\sin^2\theta_i+\cos^2\theta_i) = ?$ **[JU'09-10]**

(a) 1 (b) 0 (c) 3 (d) $1+2+3$

Sol^n: (c); $\sum_{i=1}^{3}(\sin^2\theta_i+\cos^2\theta_i)$

$= (\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1)+(\sin^2\theta_2+\cos^2\theta_2)+(\sin^2\theta_3+\cos^2\theta_3) = 1+1+1 = 3$

Example-12: 1 রেডিয়ান সমান কত? [JU'09-10]

(a) 2π সমকোণ
(b) $\frac{2}{\pi}$ সমকোণ
(c) 2 সমকোণ
(d) π সমকোণ

Sol^n: (b) $\frac{2}{\pi}$ সমকোণ

Example-13: $\frac{\text{কোন বৃত্তের পরিধি}}{\text{ঐ বৃত্তের ব্যাস}} = ?$ [JU'09-10]

(a) π
(b) $\frac{1}{2\pi}$
(c) π
(d) 2π

Sol^n: (a) π

Example-14: ত্রিকোণমিতিতে কোণ পরিমাপের জন্য ব্যবহৃত পদ্ধতি: [JU'08-09]

(a) ষাটমূলক
(b) শতমূলক
(c) বৃত্তীয়
(d) সবগুলো

Sol^n: (d) সবগুলো

Example-15: ষাটমূলক পদ্ধতিতে $\frac{5\pi}{16}$ রেডিয়ান =? [CU'08-09]

(a) $225°$
(b) $84°$
(c) $80°$
(d) $\left(\frac{225}{4}\right)°$

Sol^n: (d) $\left(\frac{225}{4}\right)°$

Example-16: $50°\,37'\,30'' =$ কত রেডিয়ান? [CU'08-09]

(a) $\frac{\pi}{32}$
(b) $\frac{3\pi}{32}$
(c) $\frac{9\pi}{32}$
(d) $\frac{5\pi}{32}$

Sol^n: (c) $\frac{9\pi}{32}$

Example-17: $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right)$ এর মান কত? [GST'22-23]

(a) -1
(b) 0
(c) $-\cos\alpha$
(d) $\sqrt{3}\sin\alpha$

Sol^n: (b); $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\pi + \left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right)$ $\left[\because \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\right]$

$= \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ $[\because \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta] = 0$

Type-02: ধারা সংক্রান্ত

Concept

সমান্তর ধারার n তমপদ, $T_n = a + (n-1)d$; এখানে, a =১ম পদ, d = সাধারণ অন্তর।

ধারায় সাধারণত দুই ধরনের সমস্যা পরীক্ষায় আসতে দেখা যায়।

(i) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর বর্গের বীজগাণিতিক সমষ্টি আকৃতি।

(ii) tangent অথবা cotangent অনুপাতগুলোর গুণ আকৃতি।

Category-01: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর বর্গের বীজগাণিতিক সমষ্টি আকৃতি

Concept

$$\left.\begin{array}{l}\text{এক্ষেত্রে, } \sin^2 A_1 + \sin^2 A_2 + \sin^2 A_3 + \ldots\ldots\ldots + \sin^2 A_n \\ \text{বা, } \cos^2 A_1 + \cos^2 A_2 + \cos^2 A_3 + \ldots\ldots\ldots + \cos^2 A_n\end{array}\right]$$

যেখানে, $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ সমান্তর প্রগমনভুক্ত।

এভাবে ধারা দেওয়া থাকে এবং মান নির্ণয় করতে হয়।

এক্ষেত্রে, প্রয়োজনীয় সূত্র হলো, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ এবং অন্যান্য অনুপাতগুলোর ক্ষেত্রে,
$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ এবং $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

এক্ষেত্রে, $\sin^2 A_1$ এর সাথে ধারার অন্য কোনো পদের যোগ করে 1 বানানোর জন্য একটি পদকে $\sin^2\left\{(2m+1)\frac{\pi}{2} \pm A_1\right\}$ $m \in \mathbb{Z}$ আকৃতিতে প্রকাশ করে $\cos^2 A_1$ বানিয়ে নিতে হয়। (Example দেখ)

$\left[(2m+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}\right.$ এর বিজোড় গুণিতক]

Shortcut

$\sin^2 A_1 + \sin^2 A_2 + \dots\dots\dots + \sin^2 A_n$ বা $\cos^2 A_1 + \cos^2 A_2 + \dots\dots\dots\dots + \cos^2 A_n$ এর জন্য যদি $A_1 + A_n = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ $[m \in \mathbb{Z}]$ হয় তাহলে উত্তর হবে $\frac{n}{2}$. [যেখানে, n হলো পদ সংখ্যা]

Problems

Example-18: $\sin^2 18° + \sin^2 36° + \sin^2 54° + \sin^2 72° = ?$ **[BUTex'12-13]**

Solⁿ: $\sin^2 18° + \sin^2 36° + \sin^2 54° + \sin^2 72°$

$= \sin^2 18° + \sin^2 36° + [\sin(90° - 36°)]^2 + [\sin(90° - 18°)]^2$

$= \sin^2 18° + \sin^2 36° + \cos^2 36° + \cos^2 18°$

$= (\sin^2 18° + \cos^2 18°) + (\sin^2 36° + \cos^2 36°) = 1 + 1 = 2$ **(Ans.)**

Example-19: মান নির্ণয় কর: $\cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2\frac{31\pi}{24} + \cos^2\frac{37\pi}{24}$

Sol^n: $\cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2\frac{31\pi}{24} + \cos^2\frac{37\pi}{24} \;= \cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2\frac{17\pi}{24} + \cos^2\frac{11\pi}{24}$

$= \cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{11\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2\frac{17\pi}{24} = \cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}\right) + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2\left(3\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{19\pi}{24}\right)$

$= \cos^2\frac{\pi}{24} + \sin^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \sin^2\frac{19\pi}{24} = 1 + 1 = 2$

[এই ধরনের সমস্যায় কোণের ভগ্নাংশের লবের π এর গুণিতক > হর হলে, একে হরের চেয়ে ছোট করে নিতে হবে। যেমন: $\cos^2\frac{31\pi}{24} = \cos^2\left(\frac{2\cdot24\pi - 17\pi}{24}\right) = \cos^2\left(2\pi - \frac{17\pi}{24}\right) = \cos^2\frac{17\pi}{24}$ এর পর $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ জোড় গঠন করতে হবে। এক্ষেত্রে লক্ষ রাখতে হবে যেন 2 টি ভগ্নাংশের যোগ বা বিয়োগফল $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক হয়। যেমন: $\frac{\pi}{24} + \frac{11\pi}{24} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{11\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}$ ফলে $\cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{11\pi}{24} = \cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}\right) = \cos^2\frac{\pi}{24} + \sin^2\frac{\pi}{24} = 1$] **(Ans.)**

Example-20: $\sin^2 3° + \sin^2 9° + \sin^2 15° + \cdots + \sin^2 177° = ?$

Sol^n: $3, 9, 15, \dots, 177$ সমান্তর প্রগমন এবং পদ সংখ্যা n হলে, $177 = 3 + (n-1)6 \;\therefore n = 30$

$\therefore \sin^2 3° + \sin^2 9° + \sin^2 15° + \cdots + \sin^2 177°$

$= (\sin^2 3° + \sin^2 93°) + (\sin^2 9° + \sin^2 99°) + \cdots$ (15 তম পদ পর্যন্ত)

$= (\sin^2 3° + \cos^2 3°) + (\sin^2 9° + \cos^2 9°) + \cdots$ (15 তম পদ পর্যন্ত) $= 1 + 1 + \cdots$ (15 তম পদ পর্যন্ত)$= 15$

[এ ধরনের অংকে $\sin^2\theta$ এবং $\cos^2\theta$ এর ক্ষেত্রে Shortcut Way উত্তর হচ্ছে $\frac{n}{2}$ ।

যেমন: এখানে, $n = 30 \;\therefore$ উত্তর $= \frac{30}{2} = 15$] **(Ans.)**

Example-21: $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14}$ **[RU' 09-10]**

Sol^n: $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14} = \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) + \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right)$

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7} = 2$ **(Ans.)**

Category-02: tangent অথবা cotangent অনুপাতগুলোর গুণ আকৃতি

Concept

এক্ষেত্রে $\tan A_1 . \tan A_2 . \tan A_3 \dots\dots\dots \tan A_n$ বা, $\cot A_1 . \cot A_2 . \cot A_3 \dots\dots\dots \cot A_n$ এভাবে ধারা দেওয়া থাকে এবং মান নির্ণয় করতে হয়। এক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় সুত্র হলো, $\tan\theta . \cot\theta = \tan\theta . \frac{1}{\tan\theta} = 1$

এক্ষেত্রে $\tan A_1$ এর সাথে ধারার অন্য কোনো পদ গুণ করে 1 বানানোর জন্য একটি পদকে $\tan\left((2m+1)\frac{\pi}{2} \pm A_1\right)$ $[m \in \mathbb{Z}]$ আকৃতিতে প্রকাশ করে $\cot A_1$ (বা $-\cot A_1$) বানিয়ে নিতে হয়।

Shortcut

(i) $4n\theta = \pi$ হলে, $\tan\theta.\tan 2\theta.\tan 3\theta \dots\dots \tan(2n-1)\theta = \cot\theta.\cot 2\theta.\cot 3\theta \dots\dots \cot(2n-1)\theta = 1$

(ii) $2n\theta = \pi$ হলে, $\tan\theta.\tan 2\theta.\tan 3\theta \dots\dots \tan(n-1)\theta.\tan(n+1)\theta \dots\dots \tan(2n-1)\theta = (-1)^{n-1}$

এবং $\cot\theta.\cot 2\theta.\cot 3\theta \dots\ \dots \cot(n-1)\theta.\cot(n+1)\theta \dots\dots \cot(2n-1)\theta = \frac{1}{(-1)^{n-1}}$

(iii) $2n\theta = \pi$ হলে, $\tan\theta.\tan 3\theta.\tan 5\theta \dots\dots \tan(2n-1)\theta = (-1)^{\frac{n}{2}}$

এবং $\cot\theta.\cot 3\theta.\cot 5\theta \dots\dots \cot(2n-1)\theta = \frac{1}{(-1)^{\frac{n}{2}}}$

(iv) $2n\theta = \pi$ হলে, $\tan\theta.\tan 3\theta.\tan 5\theta \dots\dots \tan(n-1)\theta = \cot\theta.\cot 3\theta.\cot 5\theta \dots\dots \cot(n-1)\theta = 1$

Problems

Example-22: $\theta = \frac{\pi}{20}$ হলে $\cot\theta\cot 3\theta\cot 5\theta \cdots \cot 19\theta = ?$ **[BUET'11-12]**

Solⁿ: $20\theta = \pi \Longrightarrow 10\theta = \frac{\pi}{2}$ এখন $\cot x \cot(10\theta + x) = \cot x \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x(-\tan x) = -1$

ফলে $\cot\theta\cot 11\theta = \cot 3\theta\cot 13\theta = \cdots = \cot 9\theta\cot 19\theta = -1$

এখানে $\cot\theta$ থেকে $\cot 9\theta$ পর্যন্ত পদসংখ্যা $= \frac{9-1}{2} + 1 = 5$ $\therefore \cot\theta\cot 3\theta\cot 5\theta \cdots \cot 19\theta = (-1)^5 = -1$

❖ **Shortcut:** $2n\theta = \pi$ এখানে, $20\theta = \pi$ তাহলে, $2n = 20 \therefore n = 10$ এবং $2n - 1 = 19$

$\therefore \cot\theta.\cot 3\theta\cot 5\theta \dots\dots\dots \cot(2n-1)\theta = \frac{1}{(-1)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{(-1)^{\frac{10}{2}}} = \frac{1}{(-1)^5} = -1$ **(Ans.)**

Example-23. $\cot\frac{\pi}{20}.\cot\frac{3\pi}{20}.\cot\frac{5\pi}{20}.\cot\frac{7\pi}{20}.\cot\frac{9\pi}{20} = ?$

Solⁿ: ধরি, $\frac{\pi}{20} = \theta \Rightarrow 20\theta = \pi \therefore 10\theta = \frac{\pi}{2}$ এবং $5\theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি$= \cot\theta.\cot 3\theta.\boxed{\cot 5\theta}.\cot 7\theta.\cot 9\theta$

$= \cot\theta.\cot 9\theta.\cot 3\theta.\cot 7\theta.\cot 5\theta = \cot\theta.\cot(10\theta - \theta).\cot 3\theta.\cot(10\theta - 3\theta).\cot\frac{\pi}{4}$

$= \cot\theta.\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).\cot 3\theta.\cot\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right).1 = (\cot\theta.\tan\theta).(\cot 3\theta.\tan 3\theta).1 = 1.1.1 = 1$ (Ans.)

❖ **Shortcut:** ধরি, $\frac{\pi}{20} = \theta \therefore 20\theta = \pi$; এখন, $2n\theta = \pi \therefore 2n = 20 \Rightarrow n = 10 \therefore \boxed{n - 1 = 9}$

$\cot\theta.\cot 3\theta.\cot 5\theta \dots\dots.. \cot 9\theta = \cot\theta.\cot 3\theta.\cot 5\theta \dots\dots\dots \cot(n-1)\theta = 1$

Example-24: $\log\tan 1° + \log\tan 2° + \dots\dots\dots + \log\tan 89° = ?$

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) None of these

Solⁿ: (b); $\log\tan 1° + \log\tan 2° + \dots\dots\dots + \log\tan 89°$

$= \log(\tan 1° \cdot \tan 2° \cdot \tan 3° \dots\dots\dots \tan 89°)$

$= \log\{\tan 1° \tan(90° - 1°)\} \cdot \{\tan 2° \cdot \tan(90° - 2°)\} \dots\dots\dots\}$

$= \log\{(\tan 1° \cot 1°) \cdot (\tan 2° \cdot \cot 2°) \dots\dots\dots\}$

$= \log\{1 \times 1 \dots\dots\dots\} = \log 1 = 0$ **(Ans.)**

Category-03: অন্যান্য

Concept

এক্ষেত্রে $\left(2m \times \left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \theta\right)$ $m \in \mathbb{Z}$ এর জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন পরিবর্তন বিবেচনা করে মান নির্ণয় করতে হবে।

[$2m \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow 90°$ বা $\frac{\pi}{2}$ এর জোড় গুণিতকের ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের কোন পরিবর্তন হয় না।]

Problems

Example-25: $\tan 15° + \tan 45° + \tan 75° + \cdots + \tan 165° = ?$

Solⁿ: $\frac{165-15}{30} + 1 = 6$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \tan 15° + \tan(180° - 15°) + \tan 45° + \tan(180° - 45°) + \tan 75° + \tan(180° - 75°)$

$= \tan 15° - \tan 15° + \tan 45° - \tan 45° + \tan 75° - \tan 75° = 0$ **(Ans.)**

Example-26: $\cos 1° \cos 2° \cos 3° \ldots\ldots\ldots \cos 179° = ?$

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 0 (c) 1 (d) None of these

Solⁿ: (b); প্রদত্ত রাশিমালায় $\cos 90°$ একটি উৎপাদক আছে। $[\cos 90° = 0]$

Example-27: $\cos^2 30° + \cos^2 60° + \ldots\ldots\ldots + \cos^2 180°$ এর মান $= ?$ **[DU'06-07]**

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Solⁿ: (c); $\cos^2 30° + \cos^2 60° + \ldots\ldots\ldots + \cos^2 180°$

$= \cos^2 30° + \cos^2 60° + \cos^2 90° + \cos^2 120° + \cos^2 150° + \cos^2 180°$

$= \cos^2 30° + \cos^2 60° + \cos^2 90° + \cos^2(90° + 30°) + \cos^2(90° + 60°) + \cos^2 180°$

$= (\cos^2 30° + \sin^2 30°) + (\cos^2 60° + \sin^2 60°) + \cos^2 90° + \cos^2 180° = 1 + 1 + 0 + 1 = 3$ **(Ans.)**

Type–03: যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

Concept

যৌগিক কোণ (Compound Angle): দুই বা ততোধিক মৌলিক কোণের বীজগাণিতিক সমষ্টিকে যৌগিক কোণ বলে। যেমন, α, β ও γ তিনটি মৌলিক কোণ হলে $\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta - \gamma$ ইত্যাদি হলো যৌগিক কোণ।

জেনে রাখো

মৌলিক কোণ বলতে "একটি কোণ" বোঝানো হচ্ছে। যেমন শুধু 30° লেখা হলে তা মৌলিক কোণ। কিন্তু 10° + 20° লেখা হলে, 10° ও 20° হলো মৌলিক কোণ এবং 10° + 20° হলো যৌগিক কোণ।

Formula:

- $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$
- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
- $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

Problems

Example-28: $\tan 15° = ?$ **[JU'19-20]**

Solⁿ: $\tan 15° = \tan(45° - 30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° . \tan 30°} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3 + 1 - 2\sqrt{3}}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3}$ **(Ans.)**

Example-29: $\sin x \sin(x + 30°) + \cos x \sin(x + 120°) = ?$ **[SAU' 14-15]**

Solⁿ: $\sin x \sin(x + 30°) + \cos x \sin(90° + x + 30°)$

$= \sin x \sin(x + 30°) + \cos x \cos(x + 30°) = \cos(x - x - 30°) = \cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

Example-30: $\cot\alpha + \cot\beta = a, \tan\alpha + \tan\beta = b$ এবং $\alpha + \beta = \theta$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(a - b)\tan\theta = ab$

Solⁿ: $\tan\theta = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \ldots\ldots\ldots$ (i)

$\cot\alpha + \cot\beta = a \Rightarrow \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} = a; \Rightarrow \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{\tan\alpha\tan\beta} = a \therefore \tan\alpha\tan\beta = \frac{b}{a}$

আবার, (i) $\Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{b}{1 - \frac{b}{a}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{ab}{a-b} \therefore (a - b)\tan\theta = ab$ **(Proved)**

Example-31: প্রমাণ কর যে, $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\sin 2\alpha}{1-4\sin^2\alpha}$

Sol^n: L.H.S $=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}+\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos 2\alpha+\cos\frac{2\pi}{3}}$

$=\frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\frac{1}{2}}=\frac{4\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha-1}=\frac{4\sin 2\alpha}{2(1-2\sin^2\alpha)-1}=\frac{4\sin 2\alpha}{1-4\sin^2\alpha}=$ R. H. S **(Proved)**

Example-32: $a\sin(\theta+\alpha)=b\sin(\theta+\beta)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cot\theta=\frac{a\cos\alpha-b\cos\beta}{b\sin\beta-a\sin\alpha}$

Sol^n: $a\sin(\theta+\alpha)=b\sin(\theta+\beta)$

$\Rightarrow a(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)=b(\sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta)$

$\Rightarrow \sin\theta(a\cos\alpha-b\cos\beta)=\cos\theta(b\sin\beta-a\sin\alpha)$

$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{a\cos\alpha-b\cos\beta}{b\sin\beta-a\sin\alpha}\therefore \cot\theta=\frac{a\cos\alpha-b\cos\beta}{b\sin\beta-a\sin\alpha}$ **(Proved)**

Example-33: যদি $\cot\alpha\cot\beta=2$ হয় তবে $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=?$

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

Sol^n: (a); $\cot\alpha\cot\beta=2\Rightarrow\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=2\Rightarrow\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\frac{2-1}{2+1}\Rightarrow\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{1}{3}$ **(Ans.)**

Example-34: যদি $\theta+\varphi=\alpha$ এবং $\tan\theta=k\tan\varphi$ হয় তবে $\sin(\theta-\varphi)=?$

(a) $\frac{k+1}{k-1}\sin\alpha$ (b) $\frac{k-1}{k+1}\sin\alpha$ (c) $\frac{k-1}{k+1}\cos\alpha$ (d) $\frac{k+1}{k-1}\cos\alpha$

Sol^n: (b); $\tan\theta=k\tan\varphi\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=k\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\Rightarrow\frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sin\varphi\cos\theta}=k$

$\Rightarrow\frac{\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi}=\frac{k-1}{k+1}\Rightarrow\sin(\theta-\varphi)=\frac{k-1}{k+1}\sin(\theta+\varphi)=\frac{k-1}{k+1}\sin\alpha$ **(Ans.)**

Example-35: যদি $\cos(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\delta)=\cos(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\delta)$ হয় তবে, $\cot\alpha\cot\beta\cos\gamma=?$

(a) $\cot\delta$ (b) $-\cot\delta$ (c) $\tan\delta$ (d) $-\tan\delta$

Sol^n: (a); $\cos(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\delta)=\cos(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\delta)$

$\Rightarrow\frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\gamma-\delta)}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\Rightarrow\frac{\sin(\gamma+\delta)+\sin(\gamma-\delta)}{\sin(\gamma+\delta)-\sin(\gamma-\delta)}=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$

$\Rightarrow\frac{2\sin\gamma\cos\delta}{2\cos\gamma\sin\delta}=\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\beta}\Rightarrow\tan\delta\cot\delta=\cot\alpha\cot\beta\Rightarrow\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma=\cot\delta$

Example-36: $A+B+C=\pi$ এবং $\cos B\cos C=\cos A$ হলে, $\tan B\tan C=?$

(a) 1 (b) 2 (c) −1 (d) −2

Sol^n: (b); $A+B+C=\pi\Rightarrow\cos(B+C)=\cos(\pi-A)\Rightarrow\cos B\cos C-\sin B\sin C=-\cos A$

$\Rightarrow\cos B\cos C+\cos B\cos C=\sin B\sin C\Rightarrow 2=\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}\therefore\tan B\tan C=2$

Example-37: $\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+1=0$ হলে, $1+\cot\alpha\tan\beta=?$

(a) 1 (b) −1 (c) 0 (d) 2

Sol^n: (c); $\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+1=0\Rightarrow-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=-1$

$\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=1=\cos 0°\Rightarrow\alpha+\beta=0\therefore\alpha=-\beta\ldots\ldots\ldots(i)$

$\therefore 1+\cot\alpha\tan\beta=1+\cot\alpha\frac{1}{\cot\beta}=1+\cot\alpha\frac{1}{\cot(-\alpha)}$ [∴ (i) হতে] $=1-1=0$

Example-38: $\tan\beta=\frac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$ হয় তবে $\cot\alpha+\cot\gamma=?$

(a) $2\cot\beta$ (b) $2\tan\beta$ (c) $2\cos\beta$ (d) $2\operatorname{cosec}\beta$

Sol^n: (a); $\tan\beta=\frac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}\Rightarrow 2\cot\beta=\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}\Rightarrow 2\cot\beta=\frac{\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$

$\Rightarrow 2\cos\beta=\cot\gamma+\cot\alpha\therefore\cot\alpha+\cot\gamma=2\cot\beta$

Type–04: সংযুক্ত এবং গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত

Concept

গুণিতক কোণ: মৌলিক কোণগুলোকে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে যে কোণ পাওয়া যায় তাকে গুণিতক কোণ বলে। যেমন: 2A, 3A, 5A ইত্যাদি।

Formula:

- $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
- $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$
- $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
- $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$
- $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
- $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
- $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$
- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
- $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

Shortcut

(i) $\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A} = \tan(45° + A)$

(ii) $\frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A} = \tan(45° - A)$

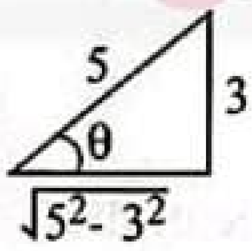
(iii) $A + B = 45°$ হলে, $\tan A + \tan B + \tan A\tan B = 1$ [$A - B = 45°$ হলে, $\tan A - \tan B - \tan A\cdot\tan B = 1$]

(iv) $A + B = 90°$ হলে, $\tan A - \tan B = 2\tan(A - B)$

Problems

Example-39: $\sin\theta = \frac{3}{5}$ হলে $\tan\theta$ এর মান কত? **[JU'20-21]**

Sol

Sol^n: 

$\sin\theta = \frac{3}{5}$; $\tan\theta = \frac{3}{4}$ **(Ans.)**

Example-40: $\sin 5° = p$ হলে $\sin 10°$ এর মান কোনটি? **[RU'20-21]**

Sol^n: $\sin 10° = 2\sin 5°\sqrt{1-\sin^2 5°} = 2p\sqrt{1-p^2}$ **(Ans.)**

Example-41: $\tan\theta = \frac{1}{2}$ হলে, $\sin 2\theta$ এর মান কত? **[JU'19-20]**

Sol^n: $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$ **(Ans.)**

Example-42: $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$ হলে θ এর মান কত? **[CU'20-21]**

Sol^n: $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}\times 2 \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{6} \therefore \theta = \frac{\pi}{12}$ **(Ans.)**

Example-43: $\cos\theta = \frac{4}{5}$ হলে $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। **[JU' 14-15, RU' 09-10]**

Sol^n: $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}$ **(Ans.)**

Example-44: $\cos\theta = \frac{1}{2}$ এবং $\sin\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\sin(\theta+\delta).\sin(\theta-\delta)$ =কত? [RU'22-23]

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{2}{3}$

Sol^n: (c); $\sin(\theta+\delta)\cdot\sin(\theta-\delta) = \sin^2\theta - \sin^2\delta = 1-\cos^2\theta - \sin^2\delta = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Example-45: $\cot 2A + \tan A =?$ [JU'19-20]

Sol^n: $\frac{1}{\tan 2A} + \tan A = \frac{1-\tan^2 A}{2\tan A} + \tan A = \frac{1-\tan^2 A + 2\tan^2 A}{2\tan A} = \frac{1+\tan^2 A}{2\tan A} = \frac{1}{\sin 2A} = \text{cosec } 2A$ **(Ans.)**

Example-46: $\frac{\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+1} =?$ [JU'19-20]

Sol^n: $-\frac{1-\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)} = -\cos\left\{2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right\} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right) = \sin 2\alpha$ **(Ans.)**

Example-47: $\tan\frac{45°+\theta}{2}\tan\frac{45°-\theta}{2} =?$

Sol^n: $\frac{2\sin\frac{45°+\theta}{2}}{2.\cos\frac{45°+\theta}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{45°-\theta}{2}}{\cos\frac{45°-\theta}{2}} = \frac{\cos\theta - \cos 45°}{\cos 45° + \cos\theta} = \frac{\sqrt{2}\cos\theta - 1}{\sqrt{2}\cos\theta + 1}$ **(Ans.)**

Example-48: $\frac{\cos 8° + \sin 8°}{\cos 8° - \sin 8°} = \tan 53°$ প্রমাণ কর।

Sol^n: L. H. S $= \frac{\cos 8° + \sin 8°}{\cos 8° - \sin 8°} = \frac{1+\tan 8°}{1-\tan 8°} = \frac{\tan 45° + \tan 8°}{1 - \tan 45° \tan 8°} = \tan(45°+8°) = \tan 53°$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\frac{\cos 8° + \sin 8°}{\cos 8° - \sin 8°} = \tan(45°+8°) = \tan 53°$ **(Ans.)**

Example-49: $\frac{\cos 27° - \cos 63°}{\cos 27° + \cos 63°} =?$ [JU'18-19,10-11, RU'14-15]

Sol^n: $\frac{\cos(27°) - \cos(63°)}{\cos(27°) + \cos(63°)} = \frac{2\times\sin(45°)\times\sin(18°)}{2\times\cos(45°)\times\cos(18°)} = \tan(18°)$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\frac{\cos 27° - \cos 63°}{\cos 27° + \cos 63°} = \frac{\cos 27° - \cos(90°-27°)}{\cos 27° + \cos(90°-27°)} = \frac{\cos 27° - \sin 27°}{\cos 27° + \sin 27°} = \tan(45°-27°) = \tan 18°$ **(Ans.)**

Example-50: $\sin 15° + \cos 15°$ এর মান কোনটি? [RU'22-23]

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (d) কোনটিই নয়

Sol^n: (b); $\sin 15° + \cos(90°-75°) = \sin 15° + \sin 75°$

$= 2\sin\frac{15+75}{2}\cos\frac{75-15}{2} = 2\sin 45° \cdot \cos 30° = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Example-51: $\tan 56° - \tan 11° - \tan 56° \tan 11° =?$

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) None of these

Sol^n: (b); $\tan 45° = \tan(56°-11°) \Rightarrow 1 = \frac{\tan 56° - \tan 11°}{1+\tan 56° \tan 11°}$

$\therefore \tan 56° - \tan 11° - \tan 56° \tan 11° = 1$

Example-52: দেখাও যে, $\tan 36° + \tan 9° + \tan 36°.\tan 9° = 1$

Sol^n: L.S $= \tan 36° + \tan 9° + \tan 36°.\tan 9°$

$= \frac{\tan 36° + \tan 9°}{1-\tan 36°.\tan 9°}(1-\tan 36°.\tan 9°) + \tan 36°.\tan 9°$

$= \tan(36°+9°).(1-\tan 36° \tan 9°) + \tan 36°.\tan 9°$

$= 1.(1-\tan 36°.\tan 9°) + \tan 36°.\tan 9°;$ $[\because \tan(36°+9°) = \tan 45° = 1]$

$= 1 - \tan 36°.\tan 9° + \tan 36°.\tan 9° = 1 = \text{R.S}$

বিকল্প: এখানে, $45° = 36° + 9° \Rightarrow \tan 45° = \tan(36°+9°) \Rightarrow 1 = \frac{\tan 36° + \tan 9°}{1-\tan 36°.\tan 9°}$

$\Rightarrow 1 - \tan 36°.\tan 9° = \tan 36° + \tan 9° \therefore \tan 36° + \tan 9° + \tan 36°.\tan 9° = 1$ [প্রমাণিত]

Example-53: $A + B = \frac{\pi}{4}$ হলে, $(1 + \tan A)(1 + \tan B)$ এর মান কত? **[JU'22-23 ;Agri. Guccho'20-21]**

Solⁿ: $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 1 + \tan B + \tan A + \tan A \tan B$

$= 1 + \tan(A + B)(1 - \tan A \tan B) + \tan A \tan B$

$= 1 + \tan\frac{\pi}{4}(1 - \tan A \tan B) + \tan A \tan B$

$= 1 + 1 - \tan A \tan B + \tan A \tan B = 2$

Example-54: $A + B = \frac{\pi}{2}$, $\tan A - \tan B = ?$

Solⁿ: $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan(90° - A)} = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A . \cot A} = \frac{\tan A - \tan B}{2} \therefore \tan A - \tan B = 2\tan(A - B)$

Example-55: প্রমাণ কর: $\tan 70° = \tan 20° + 2\tan 50°$

Solⁿ: $\tan 20° + 2\tan 50° = \tan 20° + 2 \cdot \tan(70° - 20°)\ \left[\because 70° + 20° = 90°; A + B = \frac{\pi}{2}\right]$

$= \tan 20° + 2 \cdot \frac{\tan 70° - \tan 20°}{1 + \tan 70° \tan 20°} = \tan 20° + 2 \cdot \frac{\tan 70° - \tan 20°}{1 + \tan(90° - 20°)\tan 20°}$

$= \tan 20° + 2 \cdot \frac{\tan 70° - \tan 20°}{1 + \frac{1}{\tan 20°} \tan 20°} = \tan 20° + 2 \cdot \left(\frac{\tan 70° - \tan 20°}{2}\right) = \tan 70°$ (প্রমাণিত)

Note: উপরোক্ত concept অনুযায়ী দেখানো যবে: সাধারণ Format: $\boxed{\tan A = \tan B + 2\tan(A - B)}$

(i) $\tan 65° = \tan 25° + 2\tan 40°\ \left[\because 65° + 25° = 90°; \therefore A + B = \frac{\pi}{2}\right]$

(ii) $\tan 50° = \tan 40° + 2\tan 10°$ ইত্যাদি।

Example-56: $\cos^2(60° + A) + \cos^2(60° - A)$ এর মান- **[DU'18-19]**

Solⁿ: $\cos^2(60° + A) + \cos^2(60° - A) = \frac{1}{2}\{1 + \cos(120° + 2A) + 1 + \cos(120° - 2A)\}$

$= \frac{1}{2}(2 + 2\cos 120° \cos 2A) = 1 - \frac{1}{2}\cos 2A$ **(Ans.)**

Example-57: $\cos 40° + \cos 80° + \cos 160°$-এর মান কত? **[RU'20-21] [Ans: d]**

Solⁿ: $\cos 40° + \cos 80° + \cos 160° = \cos 40° + 2\cos\frac{80° + 160°}{2}\cos\frac{160° - 80°}{2}$

$\Rightarrow \cos 40° + 2\cos 120° \cos 40° = \cos 40° + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 40° = \cos 40° - \cos 40° = 0$ **(Ans.)**

Example-58: $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ হলে, $A + B = ?$ **[DU' 15-16, JU' 18-19]**

Solⁿ: $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B \Rightarrow \sin A - \sin B = \cos B - \cos A$

$\Rightarrow 2\cos\frac{A + B}{2}\sin\frac{A - B}{2} = 2\sin\frac{A + B}{2}\sin\frac{A - B}{2} \Rightarrow \cos\frac{A + B}{2} = \sin\frac{A + B}{2}\ \left[\sin\frac{A - B}{2} \neq 0\right]$

$\Rightarrow \tan\frac{A + B}{2} = 1 \Rightarrow \frac{A + B}{2} = \frac{\pi}{4} \therefore A + B = \frac{\pi}{2}$ **(Ans.)**

Example-59: যদি $\cos x + \cos y = p$ এবং $\sin x + \sin y = q$ হয়, তবে $\tan\frac{x + y}{2} = ?$ **[GST'20-21]**

Solⁿ: $\cos x + \cos y = p \Rightarrow 2\cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} = p$ ……… (i)

$\sin x + \sin y = q \Rightarrow 2\sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} = q$ ……… (ii) ; (ii) ÷ (i) $\Rightarrow \tan\frac{x + y}{2} = \frac{q}{p}$ **(Ans.)**

Example-60: $\frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = ?$

Solⁿ: $\frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = \frac{\cos 10° - \sqrt{3}\sin 10°}{\sin 10° \cos 10°} = \frac{\frac{1}{2}\cos 10° - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°}{\frac{1}{4}.2\sin 10° \cos 10°} = \frac{4(\sin 30° \cos 10° - \cos 30° \sin 10°)}{\sin 20°}$

$= \frac{4\sin(30° - 10°)}{\sin 20°} = \frac{4\sin 20°}{\sin 20°} = 4$ **(Ans.)**

Example-61: $\cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80° = ?$ **[CU'20-21]**

Solⁿ: $\cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80° = \frac{2\sin 20° \cos 20° \cos 40° \cos 80° \times \frac{1}{2}}{2\sin 20°}$

$= \frac{2\sin 40° \cos 40° \cos 80°}{8\sin 20°} = \frac{2\sin 80° \cos 80°}{16\sin 20°} = \frac{\sin 160°}{16\sin 20°} = \frac{\sin(180° - 20°)}{16\sin 20°} = \frac{1}{16}$ **(Ans.)**

Example-62: যদি $\tan\theta = \frac{y}{x}$ হয়, তবে, $x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = ?$ **[JU'22-23]**

Sol^n: দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow y\cos\theta = x\sin\theta \therefore x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = x(1 - 2\sin^2\theta) + y.2\sin\theta\cos\theta$

$= x - 2x\sin^2\theta + 2\sin\theta.y\cos\theta = x - 2x\sin^2\theta + 2x\sin^2\theta = x$ **(Ans.)**

Example-63: $a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$ হলে দেখাও যে, $\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ **[DU'22-23]**

Sol^n: $a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$

$\Rightarrow a(\cos\alpha - \cos\beta) = b(\sin\beta - \sin\alpha) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\cos\alpha-\cos\beta} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{(\sin\beta-\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha-\cos\beta)^2}$

$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{\sin^2\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \therefore \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ **(Ans.)**

Example-64: $(\theta - \varphi)$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin\theta + \sin\varphi = \sqrt{3}(\cos\varphi - \cos\theta)$ হলে, $\sin 3\theta + \sin 3\varphi = ?$

(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) 2

Sol^n: (a); $\sin\theta + \sin\varphi = \sqrt{3}(\cos\varphi - \cos\theta) \Rightarrow 2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2} = \sqrt{3}\left(2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$

$\Rightarrow \cot\frac{\theta-\varphi}{2} = \sqrt{3} = \cot 30° \Rightarrow \frac{\theta-\varphi}{2} = 30° \therefore \theta - \varphi = 60° \ldots\ldots\ldots (i)$

এবং $\sin 3\theta + \sin 3\varphi = 2\sin\frac{3(\theta+\varphi)}{2}\cos\frac{3(\theta-\varphi)}{2} = 2\sin\frac{3(\theta+\varphi)}{2}\cos 90°$ [(i) হতে]$= 0$

Example-65: $\sin x + \sin y = a$ এবং $\cos x + \cos y = b$ হয় তবে $\tan\frac{x-y}{2} = ?$

(a) $\pm\sqrt{\frac{4+a^2+b^2}{a^2+b^2}}$ (b) $\pm\sqrt{\frac{2-a^2-b^2}{a^2-b^2}}$ (c) $\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$ (d) None of these

Sol^n: (c); $\sin x + \sin y = a \ldots\ldots\ldots (i)$; এবং $\cos x + \cos y = b \ldots\ldots\ldots (ii)$

এখন $(i)^2 + (ii)^2$ হতে: $1 + 1 + 2\cos(x-y) = a^2 + b^2 \Rightarrow \cos(x-y) = \frac{a^2+b^2-2}{2} \ldots\ldots\ldots (iii)$

এখন, $\tan^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{1+\cos A}$ লেখা যায়, $\therefore \tan^2\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1-\frac{(a^2+b^2-2)}{2}}{1+\frac{(a^2+b^2-2)}{2}} \therefore \tan\frac{x-y}{2} = \pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

Example-66: $\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta-1}{3-\cos 2\beta}$ হয় তবে $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = ?$

(a) 1 (b) −1 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\pm\sqrt{2}$

Solution: (d); $\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta-1}{3-\cos 2\beta} \Rightarrow \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{3\cdot\frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}-1}{3-\frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}} \Rightarrow \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{3-3\tan^2\beta-1-\tan^2\beta}{3+3\tan^2\beta-1+\tan^2\beta} = \frac{1-2\tan^2\beta}{1+2\tan^2\beta}$

$\Rightarrow \frac{2\tan^2\alpha}{2} = \frac{4\tan^2\beta}{2}$ [∴ যোজন বিয়োজন করে পাই]$\Rightarrow \frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\beta} = 2 \therefore \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \pm\sqrt{2}$

Note: প্রশ্নটি এভাবেও হতে পারে, α ও β সূক্ষ্মকোণ এবং $\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta-1}{3-\cos 2\beta}$ হলে, তবে $\tan\alpha = ?$

(a) $\tan\beta$ (b) $2\tan\beta$ (c) $\sqrt{2}\tan\beta$ (d) None of these

Sol^n: (c) $\sqrt{2}\tan\beta$

Example-67: $p\sin\theta + q\cos\theta = a$ এবং $p\cos\theta - q\sin\theta = b$ হয়, তবে $\frac{p-a}{q+b} + \frac{q-b}{p-a} = ?$

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) −1

Sol^n: (c); $p\sin\theta + q\cos\theta = a \ldots\ldots\ldots (i)$ এবং $p\cos\theta - q\sin\theta = b \ldots\ldots\ldots (ii)$

$(i)^2 + (ii)^2$ হতে পাই, $p^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + q^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2 + b^2$

$\Rightarrow p^2 + q^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow p^2 - a^2 = -(q^2 - b^2) \Rightarrow (p+a)(p-a) = -(q+b)(q-b)$

$\Rightarrow \frac{p+a}{q+b} = -\frac{q-b}{p-a} \Rightarrow \frac{p+a}{q+b} + \frac{q-b}{p-a} = 0$

Example-68: $\cos^3\theta + \cos^3(120° + \theta) + \cos^3(240° + \theta) = ?$

(a) $\cos 3\theta$　(b) $\frac{1}{4}\cos 3\theta$　(c) $\frac{3}{4}\cos 3\theta$　(d) None of these

Sol^n: (c); $\cos^3\theta + \cos^3(120° + \theta) + \cos^3(240° + \theta)$

$= \frac{1}{4}[4\cos^3\theta + 4\cos^3(120° + \theta) + 4\cos^3(240° + \theta)]$

$= \frac{1}{4}[\cos 3\theta + 3\cos\theta + 3\cos(120° + \theta) + \cos(360° + 3\theta) + 3\cos(240° + \theta) + \cos(720° + 3\theta)]$

$= \frac{1}{4}3\cos 3\theta + \frac{3}{4}[\cos\theta + \cos(120° + \theta) + \cos(240° + \theta)]$

$= \frac{3}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\left[\cos\theta + 2\cos\frac{120°+\theta+240°+\theta}{2}\cos\frac{120°+\theta-240°-\theta}{2}\right]$

$= \frac{3}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}[\cos\theta + 2\cos(180° + \theta)\cos 60°]$

$= \frac{3}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\left[\cos 3\theta - 2\left(\frac{1}{2}\right)\cos\theta\right] = \frac{3}{4}\cos 3\theta$

Note: মনে রাখবে $\cos\theta + \cos(\theta + 120°) + \cos(\theta - 120°) = 0$

বা, $\cos\theta + \cos(\theta + 120°) + \cos(\theta + 240°) = 0$

Example-69: $\tan 20° \tan 40° \tan 60° \tan 80° = ?$

(a) $\sqrt{3}$　(b) $3\sqrt{3}$　(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$　(d) 3

Sol^n: (d); $\tan 20° \tan 40° \tan 60° \tan 80°$

$= \sqrt{3}\tan 20° \tan(60° - 20°)\tan(60° + 20°)$

$= \sqrt{3}\tan 20°\left(\frac{\tan 60° - \tan 20°}{1 + \tan 60°\tan 20°}\right)\left(\frac{\tan 60° + \tan 20°}{1 - \tan 60°\tan 20°}\right)$

$= \sqrt{3}\tan 20°\left(\frac{\sqrt{3} - \tan 20°}{1 + \sqrt{3}\tan 20°}\right)\left(\frac{\sqrt{3} + \tan 20°}{1 - \sqrt{3}\tan 20°}\right)$

$= \sqrt{3}\tan 20°\left\{\frac{3 - \tan^2 20°}{1 - 3\tan^2 20°}\right\}$

$= \sqrt{3}\left\{\frac{3\tan 20° - \tan^3 20°}{1 - 3\tan^2 20°}\right\}\left[\because \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}\right]$

$= \sqrt{3}\cdot\tan(3 \times 20°)$

$= \sqrt{3}\tan 60° = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$

Example-70: $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\beta + \cos\beta$ হলে, $\alpha + \beta = ?$

(a) $\frac{\pi}{6}$　(b) $\frac{\pi}{2}$　(c) π　(d) $\frac{\pi}{4}$

Sol^n: (b); $\sin\alpha - \sin\beta = \cos\beta - \cos\alpha$

$\Rightarrow 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\Rightarrow \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

Type–05: উপগুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত

Concept

উপগুণিতক কোণ: মৌলিক কোণগুলোকে কোন প্রকৃত ভগ্নাংশ দ্বারা গুণ করলে যে কোণ পাওয়া যায় তাকে উপগুণিতক কোণ বলে। যেমন: $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{5}$ ইত্যাদি।

Formula:

- $\sin A = \sin 2\left(\frac{A}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{A}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$
- $\cos A = \cos 2\left(\frac{A}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$
- $\tan A = \tan 2.\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{A}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$
- $\sin A = \sin 3\left(\frac{A}{3}\right) = 3\sin\left(\frac{A}{3}\right) - 4\sin^3\left(\frac{A}{3}\right)$
- $\cos A = \cos 3\left(\frac{A}{3}\right) = 4\cos^3\left(\frac{A}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{A}{3}\right)$
- $\tan A = \tan 3\left(\frac{A}{3}\right) = \frac{3\tan\left(\frac{A}{3}\right)-\tan^3\left(\frac{A}{3}\right)}{1-3\tan^2\left(\frac{A}{3}\right)}$
- $2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A$
- $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$

Again,
- $\sin 18° = \cos 72° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$
- $\cos 18° = \sin 72° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
- $\sin 36° = \cos 54° = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
- $\cos 36° = \sin 54° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$

Shortcut

(i) $2\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots(n-1)\text{ সংখ্যক}}}}$

(ii) $2\sin\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots(n-2)\text{ সংখ্যক}}}}$ [অর্থাৎ, প্রথম 2 এর পর (−) চিহ্ন এবং এর পর $(n-2)$ টি 2 থাকবে যাদের প্রতিটির পরই (+) চিহ্ন হবে। মোট 2 আছে, $n-1$ টি]

(iii) $2\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^n} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots(n-1)\text{ সংখ্যক}+\sqrt{3}}}}$

(iv) $2\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots(n-2)\text{ সংখ্যক}+\sqrt{3}}}}$ [অর্থাৎ, প্রথম 2 এর পর (−) চিহ্ন এবং এর পর $(n-2)$ টি 2 থাকবে যাদের প্রতিটির পরই (+) চিহ্ন হবে। মোট 2 আছে, $n-1$ টি এবং শেষে একটি $\sqrt{3}$ হবে।]

Problems

Example-71: $2\sin\frac{\pi}{16} = ?$ [JU' 10-11]

Sol^n: $2\sin\frac{\pi}{16} = \sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{16}} = \sqrt{2.2\sin^2\frac{\pi}{16}} = \sqrt{2.\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)} = \sqrt{2-\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{8}}}$

$= \sqrt{2-\sqrt{2.\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $2\sin\frac{\pi}{16} = 2\sin\frac{\pi}{2^4} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ **(Ans.)**

Example-72: $8\sin^4\frac{\theta}{2} - 8\sin^2\frac{\theta}{2} + 1$ এর মান কোনটি? [JU'22-23]

(a) $2\sin^2\theta$ (b) $2\cos^2\theta$ (c) $\sin 2\theta$ (d) $\cos 2\theta$

Sol^n: (d); $8\sin^4\frac{\theta}{2} - 8\sin^2\frac{\theta}{2} + 1 = 2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2 - 4.\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 1 = 2(1-\cos\theta)^2 - 4(1-\cos\theta) + 1$
$= 2(1-2\cos\theta+\cos^2\theta) - 4(1-\cos\theta) + 1 = 2 - 4\cos\theta + 2\cos^2\theta - 4 + 4\cos\theta + 1$
$= 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$

Type–06: মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

Concept

এক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতির বিভিন্ন সূত্র ব্যবহার করে মান নির্ণয় করতে হবে।

Problems

Example-73: মান নির্ণয় কর: $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}$

Sol^n: ধরি, $\frac{2\pi}{15}=\theta \Rightarrow 15\theta = 2\pi \therefore 16\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta\cos7\theta = \frac{8}{\sin\theta}(2\sin\theta\cos\theta)\cos2\theta\cos4\theta\cos7\theta$

$=\frac{4}{\sin\theta}(2\sin2\theta\cos2\theta)\cos4\theta\cos7\theta = \frac{2}{\sin\theta}(2\sin4\theta\cos4\theta)\cos7\theta$

$=\frac{1}{\sin\theta}(2\sin8\theta\cos7\theta) = \frac{1}{\sin\theta}(\sin15\theta+\sin\theta) = \frac{1}{\sin\theta}(\sin2\pi+\sin\theta) = \frac{1}{\sin\theta}.\sin\theta = 1$ **(Ans.)**

Example-74: $\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{13\pi}{10} = ?$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

Sol^n: (d); $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10} = \sin\frac{\pi}{10}\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{10}\right) = \sin\frac{\pi}{10}\left(-\sin\frac{3\pi}{10}\right)$

$=-\sin18°\sin54° = -\sin18\cos36° [\therefore \sin54° = \cos36°] = -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$

Example-75: যদি $k = \sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}$ হয় তবে k এর সংখ্যাগত মান-

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

Sol^n: (a); $k = \sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18} = \sin10°\sin50°\sin70° = \sin10°\sin(60°-10°)\sin(60°+10°)$

$=\sin10°\{\sin^2 60-\sin^2 10\}[\therefore \sin(A+B)\cdot\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B]$

$=\sin10°\left(\frac{3}{4}-\sin^2 10\right) = \frac{1}{4}(3\sin10° - 4\sin^3 10°) = \frac{1}{4}\sin(3\times10°)\,[\therefore \sin3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta] = \frac{1}{8}$

Example-76: $\sin20°\sin40°\sin80° = ?$

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{16}$ (d) None of these

Sol^n: (d); $\sin20°\sin40°\sin80° = \frac{1}{2}\sin20°(2\sin80°\sin40°)$

$=\frac{1}{2}\sin20°(\cos40°-\cos120°) = \frac{1}{2}\sin20°\cos40° - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\sin20°$

$=\frac{1}{4}\cdot2\sin20°\cos40° + \frac{1}{4}\sin20° = \frac{1}{4}(\sin60°-\sin20°) + \frac{1}{4}\sin20° = \frac{\sqrt{3}}{8}$

Example-77: $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13} = ?$

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 2

Sol^n: (b); $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$

$=2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{9\pi}{13}+2\cos\frac{4\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}\left[\because \cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\right]$

$=2\cos\frac{\pi}{13}\left(\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}\right) = 2\cos\frac{\pi}{13}\left(2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{5\pi}{26}\right) = 0\left[\because \cos\frac{\pi}{2} = 0\right]$

Example-78: $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = ?$

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) 2

Sol^n: (a); $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = 16\cos A\cos2A\cos4A\,\mathrm{cso}\,7A$ [$\therefore$ ধরি, $\frac{2\pi}{15} = A$]

$=8.\frac{1}{\sin A}(2\sin A\cos A)\cdot\cos2A\cos4A\cos7A = 4\cdot\frac{1}{\sin A}(2\sin2A\cos2A)\cdot\cos4A\cdot\cos7A$

$=2\cdot\frac{1}{\sin A}(2\sin4A\cos4A)\cdot\cos7A = \frac{1}{\sin A}(2\sin8A\cos7A)$

$=\frac{1}{\sin A}(\sin15A+\sin A)[\because 2\sin A\cos A = \sin(A+B)+\sin(A-B)]$

$=\frac{1}{\sin A}\left(\sin15\cdot\frac{2\pi}{15}+\sin A\right) = \frac{1}{\sin A}(\sin2\pi+\sin A) = 1$

Type–07: বিশেষ ধরনের ত্রিকোণমিতিক অভেদ

Concept

$A+B+C=\pi$ অথবা $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ অথবা $A+B+C=0$ এরূপ কোন শর্ত দেওয়া থাকে যে শর্তগুলো ঠিক রেখে সমস্যার সমাধান করতে হয়।

Problems

Example-79: যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$ **[DU' 15-16]**

Sol: $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\frac{1}{2}(2\cos^2 A+2\cos^2 B)+\cos^2 C=\frac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2B)+\cos^2 C$

$=\frac{1}{2}(2+\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2 C=1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2 C$

$=1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C$

$=1-\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C$

$[\because A+B+C=\pi\Rightarrow A+B=\pi-C\therefore\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C]$

$=1-\cos C\,[\cos(A-B)-\cos C]=1-\cos C\,[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$

$=1-\cos C.2\cos A\cos B=1-2\cos A\cos B\cos C$

এখন পক্ষান্তর করে আমরা পাই, $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$. **(Proved)**

Example-80: যদি $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=1.$ **[DU'10-11]**

Sol^n: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{1}{2}(2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta)+\sin^2\gamma$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha+1-\cos 2\beta)+\sin^2\gamma$ $[\because 2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$ এবং $2\sin^2\beta=1-\cos 2\beta]$

$=\frac{1}{2}\{2-(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)\}+\sin^2\gamma=1-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+\sin^2\gamma$

$=1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin^2\gamma$

$=1-\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)+\sin^2\gamma$ $[\because\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma,$ অর্থাৎ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\sin\gamma]$

$=1-\sin\gamma\,[\cos(\alpha-\beta)-\sin\gamma]=1-\sin\gamma\,[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

$=1-\sin\gamma.2\sin\alpha\sin\beta=1-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

এখন পক্ষান্তর করে আমরা পাই, $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=1.$ **(Proved)**

Example-81: যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে $\sum\cot A\cot B=$?

(a) 1 (b) −1 (c) 2 (d) −2

Sol^n: (a); $A+B+C=\pi\Rightarrow A+B=\pi-c\Rightarrow\tan(A+B)=\tan(\pi-c)$

$\Rightarrow\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C\Rightarrow\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$

$\Rightarrow\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

$\Rightarrow\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1$ [উভয় পক্ষকে $\tan A\tan B\tan C$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore\sum\cot A\cot B=1$

Example-82: যদি $A+B+C=\pi$ হয়, এবং $\tan 3A+\tan 3B+\tan 3C=k\tan 3A\tan 3B\tan 3C$ হয় তবে $k=$?

(a) 1 (b) −1 (c) 2 (d) 0

Sol^n: (a); $A+B+C=\pi\Rightarrow A+B=\pi-c\Rightarrow 3A+3B=3\pi-3c$

$\Rightarrow\tan(3A+3B)=\tan(3\pi-3c)\Rightarrow\frac{\tan 3A+\tan 3B}{1-\tan 3A\tan 3B}=-\tan 3C$

$\Rightarrow\tan 3A+\tan 3B+\tan 3C=\tan 3A\tan 3B\tan 3C\therefore k=1$

- **Shortcut:** তিনটি কোণের মান ধরে নিয়ে, যেমন: $A=B=C=60°$ তবে solve করা।

Type-08: ত্রিভুজের প্রকৃতি নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

এই Type এর সমস্যা ত্রিভুজের Cosine Rule এর মাধ্যমে সমাধান করতে হবে।

Shortcut

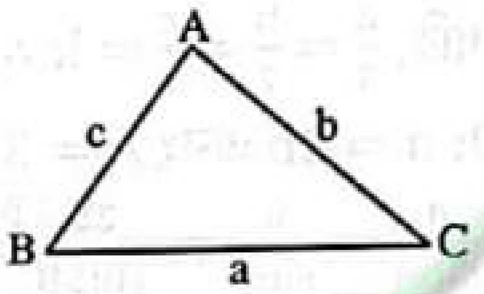
বাহুর দৈর্ঘ্য m, n ইত্যাদির মাধ্যমে দেওয়া থাকলে,

- $m = 1, n = 2$ এভাবে মান বসিয়ে করা যায়
- বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ বৃহত্তম কোণ এবং ক্ষুদ্রতম বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতম কোণ

জেনে রাখো

Cosine Law: $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}; \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}; \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Sine Law: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ যেখানে R = ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ



Problems

Example-83: কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো $m, n, \sqrt{m^2+mn+n^2}$ হলে, ত্রিভুজটির প্রকৃতি নির্ণয় কর। **[KU' 14-15]**

Sol^n: বৃহত্তম কোণ A হলে, $\cos A = \frac{m^2+n^2-(\sqrt{m^2+mn+n^2})^2}{2mn} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120° \therefore$ ত্রিভুজটি স্থূলকোণী। **(Ans.)**

Example-84: ΔABC-এ $\cos A + \cos B = \sin C$ হলে ত্রিভুজটির প্রকৃতি নির্ণয় কর। **[KU'19-20, JU'19-20]**

Sol^n: $\cos A + \cos B = \sin C \Rightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \Rightarrow \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \Rightarrow \cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{C}{2} \therefore A = B + C$

এখন, $A + B + C = \pi \Rightarrow A + A = \pi \Rightarrow 2A = \pi \therefore A = \frac{\pi}{2} \therefore \Delta ABC$ সমকোণী ত্রিভুজ।

Example-85: ΔABC এ $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$ হলে, a^2, b^2, c^2 থাকবে-

(a) সমান্তর প্রগমনে (b) গুণোত্তর প্রগমনে (c) বিপরীত প্রগমনে (d) None of these

Sol^n: (a); দেওয়া আছে, $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)} \Rightarrow \frac{\sin\{\pi-(B+C)\}}{\sin\{\pi-(A+B)\}} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$ [ΔABC তে $A + B + C = \pi$]

$\Rightarrow \frac{\sin(B+C)}{\sin(A+B)} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)} \Rightarrow \sin(B+C)\cdot\sin(B-C) = \sin(A+B)\cdot\sin(A-B)$

$\Rightarrow \sin^2 B - \sin^2 C = \sin^2 A - \sin^2 B \Rightarrow \frac{b^2}{k^2} - \frac{c^2}{k^2} = \frac{a^2}{k^2} - \frac{b^2}{k^2}\left[\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k\right]$

$\Rightarrow b^2 - c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 2b^2 = a^2 + c^2 \therefore a^2, b^2, c^2$ সমান্তর শ্রেণিভূক্ত হবে।

Example-86: ΔABC তে A, B, C সমান্তর শ্রেণিভূক্ত হলে, এবং $b : c = \sqrt{3} : 2$ হলে, A =?

(a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) 45°

Sol^n: (a); এখন, $b : c = \sqrt{3} : 2 \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{k\sin B}{k\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k\right]$

$\Rightarrow \sin B : \sin C = \sqrt{3} : 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 \therefore C = \frac{\pi}{2} = 90°, B = 60° \therefore A = 30°$

Example-87: যদি কোনো ত্রিভুজে $a\cos A = b\cos B$ হয় তাহলে ত্রিভুজটির প্রকৃতি হবে-

(a) সমবাহু (b) সমদ্বিবাহু (c) সমকোণী (d) both b& c

Sol^n: (d); $a\cos A = b\cos B \Rightarrow 2R\sin A\cos A = 2R\sin B\cos B \left[\because \frac{a}{\sin A} = 2R\right]$

$\Rightarrow \sin 2A = \sin 2B$ ……… (i) $\Rightarrow A = B \therefore \Delta$ টি সমদ্বিবাহু।

আবার, (i) হতে পাই, $\sin 2A = \sin(\pi - 2B)$ লেখা যায়, $2A = \pi - 2B \Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} \therefore \Delta$ টি সমকোণী

$\therefore$ Option (d) is correct.

Type–09: কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

ত্রিভুজের কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যায় Sine Rule এবং Cosine Rule প্রয়োগ করে সমাধান করতে হবে।

জেনে রাখো

[$(5:12:13); (7:24:25); (8:15:17); (3:4:5)$ অনুপাতের বাহুগুলো সবসময়ই সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে অর্থাৎ ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ সমকোণ $(90°)$ হয়]

Problems

Example-88: ABC ত্রিভুজে $a:b:c = 3:7:5$ হলে, $\angle B = ?$ **[DU'15-16]**

Sol^n^: ধরি, $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5} = k \therefore \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{(5k)^2+(3k)^2-(7k)^2}{2.3k.5k} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2} \therefore B = 120°$ **(Ans.)**

Example-89: $a = 2b$ এবং $A = 3B$ হলে, ত্রিভুজের অন্য কোণগুলো নির্ণয় কর।

Sol^n^: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{2b}{\sin 3B} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{2}{3\sin B - 4\sin^3 B} = \frac{1}{\sin B} \Rightarrow 3 - 4\sin^2 B = 2 \Rightarrow \sin B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 30°$
$\therefore A = 90°; \therefore C = 180° - (30° + 90°) = 60°$ **(Ans.)**

Example-90: $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ হলে, ABC ত্রিভুজে $\angle C = ?$

Sol^n^: ধরি, $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c} \Rightarrow \frac{a+b+c+c}{(a+c)(b+c)} = \frac{3}{a+b+c} \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$
$\Rightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{2} \therefore \cos C = \cos 60° \therefore C = 60°$ **(Ans.)**

Example-91: যদি একটি ত্রিভুজে $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$ হয়, তবে $C = ?$

Sol^n^: দেওয়া আছে, $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2a^2 + 2b^2c^2 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 - 2c^2a^2 - 2b^2c^2 = 0$
$\Rightarrow (a^2)^2 + (b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2(a^2)(b^2) + 2(b^2)(-c^2) + 2(-c^2)(a^2) = 2a^2b^2 \Rightarrow (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 2a^2b^2$
$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = \pm\sqrt{2}ab \Rightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos C = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\cos 45° = \cos 45°, \cos(180° - 45°)$
$\therefore C = 45°, 135°$ **(Ans.)**

Example-92: একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক এবং উহার দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 ও 5 একক। উক্ত বাহু দুটির অন্তর্গত কোণ কত? **[RU'22-23]**

(a) 30°
(b) 45°
(c) 60°
(d) 90°

Sol^n^: (c); $\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{15\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin C = \frac{15\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore C = 60°$

Type–10: ত্রিভুজের বিভিন্ন অজানা রাশির মান নির্ণয়

Concept

এক্ষেত্রেও Sine Rule বা Cosine Rule প্রয়োজনে ব্যবহার করতে হবে।

Problems

Example-93: যদি ABC ত্রিভুজে $A = 75°, B = 45°$ হলে $\frac{c}{b} = ?$ **[RU' 19-20]**

Sol^n^: এখানে, $C = 180° - (75° + 45°) = 60°$ এখন, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin 60°}{\sin 45°} \therefore \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **(Ans.)**

Example-94: ΔABC এ $a = \sqrt{3} + 1, b = \sqrt{3} - 1$ এবং $C = 60°$ হলে, B এর মান কত? **[RU' 15-16]**

Sol^n^: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow c^2 = (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\cos 60°$
$\therefore c = \sqrt{6}$ একক এখন, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{b\sin C}{c} = \sin B \Rightarrow \frac{(\sqrt{3}-1)\sin 60°}{\sqrt{6}} = \sin B \therefore B = 15°$ **(Ans.)**

Example-95: ABC ত্রিভুজে $\angle A = 60°, \angle B = 75°$ এবং c বাহুর দৈর্ঘ্য $\sqrt{6}$ cm হলে a বাহুর দৈর্ঘ্য কত? **[CU'22-23]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 3 (c) $2\sqrt{2}$ (d) $3\sqrt{2}$

Sol: (b); $\angle A = 60°, \angle B = 75°, C = \sqrt{6}$ cm $\therefore \angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 60° - 75° = 45°$

আমরা জানি, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

তাহলে, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \therefore a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{\sqrt{6}\sin 60°}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ cm $= \left(\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ cm

$= \frac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}$ cm $= \frac{\sqrt{3\times2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{2\times2}} \times \sqrt{2}$ cm $= \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \times \sqrt{2}$ cm $= (\sqrt{3})^2$ cm $= 3$ cm

Type–11: বিবিধ

Concept

এক্ষেত্রে কোন ধরা বাঁধা নিয়ম নেই। প্রশ্নটি ভালভাবে observe করে সমস্যাগুলো সমাধান করতে হবে।

Problems

Example-96: একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 ও 10 একক। বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ 30° হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[JnU' 10-11]**

Solⁿ: ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 5 \times 10 \times \sin 30° = 12.5$ বর্গ একক। **(Ans.)**

Example-97: $x = \sin\frac{\pi}{18}$ হলে প্রমাণ কর যে, $8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$

Solⁿ: $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(3 \times \frac{\pi}{18}\right) = 3\sin\frac{\pi}{18} - 4\sin^3\frac{\pi}{18} = 3x - 4x^3 \therefore 4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$

$= 8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 8x^4 - 6x^2 + x + 4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 2x\left(4x^3 - 3x + \frac{1}{2}\right) + 1\left(4x^3 - 3x + \frac{1}{2}\right)$

$= 2x \times (0) + 1 \times (0) = 0$ **(Proved)**

Example-98: A এর যে মানের জন্য $\cos A . \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right)$ এর মান বৃহত্তম হয় তা নির্ণয় কর। **[JU' 09-10]**

Solⁿ: $\cos A . \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \times 2\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right)\cos A = \frac{1}{2}\left[\sin\left(A - \frac{\pi}{6} + A\right) + \sin\left(A - \frac{\pi}{6} - A\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\right]$; $\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ হলে রাশিটির মান সর্বোচ্চ হবে।

$\therefore 2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2A = \frac{2\pi}{3} \therefore A = \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

Example-99: $f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান কোনটি? **[RU'22-23]**

(a) 3 (b) 6 (c) 4 (d) 8

Solⁿ: (c); $f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x + \cos^2 x = 3 + \cos^2 x$

$\therefore f(x) = 3 + \cos^2 x$

আমরা জানি, $-1 \le \cos x \le 1$ এবং $0 \le \cos^2 x \le 1$

অর্থাৎ $\cos^2 x$ এর সর্বোচ্চ মান 1। $\therefore f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান, $f_{\max} = 3 + 1 = 4$

Example-100: যদি $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ হয় তবে $\cos\theta - \sin\theta =$?

(a) $\sqrt{2}\sin\theta$ (b) $\sqrt{2}\cos\theta$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$

Solⁿ: (a); $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta\left(\sqrt{2} - 1\right)$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)\sin\theta}{(\sqrt{2})^2 - (1)^2} = \left(\sqrt{2} + 1\right)\sin\theta$

$\Rightarrow \cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

Example-101: $\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = 2$ হলে, $\sin^n\alpha + \operatorname{cosec}^n\alpha = ?$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Solⁿ: (c); $\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = 2 \Rightarrow \sin\alpha + \frac{1}{\sin\alpha} = 2 \Rightarrow 1 + \sin^2\alpha = 2\sin\alpha$

$\Rightarrow \sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 1 = 0 = (\sin\alpha - 1)^2 = 0 \therefore \sin\alpha = 1, 1$

$\therefore \sin^n\alpha + \operatorname{cosec}^n\alpha = 1^n + \frac{1}{1^n} = 1 + 1 = 2$

Note: অনুরূপ সমস্যা: (a) $\cos\alpha + \sec\alpha = 2$ হলে, $\cos^n\alpha + \sec^n\alpha = 2$

(b) $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$ হলে, $\tan^n\alpha + \cot^n\alpha = 2$

Example-102: $\cot A + \cot B + \cot C = 0$ হলে, প্রমাণ কর: $(\sum \tan A)^2 = \sum \tan^2 A$

Solⁿ: $(\sum \tan A)^2 = (\tan A + \tan B + \tan C)^2$

$= \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C + 2\tan A\tan B + 2\tan B\tan C + 2\tan C\tan A$

$= \sum \tan^2 A + 2\tan A\tan B\tan C\ (\cot A + \cot B + \cot C)$

$= \sum \tan^2 A\ [\because \cot A + \cot B + \cot C = 0]$ **(Proved)**

Note: অনুরূপ সমস্যা:

(a) $\cos A + \cos B + \cos C = 0$ হলে, $(\sum \sec A)^2 = \sum \sec^2 A$

(b) $\operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec} B + \operatorname{cosec} C = 0$ হলে, $(\sum \sin A)^2 = \sum \sin^2 A$

(c) $\sec A + \sec B + \sec C = 0$ হলে, $(\sum \cos A)^2 = \sum \cos^2 A$

(d) $\tan A + \tan B + \tan C = 0$ হলে, $(\sum \cot A)^2 = \sum \cot^2 A$

(e) $\sin A + \sin B + \sin C = 0$ হলে, $(\sum \operatorname{cosec} A)^2 = \sum \operatorname{cosec}^2 A$

Example-103: $\sin^2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$ সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি-

(a) $x + y \neq 0$ (b) $x + y = 0, x \neq 0$ (c) $x = y$ (d) $x \neq 0, y \neq 0$

Solⁿ: (c); আমরা জানি, $\sin^2\theta \geq 1 \Rightarrow \frac{4xy}{(x+y)^2} \geq 1 \Rightarrow 4xy \geq (x+y)^2 \Rightarrow (x-y)^2 \leq 0 \therefore x = y$

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

01. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
02. $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
03. $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$
04. $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$
05. $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$
06. $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$
07. $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$
08. $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$
09. $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$
10. $\cot(A+B) = \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A}$
11. $\cot(A-B) = \frac{\cot A\cot B + 1}{\cot B - \cot A}$
12. $\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C}{1 - \tan A\tan B - \tan B\tan C - \tan C\tan A}$
13. $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$
14. $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$
15. $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$
16. $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$

17. $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$
18. $\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B$
19. $\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
20. $\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$
21. $\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
22. $\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$
23. $\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$
24. $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
25. $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$
26. $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$
27. $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
28. $\cot 2A=\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$
29. $\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$
30. $\cot 3A=\frac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}$
31. $2\cos^2 A=1+\cos 2A$
32. $2\sin^2 A=1-\cos 2A$
33. $\tan^2 A=\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$
34. $4\sin^3 A=3\sin A-\sin 3A$
35. $4\cos^3 A=3\cos A+\cos 3A$
36. $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$
37. $\cot\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$
38. (a) $a=b\cos C+c\cos B$; (b) $b=c\cos A+a\cos C$; (c) $c=a\cos B+b\cos A$
39. (a) $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$; (b) $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ca}}$; (c) $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$
40. (a) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$; (b) $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$; (c) $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$
41. (a) $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$; (b) $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$; (c) $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$
42. $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B.$
43. পরিব্যাসার্ধ $=\frac{abc}{4\Delta}$; $\Delta=sr$ ($r=$ অন্তঃব্যাসার্ধ)
44. সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times$ (বাহু)^2
45. অন্তঃব্যাসার্ধ $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$
46. sine Rule: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ [$2R=$ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ]
47. cosine Rule: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$; $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাকটিস প্রবলেম

MCQ

01. $A + B = \frac{\pi}{4}$ হলে, $(1 + \tan A)(1 + \tan B)$ এর মান কত?
(a) 1 (b) 2 (c) $\sqrt{3}$ (d) $3\sqrt{3}$

02. $\frac{\sin 75° + \sin 15°}{\sin 75° - \sin 15°}$ এর মান–
(a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $-\sqrt{3}$ (d) $-\sqrt{5}$

03. যদি $A + B + C = \pi$ হয় তবে $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$ সমান–
(a) $1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (b) $1 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$
(c) $1 - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (d) $1 + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

04. $\sin 2A$ কে $\tan A$ অনুপাতে রূপান্তরিত করলে হবে–
(a) $\frac{\tan A}{1+\tan^2 A}$ (b) $\frac{\tan A}{1-\tan^2 A}$ (c) $\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ (d) $\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

05. $\tan 75° - \tan 30° - \tan 75° \tan 30°$ এর মান-
(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

06. নিচের কোন রাশিমালাটি $\sin 3A$-কে বা $\sin A$ বা $\cos A$-এর বহুপদীরূপে প্রকাশ করে?
(a) $3\cos A - 4\cos^3 A$ (b) $3\sin A - 4\sin^3 A$ (c) $4\cos^3 A - 3\cos^3 A$ (d) $4\sin^3 A - 3\sin A$

07. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলো 13,14 এবং 15 একক হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল –
(a) 84 sq. units (b) 88 sq. units (c) 80 sq. units (d) 64 sq. units

08. যদি $\tan A = \frac{2pq}{p^2-q^2}$ হয়, তবে $\cos A$ এর মান কত?
(a) $\frac{2pq}{\sqrt{p^2+q^2}}$ (b) $\sqrt{p^2+q^2}$ (c) $2pq$ (d) $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$

09. যদি $\cos x + \cos y = 2$ এবং $\sin x + \sin y = 4$ হয় তবে $\cos(x - y) = ?$
(a) 10 (b) 9 (c) 8 (d) 11

10. যদি $A + B + C = \pi$ হয়, তবে $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ এর মান হবে–
(a) $2\sin A \sin B \sin C$ (b) $-4\sin A \sin B \sin C$ (c) $\sin A \sin B \sin C$ (d) $\sin 2A \sin 2B \sin 2C$

11. $\tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2} = ?$
(a) $\tan^{-1}\frac{11}{2}$ (b) $\tan^{-1}\frac{2}{11}$ (c) $\tan^{-1}\frac{2}{3}$ (d) $\tan^{-1}\frac{1}{11}$

12. $\sin\theta - \cos\theta = 0$ হলে, θ এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক মান কোনটি?
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

13. $\sin\theta = x$ হলে $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = ?$
(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

14. $8\sin^4\frac{\theta}{2} - 8\sin^2\frac{\theta}{2} + 1$ এর মান কোনটি?
(a) $2\sin^2\theta$ (b) $2\cos^2\theta$ (c) $\sin 2\theta$ (d) $\cos 2\theta$

15. $f(\theta) = \cos\theta - \sin\theta$ হলে θ এর কোন মানের জন্য $f(\theta) = 0$?
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) π (d) $\frac{\pi}{6}$

Written

16. মান নির্ণয় কর: $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}$
17. প্রমাণ কর যে, $\tan 36° + \tan 9° + \tan 36° \tan 9° = 1$
18. যদি $\theta + \varphi = \alpha$ এবং $\tan\theta = k\tan\varphi$ হলে, দেখাও যে $\sin(\theta - \varphi) = \frac{k-1}{k+1}\sin\alpha$
19. দেখাও যে, $\tan 70° - \tan 20° = 2\tan 50°$
20. দেখাও যে, $\sin 65° + \cos 65° = \sqrt{2}\cos 20°$
21. দেখাও যে, $\sec x = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4x}}}$
22. $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\varphi}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos\varphi = \frac{\cos\theta - e}{1-e\cos\theta}$
23. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত 5: 13: 12 হলে, ত্রিভুজটি কীরূপ?
24. $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha$ হলে, $\cos\alpha - \sin\alpha = ?$
25. $\sin A = m$ এবং $\tan A = n$ হলে $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}$ এর মান কত?
26. $\cos^4\theta - \sin^4\theta =$ কত?
27. $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x} = ?$
28. যদি কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলো সমান্তর প্রগমনভুক্ত হয় তবে দেখাও যে, $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ ও সমান্তর প্রগমনভুক্ত।
29. $\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta - 1}{3-\cos 2\beta}$ হয় তবে $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = ?$
30. $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = ?$

প্র্যাক্টিস প্রবলেমের সমাধান

MCQ

01. **Sol^n: (b);** $\tan(A+B) = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \times \tan B} = 1 \Rightarrow \tan A + \tan B = 1 - \tan A \times \tan B$
$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan A \times \tan B = 1 \Rightarrow 1 + \tan A + \tan B(1 + \tan A) = 2 \Rightarrow (1 + \tan A)(\tan B + 1) = 2$

02. **Sol^n: (b);** $\frac{\sin 75° + \sin 15°}{\sin 75° - \sin 15°} = \frac{\cos 15° + \sin 15°}{\cos 15° - \sin 15°} = \frac{1 + \tan 15°}{1 - \tan 15°} = \frac{\tan 45° + \tan 15°}{1 - \tan 15° \tan 45°} = \tan 60° = \sqrt{3}$

03. **Sol^n: (a);** $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$
$= \frac{1}{2}.(1 - \cos A + 1 - \cos B) + \sin^2\frac{C}{2}\left[\because A + B + C = \pi \quad \therefore \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = \frac{\pi}{2}\right]$
$= 1 - \frac{1}{2}.2.\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - \sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$
$= 1 - \sin\frac{C}{2}2\sin\left(\frac{A+B+A-B}{4}\right)\sin\left(\frac{A+B-A+B}{4}\right) = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

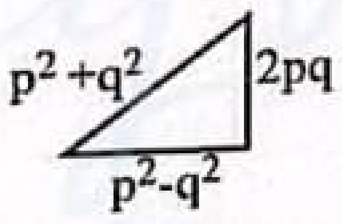
04. **Ans:** (c) $\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

05. **Sol^n: (b);** $\tan(75° - 30°) = \frac{\tan 75° - \tan 30°}{1 + \tan 75°.\tan 30°} \Rightarrow 1 + \tan 75°.\tan 30° = \tan 75° - \tan 30°$
$\Rightarrow \tan 75° - \tan 30° - \tan 75°.\tan 30° = 1$

06. **Ans:** (b) $3\sin A - 4\sin^3 A$

07. **Sol^n: (a);** $s = \frac{13+14+15}{2} = 21 \therefore \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 84$ sq. units

08. **Sol^n: (d);** $\tan A = \frac{2pq}{p^2-q^2}$



$\cos A = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$

09. **Sol^n: (b);** $\cos x + \cos y = 2 \Rightarrow \cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x \cos y = 4$

$\sin x + \sin y = 4 \Rightarrow \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y = 16$

$\therefore (\sin^2 x + \cos^2 x) + (\sin^2 y + \cos^2 y) + 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 20 \Rightarrow \cos(x - y) = 9$

10. **Sol^n: (a);** $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A + B)\cos(A - B) + \sin 2C$

$= 2\sin C \cos(A - B) + 2\sin C \cos C\ [C = \pi - A - B]$

$= 2\sin C\ \{\cos(A - B) + \cos C\}$

$= 2\sin C\ \{\cos(A - B) - \cos(A + B)\} = 2\sin A \sin B \sin C$

11. **Sol^n: (a);** $\tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}} = \tan^{-1}\frac{\frac{8+3}{6}}{\frac{6-4}{6}} = \tan^{-1}\frac{11}{2}$

12. **Ans:** (c) $\frac{\pi}{4}$

13. **Ans:** (b) Formula

14. **Sol^n: (d);** $8\sin^4\frac{\theta}{2} - 8\sin^2\frac{\theta}{2} + 1 = 2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2 - 4(2\sin^2\frac{\theta}{2}) + 1$

$= 2\ (1 - \cos\theta)^2 - 4(1 - \cos\theta) + 1$

$= 2 - 4\cos\theta + 2\cos^2\theta - 4 + 4\cos\theta + 1 = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$

15. **Sol^n: (b);** $f(\theta) = \cos\theta - \sin\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = 1 \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

Written

16. **Sol^n:** $\tan 15° \tan 75° \tan 105° \tan 165°$

$= \tan 15° \tan(90° - 15°) \tan(90° + 15°) \tan(180° - 15°)$

$= \tan 15° \cot 15° (-\cot 15°)(-\tan 15°) = 1$

17. **Sol^n:** $\tan 45° = \tan(36° + 9°)$

$\Rightarrow 1 = \frac{\tan 36° + \tan 9°}{1 - \tan 36°.\tan 9°} \Rightarrow 1 - \tan 36° \tan 9° = \tan 36° + \tan 9°$

$\Rightarrow \tan 36° + \tan 9° + \tan 36\ ° \tan 9° = 1$

18. **Sol^n:** $\tan\theta = k\tan\varphi \Rightarrow \frac{\tan\theta}{\tan\varphi} = k \Rightarrow \frac{\sin\theta\cos\varphi}{\cos\theta\sin\varphi} = k$

$\Rightarrow \frac{\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi} = \frac{k-1}{k+1} \Rightarrow \frac{\sin(\theta-\varphi)}{\sin(\theta+\varphi)} = \frac{k-1}{k+1}$

$\therefore \sin(\theta - \varphi) = \frac{k-1}{k+1}\sin\alpha$ **(Proved)**

19. **Sol^n:** $\tan 70° - \tan 20°$

$= \frac{\sin 70°}{\cos 70°} - \frac{\sin 20°}{\cos 20°} = \frac{\sin 70°.\cos 20° - \sin 20°.\cos 70°}{\cos 70°.\cos 20°}$

$= \frac{2\sin(70° - 20°)}{2\cos 70°.\cos 20°} = \frac{2\sin 50°}{\cos 90° + \cos 50°} = 2\tan 50°$

$\therefore \tan 70° - \tan 20° = 2\tan 50°$ **(Showed)**

20. **Sol^n:** $L.H.S = \sin 65° + \cos(90° - 25°)$

$= \sin 65° + \sin 25° = 2\sin 45° \cos 20°$

$= 2\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 20° = \sqrt{2}\cos 20°$ **(R.H.S)**

21. **Sol^n:** $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4x}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2\ (1+\cos 4x)}}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2.2\cos^2 2x}}} = \frac{2}{\sqrt{2+2\cos 2x}} = \frac{2}{\sqrt{2(1+\cos 2x)}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2.2\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$

22. **Solⁿ:** $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \frac{1}{\tan\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1-e}{1+e}\left(\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)$

$\Rightarrow \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-e\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}-e\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-e\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}+e\sin^2\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \frac{\cos\varphi}{1} = \frac{\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)-e\left(\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)-e\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)} \therefore \cos\varphi = \frac{\text{cose }\theta-e}{1-e\cos\theta}$ **[Proved]**

23. **Solⁿ:** ত্রিভুজটির প্রকৃতি নির্ণয় করতে হলে বৃহত্তম কোণ বের করতে হবে। বৃহত্তম কোণ A হলে,

$\cos A = \frac{5^2+12^2-13^2}{2.5.12} = 0 \Rightarrow A = 90° \therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী। **(Ans.)**

[Note:$(5:12:13); (7:24:25); (8:15:17); (3:4:5)$ অনুপাতের বাহুগুলো সবসময়ই সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে অর্থাৎ ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ সমকোণ (90°) হয়]

24. **Solⁿ:** $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha - \cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\cos\alpha$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\alpha + \sin\alpha = \cos\alpha \therefore \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha$

25. **Solⁿ:** $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} = \text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

26. **Solⁿ:** $\cos^4\theta - \sin^4\theta = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \cos 2\theta$

27. **Solⁿ:** $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\times\cos^{-1}\frac{1-(\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2}\times 2\tan^{-1}(\sqrt{x}) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$

28. **Solⁿ:** a, b, c সমান্তর প্রগমনভুক্ত হলে, $a - b = b - c$ [∵ a, b, c সমান্তর প্রগমন ভুক্ত $a + c = 2b$]

$\Rightarrow (s-b) - (s-a) = (s-c) - (s-b) \Rightarrow s(s-b) - s(s-a) = s(s-c) - s(s-b)$

$\Rightarrow \frac{s(s-b)}{\Delta} - \frac{s(s-a)}{\Delta} = \frac{s(s-c)}{\Delta} - \frac{s(s-b)}{\Delta} \Rightarrow \cot\frac{B}{2} - \cot\frac{A}{2} = \cot\frac{C}{2} - \cot\frac{B}{2} \Rightarrow \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} = 2\text{cost }\frac{B}{2}$

$\therefore \cot\frac{A}{2},\ \cot\frac{B}{2}$ ও $\cot\frac{C}{2}$ সমান্তর প্রগমনভুক্ত।

Note: $\cot\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} = \sqrt{\frac{\{s(s-a)\}^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{s(s-a)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \therefore \boxed{\cot\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{\Delta}}$

অনুরূপভাবে, $\cot\frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{\Delta}; \cot\frac{C}{2} = \frac{s(s-b)}{\Delta}$

29. **Solⁿ: (d);** $\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta} \Rightarrow \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{3\cdot\frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}-1}{3-\frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}} \Rightarrow \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{3-3\tan^2\beta-1-\tan^2\beta}{3+3\tan^2\beta-1+\tan^2\beta} = \frac{1-2\tan^2\beta}{1+2\tan^2\beta}$

$\Rightarrow \frac{2\tan^2\alpha}{2} = \frac{4\tan^2\beta}{2}$ [∴ যোজন বিয়োজন করে পাই]

$\Rightarrow \frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\beta} = 2 \therefore \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \pm\sqrt{2}$ **(Ans.)**

30. **Solⁿ: (a);** $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = 16\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 7A$ [∴ ধরি, $\frac{2\pi}{15} = A$]

$= 8.\frac{1}{\sin A}(2\sin A\cos A)\cdot\cos 2A\cos 4A\cos 7A$

$= 4\cdot\frac{1}{\sin A}(2\sin 2A\cos 2A)\cdot\cos 4A\cdot\cos 7A$

$= 2\cdot\frac{1}{\sin A}(2\sin 4A\cos 4A)\cdot\cos 7A = \frac{1}{\sin A}(2\sin 8A\cos 7A)$

$= \frac{1}{\sin A}(\sin 15A + \sin A)$[∵ $2\sin A\cos A = \sin(A+B) + \sin(A-B)$]

$= \frac{1}{\sin A}\left(\sin 15\cdot\frac{2\pi}{15} + \sin A\right) = \frac{1}{\sin A}(\sin 2\pi + \sin A) = 1$ **(Ans.)**

> হৃদয়কে অনুসরণ করো, কিন্তু মস্তিষ্ক সাথে রাখো!
>
> Alfred Adler

অধ্যায় ০৯

অন্তরীকরণ

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

অনির্ণেয় আকৃতি: গণিতে 7 টি অনির্ণেয় আকৃতি আছে। সেগুলো হলো:

(i) $\frac{0}{0}$ (ii) $\frac{\infty}{\infty}$ (iii) $0 \times \infty$ (iv) 0^0 (v) $\infty - \infty$ (vi) 1^∞ (vii) ∞^0

সীমার প্রাথমিক ধারণা

$y = f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ ফাংশনটির দিকে লক্ষ কর। x এর বিভিন্ন মানের জন্য চলো y এর কিছু মান আমরা নির্ণয় করি।

x	0	1	2	3	4	5	6
y	3	4	5	$\frac{0}{0}$	7	8	9

লক্ষ কর, ফাংশনটি $x = 3$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। $x = 3$ এর জন্য $f(3) = \frac{0}{0}$; যা অনির্ণেয়।

তাহলে আমরা চাই $x = 3$ বিন্দুতে ফাংশনটির সম্ভাব্য মান নির্ণয় করতে।

তার জন্য আমরা একবার 3 এর বামদিক থেকে (3 এর চেয়ে ছোট মান থেকে) আরেকবার 3 এর ডানদিক থেকে (3 এর চেয়ে বড় মান থেকে) 3 এর দিকে অগ্রসর হবো।

বামদিকবর্তী সীমা (Left Hand Limit, L.H.L)

3 এর বাম দিক থেকে 3 এর দিকে অগ্রসর হলে, ফাংশনটি যে মানের দিকে অগ্রসর হয় তাই ফাংশনটির বামদিকবর্তী সীমা।

যেমন: $x = 2.9, 2.99, 2.999 \dots\dots$ ইত্যাদির জন্য ফাংশনটির মান $= 5.9, 5.99, 5.999 \dots\dots$ ইত্যাদি।

∴ x এর মান 3 এর বামদিক থেকে (বা 3 এর থেকে ছোট সংখ্যা থেকে) 3 এর দিকে দিকে অগ্রসর হলে ফাংশনের মান 6 এর কাছে যায়। 6 এখানে ফাংশনটির বামদিকবর্তী সীমা (Left Hand Limit, L.H.L). $\therefore \text{L.H.L} = \lim_{x\to3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$

[→ এর অর্থ হলো tends to এবং 3^- অর্থ হলো 3 এর বামদিকবর্তী সীমা (3 থেকে ছোট, 3 এর খুবই নিকটবর্তী সংখ্যা)]

ডানদিকবর্তী সীমা (Right Hand Limit, R.H.L)

এখন 3 এর ডানদিক থেকে (বা 3 হতে বড় সংখ্যা হতে) 3 এর কাছে অগ্রসর হলেও দেখা যাবে ফাংশনের মানটি 6 এর কাছে যায়। 6 এখানে ফাংশনের ডানদিকবর্তী সীমা। $\therefore \text{R.H.L} = \lim_{x\to3^+} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$

[3^+ অর্থ হলো 3 এর ডানদিকবর্তী সীমা, (3 থেকে বড়, 3 এর খুবই নিকটবর্তী)]

যেহেতু, এখানে L.H.L এবং R.H.L একই, তাই $x = 3$ বিন্দুতে ফাংশনটির সম্ভাব্য মান বা সীমাস্থ মান (Limiting Value) = 6 বা, $\lim_{x\to3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$. যদি L.H.L এবং R.H.L একই না হতো তাহলে $x = 3$ বিন্দুতে ফাংশনটির কোন সীমাস্থ মান থাকতো না।

যেমন, $\lim_{x\to0} \frac{|x|}{x}$ অস্তিত্বশীল নয় কেননা $\lim_{x\to0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0} \frac{x}{x} = 1$ [$\because x > 0$ হলে, $|x| = x$]. কিন্তু $\lim_{x\to0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{-x}{x} = -1$ [$\therefore x < 0$ হলে, $|x| = -x$]

একইভাবে $\lim_{x\to0} \frac{|\sin x|}{x}, \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{1-\cos 2(x-1)}}{x-1}$ ইত্যাদি অস্তিত্বশীল নয় [উল্লেখ্য এক্ষেত্রে একদিকবর্তী সীমা অর্থাৎ $\lim_{x\to a^+} f(x)$ কিংবা $\lim_{x\to a^-} f(x)$ অস্তিত্বশীল]

সীমাস্থ মান থাকার শর্ত

(i) ফাংশনের L. H. L অস্তিত্বশীল $\left[\lim_{x\to a^-} f(x) \text{ exists}\right]$

(ii) ফাংশনের R. H. L অস্তিত্বশীল $\left[\lim_{x\to a^+} f(x) \text{ exists}\right]$

(iii) ফাংশনের L. H. L = R. H. L $\left[\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)\right]$ হলে, $\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)}$

লিমিট বা সীমার সংজ্ঞা: স্বাধীন চলক x এর মান যদি উভয় দিক থেকে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা 'a' এর দিকে অগ্রসর হয়ে 'a' এর খুব নিকটবর্তী হওয়ার ফলে f(x) এর মানগুলি একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর খুবই নিকটবর্তী হয়, তবে l কে x = a বিন্দুতে y = f(x) ফাংশনটির সীমাস্থ মান বা সীমা বলা হয়। এই কথাকে এভাবে লেখা যায়, $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = l}$

লিমিট এর δ, ϵ সংজ্ঞা: কোনো বিন্দু x = a তে কোনো ফাংশন f(x) এর লিমিট হল এমন একটি সংখ্যা l যেন x কে a এর 'যথেষ্ট কাছাকাছি' এনে f(x) কে l এর 'যতখুশি তত কাছে' আনা যায়। তখন একে $\lim_{x\to a} f(x) = l$ লিখে প্রকাশ করা হয়।
অর্থাৎ, $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এর মানে হল যেকোনো বাস্তব মান $\epsilon > 0$ এর জন্য এরকম $\delta > 0$ আছে যেন যদি $0 < |x - a| < \delta$ হয়, তাহলে $|f(x) - l| < \epsilon$ হবে।

লিমিটের সাধারণ ধর্মাবলি

(i) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

(iii) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\left[\lim_{x\to a} g(x) \neq 0\right]$

(iv) $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

- sinx, cosx ইত্যাদি সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের লিমিট নির্ণয় করতে x কে অবশ্যই রেডিয়ানে পরিমাপ করতে হবে।
- **L'Hôpital's Rule:** যদি x = a বিন্দুতে $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর মান $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ হয় [অর্থাৎ, $\frac{f(a)}{g(a)}$ হলো $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ আকৃতির]

তাহলে, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ব্যাখ্যা: $\frac{f(a)}{g(a)}$ যদি শুধুমাত্র $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ আকারে থাকে, তাহলে x = a বিন্দুতে $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর সীমাস্থ মান নির্ণয় করার জন্য লবের f(x) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে লবে বসাতে হবে এবং হরের g(x) কে আলাদাভাবে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে হরে বসাতে হবে। এরপরও যদি $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ আকার থাকে তাহলে পূর্বের ধাপগুলো পুনরায় করতে হবে। এভাবে যতক্ষণ $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ আকার থাকবে ততক্ষণ উক্ত ধাপগুলোর পুনরাবৃত্তি করতে হবে।

জেনে রাখো

যদি ফাংশনটি x = a বিন্দুতে $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ আকারের না হয় কিন্তু কোনো mathmatical operation করে যদি ফাংশনটিকে $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ আকৃতিতে নিয়ে আসা যায় তাহলে উক্ত আকৃতিতে আনার পরে ফাংশনটিতে L'Hôpital's Rule প্রয়োগ করা যাবে।

কোন বিন্দুতে একটি ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হবার শর্ত

যদি $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ হয়, তাহলে y = f(x) ফাংশনটি x = a বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে। সুতরাং y = f(x) ফাংশনটি x = a বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবার শর্ত:

(i) f(a) অস্তিত্বশীল

(ii) L. H. L অস্তিত্বশীল $[\lim_{x\to a^-} f(x) \text{ exists}]$

(iii) R. H. L অস্তিত্বশীল $[\lim_{x\to a^+} f(x) \text{ exists}]$

(iv) L. H. L = R. H. L = f(a) বা, $\left[\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)\right]$

অন্তরীকরণ

(i) কোন ফাংশন $y = f(x)$ এর অন্তরক সহগ $y_1 = f'(x)$ দ্বারা এরূপ একটি ফাংশন বোঝানো হয় যার মান $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ যেকোনো (x, y) বিন্দুতে বক্ররেখার ঢালের সমান। তাই $y = f(x)$ বক্ররেখাস্থ দুইটি পরস্পর সন্নিকটস্থ বিন্দু $(x, f(x))$ ও $(x+h,\ f(x+h))$ হলে, $(x, f(x))$ বিন্দুতে বক্ররেখার ঢাল $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$

(ii) sinx, cosx ইত্যাদি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় করার সময় x কোণটি রেডিয়ানে পরিমাপ করা হয়েছে মনে করা হয়। x কোণটি অন্য কোন এককে থাকলে তাকে অবশ্যই রেডিয়ানে পরিণত করে নিতে হবে।

(iii) কোন বিন্দুতে অন্তরকের মান নির্ণয়যোগ্য হবে যদি $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ লিমিটটি অস্তিত্বশীল হয়।

অর্থাৎ, $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

জেনে রাখো

লিমিটের যে কোন Problem solve করার আগে দেখে নিব যে, ফাংশনে মান বসালে বাস্তব মান পাওয়া যায় কিনা। পাওয়া গেলে Simplify করার প্রয়োজন নেই। যেমন: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-9}{x+4} = \frac{2^2-9}{2+4} = \frac{4-9}{6} = \frac{-5}{6}$]

Type-01: লিমিটের অস্তিত্বশীলতা কেন্দ্রিক

Concept

কোন বিন্দুতে লিমিট অস্তিত্বশীল হবে যদি ঐ বিন্দুতে Left Hand Limit (L.H.L) = Right Hand Limit (R.H.L) হয়।

অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

Problems

Example-01: যদি $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ হয়, তবে $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর মান কত?

Sol^n: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0;\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0 \therefore \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **(Ans.)**

Example-02: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = ?$

Sol^n: Right hand limit $= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{\sqrt{2}\sin\frac{h}{2}}$ [Let, $x = 0 + h \therefore h \to 0$] $= \sqrt{2}$

Left hand limit $= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-h}{\sqrt{1-\cos h}} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-h}{\sqrt{2}\sin\frac{h}{2}} = -\sqrt{2} \therefore R.H.L \neq L.H.L$

∴ লিমিটের মান অস্তিত্বশীল নয়।

Example-03: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{|x|}-1}{x} = ?$

Sol^n: L.H.L. $= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{|x|}-1}{x} = -1$; R.H.L. $= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{|x|}-1}{x} = 1$ [Let; $x = 0 - h \therefore h \to 0$]

$\because L.H.L \neq R.H.L \therefore$ Limit অস্তিত্বশীল নয়। **(Ans.)**

Alternative: L.H.L $= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{|x|}-1}{x}; = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{-x}-1}{x}; = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-e^x}{e^x x}; = \lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{(e^x-1)}{x}\left(\frac{1}{e^x}\right); = \lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{(e^x-1)}{x} e^{-x}$ $= -1$; and R.H.L $= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1 \therefore L.H.L \neq R.H.L$; Limit অস্তিত্বশীল নয়। **(Ans.)**

Example-04: $f(x) = \begin{cases} x^2; x < 1 \\ 3; x = 1 \\ x^2 + 1; x > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ বিদ্যমান কিনা যাচাই কর।

Sol^n: $L.H.L = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2) = 1$

এবং $R.H.L = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 + 1) = 1 + 1 = 2$

$\therefore L.H.L \neq R.H.L \therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ এর অস্তিত্ব নেই।

Type-02: বিচ্ছিন্নতা ও অবিচ্ছিন্নতা

Concept

কোন বিন্দু $(x = a)$ তে কোনো ফাংশন $y = f(x)$ অবিচ্ছিন্ন হবে যদি ঐ বিন্দুতে $L.H.L = R.H.L = f(a)$ হয়।

অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Problems

Example-05: $f(x) = \begin{cases} -x; x \leq 0 \\ x; 0 < x \leq 1 \\ 2 - x; 1 < x \leq 2 \\ 1; x > 2 \end{cases}$ $x = 0,\ x = 1\ \&\ x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনটির বিচ্ছিন্নতা, অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর।

Sol^n: $x = 0$ বিন্দুতে $f(0) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(0 - h) = \lim\limits_{h\to 0} (0 - h) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(0 + h) = \lim\limits_{h\to 0} (0 + h) = 0$

যেহেতু $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

সুতরাং, $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

$x = 1$ বিন্দুতে, $f(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(1 - h) = \lim\limits_{h\to 0} (1 - h) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(1 + h) = \lim\limits_{h\to 0} \{2 - (1 + h)\} = 1$

$\because f(1) = L.H.L = R.H.L$

$\therefore$ ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

$x = 2$ বিন্দুতে, $f(2) = 2 - 2 = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} [2 - (2 - h)] = 0$

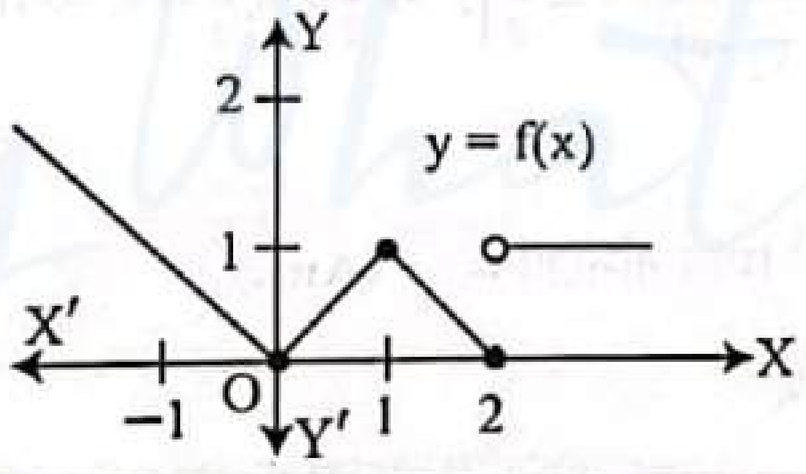
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(2 + h) = 2$

$\because f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$\therefore x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।

- গ্রাফ আঁকতে পারলে আরও সহজে বুঝা যায়।

উপরিউক্ত ফাংশনের গ্রাফ:



Example-06: শূন্য ব্যতীত k এর এমন একটি মান নির্ণয় কর যা নিচের ফাংশনকে x = 0 বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন করবে। তোমার উত্তরের যৌক্তিকতা ব্যাখ্যা কর। $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan kx}{x} & ; x < 0 \\ 3x + 2k^2 & ; x \geq 0 \end{cases}$

Solⁿ: দেওয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan kx}{x} & ; x < 0 \\ 3x + 2k^2 & ; x \geq 0 \end{cases}$

1st part: $\text{L.H.L} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\tan kx}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\tan kx}{kx} \times k = k$; $\text{R.H.L} = \lim_{x \to 0^+} (3x + 2k^2) = 2k^2$

আবার, $f(0) = 3 \times 0 + 2k^2 = 0 + 2k^2 = 2k^2$

x = 0 বিন্দুতে f(x) বা ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হবে যদি, $2k^2 = k \;\; \therefore k = 0, \frac{1}{2}$; So, $k = \frac{1}{2}$ $[\because k \neq 0]$

2nd part: যদি $k = \frac{1}{2}$; $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan\frac{x}{2}}{x} & ; x < 0 \\ 3x + \frac{1}{2} & ; x \geq 0 \end{cases}$

Now, $\lim_{x \to 0^-} \frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \to 0^+} \left(3x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ and, $f(0) = \frac{1}{2} \; \therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

$k = \frac{1}{2}$ হলে ফাংশনটি x = 0 বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে।

Type-03: L'Hôpital's Rule সংক্রান্ত

Concept

limit-এর অধিকাংশ সমস্যা L'Hôpital's Rule ব্যবহার করে সমাধান করা যায়। ভর্তি পরীক্ষার MCQ-তে L'Hôpital's Rule ($\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ আকার remove না হওয়া পর্যন্ত লব এবং হর অন্তরীকরণ করা) তাই খুব কার্যকরী।

Problems

Example-07: $\lim_{x \to 0} \frac{x(\cos x + \cos 2x)}{\sin x} = ?$ [KU' DU' 03-04, 13-14, RU' 14-15]

Solⁿ: $\lim_{x \to 0} \frac{x(\cos x + \cos 2x)}{\sin x} \left[\frac{0(1+1)}{0} = \frac{0}{0} \text{ আকৃতি}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{x(-\sin x - 2\sin 2x) + (\cos x + \cos 2x).1}{\cos x} = \frac{0 + (1+1)}{1} = 2$ (Ans.)

বিকল্প: $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x + \cos 2x}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x \to 0} (\cos x + \cos 2x)}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{\cos 0 + \cos(2 \times 0)}{1} = \frac{1+1}{1} = 2$ (Ans.)

Example-08: $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 + 2x^2 - 12x - 9}{x^2 - x - 6}$ এর মান কত? [RU' 08-09]

Solⁿ: প্রদত্ত সমস্যা $= \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 + 4x - 12}{2x - 1}$ (L'Hôpital's Rule) $= \frac{3.3^2 + 4.3 - 12}{2.3 - 1} = \frac{27}{5}$ (Ans.)

Example-09: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = ?$ [JU' 18-19, KU' 12-13]

Solⁿ: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{-2(0-1)} = \frac{1}{2}$ (Ans.)

Alternative: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \lim_{\frac{\pi}{2} \to x \to 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \frac{1}{2}\left[x \to \frac{\pi}{2} \text{ হলে}, \frac{\pi}{2} - x \to 0\right]$

Example-10: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 7x}{3x^2} = ?$ [JnU' 09-10]

Solⁿ: $\lim_{x \to 0} \frac{7\sin 7x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{49\cos 7x}{6} = \frac{49 \times 1}{6}$ [মান বসিয়ে] $= \frac{49}{6}$ (Ans.)

❖ **Shortcut:** $\frac{(7)^2}{2 \times 3} = \frac{49}{6}$

Example-11: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^{-1}5x}{4x}=?$ **[RU' 08-09, 07-08]**

Sol^n: এখানে, $\frac{\sin^{-1}0}{4\times0}=\frac{0}{0}$ আকৃতি L'Hôpital's Rule ব্যবহার করে পাই, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}.5}{4}=\frac{5}{4}$ [যা বাস্তব মান] **(Ans.)**

Example-12: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x-\sin x}{\sin4x}=?$

Sol^n: L'Hôpital's Rule ব্যবহার করে, $\lim\limits_{x\to0}\frac{5\cos5x-\cos x}{4\cos4x}=\frac{5\times1-1}{4\times1}=1$

❖ **Shortcut:** $\frac{5-1}{4}=1$

Example-13: $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=?$

Sol^n: L'Hôpital's Rule ব্যবহার করে $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$

[$\frac{0}{0}$ আকৃতি Remove না হওয়ায় পুনরায় L'Hôpital's Rule ব্যবহার করে] $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$ **(Ans.)**

Example-14: $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=?$

Sol^n: L'Hôpital's Rule ব্যবহার করে, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}\cos x}{\cos x}$

[$\frac{0}{0}$ আকৃতি Remove হওয়াতে আমরা এখন মান বসাতে পারি।] $=\frac{e^0.1}{1}=1$ **(Ans.)**

Example-15: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=?$

Sol^n: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2x-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sec^2x.\tan x+\sin x}{6x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sec^4x+4\sec^2x.\tan^2x+\cos x}{6}=\frac{2+0+1}{6}=\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

[$\frac{0}{0}$ আকৃতি Remove হওয়ার আগ পর্যন্ত L'Hôpital's Rule ব্যবহার করে]

Alternative: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x\quad x^2}\times\frac{1}{\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\cos x}$ অথবা L'Hôpital's প্রয়োগে, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$

$=1\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$ [এখানে, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$]

Example-16: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)=?$

Sol^n: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\tan x$ [L'Hôpital's Rule]$=\tan0=0$ **(Ans.)**

বিকল্প: $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\tan\frac{x}{2}=0$

Example-17: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 2x}$ এর মান হবে- **[DU'20-21]**

Sol^n: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 2x}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{0+\sin x}{2\times2\sin2x\cos2x}$ [L'Hôpital's Rule]$=\frac{1}{4}\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{2x}{\sin2x}\times\frac{1}{2}\right)\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos2x}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{8}$ **(Ans.)**

Example-18: $f(a)=2, f'(a)=1,\ g(a)=1,\ g'(a)=2$ তাহলে $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)f(a)-f(x)g(a)}{x-a}=?$

(a) 3
(b) 0
(c) −3
(d) 1

Sol^n:(a); $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)f(a)-f(x)g(a)}{x-a}=[\frac{0}{0}$ আকৃতি$]=\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)f(a)-f'(x)g(a)}{1-0}=g'(a)f(a)-f'(a)g(a)$

$=2\times2-1\times1=4-1=3$ **(Ans.)**

Example-19: $\lim\limits_{x\to y}\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=?$

(a) $-\cos y$
(b) $\cos y$
(c) $\sin y$
(d) $-\sin y$

Sol^n:(b); $\lim\limits_{x\to y}\frac{\sin x-\sin y}{x-y}[\frac{0}{0}$ আকৃতি$]=\lim\limits_{x\to y}\frac{\cos x-0}{1-0}=\cos y$ **(Ans.)** [L'Hôpital's Rule]

বিকল্প: $\lim\limits_{x\to y}\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=\lim\limits_{x\to y}\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{x-y}=\lim\limits_{x\to y}2\cos\frac{x+y}{2}\lim\limits_{(x-y)\to0}\frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}}\times\frac{1}{2}=2\cos\frac{2y}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\cos y$ **(Ans.)**

Example-20: $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}=?$

(a) 0 (b) −4 (c) 4 (d) 2

Sol^n: (c); $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\ [\because \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta]=4\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)^3=4\times1^3=4$ **(Ans.)**

বিকল্প: $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}\ [\frac{0}{0}\text{ form}]$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-3\sin x+9\sin 3x}{6x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-3\cos x+27\cos 3x}{6}=\frac{-3\times1+27\times1}{6}=\frac{24}{6}=4$

Note: চলকের উচ্চঘাত সম্বলিত পদ থাকলে, মূল নিয়মে করাটাই সহজ হয়। নিচের উদাহরণ টা লক্ষ করি।

Example-21: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan ux-\sin ux}{x^3};\ u>0=?$

(a) $\frac{u^2}{2}$ (b) $\frac{u^4}{4}$ (c) $\frac{u^3}{3}$ (d) $\frac{u^2}{2}$

Sol^n: Process-01: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan ux-\sin ux}{x^3}\left[\frac{0}{0}\text{ form}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{u\sec^2 ux-u\cos ux}{3x^2}\ [\frac{0}{0}\text{ form}]$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{u^2(2\sec^2 ux\tan ux)+u^2\sin ux)}{6x}\ [\frac{0}{0}\text{ form}]$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{u^2(2u\sec^4 ux+4u\sec^2 ux\tan^2 ux+u\cos ux}{6}=\frac{u^2(2u+u)}{6}=\frac{u^3}{2}$ **(Ans.)**

Process02: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan ux-\sin ux}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan ux(1-\cos ux)}{x^3}$

$=\left\{\lim\limits_{ux\to0}\frac{\tan ux}{ux}\times u\right\}\times\lim\limits_{\frac{ux}{2}\to1}2\left(\frac{\sin\frac{ux}{2}}{\frac{ux}{2}}\right)^2\times\frac{u^2}{4}=1\times u\times2\times1^2\times\frac{u^2}{4}=\frac{u^3}{2}$ **(Ans.)**

Example-22: $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)=?$

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{3}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

Sol^n: (d); $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\log x-x+1}{x\log x-\log x}\ [\frac{0}{0}\text{ form}]$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\frac{1}{x}+\log x-1}{x.\frac{1}{x}+\log x-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\log x}{1-\frac{1}{x}+\log x}\left[\frac{0}{0}\text{ form}\right]=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

Example-23: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=?$

(a) −3 (b) 3 (c) −2 (d) 1

Sol^n: (d); Let, $y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}\Rightarrow\ln y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x.\ln(\sin x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\cot x};\ [\frac{0}{0}\text{ form}]$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x.}\cos x}{-\operatorname{cosec}^2 x}=0\therefore\ln y=0;y=e^0=1\therefore\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=1$ **(Ans.)**

Example-24: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+\dots\dots\dots+x^n-n}{x}=?$

(a) n (b) $\frac{n+1}{2}$ (c) $\frac{n(n+1)}{2}$ (d) $\frac{n\,(n-1)}{2}$

Sol^n: (c); $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+\dots\dots\dots+x^n-n}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+2x+\dots\dots\dots+nx^{n-1}-0}{1}=1+2.1+3.1^2+\dots\dots\dots+n$

$=1+2+3+\dots\dots\dots n=\frac{n(n+1)}{2}$ **(Ans.)**

Note: n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল $=\frac{n(n+1)}{2}$

Example-25: $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x^x-a^a}=?$

(a) $\frac{2a^a}{a^a+1}$ (b) $\frac{\ln a-1}{\ln a+1}$ (c) $\frac{1-\ln a}{1+\ln a}$ (d) $\frac{\ln a+1}{\ln a-1}$

Sol^n: (b); $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x^x-a^a};\left[\frac{0}{0}\text{ form}\right]=\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x\ln a-ax^{a-1}}{x^x(1+\ln x)-0}=\frac{a^a\ln a-a^a}{a^a(1+\ln a)}=\frac{\ln a-1}{\ln a+1}$ **(Ans.)**

Type-04: হরে/লবে বর্গমূল সংবলিত পদটির অনুবন্ধী দিয়ে লব ও হরকে গুণন করে লিমিট নির্ণয়

Concept

(i) $\frac{0}{0}$ আকৃতির (ii) বীজগাণিতিক function (iii) লব বা হর বা উভয়টিতে বর্গমূল ($\sqrt{\ }$) থাকবে।

নিয়ম: অনুবন্ধী দিয়ে গুণ করে এমন বানাতে হবে যেন limit বসানো যায়।

Problems

Example-26: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)=?$ **[Agri. Guccho'20-21]**

Sol^n: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$

Example-27: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}=?$ **[JU'18-19]**

Sol^n: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+2x}}\times2-\frac{1}{2\sqrt{1-3x}}(-3)}{1}=\frac{1+\frac{3}{2}}{1}=\frac{5}{2}$ **(Ans.)**

বিকল্প: $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x})(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+2x-1+3x}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}}=\frac{5}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}$ **(Ans.)**

Example-28: $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2-\sqrt{4+x}}$ এর মান কত? **[RU'22-23]**

(a) -2 (b) -1 (c) -3 (d) -4

Sol^n: (d); $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2-\sqrt{4+x}}\left[\frac{0}{0}\text{ form}\right]=-\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}}=-4$ [মান বসিয়ে]

Example-29: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x}}=?$

Sol^n: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x})}{(\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}$ [লব ও হরকে $(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x})$ দ্বারা গুণ করে]

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x^2-1-x)(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x})}{(1+x^3-1-x)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(x-1)(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x})}{x(x^2-1)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x}}{(x+1)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}=\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}{(0+1)(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0})}=\frac{2}{1.2}=1$

Example-30: $\lim\limits_{x\to0}\frac{2(b-\sqrt{b^2+x^2})}{x^2}=?$

(a) $\frac{1}{b}$ (b) $-\frac{1}{b}$ (c) $\frac{1}{2b}$ (d) $\frac{2}{b}$

Sol^n: (b); Process-01: $\lim\limits_{x\to0}\frac{2(b-\sqrt{b^2+x^2})}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\{(b-\sqrt{b^2+x^2})(b+\sqrt{b^2+x^2})\}}{x^2(b+\sqrt{b^2+x^2})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2(b^2-b^2-x^2)}{x^2(b+\sqrt{b^2+x^2})}=\frac{-2}{b+b}=-\frac{1}{b}$ **(Ans.)**

Process-02: $\lim\limits_{x\to0}\frac{2(b-\sqrt{b^2+x^2})}{x^2};\left[\frac{0}{0}\text{ form}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\frac{1}{(2\sqrt{b^2+x^2})}\times2x}{2x}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{2x\sqrt{b^2+x^2}}=-\frac{1}{b}$ (Ans.)

Example-31: $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-9}}=?$

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (c) $\sqrt{6}$ (d) $-\frac{1}{\sqrt{6}}$

Sol^n: (b); $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-9}}=\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}}+\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}}=\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\lim\limits_{x\to3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$

$=\frac{1}{\sqrt{6}}+\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{6}}+\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{6}}+0=\frac{1}{\sqrt{6}}$ **(Ans.)**

Example-32: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=?$

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) -1

Sol^n: (a); $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x}{x}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=2\times1\times\frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=1$ **(Ans.)**

Type-05: $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n\,a^{n-1}$ সূত্রের সমস্যা সংক্রান্ত

Concept

সাধারণভাবে এই Type এর সমস্যা সমাধানের সূত্র হলো, $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n\,a^{n-1}$ এই সমস্যাতেও L'Hôpital's Rule এর মাধ্যমে করা যায়, $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}\left[\frac{0}{0}\text{ form}\right]=\lim\limits_{x\to a}\frac{n\,x^{n-1}-0}{1-0}=n\,a^{n-1}$

Shortcut

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\frac{m}{n}a^{m-n}$$

Problems

Example-33: মান নির্ণয় কর: $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ **[JU' 18-19, 10-11]**

Sol

Solⁿ: ধরি, $\sqrt{x}=z,\sqrt{a}=b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\lim\limits_{z\to b}\frac{z^5-b^5}{z-b}=5b^{5-1}\left[\because\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}\right]=5b^4=5\left(\sqrt{a}\right)^4=5a^2$ **(Ans.)**

বিকল্প: $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{x-a}}{\frac{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{x-a}}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{x-a}}=\frac{\frac{5}{2}a^{\frac{5}{2}-1}}{\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}-1}}=5a^{\frac{5}{2}-1-\left(\frac{1}{2}-1\right)}=5a^2$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}a^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}=5a^2$ **(Ans.)**

Example-34: $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^5-a^5}{\sin(x-a)}=?$

(a) $5a^4$ (b) $4a^4$ (c) $\frac{5}{a^4}$ (d) 0

Solⁿ: (a); $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^5-a^5}{\sin(x-a)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{x^5-a^5}{x-a}}{\frac{\sin(x-a)}{(x-a)}}=\frac{5.a^{5-1}}{1}=5a^4$

বিকল্প: $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^5-a^5}{\sin(x-a)};\left[\frac{0}{0}\text{form}\right]=\lim\limits_{x\to a}\frac{5x^{5-1}-0}{\cos(x-a).1}=\frac{5a^4}{\cos 0}=5a^4$ **(Ans.)**

Type-06: মিশ্র ফাংশন

Concept

এসব ক্ষেত্রে বীজগাণিতিক ও ত্রিকোণমিতিক সূত্রের মাধ্যমে সাজিয়ে ফেলতে হবে। তারপর লিমিট এর সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

প্রয়োজনীয় সূত্র:
(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$
(v) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1$
(vi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1$

জেনে রাখো

শুধুমাত্র $x\to 0$ এর case-এ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{লব}}{\text{হর}}$ আকৃতির ক্ষেত্রে, $\sin ax$, $\tan ax$, $\sin^{-1}ax$, $\tan^{-1}ax$, $ax, \ln(1+ax)$, $e^{ax}-1$ ফাংশনগুলো যদি লব ও হরের মধ্যে যোগ, বিয়োগ বা গুণ আকারে থাকে, তাহলে উত্তর হবে লব ও হরের সহগগুলোর অনুপাত। তবে, গুণ আকৃতির ক্ষেত্রে লবের এবং হরের পদ সংখ্যা সমান হতে হবে।

যেমন: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax+\tan bx-e^{cx}+1}{\ln(1+dx)+\tan^{-1}gx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}.ax+\frac{\tan bx}{bx}.bx-\frac{(e^{cx}-1)}{cx}.cx}{\frac{\ln(1+dx)}{dx}.dx+\frac{\tan^{-1}(gx)}{gx}.gx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x[1.a+1.b-1.c]}{x[1.d+1.g]}=\frac{a+b-c}{d+g}$

Shortcut

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax+\tan bx-(e^{cx}-1)}{\ln(1+dx)+\tan^{-1}(gx)}=\frac{a+b-c}{d+g}$$

অনুরূপভাবে, $\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}(ax)\ \tan bx}{\ln(1+cx).\ (e^{dx}-1)}=\frac{a.b}{c.d}=\frac{ab}{cd}$ এবং $\lim_{x\to0}\frac{a\sin bx+c\tan dx-f(e^{gx}-1)}{h\ln(1+jx)+k\tan^{-1}(mx)}=\frac{ab+cd-fg}{hj+km}$

Problems

Example-35: $\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)\tan^2 x}{x^3}$ =কত? **[RU'22-23]**

(a) -1 (b) 1 (c) 4 (d) 3

Sol^n: (b); $\left(\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\right)\left(\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\times\left\{\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\right\}^2=1\times1^2=1$

Example-36: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x-\sin x}{\sin 6x}=?$ **[DU'15-16]**

Sol^n: Using L'Hôpital Rule: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x-\sin x}{\sin 6x}=\lim_{x\to0}\frac{7\cos 7x-\cos x}{6\cos 6x}=\frac{7-1}{6}=1$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\frac{7-1}{6}=1$ **(Ans.)**

Example-37: $\lim_{x\to0}\frac{5x+6\sin 2x+7\tan^{-1}x}{2\sin^{-1}3x+9e^x-9}=?$

Sol^n: $\lim_{x\to0}\frac{5x+6.\frac{\sin 2x}{2x}.2x+7\frac{\tan^{-1}x}{x}.x}{2\frac{\sin^{-1}3x}{3x}.3x+\frac{9(e^x-1)}{x}.x}=\lim_{x\to0}\frac{x\left[5+6.\frac{\sin 2x}{2x}.2+7.\frac{\tan^{-1}x}{x}.1\right]}{x\left[2.\frac{\sin^{-1}3x}{3x}.3+9.\frac{(e^x-1)}{x}.1\right]}=\frac{5+6.1.2+7.1.1}{2.1.3+9.1.1}=\frac{8}{5}$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\frac{5+6\times2+7\times1}{2\times3+9\times1}=\frac{8}{5}$

Example-38: $\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}3x.\tan 2x}{(e^{4x}-1)9x}=?$

Sol^n: $\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^{-1}3x}{3x}.\ 3x.\frac{\tan 2x}{2x}.\ 2x}{\frac{e^{4x}-1}{4x}.\ 4x.\ 9x}=\lim_{x\to0}\frac{1.3.1.2}{4.9}=\frac{1}{6}$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\frac{3\times2}{4\times9}=\frac{1}{6}$ **(Ans.)**

Example-39: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x-\tan 7x-\ln(1+8x)}{e^{7x}-1+\sin 8x}=?$

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $-\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}$

Sol^n: (b); $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x-\tan 7x-\ln(1+8x)}{e^{7x}-1+\sin 8x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 5x}{x}-\frac{\tan 7x}{x}-\frac{\ln(1+8x)}{x}}{\frac{e^{7x}-1}{x}+\frac{\sin 8x}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}.5-\frac{\tan 7x}{7x}.7-\frac{\ln(1+8x)}{8x}.8}{\frac{e^{7x}-1}{7x}.7+\frac{\sin 8x}{8x}.8}=\frac{5-7-8}{7+8}=-\frac{2}{3}$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x-\tan 7x-\ln(1+8x)}{e^{7x}-1+\sin 8x}$ $\therefore$ x এর সহগ গুলো নিয়ে, $\lim_{x\to0}\frac{5-7-8}{7+8}=-\frac{2}{3}$ **(Ans.)**

Example-40: $\lim_{x\to1}\frac{2x^3-(2k+1)x^2+2x+k}{x-1}=-6$ হলে, k-এর মান কত? **[DU'22-23]**

(a) 1 (b) -1 (c) 3 (d) $-\frac{1}{2}$

Sol^n: (c); $\lim_{x\to1}\frac{2x^3-(2k+1)x^2+2k+k}{x-1}=-6\Rightarrow\frac{\lim_{x\to1}\{2x^3-(2k+1)x^2+2k+k\}}{\lim_{x\to1}(x-1)}=-6$

$\Rightarrow\lim_{x\to1}\{2x^3-(2k+1)x^2+2x+k\}=-6\times\lim_{x\to1}(x-1)=-6(1-1)$

$\Rightarrow2-(2k+1)+2+k=0\Rightarrow2-2k-1+2+k=0\Rightarrow3-k=0\therefore k=3$ **(Ans.)**

বিকল্প: যেহেতু, লিমিটের সমাধান −6 (সসীম সংখ্যা) এবং হরে লিমিট বসানোর পর শূন্য পাওয়া যায়। সুতরাং লবে লিমিট বসালে অবশ্যই শূন্য হতে হবে, নাহলে সীমাস্থ মান থাকবে না।

$\therefore\lim_{x\to1}\{2x^3-(2k+1)x^2+2x+k\}=0\Rightarrow2-(2k+1)+2+k=0\Rightarrow3-k=0\therefore k=3$ **(Ans.)**

Type-07: x এর মান অসীমের দিকে ধাবিত হলে লিমিটের মান নির্ণয়

Concept

(i) $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}} f(x)$ (ii) বীজগাণিতিক ফাংশন (iii) $|x| < 1$ হলে, $[-1 < x < 1]$ এবং $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

নিয়ম: চলকের সর্বোচ্চ ঘাতবিশিষ্ট রাশি লব ও হরে common নিয়ে limit বসাতে হবে।

Case-01: লব ও হরের চলকের মাত্রা (সর্বোচ্চ ঘাত) সমান

Concept

$x \to \infty$ বা, $x \to -\infty$ এর জন্য লব ও হরের x এর সর্বোচ্চ ঘাত একই হলে সীমাস্থ মান $= \frac{\text{লবের x এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ}}{\text{হরের x এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ}} = \frac{\text{লবের মুখ্য সহগ}}{\text{হরের মুখ্য সহগ}}$

যেমন, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots\dots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\dots\dots+b_n} = \frac{a_0}{b_0}$

Problems

Example-41: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+c}{lx^2+mx+n}$ এর মান কত? [DU'17-18]

Solⁿ: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{\left(l+\frac{m}{x}+\frac{n}{x^2}\right)} = \frac{a+0+0}{l+0+0} = \frac{a}{l}$ **(Ans.)**

Example-42: $\lim\limits_{x\to\infty}\{\ln(2x-1) - \ln(x+5)\} = ?$

(a) ln 5 (b) ln 2 (c) ln 0 (d) $\ln\frac{2}{5}$

Solⁿ: (b); $\lim\limits_{x\to\infty}\{\ln(2x-1) - \ln(x+5)\} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\frac{2x-1}{x+5} = \lim\limits_{\frac{1}{x}\to0} \ln\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}}$

$= \ln\frac{2-0}{1+0} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$ **(Ans.)**

Example-43: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x}$ এর মান কত? [CU'22-23]

(a) 1 (b) −1 (c) −∞ (d) ∞

Solⁿ: (b); $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{-x} = -\sqrt{1} = -1$

Example-44: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x}$ এর মান হলো- [DU' 19-20]

Solⁿ: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{-x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{-x}$ [as $x \to -\infty \therefore x = -ve \therefore |x| = -x$]

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}} = 1$

বিকল্প: আমরা জানি, $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x; & \text{যখন } x > 0 \\ 0; & \text{যখন } x = 0 \\ -x; & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2}} [\because x < 0] = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}} = \sqrt{1+\frac{2}{-\infty}} = \sqrt{1-0} = \sqrt{1} = 1$ **(Ans.)**

Case-02: লবের চলকের মাত্রা < হরের চলকের মাত্রা

Concept

যদি লবের চলকের (x এর) মাত্রা < হরের চলকের (x এর) মাত্রা হয় তাহলে সীমাস্থ মান = 0
[$x \to \infty$ এবং $x \to -\infty$ দুই ক্ষেত্রেই]

Problems

Example-45: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+7}{2x^2+6x+9}=?$

Sol^n: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+7}{2x^2+6x+9}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(5+\frac{7}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}.\frac{5+\frac{7}{x}}{2+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=\frac{1}{\infty}.\frac{5+\frac{7}{\infty}}{2+\frac{6}{\infty}+\frac{9}{\infty^2}}=0\times\frac{5+0}{2+0+0}=0$ **(Ans.)**

Case-03: লবের চলকের মাত্রা > হরের চলকের মাত্রা

Concept

লবের চলকের মাত্রা > হরের চলকের মাত্রা হলে সীমাস্থ মান $+\infty$ অথবা $-\infty$

এক্ষেত্রে, লবের চলকের মাত্রা হরের চলকের মাত্রা অপেক্ষা 1 বেশি এর জন্য, $x \to \infty$ হলে, $\frac{\text{লবের মুখ্য সহগ}}{\text{হরের মুখ্য সহগ}} > 0$ [+ve] হলে সীমাস্থ মান = $+\infty$ এবং $\frac{\text{লবের মুখ্য সহগ}}{\text{হরের মুখ্য সহগ}} < 0$ [−ve] হলে সীমাস্থ মান = $-\infty$

জেনে রাখো

[$x \to -\infty$ হলে বিপরীত ঘটনা ঘটবে।]

Problems

Example-46: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+20x^2+2}{2x^2+5x+6}=?$

Sol^n: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3+\frac{20}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}x.\frac{3+\frac{20}{x}+\frac{2}{x^3}}{2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=\infty\times\frac{3+0+0}{2+0+0}=\infty\times\frac{3}{2}=+\infty$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\frac{\text{লবের মুখ্য সহগ}}{\text{হরের মুখ্য সহগ}}\times\infty=\frac{3}{2}\times\infty=+\infty$ **(Ans.)**

Example-47: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x+9}{-4x^2+6x+5}=?$

Sol^n: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^3}\right)}{x^2\left(-4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}x.\frac{3-\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^3}}{-4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}=\infty\times\frac{3-0+0}{-4+0+0}=\infty\left(-\frac{3}{4}\right)=-\infty$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\frac{\text{লবের মুখ্য সহগ}}{\text{হরের মুখ্য সহগ}}\times\infty=\frac{3}{-4}\times\infty=-\infty$ **(Ans.)**

Example-48: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^4-6x^2+3}{9x^3+2x+7}=?$

Sol^n: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(4-\frac{6}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)}{x^3\left(9+\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}x.\frac{4-\frac{6}{x^2}+\frac{3}{x^4}}{9+\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=(-\infty)\times\frac{4-0+0}{9+0+0}=-\infty\times\left(\frac{4}{9}\right)=-\infty$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\frac{\text{লবের মুখ্য সহগ}}{\text{হরের মুখ্য সহগ}}\times(-\infty)=\frac{4}{9}\times(-\infty)=-\infty$ **(Ans.)**

Example-49: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x^5+6x-2}{3x^3+2x+1}=?$

Sol^n: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5\left(-4+\frac{6}{x^4}-\frac{2}{x^5}\right)}{x^3\left(3+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{-4+\frac{6}{x^4}-\frac{2}{x^5}}{3+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right)=(-\infty)^2\left(-\frac{4}{3}\right)=\infty\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-\infty$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\frac{\text{লবের মুখ্য সহগ}}{\text{হরের মুখ্য সহগ}}\times(-\infty)^2=\frac{-4}{3}\times(-\infty)^2=-\frac{4}{3}\times\infty=-\infty$ **(Ans.)**

Note: এখানে যেহেতু লবের মাত্রা 5 এবং হরের মাত্রা 3 ∴ মাত্রার পার্থক্য 2 তাই $(-\infty)^2$ আসছে, অন্য সব ক্ষেত্রে মাত্রার পার্থক্য 1 ছিলো।

Case-04: $\frac{a^{n+k}+b^{n+k}}{a^n+b^n}$ আকৃতির $[n \to \infty]$

Concept

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+k}+b^{n+k}}{a^n+b^n} \text{ [ধরি } a<b] = \lim_{n\to\infty}\frac{b^{n+k}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n+k}+1\right)}{b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right)}$$ [∵ $a<b$ তাই b^{n+k} এবং b^n common নেওয়া হয়েছে]

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{b^k\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n+k}+1\right)}{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right)} = b^k\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\infty+k}+1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\infty}+1} = b^k\frac{0+1}{0+1} = b^k.1 = b^k$$

জেনে রাখো

[$a<b$ হলে $\frac{a}{b}<1$ সেক্ষেত্রে, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n \to 0$]

যেমন, $a = 2$ এবং $b = 3$ হলে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 0.0173$ এবং $\left(\frac{a}{b}\right)^{100} = \left(\frac{2}{3}\right)^{100} = 2.45\times10^{-18}$ $\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\infty} \to 0]$

Problems

Example-50: $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+7^{n+1}}{5^n-7^n}$ এর মান নির্ণয় কর। [BUET'12-13]

Sol^n: $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+7^{n+1}}{5^n-7^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}\left[\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}+\left(\frac{7}{7}\right)^{n+1}\right]}{7^{n+1}\left[\left(\frac{5}{7}\right)^n\cdot\frac{1}{7}-\frac{7^n}{7^n}\cdot\frac{1}{7}\right]} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}+1\right]}{\left[\left(\frac{5}{7}\right)^n\cdot\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\right]} = \frac{0+1}{0.\frac{1}{7}-\frac{1}{7}}$ [∵ $|x|<1$ হলে, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$] $= -7$ (Ans.)

Example-51: $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} = ?$

(a) 0
(b) 1
(c) −1
(d) 2

Sol^n: (b); $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-\frac{1}{3^x}}{3^x+\frac{1}{3^x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3^x\left(1-\frac{1}{3^{2x}}\right)}{3^x\left(1+\frac{1}{3^{2x}}\right)} = \frac{1-0}{1+0} = 1$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} = \frac{\text{লবের ধনাত্বক ঘাতের সহগ}}{\text{হরের ধনাত্বক ঘাতের সহগ}} = \frac{1}{1} = 1$ **(Ans.)**

Case-05: ধারা সংক্রান্ত

Concept

এখানে ধারার প্রকৃতি দেখে প্রয়োজনীয় Modification করে সীমাস্থ মান নির্ণয় করতে হবে।

Problems

Example-52: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ \ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}\right) = ?$

Sol^n: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}$ একটি গুণোত্তর ধারা।

যার প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2}$; সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\text{২য় পদ}}{\text{১ম পদ}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow |r| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$

n টি পদের সমষ্টি, $S_n = a\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ \ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 1-0 = 1$ **(Ans.)**

$\left(\frac{a}{b}\right)^{\infty}$ Format থাকলে; যদি $a>b$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{\infty}$ এর মান ∞ হয়।
তবে যদি $b>a$ হয় ; $\frac{a\infty}{b\infty}$ এর মান তখন $\frac{1}{\infty}$ অথবা 0 হয়।

❖ **Shortcut:** $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ **(Ans.)**

Example-53: $\lim_{x\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+x^2}{x^3+x^2+x+1}$ এর মান কত?

Sol^n: $\lim_{x\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+x^2}{x^3+x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(x+1)(2x+1)}{6(x^3+x^2+x+1)}$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+x}{6x^3+6x^2+6x+6} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{6+\frac{6}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{6}{x^3}} = \frac{2+0+0}{6+0+0+0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$1^2+2^2+3^2+\ \ldots\ldots\ldots n^2$
$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; n\in\mathbb{N}$

Case-06: $a^x \sin\frac{b}{a^x}$ এবং $a^x \tan\frac{b}{a^x}$

Concept

$x \to \infty$ হলে, $a^x \to a^\infty \to \infty \Rightarrow \frac{1}{a^x} \to \frac{1}{\infty} \to 0$ তাহলে, $\boxed{\frac{b}{a^x} \to 0}$ এই আকৃতি বানিয়ে $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ এবং $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$ শর্ত ব্যবহার করতে হবে।

Problems

Example-54: $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{a}{2^x}$ এর মান কত? [SUST'16-17]

Sol^n: $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{a}{2^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^x}\right)}{\frac{a}{2^x}} \cdot a = a$

Example-55: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right) = ?$

(a) 1 (b) −1 (c) 0 (d) 2

Sol^n: (c); $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right)} = 0 \times \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 0$ (Ans.)

Type-08: Exponential form

Concept

এই Type এর math-এ একটা বিষয় মনে রাখলে খুবই সুবিধা হয়, $(1+0)^\infty = e$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ এখানে, $x \to \infty \therefore \frac{1}{x} \to 0$ তাই, $(1+0)^\infty = e$ হচ্ছে।
- $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ এখানে $x \to 0$ এবং $\frac{1}{x} \to \infty \therefore (1+0)^\infty = e$ হচ্ছে, এইভাবে মনে রাখলে সমস্যা সমাধান সহজতর হয়।

Shortcut

$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}+c} = e^{ab}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+c} = e^{ab}\left[e^{x \text{ এর সহগ} \times \frac{1}{x} \text{ এর সহগ}}\right]$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x = e^{a-b}$

Problems

Example-56: $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{bx+c}{x}} = ?$ [RU'18-19]

Sol^n: $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{bx+c}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^b \times \lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{ac}{ax}} = 1 \times \left\{\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right\}^{ac} = e^{ac}$ (Ans.)

❖ Shortcut: $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{b+\frac{c}{x}} = e^{ac}$ (Ans.)

Example-57: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x} = ?$ [RU' 13-14, 14-15]

Sol^n: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{\frac{3}{5}} = e^{\frac{3}{5}}$ (Ans.)

❖ Shortcut: $e^{\frac{1}{5}\times 3} = e^{\frac{3}{5}}$ (Ans.)

Example-58: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{4x}} = ?$

Sol^n: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{4x}} = \left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}}$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $e^{1.\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}}$ **(Ans.)**

Example-59: $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x} = ?$

Sol^n: $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1+\frac{b}{x}}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to \infty}\frac{\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^{a}}{\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{b}}\right)^{\frac{x}{b}}\right\}^{b}} = \frac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a-b}$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1+\frac{b}{x}}\right)^{x} = \frac{e^{a.1}}{e^{b.1}} = e^{a-b}$ **(Ans.)**

Type-09: ত্রিকোণমিতি সংক্রান্ত

Concept

ত্রিকোণমিতি সংক্রান্ত সমস্যাগুলো সমাধানের সময় সকল অনুপাতকে sine, cosine অনুপাতের মাধ্যমে প্রকাশ করে নিতে হবে। এভাবে সমস্যা সমাধান সহজতর হয়।

Problems

Example-60: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x-\sin 7x}{\sin 7x-\sin 5x} = ?$ **[JU'19-20]**

Sol^n: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x-\sin 7x}{\sin 7x-\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos 8x\ \sin x}{2\cos 6x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 8x}{\cos 6x} = 1$

Example-61: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax-\sin bx}{\sin cx-\sin dx} = ?$

Sol^n: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax-\sin bx}{\sin cx-\sin dx}\left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cos ax-b\cos bx}{c\cos cx-d\cos dx} = \frac{a.1-b.1}{c.1-d.1} = \frac{a-b}{c-d}$ **(Ans.)**

Note: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x-\sin 3x}{\sin 5x-\sin 2x} = ?$

Sol^n: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x-\sin 3x}{\sin 5x-\sin 2x} = \frac{8-3}{5-2} = \frac{5}{3}$ **(Ans.)**

Example-62: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 9x}{\cos 3x-\cos 5x} =$ কত? **[RU'20-21]**

Sol^n: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 8x\sin x}{2\sin 4x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}\ \frac{4x}{\sin 4x}\times\frac{8}{4} = 2$ **(Ans.)**

Example-63: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{\cos cx-\cos dx} = ?$

Sol^n: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{\cos cx-\cos dx};\left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-a\sin ax+b\sin bx}{-c\sin cx+d\sin dx}\ \left[\frac{0}{0}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-a^2\cos ax+b^2\cos bx}{-c^2\cos cx+d^2\cos dx} = \frac{-a^2.1+b^2.1}{-c^2.1+d^2.1} = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{\cos 7x-\cos 9x} = ?$

Sol^n: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{\cos 7x-\cos 9x} = \frac{3^2-5^2}{7^2-9^2} = \frac{-16}{-32} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

Example-64: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ এর মান হবে- **[RU'19-20]**

Sol^n: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

Example-65: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[JnU' 18-19]**

Sol^n: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x(\sin^2 x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos^2 x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{1}{\cos 0(1+\cos 0)}=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

বিকল্প: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{\sin^2 x}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec x\tan x}{2\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec x.\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{2\cos x}=\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

Example-66: $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^3\theta-\tan^3\theta}{\tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^3\theta-\tan^3\theta}{\tan\theta}=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^3\theta}-\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin^3\theta}{\cos^3\theta}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3\theta}{\cos^2\theta\sin\theta}=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{(1-\sin^2\theta)\sin\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)\sin\theta}=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\sin\theta}=\frac{1+\sin\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{2}}{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1+1+1}{(1+1)1}=\frac{3}{2}$ **(Ans.)**

Example-67: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RU' 10-11]**

Sol^n: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x+3\sin 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-4\cos 2x+9\cos 3x}{2}=\frac{9-4}{2}=\frac{5}{2}$ **(Ans.)**

বিকল্প: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2}\left[\because \cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}\right]$

$=2\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}=2\times 1\times 1\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ **(Ans.)**

Example-68: $\lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0}x\cos\left(\frac{\pi}{4x}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4x}\right)=?$

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) π (d) $\frac{\pi}{6}$

Sol^n: (a); $\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{4x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{\frac{\pi}{2x}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2x}}{\frac{\pi}{2x}}\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

Type-10: মূল নিয়মে অন্তরজ নির্ণয়

Concept

মূল নিয়মে অন্তরজ নির্ণয় লিমিটের মাধ্যমে করা হয়। সংজ্ঞানুসারে, $\frac{d}{dx}f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ যেই ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করতে বলবে বামপক্ষে তা বসিয়ে limit এর মান নির্ণয় করতে হবে।

⊃ কিছু প্রয়োজনীয় ধারা:

(i) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ \dots\dots\dots\infty$

(ii) $e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ \dots\dots\dots\infty$

(iii) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ \dots\dots\dots\infty$

(iv) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ \dots\dots\dots\infty$

(v) $\ln(1-x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ \dots\dots\dots\infty$

(vi) $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ \dots\dots\dots\infty$

Problems

Example-69: মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে sin 2x এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, $f(x)=\sin 2x\ \therefore f(x+h)=\sin 2(x+h)=\sin(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\therefore\frac{d}{dx}(\sin 2x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(2x+2h)-\sin 2x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[2\cos\frac{2x+2h+2x}{2}\sin\frac{2x+2h-2x}{2}\right]$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}2\cos(2x+h)\sin h=\lim\limits_{h\to 0}2\cos(2x+h)\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=2\cos(2x+0).1=2\cos 2x$ **(Ans.)**

Example-70: মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\sec 2x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Solⁿ: মনে করি, $f(x) = \sec 2x \therefore f(x+h) = \sec 2(x+h) = \sec(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec 2x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sec(2x+2h)-\sec 2x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{\cos(2x+2h)}-\frac{1}{\cos 2x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x-\cos(2x+2h)}{h\cos(2x+2h)\cos 2x} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2x+2x+2h}{2}\sin\frac{2x+2h-2x}{2}}{h\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2x+h)}{\cos(2x+2h)\cos 2x}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$= 2\frac{\sin(2x+0)}{\cos(2x+0)\cos 2x}\times 1 = \frac{2\sin 2x}{\cos 2x\cos 2x} = 2\tan 2x\sec 2x \ \textbf{(Ans.)}$$

Example-71: মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে e^{ax} এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Solⁿ: মনে করি, $f(x) = e^{ax} \therefore f(x+h) = e^{a(x+h)} = e^{ax+ah}$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \therefore \frac{d}{dx}(e^{ax}) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{ax+ah}-e^{ax}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{ax}.e^{ah}-e^{ax}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{ax}}{h}(e^{ah}-1) = e^{ax}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\left\{1+ah+\frac{(ah)^2}{2!}+\frac{(ah)^3}{3!}+\ \dots\dots\right\}-1\right]$$

$$= e^{ax}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(ah+\frac{a^2h^2}{2!}+\frac{a^3h^3}{3!}+\ \dots\dots\dots\right)$$

$$= e^{ax}\lim_{h\to 0}\left(a+\frac{a^2h}{2!}+\frac{a^3h^2}{3!}\dots\dots\dots\right)$$

$$= e^{ax}(a+0+0+\ \dots\dots\dots) = ae^{ax}\ \textbf{(Ans.)}$$

Example-72: মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\log_a x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Solⁿ: ধরি, $f(x) = \log_a x = \log_a e\times\log_e x = \frac{\ln x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a} \therefore f(x+h) = \frac{\ln(x+h)}{\ln a}$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log_a x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\ln(x+h)}{\ln a}-\frac{\ln x}{\ln a}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h\ln a}[\ln(x+h)-\ln x]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h\ln a}\ln\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h\ln a}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{\ln a}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3}-\ \dots\dots\dots\infty\right]$$

$$= \frac{1}{\ln a}\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{h}{x^2}+\frac{1}{3}.\frac{h^2}{x^3}-\ \dots\dots\dots\infty\right] = \frac{1}{\ln a}\left[\frac{1}{x}+0+0+\ \dots\dots 0\right] = \frac{1}{x\ln a}\ \textbf{(Ans.)}$$

Example-73: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(2+h)-\ln 2}{h}$ এর মান কোনটি? CU'20-21]

Solⁿ: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(2+h)-\ln 2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+h}{2}\right)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2}-\frac{h^2}{8}+\frac{h^3}{24}\dots\dots\dots}{h} = \frac{1}{2}$

❖ **Shortcut:** L'Hôpital's rule অনুযায়ী, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+h}}{1} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$

Type-11: সরাসরি সূত্র প্রয়োগ (প্রয়োজনে সরলীকরণ করে) সংক্রান্ত

Concept

এখানে অন্তরীকরণের সাধারণ সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে।

Problems

Example-74: $y = x + x^2$ হলে, $\frac{dx}{dy}$ নির্ণয় কর। [KU' 12-13]

Solⁿ: $\frac{dy}{dx} = 1+2x \therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1+2x}$ **(Ans.)**

Example-75: $a > 1$ হলে $\frac{d}{dx}(\ln a^x) = ?$ **[GST'22-23]**

(a) $\frac{a^x}{\ln a}$ (b) $\ln a$ (c) a^x (d) $x \ln a$

Sol^n: (b); $\frac{d}{dx}[\ln a^x] = \frac{d}{dx}[x \ln a]$ [যেহেতু, $\log_a(b^x) = x \log_a b$]

$= \ln a \frac{d}{dx}[x] [\because \ln a$ একটি ধ্রুবক$] = \ln a \times 1 = \ln a$

Example-76: $y = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? **[JU'19-20]**

Sol^n: $y = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = 2\tan^{-1}x \therefore \frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$

Example-77: $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx} =$ কত? **[DU' 15-16; RU'22-23]**

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $2\ \sin 2x$

Sol^n: (a); $y = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}}$

$= \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}} = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x} \therefore y = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

Example-78: $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ এর $\frac{dy}{dx} = ?$

Sol^n: $y = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = 1 - \cos x \therefore \frac{dy}{dx} = \sin x$ **(Ans.)**

Example-79: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}\right) = ?$

Sol^n: $\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x} = \frac{\cos x-(2\cos^2 x-1)}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x-2\cos^2 x}{1-\cos x}$

$= \frac{(1-\cos x)(1+2\cos x)}{1-\cos x} = 1 + 2\cos x$

$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}\right) = -2\sin x$ **(Ans.)**

Example-80: $y = \sin^2 2x + e^{2\log\cos 2x}$ হলে, $y_1 = ?$

(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) 2

Sol^n: (a); $y = \sin^2 2x + e^{2\log\cos 2x} = \sin^2 2x + e^{\log\cos^2 2x}$

$= \sin^2 2x + \cos^2 2x [\therefore e^{\log x} = x] = 1 \therefore y_1 = 0$ **(Ans.)**

Example-81: $y = \frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$ হলে এবং $\frac{dy}{dx} = ax + b$ তাহলে $(a, b) = ?$

(a) $(2, 1)$ (b) $(-2, -1)$ (c) $(2, -1)$ (d) $(-2, 1)$

Sol^n: (c); $y = \frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1} = \frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)} = x^2 - x + 1$

$[\therefore x^4 + x^2 + 1 = (x^2)^2 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2+1)^2 - (x)^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)]$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 1 \therefore ax + b = 2x - 1 \Rightarrow ax = 2x \therefore a = 2$ এবং $b = -1 \therefore (a, b) = (2, -1)$ **(Ans.)**

Type-12: গুণের ও ভাগের সূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত

Concept

- গুণের সূত্র: যদি u এবং v, x এর দুটি ফাংশন হয় তবে, $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
- ভাগের সূত্র: যদি u এবং v, x এর দুটি ফাংশন হয় তবে, $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

জেনে রাখো

$\log x$ লেখা থাকলে ধরে নিতে হবে (e ভিত্তিক লগ তথা) $\ln x$ বোঝানো হচ্ছে

Problems

Example-82: $y = 5e^x \ln x$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [JU'09-10]

Sol^n: $y = 5e^x \ln x \therefore \frac{dy}{dx} = 5\left(e^x.\frac{1}{x} + \ln x.e^x\right) = 5e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$ **(Ans.)**

Example-83: $\frac{\log x}{x}$ এর অন্তরক সহগ কত? [RU'19-20, CU' 18-19, 12-13, 11-12, 09-10, 05-06]

Sol^n: $y = \frac{\log x}{x}; \frac{dy}{dx} = \frac{x.\frac{1}{x} - \log x.1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$ **(Ans.)**

Example-84: $y = \frac{x^n}{\ln x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

Sol^n: $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x.nx^{n-1} - x^n.\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x^{n-1}(n \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$ **(Ans.)**

Example-85: $y = \frac{x^4}{\sin x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

Sol^n: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{\sin x}\right) = \frac{\sin x.\frac{d}{dx}(x^4) - x^4\frac{d}{dx}(\sin x)}{(\sin x)^2} = \frac{4x^3 \sin x - x^4 \cos x}{\sin^2 x} = x^3 \operatorname{cosec} x(4 - x \cot x)$ **(Ans.)**

Example-86: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) = ?$

Sol^n: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) = \frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}(1+\sin x) - (1+\sin x)\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$

$= \frac{(1-\sin x)(\cos x) - (1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{(1-\sin x+1+\sin x)\cos x}{(1-\sin x)^2} = \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$ **(Ans.)**

Type-13: সংযোজিত ফাংশন এর অন্তরক সংক্রান্ত

Concept

এই Type এর math-এ নতুন চলক এনে প্রদত্ত রাশিকে simplify করে সমাধান করা যায়। যেমন: $\frac{d}{dx}(\sqrt{e^x}) = ?$

ধরি, $e^x = v \therefore \frac{d}{dx}\sqrt{e^x} = \frac{d}{dx}\sqrt{v} = \frac{d\sqrt{v}}{dv} \times \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \times e^x = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$

কিন্তু এভাবে করা সময়সাপেক্ষ। তাই এক্ষেত্রে ভিন্ন Technique use করতে হবে। কোনো একটি রাশিতে যেই Operator আগে থাকবে ঐ Operator অনুযায়ী differentiate করতে হবে। যেমন, $\frac{d}{dx}(\sin(e^{\sqrt{x}})) = ?$

এখানে প্রথম Operator "sine"। তাই আগে sine এর differentiation করবে। দ্বিতীয় operator e, তাই এরপর e এর differentiation করবে। ৩য় operator $\sqrt{x}$, তাই,সবার শেষে $\sqrt{x}$ এর differentiation করবে।

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin(e^{\sqrt{x}})) = \cos e^{\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Problems

Example-87: $\frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x})$ এর মান কোনটি? [JU' 22-23, 19-20]

(a) $-\sin\sqrt{x}$
(b) $\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
(c) $\frac{-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
(d) $\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

Sol^n: (b); $\frac{d}{dx}[\cos\sqrt{x}] = \frac{d}{d\sqrt{x}}[\cos\sqrt{x}] \times \frac{d(\sqrt{x})}{dx} = -\sin\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

Example-88: $\frac{d}{dx}\sqrt{\left(\frac{1}{e^x}\right)} = ?$ [CU'20-21]

Sol^n: $\frac{d}{dx}\sqrt{\left(\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{d}{dx}\sqrt{e^{-x}} = \frac{1}{2\sqrt{e^{-x}}}\frac{d}{dx}(e^{-x}) = \frac{1}{2\sqrt{e^{-x}}} \times (-e^{-x}) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

Example-89: $y = e^{e^x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

Sol^n: $y = e^{e^x} \therefore \frac{dy}{dx} = e^{e^x}.e^x = e^{e^x+x}$ **(Ans.)**

Example-90: $y = 10^{\log(\sin x)}$ হলে, $y_1 = ?$

(a) $10^{\log(\sin x)} . \log_e 10 . \cot x$
(b) $10^{\log(\sin x)} . \log_e^{\frac{10}{\sin x}}$
(c) $10^{\log \sin x} . \log_e 10$
(d) None of these

Solⁿ: (a); $y = 10^{\log(\sin x)} \therefore y_1 = 10^{\log(\sin x)} . \log_e 10 . \frac{1}{\sin x} . \cos x \; [\therefore y = {}_a x \therefore y_1 = a^x \ln a]$
$= 10^{\log(\sin x)} . \log_e 10 . \cot x$

Example-91: $y = \log \sin x^2$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? **[CU'20-21]**

Solⁿ: $y = \log \sin x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x^2} \times \frac{d}{dx}(\sin x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x^2} \times \cos x^2 \times \frac{d}{dx}(x^2) \therefore \frac{dy}{dx} = 2x \cot x^2$

Example-92: যদি $\int \varphi(x)dx = \ln(\ln x) + c$ হয়, যেখানে c একটি ধ্রুবক, তবে $\varphi(x) = ?$ **[GST'20-21]**

Solⁿ: $\int \varphi(x)dx = \ln(\ln x) + c \Rightarrow \varphi(x) = \frac{d}{dx}[\ln(\ln x) + c] = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x \ln x}$

Example-93: $y = e^{\sqrt{\ln(\sin x)}}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[JU' 16-17]**

Solⁿ: $y = e^{\sqrt{\ln(\sin x)}} ; \frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{\ln(\sin x)}} . \frac{1}{2\sqrt{\ln(\sin x)}} . \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cot x . e^{\sqrt{\ln(\sin x)}}}{2\sqrt{\ln(\sin x)}}$ **(Ans.)**

Example-94: যদি $f(x) = (\ln x)^2$ হয়, তবে $f'(2) = ?$ **[JU' 09-10]**

Solⁿ: $f'(x) = (2 \ln x)\frac{1}{x} \therefore f'(2) = 2(\ln 2) \times \frac{1}{2} = \ln 2$ **(Ans.)**

Example-95: x এর প্রেক্ষিতে $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{x}{5}\right) = ?$ **[JU'19-20]**

Solⁿ: $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{x}{5}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2} \times \frac{1}{5} = \frac{1 \times 25}{25+x^2} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{25+x^2}$ **(Ans.)**

Example-96: x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}(e^x)$ এর অন্তরজ কত? **[KU'19-20]**

Solⁿ: $\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(e^x)\} = \frac{1}{1+e^{2x}} \times e^x = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

Example-97: যদি $f(x) = \ln(2x + e^{2x})$ হয়, তবে $f'(0) =$ কত? **[RU'22-23]**

(a) 0
(b) 1
(c) 5
(d) 10

Solⁿ: **(No Answer)**; $f'(x) = \frac{2+2e^{2x}}{2x+e^{2x}} \therefore f'(0) = \frac{4}{1} = 4 \therefore$ সঠিক উত্তর নেই।

Example-98: $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}\right)$ এর মান কোনটি? **[Agri Guccho'20-21, JU'19-20]**

Solⁿ: $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \times \frac{(1-x)\times 1-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2} \times \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$

Example-99: $\frac{d}{dx}(\cos^2(\ln x)) = ?$ **[DU'20-21]**

Solⁿ: $\frac{d}{dx}(\cos^2(\ln x)) = 2\cos(\ln x)(-\sin(\ln x))\frac{1}{x} = -\frac{2\sin(\ln x)\cos(\ln x)}{x} = \frac{-\sin(2\ln x)}{x}$

Example-100: $y = \sin[\ln(x^3)]$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

Solⁿ: $\frac{d}{dx}[\sin\{\ln(x^3)\}] = \cos[\ln(x^3)]\frac{d}{dx}[\ln(x^3)]$
$= \cos[\ln(x^3)] . \frac{1}{x^3} . \frac{d}{dx}(x^3) = \cos[\ln(x^3)] . \frac{1}{x^3} . 3x^2 = \frac{3}{x}\cos[\ln(x^3)]$ **(Ans.)**

Example-101: $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

Solⁿ: $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}} . \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}.\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$ **(Ans.)**

Example-102: $y = \cos 3x^\circ$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [ডিগ্রীকে রেডিয়ানে পরিবর্তন করতে হবে]

Solⁿ: ধরি, $y = \cos 3x^\circ ; y = \cos\frac{3x\pi}{180} \; [1^\circ = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান$] \Rightarrow y = \cos\frac{x\pi}{60}$
$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\pi}{60}\sin\frac{\pi x}{60} = -\frac{\pi}{60}\sin\left(\frac{3x\pi}{180}\right) = -\frac{\pi}{60}\sin 3x^\circ$ **(Ans.)**

Example-103: $y = \frac{x\sin x}{1+\cos x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [RU' 09-10, CU' 07-08]

Sol^n: $y = \frac{x\sin x}{1+\cos x} = \frac{x.2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = x\tan\frac{x}{2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = x.\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2} + \tan\frac{x}{2}.1 = \frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}$ **(Ans.)**

Example-104: $\frac{d}{dx}\sqrt{\sec^2 x + \text{cosec}^2 x} = ?$

(a) $4\text{cosec}\,2x.\cot 2x$ (b) $-4\text{cosec}\,2x$ (c) $-4\text{cosec}\,x\cot 2x$ (d) $-4\text{cosec}\,2x\cot 2x$

Sol^n: (d) $\sqrt{\sec^2 x + \text{cosec}^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}}$

$= \sqrt{\frac{1}{\cos^2\cdot\sin^2 x}} = \frac{1\times 2}{2\sin x\cdot\cos x} = 2\,\text{cosec}\,2x$

$\therefore \frac{d}{dx}(2\,\text{cosec}\,2x) = -4\,\text{cosec}\,2x\cdot\cot 2x$

Type-14: বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অন্তরক সংক্রান্ত

Concept

এই Type এর সমস্যা সমাধানের সময় বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের সূত্র apply করে $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ মৌলিক ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের রূপান্তর করে অন্তরীকরণ করতে হবে।

বিশেষত জটিল আকৃতির বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনে এর প্রয়োগ হয়। নিম্নোক্ত প্রতিস্থাপনের ফলে অন্তরক সহগ নির্ণয় সহজতর হয়।

Term -এর আকৃতি	যা ধরতে হবে
$1-x^2$	$x =* \sin\theta/\cos\theta$
$1+x^2$	$x =* \tan\theta/\cot\theta$
x^2-1	$x =* \sec\theta/\text{cosec}\theta$
$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ or, $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$x = \cos\theta$
$\frac{2x}{1\pm x^2}$ or, $\frac{1-x^2}{1+x^2}$	$x = \tan\theta$
$\frac{1-x}{1+x}, \frac{1+x}{1-x}$	$x = \tan\theta$
$\frac{a+x}{1-ax}, \frac{a-x}{1+ax}$	$x = \tan\theta$

বি.দ্র. চলক $[x = f(\theta)]$ ধরার ক্ষেত্রে '*' চিহ্নিত ফাংশন first choice হবে।

Problems

Example-105: $\sin^{-1}\frac{6x}{1+9x^2}$ এর অন্তরীকরণ কর।

Sol^n: $\left(\sin^{-1}\frac{6x}{1+(3x)^2}\right) = \sin^{-1}\frac{2.3x}{1+(3x)^2} = 2\tan^{-1}(3x)$ $\left[\because \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x\right]$

$\therefore \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{6x}{1+9x^2}\right) = \frac{d}{dx}\{2\tan^{-1}(3x)\} = 2\frac{1}{1+(3x)^2}\frac{d}{dx}(3x) = \frac{2}{1+9x^2}.3 = \frac{6}{1+9x^2}$ **(Ans.)**

Example-106: $\tan^{-1}\frac{6\sqrt{x}}{1-9x}$ এর অন্তরীকরণ কর। [JnU' 18-19]

Sol^n: $y = \tan^{-1}\frac{6\sqrt{x}}{1-9x} = \tan^{-1}\frac{2.3\sqrt{x}}{1-(3\sqrt{x})^2} = 2\tan^{-1}3\sqrt{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{1+9x}.3.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}(1+9x)}$ **(Ans.)**

Example-107: $e^y = \tan^{-1}x$ হলে $\frac{dx}{dy} = ?$ **[GST'22-23]**

(a) $\sqrt{1+x^2}\tan^{-1}x$ (b) $(1+x^2)\tan^{-1}x$ (c) $\sqrt{1-x^2}\tan^{-1}x$ (d) $(1-x^2)\tan^{-1}x$

Sol^n: (b); $e^y = \tan^{-1}x \Rightarrow \ln e^y = \ln(\tan^{-1}x) \Rightarrow y\ln e = \ln(\tan^{-1}x)$

$\Rightarrow y = \ln(\tan^{-1}x) \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\ln(\tan^{-1}x)]$

$= \frac{1}{\tan^{-1}x} \times \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x} \therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\left\{\frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}\right\}} = (1+x^2)\tan^{-1}x$

বিকল্প: এখানে, $e^y = \tan^{-1}x$ ……… (i)

y এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $e^y = \frac{1}{1+x^2}\frac{dx}{dy} \Rightarrow \tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{dx}{dy} \therefore \frac{dx}{dy} = (1+x^2)\tan^{-1}x$ **(Ans.)**

Example-108: $\tan^{-1}\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$ এর অন্তরীকরণ কর।

Sol^n: $y = \tan^{-1}1\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x} = \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \therefore \frac{dy}{dx} = 1$ **(Ans.)**

Example-109: $\tan^{-1}\frac{a+bx}{b-ax}$ এর অন্তরীকরণ কর। **[KU' 03-04, RU' 08-09]**

Sol^n: $y = \tan^{-1}\frac{a+bx}{b-ax} = \tan^{-1}\frac{\frac{a}{b}+x}{1-\frac{a}{b}x} = \tan^{-1}\frac{a}{b} + \tan^{-1}x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ **(Ans.)**

Example-110: $\cos^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ এর অন্তরীকরণ কর।

Sol^n: ধরি, $y = \cos^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ এবং $x = \cos\theta$ $\therefore y = \cos^{-1}(2\cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta})$

$= \cos^{-1}(2\cos\theta\sin\theta) = \cos^{-1}(\sin 2\theta) = \cos^{-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\} = \frac{\pi}{2}-2\theta = \frac{\pi}{2}-2\cos^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-2\cos^{-1}x\right) = 0 + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ **(Ans.)**

Example-111: $\sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ এর অন্তরীকরণ কর।

Sol^n: ধরি, $y = \sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ এবং $x = \tan\theta$ তাহলে, $\theta = \tan^{-1}x$ এবং $y = \sin^{-1}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin^{-1}(\cos 2\theta)$

$= \sin^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right) = \frac{\pi}{2}-2\theta = \frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}x\right) = 0 - 2\frac{1}{1+x^2} \therefore \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = -\frac{2}{1+x^2}$ **(Ans.)**

Example-112: $y = \cot^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) 0 (b) −1 (c) 1 (d) 2

Sol^n: (a); $y = \cot^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\left[\because \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right] \therefore \frac{dy}{dx} = 0$ (Ans.)

Example-113: $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = ?$

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{8}$

Sol^n: (a); $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}$ [Let; $x = \tan\theta \therefore \theta = \tan^{-1}x$]

$= \tan^{-1}\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} \therefore \frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

Example-114: $\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\right\} = ?$

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (d) $-\frac{1}{2}$

Sol^n: (d); Process-01: $\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+(1)\tan\frac{x}{2}}\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}\tan\frac{x}{2}\right\} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

Process-02: $\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}\right\}$ $[\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, 1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta]$

$= \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right\} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

Example-115: $y = \cos^{-1}\frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

Sol^n: $y = \cos^{-1}\frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}} = \cos^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1} = \cos^{-1}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 2\tan^{-1}\frac{1}{x} = 2\cot^{-1}x \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$ **(Ans.)**

Type-15: দুই বা ততোধিক ফাংশনের সমন্বয় অন্তরীকরণে লগারিদম

Concept

অনেকগুলো ফাংশনের গুণ বা ভাগ আকারের থাকলে অন্তরক সহগ নির্ণয়ের জন্য উভয় পক্ষে ln নিতে হয়।

Problems

Example-116. (sin x) (ln x) (tan x) (e^x) এর অন্তরক সহগ বের করতে হবে।

Sol^n: ধরি, $y = (\sin x)(\ln x)(\tan x)(e^x)$

$\Rightarrow \ln y = \ln(\sin x) + \ln(\ln x) + \ln(\tan x) + \ln(e^x)$

$\therefore \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}.\cos x + \frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x} + \frac{1}{\tan x}.\sec^2 x + 1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\cot x + \frac{1}{x\ln x} + \frac{\sec x}{\sin x} + 1\right]$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (\sin x)(\ln x)(\tan x)(e^x)\left[\cot x + \frac{1}{x\ln x} + \frac{\sec x}{\sin x} + 1\right]$

Example-117: $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots\ldots(x+n)$ হলে $f'(0) = ?$

(a) $n!$

(b) $\frac{n!(n+1)}{2}$

(c) $n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n}\right)$

(d) $n!\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}\right)$

Sol^n: (c); $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots\ldots(x+n)$

$\Rightarrow \ln f(x) = \ln(x+1) + \ln(x+2) + \ldots\ldots\ldots + \ln(x+n)$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{x+n}$

$\Rightarrow f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{x+n}\right] \therefore f'(0) = f(0)\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n}\right]$

$= n!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n}\right)$ $[\because f(0) = 1.2.3\ldots\ldots n = n!]$

Type-16: সূচকীয় ফাংশনের অন্তরীকরণে লগারিদম

Concept

কোনো সূচকীয় ফাংশনের অন্তরীকরণ লগারিদম ব্যবহার করে করা হয়। যেমন, $y = u^v$

$\Rightarrow \ln y = v\ln u \Rightarrow \frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx} = v\frac{d\ln u}{dx} + \ln u\frac{dv}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left(v\frac{d\ln u}{dx} + \ln u\frac{dv}{dx}\right) = u^v\left(\frac{v}{u}.\frac{du}{dx} + \ln u\frac{dv}{dx}\right) = u^v\left[\ln u\frac{dv}{dx} + \frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right]$

[অথবা ছোট করে মনে রাখ $\frac{d}{dx}(u^v) = u^v\frac{d}{dx}(v\ln u)$]

যেমন: $\frac{d}{dx}\Big(\underset{u}{(\sin x)}^{\overset{v}{\ln x}}\Big)=\underset{u^{v}}{(\sin x)^{\ln x}}\left[\overset{\frac{dv}{dx}}{\frac{1}{x}}\overset{\ln u}{\ln(\sin x)}+\overset{\frac{v}{u}}{\frac{\ln x}{\sin x}}.\ \overset{\frac{du}{dx}}{\cos x}\right]$

$= (\sin x)^{\ln x}\left[\cot x\ (\ln x) + \frac{1}{x}\ln(\sin x)\right]$

অনুরূপভাবে, $\frac{d}{dx}\ (x^x) = x^x\ \left[1.\ln x + \frac{x}{x}.1\right] = x^x(1+\ln x)$

$\frac{d}{dx}\ ((\ln x)^x) = (\ln x)^x\ \left[1.\ln\ (\ln(x)) + \frac{x}{\ln x}.\frac{1}{x}\right] = \{\ln(x)\}^x\ \left[\ln\{\ln\ (x)\} + \frac{1}{\ln(x)}\right]$

Problems

Example-118: $y = x^x$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[RU'20-21]**

Sol^n: $y = x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln x + 1 \therefore \frac{dy}{dx} = x^x(\ln x + 1)$

Alternative: $\frac{dy}{dx} = x^x\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x\ (x.\frac{1}{x} + \ln x.1) = x^x(1+\ln x)$

Example-119: x^{e^x} এর অন্তরীকরণ কর।

Sol^n: ধরি, $y = x^{e^x} \Rightarrow \ln y = e^x\ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = e^x\ln x + \frac{1}{x}.e^x = e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) \therefore \frac{dy}{dx} = y\,e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) \therefore \frac{dy}{dx} = x^{e^x}.e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$ **(Ans.)**

Example-120: $(\sin x)^{\ln x}$ এর অন্তরক নির্ণয় কর। **[CU' 08-09]**

Sol^n: ধরি, $y = (\sin x)^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln(\sin x)^{\ln x} \Rightarrow \ln y = (\ln x)\ln(\sin x)$

অন্তরীকরণ করে পাই, $\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\ln x)\frac{1}{\sin x}\cos x + \ln(\sin x).\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cot x\,(\ln x) + \frac{1}{x}\ln(\sin x) \therefore \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\ln x}\ \left[\cot x\,(\ln x) + \frac{1}{x}\ln(\sin x)\right]$ **(Ans.)**

বিকল্প: $\frac{d}{dx}(\sin x)^{\ln x} = (\sin x)^{\ln x}\frac{d}{dx}[\ln x\ln(\sin x)]$

$= (\sin x)^{\ln x}\left[\ln x\frac{\cos x}{\sin x} + \ln(\sin x)\frac{1}{x}\right] = (\sin x)^{\ln x}\left[\cot x\ln x + \frac{1}{x}\ln(\sin x)\right]$

Example-121: $x^{\cos^{-1}x}$ এর অন্তরক নির্ণয় কর। **[RU' 09-10]**

Sol^n: $\frac{d}{dx}\ (x^{\cos^{-1}x}) = x^{\cos^{-1}x}\ \frac{d}{dx}[\cos^{-1}x(\ln x)] = x^{\cos^{-1}x}\left[\cos^{-1}x.\frac{1}{x} + \ln x\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right] = x^{\cos^{-1}x}\left[\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$ **(Ans.)**

Example-122: $(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$ এর অন্তরক নির্ণয় কর।

Sol^n: $\frac{d}{dx}\left\{(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\right\}$ সহজে $\Rightarrow (\sqrt{x})^{\sqrt{2}}\ \frac{d}{dx}(\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\left[\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x}) + \ln\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})\right]$

$= (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\left[\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}} + \ln\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right] = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\sqrt{x}\right] = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\left[\frac{1+\ln\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right]$ **(Ans.)**

Example-123: $(\cot x)^{\tan x}$ এর অন্তরক নির্ণয় কর।

Sol^n: $\frac{d}{dx}\{(\cot x)^{\tan x}\} = (\cot x)^{\tan x}\ \left[\tan x\frac{d}{dx}\{\ln(\cot x)\} + \{\ln(\cot x)\}\frac{d}{dx}(\tan x)\right]$

$= (\cot x)^{\tan x}\left[\frac{\tan x}{\cot x}(-\mathrm{cosec}^2 x) + \{\ln(\cot x)\}.(\sec^2 x)\right] = (\cot x)^{\tan x}\left[-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\frac{1}{\sin^2 x} + \{\ln(\cot x)\}.(\sec^2 x)\right]$

$= (\cot x)^{\tan x}[-\sec^2 x + \{\ln(\cot x)\}(\sec^2 x)] = (\cot x)^{\tan x}.\sec^2 x[\ln(\cot x) - 1]$ **(Ans.)**

Example-124: $(x^x)^x$ এর অন্তরক নির্ণয় কর। **[RU' 08-09]**

Sol^n: $(x^x)^x = x^{x^2} \therefore \frac{d}{dx}\{(x^x)^x\} = x^{x^2}\left[x^2\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x^2)\right]$

$= x^{x^2}\left[x^2.\frac{1}{x} + \ln x.(2x)\right] = x^{x^2}\ [x + 2x\ln x\,] = (x^x)^x.x[1 + 2\ln x]$ **(Ans.)**

Example-125: x^{x^x} এর অন্তরক নির্ণয় কর। [KU' 13-14]

Sol^n: $\frac{d}{dx}(x^{x^x}) = x^{x^x}\left[x^x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x^x)\right]$

$= x^{x^x}\left[x^x.\frac{1}{x} + (\ln x)\, x^x\left\{x\frac{d(\ln x)}{dx} + \ln x \times \frac{dx}{dx}\right\}\right] = x^{x^x}.x^x\left[\frac{1}{x} + \ln x.\left(x.\frac{1}{x} + \ln x.1\right)\right]$

$= x^{x^x}.x^x\left[\frac{1}{x} + \ln x.(1 + \ln x)\right]$ **(Ans.)**

Example-126: $y = e^{x^2} + x^{x^2}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ =?

Sol^n: $y = e^{x^2} + x^{x^2} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{x^2}) + \frac{d}{dx}(x^{x^2})\left[\frac{d}{dx}(x^{x^2}) = x^{x^2}\left(\frac{x^2}{x}\frac{d}{dx}(x) + \ln x\frac{d}{dx}(x^2)\right)\right]$

$= e^{x^2}.2x + x^{x^2}(2x\ln x + x) = 2xe^{x^2} + x^{x^2}(2x\ln x + x)$ **(Ans.)**

Type-17: অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরীকরণ

Concept

যে ফাংশনকে $y = f(x)$ আকারে প্রকাশ করা যায় না, তাকে অব্যক্ত (Implicit) ফাংশন বলে। এক্ষেত্রে $f(x, y) = 0$ আকারে প্রকাশ করে সকল পদকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করতে হবে এবং প্রাপ্ত সমীকরণ হতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করতে হবে।

Shortcut

$f(x, y) = 0$ কোন অব্যক্ত ফাংশন হলে, $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$

যেখানে, f_x = x এর সাপেক্ষে $f(x, y)$ এর আংশিক অন্তরীকরণ সহগ (Partial Derivative)

f_y = y এর সাপেক্ষে $f(x, y)$ এর আংশিক অন্তরীকরণ সহগ (Partial Derivative)

Problems

Example-127: $x^2 - xy + y^2 = 3$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর। [JnU' 08-09]

Sol^n: x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $2x - x\frac{dy}{dx} - y.1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y - x) = y - 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{2y-x} = \frac{2x-y}{x-2y}$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x-y+0}{0-x+2y} = -\frac{2x-y}{2y-x} = \frac{2x-y}{x-2y}$

Example-128: যদি $x^2 = 5y^2 + \sin y$ হয়, তাহলে $\frac{dy}{dx}$ কত হবে? [CU'22-23]

(a) $\frac{2x}{\cos y+10y}$　(b) $\frac{2x}{\sin y+10y}$　(c) $\frac{10y}{\cos y+2x}$　(d) $\frac{5}{\sin y}$

Sol^n: (a); $x^2 = 5y^2 + \sin y \Rightarrow 2x = 10y\frac{dy}{dx} + (\cos y)\frac{dy}{dx} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\cos y+10y}$

Example-129: $(x + y)^2 - xy = 1$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত? [CU'22-23]

(a) $\frac{x+2y}{y+2y}$　(b) $\frac{2x+y}{x+2y}$　(c) $\frac{-2x-y}{x+2y}$　(d) $\frac{-x-2y}{y+2x}$

Sol^n: (c); $(x + y)^2 - xy = 1 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 - xy - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x + 2x\frac{dy}{dx} + 2y + 2y\frac{dy}{dx} - y - x\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x + 2y) = -2x - y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y}{x+2y}$

Example-130: $x + y = xy^2$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = ?

Sol^n: x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $1 + \frac{dy}{dx} = x.2y\frac{dy}{dx} + y^2.1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(1 - 2xy) = y^2 - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{1-2xy}$ **(Ans.)**

Example-131: $e^{3xy+5} = 10$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[RU'20-21]**

Sol^n: $3xy + 5 = \ln 10 \Rightarrow 3\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$

Example-132: $x^y = e^{x-y}$ এর অন্তরীকরণ কর। **[JnU' 07-08]**

Sol^n: $x^y = e^{x-y} \Rightarrow y\ln x = x - y \Rightarrow (1 + \ln x)y = x \Rightarrow y = \frac{x}{1+\ln x} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\ln x).1 - x.\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$ **(Ans.)**

Example-133: $x^y = y^x$ এর অন্তরীকরণ কর।

Sol^n: $x^y = y^x \Rightarrow y\ln x = x\ln y \Rightarrow y\ln x - x\ln y = 0$

$\Rightarrow \frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx} - \ln y - \frac{x}{y}.\frac{dy}{dx} = 0; \frac{dy}{dx} = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}} = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$ **(Ans.)**

বিকল্প: $x^y = y^x \Rightarrow x^y - y^x = f(x, y) = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{yx^{y-1} - y^x\ln y}{x^y\ln x - xy^{x-1}} = -\frac{y\frac{x^y}{x} - y^x\ln y}{x^y\ln x - x\frac{y^x}{y}} = -\frac{y\frac{x^y}{x} - x^y\ln y}{x^y\ln x - x.\frac{x^y}{y}}[\because x^y = y^x] = -\frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\ln x - \frac{x}{y}} = \frac{-y(y - x\ln y)}{x(y\ln x - x)} = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$

Example-134: $x^xy^y = 1$ হলে, $\frac{dy}{dx} =$ কত? **[RU'22-23]**

(a) $\frac{1+\ln x}{1+\ln y}$ (b) $-\frac{1+\ln x}{1+\ln y}$ (c) $\frac{1-\ln x}{1+\ln y}$ (d) $\frac{1+\ln x}{1-\ln y}$

Sol^n: (b); $x^x \cdot y^y = 1 \Rightarrow \ln(x^x.y^y) = \ln 1 = 0 \Rightarrow x\ln x + y\ln y = 0$

$\therefore \left(x.\frac{1}{x} + \ln x\right) + \left(y.\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} + \ln y.\frac{dy}{dx}\right) = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1+\ln x}{1+\ln y}$

Example-135: $xy + x^2y^2 = P$ সমীকরণটির $\frac{dy}{dx}|_{(1,\ 2)}$ এর মান নির্ণয় কর।

(a) -2 (b) 2 (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

Sol^n: (a); $xy + x^2y^2 = P \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y.1 + x^2.2y\frac{dy}{dx} + y^2.2x = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x + 2x^2y) + (y + 2xy^2) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y(1+2xy)}{x(1+2xy)} = -\frac{y}{x} \therefore \frac{dy}{dx}|_{(1,2)} = -\frac{2}{1} = -2$ **(Ans.)**

Example-136: $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $-\frac{1}{(1+x)^2}$ (b) $\frac{2}{(1+2x)^2}$ (c) $-\frac{1}{(1-x)^2}$ (d) $-\frac{2}{(1+2x)^2}$

Sol^n: (a); $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0 \Rightarrow x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x} \Rightarrow x^2(1+y) = y^2(1+x)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2 + x^2y - y^2 - xy^2 = 0 \Rightarrow (x+y)(x-y) + xy(x-y) = 0$

$\Rightarrow (x-y)(x+xy+y) = 0 \Rightarrow x + xy + y = 0[\therefore x \neq y]$

$\Rightarrow y = -\frac{x}{1+x} \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{(1+x).1 - x.1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ **(Ans.)**

Type-18: ∞ যুক্ত রাশির অন্তরীকরণ

Concept

কোনো রাশিতে infinite সংখ্যক বার একই অংশের repeat হলে, repeat হওয়া অংশকে ঐ রাশির দ্বারা replace করে একটা finite রাশিতে পরিণত করে নিতে হবে। এরপর প্রদত্ত রাশির অন্তরীকরণ করতে হবে।

Problems

Example-137: $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots\ldots\infty}}}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[JnU' 13-14]**

Sol^n: $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots\ldots\infty}}} \Rightarrow y^2 = x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots\ldots\infty}} \Rightarrow y^2 = x + y$

$\therefore 2y\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-1}$ **(Ans.)**

Example-138: $\frac{d}{dx}\left(x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}\right)=?$

Sol

Sol^n: ধরি, $y = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}} = x^y \therefore \ln y = y \ln x \therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \ln x . \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} - \ln x\right) = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \times \frac{y}{1-y\ln x} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1-y\ln x)}$ **(Ans.)**

Type-19: পরামিতিক ফাংশনের অন্তরীকরণ

Concept

পরামিতি মানেই হলো নতুন আরেকটি চলক যার মাধ্যমে x ও y কে প্রকাশ করা যায়। যেমন, $x = 2t + 3; y = t^2$

এখানে x ও y এর মধ্যে directly সম্পর্ক দেয়া না থাকলেও t এর মাধ্যমে x ও y কে সম্পর্কিত করা যায়। পরামিতির মাধ্যমে প্রকাশিত চলকের একটির সাপেক্ষে অন্যটির অন্তরীকরণের নিয়ম, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(t^2)}{\frac{d}{dt}(2t+3)} = \frac{2t}{2} = t$

এখন এই অন্তরজকে x বা y যেকোনো চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। আবার চাইলে পরামিতির মাধ্যমেও Answer রেখে দেওয়া যায়। $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x-3}{2}$

আবার, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}\ [\because t = \frac{x-3}{2} = \sqrt{y} \Rightarrow \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 = y$

$\Rightarrow 2 \times \frac{x-3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{dy}{dx} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x-3}{2} = \sqrt{y}]$

Problems

Example-139: $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর। [DU' 10-11]

Sol^n: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d}{d\theta}(a(1-\cos\theta))}{\frac{d}{d\theta}(a(\theta-\sin\theta))}$

$= \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}$ **(Ans.)**

Example-140: $x = a(0 - \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$ এবং $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}$ হলে, $\theta =$ কত? [RU'22-23]

(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{5}$ (c) $\frac{5\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

Sol^n: (c); $x = a(\theta - \sin\theta) \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a - a\cos\theta$

আবার, $y = a(1 + \cos\theta) \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = -a\sin\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-a\sin\theta}{a - a\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - 1} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{-2\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\cot\frac{\theta}{2}$

প্রশ্নমতে, $-\cot\frac{\theta}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$

Example-141: $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$ এবং $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ এর x-এর সাপেক্ষে y- এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [RU' 14-15]

Sol^n: $y = \tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2} = 2\tan^{-1}t$

$x = \sin^{-1}\frac{2t}{1+t^2} = 2\tan^{-1}t$

$\therefore y = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$ **(Ans.)**

Example-142: $x = p\sin^2\theta,\ y = q\cos^2\theta,\ \frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করতে হবে। **[RU' 09-10]**

Solⁿ: $\frac{dx}{d\theta} = 2p\sin\theta\cos\theta; \frac{dy}{d\theta} = -2q\cos\theta\sin\theta; \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-2q\cos\theta\sin\theta}{2p\sin\theta\cos\theta} = -\frac{q}{p}$ (Ans.)

Example-143: $y = \frac{2at}{1+t^2}, x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ হলে $\frac{dy}{dx} =?$

Solⁿ: $\frac{dx}{dt} = \frac{(1+t^2)(0-2t)-(1-t^2)(0+2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{-2t-2t^3-2t+2t^3}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$

এবং $\frac{dy}{dt} = \frac{(1+t^2).\ 2a-2at(0+2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{2a+2at^2-4at^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2a-2at^2}{(1+t^2)^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2a-2at^2}{(1+t^2)^2} \times \frac{(1+t^2)^2}{-4t} = \frac{a(1-t^2)}{-2t}$ (Ans.)

Type-20: ফাংশনের সাপেক্ষে ফাংশনের অন্তরীকরণ

Concept

ধরি, f(x) এবং g(x), x এর দুটি ফাংশন।

f(x) এর সাপেক্ষে g(x) এর অন্তরীকরণ বা g(x) এর সাপেক্ষে f(x) এর অন্তরীকরণ করতে হবে। এইক্ষেত্রে,

$\frac{d(g(x))}{d(f(x))} = \frac{\frac{d(g(x))}{dx}}{\frac{d(f(x))}{dx}}$ আকারে লিখে Solve করতে হবে।

$\frac{d(f(x))}{d(g(x))} = \frac{\frac{d(f(x))}{dx}}{\frac{d(g(x))}{dx}}$ আকারে লিখে Solve করতে হবে।

Problems

Example-144: x^2 এর সাপেক্ষে $\sin x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে হবে।

Solⁿ: তাহলে, $\frac{d}{d(x^2)}(\sin x) = \frac{\frac{d}{dx}(\sin x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \frac{\cos x}{2x}$ (Ans.)

Example-145: $\frac{d}{d\cos x}(\sin x) =?$ **[GST'20-21]**

Solⁿ: $\frac{d}{d\cos x}(\sin x) = \frac{\frac{d}{dx}(\sin x)}{\frac{d}{dx}(\cos x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x$

Example-146: $\tan x$ এর সাপেক্ষে $\ln x$ এর অন্তরক নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\frac{d}{d(\tan x)}(\ln x) = \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(\tan x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\sec^2 x} = \frac{1}{x\sec^2 x} = \frac{\cos^2 x}{x}$ (Ans.)

Type-21: n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

এই Type এর সমস্যা সমাধানের সময় pattern recognize করা খুবই important। প্রদত্ত ফাংশনকে 2-3 বার অন্তরীকরণ করে অন্তরজের মধ্যে pattern টা ধরে y_n এর মান নির্ণয় করতে হবে।

যেমন, e^{ax} এর n তম অন্তরজ নির্ণয় কর।

Solⁿ: $y = e^{ax}$

$y_1 = ae^{ax} = ay$

$y_2 = a^2e^{ax} = a^2y$

$\vdots \qquad \vdots$

এখানে Pattern টা দেখেই বোঝা যাচ্ছে যে অন্তরজের মান y এর যততম অন্তরজ- a এর তত ঘাত × y

$\therefore y_n = a^n.e^{ax} = a^n \cdot y$ (Ans.)

Shortcut

n তম অন্তরক:

(i) $y = e^{ax}$ হলে, $y_n = a^n e^{ax}$

(ii) $y = \sin x$ হলে, $y_n = \sin\left(n.\frac{\pi}{2} + x\right)$

(iii) $y = \cos x$ হলে, $y_n = \cos\left(n.\frac{\pi}{2} + x\right)$

(iv) $y = \ln x$ হলে, $y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

(v) $y = \frac{1}{x}$ হলে, $y_n = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

(vi) $y = a\sin(bx + c)$ হলে, $y_n = ab^n \sin\left(n.\frac{\pi}{2} + bx + c\right)$

(vii) $y = a\cos(bx + c)$ হলে, $y_n = ab^n \cos\left(n.\frac{\pi}{2} + bx + c\right)$

(viii) $y = \sin ax \cos bx$ হলে, $y = \frac{1}{2}.2\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin\{(a+b)x\} + \sin\{(a-b)x\}]$

$\therefore y_n = \frac{1}{2}\left[(a+b)^n \sin\left\{n.\frac{\pi}{2} + (a+b)x\right\} + (a-b)^n \sin\left\{n.\frac{\pi}{2} + (a-b)x\right\}\right]$

(ix) $y = \sin ax \sin bx$ হলে $\therefore y_n = \frac{1}{2}\left[(a-b)^n \cos\left\{n.\frac{\pi}{2} + (a-b)x\right\} - (a+b)^n \cos\left\{n.\frac{\pi}{2} + (a+b)x\right\}\right]$

(x) $y = \cos ax \cos bx$

$y_n = \frac{1}{2}\left[(a+b)^n \cos\left\{n.\frac{\pi}{2} + (a+b)x\right\} + (a-b)^n \cos\left\{n.\frac{\pi}{2} + (a-b)x\right\}\right]$

(xi) $y = x^m$ হলে, $y_n = {}^{m}_{\square}P_n x^{m-n}$ [$m > n$ হলে]

$y_n = n!$ [$m = n$ হলে]

$y_n = 0$ [$m < n$ হলে]

(xii) $y = \frac{1}{ax+b}$ হলে, $y_n = \frac{(-1)^n n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

(xiii) $y = \ln(ax + b)$ হলে, $y_n = \frac{(-1)^{n-1}.(n-1)!\, a^n}{(ax+b)^n}$

(xiv) $y = e^{ax}\sin(bx + c)$ হলে, $y_n = r^n e^{ax} \sin(bx + c + n\theta)$

যেখানে, $r = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

(xv) $y = e^{ax}\cos(bx + c)$ হলে, $y_n = r^n e^{ax} \cos(bx + c + n\theta)$

যেখানে, $r = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

Problems

Example-147: $y = e^{3x}$ হলে, y_{100} এর মান নির্ণয় কর। **[JU' 09-10]**

Solⁿ: $y = e^{3x} \Rightarrow y_1 = 3e^{3x} \Rightarrow y_2 = 3.e^{3x}.3 = 3^2 e^{3x} \Rightarrow y_3 = 3^3 e^{3x}$

... ...

$\therefore y_n = 3^n e^{3x} \therefore y_{100} = 3^{100} e^{3x}$ **(Ans.)**

Example-148: যদি $y = \sin 2x$ হয় তবে y_{99} এর মান নির্ণয় কর। **[DU' 12-13]**

Solⁿ: $y = \sin 2x$ হলে, $y_n = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)$

$n = 99$ বসিয়ে, $y_{99} = 2^{99} \sin\left(99.\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -2^{99}\cos 2x$

[n তম অন্তরক খুবই গুরুত্বপূর্ণ একটি Topic. পরিচিত ফাংশনগুলোর n তম অন্তরক খুবই ভালোভাবে অনুশীলন করতে হবে]

Example-149: যদি $y = \ln x$ হয়, তবে n তম অন্তরজ নির্ণয় কর। **[JU' 09-10, SAU' 14-15]**

Sol^n: $y = \ln x; y_1 = \frac{1}{x}; y_2 = -\frac{1}{x^2}; y_3 = \frac{2}{x^3} = \frac{(-1)^2.2!}{x^3}; y_4 = -\frac{6}{x^4} = \frac{(-1)^3.3!}{x^4} = \frac{(-1)^{4-1}(4-1)!}{x^4}$

$\therefore y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ **(Ans.)**

Example-150: $y = \frac{1}{x}$ হলে, $y_n =$ কত? **[RU'22-23]**

(a) $\frac{n!}{x^{n+1}}$ (b) $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ (c) $\frac{(-1)^{n+1}n!}{(n+1)!}$ (d) $\frac{(-1)^{n+1}n!}{(n-1)!}$

Sol^n: (b); $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$; $y_1 = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y_2 = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{(-1)^2.2!}{x^3} = \frac{(-1)^2.2!}{x^{2+1}}$

$y_3 = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = \frac{-6}{x^4} = \frac{(-1)^3.3!}{x^4} = \frac{(-1)^3.3!}{x^{3+1}}$

$\therefore y_n = n! \times (-1)^n \times x^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$

Example-151: যদি $y = \frac{\ln x}{x}$ হয়, তবে $y_2 =$?

Sol^n: $y = \frac{\ln x}{x}, y_1 = \frac{x.\frac{1}{x} - \ln x.1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}; y_2 = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right)-(1-\ln x).2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$ **(Ans.)**

Example-152: $y = \frac{x+1}{x}$ হলে, $x^3 \frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান কত?

Sol^n: $y = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}; \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3} \quad \therefore x^3 \frac{d^2y}{dx^2} = 2$ **(Ans.)**

Example-153: $\sin 2x \cos 3x$ এর n তম অন্তরজ নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, $y = \sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2}.2\sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)$

$\therefore y_n = \frac{1}{2}\left[5^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 5x\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\right]$ **(Ans.)**

Example-154: যদি $y = x^6$ হয়, তবে $y_{10} =$? **[CU' 07-08]**

Sol^n: $y_{10} = 0$ [এখানে, x এর সর্বোচ্চ ঘাত 6. সুতরাং, রাশিটিকে 6 এর অধিক বার অন্তরীকরণ করলে 0 পাওয়া যায়; কারণ সর্বোচ্চ ঘাত সংখ্যক বার অন্তরীকরণ করলে $y_6 = 6!$ হয়]

অনুরূপভাবে $y = x^{10} + 3x^7 - 6x^5 + 10$ হলে, y_{10}, y_{12} এর মান নির্ণয় কর। এখানে, $y_{10} = 10!$; $y_{12} = 0$

Example-155: $y = \frac{1}{x+a}$ হলে, $y_n =$?

(a) $\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$ (b) $\frac{(-1)^n(n-1)!}{(x+a)^{n-1}}$ (c) $\frac{n!}{(x-a)^{n+1}}$ (d) None of these

Sol^n: (a); $y = (x+a)^{-1} \therefore y_1 = -1(x+a)^{-2}.1 \Rightarrow y_2 = +2(x+a)^{-3}$

$\Rightarrow y_3 = -6(x+a)^{-4} \ldots\ldots\ldots y_n = (-1)^n n!.(x+a)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$ **(Ans.)**

Example-156: $y = a^x$ হলে, $x = 0$ তে y এর মান n তম অন্তরক সহগ কত হবে?

(a) 0 (b) $(\log_e a)^n$ (c) $n \log a$ (d) None of these

Sol^n: (b); $y = a^x \therefore y_1 = a^x \log_e a \Rightarrow y_2 = a^x(\log_e a)^2 \ldots\ldots\ldots$

$\therefore y_n = a^x(\log_e a)^n = a^0(\log_e a)^n$[$\therefore x = 0$ হতে] $= (\log_e a)^n$ **(Ans.)**

Example-157: যদি $y = \frac{1}{x}$ হয় তবে y এর 20 তম অন্তরীকরণ কত?

(a) $\frac{20!}{x^{20}}$ (b) $\frac{20!}{x^{21}}$ (c) $\frac{21!}{x^{21}}$ (d) None of these

Sol^n: (b); $y = x^{-1} \Rightarrow y_1 = -1x^{-2} \Rightarrow y_2 = +2x^{-3}$

$\Rightarrow y_3 = -6x^{-4} \ldots\ldots\ldots y_n = (-1)^n n!.x^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \therefore y_{20} = \frac{(-1)^{20}.20!}{x^{(20+1)}} = \frac{20!}{x^{21}}$ **(Ans.)**

Example-158: যদি $y = x^{30}$ হয় তবে $\frac{d^{40}y}{dx^{40}} =$? **[SUST'11-12]**

(a) 0 (b) 1 (c) 30! (d) 30×10^{-10}

Sol^n: (a); $y = x^m$ হলে $\frac{d^n x}{dx^n}$ অশূন্য যদি কেবলমাত্র $m > n$ হয় এবং $m < n$ হলে $\frac{d^n x}{dx^n} = 0$ হবে।

Type-22: পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ সংক্রান্ত প্রমাণ

Concept

এইক্ষেত্রে কিছু বিষয় জেনে রাখা ভালো-

y এর প্রথম অন্তরজ = $\frac{dy}{dx} = y_1 = y'$

y এর দ্বিতীয় অন্তরজ = $\frac{d^2y}{dx^2} = y_2 = y''$

এভাবে, y এর n তম অন্তরজ = $\frac{d^ny}{dx^n} = y_n$

এই Type এর সমস্যা সমাধানের কোনো ধরা বাধা নিয়ম নাই। কিন্তু কিছু Technique follow করে approach করলে Problem solved হয়ে যাবে। যেমন-

- কিছু Problem এ y, y_1, y_2 সমীকরণের দুই পাশে বসিয়ে বামপক্ষ = ডানপক্ষ দেখানো যায়।
- আবার কিছু Problem -এ উভয় পাশে একই সাথে অন্তরীকরণ করে প্রাপ্ত রাশিকে simplify করলেই প্রমাণ হয়ে যায়।

Problems

Example-159: $y = e^{a\sin^{-1}x}$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2y$

Sol^n: এখানে, $y = e^{a\sin^{-1}x}$ ……… (i)

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $y_1 = e^{a\sin^{-1}x}.\frac{a}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_1 = ay \Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = a^2y^2$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে পুনরায় অন্তরীকরণ করে পাই, $\Rightarrow (1-x^2)2y_1y_2 + y_1^2(0-2x) = a^2(2yy_1)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2y$ **(Showed)**

Example-160: কোন ফাংশনটির জন্য $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$ সত্য? [DU'21-22]

(a) $y = \cos^{-1}x$ (b) $y = (\cos^{-1}x)^2$ (c) $y = \sin^{-1}x$ (d) $y = \tan^{-1}x$

সমাধান: (b); $y = (\cos^{-1}x)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\cos^{-1}x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} = -2\cos^{-1}x$

$\Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4(\cos^{-1}x)^2 \Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y \Rightarrow (1-x^2).2\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.(-2x) = 4\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$

Example-161: $y = \tan(m\tan^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$

Sol^n: এখানে, $y = \tan(m\tan^{-1}x)$ ……… (i)

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $y_1 = \sec^2(m\tan^{-1}x).\frac{m}{1+x^2}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m\{1+\tan^2(m\tan^{-1}x)\}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$ [(i) হতে] **(Showed)**

Example-162: $y = e^x\cos x$ হলে, দেখাও যে, $y_2 - 2y_1 + 2y = 0$

Sol^n: এখানে, $y = e^x\cos x$ …… (i)

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $y_1 = e^x\cos x + e^x(-\sin x)$

$\Rightarrow y_1 = y - e^x\sin x$ [(i) হতে]

$\Rightarrow y_1 - y = -e^x\sin x$ ……… (ii)

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে পুনরায় অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_2 - y_1 = -e^x\sin x - e^x\cos x = y_1 - y - y$ [(i) ও (ii) হতে]

$\therefore y_2 - 2y_1 + 2y = 0$ **(Showed)**

Example-163: $y = \cos x \ln\left(\frac{1}{\sec x + \tan x}\right)$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} + y$ এর মান নির্ণয় কর। **[DU'22-23]**

Sol^n: $y = \cos x \ln\left(\frac{1}{\sec x + \tan x}\right) = \cos x \ln\left(\frac{\sec x - \tan x}{\sec^2 x - \tan^2 x}\right)$

$\therefore y = \cos x \ln(\sec x - \tan x) \ldots.(i)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\sin x \ln(\sec x - \tan x) + \cos x \times \frac{1}{\sec x - \tan x} \times (\sec x \tan x - \sec^2 x)$

$= -\sin x \ln(\sec x - \tan x) + \frac{\cos x(-\sec x)(\sec x - \tan x)}{\sec x - \tan x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin x \ln(\sec x - \tan x) + \cos x\left(-\frac{1}{\cos x}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin x \ln(\sec x - \tan x) - 1$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x \ln(\sec x - \tan x) - \sin x \times (-\sec x) = -y + \tan x$ [$\because$ (i) $\Rightarrow y = \cos x \ln(\sec x - \tan x)$]

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x$

Example-164: $y = \sqrt{(4 + 3\sin x)}$ হলে, দেখাও যে, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$

Sol^n: $y = \sqrt{(4 + 3\sin x)} \Rightarrow y^2 = 4 + 3\sin x$

$\Rightarrow y^2 - 4 = 3\sin x \ldots\ldots\ldots (i)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $2y\frac{dy}{dx} = 3\cos x$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে পুনরায় অন্তরীকরণ করে পাই, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}.\frac{dy}{dx} = 3(-\sin x)$

$\Rightarrow 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -(y^2 - 4)$ [(i) হতে]$\therefore 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$ **[Showed]**

Example-165: $y = px^2 + qx^{-\frac{1}{2}}$ হলে, দেখাও যে, $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2y$

Sol^n: এখানে, $y = px^2 + qx^{-\frac{1}{2}} \therefore \frac{dy}{dx} = 2px - \frac{1}{2}qx^{-\frac{3}{2}}, \frac{d^2y}{dx^2} = 2p + \frac{3}{4}qx^{-\frac{5}{2}}$

এখন, $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 4px^2 + \frac{3}{2}qx^{-\frac{1}{2}} - \left(2px^2 - \frac{1}{2}qx^{-\frac{1}{2}}\right) = 4px^2 + \frac{3}{2}qx^{-\frac{1}{2}} - 2px^2 + \frac{1}{2}qx^{-\frac{1}{2}}$

$= 2px^2 + 2qx^{-\frac{1}{2}} = 2\left(px^2 + qx^{-\frac{1}{2}}\right) = 2y \therefore 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2y$ **(Showed)**

Example-166: $y = x^{-2}\ln x$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান কত? **[DU'22-23]**

(a) $x^{-4}\ln x - 2x^{-2} - 3x^{-4}$
(b) $6x^{-4}\ln x - 5x^{-4}$
(c) $6x^{-4}\ln x - 2x^{-2} - 3x^{-4}$
(d) $x^{-4}\ln x - 2x^{-2} + 3x^{-4}$

Sol^n: (b); $y = x^{-2}\ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{-2}.\frac{1}{x} + (\ln x)(-2)x^{-3} = x^{-3} - 2x^{-3}\ln x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{-3}(1 - 2\ln x) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = x^{-3}\left(0 - \frac{2}{x}\right) + (1 - 2\ln x)(-3)x^{-4}$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -2x^{-4} - 3x^{-4} + 6x^{-4}\ln x \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 6x^{-4}\ln x - 5x^{-4}$ **(Ans)**

Example-167: যদি $x = \tan \ln y$ হয় তবে $\frac{y_2}{y_1} =$?

(a) $\frac{1+x^2}{2x-1}$
(b) $\frac{1-2x}{1+x^2}$
(c) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$
(d) $\frac{2x-1}{1+x^2}$

Sol^n: (b); $x = \tan \ln y \Rightarrow \ln y = \tan^{-1} x \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y_1 = \frac{y}{1+x^2}$

$\Rightarrow (1 + x^2)y_1 = y \Rightarrow (1 + x^2)y_2 + y_1 2x = y_1 \Rightarrow (1 + x^2)y_2 = y_1(1 - 2x) \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{1-2x}{1+x^2}$ **(Ans.)**

Example-168: $y = 3x^2$ এর ক্ষেত্রে যদি $2x^2y'' + 5xy' + ky = 0$ হয় তবে $k =$?

(a) -10
(b) 10
(c) -14
(d) 14

Sol^n: (c); $y = 3x^2 \Rightarrow y' = 6x \Rightarrow y'' = 6$ এখন $2x^2y'' + 5xy' + ky = 0 \Rightarrow 2x^2(6) + 5x(6x) + k(3x^2) = 0$

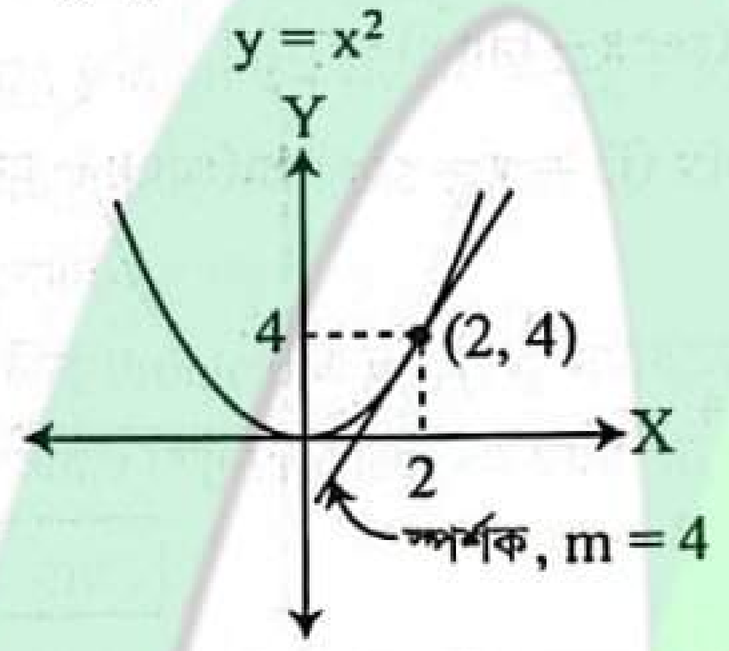
$\Rightarrow 12x^2 + 30x^2 + 3kx^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 10x^2 + x^2k = 0 \Rightarrow x^2(4 + 10 + k) = 0 \therefore k = -14$ **(Ans.)**

Type-23: স্পর্শক ও অভিলম্বের ঢাল সংক্রান্ত

Concept

(i) $y = f(x)$ বক্ররেখার যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল, $m = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}$ এর রাশিমালায় যদি শুধু x থাকে তবে f(x) বক্ররেখার উপর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল নির্ণয়ের জন্য শুধু ঐ বিন্দুর ভুজ প্রয়োজন হবে। যেমন,

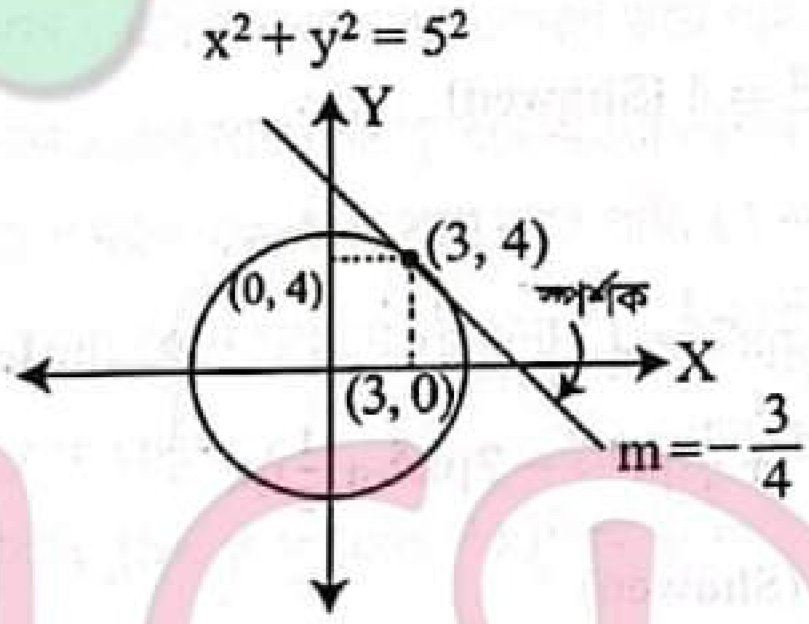


(2, 4) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল,

$m = \frac{dy}{dx} = 2x = 2 \times 2 = 4$

$\therefore y = x^2$ এর উপর অবস্থিত (2, 4) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল 4।

যদি $\frac{dy}{dx}$ এর রাশিমালায় x, y দুই চলকই থাকে তবে $y = f(x)$ লেখের উপর অবস্থিত বিন্দুর ভুজ ও কোটি উভয়ের মান বসিয়ে ঢাল নির্ণয় করতে হবে। যেমন,

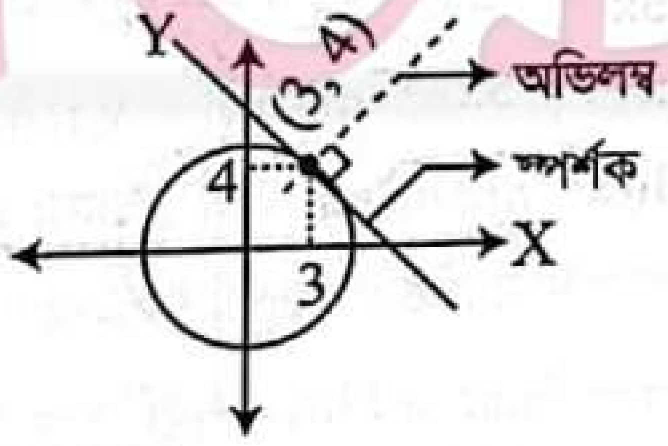


$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(5)^2$$

$$\Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\therefore \text{ঢাল}, m = -\frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$$

(ii) $y = f(x)$ এর লেখের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর লম্ব এবং ঐ বিন্দুগামী (স্পর্শ বিন্দুগামী) রেখাই অভিলম্ব। উপরের উদাহরণে-



স্পর্শকের ঢাল, $m\left(=\frac{dy}{dx}\right)$ হলে, ঐ বিন্দুতে অভিলম্বে ঢাল $= -\frac{1}{m}$ $\left(= -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{dx}{dy}\right)$ হবে।

জেনে রাখো

(i) স্পর্শকগুলো x অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

(ii) স্পর্শকগুলো y অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

(iii) স্পর্শকগুলো x ও y অক্ষ হতে সমান সমান কোণ খণ্ডন করলে, $\frac{dy}{dx} = \pm 1$

Problems

Example-169: $y = 3x^3 + 2x^2 - 10x$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে ঢাল বা নতি এর পরিমাণ কত?

Sol^n: $y = 3x^3 + 2x^2 - 10x \therefore \frac{dy}{dx} = 9x^2 + 4x - 10 \therefore$ মূলবিন্দুতে (0, 0) ঢাল $= 9.0^2 + 4.0 - 10 = -10$ (Ans.)

Example-170: x এর কোন মানের জন্য $y = x + \frac{1}{x}$ এর ঢাল শূন্য হবে? **[Agri. Guccho'20-21]**

Sol^n: $y = x + \frac{1}{x}\,; \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} \therefore 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \therefore x = \pm 1$

Example-171: $y = (x-2)(x-3) - x + 7$ বক্ররেখাটির কোন বিন্দুতে ঢাল 4? **[GST'20-21]**

Sol^n: $y = (x-2)(x-3) - x + 7 = x^2 - 5x + 6 - x + 7$
$= x^2 - 6x + 13 \Rightarrow y' = 2x - 6 = 4 \Rightarrow 2x = 6 + 4 \Rightarrow x = 5$
$\therefore y = (5-2)(5-3) - 5 + 7 = 8 \therefore$ বিন্দুটি $(5,8)$।

Example-172: a এর মান কত হলে, $y = ax(1-x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সাথে 30° কোণ তৈরি করবে?

Sol^n: $y = ax(1-x) = ax - ax^2 \ \therefore \frac{dy}{dx} = a - 2ax$ **[DU' 15-16, JnU' 19-20]**

মূলবিন্দুতে, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,0)} = a = \pm\tan 30° \therefore a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

Example-173: যদি $y = kx\,(2x + \sqrt{3})$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে তাহলে k-এর মান কত হবে? **[DU'20-21]**

Sol^n: $y = kx(2x + \sqrt{3}) = 2kx^2 + \sqrt{3}kx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4kx + \sqrt{3}k$

মূলবিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = 4k \times 0 + \sqrt{3}k = \sqrt{3}k \therefore \frac{dy}{dx} = \sqrt{3}k = \tan 30° \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow k = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \pm \frac{1}{3}$

Example-174: $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার $(4,-3)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের ঢাল নির্ণয় কর।

Sol^n: $x^2 - y^2 = 7\,;$ x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$\therefore (4,-3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,-3)} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$ এবং $(4,-3)$ বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $= \frac{-1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$ **(Ans.)**

Example-175: $y = x^3 - 2x^2 + 4$ বক্ররেখার $(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[RU' 08-09]**

Sol^n: $y = x^3 - 2x^2 + 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

$(2,4)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 12 - 8 = 4$ সুতরাং $(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 4 = 4(x-2) \Rightarrow y - 4 = 4x - 8$
$\Rightarrow 4x - y - 4 = 0 \therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ $4x - y - 4 = 0$ ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $(x - x_1) + f'(x_1)(y - y_1) = 0$
$(x-2) + 4(y-4) = 0 \Rightarrow x + 4y - 18 = 0 \therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ $x + 4y - 18 = 0$ **(Ans.)**

Example-176: $x^2y + xy^2 - 2x - 3y - 17 = 0$ বক্ররেখার উপরিস্থিত $(2, 3)$ বিন্দুতে অঙ্কিত (i) স্পর্শক (ii) অভিলম্বের ঢাল এবং সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: x এর সাপেক্ষে ব্যবকলন (অন্তরীকরণ) করে পাই, $2xy + x^2\frac{dy}{dx} + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} - 2 - 3\frac{dy}{dx} = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy-y^2+2}{x^2+2xy-3}$

(i) $(2, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= \frac{-12-9+2}{4+12-3} = -\frac{19}{13}$

$(2, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 3 = -\frac{19}{13}(x-2) \Rightarrow 13y - 39 = -19x + 38 \Rightarrow 19x + 13y - 77 = 0$

(ii) স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাই অভিলম্ব। $(2, 3)$ বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $= \frac{13}{19}$

অভিলম্বের সমীকরণ, $y - 3 = \frac{13}{19}(x-2) \Rightarrow 13x - 26 = 19y - 57 \Rightarrow 13x - 19y + 31 = 0$ **(Ans.)**

Example-177: $y(x-1)(x-2) - x + 3 = 0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x- অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? **[RU'22-23]**

(a) $2x - 2y - 3 = 0$ (b) $x - 2y - 3 = 0$ (c) $x + 2y + 3 = 0$ (d) $x + 2y - 3 = 0$

Sol^n: (b); x-অক্ষে $y = 0 \therefore 0(x-1)(x-2) - x + 3 = 0 \therefore x = 3 \therefore x$ অক্ষের ছেদবিন্দু $(3,0)$

এখন, $y(x^2 - 3x + 2) - x + 3 = 0 \Rightarrow y \cdot (2x-3) + (x^2 - 3x + 2) \cdot \frac{dy}{dx} - 1 = 0$

$(3,0)$ বিন্দুতে, $0 \cdot (2 \times 3 - 3) + (3^2 - 3 \times 3 + 2) \cdot \frac{dy}{dx} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} = m$

এখন, স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 0 = \frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow 2y = x - 3 \therefore x - 2y - 3 = 0$

বিকল্প: $y(x-1)(x-2) - x + 3 = 0$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে ছেদ করে। $\therefore y = 0$ বসালে $x = 3$ পাওয়া যায়। অর্থাৎ, $(3,0)$ বিন্দুটি স্পর্শকের উপরিস্থিত বিন্দু। $\therefore$ Option test করলে (b) is correct.

Example-178: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [JU' 10-11]

Sol^n: x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2-2x}{2y}$

যেহেতু স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল $\therefore \frac{dy}{dx} = 0 \,;\, \frac{2-2x}{2y} = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1$ সমীকরণে বসিয়ে পাই, $1^2 + y^2 - 2.1 - 3 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$\therefore$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, \pm 2)$ **(Ans.)**

Example-179: $y^2 = x^2\,(a - x)$ বক্ররেখার যেসব বিন্দুতে স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Sol^n: $y^2 = ax^2 - x^3$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $2y\frac{dy}{dx} = 2ax - 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2ax-3x^2}{2y} \,;\, \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2ax-3x^2}$

y-অক্ষের সমান্তরাল হওয়ায় $\frac{dx}{dy} = 0 \therefore \frac{2y}{2ax-3x^2} = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0$ হলে, $x^2(a - x) = 0 \quad \therefore x = 0, a \therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(0,0), (a,0)$ **(Ans.)**

Example-180: $x = y$ সরলরেখাটি $xy^2 = 4(4 - x)$ বক্ররেখাটির যে বিন্দুতে মিলিত হয়, বক্ররেখাটির সেই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কত? [RU'20-21]

Sol^n: $x = y$ এবং $xy^2 = 4(4 - x)$ সমাধান করে পাই, $x = 2; y = 2$ [কেবলমাত্র বাস্তব মূল নিয়ে]

$xy^2 = 4(4 - x) \Rightarrow xy^2 = 16 - 4x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $x.\,2y\frac{dy}{dx} + y^2.1 = 0 - 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2+4}{2xy}$

(2,2) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $m = \frac{dy}{dx}\Big|_{(2,2)} = -\frac{2^2+4}{2.2.2} = -1$

$\therefore$ (2,2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 2 = (-1)(x - 2) \Rightarrow y - 2 = -x + 2 \therefore x + y - 4 = 0$ **(Ans.)**

Example-181: দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার যেকোন বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক দ্বারা অক্ষদ্বয় হতে কর্তিতাংশের যোগফল একটি ধ্রুবক। [JnU'18-19]

Sol^n: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0$ [x এর সপেক্ষে অন্তরীকরণ করে] $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$

বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ, $y - y_1 = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}\,(x - x_1)$

বক্ররেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে, $\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = \sqrt{a} \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

y অক্ষে $x = 0$, তাই, $y - y_1 = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}\,(-x_1)\,;\; y = y_1 + \sqrt{x_1 y_1} \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$

অনুরূপভাবে, x অক্ষে $y = 0$, তাই, $x = x_1 + \sqrt{x_1 y_1} \cdots\cdots\cdots\cdots (iii)$

$\therefore$ কর্তিতাংশের যোগফল $= x + y = x_1 + y_1 + 2\sqrt{x_1\, y_1}$ [(ii) ও (iii) হতে]

$= \left(\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2$ [(i) হতে] $= a =$ ধ্রুবক (প্রমাণিত)

Type-24: সময়ের সাপেক্ষে পরিবর্তন সংক্রান্ত

Concept

বাস্তবভিত্তিক কিছু সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে সময়ের সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করার প্রয়োজন পড়ে। যেমন: যদি, s সরণ হয় তবে, বেগ, $v = \frac{ds}{dt}$; ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ হবে।

মনে রাখবে, কোনো রাশির সময়ের সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করার অর্থ হলো একক সময়ে রাশিটির পরিবর্তন নির্ণয় করা।

Problems

Example-182: যদি একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল সমহারে বাড়ে তবে তার পরিসীমা পরিবর্তনের সাথে ব্যাসার্ধের সম্পর্ক নির্ণয় কর। **[KU' 13-14]**

Solⁿ: যেহেতু বৃত্তের ক্ষেত্রফল সমহারে বাড়ে $\therefore \frac{dA}{dt} = k \Rightarrow \frac{d}{dt}(\pi r^2) = k \Rightarrow 2\pi r\frac{dr}{dt} = k \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{k}{2\pi r}$

পরিসীমা বৃদ্ধির হার $= \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(2\pi r) = 2\pi.\frac{dr}{dt} = 2\pi.\frac{k}{2\pi r} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{k}{r} \therefore \frac{ds}{dt} \propto \frac{1}{r} \therefore$ পরিসীমা ব্যাসার্ধের ব্যস্তানুপাতে বাড়ে।

Example-183: একটি গোলাকার বলের আয়তনের বৃদ্ধির হার তার ব্যাসার্ধ r এর বৃদ্ধির হারের কত গুণ? **[RU'19-20]**

Solⁿ: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \times \frac{dr}{dt} \therefore$ বলটির আয়তনের বৃদ্ধির হার তার ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হারের $4\pi r^2$ গুণ।

Example-184: একটি গোলাকার সাবানের বুদবুদের আয়তন বৃদ্ধির হার তার ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হারের কতগুণ?

Solⁿ: $v = \frac{4}{3}\pi r^3 \therefore \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi.3r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2\ \frac{dr}{dt} \therefore$ আয়তন বৃদ্ধির হার ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হারের $4\pi r^2$ গুণ **(Ans.)**

Example-185: কোন সমবাহু ত্রিভুজের বাহু প্রতি সেকেন্ডে $\sqrt{3}$ সেমি. এবং ক্ষেত্রফল প্রতি সেকেন্ডে 12 বর্গ সেমি. হারে বৃদ্ধি পেলে, ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Solⁿ: বাহু a হলে, ক্ষেত্রফল, $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

দেওয়া আছে, $\frac{da}{dt} = \sqrt{3}$ এবং $\frac{dA}{dt} = 12$

এখন, $\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}.2a.\frac{da}{dt} \Rightarrow 12 = \frac{\sqrt{3}}{2}a.\sqrt{3} \Rightarrow a = 8$ cm **(Ans.)**

Example-186: তাপ প্রয়োগের ফলে ধাতুর তৈরি একটি বৃত্তাকার থালার ব্যাসার্ধ প্রতি সেকেন্ডে 0.25 সে.মি. বাড়ে। যখন থালাটির ব্যাসার্ধ 7 সে.মি. তখন তলের বৃদ্ধির হার নির্ণয় কর। **[KU' 12-13]**

Solⁿ: এখানে, $\frac{dr}{dt} = 0.25 = \frac{1}{4}\text{cms}^{-1}$ এবং ক্ষেত্রফল $A = \pi r^2$

$\therefore$ তলের বৃদ্ধির হার, $= \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = 2\pi r\ \frac{dr}{dt}$

$= 2\pi \times 7 \times (0.25) = 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times \frac{1}{4} = 11\ \text{cm}^2$ **(Ans.)**

Example-187: একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $\left(3t + \frac{t^2}{8}\right)$ মিটার পথ অতিক্রম করে। 5 মিনিট পর ট্রেনটির বেগ কত হবে? **[JU'19-20]**

Solⁿ: $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3t + \frac{t^2}{8}\right) = 3 + \frac{1}{8}.2t = 3 + \frac{t}{4}$

$t = (5 \times 60)$ হলে, $v = 3 + \frac{5\times60}{4} = 78\ \text{ms}^{-1}$

Example-188: কোনো সরলরেখা বরাবর একটি কণা এমনভাবে চলছে যেন তা $s = 15t + 1.5t^2$ শর্তানুসারে t সেকেন্ডে s সে.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে। অন্তরীকরণের (Differentiation) ধারণা ব্যবহার করে 2 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ (Acceleration) একটি ধ্রুব (Constant) রাশি। **[JnU'19-20]**

Solⁿ: বেগ, $v = \frac{ds}{dt} = 15 + 3t \Rightarrow v = 3t + 15$

$\therefore$ 2s পর বেগ, $v = 3 \times 2 + 15 = 21\ \text{cms}^{-1}$

ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t + 15) = 3\ \text{cms}^{-2}$, যা ধ্রুবক।

Example-189: একটি গতিশীল কণার কোন সরলরেখায় t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 63t - 6t^2 - t^3$ দ্বারা প্রকাশিত হলে, 2 সেকেন্ড পরে কণাটির বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। কতক্ষণ পর কণাটি থেমে যাবে? থামার পূর্বে কতটুকু দূরত্ব অতিক্রম করবে?

Solⁿ: $s = 63t - 6t^2 - t^3; v = \frac{ds}{dt} = 63 - 12t - 3t^2; a = \frac{dv}{dt} = -12 - 6t$

2 sec পরে, $v = 63 - 12 \times 2 - 3 \times 2^2 = 27\ \text{ms}^{-1}$

2 sec পরে, $a = -12 - 6.2 = -24\ \text{ms}^{-2}$ অর্থাৎ মন্দন $24\ \text{ms}^{-2}$

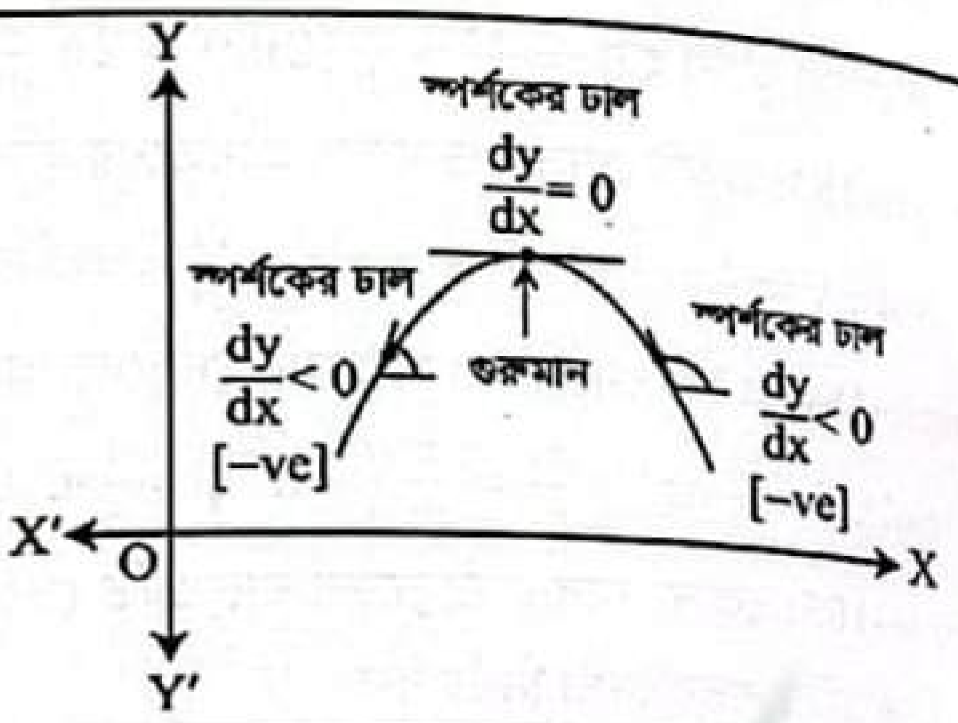
থেমে গেলে, $v = 63 - 12t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t = 3$ sec $\therefore$ 3 sec পরে কণাটি থেমে যাবে।

থেমে যাবার পূর্বে, $s = 63 \times 3 - 6 \times 3^2 - 3^3 = 108$ m **(Ans.)**

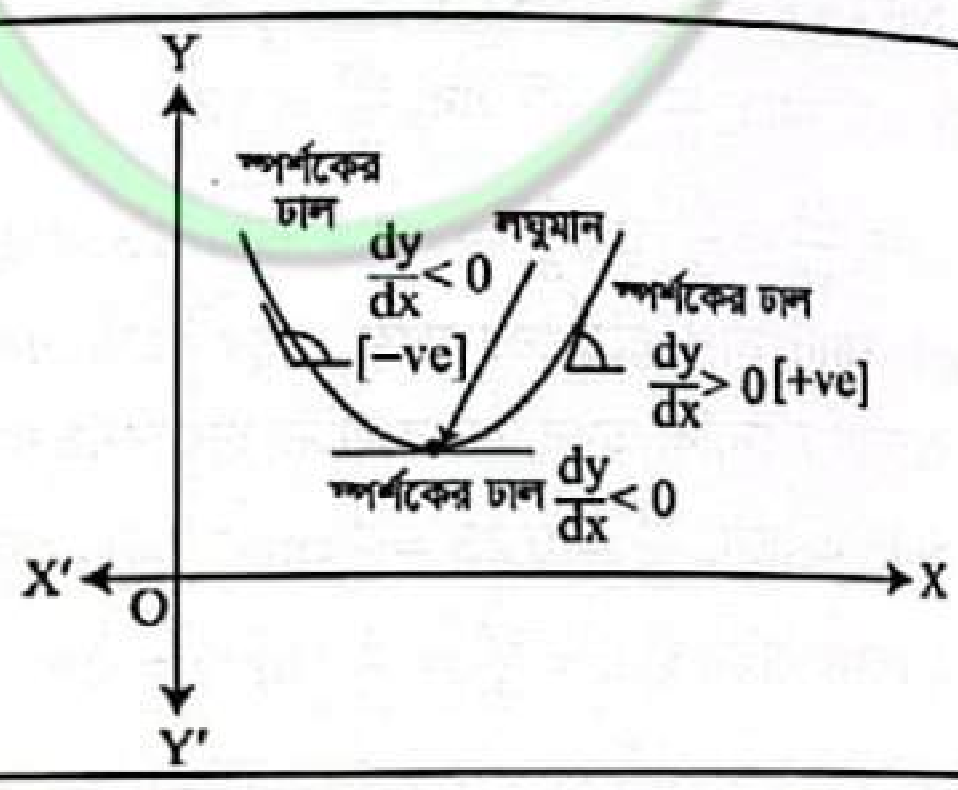
Type-25: লঘুমান বা গুরুমান এবং ক্রমবর্ধমান-ক্রমহ্রাসমান সংক্রান্ত

Concept

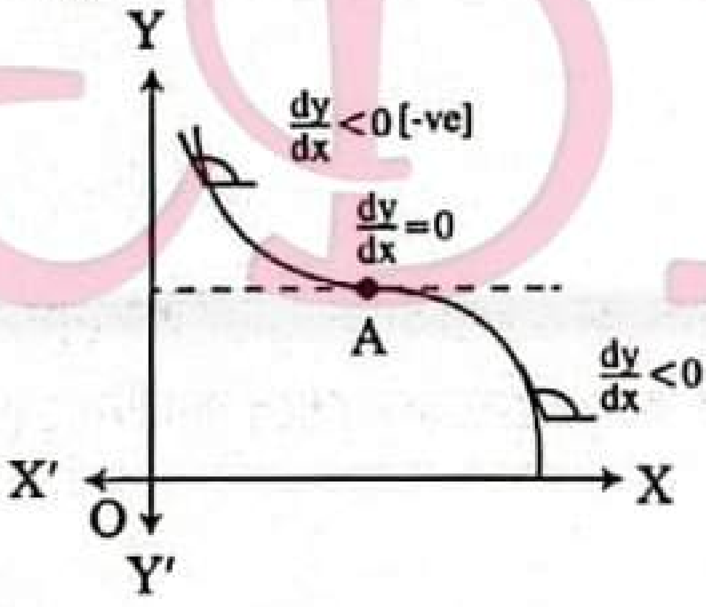
গুরুমান: গুরুমান বলতে ফাংশনের সেই মানকে বোঝায় যার পূর্বে স্পর্শকের ঢাল ধনাত্মক [+ve] এবং পরে স্পর্শকের ঢাল ঋণাত্মক [−ve]। অর্থাৎ, যে বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ [বা স্পর্শকের ঢাল] এর মান ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক মানে রূপান্তরিত হয় সেই বিন্দুর কোটির মানই গুরুমান।

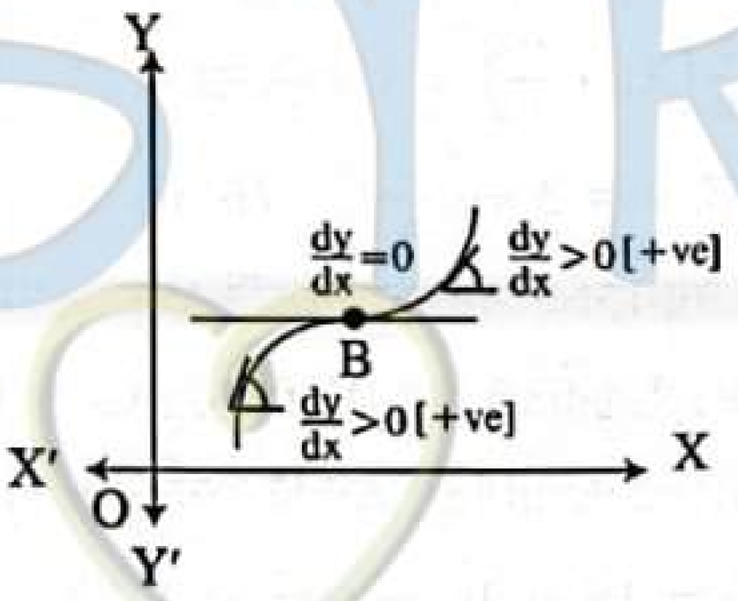


লঘুমান: লঘুমান বলতে ফাংশনের সেই মানকে বোঝায় যার পূর্বে স্পর্শকের ঢাল ঋণাত্মক [−ve] এবং পরে স্পর্শকের ঢাল ধনাত্মক [+ve]. অর্থাৎ যে বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ [বা স্পর্শকের ঢাল] এর মান ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মক মানে রূপান্তরিত হয় সেই বিন্দুর কোটিই লঘুমান।



গুরুমান এবং লঘুমানের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$ [স্পর্শকের ঢাল 0 বা স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল] কিন্তু $\frac{dy}{dx} = 0$ হলেই গুরুমান বা লঘুমান নাও হতে পারে।





চিত্রে A এবং B বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ কিন্তু A বা B এর কোনটিই গুরুমান বা লঘুমান নয়। কারণ A বিন্দুর আগে এবং পরে $\frac{dy}{dx}$ এর মান ঋণাত্মক [অর্থাৎ চিহ্নের কোন পরিবর্তন হয় নি] এবং B বিন্দুর আগে ও পরে $\frac{dy}{dx}$ এর মান ধনাত্মক [অর্থাৎ এখানেও চিহ্নের পরিবর্তন হয় নি]

∴ A ও B গুরুমান / লঘুমান নয়।

গুরুমানের শর্ত	লঘুমানের শর্ত
গুরুমানের ক্ষেত্রে, (i) $\frac{dy}{dx} = 0$; (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ [−ve]	লঘুমানের ক্ষেত্রে, (i) $\frac{dy}{dx} = 0$; (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ [+ve]

অন্যান্য তথ্য:

(i) যদি কোন বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} > 0$ [+ve] হয় তাহলে গ্রাফ/ফাংশনটি ঐ বিন্দুতে ক্রমবর্ধমান (Increasing)

(ii) যদি কোন বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} < 0$ [−ve] হয় তাহলে গ্রাফ/ফাংশনটি ঐ বিন্দুতে ক্রম হ্রাসমান (Decreasing)

লঘুমান বা গুরুমান নির্ণয়ের ধাপ সমূহ

- লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় করার জন্য $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করে $\frac{dy}{dx} = 0$ বসিয়ে সমাধান করে x এর মানগুলি বের করতে হবে। x এর এই সমস্ত মান দ্বারা গঠিত বিন্দুগুলোকে স্থির বিন্দু/সন্ধি বিন্দু /সংকট বিন্দু বলে।
- $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করতে হবে এবং তাতে x এর প্রাপ্ত মান সমূহ বসাতে হবে। যদি $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ হয় তবে x এর ঐ মানের জন্য ফাংশনটির লঘুমান পাওয়া যাবে এবং $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ হয় তবে x এর ঐ মানের জন্য ফাংশনটির গুরুমান পাওয়া যাবে।
- x এর মান গুলো প্রদত্ত ফাংশনে বসিয়ে গুরুমান বা লঘুমান নির্ণয় করতে হবে।

Problems

Example-190: $y = x^4 - 8x^2 + 7$ বক্ররেখার স্থির বিন্দুগুলো নির্ণয় কর।

Sol

Solⁿ: $y = x^4 - 8x^2 + 7 \therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x+2)(x-2)$

স্থির বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0 \therefore 4x(x+2)(x-2) = 0 \therefore x = 0, 2, -2$

$x = 0$ হলে, $y = 7, x = 2$ হলে, $y = -9, x = -2$ হলে, $y = -9 \therefore$ নির্ণেয় স্থির বিন্দু $(0,7), (2,-9), (-2,-9)$ **(Ans.)**

Example-191: x এর কোন মানের জন্য $y = x\ln x$ এর লঘুমান নির্ণয় করা যাবে? **[GST'22-23]**

(a) e (b) −e (c) $\frac{1}{e}$ (d) $\frac{-1}{e}$

Solⁿ: (c); $y = x\ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x\ln x] = x\frac{d(\ln x)}{dx} + \frac{d}{dx}(x)\ln x = x \times \frac{1}{x} + 1.\ln x = \ln x + 1$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}[\ln x + 1] = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$

গুরুমান ও লঘুমানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \therefore x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

এখন, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{e}} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e \approx 2.71828 > 0 \therefore x = \frac{1}{e}$ তে y সর্বনিম্ন $\therefore$ লঘুমানের শর্তে, $x = \frac{1}{e}$

Example-192: $y = x^2 - 1$ ফাংশনটির Optimal value কোনটি? **[CU'22-23]**

(a) 1 (b) 0 (c) −1 (d) কোনটিই নয়

Solⁿ: (c); ধরি, $y = x^2 - 1 = f(x) \therefore f'(x) = 2x = 0$ [চরমমান পেতে]

$\Rightarrow x = 0;\ f''(x) = 2 > 0 \therefore$ লঘুমান বিদ্যমান $\therefore f(0) = 0^2 - 1 = -1$

Example-193: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে x এর কোন মানদ্বয়ের জন্য $y = 1 + 2\sin x + 2\cos^2 x$ এর মান গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ হবে? **[RU'19-20]**

Solⁿ: $y_1 = 2\cos x + 4\cos x(-\sin x) \Rightarrow 0 = 2\cos x - 4\cos x\sin x \Rightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0$

$\therefore \cos x = 0 \therefore x = \frac{\pi}{2}$ অথবা, $\sin x = \frac{1}{2} \therefore x = \frac{\pi}{6} \quad \therefore x = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right\}$ **(Ans.)**

Example-194: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$ ফাংশনের লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর। **[RU' 11-12]**

Solⁿ: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13 \therefore f'(x) = 3x^2 - 6x - 45 \therefore f''(x) = 6x - 6$

এখন, $3x^2 - 6x - 45 = 0 \Rightarrow x = -3, 5\ ;\ f''(-3) = 6(-3) - 6 = -24 < 0 \therefore x = -3$ হলে, গুরুমান থাকবে,

$\therefore$ গুরুমান, $f(-3) = (-3)^3 - 3(-3)^2 - 45(-3) + 13 = 94$

$f''(5) = 6.5 - 6 = 24 > 0; \therefore x = 5$ হলে, লঘুমান থাকবে, লঘুমান, $f(5) = 5^3 - 3.5^2 - 45.5 + 13 = -162$ **(Ans.)**

Example-195: $4e^x + 9e^{-x}$ এর সর্বনিম্ন মান কত? **[RU' 13-14]**

Solⁿ: $f(x) = 4e^x + 9e^{-x} \quad \therefore f'(x) = 4e^x - 9e^{-x};\ f''(x) = 4e^x + 9e^{-x}$

লঘুমান / গুরুমানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow 4e^x - 9e^{-x} = 0$

$\Rightarrow 4e^{2x} - 9 = 0 \Rightarrow e^{2x} = \frac{9}{4} \Rightarrow e^x = \frac{3}{2} \therefore x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\ [\because e > 0]$

এখন, $f''\left(\ln\frac{3}{2}\right) = 4e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + 9e^{-\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = 4e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + 9e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 4 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} = 6 + 6 = 12 > 0$

$\therefore x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$-তে ফাশনটির সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মানটি $f\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = 4e^{\ln\frac{3}{2}} + 9e^{-\ln\frac{3}{2}} = 4 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} = 6 + 6 = 12$ **(Ans.)**

Example-196: $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ফাংশনটির গুরুমানটি লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হলে গুরুমানটি কত এবং চরমবিন্দুগুলো নির্ণয় কর। [GST'20-21, KU'19-20]

Sol^n: $y = x + \frac{1}{x} \therefore y_1 = 1 - \frac{1}{x^2} \therefore 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \therefore x = \pm 1$

এখানে, $y_2 = \frac{2}{x^3}$; $x = 1$ হলে, $y_2 = 2 > 0$ অর্থাৎ লঘুমান পাওয়া যাবে। লঘুমানটি, $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

$\therefore$ একটি চরম বিন্দু $(1, 2)$; $x = -1$ হলে, $y_2 = -2 < 0$; অর্থাৎ গুরুমান পাওয়া যাবে

$\therefore$ গুরুমানটি $= f(-1) = -1 + \frac{1}{(-1)} = -2 \therefore$ গুরুমান $= -2$ এবং অপর চরম বিন্দু $(-1, -2)$ **(Ans.)**

Example-197: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$ এর কোনো গুরুমান বা লঘুমান আছে কিনা নির্ণয় কর। [RU' 07-08]

Sol^n: এখানে, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 24 = 3\{(x-2)^2 + 4\}$

$\therefore$ x এর কোন বাস্তব মানের জন্য $f'(x) \neq 0 \therefore$ ফাংশনটির কোন গুরুমান বা লঘুমান নেই। **(Ans.)**

Example-198: k এর কোন মানের জন্য $x = 1$ বিন্দুতে $f(x) = x^2 + \frac{k}{x}$ এর লঘুমান পাওয়া যাবে? [DU'21-22]

(a) 0
(b) −1
(c) 2
(d) 1

Sol^n: (c); $f(x) = x^2 + \frac{k}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{k}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 2.1 - \frac{k}{1^2} = 2 - k \Rightarrow f''(x) \Rightarrow 2 + \frac{2k}{x^3}$

চরম মানের জন্য, $f'(1) = 0 \Rightarrow 2 - k = 0 \therefore k = 2$ **(Ans.)**

Test: $f''(2) = 2 + \frac{2.2}{1^3} = 6 > 0 \therefore k$ এর মান 2 এর জন্য লঘুমান পাওয়া যাবে।

Example-199: দেওয়া আছে, $F(x) = \int_0^x \frac{t-3}{t^2+7} dt$ । x এর মান কত হলে F(x) ন্যূনতম হবে?

Sol^n: F(x) ন্যূনতম হতে হলে $\frac{d}{dx}(F(x)) = 0$ হতে হবে।

এখানে, $f(t) = \frac{t-3}{t^2+7} \therefore f(x) = \frac{x-3}{x^2+7}$; $\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x) = \frac{x-3}{x^2+7} \therefore \frac{x-3}{x^2+7} = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ **(Ans.)**

Example-200: কোন ব্যবধিতে $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ক্রমবর্ধমান? [DU'21-22]

(a) $(-\infty, 0)$
(b) $(-1, 1)$
(c) $(0, \infty)$
(d) $(-1, \infty)$

Sol^n: (b); $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \therefore f'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 1 - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ ক্রমবর্ধমান হলে,

$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} < 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2} < 0$

$\because (x^2+1)^2 > 0 \therefore (x+1)(x-1) < 0 \therefore -1 < x < 1 \therefore$ ব্যবধি $(-1, 1)$

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

➲ **লিমিট:**

- ➢ $\lim\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\lim(x)}{\lim(y)}$ [যেকোনো $\lim y \neq 0$]
- ➢ $\lim(c) = c$ [c ধ্রুবক]
- ➢ $\lim(cx) = c\lim(x)$ [c ধ্রুবক]
- ➢ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- ➢ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
- ➢ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- ➢ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$
- ➢ $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$
- ➢ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$
- ➢ $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- ➢ $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

  [উল্লেখ্য $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$]
- ➢ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- ➢ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = 1$
- ➢ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin^{-1} x} = 1$
- ➢ $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \lim\limits_{x\to 0} x$
- ➢ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan^{-1} x} = 1$

- $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^x=e^m$
- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{d}{dx}\{f(x)\}$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{nx}=e^{mn}$
- $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{n}{x}}=e^{mn}$

অন্তরক সহগ নির্ণয় (অন্তরীকরণ)

01. $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$
02. $\frac{d}{dx}\sqrt{x^n}=\frac{1}{2\sqrt{x^n}}.\frac{d}{dx}(x^n)$
03. $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$
04. $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$
05. $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$
06. $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\mathrm{cosec}^2 x$
07. $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$
08. $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}\,x)=-\mathrm{cosec}\,x\cot x$
09. $\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln a$
10. $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$
11. $\frac{d}{dx}\left(\frac{uv}{w}\right)=\frac{uv}{w}\left(\frac{\frac{du}{dx}}{u}+\frac{\frac{dv}{dx}}{v}-\frac{\frac{dw}{dx}}{w}\right)$
12. $\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x}\log_a e$
13. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$
16. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=-\frac{1}{1+x^2}$
17. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
18. $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}^{-1}x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
19. $\frac{d}{dx}(u^v)=u^v\left[\frac{v}{u}\frac{du}{dx}+\ln u.\ \frac{dv}{dx}\right]=u^v\frac{d}{dx}(v\ln u)$
20. $\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{d}{dx}(\log_{10}x)=\frac{1}{x\ln 10}=\frac{1}{x}\log_{10}e;\ \frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{d}{dx}(\log_e x)=\frac{1}{x}$

পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ

21. $y=a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots+a_{n+1}$ হলে, $y_n=n!\,a_1$
22. $y=e^{ax}$ হলে, $y_n=a^ne^{ax}$
23. $y=a^{mx}$ হলে, $y_n=(m\ln a)^na^{mx}$.
24. $y=(ax\pm b)^n$ হলে, $y_n=n!\,a^n$ & $y_{n+1}=0$
25. $y=x^n\ln x$ হলে, $y_{n+1}=\frac{n!}{x}$
26. $y=\sin ax$ হলে, $y_n=a^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+ax\right)$
27. $y=\cos ax$ হলে, $y_n=a^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}+ax\right)$
28. $y=\ln(ax+b)$ হলে, $y_n=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$
29. $y=\frac{1}{ax+b}$ হলে, $y_n=\frac{(-1)^nn!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$
30. $y=\sin x$ or $\cos x$ হলে, $y_4=y$ হয় $\Rightarrow y_4-y=0$

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম

MCQ

01. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}=?$

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) 6 (d) $\frac{1}{6}$

02. x^4 এর সাপেক্ষে $\sin x^5$ এর অন্তরীকরণ হবে-

(a) $\frac{5}{4}\cos x^5$ (b) $\frac{5}{4}\cos x^4$ (c) $\frac{5}{4}\,x\cos x^5$ (d) কোনটিই নয়

03. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2\ln(1+x)}{x\sin x}$ এর মান–

(a) 0 (b) −1 (c) 1 (d) ∞

04. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=?$

(a) 1 (b) −1 (c) 0 (d) 2

05. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{x}=?$

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

06. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})}{2x}$ এর মান–

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) Does not exist

07. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$ এর মান–

(a) 0 (b) 2 (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$

08. $\frac{1-\sin x}{\cos x}$ এর লিমিট কোনটি? [যখন $x\to\frac{\pi}{2}$]

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) 1

09. যদি $f(x)=\ln(2x+e^{3x})$ হয়, তবে $f'(0)=?$

(a) 0 (b) 1 (c) 3 (d) 5

10. $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin y)}{\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2}=?$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) $\frac{1}{2}$

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\cos x}=?$

(a) 0 (b) ∞ (c) −2 (d) 2

12. $\log x=\sqrt{\log x}$ হলে, x এর মান–

(a) 1,100 (b) 1,10 (c) 10 (d) 100

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-20}{x^2-100}$ এর মান কত?

(a) 0 (b) $\frac{1}{10}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) 2

14. $\lim\limits_{x\to\infty}=\frac{2x}{x+1}$ এর মান কত–

(a) 1 (b) 2 (c) ∞ (d) 4

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=?$

(a) $\log_e a$ (b) $-\log_e\left(\frac{a}{b}\right)$ (c) $-\log_e b$ (d) $\log_e\left(\frac{a}{b}\right)$

16. $x^2+y^2=25$ বৃত্তের $(5,0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত হবে?

(a) 0 (b) −5 (c) ∞ (d) 5

17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^\circ}{x}$ এর মান কত?

(a) π (b) $\frac{\pi}{180}$ (c) α (d) কোনটিই নয়

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\}\right)^3$ এর মান কত?

(a) 0 (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$ এর মান কত?

(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) ∞

20. x এর কোন মানের জন্য $y = x + \frac{1}{x}$ বক্ররেখাটির স্পর্শকের ঢাল শূন্য হবে?
(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) ± 1 (d) 0

21. $y = (3x-2)^{11}$ হলে, $y_{11} = ?$
(a) $3.(11)!$ (b) $3^{11}.11$ (c) $3^{11}.(11)!$ (d) $3.(10)!$

22. যদি $x = \frac{1}{2}$ হয় তবে নিচের কোনটি $(x^2e^{2x}\ln 2x)$ এর অন্তরক সহগ?
(a) 2e (b) e^2 (c) $\frac{e}{2}$ (d) $2e^2$

23. $\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3x+2}{x}} =$ কত?
(a) e^{10} (b) e^8 (c) 10 (d) 8

24. $y = (x+a)^{-1}$ হলে, $y_5 = ?$
(a) $-(5)!\,(x+a)^{-5}$ (b) $-(5)!\,(x+a)^{-4}$ (c) $-(5)!\,(x+a)^{-6}$ (d) কোনটিই নয়

25. $y = \sqrt{x}$ বক্ররেখার উপর কোন বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সহিত 45° কোণ সৃষ্টি করে?
(a) $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ (c) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$

26. $y = (x^x)^x$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ কত?
(a) $x^{x^2}x(2x+1)$ (b) $x^{x^2}x(2\ln x+1)$ (c) $x^{x^3}(2\ln x+1)$ (d) $x^8(2\ln x+1)$

27. $x^2+y^2-2x-3=0$ বক্ররেখাটির উপর কোন বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের উপর লম্ব; স্পর্শকটির ঢাল–
(a) 0 (b) −1 (c) অসংজ্ঞায়িত (d) কোনটিই নয়

28. $y = f(x)$ হলে, $\frac{d}{dx}(e^y) = ?$
(a) $e^x\frac{dy}{dx}$ (b) e^y (c) $e^y\frac{dy}{dx}$ (d) 0

29. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ এর মান কত?
(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

30. λ এর যে মানের জন্য $y = \lambda x(1-x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে–
(a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 1

31. $\sin(ax+b)$ এর n -তম অন্তরক হবে–
(a) $a^n\sin\left(\frac{\pi}{2}n+ax+b\right)$ (b) $a^n\cos\left(\frac{\pi}{2}n+ax+b\right)$
(c) $(-1)^n a^n\sin(ax+b)$ (d) $(-1)^n a^n\cos(ax+b)$

32. যদি $y = \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ সমান-
(a) $2\sin 2x$ (b) $2\cos 2x$ (c) $2\tan 2x$ (d) $2\cot 2x$

33. $x^2+xy+y^2 = 2$ হলে, $(3,-4)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ এর মান–
(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{3}{8}$ (d) $\frac{8}{3}$

34. $\frac{d}{dx}(\log_x e) = ?$
(a) $\frac{\log_x e}{x}$ (b) $\frac{1}{x\ln x}$ (c) $-\frac{\ln x}{x}$ (d) $\frac{-1}{x(\ln x)^2}$

35. $x(12-2x)^2$ এর বৃহত্তম মান কত হবে?
(a) 120 (b) 128 (c) 228 (d) −128

36. $y = \sin x$ হলে, y_4 এর মান কত?
(a) $2\cos x$ (b) $2\sin x$ (c) $\cos x$ (d) $\sin x$

37. a এর যে মানের জন্য $y = ax(1 - x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে–

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 1

38. $y = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$ হলে, $3(y^2 - 1)\frac{dy}{dx}$ সমান–

(a) $1 + \frac{1}{x^2}$ (b) $\frac{1}{x^2}$ (c) $1 - \frac{1}{x^2}$ (d) $-\frac{1}{x^2}$

39. $3x^2 - 7y^2 + 4xy - 8x = 0$ বক্ররেখাটির $(-1,1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল:

(a) $-\frac{5}{9}$ (b) $\frac{5}{9}$ (c) $-\frac{9}{5}$ (d) $\frac{9}{5}$

40. If $x^n + y^n = a^n$ then $\frac{dy}{dx}$ =?

(a) $\left(\frac{x}{y}\right)$ (b) $\left(-\frac{x}{y}\right)^n$ (c) $-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$ (d) $-\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}$

41. $y = \cos\log(x + a)$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান–

(a) $-\sin\log(x + a)$ (b) $\frac{[\sin\log(x+a)]}{x+a}$ (c) $\frac{[-\sin\log(x+a)]}{x+a}$ (d) $\frac{[-\sin\log(x+a)]}{x}$

42. $y = x^2 \ln x$ হলে, y_3 এর মান–

(a) $\frac{2}{x}$ (b) $\frac{x}{2}$ (c) $\frac{x}{3}$ (d) $\frac{4}{x}$

43. $x = 1$ এবং $y = \frac{1+e^{2x}}{1+e^{2x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ =?

(a) 1 (b) 0 (c) ∞ (d) কোনটিই নয়

44. $x^y = e^{x-y}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ =?

(a) $\frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$ (b) $\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$ (c) $\frac{1}{(1+\ln x)^2}$ (d) কোনটিই নয়

45. $y = \ln(1 + x)$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}$ =?

(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $\frac{1}{1+x^2}$ (c) $\frac{-1}{(1+x)^2}$ (d) $-(1 + x)^2$

46. যদি $\log(xy) = x + y$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত হবে?

(a) $\frac{x}{y}.\frac{x-1}{1-y}$ (b) $\frac{y}{x}.\frac{x-1}{1-y}$ (c) $\frac{x}{y}.\frac{1-y}{x-1}$ (d) $\frac{xy-1}{xy+1}$

47. x এর সাপেক্ষে $\sqrt{\sqrt{x}}$ এর অন্তরীকরণ কি?

(a) $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}$ (b) $\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$ (c) $x^{-\frac{1}{2}}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x}$

48. $y = \ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{5}{2}}\right\}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) $\frac{x^2+2}{x^2-1}$ (b) $\frac{x^2-2}{x^2-1}$ (c) $\frac{x^2-4}{x^2-1}$ (d) $\frac{x^2+4}{x^2-1}$

49. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}e^{\ln x}\right)$ =?

(a) 0 (b) 1 (c) x (d) $\frac{1}{x}$

50. $y = x^{\sin x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত?

(a) $x^{\sin x}\left(\cos\ln x + \frac{1}{x}\sin x\right)$ (b) $x^{\sin x}\left(\frac{1}{x}\cos x + \sin\ln x\right)$

(c) $x^{\cos x}\left(\sin x\ln x + \frac{1}{x}\cos x\right)$ (d) $x^{\cos x}\left(\sin x\ln x - \frac{1}{x}\cos x\right)$

51. x^2 এর সাপেক্ষে $\sin x$ এর অন্তরক সহগ কোনটি?

(a) $\frac{\sin^2 x}{2x}$ (b) $\frac{\cos^2 x}{x}$ (c) $\frac{\cos x}{2x}$ (d) $\frac{\sin x}{2x}$

52. $\frac{d}{dx}\left\{\frac{1+\sin x}{1-\cos x}\right\}$ =?

(a) $\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$ (b) $\frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$ (c) $\frac{2\sin x}{1-\cos x}$ (d) কোনটিই নয়

53. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}(2x)}{x}$ এর মান–
(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

54. $y = x\ln x$ হলে, $xy_1 = ?$
(a) $x + y$ (b) $x - y$ (c) x (d) y

55. $\frac{x}{\ln x}$ এর ক্ষুদ্রতম মান কত ?
(a) $\frac{1}{e}$ (b) e (c) $\frac{1}{\ln e}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

56. k এর কোন মানের জন্য $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-2e^{-4x}+kx}{x^2} = -15$ হবে?
(a) 0 (b) −3 (c) −20 (d) all

57. $y = \sin^2 2x + e^{2\ln(\cos 2x)}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি?
(a) −1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

58. $f(x) = x(2a - x)$ এর সর্বোচ্চ মান কত?
(a) a (b) 2a (c) a^2 (d) $2a^2$

59. $xy + x^2y^2 - c = 0$ হলে, $\frac{dx}{dy} = ?$
(a) $-\frac{x}{y}$ (b) $\frac{x}{y}$ (c) $\frac{y}{x}$ (d) $-\frac{y}{x}$

60. $\lim\limits_{x\to-\propto}\frac{5x^2+3x+2}{2x^2-5x+3}$ এর মান কত?
(a) $\frac{2}{-5}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) $\frac{5}{2}$ (d) $\frac{2}{5}$

Written

61. মান নির্ণয় কর:
(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^2+1}{6x^4+x^3-3x}$ (ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ (iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\ln(2x-1)-\ln(x+5)\}$
(iv) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x\sin\frac{b}{2^x}$ (v) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{5}}-a^{\frac{3}{5}}}$ (vi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2}$
(vii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$ (viii) $\lim\limits_{x\to y}\frac{\sin x-\sin y}{x-y}$ (ix) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\{\sec(\sec x-\tan x)\}$
(x) $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\tan\theta}\right)$ (xi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}(3x)}{4x}$ (xii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$

62. x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: (i) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ (ii) $\frac{e^x+\ln x}{\log_a x}$

63. x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: (i) $\cos\sqrt{x}$ (ii) $\sin^2(\ln x)^2$

64. x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: (i) $\tan^{-1}(e^x)$ (ii) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

65. x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: (i) x^x (ii) $\frac{x\sin x}{1+\cos x}$

66. $y = (\cos^{-1}x)^2$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2.$

67. x এর সাপেক্ষে $\cos 3x$ এর n তম অন্তরজ নির্ণয় কর।

68. $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ বক্ররেখার $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরন নির্ণয় কর।

69. একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $3t + \frac{1}{8}t^2$ মিটার অতিক্রম করে। 5 মিনিট পর তার বেগ কত হবে?

70. $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ এর সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

71. দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 3$ এর কোন সর্বোচ্চ মান অথবা সর্বনিম্ন মান নাই।

প্র্যাক্টিস প্রবলেমের সমাধান

MCQ

01. **Sol^n: (b);** $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}\left[\frac{0}{0}\text{form}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{2e^{2x}}{3\cos 3x}=\frac{2}{3}$

02. **Sol^n: (c);** $\frac{d\sin x^5}{dx^4}=\frac{\frac{d\sin x^5}{dx}}{\frac{dx^4}{dx}}=\frac{\cos x^5\times5x^4}{4x^3}=\frac{5}{4}x\cos x^5$

03. **Sol^n: (c);** $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2\ln(1+x)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\infty\right)-2(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\infty}{x\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\ldots\infty\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^3\left(\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}+\ldots\ldots\infty\right)-2(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+\ldots\ldots\infty)}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\ldots\ldots\infty}=1$

Alternate Solution: $\frac{0}{0}$ form, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-\frac{2}{1+x}}{x\cos x+\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}+\frac{2}{(1+x)^2}}{-x\sin x+\cos x+\cos x}$ [দুই বার ব্যবকলন করে] $=\frac{2}{2}=1$

04. **Sol^n: (c);** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x}\left[\frac{0}{0}\text{form}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x}{1}$ [L'Hôpital's rule] $=0$

বিকল্প: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}.x=\lim\limits_{x\to0}x=0$

05. **Sol^n: (c);** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^{-1}2x}{x}\left[\frac{0}{0}\text{form}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{1+4x^2}=\frac{2}{1+0}=2$; বিকল্প: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^{-1}2x}{2x}\cdot2=2$

06. **Sol^n: (b);** $\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^x-e^{-x})}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^0+e^{-0}}{2}=1$

07. **Sol^n: (b);** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(-\sin x-2\sin 2x)+(\cos x+\cos 2x)}{\cos x}$ [L'Hôpital's rule] $=2[x=0$ বসিয়ে]

বিকল্প: $\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)(\cos x+\cos 2x)=1(1+1)=2$

08. **Sol^n: (a);** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{1}=0$ [L'Hôpital's rule]

09. **Sol^n: (d);** $f(x)=\ln(2x+e^{3x})\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2x+e^{3x}}(2+e^{3x}.3)\therefore f'(0)=\frac{1}{1}(2+3)=5$

10. **Sol^n: (d);** $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin y)}{\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2}\left[\frac{0}{0}\text{form}\right]=\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos y}{2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)(-1)}\left[\frac{0}{0}\text{form}\right]$

[L'Hôpital's rule] $=\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{2(-1)(-1)}$; [L'Hôpital's rule]$=\frac{1}{2}$

11. **Sol^n: (c);** $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{Lt}}\frac{2x-\pi}{\cos x}=\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{Lt}}\frac{2}{-\sin x}$ [লব ও হরে Differentiation করে] $=\frac{2}{-1}=-2$

অথবা, $x\to\frac{\pi}{2}+h$ যখন, $x\to\frac{\pi}{2},h\to0\therefore\underset{n\to0}{\text{Lt}}\frac{2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-\pi}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}=\underset{h\to0}{\text{Lt}}\frac{2h}{-\sin h}=-2\times1=-2$

12. **Sol^n: (b);** $(\log x)^2=\log x\Rightarrow\log x\,(\log x-1)=0\Rightarrow\log x=0,1\therefore x=1,10$

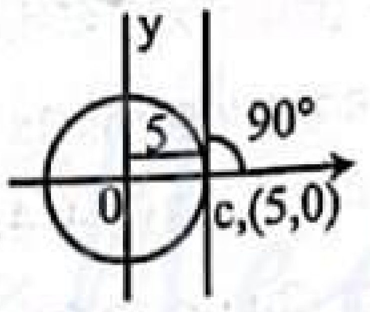
13. **Sol^n: (c);** $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-20}{x^2-100}=\frac{-20}{-100}=\frac{1}{5}$

14. **Sol^n:(b);** $\lim\limits_{x\to\infty}=\frac{2x}{x+1}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x}}=2\left[\because\frac{1}{\infty}=0\right]$

15. **Sol^n: (d);** $\lim\limits_{x\to0}=\frac{\ln a.a^x-\ln b.b^x}{1}=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ [L'Hôpital's]

16. **Sol^n: (c);** $x^2+y^2=25\Rightarrow2x+2y.\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

$\therefore(5,0)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=\frac{-5}{0}=\infty\therefore$ ঢাল $=\infty\therefore$ ঢাল $=\tan90^\circ=\infty$



17. **Sol^n: (b);** $x^\circ=\left(\frac{\pi x}{180}\right)^c\therefore\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{x}=\frac{\pi}{180}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{180}\times1$

18. **Sol^n: (d);** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right)^3$; $\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\right\}^3=\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)^3=1$

19. **Ans:** (b) 1

20. **Sol**

20. **Solⁿ:** (c); $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

21. **Solⁿ:** (c); $y_1 = 11(3x-2)^{10}3^1$; $y_2 = 11.10(3x-2)^9 3^2$
$y_3 = 11.10.9(3x-2)^8.3^3$; $y_{11} = (11)!\,(3x-2)^\circ\, 3^{11} = 3^{11}.(11)!$

22. **Solⁿ:** (c); $\frac{d}{dx}(x^2\, e^{2x} \ln 2x) = 2x\, e^{2x} \ln 2x + 2x^2\, e^{2x} \ln 2x + x\, e^{2x}$
$x = \frac{1}{2}$ হলে, $2.\frac{1}{2}.e \ln 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 e \ln 1 + \frac{1}{2}\, e = \frac{e}{2} [\because \ln 1 = 0]$

23. **Solⁿ:** (a); $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ (1+5x)^{\frac{3x+2}{x}} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ (1+5x)^{3+\frac{2}{x}}$
$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}(1+5x)^3 \times \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ (1+5x)^{\frac{2}{x}} = 1 \times \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \left[(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right]^{10} = e^{10}$

24. **Solⁿ:** (c); $y_n = (-1)^n\, n!\,(x+a)^{-(n+1)}$

25. **Solⁿ:** (a); $y = \sqrt{x}$ Or, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ or, $\tan 45° = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ or, $x = \frac{1}{4} \therefore y = \frac{1}{2}$

26. **Solⁿ:** (b); $y = (x^x)^x = x^{x^2} \Rightarrow \ln y = x^2 \ln x$
$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x \ln x + x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = yx\,(2\ln x + 1) \therefore \frac{dy}{dx} = x^{x^2}\, x\,(2\ln x + 1)$

27. **Solⁿ:** (c); x অক্ষের উপর লম্ব বলে ঢাল, $\frac{dy}{dx} = \tan 90° =$ অসংজ্ঞায়িত

28. **Ans:** (c) $e^y \frac{dy}{dx}$

29. **Solⁿ:** (d); $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x\,(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}.\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 1 \times \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

30. **Solⁿ:** (b); $y = \lambda x(1-x) \Rightarrow y = \lambda x - \lambda x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}$
$= \lambda - 2\lambda x$; এখন মূলবিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\tan 30° = \lambda - 2\lambda(0) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$

31. **Solⁿ:** (a); Formula: $y = \sin(ax+b)$ হলে, $y_n = a^n \sin\left(n\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$

32. **Solⁿ:** (a); $y = \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = -\cos 2x \therefore \frac{dy}{dx} = 2\sin 2x$

33. **Solⁿ:** (a); $x^2 + xy + y^2 = 2 \Rightarrow 2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ [x এর সাপেক্ষে differentiate করে]
$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x+2y) = -(2x+y) \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y} = -\frac{2.3-4}{3+2(-4)} = -\frac{2.3-4}{3+2(-4)} = \frac{2}{-(3-8)} = \frac{2}{5}$

34. **Solⁿ:** (d); $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln x}\right) = \frac{\ln x.\frac{d}{dx}1 - 1.\frac{d}{dx}\ln x}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$

35. **Solⁿ:** (b); $f(x) = x(12-2x)^2, f'(x) = 144 - 96x + 12x^2$
So, $12x^2 - 96x + 144 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$
$\Rightarrow x = 6{,}2, f''(x) = -96 + 24x$ for $x = 2$; $f''(x) < 0\ f(x) = 128$

36. **Ans:** (d) $\sin x$

37. **Solⁿ:** (a); x অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করলে ঢাল $= \tan 60° = \sqrt{3}$
আবার, $y = ax(1-x)$ এর মূলবিন্দুতে ঢাল $= \frac{dy}{dx} = a - 2ax = \sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}$ [∴ মূলবিন্দুতে $x = 0$]

38. **Solⁿ:** (c); $y = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \therefore 3\,(y^2-1)\frac{dy}{dx} = 3\left\{\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 1\right\}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right)$
$= \left(x^{\frac{2}{3}} + 1 + x^{-\frac{2}{3}}\right)\left(x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{4}{3}}\right) = 1 + x^{-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{4}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{4}{3}} - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

39. **Sol^n: (a);** $3x^2 - 7y^2 + 4xy - 8x = 0$

$\Rightarrow 6x - 14y\frac{dy}{dx} + 4x\frac{dy}{dx} + 4y - 8 = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(4x - 14y) = 8 - 4y - 6x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{8-4y-6x}{4x-14y}$ for $(-1,1)$

Point, $\frac{dy}{dx} = \frac{8-4+6}{-4-14} = -\frac{5}{9}$

বিকল্প: $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{6x+4y-8}{-14y+4x} \therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-1,1)} = -\frac{5}{9}$

এক্ষেত্রে function এর $f'(x)$ নির্ণয় করতে x ছাড়া ঐ function এর জন্য সকল চলককে ধ্রুবক বিবেচনা করা হয় এবং একইভাবে y এর ক্ষেত্রে $f'(y)$ নির্ণয় করা হয়।

40. **Sol^n: (c);** $x^n + y^n = a^n \Rightarrow nx^{n-1} + ny^{n-1}.\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{nx^{n-1}}{ny^{n-1}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$

41. **Ans:** (c) $\frac{[-\sin\log(x+a)]}{x+a}$

42. **Sol^n: (a);** $y = x^2 \ln x \Rightarrow y_1 = 2x\ln x + x \Rightarrow y_2 = 2\ln x + 2 + 1 = 2\ln x + 3 \therefore y_3 = \frac{2}{x}$

43. **Ans:** (b) 0

44. **Sol^n: (a);** $x^y = e^{x-y} \Rightarrow y\ln x = x - y \Rightarrow \frac{y}{x} + \frac{dy}{dx}\ln x = 1 - \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{y}{x}}{(1+\ln x)} = \frac{1-\frac{x}{x(1+\ln x)}}{(1+\ln x)} = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$

45. **Sol^n: (c);** $y = \ln(1+x), \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1}; \frac{d^2y}{dx^2} = -1(1+x)^{-1-1} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

46. **Sol^n: (b);** $\log(xy) = x + y \Rightarrow \log x + \log y = x + y$

$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{y}} = \frac{dy}{dx} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.\frac{x-1}{1-y}$

47. **Sol^n: (b);** $y = x^{\frac{1}{4}}; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

48. **Sol^n: (d);** $y = \ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{5}{2}}\right\} = x + \frac{5}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x + \frac{5}{2}\ln(x-1) - \frac{5}{2}\ln(x+1)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{5}{2(x-1)} - \frac{5}{2(x+1)} = \frac{2(x^2-1)+5(x+1-x+1)}{2(x^2-1)} = \frac{2x^2-2+10}{2(x^2-1)} = \frac{x^2+4}{x^2-1}$

49. **Sol^n: (a);** $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}e^{\ln x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}.x\right) = \frac{d}{dx}(1) = 0$

50. **Sol^n: (a);** $y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln x \Rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left(\cos\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$

51. **Sol^n: (c);** $x^2 = p$ হলে, $\frac{dy}{dp}(\sin\sqrt{p}) = \frac{\cos\sqrt{p}}{2\sqrt{p}} = \frac{\cos x}{2x}$

52. **Sol^n: (d);** $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{1-\cos x}\right) = \frac{(1-\cos x)\cos x-(1+\sin x)\sin x}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x-\cos^2 x-\sin x-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x-\sin x-1}{(1-\cos x)^2}$

53. **Sol^n: (c);** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}2x}{2x}.2 = 1\times 2 = 2$ or, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}(2x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}.2 = 2$ [L'Hôpital's]

54. **Sol^n: (a);** $y = x\ln x \Rightarrow y_1 = \ln x + 1 \Rightarrow xy_1 = x\ln x + x \therefore xy_1 = y + x$

55. **Sol^n: (b);** $y = \frac{x}{\ln x} \therefore y_1 = \frac{(\ln x)\times 1 - x\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}; y_1 = 0 \therefore \ln x = 1 \therefore x = e; y(e) = \frac{e}{\ln e} = e$

56. **Sol^n: (d);** L'Hôpital's rule প্রয়োগ করে, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x+8e^{-4x}+k}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-32e^{4x}+0}{2} = \frac{2-32}{2} = -15$

$\therefore$ limit টির value k- এর ওপর নির্ভর করে না।

57. **Sol^n: (b);** $y = \sin^2 2x + e^{\ln\cos^2 2x} = \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \therefore \frac{dy}{dx} = 0$

58. **Sol^n: (c);** $f(x) = x(2a-x) = 2ax - x^2; f'(x) = 2a - 2x = 0 \therefore x = a$

$f''(x) = -2 < 0 \therefore$ সর্বোচ্চ মান $= f(a) = a(2a-a) = a^2$

59. Sol^n: (a); $xy+x^2y^2-c=0\Rightarrow\frac{d}{dy}(xy)+2xy\frac{d}{dy}(xy)-0=0$

$\Rightarrow\left[\frac{d}{dy}(xy)\right][1+2xy]=0\Rightarrow x+y\frac{dx}{dy}=0\Rightarrow\frac{dx}{dy}=-\frac{x}{y}$

Alternative: $xy+x^2y^2-c=0\Rightarrow\frac{d}{dx}(xy+x^2y^2-c)=0\Rightarrow(x\,y_1+y)+\left(x^2 2yy_1+y^2(2x)\right)-0=0$

$\Rightarrow xy_1+y+2x^2yy_1+2xy^2=0\Rightarrow y_1(x+2x^2y)=-(y+2xy^2)\Rightarrow y_1=\frac{-y(1+2xy)}{x(1+2xy)}=\frac{-y}{x}$

$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=-\frac{x}{y}$

60. Sol^n: (c); $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x+3}{4x-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ [L'Hôpital's Rule]

Written

61. Sol^n: (i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^2+1}{6x^4+x^3-3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(6+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{6+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{2-0+0}{6+0-0}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ **(Ans.)**

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x\left(1-\frac{1}{3^{2x}}\right)}{3^x\left(1+\frac{1}{3^{2x}}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3^{2x}}}{1+\frac{1}{3^{2x}}}=\frac{1-0}{1+0}=\frac{1-0}{1+0}=1$ **(Ans.)**

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\ln(2x-1)-\ln(x+5)\}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{2x-1}{x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}}=\ln\frac{2-0}{1+0}=\ln 2$ **(Ans.)**

(iv) $\lim\limits_{x\to\alpha}\ 2^x\sin\frac{b}{2^x}$ ধরি, $\frac{b}{2^x}=\theta$. এখানে $x\to\infty$ বলে $2^x\to\infty$

$\therefore\theta=\frac{b}{2^x}\to 0\ \therefore\lim\limits_{x\to\infty}2^x\sin\frac{b}{2^x}=\lim\limits_{\theta\to0}\frac{b}{\theta}\sin\theta=b\lim\limits_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=b.1=b$ **(Ans.)**

(v) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{5}}-a^{\frac{3}{5}}}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\left(x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right)}{\lim\limits_{x\to a}\left(x^{\frac{3}{5}}-a^{\frac{3}{5}}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{\frac{3}{5}}-a^{\frac{3}{5}}}{x-a}}=\frac{\frac{5}{2}a^{\frac{5}{2}-1}}{\frac{3}{5}a^{\frac{3}{5}-1}}\left[\because\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}\right]$

$=\left(\frac{5}{2}\times\frac{5}{3}\right)a^{\frac{5}{2}-1-\frac{3}{5}+1}=\frac{25}{6}a^{\frac{5}{2}-\frac{3}{5}}=\frac{25}{5}a^{\frac{25-6}{10}}=\frac{25}{6}a^{\frac{19}{10}}$ **(Ans.)**

(vi) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{7x}{2}}{3.\frac{49x^2}{4}\frac{4}{49}}=\left(\frac{2}{3}\times\frac{49}{4}\right)\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{\sin\left(\frac{7x}{2}\right)}{\frac{7x}{2}}\right\}^2=\frac{49}{6}1=\frac{49}{6}$ **(Ans.)**

(vii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin\frac{1}{2}(ax+bx)\sin\frac{1}{2}(bx-ax)}{x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}}\times\frac{a+b}{2}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{(b-a)x}{2}}{\frac{(b-a)x}{2}}\times\frac{b-a}{2}$

$=2\times1\times\frac{a+b}{2}\times1\times\frac{b-a}{2}=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ **(Ans.)**

(viiii) $\lim\limits_{x\to y}\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=\lim\limits_{x\to y}\frac{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{x-y}$

$=2\lim\limits_{x\to y}\frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}}\times\frac{1}{2}\times\lim\limits_{x\to y}\cos\frac{x+y}{2}=2\times1\times\frac{1}{2}\cos\frac{y+y}{2}=\cos y$ **(Ans.)**

(ix) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\{\sec x(\sec x-\tan x)\}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

(x) $\lim\limits_{\theta\to0}\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\tan\theta}\right)=\lim\limits_{\theta\to0}\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\lim\limits_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta\sin\theta}=\lim\limits_{\theta\to0}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta.2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\lim\limits_{\theta\to0}\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to0}\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\frac{1}{2}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

(xi) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^{-1}(3x)}{4x}$ ধরি, $\sin^{-1}(3x)=\theta\Rightarrow\sin\theta=3x\ \because x\to0\ \therefore\theta\to0$

$\therefore\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^{-1}(3x)}{4x}=\lim\limits_{\theta\to0}\frac{\theta}{\frac{4}{3}\sin\theta}=\frac{3}{4}\lim\limits_{\theta\to0}\frac{\theta}{\sin\theta}=\frac{3}{4}\times1=\frac{3}{4}$ **(Ans.)**

(xii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left\{1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^3 x}{3!}x\ldots..\right\}-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^3 x}{3!}+\ldots\ldots}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x}{2!}+\frac{\sin^2 x}{3!}+\ldots\ldots\right)$

$=1+\frac{\sin 0}{2!}+\frac{\sin^2 0}{2!}+\ldots\ldots=1+0+0\ldots\ldots\ldots=1$ **(Ans.)**

62. **Sol^n:** (i) মনে করি, $y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{(\sqrt{x}-1)\frac{d}{dx}(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}+1)\frac{d}{dx}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2}$

$=\frac{(\sqrt{x}-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+0\right)-(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-0\right)}{(\sqrt{x}-1)^2}\left[\because\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}\therefore\frac{d}{dx}\left\{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right\}=\frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$ (Ans.)

(ii) মনে করি, $y=\frac{e^x+\ln x}{\log_a x}\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{(\log_a x)\frac{d}{dx}(e^x+\ln x)-(e^x+\ln x)\frac{d}{dx}(\log_a x)}{(\log_a x)^2}\Rightarrow\frac{d}{dx}\left\{\frac{e^x+\ln x}{\log_a x}\right\}=\frac{(\log_a x)\left(e^x+\frac{1}{x}\right)-(e^x+\ln x)\frac{1}{x}\log_a e}{(\log_a x)^2}$ (Ans.)

63. **Sol^n:** (i) মনে করি, $y=\cos\sqrt{x}=\cos z$; যেখন $z=\sqrt{x}$

$\therefore\frac{dy}{dz}=-\sin z=-\sin\sqrt{x}$ এবং $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ এখানে, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}=-\sin\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\therefore\frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x})=-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

বিকল্প পদ্ধতি-1: $\frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x})=\frac{d(\cos\sqrt{x})}{d(\sqrt{x})}.\frac{d(\sqrt{x})}{dx}=-\sin\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

বিকল্প পদ্ধতি-2: $\frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x})=-\sin\sqrt{x}.\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=-\sin\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

(ii) $\frac{d}{dx}\{\sin^2(\ln x)^2\}=2\sin(\ln x)^2.\frac{d}{dx}\{\sin(\ln x)^2\}\quad\left[\because\frac{d}{dx}(x^2)=2x\right]=2\sin(\ln x)^2\cos(\ln x)^2\frac{d}{dx}(\ln x)^2$

$\left[\because\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x\right]=\sin 2(\ln x)^2.2\ln x.\frac{d}{dx}(\ln x)$

$[\because 2\sin x\cos x=\sin 2x]=\sin 2\ (\ln x)^2.2\ln x.\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}\sin 2(\ln x)^2$

বিকল্প পদ্ধতি: $\frac{d}{dx}\{\sin^2(\ln x)^2\}$

$=\frac{d\{\sin^2(\ln x)^2\}}{d\{\sin(\ln x)^2\}}.\frac{d\{\sin(\ln x)^2\}}{d(\ln x)^2}.\frac{d(\ln x)^2}{d(\ln x)}.\frac{d(\ln x)}{dx}=2\sin(\ln x)^2\cos(\ln x)^2\,2\ln x.\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}\sin 2(\ln x)^2$

64. **Sol^n:** (i) মনে করি, $y=\tan^{-1}(e^x)\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+(e^x)^2}\frac{d}{dx}(e^x)=\frac{1}{1+e^{2x}}.e^x\therefore\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(e^x)\}=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, $y=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}$ এবং $x=\sin\theta$ তাহলে, $\theta=\sin^{-1}x$ এবং $y=\sin^{-1}\left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$

$=\sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta)=\sin^{-1}\sin 2\theta=2\theta=2\sin^{-1}x$

$\therefore\frac{dy}{dx}=2\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. সুতরাং, $\frac{d}{dx}\left\{\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)\right\}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ **(Ans.)**

65. **Sol^n:** (i) মনে করি, $y=x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$

$\therefore\frac{dy}{dx}=e^{x\ln x}\frac{d}{dx}(x\ln x)=x^x\left[x\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}(x)\right]=x^x\left[x\frac{1}{x}+\ln x.1\right]\therefore\frac{d}{dx}(x^x)=x^x(1+\ln x)$ **(Ans.)**

বিকল্প পদ্ধতি: $\frac{d}{dx}(x^x)=x^x\left[x\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}(x)\right]$

$\left[\because\frac{d}{dx}(u^v)=u^v\left\{v\frac{d}{dx}(\ln u)+\ln u\frac{dv}{dx}\right\}\right]=x^x\left[x.\frac{1}{x}+\ln x.1\right]=x^x(1+\ln x)$ **(Ans.)**

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x\sin x}{1+\cos x}\right)=\frac{x\sin x}{1+\cos x}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x)+\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x)-\frac{1}{1+\cos x}\frac{d}{dx}(1+\cos x)\right]$

$=\frac{x\sin x}{1+\cos x}\left[\frac{1}{x}.1+\frac{1}{\sin x}\cos x-\frac{1}{1+\cos x}(0-\sin x)\right]=\frac{x\sin x}{1+\cos x}\left[\frac{\sin x+\sin x\cos x+x\cos x+x\cos^2 x+x\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}\right]$

$=\frac{\sin x+\sin x\cos x+x\cos x+x}{(1+\cos x)^2}=\frac{\sin x(1+\cos x)+x(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{(1+\cos x)(\sin x+x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{\sin x+x}{1+\cos x}$ **(Ans.)**

বিকল্প পদ্ধতি: $\frac{x\sin x}{1+\cos x}=\frac{x2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=x\tan\frac{x}{2}$

$\therefore\frac{d}{dx}\left(\frac{x\sin x}{1+\cos x}\right)=\frac{d}{dx}\left(x\tan\frac{x}{2}\right)=x\frac{d}{dx}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\tan\frac{x}{2}\frac{d}{dx}(x)=x\sec^2\frac{x}{2}.\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)+\tan\frac{x}{2}.1$

$=\frac{1}{2}x\sec^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}$ **(Ans.)**

66. **Solⁿ:** প্রমাণ: এখানে, $y = (\cos^{-1} x)^2$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx} = 2\cos^{-1} x.\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} = -2\cos^{-1} x$

$\Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4(\cos^{-1} x)^2 \Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $(1-x^2).2\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2(-2x) = 4\frac{dy}{dx}$

উভয় পক্ষকে $2\frac{dy}{dx}$ দ্বারা ভাগ করে পাই, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$ **(Showed)**

67. **Solⁿ:** মনে করি, $y = \cos 3x \therefore y_1 = -3\sin 3x = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$

$y_2 = -3^2\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 3^2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 3x\right) = 3^2\cos\left(2.\frac{\pi}{2} + 3x\right)$

$y_3 = -3^3\sin\left(2.\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 3^3\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2.\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 3^3\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right)$

অনুরূপভাবে, $y_n = 3^n\cos\left(n\frac{\pi}{2} + 3x\right) \therefore D^n(\cos 3x) = 3^n\cos\left(n\frac{\pi}{2} + 3x\right)$ **(Ans.)**

68. **Solⁿ:** দেওয়া আছে, $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $3x^2 + x.2y\frac{dy}{dx} + y^2 - 6x + 4 + 5\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow (2xy+5)\frac{dy}{dx} = -3x^2 + 6x - y^2 - 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2-6x+y^2+4}{2xy+5}$

$(1,-1)$ বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = -\frac{3.1^2-6.1+(-1)^2+4}{2.1.(-1)+5} = -\frac{3-6+1+4}{-2+5} = -\frac{2}{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(1,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y + 1 = -\frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow 3y + 3 = -2x + 2$

$\Rightarrow 2x + 3y + 1 = 0$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y + 1 = -\left(-\frac{3}{2}\right)(x-1)$

$\Rightarrow 2y + 2 = 3x - 3 \Rightarrow 3x - 2y - 5 = 0$

69. **Solⁿ:** মনে করি, ট্রেনটি t সেকেন্ডে s মিটার অতিক্রম করে। $\therefore s = 3t + \frac{1}{8}t^2$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{ds}{dt} = 3 + \frac{1}{8}.2t = 3 + \frac{1}{4}t$

$\therefore$ t সেকেন্ড পর ট্রেনটির বেগ = $\left(3 + \frac{1}{4}t\right)$ মিটার/সেকেন্ড

$\therefore$ 5 মিনিট পর ট্রেনটির বেগ = $\left(3 + \frac{1}{4} \times 5 \times 60\right)$ মিটার/সেকেন্ড = 78 মিটার/সেকেন্ড **(Ans.)**

70. **Solⁿ:** দেওয়া আছে, $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20 \therefore f'(x) = 6x^2 - 42x + 36$ এবং $f''(x) = 12x - 42$

চরমবিন্দুর জন্য, $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 42x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x - x + 6 = 0 \Rightarrow x(x-6) - 1(x-6) = 0 \Rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Rightarrow x = 1, 6$

এখন, $f''(1) = 12 \times 1 - 42 = -30 < 0$

$\therefore x = 1$ বিন্দুতে f(x) এর সর্বোচ্চ মান আছে এবং ইহা $f(1) = 2 - 21 + 36 - 20 = 38 - 41 = -3$

আবার, $f''(6) = 12 \times 6 - 42 = 72 - 42 = 30 > 0$

$\therefore x = 6$ বিন্দুতে f(x) এর সর্বনিম্ন মান আছে এবং ইহা $f(6) = 2 \times 6^3 - 21 \times 6^2 + 36 \times 6 - 20$
$= 432 - 756 + 216 - 20 = 648 - 776 = -128$

71. **Solⁿ:** দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 3 \therefore f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 2) = 3\{(x-1)^2 + 1\}$, যা x এর কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না। $\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের কোনো সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নাই।

> “যে অন্তত অন্যের বোঝা বইতে জানে,
> সে নিজে বোঝা নয়! Charles Dickens”

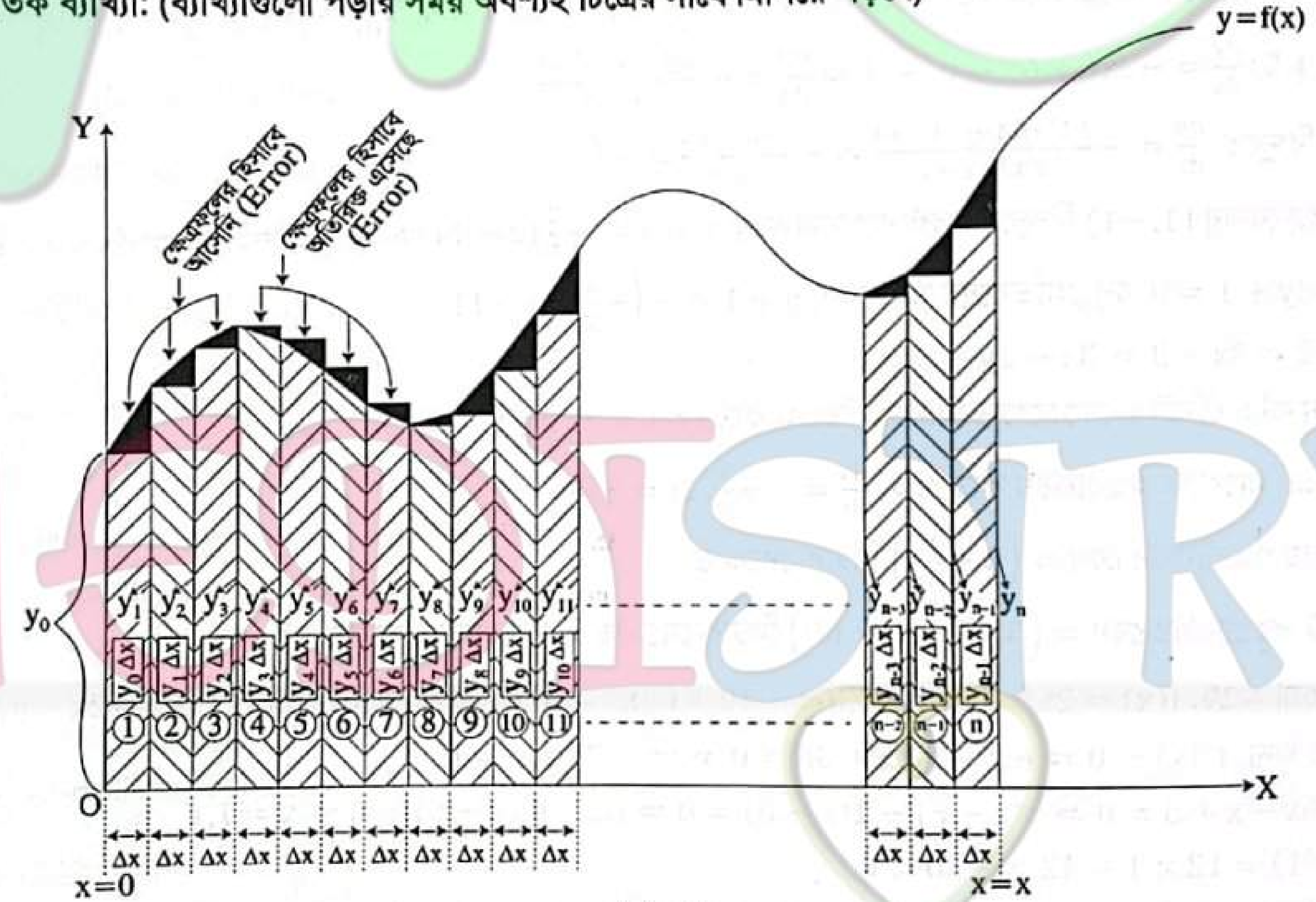
অধ্যায় ১০ যোগজীকরণ

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

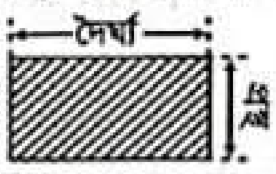
অনির্দিষ্ট যোগজ

➲ **যোগজীকরণের প্রাথমিক ধারণা (Primary Concept of Integration):** অন্তরীকরণে আমরা x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার নিয়ে আলোচনা করেছি। এক কথায়, অন্তরীকরণের মাধ্যমে আমরা কোন ফাংশনের যেকোন একটি বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় করি। যোগজীকরণের মাধ্যমে আমরা মূলত কোন ফাংশন বা লেখচিত্র বা দুইটি ফাংশনের মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করবো।

জ্যামিতিক ব্যাখ্যা: (ব্যাখ্যাগুলো পড়ার সময় অবশ্যই চিত্রের সাথে মিলিয়ে পড়বে)



(চিত্র-১)

মনে করি, $y = f(x)$ একটি ফাংশন যার লেখচিত্র (চিত্র-১) উপরে আঁকা হয়েছে। আমরা চাই, ফাংশনটি এবং x অক্ষ দ্বারা $x = 0$ হতে $x = x$ [x হলো চলক, যেকোন বিন্দু] এর মধ্যবর্তী আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে। এখন, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ  আমরা চাই এই সহজ সূত্রটি ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল বের করতে। কিন্তু, $y = f(x)$ ফাংশনটি বক্ররেখা বলে এই সূত্রটি ব্যবহার করা যাচ্ছে না। তাই প্রাথমিকভাবে আমরা $y = f(x)$ কে $x = 0$ হতে $x = x$ পর্যন্ত n সংখ্যক ভাগে ভাগ করছি। প্রতিটি ভাগের x এর দৈর্ঘ্য Δx.

এখন যদি আমরা $y_0\Delta x$ বের করি তাহলে আমরা (1) নং খণ্ডের ক্ষেত্রফল পাবো।

যদি $y_1\Delta x$ বের করি তাহলে (2) নং খণ্ডের ক্ষেত্রফল পাবো।

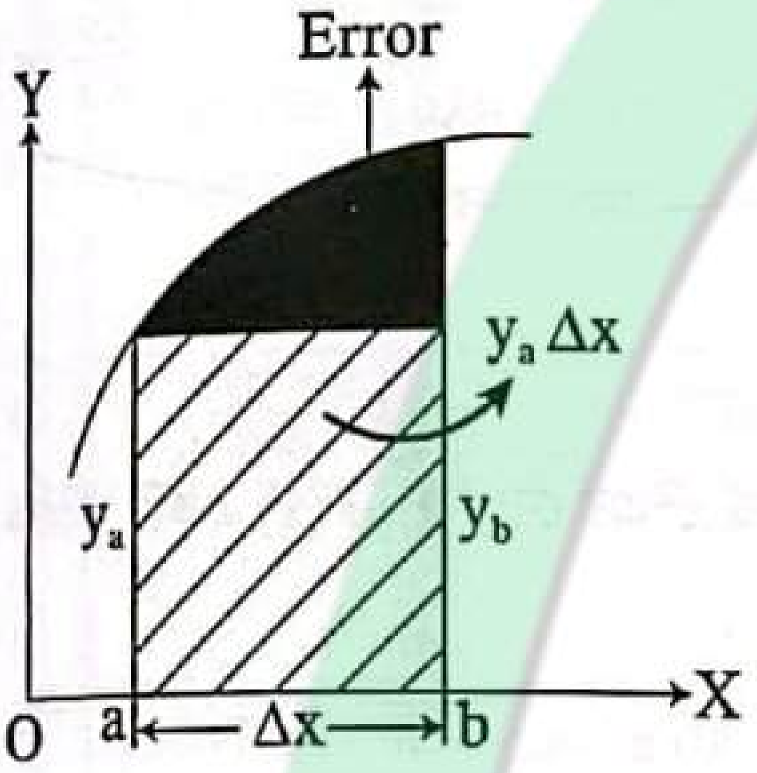
……………………………………………………………

এভাবে $y_{n-1}\Delta x$ বের করলে (n) নং খণ্ডের ক্ষেত্রফল পাওয়া যাবে।

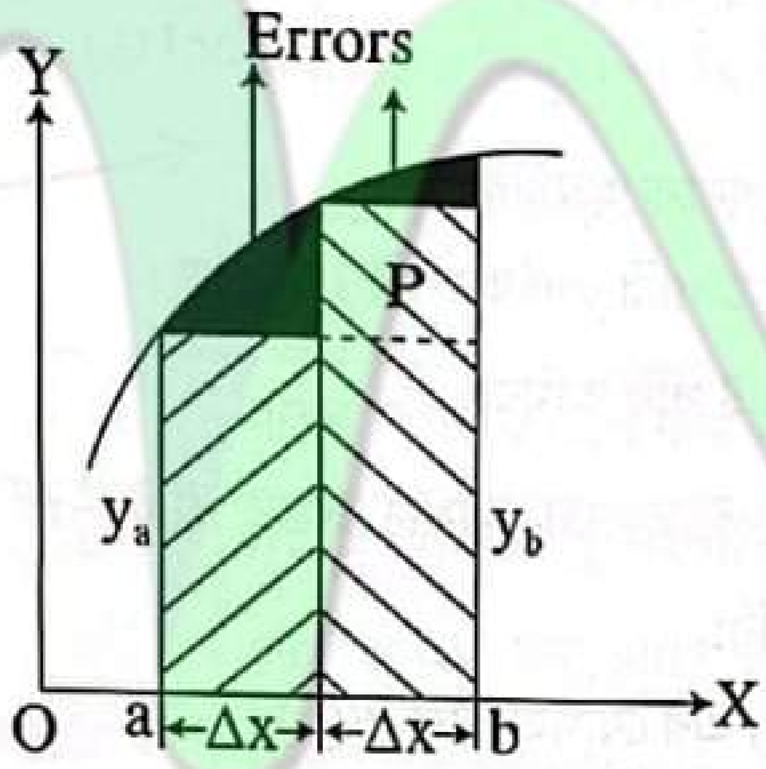
এই সবগুলো ক্ষেত্রফল যোগ করলে আমরা $y = f(x)$ এবং x-অক্ষের অন্তর্গত [$x = 0$ হতে $x = x$ পর্যন্ত] অংশের আনুমানিক ক্ষেত্রফল (Approximate Area) পাবো।

Approximate Area, $A' = y_0\Delta x + y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots\ldots\ldots + y_{n-1}\Delta x$ $\therefore \boxed{A' = \sum_{i=0}^{n-1} y_i\Delta x}$ ……… (i)

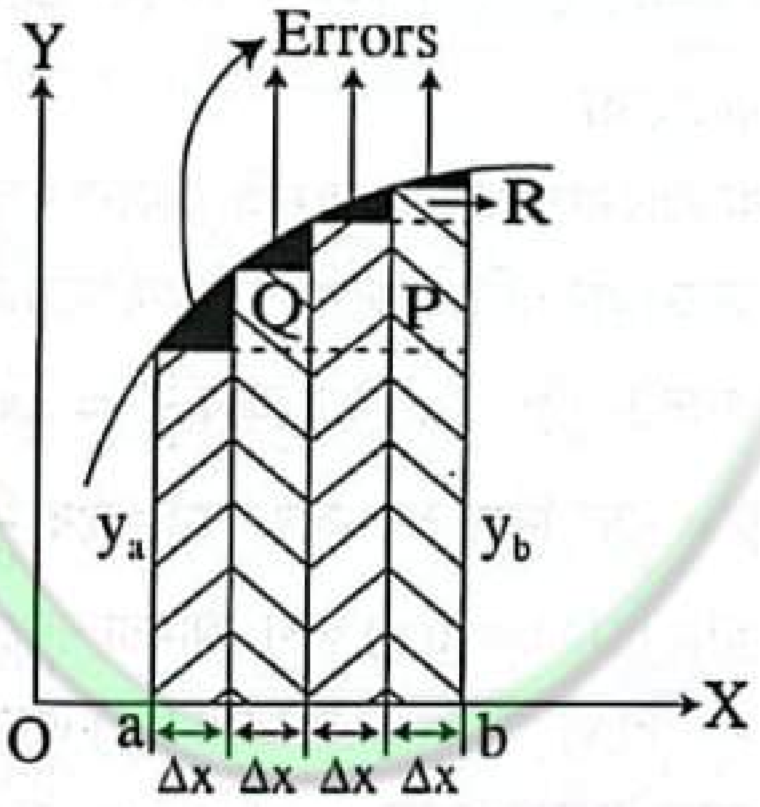
এটি আনুমানিক ক্ষেত্রফল। কারণ, আমরা ছবি থেকে দেখতে পাচ্ছি ক্ষেত্রফল হিসাবের ক্ষেত্রে কখনো আমরা অতিরিক্ত ক্ষেত্রফল হিসাব করে ফেলেছি (Error) আবার কখনো কিছু ক্ষেত্রফলের অংশ হিসাবে আনতে পারি নি (Error). তাহলে আমরা কিভাবে ঠিকভাবে ক্ষেত্রফল হিসাব করতে পারবো? নিচের চিত্র তিনটি লক্ষ করো।



চিত্র-২



চিত্র-৩



চিত্র-৪

চিত্র-২-এ: $x = a$ হতে $x = b$ পর্যন্ত অংশে আমরা $y_a\Delta x$ দ্বারা বের করেছি এবং মাত্র 1 ভাগে ভাগ করেছি। এক্ষেত্রে Error অনেক বেশি হয়েছে [যে অংশ আমরা হিসাবে আনতে পারিনি সেটা Error]

চিত্র-৩-এ: $x = a$ হতে $x = b$ পর্যন্ত অংশকে আমরা সমান দুইভাগে ভাগ করেছি। এক্ষেত্রে Δx পূর্বের অর্ধেক হয়েছে। কিন্তু আমরা 'P' অংশটি ক্ষেত্রফলে অন্তর্গত করতে পেরেছি। ফলে, Error পূর্বাপেক্ষা কমে গেছে।

চিত্র-৪-এ: $x = a$ হতে $x = b$ পর্যন্ত অংশকে আমরা সমান 4 ভাগে ভাগ করেছি। এক্ষেত্রে Δx প্রথমটির 4 ভাগের 1 ভাগ হয়েছে। কিন্তু আমরা 'P' এর পাশাপাশি 'Q' এবং 'R' অংশ ক্ষেত্রফলে অন্তর্গত করতে পেরেছি। ফলে, Error পূর্বাপেক্ষা কমে গেছে।

অর্থাৎ এটা থেকে বলা যাচ্ছে যত আমরা ভাগ সংখ্যা, n বাড়াবো, Δx ততো ছোট হবে এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের Error ততো কমে যাবে। যদি $n \to \infty$ হয় বা $\Delta x \to 0$ হয় তাহলে ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের Error → 0 হবে।

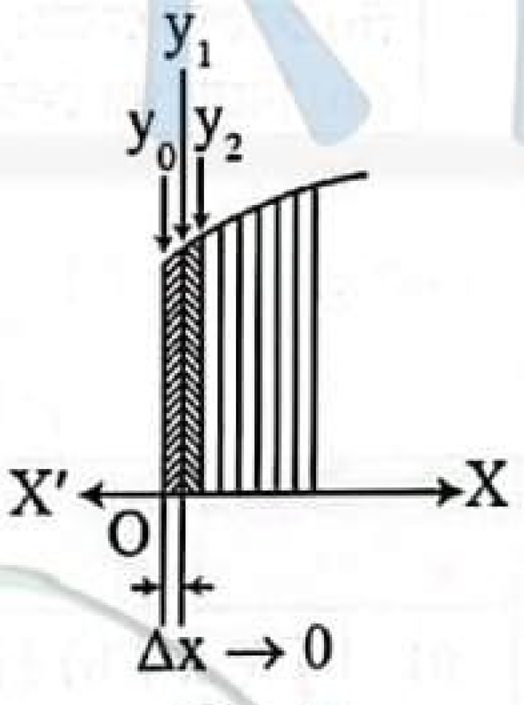
কারণ, এক্ষেত্রে y_0 এবং y_1 (অথবা, y_1 এবং y_2) [চিত্র-৫] এতটাই নিকটবর্তী হবে যে প্রতিটি খণ্ড একটি আয়তক্ষেত্রের ন্যায় আচরণ করবে এবং $y_i\Delta x$ দিয়ে প্রাপ্ত ক্ষেত্রফলে Error → 0 হবে।

তাহলে, (i) ⇒ Approximate Area, $A' = \sum_{i=0}^{n-1} y_i\Delta x$

এখন, যদি $\Delta x \to 0$ হয় (বা $n \to \infty$ হয়) তাহলে যে ক্ষেত্রফল পাওয়া যাবে তাহলো, সঠিক ক্ষেত্রফল

$$\therefore \text{Exact Area, } A = \lim_{(\Delta x, n)\to(0,\infty)} A' = \lim_{(\Delta x, n)\to(0,\infty)} \sum_{i=0}^{n-1} y_i\Delta x \quad \therefore \boxed{\begin{array}{c} A = \int y\,dx \\ A = \int f(x)\,dx \end{array}}$$

$$\Bigg[\begin{array}{ll} \sum \text{ রূপান্তরিত হয়ে} & \int (\text{লম্বা (Elongated) S}) \\ \Delta x \text{ রূপান্তরিত হয়ে} & dx \end{array}\Bigg\} \text{ এ পরিণত হয়, যখন } \Delta x \to 0 \text{ এবং } n \to \infty \Bigg]$$



(চিত্র-৫)

জেনে রাখো

$\sum_{i=0}^{n-1} y_i\Delta x$ এর y গুলো হলো বিচ্ছিন্ন (Discrete). কিন্তু, $\int y dx$ এর ক্ষেত্রে $\Delta x \to 0$ বা $n \to \infty$ হওয়ায় y গুলো পরস্পরের এতটাই নিকটবর্তী যে এরা অবিচ্ছিন্ন (Continuous) হয়ে যায়। $\int f(x)\,dx$ কে পড়া হয় এভাবে- "x এর সাপেক্ষে f(x) এর অনির্দিষ্ট যোগজ"। এখানে, ∫ প্রতীকটি লম্বা (Elongated) S বোঝায়, যা Summation শব্দটির প্রথম অক্ষর । dx দ্বারা x এর সাপেক্ষে (with respect to x) অর্থাৎ x পরিবর্তনশীল বোঝায়। f(x) কে বলা হয় যোজ্য রাশি (Integrand).

অর্থাৎ, যোগজীকরণ করে কোন ফাংশন এবং x অক্ষের অন্তর্গত [$x = 0$ হতে $x = x$ পর্যন্ত] অংশের Exact ক্ষেত্রফল বের করা যায়।

➲ প্রতিঅন্তরক হিসেবে যোগজীকরণ (Integration as Anti-Derivative):

ক্যালকুলাসের অনেক সমস্যায় আমরা একটি চলকের সাপেক্ষে অপর চলকের পরিবর্তনের হার জানি, কিন্তু এই চলকদ্বয়কে সম্পর্কযুক্ত করার কোনো সূত্র আমাদের জানা নেই। অন্যভাবে বলা যায়, আমরা সাধারণত x এর মাধ্যমে $\frac{dy}{dx}$ এর মান জানি, কিন্তু x এর মাধ্যমে y এর মান জানতে চাই। অর্থাৎ, $\frac{dy}{dx}$ হতে y (অথবা $f'(x)$ হতে $f(x)$) এর মান নির্ণয় করতে চাই। এই নির্ণয় করার প্রক্রিয়াটি হলো অন্তরীকরণের বিপরীত প্রক্রিয়া, যাকে বলা হয় যোগজীকরণ। পরের সমস্যাটি দেখঃ যদি $\frac{dy}{dx} = x^2$ হয়, তবে x এর মাধ্যমে y এর মান কত হবে?

$$\begin{tikzcd} y \text{ or } f(x) \arrow[r, bend left, "\text{অন্তরীকরণ}"] & \frac{dy}{dx} \text{ or } f'(x) \arrow[l, bend left, "\text{যোগজীকরণ}"] \end{tikzcd}$$

অন্তরীকরণে আমরা জেনেছি, কোনো ঘাত ফাংশনকে অন্তরীকরণ করলে এর শক্তি 1 কমে। অতএব, আমরা বলতে পারি y এ অবশ্যই x^3 আছে।

এখন যদি $y = x^3$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = 3x^2$। তাই যদি আমরা $y = \frac{1}{3}x^3$ দিয়ে শুরু করি তবে পাবো $\frac{dy}{dx} = x^2$. তাহলে, আমরা বলতে পারি $\frac{1}{3}x^3$ হচ্ছে x^2এর যোগজ। F(x) একটি ফাংশন এবং $F'(x) = f(x)$ হলে, আমরা বলতে পারি:

➢ F(x) এর অন্তরজ হলো f(x) এবং f(x) এর যোগজ হলো F(x)।

➲ যোগজীকরণ ধ্রুবক, c: (Integral Constant, c):

কোনো ফাংশনের অনির্দিষ্ট যোগজ অনন্য নয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়ঃ $x^2, x^2 + 3$ এবং $x^2 - 5$ প্রতিটি ফাংশন $f(x) = 2x$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ [কারণ, x^2, $x^2 + 3$ এবং $x^2 - 5$ সকল ফাংশনগুলোরই অন্তরজ 2x] অথচ একেকটি ক্ষেত্রে একেকটি ধ্রুবক আছে। এ কারণেই অনির্দিষ্ট যোগজে একটি ধ্রুবক (c) ব্যবহৃত হয়ে থাকে। যেহেতু এ যোগজ দিয়ে সুনির্দিষ্টভাবে ফাংশনটি পাওয়া যায় না, তাই এ যোগজকে "অনির্দিষ্ট যোগজ" বলা হয়। গাণিতিকভাবে অনির্দিষ্ট যোগজকে $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ সংকেত দ্বারা প্রকাশ করা হয়। F(x) কে x এর সাপেক্ষে f(x) এর অনির্দিষ্ট যোগজ এবং c কে যোগজীকরণে ধ্রুবক (Integral Constant) বলা হয়।

➲ যোগজের কিছু ধর্ম (Some Properties of Integration):

(i) কোনো ধ্রুবক দিয়ে গুণনের ক্ষেত্রে: $\int m\, f(x)dx = m \int f(x)\,dx$ (ii) যোগের ক্ষেত্রে: $\int\{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ (iii) বিয়োগের ক্ষেত্রে: $\int\{f(x) - g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)dx$	F(x) যদি f(x) এর anti-derivative হয় তবে $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

টাইপ নং	টাইপের আকৃতি	যা করতে হবে
01	$\int f(ax + b)\,dx$ আকৃতির	$ax + b = z$ ধরতে হবে [সেক্ষেত্রে, $dx = \frac{dz}{a}$ হবে]
02	যোগজীকরণে প্রতিস্থাপন পদ্ধতির ব্যবহার	প্রয়োজন অনুসারে কোনো রাশিকে z ধরে যোগজীকরণ করতে হবে।
03	সাধারণ সূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত	যোজ্য রাশিকে Integration এর যোগ্য রাশিতে পরিণত করতে হবে। ত্রিকোণমিতিক অনুপাত থাকলে সব অনুপাতকে Simplify করে Integration যোগ্য করে নিতে হবে।
04	$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx$ আকার সংক্রান্ত	$cx + d = z$ ধরতে হবে।
05	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}}$ আকারের	হরের অনুবন্ধী রাশি দ্বারা লব ও হরকে গুণ করতে হবে।

টাইপ নং	টাইপের আকৃতি	যা করতে হবে
06	$\int a^{a^{a^{a^x}}} a^{a^{a^x}} a^{a^x} a^x\ dx$ (a^x এবং e^x সম্পর্কিত)	সবচেয়ে বড় a এর ঘাতকে z ধরতে হবে। বা $a^{a^{a^x}} = z$ ধরতে হবে।
07	$\int \sin px \sin qx\, dx, \int \sin px\ \cos qx\, dx,$ $\int \cos px\ \cos qx\, dx$ আকারের	$2\sin A \sin B, 2\sin A \cos B, 2\cos A \cos B$ এর সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে।
08	$\int \sin^2(Ax+b)\, dx, \int \cos^2(ax+b) dx$ আকারের	দ্বিঘাত $\sin^2 x$ ও $\cos^2 x$ কে একঘাত বানানোর জন্য, $\left.\begin{matrix} 2\cos^2 A = 1+\cos 2A \\ 2\sin^2 A = 1-\cos 2A \end{matrix}\right\}$ সূত্রদ্বয় ব্যবহার করতে হবে।
09	$\int \frac{dx}{1 \pm \sin ax}, \int \frac{dx}{1 \pm \cos ax}$ আকারের	হরের বিপরীত রাশি দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে সরলীকরণ করতে হবে।
10	$\int \sin^m x dx$ বা, $\int \cos^m x\, dx$ আকারের	**(i) m বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হলে:** $\sin^m x$ এর জন্য, $\sin^m x = (\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}}.\sin x$ লিখে, ধরি, $\cos x = z$ $\cos^m x$ এর জন্য$\cos^m x = (\cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}}.\cos x$ লিখে, ধরি, $\sin x = z$ **(ii) m জোড় পূর্ণসংখ্যা হলে:** $2\sin^2 x / 2\cos^2 x$ আকারে লিখে এদের সূত্র ব্যবহার করতে হবে।
11	$\int \sin^m x.\cos^n x\, dx$ আকারের	**Case-1: m ও n উভয়ই বিজোড় হলে:** sin x / cos x এর যার ঘাত বড় তাকে z ধরতে হবে। **Case-2: m ও n এর যে কোন একটি জোড় এবং অপরটি বিজোড়:** যার power জোড় সেটা = z ধরতে হবে। **Case-3: m ও n** উভয়ই উভয় জোড়: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ এবং $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ এর সূত্র ব্যবহার করতে হবে।
12	$\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)} dx, \int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$ আকৃতির	(i) $\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)} dx$ -এ $\sin x = \sin\{(x-a)+a\}$ লিখে $\sin(A+B)$ সূত্র প্রয়োগ করতে হবে (ii) $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)} = \frac{1}{\sin(b-a)} \int \frac{\sin\{(x-a)-(x-b)\}}{\sin(x-a)\sin(x-b)} dx$ আকারে লিখে লবে $\sin(A-B)$ এর সূত্র apply করতে হবে।
13	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ এবং $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx$ আকৃতির	(i) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\|f(x)\| + c$ (ii) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$
14	$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$ $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$ আকারের	ax^2+bx+c কে দুটি বর্গের সমষ্টি বা অন্তররূপে প্রকাশ করে, $\int \frac{dx}{x^2-a^2}, \int \frac{dx}{x^2+a^2}, \int \frac{dx}{a^2-x^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx, \int \sqrt{a^2-x^2}, \int \sqrt{a^2+x^2}\, dx$ ব্যবহার করতে হবে।
15	$\int \frac{ex+f}{ax^2+bx+c} dx$ আকারের	$ex+f = m\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+n$ আকারে লিখতে হবে।
16	$\int \frac{(px+q)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ বা, $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$ আকারের	$px+q = m\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+n$ আকারে লিখতে হবে।
17	$\int \frac{ex^2+gx+f}{ax^2+bx+c} dx$ আকারের	লবকে $A(ax^2+bx+c) + B\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) + C$

টাইপ নং	টাইপের আকৃতি	যা করতে হবে
		আকারে লিখতে হবে।
18	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}$	**P-01:** $\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}=z$ **P-02:** $x-\alpha=z^2$ ধরতে হবে।
19	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ $(\alpha<\beta)$	$x-\alpha=z^2$ ধরতে হবে। যখন $\alpha<\beta$
20	$\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$ আকৃতির	লব ও হরকে লব দ্বারা গুণ করে লবকে $\sqrt{}$ মুক্ত করতে হবে।
21	$\int \frac{dx}{a+be^{mx}}, \int \frac{dx}{a+be^{-mx}}, \int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$ আকারের	$\int \frac{dx}{a+be^{mx}}$: লব ও হরকে e^{-mx} দিয়ে গুণ করে ধরি, $e^{-mx}=z$ $\int \frac{dx}{a+be^{-mx}}$: লব ও হরকে e^{mx} দিয়ে গুণ করে ধরি, $e^{mx}=z$ $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$: লব ও হরকে e^{mx} (অথবা e^{-mx}) দিয়ে গুণ করে ধরি, $e^{mx}=z$ (অথবা $e^{-mx}=z$)
22	$\int \frac{dx}{a+b\sin^2 x}, \int \frac{dx}{a+b\cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}, \int \frac{dx}{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}$ আকারের	লব ও হরকে $\sec^2 x$ দ্বারা গুণ করে হরকে $\tan x$ এর ফাংশন আকারে প্রকাশ করতে হবে এবং $\tan x = z$ ধরতে হবে।
23	$\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$; $\int (ax+b)\sqrt{cx+d}\,dx; \int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}dx$ আকারের	$\sqrt{\ }$ ' এর ভিতরের রাশিকে z^2 ধরে নিতে হবে ($cx+d=z^2$ ধরতে হবে) এবং সমগ্র Integral কে z এর মাধ্যমে প্রকাশ করে নিতে হবে।
24	Integration by Parts (অংশক্রমে সমাকলন)	$\int uv dx = u\int v dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(u)\int v dx\right\}dx$ u, v এর ক্রমঃ L I A T E → Logarithmic Function ($\log_a x$, ln x etc.) → Inverse Trigonometric Function ($\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ etc.) → Arithmetic/Algebraic Function (x^2, x^3 etc.) → Trigonometric Function (sin x, tan x etc.) → Exponential Function (e^x, a^x etc.)
25	$\int e^{ax}\sin(bx+c)\,dx$, $\int e^{ax}\cos(bx+c)\,dx$ আকৃতি	ধরি, $\sin(bx+c)$ বা $\cos(bx+c)$ কে 'u' এবং e^{ax} কে 'v' ধরে অংশায়ন সূত্রের সাহায্যে যোগজীকরণ করতে হবে।
26	$\int e^{ax}\{a\,f(x)+f'(x)\}\,dx$ সংক্রান্ত	(i) $\int e^{ax}\{af(x)+f'(x)\}dx = e^{ax}f(x)+c$ (ii) $\int e^{x}\{f(x)+f'(x)\}dx = e^{x}f(x)+c$
27	আংশিক ভগ্নাংশ সংক্রান্ত	**Thumb rule** ব্যবহার করতে হবে।
28	নির্দিষ্ট যোগজের সাধারণ সমস্যা	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ যেখানে, $\int f(x)\,dx = F(x)+c$
29	$\int_0^a f(x) = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ধর্মের ব্যবহার	$\int_0^a f(x) = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ধর্ম ব্যবহার করতে হবে।
30	$\int_a^b f(x) = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ ধর্মের ব্যবহার	$\int_a^b f(x) = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ ধর্ম ব্যবহার করতে হবে।
31	যুগ্ম ও অযুগ্ম ফাংশনের ক্ষেত্রে	$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ $= \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)\,dx \text{; যখন } f(x) \text{ যুগ্ম ফাংশন } [f(-x)=f(x)] \\ 0\text{; যখন } f(x) \text{ অযুগ্ম ফাংশন } [f(-x)=-f(x)] \end{cases}$

টাইপ নং	টাইপের আকৃতি	যা করতে হবে
32	Graph Shifting সম্পর্কিত	$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)dx$
33	$\int_a^b f(x)dx$ এর মান দেওয়া থাকলে $\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(cx+d)dx$ এর মান নির্ণয়	ধরি, $cx + d = z$ **Shortcut:** উত্তর হবে $\frac{I}{x \text{ এর সহগ}}$ [যেখানে, $\int_a^b f(x)\,dx = I$ (প্রদত্ত যোগজ)]
34	কয়েকটি পরমমান ফাংশনের সমাকলন	x এর যেসব মানের জন্য পরমমান ফাংশনের মান 0 আসে সেসব মানে গিয়ে যোগজীকরণকে আলাদা করে দিতে হবে
35	নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত	$A = \int_a^b (y_u - y_l)dx$ [x অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে] $A = \int_a^b (x_u - x_l)dy$ [y অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে]

- $\int \{f(x)\}^n \cdot f'(x)dx = \frac{\{f(x)\}^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int f'(g(x)) \cdot g'(x)dx = f(g(x)) + c$ যেমন: $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$
  $\int \cos(\tan x) \cdot \sec^2 x\,dx = \sin(\tan x) + c$
- $\int_a^b f(px+q)\,dx = l$ হলে, $\int_{\frac{ap+q-d}{c}}^{\frac{bp+q-d}{c}} f(cx+d)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

❖ **Shortcut:** উত্তর হলো: $\frac{l}{c} \times p$

Type-01: $\int f(ax+b)\,dx$ আকৃতির

Concept

$ax + b = z$ ধরতে হবে [সেক্ষেত্রে, $dx = \frac{dz}{a}$ হবে]

যোগজীকরণের ক্ষেত্রে প্রয়োজন অনুসারে সূত্র প্রয়োগ দ্বারা সমাধান করতে হবে, এক্ষেত্রে সূত্রের চর্চা, অনুশীলন ভালভাবে আয়ত্ত থাকতে। রাখতে হবে।

Shortcut

$$\int f(ax+b)dx = \frac{(ax+b) \text{ এর সাপেক্ষে } f(ax+b) \text{ এর যোগজীকরণ}}{x \text{ এর সহগ}} = \frac{(ax+b) \text{ এর সাপেক্ষে } f(ax+b) \text{ এর যোগজীকরণ}}{a}$$

সতর্কতা!

শুধুমাত্র $ax + b$ থাকলেই (বা, x এর ঘাত 1 হলেই) এই Shortcut ব্যবহার করে যোগজীকরণ করা যাবে।

Problems

Example-01: $\int \cos(2x-3)dx$ এর মান কত?

Solⁿ: $\int \cos(2x-3)dx = \int \cos z \frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\int \cos z\ dz$ [ধরি, $2x - 3 = z \Rightarrow 2dx = dz \Rightarrow dx = \frac{dz}{2}$]

$= \frac{1}{2}\sin z + c = \frac{\sin(2x-3)}{2} + c$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\int \cos(2x-3)dx = \frac{(2x-3) \text{ এর সাপেক্ষে } \cos(2x-3) \text{ এর যোগজীকরণ}}{x \text{ এর সহগ}} + c = \frac{\sin(2x-3)}{2} + c$

Example-02: $\int \cos\frac{x}{2}dx = ?$ **[CU'20-21]**

Solⁿ: $\int \cos\frac{x}{2}dx = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sin\frac{x}{2}$ **(Ans.)**

Example-03: $\int \sin(5x+3)dx$ এর মান কত?

Sol

Sol^n: ধরি $I = \int \sin(5x+3)dx$ | ধরি, $5x+3 = z$ বা, $5dx = dz$ বা, $dx = \frac{1}{5}dz$

$\therefore I = \frac{1}{5}\int \sin z\, dz = -\frac{1}{5}\cos z + c = -\frac{1}{5}\cos(5x+3) + c$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\int \sin(5x+3)dx = \frac{(5x+3)\text{ এর সাপেক্ষে }\sin(5x+3)\text{ এর যোগজীকরণ}}{x\text{ এর সহগ}} + c = \frac{-\cos(5x+3)}{5} + c = -\frac{1}{5}\cos(5x+3) + c.$

Example-04: $\int (9x+6)^5\, dx$ এর মান কত?

Sol^n: $\int (9x+6)^5 dx = \int z^5.\frac{dz}{9} = \frac{z^{5+1}}{(5+1).9} + c = \frac{(9x+6)^6}{54} + c$ | ধরি, $9x+6 = z \Rightarrow 9dx = dz \therefore dx = \frac{dz}{9}$

❖ **Shortcut:** $\int (9x+6)^5 dx = \frac{(9x+6)\text{ এর সাপেক্ষে }(9x+6)^5\text{ এর যোগজীকরণ}}{x\text{ এর সহগ}} = \frac{(9x+6)^{5+1}}{(5+1).9} + c = \frac{(9x+6)^6}{54} + c$ **(Ans.)**

Example-05: $\int \sec^2\frac{5}{2}x dx$ এর মান কোনটি? [JU'19-20]

Sol^n: ধরি, $\frac{5}{2}x = z \Rightarrow x = \frac{2}{5}z \Rightarrow dx = \frac{2}{5}dz ; \int \sec^2\frac{5}{2}x\, dx = \frac{2}{5}\int \sec^2 z\ dz = \frac{2}{5}\tan z + c = \frac{2}{5}\tan\frac{5}{2}x + c$

❖ **Shortcut:** $\int \sec^2\frac{5}{2}x\, dx = \frac{\frac{5}{2}x\text{ এর সাপেক্ষে }\sec^2\frac{5}{2}x\text{ এর যোগজীকরণ}}{x\text{ এর সহগ}} = \frac{\tan\frac{5}{2}x}{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5}\tan\frac{5}{2}x + c$ **(Ans.)**

Example-06: $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{(1-2x)}\, dx$ এর মান কত? [RU'19-20]

Sol^n: $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-2x}\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-2x}\, d(1-2x) = -\frac{1}{2}\left[e^{1-2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left[e^0 - e^1\right] = \frac{e-1}{2}$

❖ **Shortcut:** $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-2x}\, dx = \left[\frac{(1-2x)\text{ এর সাপেক্ষে }e^{1-2x}\text{ এর যোগজীকরণ}}{x\text{ এর সহগ}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{e^{1-2x}}{-2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left[e^0 - e^1\right] = \frac{e-1}{2}$

Example-07: $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}$ এর মান নির্ণয় কর। [RU'20-21]

Sol^n: $z = 4x+1 \Rightarrow dz = 4dx \Rightarrow \frac{dz}{4} = dx ; x = 0, z = 1 ; x = 2, z = 9$

$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x+1}} = \frac{1}{4}\int_1^9 \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{z}\right]_1^9 = \frac{1}{2}(\sqrt{9} - \sqrt{1}) = \frac{1}{2}(3-1) = 1$ **(Ans.)**

Example-08: $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-9x}} dx = ?$ [JU' 12-13]

Sol^n: $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-9x}} dx = \int (1-9x)^{\frac{-1}{3}}\, dx = \frac{(1-9x)^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1} \times \left(\frac{-1}{9}\right) = -\frac{1}{6}(1-9x)^{\frac{2}{3}}$ **(Ans.)**

Example-09: $\int \frac{(e^x+1)^2}{\sqrt{e^x}} = ?$

Sol^n: $\int \frac{(e^x+1)^2}{\sqrt{e^x}} = \int (e^{2x} + 2e^x + 1).e^{\frac{-x}{2}} dx = \int (e^{\frac{3x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{-x}{2}})dx = \frac{2}{3}e^{\frac{3x}{2}} + 4e^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{-x}{2}} + c$ **(Ans.)**

Example-10: $\int \frac{e^{3x}+e^{5x}}{e^x+e^{-x}} dx = ?$

Sol^n: $\int \frac{e^{3x}+e^{5x}}{e^x+e^{-x}} dx = \int \frac{e^{4x}(e^{-x}+e^x)}{(e^x+e^{-x})} dx = \int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x} + c$ **(Ans.)**

Example-11: $\int \tan 2x \sec 2x\, dx = ?$

Sol^n: Let, $2x = t ; 2dx = dt ; \int \tan 2x \sec 2x dx = \frac{1}{2}\int \tan t \sec t\, dt = \frac{1}{2}\sec t + c = \frac{1}{2}\sec(2x) + c$ **(Ans.)**

বিকল্প: $\int \tan 2x \sec 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \tan 2x \sec 2x d(2x) = \frac{1}{2}\sec(2x) + c$ **(Ans.)**

Example-12: $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{(1+\cos x)^2} = ?$

Sol^n: $\int \frac{\sin^2 x dx}{(1+\cos x)^2} = \int \frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2} dx = \int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx = \int \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}$

$= \int \tan^2\frac{x}{2} dx = \int (\sec^2\frac{x}{2} - 1)dx = \frac{1}{2} = \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} - x + c = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - x + c$

Example-13: $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = ?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \text{cosec}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\tan\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + c\left[\because \int \text{cosec}\, x dx = \ln\tan\left(\frac{1}{2}x\right) + c\right]$

Example-14: $\int \sqrt{(1+\sin x)}dx = ?$

Sol^n^: $\int \sqrt{(1+\sin x)}\,dx = \int \sqrt{\left\{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right\}}\,dx = \int \sqrt{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\,dx \left[\therefore 1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$

$= \sqrt{2}\int \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)dx = -\sqrt{2}.2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+c = -2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}\right)+c$

$= -2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2}\right)+c = -2\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+c = 2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+c$

বিকল্প: $\int \sqrt{1+\sin x}\,dx = \int \sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \int (\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})dx$

$= \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + c = 2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+c$

Type-02: যোগজীকরণে প্রতিস্থাপন পদ্ধতির ব্যবহার

Concept

যোগজীকরণের ক্ষেত্রে প্রয়োজন অনুসারে কোনো রাশিকে z ধরে (বা z দ্বারা প্রতিস্থাপন করে) যোগজীকরণ করতে হয়। যেমন: $\int e^{x^2} x\,dx$ এর ক্ষেত্রে, $x^2 = z$ ধরলে, $2x\,dx = dz \therefore x\,dx = \frac{dz}{2}$ হয়। মানগুলো যোগজটিতে বসিয়ে দিলে $\int e^{x^2} x\,dx = \int e^z \frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\int e^z\,dz = \frac{e^z}{2}+c = \frac{e^{x^2}}{2}+c\ [\because z = x^2]$ এভাবে যোগজীকরণ করতে হবে। এক্ষেত্রে কাকে z ধরতে হবে তার সুনির্দিষ্ট কোনো নিয়ম নেই। চর্চা/অনুশীলন করে বুঝতে হবে কাকে z ধরলে সুবিধা হবে।

আমরা জানি, $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$ তাই, $\int \underbrace{f'(g(x))\cdot g'\ (x)}\,dx = f(g(x))$ এই অংশে $f'(g(x))$ এখানে input

$g(x)$ যার অন্তরীকরণ করে $f'(g(x))$ এর সাথে গুণ আকারে থাকলে তখন কেবল f' হতে f বের করে তার input হবে $g(x)$

$\therefore$ Ans হবে $f(g(x))$

একত্রে $g(x)$ কে z ধরতে হবে যদি প্রতিস্থাপন করতে চাও। যেমন: $\int x^9\cdot e^{x^{10}}dx = ?$

ভাল করে খেয়াল করো $\int e^{(x^{10})}\cdot x^9dx$ এভাবে সাজিয়ে লিখলে বুঝতে সুবিধা হয়। যে input বা $g(x)$ হলো x^{10} যার অন্তরীকরণ করে পাওয়া যায় $10\cdot x^9$ যা গুণ করা আছে কেবল 10 সহগ হিসেবে নাই। আমরা খুব সহজে 10 দিয়ে গুণ ও ভাগ দিয়ে ব্যালেন্স রাখতে পারি। যেমন, $\int e^{(x^{10})}\cdot x^9dx = \frac{1}{10}\int e^{(x^{10})}\cdot 10\,x^9dx$

এখন কিন্তু বুঝা যাচ্ছে $f'(g(x))$ হচ্ছে $e^{(x^{10})}$ যেখানে $g(x) = x^{10}$ এবং $f'(g(x))$ এর সাথে $g'(x)$ বা $10x^9$ গুণ করা আছে।

$\therefore \int f'(g(x))\cdot g'(x)dx = f(g(x))$

অর্থাৎ, আমরা মূলত $e^{(x^{10})}$ কে e^z বিবেচনা করে যোগজীকরণ করব z এর সাপেক্ষে। অর্থাৎ, $g(x)$ কে z ধরতে হবে।

$\int e^{(z)}\cdot dz = e^z \therefore \int e^{(x^{10})}\cdot 10x^9dx$ এখানে x^{10} কে z ধরলে উত্তর হবে $= e^z$ বা $e^{x^{10}}$ $\therefore \frac{1}{10}\int e^{(x^{10})}\,10x^9 = \frac{1}{10}e^{x10}+c$

এভাবে চিন্তা করতে পারো।

Problems

Example-15: $\int x^9e^{x^{10}}dx = ?$ **[RU'20-21, JU'19-20]**

Sol^n^: ধরি, $x^{10} = z \therefore 10\,x^9dx = dz\,;\ x^9dx = \frac{1}{10}dz \therefore \int x^9e^{x^{10}}dx = \int \frac{1}{10}e^zdz = \frac{1}{10}e^z+c = \frac{e^{x^{10}}}{10}+c$ **(Ans.)**

Example-16: $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$ এর মান কোনটি? **[JU'19-20]**

Sol^n^: ধরি, $\tan^{-1}x = z \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}dx = dz; x = 0 \Rightarrow z = 0\,;\ x = 1 \Rightarrow z = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} z\,dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16}\times\frac{1}{2}-0 = \frac{\pi^2}{32}$ **(Ans.)**

[JU'19-20]

Example-17: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\sin x)^2\cos x\ dx = ?$

Sol^n: ধরি, $1+\sin x = z \therefore \cos x\,dx = dz\ ; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow z=2; x=\pi\Rightarrow z=1$

$\therefore \int_2^1 z^2dz = \frac{1}{3}[z^3]_2^1 = \frac{1}{3}-\frac{8}{3} = -\frac{7}{3}$ **(Ans.)**

[GST'22-23]

Example-18: $3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 3x\ e^{\cos 3x}\ dx = ?$

(a) $3e$
(b) $1-e$
(c) $e-1$
(d) $3e-1$

Sol^n: (c); ধরি, $z=\cos 3x \therefore 3\sin 3x\,dx = -dz \therefore dz = -3\sin 3xdx$

এখন $x=0$ হলে $z=1$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ হলে, $z=0$

$3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 3x\,e^{\cos 3x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos 3x}(3\sin 3x\,dx) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos 3x}(-3\sin 3x\,dx) = \int_1^0 e^z(-dz) = -\int_1^0 e^zdz$

$= \int_0^1 e^zdz \quad \left[\because \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\right] = [e^z]_0^1 = e^1-e^0 = e-1$

[JU'19-20]

Example-19: $\int_0^1\frac{x\,dx}{1+x^4}$ এর মান কোনটি?

Sol^n: ধরি, $z=x^2\Rightarrow dz=2x\,dx$; এখানে, $x=1$ হলে $z=1$; $x=0$ হলে $z=0$

$\therefore \int_0^1\frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x\,dx}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}[\tan^{-1}z]_0^1 = \frac{1}{2}.\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{8}$ **(Ans.)**

[CU'22-23]

Example-20: $\int_0^1\frac{xdx}{1+x^4} = A$ হলে, A এর মান কত?

(a) $\frac{\pi}{3}$
(b) $\frac{\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{8}$
(d) $\frac{\pi}{12}$

Sol^n: (c); $\int_0^1\frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2xdx}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}[\tan^{-1}x^2]_0^1 = \frac{1}{2}[\tan^{-1}(1)-\tan^{-1}(0)] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{8}$

Example-21: $\int\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}dx = ?$

Sol^n: $\int\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}dx = \int\frac{3x^2+(x^2+x+1)}{x^3-1}dx = \int\frac{3x^2dx}{x^3-1}+\int\frac{x^2+x+1}{(x-1)\,(x^2+x+1)}dx$

ধরি, $x^3-1=t\ ; 3x^2dx = dt = \ln|x^3-1|+\int\frac{dx}{x-1}$

$= \ln|x^3-1|+\ln|x-1|+c = \ln|(x^3-1).(x-1)|+c$ **(Ans.)**

Example-22: $\int\sec x\log(\sec x+\tan x)dx = ?$

Sol^n: Let, $\log(\sec x+\tan x) = t\ ; \frac{1}{\sec x+\tan x}(\sec^2x+\sec x\tan x)\ dx = dt$

$\Rightarrow \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{(\sec x+\tan x)}dx = dt \therefore \sec x\,dx = dt$

$\int\sec x\log(\sec x+\tan x)dx = \int tdt = \frac{t^2}{2}+c = \frac{1}{2}\{\log(\sec x+\tan x)\}^2+c$ **(Ans.)**

Example-23: $\int\tan^n x\sec^2 x\,dx = ?$

Sol^n: Let, $\tan x = t\ ; \sec^2x\,dx = dt\ ; \int\tan^n x\sec^2x\,dx = \int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}+c = \frac{(\tan x)^{n+1}}{n+1}+c$ **(Ans.)**

Example-24: $\int\sec^3x\tan x\ dx = ?$

Sol^n: Let, $\sec x = t \Rightarrow \sec x\tan x\ dx = dt$

$\int\sec^3x\tan x\,dx = \int\sec^2x\sec x\tan x\ dx = \int t^2dt = \frac{t^3}{3}+c = \frac{1}{3}\sec^3x+c$ **(Ans.)**

Example-25: $\int\frac{\log\{x+\sqrt{1+x^2}\}\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = ?$

Sol^n: Let, $\log\{x+\sqrt{1+x^2}\} = t\ ; \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\frac{d}{dx}(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{dt}{dx}$

$\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left\{1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(0+2x)\right\}dx = dt\ ; \frac{(x+\sqrt{1+x^2})dx}{(x+\sqrt{1+x^2}).\sqrt{1+x^2}} = dt \therefore \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = dt$

$\int\frac{\log\{x+\sqrt{1+x^2}\}dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int tdt = \frac{t^2}{2}+c = \frac{1}{2}\left[\log\{x+\sqrt{1+x^2}\}\right]^2+c$ **(Ans.)**

Example-26: $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = ?$

Sol^n: ধরি, $x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$

$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = 2\int \frac{tdt}{t(t+1)} = 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\ln|t+1| + c = 2\ln|\sqrt{x}+1| + c$

Example-27: $\int \frac{e^{x-1}+x^{e-1}}{e^x+x^e} dx = ?$

Sol^n: ধরি, $e^x + x^e = t\ ;\ (e^x + ex^{e-1})dx = dt$

$\int \frac{e^{x-1}+x^{e-1}}{e^x+x^e} dx = \int \frac{e^x.e^{-1}+x^{e-1}}{e^x+x^e} dx = \int \frac{e^x+ex^{e-1}}{e(e^x+x^e)} dx = \frac{1}{e}\int \frac{e^x+ex^{e-1}}{e^x+x^e} dx = \frac{1}{e}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{e}\ln|e^x + x^e| + c$ **(Ans.)**

Type-03: সাধারণ সূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত

Concept

এই Type এর Problem Solve করার সময় যোজ্য রাশিকে Integration এর যোগ্য রাশিতে পরিণত করতে হবে। প্রদত্ত রাশিতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত থাকলে সব অনুপাতকে Simplify করে Integration যোগ্য করে নিতে হবে। চেষ্টা করতে হবে প্রদত্ত রাশিকে জানা সূত্রে পরিণত করে ফেলতে।

Problems

Example-28: $\int \frac{\sin x - \operatorname{cosec} x}{\tan x} dx = ?$

Sol^n: $\int \frac{\sin x - \operatorname{cosec} x}{\tan x} dx = \int(\cos x - \operatorname{cosec} x \cot x)\, dx = \sin x + \operatorname{cosec} x + c$ **(Ans.)**

Example-29: $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx = ?$ **[JU' 18-19]**

Sol^n: $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx$

$= \int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x} dx = \int 1.dx$

$= x + c$ **(Ans.)**

$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x$
$= (\sin x + \cos x)^2$
$\Rightarrow \sqrt{1+\sin 2x} = \sin x + \cos x$

Example-30: $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} dx = ?$

Sol^n: $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x} dx$

$= \int \tan^2 x\, dx = \int(\sec^2 x - 1)dx = \tan x - x + c$ **(Ans.)**

Example-31: $\int \sin x^\circ\, dx = ?$

Sol^n: $\int \sin x^\circ\, dx = \int \sin\frac{\pi x}{180} dx = -\cos\frac{\pi x}{180} \cdot \frac{180}{\pi} + c \left[x^\circ = \frac{\pi x}{180}\right]$ **(Ans.)**

Example-32: $\int\left(e^{a\ln x} + e^{x\ln a}\right)dx = ?$

Sol^n: $I = \int\left(e^{a\ln x} + e^{x\ln a}\right)dx = \int\left(e^{\ln x^a} + e^{\ln a^x}\right)dx = \int(x^a + a^x)\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \frac{a^x}{\ln a} + c$ **(Ans.)**

Example-33: $\int \frac{\cos x - \operatorname{cox} 2x}{1-\cos x} dx = ?$

Sol^n: $\int \frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x} dx = \int \frac{\cos x - 2\cos^2 x + 1}{1-\cos x} dx = \int \frac{\cos x(1-\cos x)+(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x} dx$

$= \int \frac{(1-\cos x)(\cos x+1+\cos x)}{1-\cos x} dx = \int(1 + 2\cos x)\, dx = x + 2\sin x + c$ **(Ans.)**

Example-34: $\int \frac{\cos 2x-\cos 2\alpha}{\cos x-\cos\alpha} dx = ?$

Sol^n: $\int \frac{\cos 2x-\cos 2\alpha}{\cos x-\cos\alpha} dx = \int \frac{(2\cos^2 x-1)-(2\cos^2\alpha-1)}{\cos x-\cos\alpha} dx$

$= 2\int \frac{(\cos x-\cos\alpha)(\cos x+\cos\alpha)}{\cos x-\cos\alpha} dx = 2\int(\cos x + \cos\alpha) = dx$

$= 2(\sin x + x.\cos\alpha) + c$ **(Ans.)**

Type-04: $\int \frac{ax+b}{cx+d} dx$ আকার সংক্রান্ত

Concept

$cx + d = z$ ধরতে হবে।

Problems

Example-35: $\int \frac{3x+5}{4x+7} dx = ?$

Solⁿ: ধরি, $z = 4x + 7 \Rightarrow x = \frac{z-7}{4} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{dz}{4} = dx$

$\int \frac{3x+5}{4x+7} dx = \int \frac{\frac{3(z-7)}{4}+5}{z}\left(\frac{dz}{4}\right) = \int \frac{3z-21+20}{16z} dz = \int \frac{3z-1}{16z} dz = \frac{3}{16}\int dz - \frac{1}{16}\int \frac{dz}{z} = \frac{3}{16}z - \frac{1}{16}\ln|z| + c$

যেখানে, $z = 4x + 7$ (Ans.)

Alternative: $\int \frac{3x+5}{4x+7} dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x+7)+\left(5-7\times\frac{3}{4}\right)}{4x+7} dx = \int \frac{3}{4} + \frac{\left(\frac{-1}{4}\right)}{4x+7} dx = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\frac{\ln|4x+7|}{4} + c$ (Ans.)

Type-05: $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}}$ আকারের

Concept

হরের অনুবন্ধী রাশি দ্বারা লব ও হরকে গুণ করতে হবে।

Problems

Example-36: $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+5}} = ?$

Solⁿ: $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+5}} = \int \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+5}}{(2x+3)-(2x+5)} dx = \frac{1}{-2}\int\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+5}\right) dx = -\frac{1}{2}\left\{\frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times 2} + \frac{(2x+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times 2}\right\} + c$

$= -\frac{1}{6}\left\{(2x+3)^{\frac{3}{2}} + (2x+5)^{\frac{3}{2}}\right\} + c$ (Ans.)

Type-06: a^x এবং e^x সম্পর্কিত

Concept

সবচেয়ে বড় a বা e এর ঘাতকে z ধরতে হবে।

Problems

Example-37: $\int a^{a^{a^{a^x}}} a^{a^{a^x}} a^{a^x} a^x \, dx = ?$

Solⁿ: ধরি, $a^{a^{a^{a^x}}} = z \Rightarrow a^{a^{a^{a^x}}} \ln a . a^{a^{a^x}} \ln a . a^{a^x} \ln a . a^x \ln a \, dx = dz$

$\Rightarrow a^{a^{a^{a^x}}} a^{a^{a^x}} a^{a^x} a^x \, dx = \frac{dz}{(\ln a)^4}$

$\int a^{a^{a^{a^x}}} a^{a^{a^x}} a^{a^x} a^x \, dx = \int \frac{dz}{(\ln a)^4} = \frac{z}{(\ln a)^4} + c = \frac{a^{a^{a^{a^x}}}}{(\ln a)^4} + c$ (Ans.)

❖ **Shortcut:** $\frac{\text{সবচেয়ে বড় a এর ঘাত}}{(\ln a)^{\text{সবচেয়ে বড় a এর ঘাতে a এর সংখ্যা}}} + c = \frac{a^{a^{a^{a^x}}}}{(\ln a)^4} + c$ (Ans.)

Example-38: $\int e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x \, dx = ?$

Solⁿ: ধরি, $e^{e^{e^x}} = z \Rightarrow e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x \, dx = dz$

$\int e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x \, dx = \int dz = z + c = e^{e^{e^x}} + c$ (Ans.)

❖ **Shortcut:** সবচেয়ে বড় e এর ঘাত $+ c = e^{e^{e^x}} + c$ (Ans.)

Example-39: $\int a^x e^x\,dx = ?$

Solⁿ: $\int a^x e^x dx = \int e^{\ln a^x} e^x dx = \int e^{x\ln a}.e^x dx = \int e^{x\ln a + x}\,dx = \int e^{x(1+\ln a)}\,dx = \frac{e^{x(1+\ln a)}}{1+\ln a} + c$ (Ans.)

Example-40: $\int 2^{\ln x}\,dx = ?$

Solⁿ: $\int 2^{\ln x}\,dx = \int e^{\ln 2^{\ln x}}\,dx = \int e^{\ln x.\ln 2}\,dx = \int (e^{\ln x})^{\ln 2}\,dx = \int x^{\ln 2}\,dx = \frac{x^{\ln 2+1}}{\ln 2+1} + c$ (Ans.)

Example-41: $\int \frac{2^{x+1}-5^{x+1}}{10^x}\,dx = ?$

Solⁿ: $\int \frac{2^{x+1}-5^{x+1}}{10^x} = \int \frac{2^{x+1}-5^{x+1}}{2^x.5^x}\,dx = \int (\frac{2}{5^x} - \frac{5}{2^x})\,dx = 2\cdot\int 5^{-x}\,dx - 5\cdot\int 2^{-x}\,dx$

$= 2\int 5^{-x}\,dx - 5\int 2^{-x}\,dx = 2\cdot\frac{5^{-x}}{-\ln 5} - 5\cdot\frac{2^{-x}}{-\ln 2} + c\left[\int a^x\,dx = \frac{ax}{\ln a} + c\right] = -2\cdot\frac{5^{-x}}{\ln 5} + 5\cdot\frac{2^{-x}}{\ln 2} + c$ (Ans.)

Type-07: $\int \sin px \sin qx\ dx, \int \sin px \cos qx\ dx, \int \cos px \cos qx\ dx$ আকারের

Concept

- $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
- $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- $2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
- $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে।

Problems

Example-42: $\int \sin 5x \cos 4x\,dx = ?$

Solⁿ: $\int \sin 5x \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 5x \cos 4x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 9x + \sin x)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 9x}{9} - \cos x\right) + c$ (Ans.)

Example-43: $\int \sin 3x.\sin x\ dx$ এর মান কত?

Solⁿ: $\int \sin 3x.\sin x\ dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 3x \sin x\ dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4}\right] + c$ (Ans.)

Example-44: $\int \cos 2x\ \cos 3x\ dx$ এর মান কত?

Solⁿ: $\int \cos 2x\ \cos 3x\ dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 3x \cos 2x\ dx = \frac{1}{2}\int(\cos 5x + \cos x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 5x}{5} + \sin x\right] + c$ (Ans.)

Example-45: $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx = ?$

Solⁿ: $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int(2\sin x \sin 2x).\sin 3x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int(\cos x - \cos 3x)\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos x \sin 3x - \cos 3x \sin 3x)dx = \frac{1}{2}\int(\cos x \sin 3x - \frac{1}{2}\sin 6x)dx$

$= \frac{1}{4}\int 2\cos x \sin 3x\,dx - \frac{1}{4}\int \sin 6x\,dx = \frac{1}{4}\int(\sin 4x + \sin 2x)dx + \frac{1}{4}\frac{\cos 6x}{6} = -\frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{8} + \frac{\cos 6x}{24} + c$ (Ans.)

Type-08: $\int \sin^2(Ax+b)\,dx, \int \cos^2(Ax+b)dx$ আকারের

Concept

এক্ষেত্রে $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A; 2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$ সূত্র ব্যবহার করে ইন্টিগ্রেশন করতে হবে।

Problems

Example-46: $\int \sin^2(2x+3)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\frac{1}{2}\int 2\sin^2(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\int\{1 - \cos(4x+6)\}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x - \frac{\sin(4x+6)}{4}\right\} + c$ (Ans.)

Example-47: $\int \cos^2(5x+3)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\int \cos^2(5x+3)\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos^2(5x+3)\,dx = \frac{1}{2}\int\{1 + \cos(10x+6)\}\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(10x+6)}{10}\right] + c$ (Ans.)

Type-09: $\int \frac{dx}{1 \pm \sin ax}$, $\int \frac{dx}{1 \pm \cos ax}$ আকারের

Concept

প্রদত্ত যোগজের হরের বিপরীত রাশি দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে সরলীকরণ করতে হবে।

ব্যবহৃত সূত্র: $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$; $\int \sec x.\tan x\,dx = \sec x + c$

$\int \text{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$; $\int \text{cosec}x.\cot x\,dx = -\text{cosec}\,x + c$

Problems

Example-48: $\int \frac{dx}{1-\sin x} = ?$ [JU' 18-19, CU' 18-19]

Solⁿ: $\int \frac{dx}{1-\sin x} = \int \frac{1+\sin x}{(1-\sin^2 x)} dx = \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx = \int (\sec^2 x + \sec x \tan x) dx \left[\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x\right]$

$= \tan x + \sec x + c$ **(Ans.)**

Example-49: $\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x} dx = ?$

Solⁿ: $I = \int \frac{(1-\sin x)^2}{(1+\sin x)(1-\sin x)} dx = \int \frac{1-2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

$= \int (\sec^2 x - 2\sec x \tan x + \tan^2 x) dx \left[\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x\right]$

$= \int (2\sec^2 x - 2\sec x\,\tan x - 1)\,dx = 2\tan x - 2\sec x - x + c$ **(Ans.)**

Example-50: $\int \frac{dx}{1+\cos 4x} = ?$

Solⁿ: $\int \frac{dx}{1+\cos 4x} = \int \frac{(1-\cos 4x)}{1-\cos^2 4x} dx = \int \frac{1-\cos 4x}{\sin^2 4x} dx$

$= \int (\text{cosec}^2 4x - \text{cosec}\,4x \cot 4x)\,dx \left[\frac{\cos 4x}{\sin^2 4x} = \frac{\cos 4x}{\sin 4x}.\frac{1}{\sin 4x} = \cot 4x.\text{cosec}\,4x\right]$

$= -\frac{\cot 4x}{4} + \frac{\text{cosec}\,4x}{4} + c$ **(Ans.)**

বিকল্প: $\int \frac{dx}{1+\cos 4x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 2x} = \frac{1}{2}\int \sec^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\tan 2x}{2}\right] + c = \frac{\tan 2x}{4} + c$ **(Ans.)**

Note: $\frac{\text{cosec}\,4x}{4} - \frac{\cot 4x}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin 4x} - \frac{\cos 4x}{\sin 4x}\right) = \frac{1}{4}\frac{1-\cos 4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4}\frac{2\sin^2 2x}{2\sin 2x \cos 2x} = \frac{1}{4}\tan 2x$

Type-10: $\int \sin^m x\,dx$ বা, $\int \cos^m x\,dx$ আকারের

Concept

(i) m বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হলে $\sin^m x$ এর জন্য $\cos x = z$ ধরতে হবে এবং $\sin^m x$ কে $(\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}}.\sin x$ আকারে প্রকাশ করতে হবে এবং $\cos^m x$ এর জন্য $\sin x = z$ ধরতে হবে এবং $\cos^m x$ কে $(\cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}}.\cos x$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।

(ii) m জোড় পূর্ণসংখ্যা হলে $2\sin^2 x / 2\cos^2 x$ আকারে পরিণত করতে হবে ও $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ এবং $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ এর সূত্র ব্যবহার করতে হবে।

Problems

Example-51. $\int \sin^5 x\,dx = ?$

Solⁿ: ধরি, $\cos x = z \therefore -\sin x\,dx = dz$

$\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x.\sin x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx$

$= -\int (1-z^2)^2 dz = -\int (1-2z^2+z^4) dz$

$= -\left(z - \frac{2}{3}z^3 + \frac{z^5}{5}\right) + c = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + c$ **(Ans.)**

Example-52: $\int \cos^7 x\,dx = ?$ [JU' 18-19]

Sol^n: $\int \cos^6 x.\cos x\,dx = \int (\cos^2 x)^3 \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^3 \cos x\,dx$

$= \int (1-z^2)^3\,dz = \int (1 - 3.1^2.z^2 + 3.1.z^4 - z^6)dz = z - \frac{3}{3}z^3 + \frac{3}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + c$

$= \sin x - (\sin x)^3 + \frac{3}{5}(\sin x)^5 - \frac{1}{7}(\sin x)^7 + c$ (Ans.)

ধরি, $\sin x = z$
$\therefore \cos x\ dx = dz$

Example-53. $\int \sin^4 x\,dx = ?$

Sol^n: $\int \sin^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int (2\sin^2 x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{4}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{4}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c$ (Ans.)

Example-54: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$ এর মান কোনটি? [JU'22-23]

(a) $\frac{\pi}{32}$ (b) $\frac{3\pi}{32}$ (c) $\frac{5\pi}{32}$ (d) $\frac{7\pi}{32}$

Sol^n: (c); $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^6 x dx = \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^3 x)^2\,dx = \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x - \sin 3x)^2\,dx$

$= \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (9\sin^2 x - 6\sin x \sin 3x + \sin^2 3x)\,dx = \frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (18\sin^2 x - 12\sin x\sin 3x + 2\sin^2 3x)\,dx$

$= \frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{9(2\sin^2 x) - 6(2\sin 3x \sin x) + 2\sin^2 3x\}\,dx$

$= \frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{9(1-\cos 2x) - 6(\cos 2x - \cos 4x) + 1 - \cos 6x\}\,dx$

$= \frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (9 - 9\cos 2x - 6\cos 2x + 6\cos 4x + 1 - \cos 6x)\,dx$

$= \frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10)\,dx$

$= \frac{1}{32}\left[-\frac{\sin 6x}{6} + 6\times\frac{\sin 4x}{4} - 15\times\frac{\sin 2x}{2} + 10x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{32}\left(\frac{-\sin 3\pi}{6} + \frac{3\sin 2\pi}{2} - \frac{15\sin\pi}{2} + 5\pi\right) = \frac{1}{32}\times 5\pi = \frac{5\pi}{32}$

- **Shortcut:** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$

Special Case: Wallis' Integral

[Important for MCQ]

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{2.\,4.\,6\ldots\ldots(n-1)}{1.\,3.\,5\ldots\ldots n}; \text{যখন n বিজোড় সংখ্যা} \\ \frac{1.\,3.\,5\ldots\ldots(n-1)}{2.\,4.\,6\ldots\ldots n}.\frac{\pi}{2}; \text{যখন n জোড় সংখ্যা} \end{cases}$

যেমন: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\ dx = \frac{2.4.6}{1.3.5.7} = \frac{16}{35}$ (Ans.) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\ dx = \frac{2}{1.3} = \frac{2}{3}$ (Ans.)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\ dx = \frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$ (Ans.) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\ dx = \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$ (Ans.)

Type-11: $\int \sin^m x.\cos^n x\,dx$ আকারের

Case-01: m ও n উভয়ই বিজোড় হলে

Concept

যে কোনটি অর্থাৎ sinx বা cosx = z ধরতে হবে তবে যার power বড় সেটা = z ধরলে সুবিধাজনক।

Problems

Example-55: $\int \sin^5 x.\cos^3 x\,dx = ?$

Sol^n: $\int \sin^5 x.\cos^3 x\,dx = \int \sin^5 x.\cos^2 x.\cos x\,dx = \int \sin^5 x\ (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

ধরি, $\sin x = z \therefore \cos x\,dx = dz$

$\int z^5.(1-z^2)dz = \int (z^5 - z^7)\,dz = \frac{z^6}{6} - \frac{z^8}{8} + c = \frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + c$ (Ans.)

Case-02: m ও n এর যে কোনটি জোড় এবং অপরটি বিজোড় হলে

Concept

যার power জোড় সেটা = z ধরতে হবে।

Problems

Example-56: $\int \sin^5 x.\cos^4 x\, dx = ?$

Sol^n: $\int \sin^5 x.\cos^4 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2.\cos^4 x.\sin x\, dx$

$= \int (1-\cos^2 x)^2.\cos^4 x.\sin x\ dx = \int (1-z^2)^2.z^4.(-dz)$

$= -\int (1-2z^2+z^4)z^4 dz = -\int (z^4-2z^6+z^8)dz = -\frac{z^5}{5}+\frac{2z^7}{7}-\frac{z^9}{9}+c$

$= \frac{-\cos^5 x}{5}+\frac{2\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^9 x}{9}+c$ (Ans.)

ধরি, $\cos x = z$
$\therefore -\sin x\, dx = dz$

Case-3: m ও n উভয়ই জোড়

Concept

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ এবং $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ সূত্রের সাহায্যে বিজোড় ঘাতবিশিষ্ট বা ঘাতহীন ফাংশনে পরিবর্তিত করতে হবে। [এবং প্রয়োজনে, $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$; $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$ সূত্রদ্বয় ব্যবহার করতে হবে]

Problems

Example-57: $\int \sin^4 \cos^2 x\, dx = ?$

Sol^n: $\int \sin^4 \cos^2 x\, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)^2\,(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,(1+\cos 2x)dx$

$= \frac{1}{8}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x+\cos 2x-2\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx$

$= \frac{1}{8}\int \left\{1-\cos 2x-\frac{1}{2}(1+\cos 4x)+\frac{1}{4}(3\cos 2x+\cos 6x)\right\}dx$

$= \frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{3}{8}\sin 2x+\frac{1}{24}\sin 6x\right)+c$ (Ans.)

Type-12: $\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)}dx, \int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$ আকৃতির

Concept

(i) $\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)}dx$ এর জন্য, লবের $\sin x = \sin\{(x-a)+a\}$ আকারে লিখে $\sin(A+B)$ এর সূত্র apply করতে হবে।

(ii) $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$ এর জন্য, $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)} = \frac{1}{\sin(b-a)}\int \frac{\sin\{(x-a)-(x-b)\}}{\sin(x-a)\sin(x-b)}dx$ আকারে লিখে লবে $\sin(A-B)$ এর সূত্র apply করতে হবে।

(i) $\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)}dx$ এর জন্য, লবে $\sin x = \sin\{(x-a)+a\}$ আকারে লিখে $\sin(A+B)$ এর সূত্র apply করতে হবে,

(ii) $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$ এর জন্য, $\int \frac{dx}{\sin(x-a),\sin(x-b)} = \frac{1}{\sin(b-a)}\int \frac{\sin\{(x-a)-(x-b)\}}{\sin(x-a).\sin(x-b)}dx$ আকারে- লিখা সম্ভব (কোণদ্বয়ের পার্থক্য ধ্রুবক হওয়ায়), অন্যথায় সম্ভব নয়, এরপর লবে $\sin(A-B)$ এর সূত্র apply করতে হবে,

Problems

Example-58: $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin(x-a)} = ?$

Sol^n: $I = \int \frac{\sin\{(x-a)+a\}\, dx}{\sin(x-a)} = \int \frac{\sin(x-a)\cos a+\cos(x-a)\sin a}{\sin(x-a)}dx$

$= \int (\cos a+\sin a.\cot(x-a))\, dx = x\cos a+\sin a \ln|\sin(x-a)|+c$ (Ans.)

Example-59: $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)} = ?$

Sol

Sol^n: $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)} = \frac{1}{\sin(b-a)}\int \frac{\sin\{(x-a)-(x-b)\}}{\sin(x-a)\sin(x-b)}dx = \frac{1}{\sin(b-a)}\int \frac{\sin(x-a)\cos(x-b)-\sin(x-b)\cos(x-a)}{\sin(x-a)\sin(x-b)}dx$

$= \frac{1}{\sin(b-a)}[\int \cot(x-b)dx - \int \cot(x-a)dx]$

$= \frac{1}{\sin(b-a)}[\ln|\sin(x-b)| - \ln|\sin(x-a)|] + c = \frac{1}{\sin(b-a)}\ln\left|\frac{\sin(x-b)}{\sin(x-a)}\right| + c$ **(Ans.)**

Example-60: $\int \frac{dx}{\sin(x-a).\cos(x-b)}$

Sol^n: $\int \frac{dx}{\sin(x-a).(\cos x-b)} = \frac{1}{\cos(b-a)}\int \frac{\cos\{(x-a)-(x-b)\}}{\sin(x-a).\cos(x-b)}dx$

$= \frac{1}{\cos(b-a)}\int \frac{\cos(x-a)\cos(x-b)+\sin(x-a)\sin(x+b)}{\sin(x-a).\cos(x-b)}dx = \frac{1}{\cos(b-a)}[\{\cot(x-a)+\tan(x-b)\}dx]$

$= \frac{1}{\cos(b-a)}[\ln|\sin(x-a)| + \ln|\sec(x-b)|] + c = \frac{1}{\cos(b-a))}\ln|\sin(x-a)\ \sec(x-b)| + c$ **(Ans.)**

Example-61: $\int \frac{dx}{\cos(2x-a)\cos(2x+a)} = ?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{\text{co}(2x-a)\cos(2x+a)} = \frac{1}{\sin 2a}\int \frac{\sin\{(2x+a)-(2x-a)\}}{\cos(2x-a).\cos(2x+a)}dx$

$= \frac{1}{\sin 2a}\int \frac{\sin(2x+a)\cos(2x-a)-\cos(2x+a)\sin(2x-a)}{\cos(2x-a).\cos(2x+a)}dx = \frac{1}{\sin 2a}\int\{\tan(2x+a)-\tan(2x-a)\}dx$

$= \frac{1}{\sin 2a}\left[\frac{\ln|\sec(2x+a)}{2} - \frac{\ln|\sec(2x-a)|}{2}\right] + c = \frac{1}{2\sin 2a}\ln\left|\frac{\sec(2x+a)}{\sec(2x-a)}\right| + c\ [\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + c]$ **(Ans.)**

Type-13: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ এবং $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$ আকৃতির

Concept

(i) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$ (ii) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

(iii) $\int \{f(x)\}^n \cdot f'(x)dx = \frac{\{f(x)\}^{n+1}}{n+1} + c$

Problems

Example-62: $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = ?$

Sol^n: $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + c = \ln|e^x+e^{-x}| + c$ **(Ans.)** | ধরি, $e^x + e^{-x} = z \Rightarrow (e^x - e^{-x})dx = dz$

বিকল্প: $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \ln|e^x+e^{-x}| + c \left[\begin{array}{l}\because f(x) = e^x + e^{-x} \text{ হলে,}\\ f'(x) = e^x - e^{-x}\end{array}\right]$ **(Ans.)**

Example-63: $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}dx = ?$

Sol^n: $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\int \frac{dz}{2\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + c = 2\sqrt{1+\tan x} + c$ **(Ans.)**

| ধরি, $1 + \tan x = z$
$\Rightarrow \sec^2 x\ dx = dz$

বিকল্প: $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}dx = 2\sqrt{1+\tan x} + c \left[\begin{array}{l}\because f(x) = 1 + \tan x \text{ হলে,}\\ f'(x) = \sec^2 x\end{array}\right]$ **(Ans.)**

Example-64: $\int_1^{15} \frac{x+2}{(x+1)(x+3)}dx =$ কত? [RU'22-23]

(a) 2
(b) 6
(c) 4
(d) ln 6

Sol^n: (d); $\int_1^{15} \frac{x+2}{(x+1)(x+3)}dx = \int_1^{15} \frac{x+2}{x^2+4x+3}dx = \frac{1}{2}\int_1^{15} \frac{2x+4}{x^2+4x+3}dx$

$= \frac{1}{2}[\ln|x^2+4x+3|]_1^{15} = \frac{1}{2}[\ln|15^2 + 4 \times 15 + 3| - \ln|1^2 + 4.1 + 3|] = \frac{1}{2}[\ln 288 - \ln 8]$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{288}{8} = \ln 36^{\frac{1}{2}} = \ln 6$

Example-65: $\int \frac{\sin x}{3+4\cos x} dx =$ কত? [RU'22-23]

(a) $-\frac{1}{4}\ln(3+4\cos x)+c$ (b) 0 (c) $-\frac{3}{4}\ln(3+4\cos x)+c$ (d) $-\frac{1}{4}\ln\sin x+c$

Sol^n: (a); $\int \frac{\sin x}{3+4\cos x} dx = -\frac{1}{4}\int \frac{-4\sin x}{3+4\cos x} dx = -\frac{1}{4}\ln|3+4\cos x|+c \left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|+c\right]$

Example-66. $\int \frac{\sin 4x}{\sin^4 x+\cos^4 x} dx =?$

Sol^n: ধরি, $\sin^4 x+\cos^4 x = z \Rightarrow (4\sin^3 x\cos x - 4\cos^3 x\sin x)\,dx = dz$

$\Rightarrow -4\sin x\cos x\ (\cos^2 x-\sin^2 x)dx = dz \Rightarrow 2(2\sin x\cos x)\cos 2x\,dx = -dz$

$\Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x\ dx = -dz \therefore \sin 4x\ dx = -dz$

$\therefore \int \frac{\sin 4x}{\sin^4 x+\cos^4 x} dx = -\int \frac{dz}{z} = -\ln|z|+c = -\ln|\sin^4 x+\cos^4 x|+c$ **(Ans.)**

Example-67: $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx =?$

Sol^n: Let, $\cos x+\sin x = z$; $(\cos x-\sin x)dx = dz$

$\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx = \int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x} dx = \int \frac{dz}{z} = \ln|\cos x+\sin x|+c$

বিকল্প: $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx = \int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x} dx$ [$\therefore f(x) = \cos x+\sin x$ হলে $\therefore f'(x) = \cos x-\sin x$]

$= \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|+c = \ln|\cos x+\sin x|+c$ **(Ans.)**

Example-68: $\int \frac{\sin x\cos x dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x} =?$

Sol^n: Let, $a\cos^2 x+b\sin^2 x = z$

$\Rightarrow (-2a\cos x\sin x+2b\sin x\cos x)dx = dz$

$\Rightarrow (2b-2a)\sin x\cos x\ dx = dz$

$\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x} = \frac{1}{(2b-2a)}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{(2b-2a)}\ln z = \frac{1}{(2b-2a)}\ln|a\cos^2 x+b\sin^2 x|+c$

Example-69: $\int \tan^7 x\cdot\sec^2 x\,dx =?$

Sol^n: $\int(\tan x)^7\cdot\frac{d}{dx}(\tan x)\cdot dx = \frac{(\tan x)^{7+1}}{7+1}+c = \frac{(\tan x)^8}{8}+c$

Example-70: $\int \sin^5 x\cdot\cos x\,dx =?$

Sol^n: $\int(\sin x)^5\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)\cdot dx = \frac{\sin^6 x+c}{6}$

Example-71: $\int \sin x\cdot\sin 2x\ dx =?$

Sol^n: $\int \sin x\cdot 2\sin x\cdot\cos x\,dx = 2\int(\sin x)^2\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)dx = 2\cdot\frac{\sin^3 x}{3}+c$

Type-14: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ আকারের; যেখানে a, b, c যেকোন ধ্রুবক

Concept

ax^2+bx+c কে দুটি বর্গের সমষ্টি বা অন্তররূপে প্রকাশ করতে হবে

$$A\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left\{x^2+2.\frac{b}{2a}.x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\} = a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}$$

$=$ যদি $\frac{c}{a} > \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ হয়, তাহলে, $a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2}\right)^2\right\}$

যদি $\frac{c}{a} < \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ হয়, তাহলে, $a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}\right)^2\right\}$

এবং এরপর $\int \frac{dx}{x^2-a^2}, \int \frac{dx}{x^2+a^2}, \int \frac{dx}{a^2-x^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx, \int \sqrt{a^2-x^2}, \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$ সূত্রের সাহায্যে বাকিটুকু করতে হবে।

যেখানে,

01. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$ [ধরি, $x = a\tan\theta$]
02. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
03. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$
04. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$ [ধরি, $x = a\sin\theta$]
05. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|\sqrt{x^2+a^2}+x\right| + c$ [ধরি, $x = a\tan\theta$]
06. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\sqrt{x^2-a^2}+x\right| + c$ [ধরি, $x = a\sec\theta$]
07. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$ [ধরি, $x = a\tan\theta$]
08. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$
09. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$ [ধরি, $x = a\sec\theta$]

Problems

Example-72: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ এর মান হবে- **[Agri. Guccho'20-21, RU'19-20]**

Sol^n: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = [\sin^{-1}(x-1)]_0^1$

$= \sin^{-1}0 - \sin^{-1}(-1) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ **(Ans.)**

Example-73: যদি $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx = \frac{1}{3}\sin ax + c$ হয়, তাহলে 'a' এর মান কত? **[RU'20-21]**

Sol^n: $\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{3}.\sin^{-1}\left(\frac{x}{\frac{2}{3}}\right) + c = \frac{1}{3}.\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}x\right) + c = \frac{1}{3}\sin ax + c \therefore a = \frac{3}{2}$ **(Ans.)**

Example-74: $\int \frac{dx}{2x^2+4x+17} = ?$ **[CU' 16-17]**

Sol^n: $\int \frac{dx}{2x^2+4x+17} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+2x+\frac{17}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+\frac{17}{2}-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+\left(\sqrt{\frac{15}{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{15}{2}}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{\frac{15}{2}}}\right) + c$ **(Ans.)**

Example-75: $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{9-\cos^4 x}} = ?$

Sol^n: ধরি, $\cos^2 x = z \Rightarrow 2\cos x(-\sin x)dx = dz \Rightarrow -\sin 2xdx = dz$

$\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{9-\cos^4 x}} = \int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{9-(\cos^2 x)^2}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{3^2-z^2}} = -\sin^{-1}\frac{z}{3} + c = -\sin^{-1}\left(\frac{\cos^2 x}{3}\right) + c$ **(Ans.)**

Example-76: $\int \sec x\tan x\sqrt{\sec^2 x+1}\,dx = ?$

Sol^n: Let, $\sec x = z$; $\sec x\tan xdx = dz$; $\int \sec x\tan x\sqrt{\sec^2 x+1}\,dx = \int \sqrt{z^2+1}\,dt$

$= \frac{t}{2}\sqrt{z^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{z^2+1}+x\right| + c \left[\therefore \int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+a^2}+x\right|\right]$

$= \frac{\sec x}{2}\sqrt{\sec^2 x+1} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\sec^2 x+1}+x\right| + c$ **(Ans.)**

Type-15: $\int \frac{ex+f}{ax^2+bx+c}dx$ আকারের; $[a \neq 0, e \neq 0]$ যেখানে, a, b, c, e, f যেকোন ধ্রুবক

Concept

$\int \frac{ex+f}{ax^2+bx+c}dx$ আকারে integration দেওয়া থাকলে, $ex + f = m\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) + n$ আকারে লিখতে হবে। এরপর দুই পাশের সহগ সমীকৃত করে m, n এর মান নির্ণয় করতে হবে।

জেনে রাখো

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c; \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

Problems

Example-77: $\int \frac{x\,dx}{x^2-4x+8} = ?$

Solⁿ: $x = m\frac{d}{dx}(x^2-4x+8) + n \Rightarrow x = m(2x-4) + n \Rightarrow x = 2mx - 4m + n$

উভয় পাশে সহগ সমীকৃত করে পাই, $1 = 2m \therefore m = \frac{1}{2}; -4m + n = 0 \Rightarrow n = 4m \therefore n = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

$\therefore \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2}{x^2-4x+8} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8} dx + 2\int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+8| + 2 \times \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-2}{2} + c$ (Ans.)

Example-78: $\int \frac{3x+7}{x^2+4x+19} dx = ?$

Solⁿ: $I = \int \frac{3x+7}{x^2+4x+19} dx$; $3x + 7 = m\frac{d}{dx}(x^2+4x+19) + n = m(2x+4) + n = 2mx + 4m + n$

$\Rightarrow 3 = 2m \therefore m = \frac{3}{2}$ এবং $7 = 4m + n \Rightarrow n = 7 - \frac{4\times3}{2} \therefore n = 1$

$\therefore \int \frac{3x+7}{x^2+4x+19} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)+1}{x^2+4x+19} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+19} dx + \int \frac{dx}{(x+2)^2+(\sqrt{15})^2}$

$= \frac{3}{2}\ln|x^2+4x+19| + \frac{1}{\sqrt{15}}\tan^{-1}\frac{x+2}{\sqrt{15}} + c$ (Ans.)

Type-16: $\int \frac{(px+q)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ বা, $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ আকারের

Concept

- $\int \frac{(px+q)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ বা, $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ আকারে থাকলে, $px + q = m\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) + n$ আকারে লিখে সহগ সমীকৃত করে m, n এর মান নির্ণয় করতে হবে। এরপর Integration করতে হবে।

Problems

Example-79: $\int_2^5 \frac{7x}{\sqrt{x^2+3}} dx$ এর মান কত? [RU' 09-10]

Solⁿ: $\int_2^5 \frac{7x\,dx}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{7}{2}\int_2^5 \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{7}{2}\int_7^{28} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 7\int_7^{28} \frac{dz}{2\sqrt{z}}$

$= 7[\sqrt{z}]_7^{28} = 7(\sqrt{28} - \sqrt{7})$ (Ans.)

ধরি, $z = x^2 + 3 \Rightarrow 2x\,dx = dz$

x	2	5
z	7	28

Example-80: $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}} = ?$

Solⁿ: $I = \int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}}$; $2x - 1 = m\frac{d}{dx}(4x^2+4x+2) + n = m(8x+4) + n = 8mx + 4m + n$

$\therefore 2 = 8m \therefore m = \frac{1}{4}$ এবং $4m + n = -1 \Rightarrow 4 \times \frac{1}{4} + n = -1 \therefore n = -2$

$I = \int \frac{\frac{1}{4}(8x+4)-2}{\sqrt{4x^2+4x+2}} dx = \frac{1}{4}\int \frac{(8x+4)dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}} - \int \frac{2dx}{2\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} - \ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+\frac{1}{2}}\right| + c$

$= \frac{1}{4} \times 2\sqrt{4x^2+4x+2} - \ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+\frac{1}{2}}\right| + c$

$= \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+2} - \ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+\frac{1}{2}}\right| + c$ (Ans.)

Type-17: $\int \frac{ex^2+gx+f}{ax^2+bx+c}dx$ আকারের যেখানে a, b, c, e, f, g যেকোন ধ্রুবসংখ্যা

Concept

লবকে $A(ax^2+bx+c)+B\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+C$ আকারে লিখে পূর্বের ন্যায় সমাধান করতে হবে।

Problems

Example-81: মান নির্ণয় কর: $\int \frac{x^2-1}{x^2-4}dx$

Sol^n^: $\int \frac{x^2-1}{x^2-4}dx = \int \frac{x^2-4+3}{x^2-4}dx = \int dx + 3\int \frac{dx}{x^2-4} = x + \frac{3}{2.2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c = x + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$ **(Ans.)**

Example-82: $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}} = ?$

Sol^n^: $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{(x^2+4-4)}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \sqrt{x^2+2^2} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2^2}}$

$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+2^2} + \frac{2^2}{2}\ln|\sqrt{x^2+2^2}+x| - 4.\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$

$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+4} + 2\ln|\sqrt{x^2+4}+x| - 2\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$

Example-83: $\int \frac{2x^2+3x+1}{x^2+4x+13}dx = ?$

Sol^n^: $\int \frac{2x^2+3x+1}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{2(x^2+4x+13)-5x-25}{x^2+4x+13}dx = 2\int dx - \int \frac{5(x+5)dx}{x^2+4x+13}$

$= 2\int dx - \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)}{x^2+4x+13}dx - \int \frac{15dx}{x^2+4x+4+9} = 2\int dx - \frac{5}{2}\int \frac{\frac{d}{dx}(x^2+4x+13)}{x^2+4x+13}dx - 15\int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2}$

$= 2x - \frac{5}{2}\ln|x^2+4x+13| - \frac{15}{3}\tan^{-1}\frac{x+2}{3} + c$ **(Ans.)**

Type-18: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}$ আকারের, যেখানে α এবং β যেকোন ধ্রুবসংখ্যা

Concept

Process-01: $\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}=z$ ধরতে হবে।

Process-02: $x-\alpha=z^2$ ধরতে হবে

Shortcut

$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}} = 2\ln|\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}| + c$

Problems

Example-84: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = ?$

Sol^n^: ধরি, $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}=z$

$\therefore \left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}}+\frac{1}{2\sqrt{x-3}}\right)dx = dz \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-2}\sqrt{x-3}}\right)dx = dz \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-3}} = 2\frac{dz}{z}$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = 2\int \frac{dz}{z} = 2\ln z + c = 2\ln|\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}| + c$ **(Ans.)**

বিকল্প: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = \int \frac{2z\,dz}{\sqrt{z^2(z^2-1)}} = 2\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1^2}}$

$= 2\ln|z+\sqrt{z^2-1}| + c = 2\ln|\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}| + c$ **(Ans.)**

ধরি, $x-2=z^2 \Rightarrow x-3=z^2-1$

$\therefore dx = 2z\,dz$

❖ **Shortcut:** $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}} = 2\ln|\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}| + c \quad \therefore \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = 2\ln|\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}| + c$ **(Ans.)**

Type-19: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ আকারের, যেখানে α এবং β যেকোন ধ্রুব সংখ্যা $(\alpha < \beta)$

Concept

$x - \alpha = z^2$ ধরতে হবে।

Problems

Example-85: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}} = ?$

Sol^n: ধরি, $x - 2 = z^2 \therefore dx = 2zdz$; $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}} = 2\int \frac{zdz}{z\sqrt{1-z^2}} = 2\sin^{-1} z + c = 2\sin^{-1}\sqrt{x-2} + c$ (Ans.)

Type-20: $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx$ আকৃতির

Concept

লব ও হরকে লব দ্বারা গুণ করে লবকে √ মুক্ত করতে হবে।

Problems

Example-86: $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$ (Ans.)

Example-87: $\int \sqrt{\frac{5-x}{5+x}}\,dx = ?$

Sol^n: $\int \sqrt{\frac{5-x}{5+x}}\,dx = \int \frac{5-x}{\sqrt{(5+x)(5-x)}}\,dx = \int \frac{5-x}{\sqrt{(5)^2-x^2}}\,dx = \int \frac{5dx}{\sqrt{5^2-x^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{(-2x)dx}{\sqrt{5^2-x^2}} = 5\sin^{-1}\frac{x}{5} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5^2-x^2} + c$ (Ans.)

Type-21: $\int \frac{dx}{a+be^{mx}}, \int \frac{dx}{a+be^{-mx}}, \int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$ আকারের

Concept

আকৃতি	লব ও হরকে যা দিয়ে গুণ করতে হবে	ধরি,
$\int \frac{dx}{a+be^{mx}}$	e^{-mx}	$e^{-mx} = z$
$\int \frac{dx}{a+be^{-mx}}$	e^{mx}	$e^{mx} = z$
$\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$	e^{mx} (অথবা e^{-mx})	$e^{mx} = z$ [যদি e^{mx} দিয়ে গুণ কর] $e^{-mx} = z$ [যদি e^{-mx} দিয়ে গুণ কর]

Problems

Example-88: $\int \frac{dx}{1+e^x} = ?$ [RU' 09-10]

Sol^n: $I = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx = -\int \frac{dz}{z}$ [ধরি, $z = e^{-x} + 1 \Rightarrow dz = -e^{-x}dx$] $= -\ln|z| = -\ln|1 + e^{-x}| + c$ (Ans.)

Example-89: $\int \frac{dx}{3+4e^{2x}} = ?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{3+4e^{2x}} = \int \frac{e^{-2x}}{3e^{-2x}+4}\,dx$ [e^{-2x} দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে]

$= -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{3z+4} = -\frac{1}{2.3}\ln|3z + 4| + c = -\frac{1}{6}\ln|3e^{-2x} + 4| + c$ (Ans.)

ধরি, $e^{-2x} = z$

$\Rightarrow -2\,e^{-2x}dx = dz \therefore e^{-2x}dx = \frac{dz}{-2}$

Example-90: $\int \frac{dx}{5+3e^{-4x}} = ?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{5+3e^{-4x}} = \int \frac{e^{4x}}{5e^{4x}+3} dx$ [লব ও হরকে e^{4x} দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{1}{4}\int \frac{dz}{5z+3} = \frac{1}{4.5}\ln|5z+3| + c = \frac{1}{20}\ln|5e^{4x}+3| + c$ **(Ans.)**

ধরি, $e^{4x} = z \Rightarrow 4e^{4x}dx = dz$

$\therefore e^{4x}dx = \frac{dz}{4}$

Example-91: $\int \frac{dx}{2e^{3x}+5e^{-3x}} = ?$ **[DU' 10-11, KU' 16-17]**

Sol^n: ধরি, $e^{3x} = z \;\therefore 3e^{3x}.dx = dz$

$\int \frac{dx}{2e^{3x}+5e^{-3x}} = \int \frac{e^{3x}dx}{2(e^{3x})^2+5} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{2z^2+5} = \frac{1}{6}\int \frac{dz}{z^2+\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} = \frac{1}{6}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{\frac{5}{2}}} + c = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}e^{3x}}{\sqrt{5}} + c$ **(Ans.)**

Example-92: $\int \frac{dx}{(e^x+e^{-x})^2} = ?$ **[DU'19-20]**

Sol^n: $\int \frac{dx}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}dx}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2}$ | ধরি, $e^{2x}+1 = z \Rightarrow 2e^{2x}dx = dz$

$= -\frac{1}{2}.\frac{1}{z} + c = \frac{-1}{2(e^{2x}+1)} + c$ **(Ans.)**

Example-93: $\int \frac{2e^{3x}+1}{3e^{3x}+4} dx = ?$

Sol^n: $I = \int \frac{\frac{2}{3}(3e^{3x}+4)+\left(1-\frac{8}{3}\right)}{3e^{3x}+4} dx$

$= \frac{2}{3}\int dx - \frac{5}{3}\int \frac{dx}{3e^{3x}+4} = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\int \frac{e^{-3x}dx}{3+4e^{-3x}}$ [ধরি, $z = 3+4e^{-3x} \Rightarrow dz = -12e^{-3x}dx$]

$= \frac{2}{3}x + \frac{5}{36}\int \frac{-12e^{-3x}dx}{3+4e^{-3x}} = \frac{2}{3}x + \frac{5}{36}\ln|3+4e^{-3x}| + c$ **(Ans.)**

Example-94: $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ এর মান কত? **[DU'22-23]**

(a) $\tan^{-1}(e^{-x})$ (b) $\tan(e^{-x})$ (c) $\tan^{-1}(e^x)$ (d) $\tan(e^x)$

Sol^n: (c); $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x+\frac{1}{e^x}} = \int \frac{dx}{\frac{1+(e^x)^2}{e^x}} = \int \frac{e^xdx}{1+(e^x)^2} = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \tan^{-1}(e^x)$

Example-95: $\int \frac{dx}{(e^x-1)^2} = ?$

Sol^n: Let, $1-e^{-x} = t \;\therefore e^{-x}dx = dt$ এবং $1-t = e^{-x}$

$\int \frac{dx}{(e^x-1)^2} = \int \frac{e^{-2x}dx}{(1-e^{-x})^2} = \int \frac{(1-t)dt}{t^2} = \int \left(t^{-2}-\frac{1}{t}\right)dt = -\frac{1}{t} - \ln|t| + c = -\frac{1}{1-e^{-x}} - \ln|1-e^{-x}| + c$

Example-96: $\int \frac{5e^{2x}dx}{1+e^{4x}} = ?$

Sol^n: Let, $e^{2x} = t \;\therefore 2e^{2x}dx = dt$

$\int \frac{5e^{2x}dx}{1+e^{4x}} = \frac{5}{2}\int \frac{2e^{2x}dx}{1+(e^{2x})^2} = \frac{5}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{5}{2}\tan^{-1}(t) + c = \frac{5}{2}\tan^{-1}(e^{2x}) + c$ **(Ans.)**

Type-22: $\int \frac{dx}{a+b\sin^2 x}, \int \frac{dx}{a+b\cos^2 x}, \int \frac{dx}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}, \int \frac{dx}{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}$

Concept

লব ও হরকে $\sec^2 x$ দ্বারা গুণ করে হরকে $\tan x$ এর ফাংশন আকারে প্রকাশ করতে হবে এবং $\tan x = z$ ধরতে হবে।

Problems

Example-97: $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x} = ?$ **[KU' 18-19]**

Sol^n: $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{2\sec^2 x+3} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{2+2\tan^2 x+3}$ | ধরি, $\tan x = z \Rightarrow \sec^2 x\,dx = dz$

$= \int \frac{\sec^2 x\,dx}{2\left(\frac{5}{2}+\tan^2 x\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2+z^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{5}} + c = \frac{1}{\sqrt{10}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}\tan x}{\sqrt{5}} + c$ **(Ans.)**

Example-98: $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = ?$

Sol^n: ধরি, $a \tan x = z \Rightarrow a \sec^2 x\, dx = dz$

$I = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{a^2 \tan^2 x + b^2} = \frac{1}{a} \int \frac{a \sec^2 x\, dx}{(a \tan x)^2 + b^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{z^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \frac{z}{b} = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \frac{a \tan x}{b} + c$ **(Ans.)**

Type-23: $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$; $\int (ax+b)\sqrt{cx+d}\, dx$; $\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}} dx$ আকারের যেখানে, a, b, c, d যেকোন ধ্রুবক

Concept

উপরে উল্লিখিত আকারের কোনো integral দেওয়া থাকলে '$\sqrt{\ }$ 'এর ভিতরের রাশিকে z^2 ধরতে হয় ($\therefore cx + d = z^2$ ধরতে হবে) এবং সমগ্র integral কে 'z' এর মাধ্যমে প্রকাশ করে নিতে হবে,

Problems

Example-99: $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}} = ?$

Sol^n: ধরি, $x + 1 = z^2 \Rightarrow dx = 2z\, dz$; এখন, $x - 3 = (x + 1) - 4 = z^2 - 4$

$\therefore \int 2z \frac{dz}{(z^2-4)z} = 2 \int \frac{dz}{z^2-4} = 2 \int \frac{dz}{z^2-2^2} = 2 \times \frac{1}{2\times2} \ln \left|\frac{z-2}{z+2}\right| + c = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}+2}\right| + c$ **(Ans.)**

Example-100: $\int (x-3)\sqrt{x+1}\, dx = ?$

Sol^n: ধরি, $x + 1 = z^2 \Rightarrow dx = 2z\, dz$; এখন, $x - 3 = z^2 - 4 \therefore \int (z^2 - 4)z \times 2z\, dz = \int 2z^2(z^2 - 4)dz$

$= \int (2z^4 - 8z^2)dz = 2\frac{z^5}{5} - \frac{8z^3}{3} + c = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 - \frac{8}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + c$ **(Ans.)**

Example-101: $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx = ?$

Sol^n: ধরি, $x + 1 = z^2 \therefore dx = 2zdz$ এবং $x - 3 = (x + 1) - 4 = z^2 - 4$

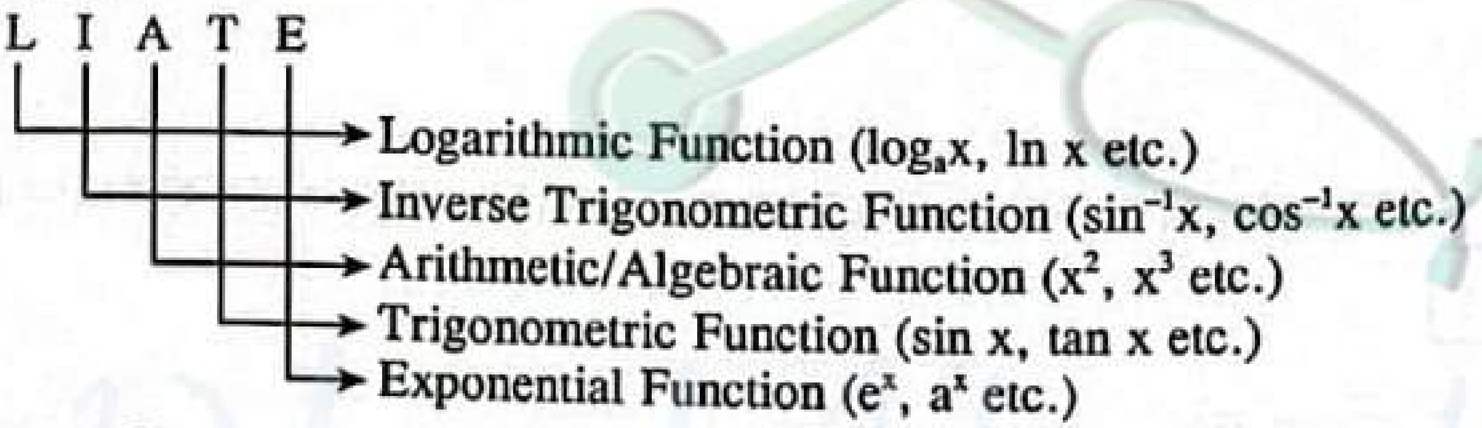
$\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx = 2 \int \frac{(z^2-4)z}{z} dz = 2 \int (z^2 - 4)\, dz = 2\left[\frac{z^3}{3} - 4z\right] + c = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 4\sqrt{x+1} + c$ **(Ans.)**

Type-24: Integration by Parts (অংশক্রমে সমাকলন) সংক্রান্ত

Concept

সূত্র: $\int uv\, dx = u \int vdx - \int \left\{\frac{d}{dx}(u) \int vdx\right\} dx$

উপরের সূত্রটিতে কোনটি u এবং কোনটি v হবে তা নির্ধারণ করতে নিম্নোক্ত পদ্ধতি অবলম্বন করতে পারো। u এবং v এর মাঝে LIATE অনুযায়ী যা প্রথমে আছে তাকে u ধরতে হবে।



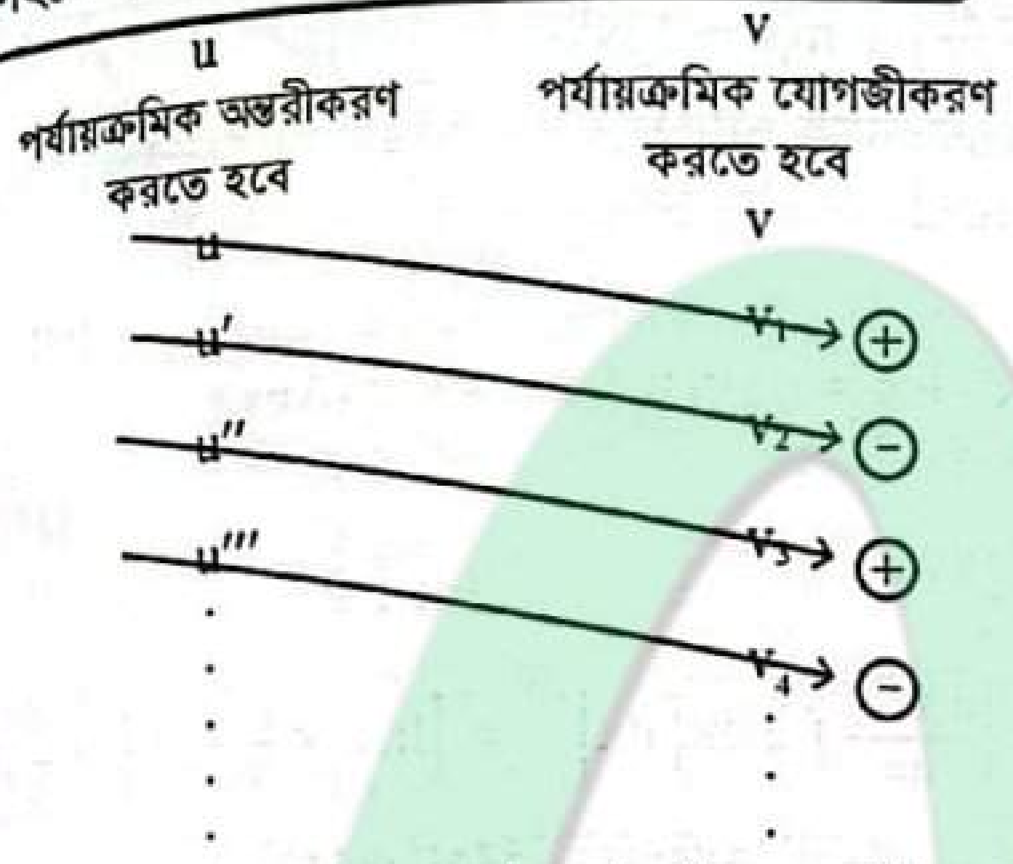
L → Logarithmic Function ($\log_a x$, ln x etc.)
I → Inverse Trigonometric Function ($\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ etc.)
A → Arithmetic/Algebraic Function (x^2, x^3 etc.)
T → Trigonometric Function (sin x, tan x etc.)
E → Exponential Function (e^x, a^x etc.)

যেমন: $\int x\tan^{-1}x\, dx$ এর ক্ষেত্রে LIATE অনুযায়ী $\tan^{-1}x$ inverse function যা আগে / উপরে আছে তাই $\tan^{-1}x$ কে u ধরতে হবে।

এখন, $\int\ u.v\, dx = uv_1 - u'v_2 + u''v_3 - u'''v_4 + \dots \dots \dots \dots \dots$

যেখানে, $u', u'', u''', \dots \dots \dots \dots$ হলো $u = u(x)$ ফাংশনটির x এর সাপেক্ষে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... অন্তরক সহগ এবং, $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots \dots \dots \dots$ হলো $v = v(x)$ ফাংশনটির x এর সাপেক্ষে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ, ... যোগজ।

সহজে মনে রাখার পদ্ধতি (Tabular Method)



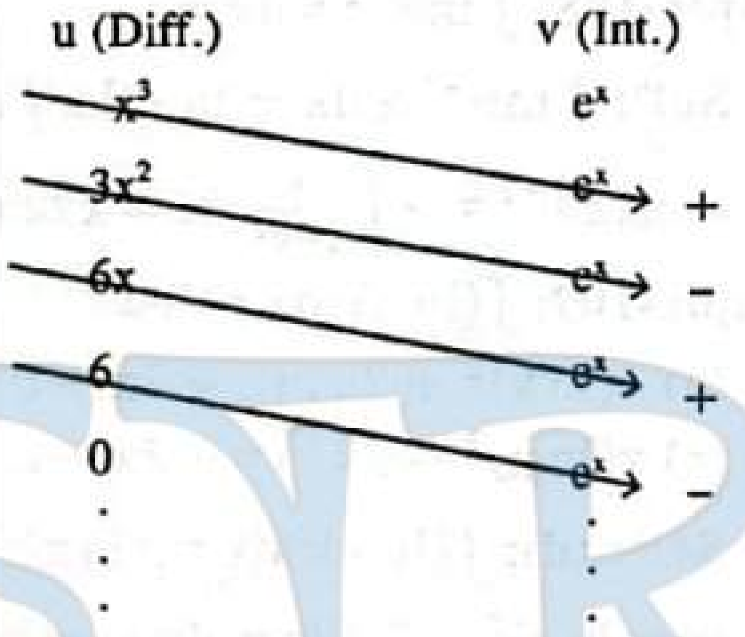
$\therefore \int u.v\,dx = uv_1 - u'v_2 + u''v_3 - u'''v_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

জেনে রাখো

এই পদ্ধতি সবচেয়ে useful যখন u কয়েকবার অন্তরীকরণ করার পর শূন্য হয়ে যায় এবং v সহজে যোগজীকরণ যোগ্য হয়।

Problems

Example-102: $\int x^3 e^x\,dx = ?$



Sol^n: $\int x^3e^x dx$

$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + c$

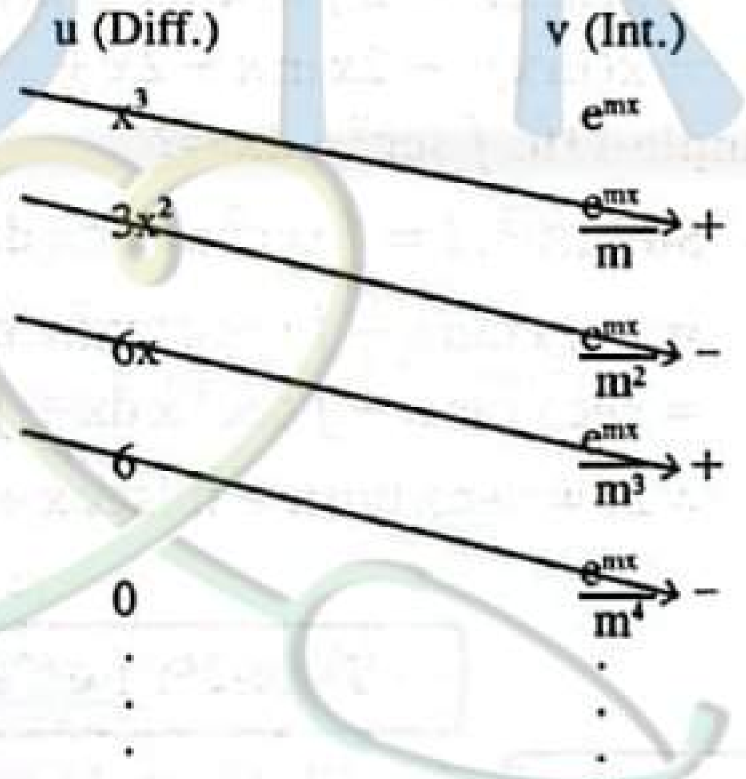
$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$

$= e^x\left[x^3 - \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d^2}{dx^2}(x^3) - \frac{d^3}{dx^3}(x^3)\right] + c$ **(Ans.)**

অনুরূপভাবে, $\int x^5\,e^x dx = e^x[x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120] + c$

$\int x^4\,e^x dx = e^x[x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24] + c$ **(Ans.)**

Example-103. $\int x^3\,e^{mx} dx = ?$



Sol^n: $\int x^3e^{mx}\,dx = x^3\frac{e^{mx}}{m} - 3x^2\frac{e^{mx}}{m^2} + 6x\frac{e^{mx}}{m^3} - 6.\frac{e^{mx}}{m^4} + c$

$= e^{mx}\left[\frac{x^3}{m} - \frac{3x^2}{m^2} + \frac{6x}{m^3} - \frac{6}{m^4}\right] + c$

$= e^{mx}\left[\frac{x^3}{m} - \frac{\frac{d}{dx}(x^3)}{m^2} + \frac{\frac{d^2}{dx^2}(x^3)}{m^3} - \frac{\frac{d^3}{dx^3}(x^3)}{m^4}\right] + c$

অনুরূপভাবে,

$\int x^4\,e^{3x}dx = e^{3x}\left[\frac{x^4}{3} - \frac{4x^3}{3^2} + \frac{12x^2}{3^3} - \frac{24x}{3^4} + \frac{24}{3^5}\right] + c$ **(Ans.)**

$\int x^2e^{5x}\,dx = e^{5x}\left[\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{5^2} + \frac{2}{5^3}\right] + c$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\boxed{\int e^{ax}\,x^n dx = e^{ax}\left[\frac{x^n}{a} - \frac{nx^{n-1}}{a^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3}\ldots\ldots \text{যতক্ষণ পর্যন্ত না constant আসে।}\right] + c}$

Example-104: $\int e^{x^2}.x^9 dx = ?$

Sol^n: ধরি, $x^2 = z \Rightarrow 2x\,dx = dz \Rightarrow x\,dx = \frac{dz}{2}$

$\int e^{x^2}.x^9dx = \int e^{x^2}.(x^2)^4.x\,dx = \frac{1}{2}\int e^z.z^4.dz$

$= \frac{1}{2}e^z[z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 24z + 24] + c$

$= \frac{1}{2}e^{x^2}[x^8 - 4x^6 + 12x^4 - 24x^2 + 24] + c\ [\because z = x^2]$ **(Ans.)**

Formula-01: $\int x^n \cos ax\,dx = x^n \frac{\sin ax}{a} - nx^{n-1}\left(-\frac{\cos ax}{a^2}\right) + n(n-1)x^{n-2}\left(-\frac{\sin ax}{a^3}\right) - \cdots + c$

Formula-02: $\int x^n \sin ax\,dx = x^n\left(-\frac{\cos ax}{a}\right) - nx^{n-1}\left(-\frac{\sin ax}{a^2}\right) + n(n-1)x^{n-2}\left(\frac{\cos ax}{a^3}\right) - \cdots + c$

Note: [x^n × ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের যোগজ + প্রতিবারে চিহ্ন পরিবর্তনসহ পূর্ববর্তী বীজগাণিতিক ফাংশনের অন্তরক ধ্রুবক না আসা পর্যন্ত × পূর্ববর্তী ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের যোগজ + c]

Example-105: $\int x\cos x\ dx = ?$ **[RU' 15-16]**

Sol^n: Using Formula: $\int x\cos x\ dx = x.\sin x - 1.(-\cos x) + c = x\sin x + \cos x + c$ **(Ans.)**

Example-106: $\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx$ এর মান কোনটি? **[JU'22-23]**

(a) $\frac{1}{2}$　(b) $\frac{1}{3}$　(c) $\frac{1}{4}$　(d) 1

Sol^n: (c); $\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx = [\int x\ln x\,dx]_1^{\sqrt{e}} = \left[\ln x\int x\,dx - \int\left\{\frac{d(\ln x)}{dx}\int x\,dx\right\}dx\right]_1^{\sqrt{e}} = \left[\ln x \times \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}dx\right]_1^{\sqrt{e}}$

$= \left[\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x dx\right]_1^{\sqrt{e}} = \left[\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} = \left[\frac{2x^2\ln x - x^2}{4}\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{2(\sqrt{e})^2\ln\sqrt{e} - (\sqrt{e})^2 - 2\times1^2\ln 1 + 1^2}{4}$

$= \frac{2e\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - e - 2\ln 1 + 1}{4} = \frac{2e\times\frac{1}{2}\ln e - e - 2\times0 + 1}{4} = \frac{e.1 - e - 0 + 1}{4} = \frac{1}{4}$

Example-107: $\int x^2\sin x\ dx = ?$

Sol^n: Using Formula: $\int x^2 \sin x\ dx = x^2(-\cos x) - 2x.(-\sin x) + 2.\cos x + c$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$ **(Ans.)**

Example-108: $\int \tan^{-1}x\,dx = ?$

Sol^n: $\int \tan^{-1}x\,dx = \tan^{-1}x\int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int dx\right\}dx$

$= x\tan^{-1}x - \int\frac{x}{1+x^2}dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$ **(Ans.)**

Example-109: $\int(\ln x)^2 dx =$ কত? **[RU'22-23]**

(a) $x(\ln x)^2 + 2x\ln x + 2x + c$　(b) $x(\ln x)^2 + 2x\ln x - 2x + c$

(c) $x(\ln x)^2 - 2x\ln x - 2x + c$　(d) $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$

Sol^n: (d); $\int(\ln x)^2 dx = (\ln x)^2\int dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\ln x)^2\cdot\int dx\right]dx = x(\ln x)^2 - \int\left(2\ln x\cdot\frac{1}{x}\times x\right)dx$

$= x(\ln x)^2 - 2\int\ln x\ dx = x(\ln x)^2 - 2[x\ln x - x] + c\ [\because \int\ln x\,dx = x\ln x - x]$

$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$

Example-110: $\int\sec^3 x\,dx = ?$

Sol^n: ধরি, $I = \int\sec^2 x.\sec x\,dx = \sec x\int\sec^2 x\,dx - \int\left(\frac{d(\sec x)}{dx}\times\int\sec^2 x\,dx\right)dx$

$= \sec x\tan x - \int\sec x\tan^2 x\,dx = \sec x\tan x - \int\sec x(\sec^2 x - 1)dx$

$= \sec x\tan x - \int\sec^3 x\,dx + \int\sec x\,dx \Rightarrow I = \sec x\tan x\ - I + \ln|\sec x + \tan x| + c'$

$\therefore 2I = \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x| + c' \therefore I = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$ **(Ans.)**

Type-25: $\int e^{ax}\sin(bx+c)\,dx, \int e^{ax}\cos(bx+c)\,dx$ আকৃতি [a, b, c ধ্রুবক]

Concept

Written: $I = \int e^{ax}\sin(bx+c)\,dx$ ধরি, $\sin(bx+c)$ কে 'u' এবং e^{ax} কে 'v' ধরে অংশায়ন সূত্রের সাহায্যে যোগজীকরণ করতে হবে। [উদা: দ্রষ্টব্য]

Shortcut

$\int e^{ax}\sin(bx+c)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\ [a\sin(bx+c) - b\cos(bx+c)] + k$

$\int e^{ax}\cos(bx+c)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\ [a\cos(bx+c) + b\sin(bx+c)] + k$ [যেখানে, k = যোগজীকরণ ধ্রুবক]

Problems

Example-111: $\int e^{ax}\sin bx\,dx = ?$

Solⁿ: ধরি, $I = \int e^{ax}\sin bx.\,dx$

$= \sin bx \int e^{ax}dx - \int \frac{d}{dx}(\sin bx)(\int e^{ax}.\,dx)dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \int b\cos bx.\frac{1}{a}e^{ax}.\,dx$

$= \frac{1}{a}e^{ax}.\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}.\cos bx.\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}.\sin bx - \frac{b}{a}.\frac{\cos bx}{a}e^{ax} - \frac{b}{a}\int b.\sin bx.\frac{1}{a}e^{ax}.\,dx$

$= \frac{1}{a}e^{ax}.\sin bx - \frac{b}{a^2}\cos bx.\,e^{ax} - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}.\sin bx.\,dx$

$\Rightarrow I\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{1}{a}e^{ax}.\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}.\cos bx \quad \Rightarrow I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}.(a\sin bx - b\cos bx) + c$ **(Ans.)**

Shortcut: $\int e^{ax}\sin bx\ dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$

Example-112: $\int e^x \sin x\ dx = ?$

Solⁿ: $\int e^x\sin x\ dx = \frac{e^x}{1^2+1^2}(1.\sin x - 1.\cos x) + c = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$ **(Ans.)**

Example-113: $\int e^{2x}\cos 3x\,dx = ?$

Solⁿ: $\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{2^2+3^2}(2\cos 3x + 3\sin 3x) + c = \frac{e^{2x}}{13}(2\cos 3x + 3\sin 3x) + c$ **(Ans.)**

Type-26: $\int e^{ax}\{a\,f(x) + f'(x)\}\,dx$ সংক্রান্ত

Concept

- $\int e^{ax}[a\,f(x) + f'(x)]dx = e^{ax}f(x) + c$
- $\int e^x\,[f(x) + f'(x)]dx = e^x\,f(x) + c$

Problems

Example-114: $\int e^x\,(\sin x - \cos x)dx = ?$

Solⁿ: ধরি, $f(x) = -\cos x \therefore f'(x) = \sin x$

$\int e^x(\sin x - \cos x)dx = \int e^x\{f(x) + f'(x)\}\,dx = e^x f(x) + c = e^x(-\cos x) + c$ **(Ans.)**

Example-115: $\int e^x.\sec x.(1 + \tan x)dx = ?$ **[CU' 15-16]**

Solⁿ: $\int e^x.\sec x.(1 + \tan x)dx = \int e^x.(\sec x + \sec x.\tan x)dx$

$= \int e^x.\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x.f(x) + c = e^x.\sec x + c$ **(Ans.)**

Example-116: $\int e^x\left\{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}\right\}dx = ?$

Solⁿ: $\int e^x\left\{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}\right\}dx\left[\because f(x) = \frac{1}{1-x}; f'(x) = \frac{-1.(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}\right] = e^x.\frac{1}{1-x} + c = \frac{e^x}{1-x} + c$ **(Ans.)**

Example-117: $\int \frac{e^x}{x}\{1 + x\ln x\}dx = ?$

Solⁿ: $\int \frac{e^x}{x}\{1 + x\ln x\}dx = \int e^x\left\{\frac{1}{x} + \ln x\right\}dx$ [ধরি, $f(x) = \ln x \therefore f'(x) = \frac{1}{x}$]

$= \int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + c = e^x\ln x + c$ **(Ans.)**

Example-118: $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = ?$ **[DU'10-11, 00-01, RU'11-12, 09-10, 08-09]**

Solⁿ: $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int e^x\frac{x+1-1}{(x+1)^2}dx\left[\because f(x) = \frac{1}{x+1}; f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}\right] = \int e^x\left\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx = \frac{e^x}{x+1} + c$ **(Ans.)**

Example-119: $\int e^x.\frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}dx = ?$

Solⁿ: $\int e^x.\frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}dx = \int e^x.\frac{1+x^2-2x}{(1+x^2)^2}dx = \int e^x\left\{\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}\right\}dx$

$= \int e^x\left\{\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}\right\}dx\ \left[\because f(x) = \frac{1}{1+x^2}; f'(x) = \frac{(1+x^2)\times 0 - 1(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right] = \int e^x\{\,f(x) + f'(x)\}dx$

$= e^x.f(x) + c = e^x.\frac{1}{1+x^2} + c$ **(Ans.)**

Example-120: $\int e^x \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2} dx = ?$

Sol^n: Let, $\int f(x) = (1+x^2)^{-1} \therefore f'(x) = -1(1+x^2)^{-1-1}.(2x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$\int e^x \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2} dx = \int e^x \left\{\frac{1+x^2-2x}{(1+x^2)^2}\right\} dx = \int e^x \left\{\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}\right\} dx = \int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx$

$= e^x f(x) + c = e^x.\frac{1}{1+x^2} + c = \frac{e^x}{1+x^2} + c$

Example-121: $\int \frac{\log x - 3}{(\log x)^4} dx = ?$

Sol^n: ধরি, $\log x = t \Rightarrow x = e^t \therefore dx = e^t dt$; $\int \frac{\log x - 3}{(\log x)^4} dx = \int \frac{t-3}{t^4} e^t dt$

$= \int e^t \left\{\frac{1}{t^3} - \frac{3}{t^4}\right\} dt$ [ধরি, $f(t) = t^{-3} \therefore f'(t) = -3t^{-4}$] $= e^t f(t) + c = e^t.\frac{1}{t^3} + c = \frac{x}{(\log x)^3} + c$ **(Ans.)**

Example-122: $\int e^{-2x}\left(\frac{1}{x} - 2\ln x\right) dx = ?$

Sol^n: ধরি, $f(x) = \ln x$; $f'(x) = \frac{1}{x}$

$\int e^{-2x}\left(\frac{1}{x} - 2\ln x\right) dx = \int e^{-2x}\{-2f(x) + f'(x)\} dx$

$= e^{-2x} f(x) + c = e^{-2x}.\ln x + c$ **(Ans.)**

Example-123: $\int e^x \left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right) dx = ?$

Sol^n: Let, $f(x) = -\cot\frac{x}{2}$; $f'(x) = \text{cosec}^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\text{cosec}^2\frac{x}{2}$; $\int e^x\left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right) dx = \int e^x\left(\frac{1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right) dx$

$\int e^x \left\{\frac{1}{2}\text{cosec}^2\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}\right\} dx = \int e^x\{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c = -e^x \cot\frac{x}{2} + c$ **(Ans.)**

Example-124: $\int_0^1 \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^2} dx = ?$

Sol^n: $\int_0^1 \frac{e^x(x^2+1)dx}{(x+1)^2} = \int_0^1 e^x\left\{\frac{(x^2-1)+2}{(x+1)^2}\right\} dx = \int_0^1 e^x\left\{\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right\} dx = \int_0^1 e^x\{f(x) + f'(x)\} dx$

$= [e^x f(x)]_0^1 = \left[\frac{e^x(x-1)}{x+1}\right]_0^1 = \frac{e^1(1-1)}{1+1} - \frac{e^0(0-1)}{0+1} = 0 + \frac{1}{1} = 1$ **(Ans.)**

Type-27: আংশিক ভগ্নাংশ সংক্রান্ত

Concept

আংশিক ভগ্নাংশ এর কৌশল: $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

প্রকৃত ভগ্নাংশ:

- হরে x এর একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক বিদ্যমান
- কোন উৎপাদকের পুনরাবৃত্তি ঘটেনি।

Thumb Rule

- **অভিজ্ঞতালব্ধ ফল:**

$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$

$\swarrow$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

একই মানটি $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ ভগ্নাংশের $(x-1)$ উৎপাদক বাদে বাকি অংশে বসাই,

অর্থাৎ, $\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1^2+1}{(1-2)(1-3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1$

একই ভাবে বাকি গুলো বের করা হয়েছে।

এখন, $I=\int\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{5}{x-2}+\frac{5}{x-3}\right)dx=\ln|x-1|-5\ln|x-2|+5\ln|x-3|+c$

এখন, $\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

অপ্রকৃত ভগ্নাংশ: লবের সর্বোচ্চ Power এবং হরের সর্বোচ্চ Power সমান।

- হরে একঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক বিদ্যমান
- কোন উৎপাদকের পুনরাবৃত্তি ঘটেনি।

$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{8}{x-2}+\frac{\frac{27}{2}}{x-3}=1+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{8}{x-2}+\frac{27}{2(x-3)}$

এখন, $I=\int\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx=\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-8\int\frac{dx}{x-2}+\frac{27}{2}\int\frac{dx}{x-3}$

$=x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-8\ln|x-2|+\frac{27}{2}\ln|x-3|+c$

Problem $\frac{x^2+x+3}{(x-2)(x+1)}=1+\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+1}$

আরেক ভাবে প্রকাশ করা যায়: $\frac{x^2+x+3}{(x-2)(x+1)}=\frac{\text{হর+অবশিষ্ট (balance)}}{(x-2)(x+1)}=\frac{(x^2-x-2)+(2x+5)}{(x-2)(x+1)}=1+\frac{2x+5}{(x-2)(x+1)}=1+\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+1}$

Problems

Example-125: $\int\frac{x+1}{(x-3)(x+2)}dx=?$

Solⁿ: $\int\frac{x+1}{(x-3)(x+2)}dx=\int\left\{\frac{3+1}{(3+2)(x-3)}+\frac{-2+1}{(-2-3)(x+2)}\right\}dx=\int\left\{\frac{4}{5(x-3)}+\frac{1}{5(x+2)}\right\}dx$

$=\frac{4}{5}\ln|x-3|+\frac{1}{5}\ln|x+2|+c$ **(Ans.)**

Example-126: $\int\frac{\cos x\,dx}{(2+\sin x)\,(1+\sin x)}=?$

Solⁿ: $I=\int\frac{\cos x\,dx}{(2+\sin x)\,(1+\sin x)}=\int\frac{dz}{(2+z)\,(1+z)}$ [ধরি, $z=\sin x\Rightarrow dz=\cos x\,dx$]

$=\int\frac{\frac{1}{1-2}}{2+z}dz+\int\frac{\frac{1}{2-1}}{1+z}dz=\int\frac{1}{1+z}dz-\int\frac{dz}{2+z}$

$=\ln|1+z|-\ln|2+z|+c=\ln|1+\sin x|-\ln|2+\sin x|+c$ **(Ans.)**

Example-127: $\int\frac{x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)}dx=?$

Solⁿ: Let, $x^2=t\;\therefore\frac{x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)}=\frac{t+1}{(t+2)(t+3)}$

এখন, $\frac{t+1}{(t+2)(t+3)}=\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t+3}$ ……… (i) $\Rightarrow t+1=A(t+3)+B(t+2)$

এখন, $t=-3$ হলে, $\therefore -2=B(-3+2)\therefore B=2$ এবং $t=-2$ হলে, $\therefore -1=A(-2+3)\therefore A=-1$

$\therefore$ (i) হতে: $\frac{t+1}{(t+2)(t+3)}=-\frac{1}{t+2}+\frac{2}{(t+3)}\Rightarrow\int\frac{x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)}dx=-\int\frac{dx}{x^2+2}+\int\frac{2\,dx}{x^2+3}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}+c$ **(Ans.)**

Example-128: $\int\frac{e^x\,dx}{e^{3x}-3e^{2x}}=?$

Solⁿ: ধরি, $e^x=t\Rightarrow e^xdx=dt$; $\int\frac{e^x\,dx}{e^{3x}-3e^{2x}}=\int\frac{e^xdx}{(e^x)^3-3(e^x)^2}=\int\frac{dt}{t^3-3t^2}=\int\frac{dt}{t^2(t-3)}$

এখন, $\frac{1}{t^2(t-3)}=\frac{A}{t^2}+\frac{B}{t}+\frac{C}{t-3}$ ……… (i) $\therefore 1=A(t-3)+Bt(t-3)+ct^2\;\therefore t=3$ হলে, $\Rightarrow 1=9c\Rightarrow c=\frac{1}{9}$

এবং $t=0$ হলে $\Rightarrow 1=A(0-3)\Rightarrow A=-\frac{1}{3}$ আবার, $0=B+C$ [t^2 এর সহগ সমীকৃত করে] $\Rightarrow 0=B+\frac{1}{9}\Rightarrow B=-\frac{1}{9}$

$\therefore$ (i) হতে পাই: $\frac{1}{t^2(t-3)}=-\frac{1}{3t^2}-\frac{1}{9t}+\frac{1}{9(t-3)}\Rightarrow\int\frac{1}{t^2(t-3)}dt=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2}-\frac{1}{9}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{9}\int\frac{dt}{t-3}$

$=\frac{1}{3}\frac{1}{t}-\frac{1}{9}\ln|t|+\frac{1}{9}\ln|t-3|+c\;\therefore\int\frac{dx}{e^{2x}-3e^{x}}=\frac{1}{3e^x}-\frac{1}{9}\ln|e^x|+\frac{1}{9}\ln|e^x-3|+c$ **(Ans.)**

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

01. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

02. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$; $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$

03. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

04. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

05. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

06. $\int e^x dx = e^x + c$

07. $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$

08. $\int \cos x\, dx = \sin x + c = \int d(\sin x)$

09. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c = \int d(-\cos x)$

10. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c = \int d(\tan x)$

11. $\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$

12. $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$

13. $\int \text{cosec}\, x \cot x\, dx = -\text{cosec}\, x + c$

14. $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$

15. $\int \sec x\, dx = \ln\left|\tan\left[\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right]\right| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c$

16. $\int \cot x\ dx = \ln|\sin x| + c = -\ln|\text{cosec}\, x| + c$

17. $\int \text{cosec}\, x\, dx = \ln\ |\tan\frac{x}{2}| + c = \ln|\text{cosec}\, x - \cot x| + c$

18. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$; $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$

20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + c$

21. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

22. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

25. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

26. $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + c$

27. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

28. $\int e^{ax} \sin(bx + d)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\sin(bx + d) - b\cos(bx + d)\} + c$

29. $\int e^{ax} \cos(bx + d)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\cos(bx + d) + b\sin(bx + d)\} + c$

30. $\int (uv) dx = u\int v dx - \int\{\frac{du}{dx}\int v dx\}dx + c$

এখানে প্রথম ফাংশন u এর নির্বাচন LIATE শব্দটি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

L→Logarithm, I→Inverse, A→Algebraic, T→Trigonometric, E→Exponential

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম

MCQ

01. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-9x}} dx = ?$

(a) $-\frac{1}{6}(1+9x)^{\frac{2}{3}}+c$ (b) $\frac{1}{6}(1+9x)^{\frac{2}{3}}+c$ (c) $-\frac{1}{6}(1-9x)^{\frac{2}{3}}+c$ (d) None

02. $\int \frac{1}{(1-2x)^2} dx = ?$

(a) $\frac{1}{(1+2x)}+c$ (b) $\frac{1}{2(1-2x)}+c$ (c) $\frac{1}{(1-2x)}+c$ (d) None

03. $\int \frac{dx}{(1+\cos 2x)} = ?$

(a) $0.5\cos x + c$ (b) $0.5\tan x + c$ (c) $0.5\sin x + c$ (d) $0.5\tan^{-1} x + c$

04. $\int e^x \tan(e^x) dx = ?$

(a) $\ln|\tan(e^x)|+c$ (b) $\ln|\cos(e^x - x)|+c$ (c) $\ln|\sec(e^x)|+c$ (d) $\ln|\cot(e^x)|+c$

05. $\int \left(e^x+\frac{1}{x}\right)(e^x+\ln x) dx = ?$

(a) $\frac{1}{2}(e^x+\ln x)+c$ (b) $\frac{1}{2}\left(e^x+\frac{1}{x}\right)+c$ (c) $\frac{1}{2}(e^x+\ln x)^2+c$ (d) $\frac{1}{2}\left(e^x+\frac{1}{x}\right)^2+c$

06. $\int \log 2dx =$ কত?

(a) $x\log 2 + c$ (b) $\log 2x + c$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\log x - x + c$

07. $\int xe^{x^2} dx$ এর মান হলো–

(a) $\frac{1}{2}\log_e 2x + c$ (b) $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$ (c) $2e^{x^2}+c$ (d) $\frac{1}{x}\log e^x + c$

08. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ এর মান কত?

(a) $\tan x + \sec x + c$ (b) $\tan x - \sec x + c$ (c) $\cos 2x + c$ (d) $\sin 2x + c$

09. $\int \frac{72\cos 8x + 3x^2}{x^3+9\sin 8x} =$ কত?

(a) $\ln(x^3+9\sin 8x)+c$ (b) $e^{7\cos 8x + 3x^2}+c$
(c) $\cos 8x \ln(x^3 - 9\sin 8x)+c$ (d) $3\sin 8x \ln(x^3+9\sin 8x)+c$

10. $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx$ এর যোজিত ফল–

(a) $\frac{\sin x}{\ln x}+c$ (b) $\cos(\ln x)+c$ (c) $\sin(\ln x)+c$ (d) $\frac{\cos x}{\ln x}+c$

11. $\int (\sec^2\theta - \tan^2\theta) d\theta =$ কত?

(a) $\theta + c$ (b) $\cot\theta - \sqrt{\tan\theta} + c$
(c) θ (d) $\tan^{-1}\theta + \cos\theta + c$

12. নিচের কোনটি $\sin x \cos x$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ নয়?

(a) $\frac{1}{4}\cos 2x + c$ (b) $-\frac{1}{4}\cos 2x + c$ (c) $\frac{1}{2}\sin^2 x + c$ (d) $-\frac{1}{2}\cos^2 x + c$

13. $\int \frac{3x^2}{1+x^6} dx = f(x) + c$ হলে $f(x)$ এর মান কত?

(a) $\tan^{-1} x^3 + c$ (b) $\sin^{-1} x^3 + c$ (c) $\frac{1}{1+x^3}+c$ (d) $\cos^{-1} x^3 + c$

14. $\frac{1}{\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$ এর একটি অনির্দিষ্ট যোগজ–

(a) $\sqrt{\cot x}\ln(\sin x)+c$ (b) $\sin x\sqrt{\tan x}+c$ (c) $-2\sqrt{\cot x}+c$ (d) $\frac{2}{3}(\tan x)^{\frac{1}{2}}+c$

15. $\int \frac{5e^{2x}}{1+e^{4x}}dx = ?$

(a) $\frac{2}{5}\tan(e^{-2x}) + c$
(b) $\frac{5}{2}\tan(e^{2x}) + c$
(c) $\frac{5}{2}\tan^{-1}(e^{2x}) + c$
(d) $\frac{5}{2}\tan^{-1}(e^{-2x}) + c$

16. $\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = ?$

(a) $\tan^{-1}\frac{x+1}{x+3}$
(b) $\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|$
(c) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|$
(d) $\ln(\sqrt{x^2+4}+x)$

17. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-\sin 2x}}dx = ?$

(a) $\sqrt{\sin 2x}$
(b) $\sqrt{\cos 2x}$
(c) $2\sqrt{\sin x - \cos x}$
(d) $\ln(\sin x - \cos x)$

18. $\int \frac{x}{x^2+1}dx$ কত?

(a) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$
(b) $\frac{1}{2}(x^2+1)$
(c) $\ln(x^2+1)$
(d) $2\ln(x^2+1)$

19. $\int \frac{e^{a\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ এর মান —

(a) $\frac{e^{a\sin^{-1}x}}{a} + c$
(b) $\frac{1}{a}e^{\sin^{-1}x} + c$
(c) $ae^{\sin^{\sin^{-1}x}} + c$
(d) None

20. $\int e^x(\sec^2 x + \tan x)dx = ?$

(a) $e^x\tan x + c$
(b) $e^x\sec^2 x + c$
(c) $\tan x + c$
(d) $\sec^2 x + c$

21. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$ এর মান কোনটি?

(a) $\frac{\pi}{3}$
(b) $\frac{\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{8}$
(d) $\frac{2\pi}{3}$

22. $F(x) = \int_1^x 2\ln x^2 dx$ হলে $F'(e) = ?$

(a) 2
(b) 4
(c) $2\ln 4$
(d) None

23. $F(x) = \int_0^x \frac{t-3}{t^2+7}dt$ হলে x এর কোন মানের জন্য F(x) ন্যূনতম হবে?

(a) 0
(b) 3
(c) $\sqrt{7}$
(d) $-\sqrt{7}$

24. $\int_0^{10}|x-5|dx$ এর মান

(a) 5
(b) $\frac{25}{2}$
(c) 25
(d) 50

25. $\int_0^x f(p)f'(p)dp$ এর মান কত?

(a) $\frac{1}{2}f^2(x)$
(b) $\frac{1}{2}x^2$
(c) $\frac{1}{2}[\{f(x)\}^2 - \{f(0)\}^2]$
(d) $f(x) - f(0)$

26. $\int \frac{xe^{-x}dx}{(x+1)^2} = ?$

(a) $\frac{-e^{-x}}{x+1} + c$
(b) $\frac{e^{-x}}{x+1} + c$
(c) $\frac{-e^{-x}}{(x-1)^2}$
(d) $\frac{e^{-x}}{(x-1)^2} + c$

27. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}} = ?$

(a) $2\sqrt{1+\tan x} + c$
(b) $\sqrt{1+\tan x} + c$
(c) $\frac{1}{2}\sqrt{1+\tan x} + c$
(d) None

28. $\int \frac{e^{-x}(1-x)}{\cos^2(xe^{-x})}dx = ?$

(a) $\sin(e^{-x}) + c$
(b) $\tan(xe^{-x}) + c$
(c) $\cos(xe^{-x}) + c$
(d) $\cot(xe^{-x}) + c$

29. $\int_0^4 f(x)dx = 5$ হলে, $\int_1^5 f(x-1)dx = ?$

(a) 4
(b) 6
(c) 0
(d) 5

30. $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln k$ হলে $k = ?$

(a) 9
(b) 3
(c) 10
(d) 81

Written

31. $\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)} dx = ?$

32. $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx = ?$

33. $\int \tan^5 x \, dx = ?$

34. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$

35. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = ?$

36. $\int \frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)} dx = ?$

37. $\int \frac{2x dx}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}} = ?$

38. $\int \frac{dx}{1+8\cos^2 x} = ?$

39. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x}} = ?$

40. $\int_2^e \left\{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\right\} dx = ?$

প্র্যাক্টিস প্রবলেমের সমাধান

MCQ

01. **Sol^n: (c);** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-9x}} = \int (1-9x)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{(1-9x)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \times \left(-\frac{1}{9}\right) + c = \frac{3}{2} \times (1-9x)^{\frac{2}{3}} \times \left(-\frac{1}{9}\right) + c = -\frac{1}{6}(1-9x)^{\frac{2}{3}} + c$

02. **Sol^n: (b);** $\int \frac{dx}{(1-2x)^2} = \int (1-2x)^{-2} dx = \frac{(1-2x)^{-2+1}}{-2+1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + c = \frac{1}{2}(1-2x)^{-1} + c = \frac{1}{2(1-2x)} + c$

03. **Sol^n: (b);** $\int \frac{dx}{1+\cos 2x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \sec^2 x dx = \frac{1}{2}\tan x + c = 0.5 \tan x + c$

04. **Sol^n: (c);** ধরি, $e^x = t, e^x . dx = dt \therefore \int e^x \tan(e^x) dx$

$= \int \tan t \, dt = \ln|\sec t| + c = \ln|\sec(e^x)| + c$ আবার, Answer কে Differentiate করলে প্রশ্নটা পাওয়া যায়।

$\frac{d}{dx}\ln(\sec(e^x)) = \frac{1}{\sec e^x} . \sec e^x . \tan e^x \, e^x = e^x . \tan e^x$

05. **Sol^n: (c);** ধরি, $e^x + \ln x = t \Rightarrow \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx = dt$

$\int \left(e^x + \frac{1}{x}\right)(e^x + \ln x) dx = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}(e^x + \ln x)^2 + c$

আবার, Answer কে Differentiate করলে প্রশ্নটা পাওয়া যায়।

$\frac{d}{dx}\frac{1}{2}(e^x + \ln x)^2 = \frac{1}{2} . 2(e^x + \ln x) . \left(e^x + \frac{1}{x}\right) = (e^x + \ln x) . \left(e^x + \frac{1}{x}\right)$

এভাবে অপশনগুলো Differentiate করেও Answer পাওয়া যেতে পারে।

06. **Ans:** (a) $x \log 2 + c$

07. **Sol^n: (b);** ধরি, $z = x^2$ বা, $dz = 2x \, dx$

$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^z \, dz = \frac{1}{2} e^z + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

08. **Sol^n: (b);** $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int \sec^2 x \, dx - \int \tan x \sec x dx = \tan x - \sec x + c$

09. **Sol^n: (a);** $x^3 + 9\sin 8x = z$

$3x^2 + 72\cos 8x = dz \therefore \int \frac{72\cos 8x + 3x^2}{x^3 + 9\sin 8x} dx = \int \frac{dz}{z} = \ln z + c$

10. **Ans:** (c) $\sin(\ln x) + c$

11. **Solⁿ: (a);** $\int(\sec^2\theta - \tan^2\theta)d\theta = \int 1d\theta = \theta + c$

12. **Solⁿ: (a);** $\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + c$

$-\frac{1}{4}\cos 2x + c = -\frac{1}{4}(2\cos^2 x - 1) + c$

$= -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{4} + c = -\frac{1}{2}\cos^2 x + c'$

আবার, $-\frac{1}{4}\cos 2x + c = -\frac{1}{4}(1 - 2\sin^2 x) + c$

$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x + c = \frac{1}{2}\sin^2 x + c'$

সুতরাং, অপশন (a), $\sin x \cos x$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ নয়।

13. **Ans:** (a) $\tan^{-1} x^3 + c$

14. **Ans: (c);** [$\cot x = z$ ধরে]

15. **Solⁿ: (c);** $\int \frac{5e^{2x}}{1+e^{4x}}dx = 5\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$

$= \frac{5}{2}\tan^{-1} e^{2x} + c \left[\tan^{-1}x + c = \int \frac{dx}{1+x^2}\right]$

16. **Ans:** (c) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|$

17. **Ans:** (d) $\ln(\sin x - \cos x)$

18. **Ans:** (a) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$

19. **Ans:** (a) $\frac{e^{a\sin^{-1}x}}{a} + c$

20. **Solⁿ: (a);** সূত্র: $\int e^{ax}[a\,f(x) + f'(x)]dx = e^{ax}f(x) + c$

21. **Solⁿ: (c);** $\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2xdx}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\,[\tan^{-1}x^2]_0^1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{8}$

22. **Solⁿ: (b);** $F(x) = \int_1^x 2\ln x^2 dx$

$\therefore F'(x) = 2\ln x^2 \therefore F'(e) = 2\ln e^2 = 4\ln e = 4$

23. **Solⁿ: (b);** $F'(x) = \frac{x-3}{x^2+7} = 0 \Rightarrow x = 3$

24. **Solⁿ: (c);** $\int_0^{10}|x - 5|dx$

$= \int_0^5(-x + 5)dx + \int_5^{10}(x - 5)dx = \left[\frac{-x^2}{2} + 5x\right]_0^5 + \left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_5^{10}$

$= \frac{-25}{2} + 25 - 0 + \frac{100}{2} - 50 - \frac{25}{2} + 25 = 25$

25. **Solⁿ: (c);** $\int_0^x f(p)f'(p)dp = \frac{1}{2}[\{f(p)\}^2]_0^x = \frac{1}{2}[\{f(x)\}^2 - \{f(0)\}^2]$

26. **Solⁿ: (a);** $\int \frac{xe^{-x}dx}{(x+1)^2} = \int \frac{(x+1-1)e^{-x}dx}{(x+1)^2}$

$= \int e^{-x}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right] = -\int e^{-x}\left[\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right] = -\frac{e^{-x}}{x+1} + c$

27. **Solⁿ: (a);** $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}$

$= \int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1+\tan x}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} = 2\sqrt{1 + \tan x} + c$

28. **Solⁿ: (b);** $xe^{-x} = z \Rightarrow (-xe^{-x} + e^{-x})dx = dz \Rightarrow e^{-x}(1 - x)dx = dz$

$\therefore \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \int \sec^2 z dz = \tan z + c = \tan(xe^{-x}) + c$

29. **Solⁿ: (d);** $\int_a^b f(x)dx = p$ হলে, $\int_{a+y}^{b+y} f(x - y)dx = p$

30. **Solⁿ: (a);** $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = [\ln(2x - 1)]_1^5 = \ln 9 - \ln 1 = \ln 9 \therefore k = 9$

Written

31. Solⁿ: ধরি, $\ln(\sin x) = z$; $dz = \frac{\cos x}{\sin x} dx = \cot x\, dx$; $\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)} dx = \int \frac{dz}{z} = \ln(z) + c = \ln(\ln(\sin x)) + c$

32. Solⁿ: $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x + \sec^2 x)\, dx = -\cot x + \tan x + c$

Or, $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \int \sec^2 x\,(1 + \cot^2 x) dx = \int (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x) dx = \tan x - \cot x + c$

Or, $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{(2\sin x \cos x)^2} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \int 4 \operatorname{cosec}^2 2x\, dx = -2\cot 2x + c$

33. Solⁿ: $\int \tan^5 x\, dx = \int \tan x\,(\tan^2 x)^2\, dx$

$= \int \tan x\,(\sec^2 x - 1)^2\, dx = \int \tan x\,(\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1)\, dx$

$= \int (\tan x \sec^4 x - 2\tan x \sec^2 x + \tan x) dx$

$= \int \tan x\,(1 + \tan^2 x)\, d(\tan x) - 2\int \tan x\, d(\tan x) + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$= \int (\tan x + \tan^3 x)\, d(\tan x) - 2\int \tan x\, d(\tan x) + \{-\ln(\cos x)\}$

$= \frac{\tan^2 x}{2} + \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{2\tan^2 x}{2} + \ln|\sec x| + c = \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\sec x| + c$

34. Solⁿ: $I = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; $x = a\tan\theta$; $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

$I = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{(a^2+a^2\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{(a^2\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^3\sec^3\theta}$

$= \frac{1}{a^2}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{a^2}\sin\theta = \frac{1}{a^2}\sin(\tan^{-1}\frac{x}{a}) + c$

35. Solⁿ: $I = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| = \ln|e^x + e^{-x}| + c$

36. Solⁿ: $I = \int \frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{\frac{-1}{-1\times(-2)}}{x} + \frac{\frac{2-1}{1\times(-1)}}{x-1} + \frac{\frac{4-1}{2\times1}}{x-2}\right) dx$

$= \int \left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{x}\right) dx - \int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-2}$

$= \frac{-1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x-2| + c$

37. $\int \frac{2xdx}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}$

$= \int \frac{dz}{-z^2 \times z} = \int \frac{-dz}{z^3}$ | ধরি, $x^2 - 1 = z^2$
| $\Rightarrow 2xdx = dz$

$= \frac{-z^{-3+1}}{-3+1} + c = \frac{z^{-2}}{2} + c = \frac{1}{2z^2} + c = \frac{1}{2(x^2-1)} + c$

38. $\int \frac{dx}{1+8\cos^2 x}$ ধরি, $\tan x = z \Rightarrow \sec^2 x\, dx = dz$

$= \int \frac{\sec^2 x\, dx}{8+\sec^2 x} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{8+1+\tan^2 x} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{9+\tan^2 x}$

$= \int \frac{dz}{3^2+z^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{z}{3}\right) + c = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{3}\right) + c$

39. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{1-(1-x)}{\sqrt{1-x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx - \int \sqrt{1-x}\, dx$

$= -2\sqrt{1-x}\, dx - (-1)\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + c = -2\sqrt{1-x} + \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + c$

40. $\int_2^e \left\{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\right\} dx$

$= \int_{\ln 2}^{1} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right) e^z dz = \int_{\ln 2}^{1} e^z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right) dz$

$= \left[\frac{e^z}{z}\right]_{\ln 2}^{1} = \frac{e}{1} - \frac{e^{\ln 2}}{\ln 2} = e - \frac{2}{\ln 2}$

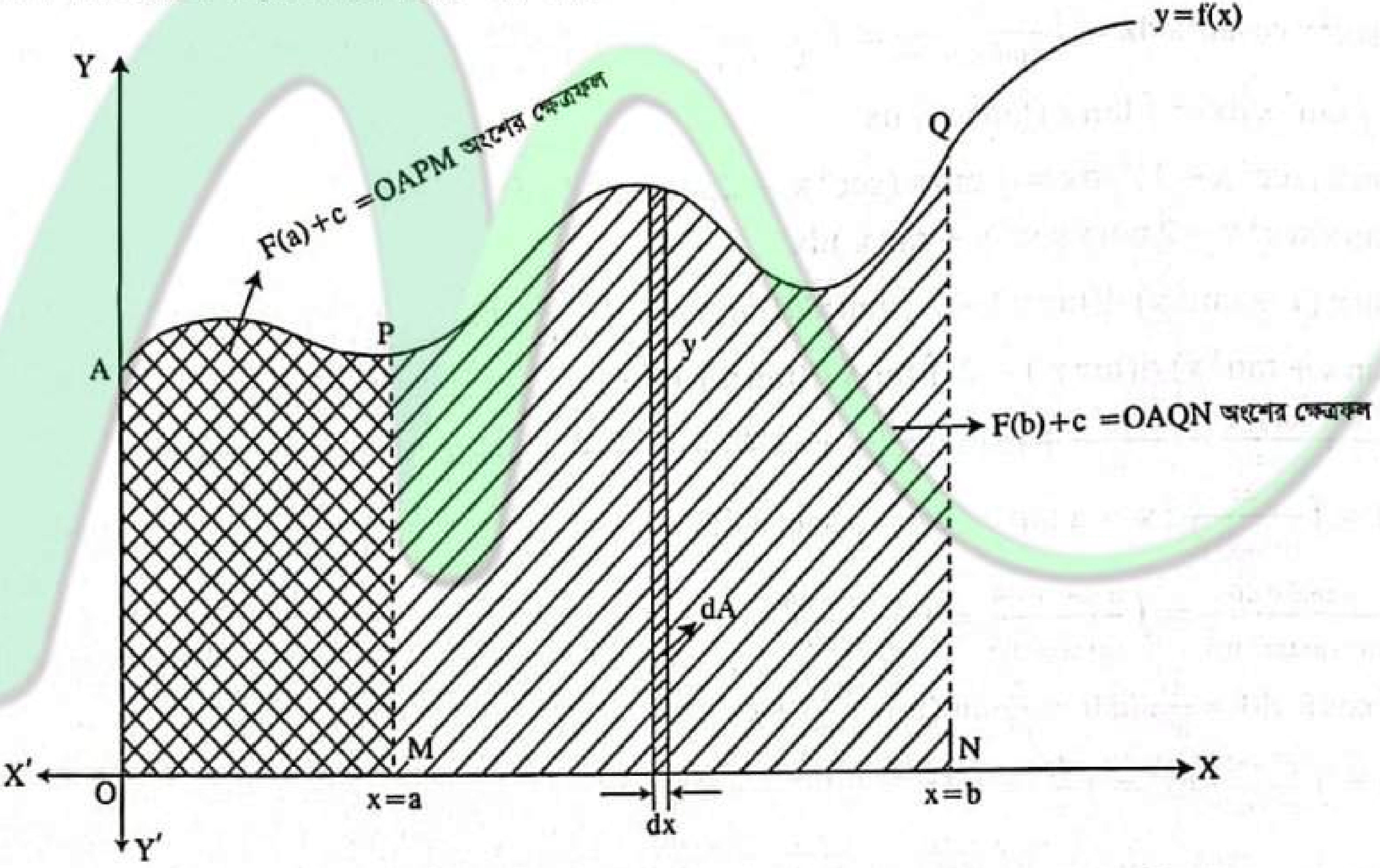
ধরি, $\ln x = z$
$\Rightarrow x = e^z \Rightarrow dx = e^z dz$
$\therefore dx = e^z dz$

x	2	e
z	ln 2	1

নির্দিষ্ট যোগজ

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

অনির্দিষ্ট যোগজে আমরা x এর কোন নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে যোগজীকরণ করিনি। কিন্তু বাস্তব জীবনে আমাদের x এর একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে যোগজীকরণ করা প্রয়োজন হয়। নিচের চিত্রটি লক্ষ কর।



মনে করি, $y = f(x)$ একটি ফাংশন যার চিত্র উপরের ন্যায়। আমরা চাচ্ছি $x = a$ থেকে $x = b$ পর্যন্ত উক্ত ফাংশন এবং x-অক্ষের মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে [PQNM অংশের ক্ষেত্রফল]। এই লক্ষ্যে খুবই ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশ 'dx' বিবেচনা করা হচ্ছে। উক্ত ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশ $y = f(x)$ ফাংশনটির সাথে যে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র আয়তক্ষেত্র তৈরী করেছে তার ক্ষেত্রফল, $dA = y.dx = f(x).dx$

তাহলে, $x = a$ থেকে $x = b$ পর্যন্ত $y = f(x)$ এবং x অক্ষের মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফলকে [PQNM অংশের ক্ষেত্রফল] নিম্নরূপে প্রকাশ করা হয়, $A = \int_{x=a}^{x=b} f(x).dx = \int_a^b f(x).dx$ [যদি একটিই চলক থাকে (যেমন x) তাহলে, $x = a$ না লিখে শুধু a লেখা হয়]

এখানে, $x = a$ বা 'a' কে বলা হয় যোগজীকরণের নিম্ন সীমা [Lower Limit of Integration] এবং $x = b$ বা 'b' কে বলা হয় যোগজীকরণের উর্ধ্ব সীমা [Upper Limit of Integration]

এখন, মনে করি, $\int f(x)dx = F(x) + c$ [$y = f(x)$ ফাংশনটির অনির্দিষ্ট যোগজের মান $F(x) + c$]

$F(x) + c$ দ্বারা বোঝানো হতো $x = 0$ থেকে $x = x$ (যেকোন চলমান x এর মান) পর্যন্ত $y = f(x)$ এবং x অক্ষের মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল।

তাহলে, $x = a, F(x)$-এ বসালে, $F(a) + c$, পাওয়া যায়। যেখানে $F(a) + c$ হলো $x = 0$ হতে $x = a$ পর্যন্ত $y = f(x)$ এবং x অক্ষের মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল, [OAPM অংশের ক্ষেত্রফল]

অনুরূপভাবে, $x = b, F(x)$-এ বসালে $F(b) + c$ পাওয়া যায়। যেখানে $F(b) + c$ হলো $x = 0$ হতে $x = b$ পর্যন্ত $y = f(x)$ এবং x অক্ষের মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল, [OAQN অংশের ক্ষেত্রফল]

তাহলে, $\int_a^b f(x)dx$ = PQNM অংশের ক্ষেত্রফল = OAQN অংশের ক্ষেত্রফল – OAPM অংশের ক্ষেত্রফল $= \{F(b) + c\} - \{F(a) + c\}$

$= F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a)$ [অর্থাৎ, নির্দিষ্ট যোগজের ক্ষেত্রে যোগজীকরণ ধ্রুবক, c থাকে না]

$\therefore \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

নির্দিষ্ট যোগজের ধর্মাবলী

(i) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (ii) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(iii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ [যেখানে, $a < c < b$] (iv) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

যোজীকরণের অন্যান্য ধর্মাবলী

(i) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ (ii) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

প্রমাণ: ধরি, (i) $I = \int_a^b f(a+b-x)dx = \int_b^a f(z)(-dz) = -\int_b^a f(z)dz$

$= \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(x)dx \left[\because \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;\ \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(x)dx\right.$

$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

ধরি, $a + b - x = z \Rightarrow dx = -dz$
$x = a$ হলে, $y = b$ এবং
$x = b$ হলে, $y = a$

Note: (i)-এ $a = 0$ এবং $b = a$ বসালে (ii) নং পাওয়া যায়। অথবা, পূর্ববর্তী পদ্ধতি ব্যবহার করেও প্রমাণ করা যায়।

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

Type-28: নির্দিষ্ট যোগজের সাধারণ সমস্যা

Concept

এই type এর সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে আগে অনির্দিষ্ট যোগজের মত integration করতে হবে। এরপর লিমিট বসিয়ে Answer বের করতে হবে।

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$; যেখানে, $F(x) + c$ হলো $f(x)$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ।

আবার, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ [সেখানে $a < c < b$]

Problems

Example-129: $2\int_0^1 \operatorname{cosec}\left(\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)dx = ?$ **[GST'22-23]**

(a) 2.5 (b) 2.0 (c) 1.5 (d) 1.0

Solⁿ: (d); $2\int_0^1 \operatorname{cosec}\left(\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)dx = 2\int_0^1 \operatorname{cosec}(\operatorname{cosec}^{-1}x)dx = 2\int_0^1 x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = [x^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$

Example-130: $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx = ?$

Solⁿ: ধরি, $z = \tan^{-1}x$; $dz = \frac{dx}{1+x^2}$; $x = 1$ হলে $z = \frac{\pi}{4}$; $x = 0$ হলে $z = 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 - 0^3\right\} = \frac{\pi^3}{192}$ (Ans.)

Example-131: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\cos\theta\,d\theta =$ কত? **[RU'09-10, CU'12-13, 03-04, 08-09, 11-12]**

Solⁿ: $\sin\theta = y \Rightarrow \cos\theta\,d\theta = dy \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\cos\theta = \int_0^1 y^5 dy = \left[\frac{y^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$ (Ans.)

θ	0	$\frac{\pi}{2}$
y	0	1

Example-132: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^3\theta\tan\theta\,d\theta = ?$

Solⁿ: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^2\theta.\sec\theta\tan\theta\ d\theta$ ধরি, $u = \sec\theta \therefore du = \sec\theta\tan\theta\ d\theta$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$
u	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore I = \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 1^3\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{8}{3\sqrt{3}} - 1\right] = \frac{1}{27}(8\sqrt{3} - 9)$ (Ans.)

Example-133: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = ?$ [JU' 18-19, CU' 18-19, 08-09, RU' 07-08]

Sol^n: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = \left[\tan\frac{x}{2}\right]_{\frac{x}{2}=0}^{\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan(0) = 1$ **(Ans.)**

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$

Alternative: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$

Example-134: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \; dx = ?$

Sol^n: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x \sin 2x \, dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x - \cos 3x)dx = \frac{1}{2}\left[\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}[\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} - 0] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3}(-1)\right] = \frac{2}{3}.$ **(Ans.)**

Alternative Solve:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x \; \cos x \, dx = \int_0^1 2\sin^2 x \; d(\sin x) = \left[\frac{2\sin^3 x}{3}\right]_{\sin x=0}^{\sin x=1} = \frac{2}{3}$ **(Ans.)**

Example-135: $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x} - 1\right)dx = [2\ln|1+x| - x]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$ **(Ans.)**

Example-136: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = ?$

Sol^n: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x \, dx}{a^2 + b^2\tan^2 x}$ [ধরি, $b\tan x = u \therefore b\sec^2 x \, dx = du \Rightarrow \sec^2 x \, dx = \frac{1}{b}du$]

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	∞

$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x \, dx}{a^2 + (b\tan x)^2} = \frac{1}{b}\int_0^{\infty} \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{u}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{ab}(\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0) = \frac{1}{ab}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2ab}$ **(Ans.)**

Example-137: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2e^x + b^2e^{-x}} = ?$

Sol^n: $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2e^x + b^2e^{-x}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{a^2 + (be^{-x})^2}$; ধরি, $u = be^{-x} \therefore -be^{-x}dx = du$ বা, $e^{-x}dx = \frac{-1}{b}du$

x	0	∞
u	b	0

$\therefore I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{a^2+(be^{-x})^2} = \frac{-1}{b}\int_b^0 \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{-1}{b} \times \frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\frac{u}{a}\right]_b^0 = \frac{-1}{ab}\left(\tan^{-1}0 - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{b}{a}$ **(Ans.)**

Example-138: $\int_0^a \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx = ?$

Sol^n: ধরি, $u = \frac{x}{a^2+x^2} \Rightarrow du = \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$

যখন, $x = 0, \; u = 0; \; x = a, \; u = \frac{1}{2a}$; $\int_0^a \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2a}} du = [u]_0^{\frac{1}{2a}} = \frac{1}{2a}$ **(Ans.)**

Alternative: ধরি, $x + \frac{a^2}{x} = z \Rightarrow \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)dx = dz$

x	0	a
z	∞	2a

$\int_0^a \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx = \int_0^a \frac{a^2-x^2}{x^2\left(\frac{a^2}{x}+x\right)^2}dx = \int_0^a \frac{\frac{a^2}{x^2}-1}{\left(x+\frac{a^2}{x}\right)^2}dx = \int_a^0 \frac{1-\frac{a^2}{x^2}}{\left(x+\frac{a^2}{x}\right)^2}dx = \int_{2a}^{\infty}\frac{dz}{z^2}$

$= \left[\frac{1}{z}\right]_{\infty}^{2a} = \frac{1}{2a} - 0 = \frac{1}{2a}$

Example-139: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)} = ?$

Solⁿ: ধরি, $\sin x = u \therefore \cos x\ dx = du$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

$\therefore I = \int_0^1 \frac{du}{(1+u)(2+u)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{2+u}\right) du = [\ln|1+u| - \ln|2+u|]_0^1$

$= \ln 2 - \ln 3 - \ln 1 + \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln 2^2 - \ln 3 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$ **(Ans.)**

Example-140: $\int_2^3 f(x)\, dx = 4$ এবং $\int_3^5 f(x)\, dx = 7$ হলে, $\int_2^5 f(x)\, dx = ?$

(a) 4 (b) 0 (c) 11 (d) 12

Solⁿ: (c); $\int_2^3 f(x)\, dx + \int_3^5 f(x)\, dx = \int_2^5 f(x)\, dx$ লেখা যায় $[\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \therefore a < c < b]$

$\Rightarrow 4 + 7 = \int_2^5 f(x)\, dx \therefore \int_2^5 f(x)\, dx = 11$ **(Ans.)**

Example-141: $\int_5^2 f(x)\, dx = 8, \int_{-1}^5 f(x)\, dx = 12$ হলে, $5\int_2^{-1} f(x)\, dx = ?$

(a) 0 (b) 100 (c) -100 (d) 10

Solⁿ: (c); $\int_{-1}^2 f(x)\, dx + \int_2^5 f(x)\, dx = \int_{-1}^5 f(x)\, dx \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x)\, dx = \int_{-1}^5 f(x)\, dx - \int_2^5 f(x)\, dx$

$= \int_{-1}^5 f(x)\, dx + \int_5^2 f(x)\, dx \left[\because \int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx\right]$

$= 12 + 8 = 20 \therefore 5\int_2^{-1} f(x)\, dx = -5\int_{-1}^2 f(x)\, dx = -5 \times 20 = -100$

Example-142: $\int_1^4 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = ?$

Solⁿ: $\int_1^4 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = 2\int_1^4 \frac{2\ln(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx$

$= 4\left[\left(\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\right)\right]_1^4$

$= 8\ln 2 - 8 + 4$

$= 8\ln 2 - 4$ **(Ans.)**

$\therefore \int \ln x dx = x\ln x - x + c$

$\therefore \sqrt{x} = t \therefore \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$

$\therefore \int \frac{\ln(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx = \int \ln t\, dt$

$= t\ln t - t + c = \left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - \sqrt{x}\right) + c$

Type-29: $\int_0^a f(x) = \int_0^a f(a-x)\, dx$ ধর্মের ব্যবহার

Concept

সমাকলনের ক্ষেত্রে $\int_0^a f(x) = \int_0^a f(a-x)\, dx$ ধর্ম ব্যবহার করে অনেক জটিল সমস্যা খুবই সহজে সমাধান করা যায়। এক্ষেত্রে lower limit অবশ্যই '0' (শূন্য) হতে হবে।

Problems

Example-143: মান নির্ণয় কর $\int_0^1 y\sqrt{(1-y)}\, dy$ [BUTex'07-08]

Solⁿ: $\int_0^1 y\sqrt{1-y}\ dy\ [\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)\, dx]$

$= \int_0^1 (1-y)\ \sqrt{1-(1-y)}dy = \int_0^1 (1-y)\sqrt{y}\, dy$

$= \int_0^1 \left(\sqrt{y} - y^{\frac{3}{2}}\right) dy = \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{10-6}{15} = \frac{4}{15}$

Example-144: প্রমাণ কর যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4}$

Sol^n: ধরি, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx \ldots\ldots\ldots (i)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} dx$$

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx \cdots\cdots\cdots (ii)$$

(i) + (ii) হতে পাই, $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore I = \frac{\pi}{4}$ $\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4}$ **(Proved)**

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x} dx = \frac{\pi}{4}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^n x}{\tan^n x+\cot^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^n x}{\tan^n x+\cot^n x} dx = \frac{\pi}{4}; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^n x}{\sec^n x+\operatorname{cosec}^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cosec}^n x}{\sec^n x+\operatorname{cosec}^n x} dx = \frac{\pi}{4}$

Example-145: $\int_0^1 x(1-x)^n dx = ?$

Sol^n: $\int_0^1 x(1-x)^n dx = \int_0^1 (1-x)\left(1-(1-x)\right)^n dx \left[\because \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx\right]$

$= \int_0^1 (x^n - x^{n+1})\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ **(Ans.)**

Example-146: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+e^{\sin x}} dx = ?$

Sol^n: $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+e^{\sin x}} dx \ldots\ldots\ldots (i) \therefore I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+e^{\sin(2\pi-x)}} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+e^{-\sin x}} dx$

$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+1} dx \ldots\ldots\ldots (ii) \therefore$ (i) + (ii) হতে: $2I = \int_0^{2\pi} dx = [x]_0^{2\pi} = (2\pi - 0) = 2\pi \therefore I = \pi$ **(Ans.)**

Type-30: $\int_a^b f(x) = \int_a^b f(a+b-x)\, dx$ ধর্মের ব্যবহার

Concept

সমাকলনের ক্ষেত্রে $\int_a^b f(x) = \int_a^b f(a+b-x)\, dx$ ধর্ম ব্যবহার করে অনেক জটিল সমস্যা খুবই সহজে সমাধান করা যায়।

Problems

Example-147: $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx = ?$

Sol^n: $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx \cdots\cdots\cdots (i)$

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x\right)}} dx$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} \cdots\cdots\cdots (ii) \quad \left[\because \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\right]$$

(i) + (ii) → $2I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} dx = [x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow I = -\frac{\pi}{12} \therefore \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} = -\frac{\pi}{12}$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\int_a^b \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x} dx = \int_a^b \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x} dx = \int_a^b \frac{\tan^n x}{\tan^n x+\cot^n x} dx = \int_a^b \frac{\cot^n x}{\tan^n x+\cot^n x}$

$= \int_a^b \frac{\sec^n x}{\sec^n x+\operatorname{cosec}^n x} dx = \int_a^b \frac{\operatorname{cosec}^n x}{\sec^n x+\operatorname{cosec}^n x} dx = \frac{b-a}{2}$ [যদি $a + b = \frac{\pi}{2}$ হয়]

Type-31: যুগ্ম ও অযুগ্ম ফাংশনের ক্ষেত্রে

Concept

অযুগ্ম ফাংশন: যদি কোন ফাংশনের ক্ষেত্রে $f(-x) = f(x)$ হয় তবে তাকে যুগ্ম ফাংশন বলে। আবার যদি কোন ফাংশনের ক্ষেত্রে $f(-x) = -f(x)$ হয় তবে তাকে অযুগ্ম ফাংশন বলে। যেমন, $x^2, \cos x, x\sin x$ যুগ্ম ফাংশন এবং $x^3, \sin x, x\cos x$ অযুগ্ম ফাংশন।

➤ $f(x)$ যুগ্ম ফাংশন হলে, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$

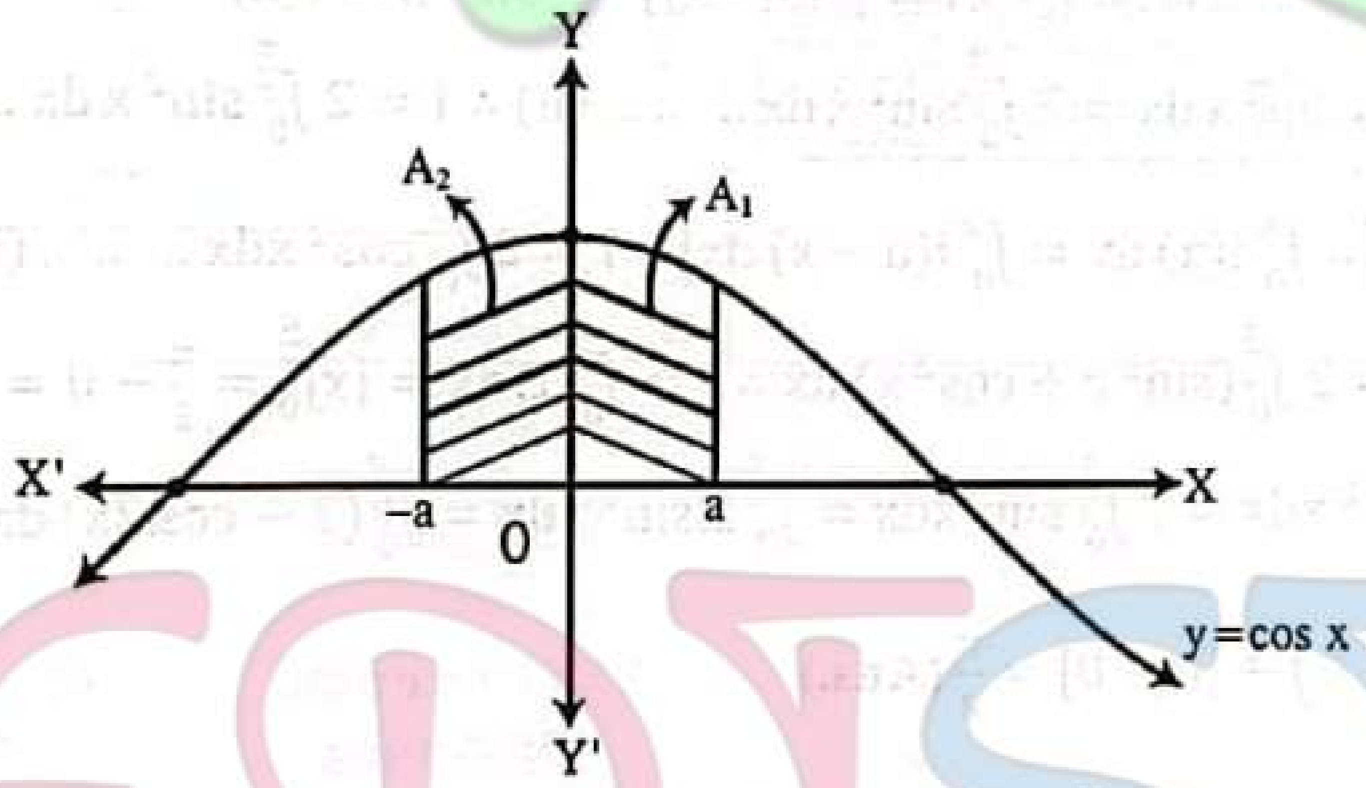
$f(x)$ অযুগ্ম ফাংশন হলে, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ যেমন: $\int_{-a}^{a} x.\cos x\,dx = 0$

উপ রোক্ত Type MCQ এর জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ।

ধরা যাক, $f(x) = \cos x \ldots\ldots\ldots (i)$ $\therefore f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ [(i) হতে]

$\therefore f(-x) = f(x)$ হল, অর্থাৎ $\cos x$ হচ্ছে যুগ্ম ফাংশন।

আবার, $y = \cos x$ এর graph লক্ষ করি:



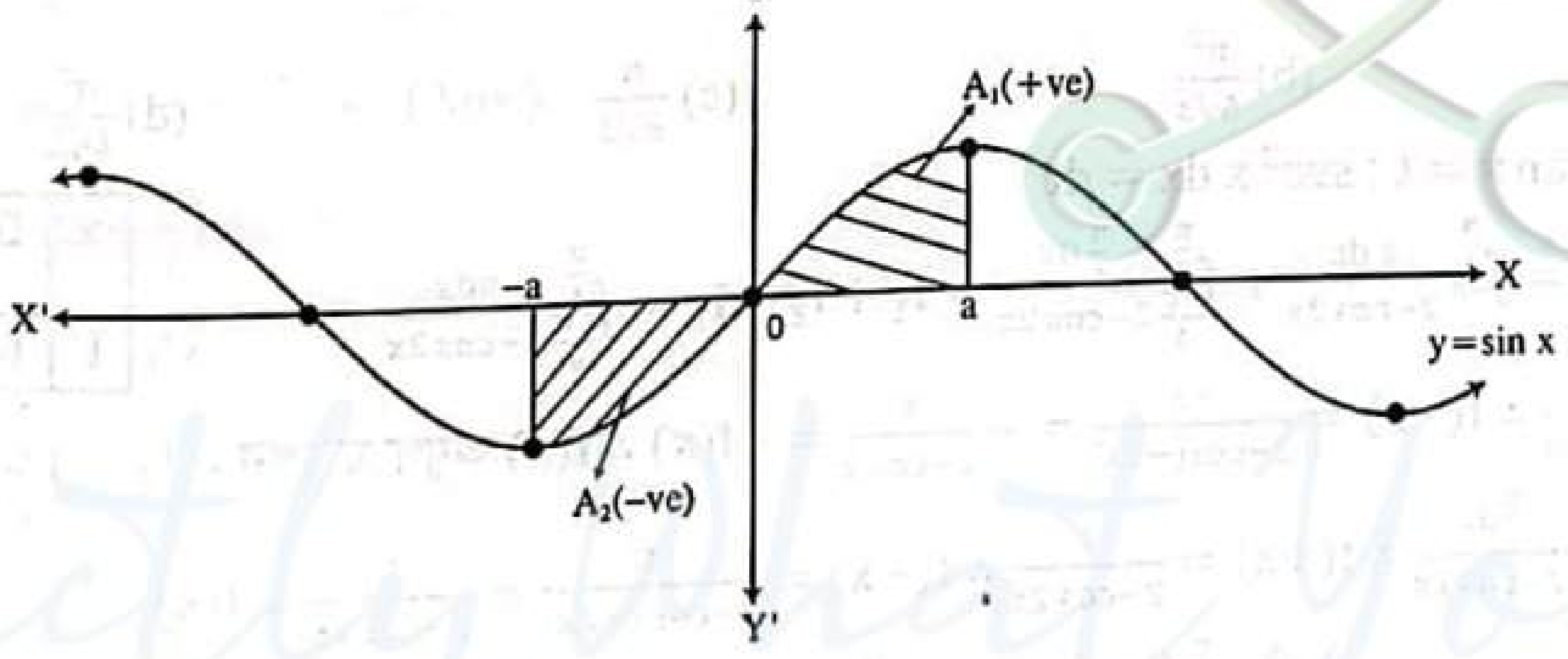
$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = A_1 + A_2 = 2A_1 [\because A_1 = A_2] = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$

অর্থাৎ, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ পাওয়া যায়,

আবার, ধরা যাক, $f(x) = \sin x \ldots\ldots\ldots (i)$

$\therefore f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ $\therefore f(x)$ অযুগ্ম ফাংশন।

আবার, $y = f(x) = \sin x$ এর graph লক্ষ করি:



$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = A_1 + (A_2) = 0 [\because A_1 = -A_2]$

কিন্তু $-a$ হতে a পর্যন্ত $f(x)$ ও x-অক্ষ এর মধ্যবর্তী মোট ক্ষেত্রফল $= |A_1| + |A_2|$ অর্থাৎ, অযুগ্ম ফাংশনে $-a$ হতে a পর্যন্ত। নির্দিষ্ট যোগজ $= 0$ কিন্তু ক্ষেত্রফল 0 নয়।

Problems

Example-148: $\int_{-1}^{1}\frac{x^3\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=?$

Sol^n: ধরি, $f(x)=\frac{x^3.\sin^2 x}{\cos^3 x}\ \therefore f(-x)=\frac{(-x)^3.\sin^2(-x)}{\cos^3(-x)}=\frac{-x^3.\sin^2 x}{\cos^3 x}=-f(x)$

$\therefore$ f(x) একটি অযুগ্ম ফাংশন। $\therefore\ \int_{-1}^{1}\frac{x^3.\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=0$ **(Ans.)**

Example-149. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x+1}{\sec x}dx=?$

Sol^n: $f(x)=\frac{\sec x+1}{\sec x};\therefore f(-x)=\frac{\sec(-x)+1}{\sec(-x)}=\frac{\sec x+1}{\sec x}=f(x)$ $\therefore$ f(x) যুগ্ম ফাংশন।

$\therefore\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x+1}{\sec x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x+1}{\sec x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)\,dx=2[x+\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=2\left[\left(\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)-(0+\sin 0)\right]=2\left(\frac{\pi}{2}+1\right)=\pi+2$ **(Ans.)**

Example-150: $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=?$

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) π

Sol^n: (a); $f(x)=\sin^2 x\ \ldots\ldots\ldots(i)\ \therefore f(-x)=\{\sin(-x)\}^2=\sin^2 x=f(x)$

$\therefore$ f(x) যুগ্ম ফাংশন। $\therefore\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx\ \ldots\ldots\ldots(ii)\ \therefore I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx\ \ldots\ldots\ldots(iii)$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(\frac{\pi}{2}-x)\,dx\ [\because\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx]\ \therefore I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx\ \ldots\ldots\ldots(iv)$

$\therefore$ (iii) + (iv) হতে: $2I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx\ \therefore I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1.dx=[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$ **(Ans.)**

বিকল্প: (ii) হতে: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\,dx$

$=x-\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-[0-0]=\frac{\pi}{2}$ **(Ans.)**

Example-151: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 xdx=?$

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 2

Sol^n: (a); $f(x)=\sin^7 x\ \ldots\ldots\ldots(i)$

$\therefore f(-x)=\{\sin(-x)\}^7=-\sin^7 x=-f(x)$ $\therefore$ f(x) অযুগ্ম ফাংশন। $\therefore\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 xdx=0$ **(Ans.)**

Example-152: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2-\cos 2x}dx=?$

(a) 0 (b) $\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ (d) $\frac{\pi^2}{6\sqrt{5}}$

Sol^n: (b); ধরি, $\tan x=t$; $\sec^2 x\,dx=dt$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	0	1

$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2-\cos 2x}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{2-\cos 2x}+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\pi}{4}dx}{2-\cos 2x}=I_1+I_2\ \therefore I_1=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{2-\cos 2x}$

$\therefore f(x)=\frac{x}{2-\cos 2x}\ \therefore f(-x)=\frac{-x}{2-\cos(-2x)}=-\frac{x}{2-\cos x}=-f(x)$ $\therefore$ f(x) অযুগ্ম ফাংশন $\therefore I_1=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{2-\cos 2x}=0$

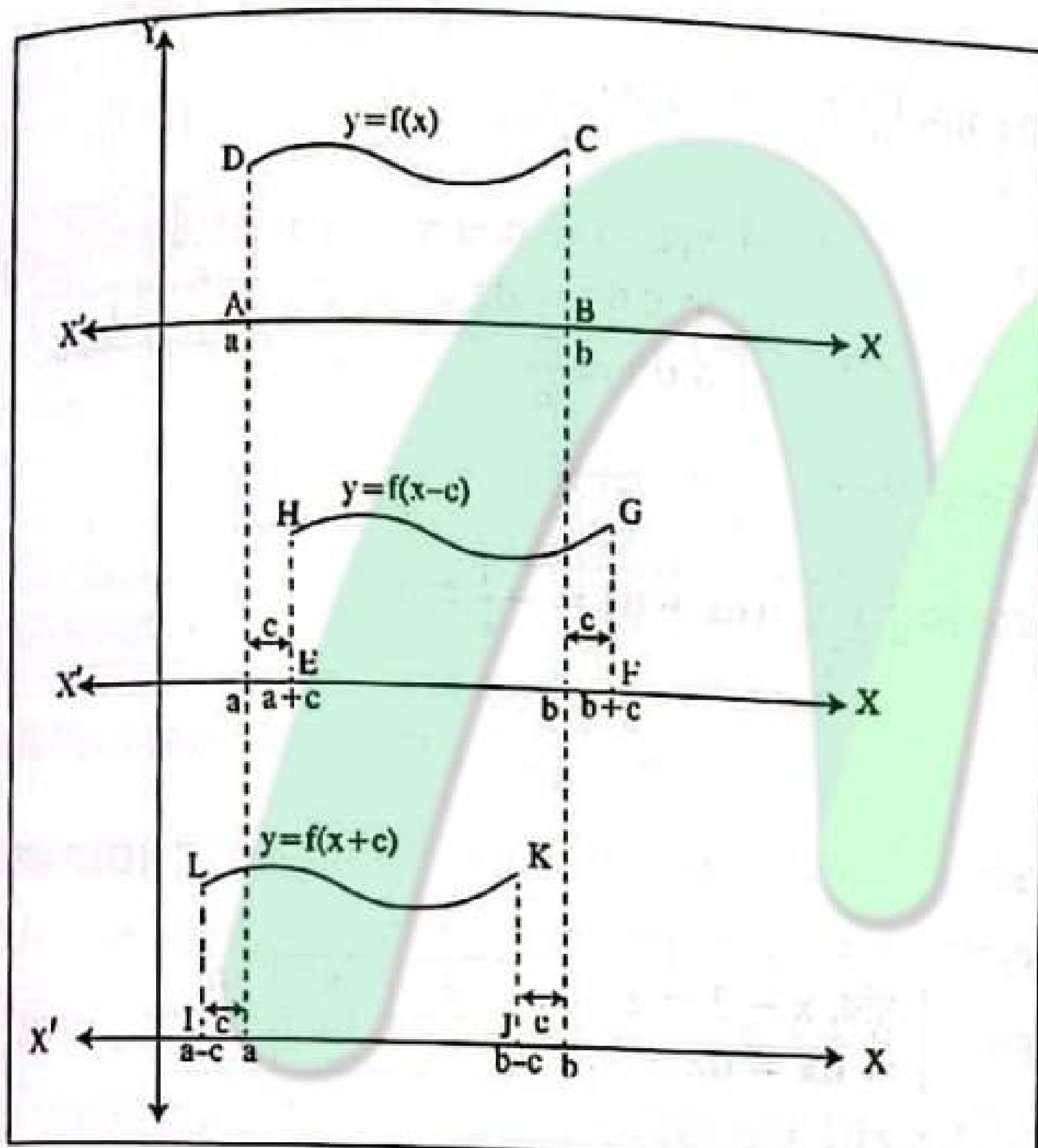
আবার, $I_2=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\pi}{4}dx}{2-\cos 2x}\ \therefore f(+x)=\frac{1}{2-\cos 2x}\ \therefore f(-x)=\frac{1}{2-\cos(-2x)}=\frac{1}{2-\cos 2x}=f(x)$

$\therefore$ f(x) যুগ্ম ফাংশন। $\therefore I_2=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\pi}{4}dx}{2-\cos 2x}=2\times\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2-\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x\,dx}{2+2+\tan^2 x-1+\tan^2 x}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x\,dx}{1+3\tan^2 x}$

$\therefore I_2=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{dt}{1+(\sqrt{3}t)^2}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}t}\tan^{-1}(\sqrt{3}t)\right]_0^1=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}(\sqrt{3})-\tan^{-1}(0)\right]=\frac{1}{2\sqrt{3}}.\frac{\pi}{3}=\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

Type-32: Graph Shifting সম্পর্কিত

Concept



ABCD অংশের ক্ষেত্রফল $= \int_a^b f(x)dx$

এখানে, $y = f(x)$-এ x এর পরিবর্তে $x - c$ বসানোতে ফাংশনটি c ঘর ডানে shift করেছে

∴ নতুন সীমা $x = a + c$ হতে $x = b + c$ হলে,

EFGH অংশের ক্ষেত্রফল = ABCD অংশের ক্ষেত্রফল

$$\therefore \boxed{\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx = \int_a^b f(x)dx}$$

এখানে, $y = f(x)$-এ x এর পরিবর্তে $x + c$ বসানোতে ফাংশনটি c ঘর বামে shift করেছে নতুন সীমা $x = a - c$ থেকে $x = b - c$ হলে,

IJKL অংশের ক্ষেত্রফল = ABCD অংশের ক্ষেত্রফল

$$\boxed{\therefore \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)dx = \int_a^b f(x)dx}$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \underset{\uparrow}{\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx} \qquad = \underset{\uparrow}{\int_{a-c}^{b-c} f(x+c)dx}$$

Graph c ঘর ডানে shift করেছে ফলে সীমাগুলো c পরিমাণ করে বেড়ে গেছে

Graph c ঘর বামে shift করেছে ফলে সীমাগুলো c পরিমাণ করে কমে গেছে

Problems

Example-153: $\int_2^7 e^{x+3}\,dx = ?$

Sol^n: $\int_2^7 e^{x+3}dx = \int_{2+3}^{7+3} e^{(x-3)+3}\,dx$

$= \int_5^{10} e^x\,dx = [e^x]_5^{10} = e^{10} - e^5$ **(Ans.)**

Example-154: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) dx = ?$

Sol^n: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) dx$

$= \int_{0+\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}} \sin\left\{2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right\} dx$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\ dx = -\frac{1}{2}[\cos 2x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{1}{2}\left[\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= -\frac{1}{2}\left[-1 - \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}$ **(Ans.)**

Type-33: $\int_a^b f(x)dx$ এর মান দেওয়া থাকলে $\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(cx+d)dx$ এর মান নির্ণয়

Concept

মনে করি, $\int_a^b f(x)dx = I$ দেওয়া আছে এবং $\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(cx+d)\,dx$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

ধরি, $cx + d = z$

$\Rightarrow c\,dx = dz$

$\therefore dx = \frac{dz}{c}$

x	$\frac{a-d}{c}$	$\frac{b-d}{c}$
z	a	b

এখানে, $\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(cx+d)dx = \int_a^b f(z)\frac{dz}{c} = \frac{1}{c}\int_a^b f(z)\,dz$

$= \frac{1}{c}\int_a^b f(x)\,dx \left[\because \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz\right]$

$= \frac{1}{c}I = \frac{I}{c}$ এই পদ্ধতি ব্যবহার করে সমস্যাগুলোকে সমাধান করতে হবে।

তবে মনে রাখতে হবে: $\int_a^b f(x)\,dx = I$ হলে $\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(cx+d) = \frac{I}{c}$ হবে কিন্তু $\int_{\frac{b-d}{c}}^{\frac{a-d}{c}} f(cx+d) = -\frac{I}{c}$ হবে।

Problems

Example-155: $\int_2^6 f(x)\,dx = 7$ হলে $\int_5^9 f(x-3)\,dx = ?$ **[DU' 07-08]**

Sol^n: দেওয়া আছে, $\int_2^6 f(x)\,dx = 7$

ধরি, $x - 3 = z$

$\Rightarrow dx = dz$

x	5	9
z	2	6

$\therefore \int_2^6 f(z)\,dz = 7 \left[\because \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz\right]$

এখন, $\int_5^9 f(x-3)\,dx = \int_2^6 f(z)\,dz = 7$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\frac{I}{x \text{ এর সহগ}} = \frac{7}{1} = 7$ **(Ans.)**

Example-156: যদি $\int_0^4 f(x)dx = 5$ হয়, তবে $\int_1^5 f(x-1)dx$ এর মান কত? **[RU'22-23]**

(a) 0 (b) 4 (c) 5 (d) 6

Sol^n: (c); আমরা জানি, $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} \int(x-c)\,dx$

$\therefore \int_0^4 f(x)\,dx = \int_{0+1}^{4+1} f(x-1)\,dx = \int_1^5 f(x-1)dx = 5$ **(Ans.)**

Example-157: যদি $\int_0^6 f(t)\,dt = 8$ হয় তবে $\int_0^3 f(2x)\,dx$ এর মান কত? **[DU' 17-18]**

Sol^n: দেওয়া আছে, $\int_0^6 f(t)\,dt = 8$

ধরি, $2x = z$

$\Rightarrow 2\,dx = dz$

$\therefore dx = \frac{dz}{2}$

x	0	3
z	0	6

$\therefore \int_0^6 f(z)\,dz = 8 \left[\because \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz\right]$

এখন, $\int_0^3 f(2x)\,dx = \int_0^6 f(z)\frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\int_0^6 f(z)\,dz = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\frac{I}{x \text{ এর সহগ}} = \frac{8}{2} = 4$ **(Ans.)**

Example-158: যদি $\int_1^4 f(x)\,dx = 5$ হয় তবে $\int_0^1 f(3x+1)\,dx$ এর মান কত? **[DU'16-17]**

Sol^n: দেওয়া আছে, $\int_1^4 f(x)\,dx = 5$

ধরি, $3x + 1 = z$

$\Rightarrow 3\,dx = dz$

$\therefore dx = \frac{dz}{3}$

x	0	1
z	1	4

$\therefore \int_1^4 f(z)\,dz = 5 \left[\because \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz\right]$

এখন, $\int_0^1 f(3x+1)\,dx$

$= \int_1^4 f(z)\frac{dz}{3} = \frac{1}{3}\int_1^4 f(z)\,dz = \frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3}$ **(Ans.)**

❖ **Shortcut:** $\frac{I}{x \text{ এর সহগ}} = \frac{5}{3}$ **(Ans.)**

Example-159: যদি $\int_0^2 f(x)\,dx = 2$ হয় তবে $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\,dx = ?$ **[GST' 21-22]**

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 4

Sol^n: ধরি, $1-2x = z \Rightarrow -2dx = dz \therefore dx = \frac{1}{2}dz$

x	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	2	0

$\therefore \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\,dx = -\frac{1}{2}f(z)dz = \frac{1}{2}\int_0^2 f(z)\,dz = \left[\frac{1}{2}\times 2\right] = 1$ **(Ans.)**

Example-160: যদি $\int_3^{11} f(3x+4)\,dx = 8$ একক হলে $\int_4^{10}(4x-3)\,dx = ?$

Sol^n: $8 \times \frac{\text{মান দেওয়া ফাংশনের x এর সহগ}}{\text{নির্ণেয় ফাংশনের x এর সহগ}} = 8 \times \frac{3}{4} = 6$ একক।

Type-34: কয়েকটি পরমমান ফাংশনের সমাকলন

Concept

পরমমানের সংজ্ঞানুসারে, $|x| = \begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$

$\int_a^b |x|\,dx$ বের করার ক্ষেত্রে যদি $a < 0 < b$ হয় তাহলে, $\int_a^b |x|dx = \int_a^0 |x|dx + \int_0^b |x|\,dx$ আকারে ভেঙ্গে নিতে হবে।

[অর্থাৎ, x এর যেসব মানের জন্য পরমমান ফাংশনের মান 0 আসে সেসব মানে গিয়ে যোগজীকরণকে আলাদা করে দিতে হবে]

$\int_5^{10}|(x-7)(x-9)|\,dx$ এর ক্ষেত্রে, $x = 7$ এবং $x = 9$ এর জন্য পরমমান ফাংশনটির মান 0 আসে।

$\therefore \int_5^{10}|(x-7)(x-9)|\,dx = \int_5^7|(x-7)(x-9)|\,dx + \int_7^9|(x-7)(x-9)|\,dx + \int_9^{10}|(x-7)(x-6)|\,dx$ এভাবে ভেঙ্গে নিতে হবে

$\int |x|\,dx = \frac{x|x|}{2} + c$ হয়

প্রমাণ: $\int(x)\,dx = \int x dx$ $[\because |x| = x; x \geq 0]$

$= \frac{x^2}{2} + c = \frac{x.x}{2} + c = \frac{x|x|}{2} + c \ldots\ldots\ldots$ (i) এবং $\int|x|\,dx = \int(-x)\,dx$ $[\because |x| = -x\,; x < 0]$

$= -\frac{x^2}{2} + c = \frac{x(-x)}{2} + c = \frac{x|x|}{2} + c \ldots\ldots\ldots$ (ii) $\therefore$ (i) ও (ii) হতে লেখা যায়: $\int|x|\,dx = \frac{x|x|}{x} + c$ (প্রমাণিত)

Note: $\int_a^b |cx+d|\,dx = \left[\frac{(cx+d)|cx+d|}{2.c}\right]_a^b$ হবে।

Problems

Example-161: $\int_{-1}^{1} |x|\,dx = ?$

(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) 4

Sol^n: (b); Process-01: আমরা জানি, $\int|x|\,dx = \frac{x|x|}{x} + c$ হয় $\therefore \int_{-1}^{1}|x|\,dx = \left[\frac{x|x|}{2}\right]_{-1}^{1} = \left\{\frac{1|1|}{2} - \frac{-1(-1)}{2}\right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Process-02: $\int_a^b |x|\,dx$ বের করার ক্ষেত্রে যদি $a < 0 < b$ হয় তাহলে, $\int_a^b |x|\,dx = \int_a^0 |x|\,dx + \int_a^b |x|\,dx$ আকারে ভেঙ্গে নিতে হবে।

[অর্থাৎ x এর যেসব মানের জন্য পরমমান ফাংশনের মান 0 আসে সেসব মানে গিয়ে যোগজীকরণকে আলাদা করে দিতে হবে]

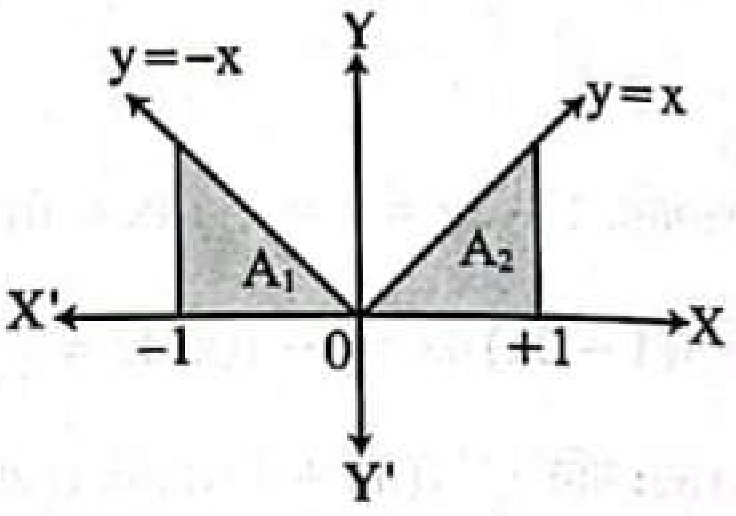
$\therefore \int_{-1}^{1}|x|\,dx = \int_{-1}^{0}|x|\,dx + \int_0^1|x|\,dx$ $[|x| = x; x \geq 0$ এবং $-x; x < 0]$

[$\therefore$ $|x| = -x$-এ পরিবর্তন হয় x এর মান 0 এর চেয়ে ছোট হওয়ার জন্য, তাই এক্ষেত্রে লিমিট −1 হতে 0 ধরা হয়েছে।

আবার, $|x| = +x$-এ পরিবর্তন হয় x এর মান 0 বা 0 এর চেয়ে বড় হওয়ার জন্য। তাই এক্ষেত্রে লিমিট 0 হতে 1 ধরা হয়েছে।]

$= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Process-03: (graphically): এক্ষেত্রে প্রথমেই মডুলাসের ভিতরের অংশ 0 (শূন্য) ধরে; x এর মান বের করতে হবে যা হবে turning point.



$\therefore y = |x| = \pm x \therefore y = x \ldots\ldots\ldots$ (i)

$y = -x \ldots\ldots\ldots$ (ii) $\therefore \int_{-1}^{1}|x|\,dx = A_1 + A_2$

$= \frac{1}{2}\times 1\times 1 + \frac{1}{2}\times 1\times 1$

$\therefore A_1 = \frac{1}{2}\times \text{base}\times \text{height}] = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ **(Ans.)**

Example-162: $\int_{-5}^{5}|x+2|\,dx = ?$

(a) $\frac{29}{2}$ (b) $\frac{9}{2}$ (c) 29 (d) 9

Sol

Sol^n: (c); Process-01: $\int_{-5}^{5}|x+2|\,dx = \left[\frac{(x+2)|(x+2)|}{2}\right]_{-5}^{5} = \left[\frac{(5+2)|5+2|}{2} - \frac{(-5+2)|-5+2|}{2}\right]$

$= \left[\frac{7\times7}{2}+\frac{3\times3}{2}\right] = \frac{49}{2}+\frac{9}{2} = \frac{58}{2} = 29$ বর্গ একক

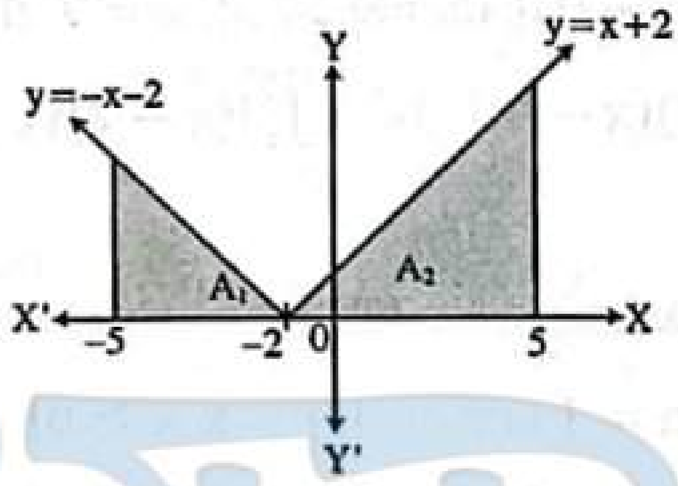
Process-02: $\int_{-5}^{5}|x+2|\,dx = \int_{-5}^{-2}|x+2|\,dx + \int_{-2}^{5}|x+2|\,dx\ [\because |x+2]$

$= \{x+2\geq 0; x\geq -2 - (x+2) < 0; x < -2)\} = \int_{-5}^{-2}-(x+2)\,dx + \int_{-2}^{5}(x+2)\,dx$

$= -\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-5}^{-2} + \left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{5} = -\left[\left(\frac{4}{2}-4\right)-\left(\frac{25}{2}-10\right)\right] + \left[\left(\frac{25}{2}+10\right)-\left(\frac{4}{2}-4\right)\right] = 29$ বর্গ একক।

Process-03: $y = |x+2| \therefore y = x+2 \ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $y = -x-2 \ldots\ldots\ldots$ (ii)



$\therefore \int_{-5}^{5}|x+2|\,dx = A_1 + A_2$

$= \left(\frac{1}{2}\times 3\times 3\right) + \left(\frac{1}{2}\times 7\times 7\right)$

$= \frac{9}{2}+\frac{49}{2} = 29$ বর্গ একক।

Example-163: $\int_{-1}^{1}|x+1|\,dx$ এর মান কোনটি হবে? **[CU'22-23]**

(a) −1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

Sol^n: (d); $|x+1| = \begin{cases} +(x+1), & \text{যখন } x+1\geq 0 \text{ অর্থাৎ } x\geq -1 \\ -(x+1), & \text{যখন } x+1 < 0 \text{ অর্থাৎ } x < -1 \end{cases}$

$[-1,1]$ ব্যবধিতে সর্বদাই, $x\geq -1 \therefore [-1,1]$ ব্যবধিতে $|x+1| = +(x+1)$

$\therefore \int_{-1}^{1}|x+1|\,dx = \int_{-1}^{1}(x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}+1-\frac{(-1)^2}{2}-(-1) = \frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+1 = 2$ **(Ans.)**

Example-164: $\int_{2}^{8}|x-5|dz = ?$

Sol^n: $\because |x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{if } x\geq 5 \\ -x+5, & \text{if } x < 5 \end{cases}$

$\therefore \int_{2}^{8}|x-5|dx = \int_{2}^{5}(-x+5)dx + \int_{5}^{8}(x-5)dx = \left[\frac{-x^2}{2}+5x\right]_{2}^{5} + \left[\frac{x^2}{2}-5x\right]_{5}^{8} = 9$ **(Ans.)**

Example-165: $\int_{-2}^{-1}(x+|x|)dx = ?$

(a) 3 (b) 0 (c) 1 (d) 6

Sol^n: (b); $\int_{-2}^{-1}\{x+|x|\}\,dx = \int_{-2}^{-1}x\,dx + \int_{-2}^{-1}|x|\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \int_{-2}^{-1}-x\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}-\frac{4}{2}\right] - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2}-\frac{4}{2}-\frac{1}{2}+\frac{4}{2} = 0$

Example-166: $\int_{-1}^{2} \frac{|x|}{x} dx = ?$

Sol^n: Process-01: $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, \text{if } x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1, \text{if } x < 0 \\ x = 0 \text{ তে ফাংশন} \\ \quad \text{undefined} \end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^{2} \frac{|x|}{x} dx = \int_{-1}^{0} (-1) dx + \int_{0}^{2} (1) dx = -[x]_{-1}^{0} + [x]_{0}^{2} = -(0+1) + (2-0) = -1 + 2 = 1(\textbf{Ans.})$

Example-167: $\int_{-3}^{2} \frac{|x|(x^2+1)}{x} dx = ?$

(a) $-\frac{22}{3}$ (b) $\frac{3}{7}$ (c) 0 (d) $\frac{11}{8}$

Sol^n: (a); $\int_{-3}^{2} \frac{|x|(x^2+1)}{x} dx = \int_{-3}^{0} \frac{|x|(x^2+1)}{x} + \int_{0}^{2} \frac{|x|(x^2+1)}{x} dx$

$= \int_{-3}^{0} \frac{-x(x^2+1)}{x} dx + \int_{0}^{2} \frac{x(x^2+1)}{x} dx \left[\because \frac{|x|(x^2+1)}{x} \frac{x(x^2+1)}{x} = x^2 + 1; x \geq 0 \text{ এবং} \frac{-x(x^2+1)}{x} = -(x^2+1); x < 0\right]$

$= -\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{0}^{2} = -\frac{22}{3}$ **(Ans.)**

Example-168: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \, dx = ?$

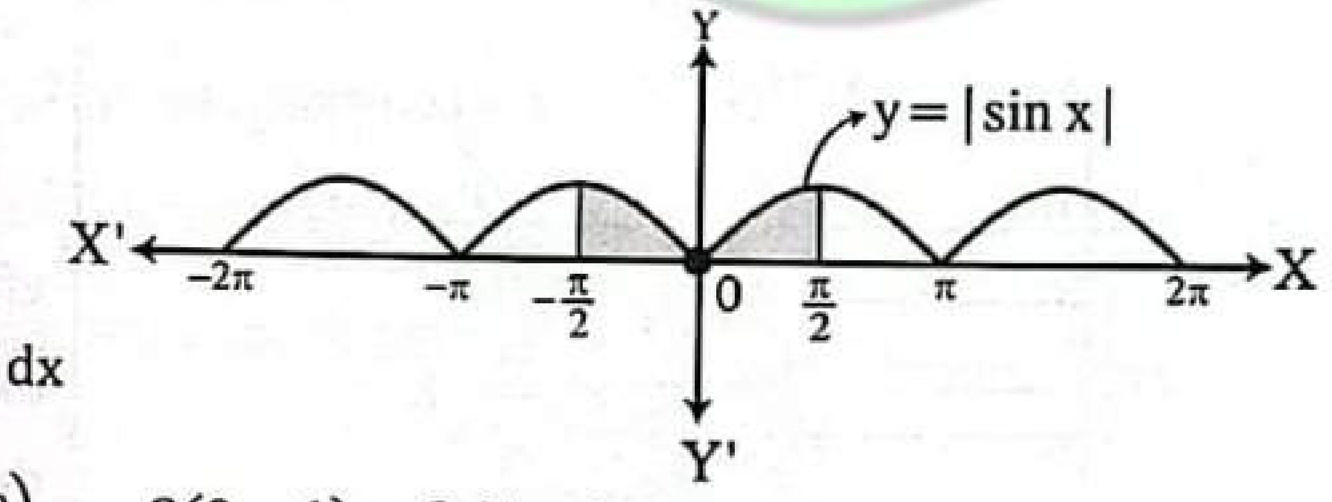
Sol^n: ধরি, $\int(x) = |\sin x| \ldots\ldots\ldots (i)$

$\therefore f(-x) = |\sin(-x)|$

$= |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$

$\therefore f(x)$ যুগ্ম ফাংশন। $\therefore I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \, dx$

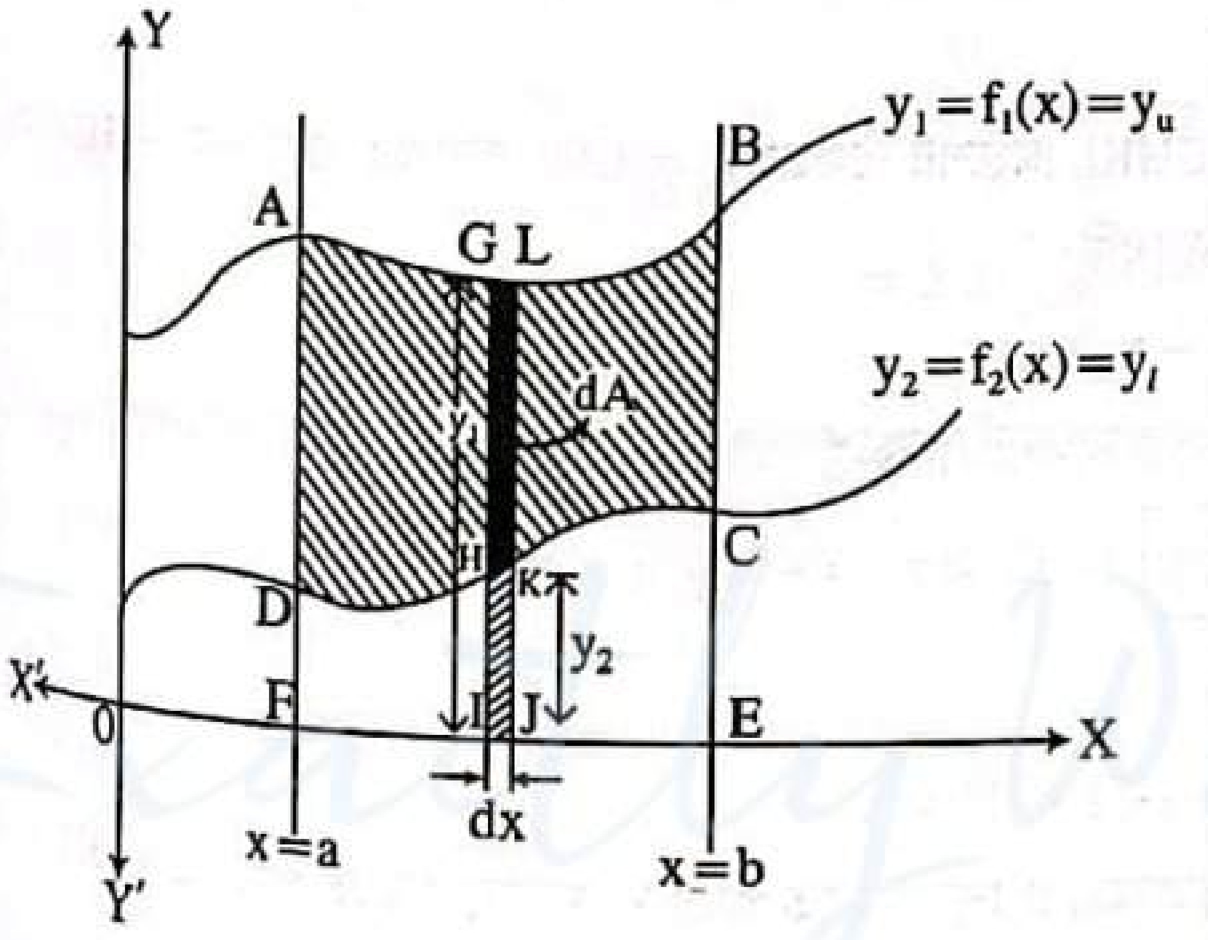
$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -2[\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -2\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0°\right) = -2(0-1) = 2$ **(Ans.)**



Type-35: নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

দুইটি বক্ররেখা ও দুইটি y অক্ষের সমান্তরাল রেখা দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল [x অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষেত্রফল] নির্ণয়: মনে করি, $y_1 = f_1(x)$ এবং $y_2 = f_2(x)$ দুইটি ফাংশন এবং $x = a$ এবং $x = b$ দুইটি সরলরেখা (y অক্ষের সমান্তরাল)। কল্পনা করা হচ্ছে, $y_1 = f_1(x)$ এবং $y_2 = f_2(x)$ এমন দুইটি ফাংশন যেন সব ক্ষেত্রেই $y_1 > y_2$ $[f_1(x) > f_2(x)]$



ধরি,

dA_1 = GIJL অংশের ক্ষেত্রফল

dA_2 = HIJK অংশের ক্ষেত্রফল

dA = GHKL অংশের ক্ষেত্রফল

অর্থাৎ, সকল x এর মানের জন্য প্রথম ফাংশনের মান (y_1 এর মান) দ্বিতীয় ফাংশনের মানের (y_2 এর মানের) চেয়ে বড়। অর্থাৎ, চিত্রে y_1, y_2 এর উপরে থাকবে। তাই, পরবর্তীতে y_1 কে আমরা y_{upper} or y_u এবং y_2 কে আমরা y_{lower} or y_l দিয়ে প্রকাশ করবো।

চিত্রের ABCD অংশের ক্ষেত্রফল আমরা বের করতে চাচ্ছি [$y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x), x = a$ এবং $x = b$ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল]

তাই আমরা x অক্ষে একটি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র dx অংশ বিবেচনা করছি। তাহলে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র GIJL আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $dA_1 = y_1dx$ এবং ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র HIJK আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $dA_2 = y_2dx$

এখন, y_1 এবং y_2 এর মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশের ক্ষেত্রফল, GHKL অংশের ক্ষেত্রফল = GIJL অংশের ক্ষেত্রফল −HIJK অংশের ক্ষেত্রফল $= dA_1 - dA_2 = y_1dx - y_2dx = (y_1 - y_2)dx = dA$ [ধরি]

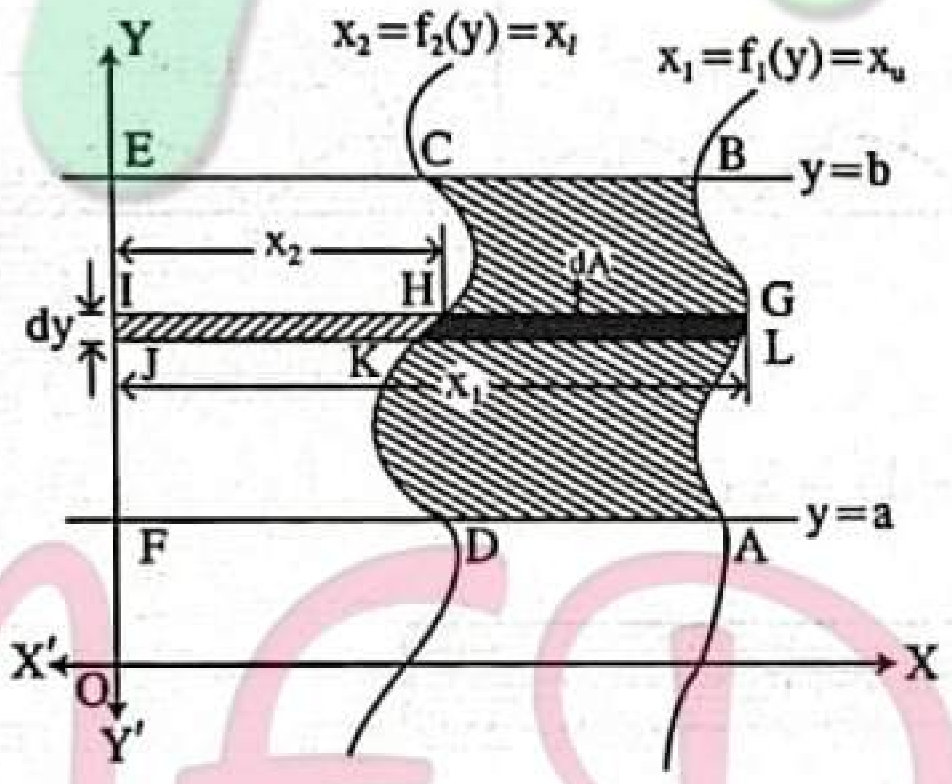
অর্থাৎ, আমাদের কাঙ্খিত ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশের ক্ষেত্রফল, $dA = (y_1 - y_2)dx$

তাহলে, $x = a$ থেকে $x = b$ পর্যন্ত $y_1 = f_1(x)$ এবং $y_2 = f_2(x)$ এর মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল (ABCD অংশের ক্ষেত্রফল),

$$A = \int_{x=a}^{x=b} dA = \int_a^b (y_1 - y_2)dx \therefore \boxed{A = \int_a^b (y_u - y_l)dx} \because y_1 = y_u;\ y_2 = y_l]$$

দুইটি বক্ররেখা ও দুইটি x অক্ষের সমান্তরাল রেখা দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল [y অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষেত্রফল] নির্ণয়:

মনে করি, $x_1 = f_1(y)$ এবং $x_2 = f_2(y)$ দুইটি ফাংশন এবং $y = a$ এবং $y = b$ দুইটি সরলরেখা (x অক্ষের সমান্তরাল)। কল্পনা করা হচ্ছে, $x_1 = f_1(y)$ এবং $x_2 = f_2(y)$ এমন দুইটি ফাংশন যেন সব ক্ষেত্রেই $x_1 > x_2$ $[f_1(y) > f_2(y)]$



ধরি,

dA_1 = GIJL অংশের ক্ষেত্রফল

dA_2 = HIJK অংশের ক্ষেত্রফল

dA = GHKL অংশের ক্ষেত্রফল

অর্থাৎ y এর সকল মানের জন্য প্রথম ফাংশনের মান (x_1 এর মান), দ্বিতীয় ফাংশনের মানের (x_2 এর মানের) চেয়ে বড়। অর্থাৎ, চিত্রে x_1, x_2 এর ডানদিকে থাকবে। তাই পরবর্তীতে x_1 কে আমরা x_{upper} or x_u এবং x_2 কে আমরা x_{lower} or x_l দিয়ে প্রকাশ করবো।

আমরা চিত্রের ABCD অংশের ক্ষেত্রফল বের কতে চাচ্ছি [$x_1 = f_1(y)$ এবং $x_2 = f_2(y), y = a$ এবং $y = b$ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল] তই আমরা y অক্ষে একটি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র dy অংশ বিবেচনা করছি। তাহলে, ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র GIJL অংশের ক্ষেত্রফল, $dA_1 = x_1dy$ এবং ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র HIJK অংশের ক্ষেত্রফল, $dA_2 = x_2dy$

এখন, x_1 এবং x_2 এর মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশের ক্ষেত্রফল = GHKL অংশের ক্ষেত্রফল = GIJL অংশের ক্ষেত্রফল −HIJK অংশের ক্ষেত্রফল $= dA_1 - dA_2 = x_1dy - x_2dy = (x_1 - x_2)dy = dA$ [ধরি]

অর্থাৎ, আমাদের কাঙ্খিত ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশের ক্ষেত্রফল, $dA = (x_1 - x_2)dy$

তাহলে, $y = a$ থেকে $y = b$ পর্যন্ত $x_1 = f_1(y)$ এবং $x_2 = f_2(y)$ এর মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল (ABCD অংশের ক্ষেত্রফল),

$$A = \int_{y=a}^{y=b} dA = \int_a^b (x_1 - x_2)dy \therefore \boxed{A = \int_a^b (x_u - x_l)dy}\ [\because x_1 = x_u \text{ এবং } x_2 = x_l]$$

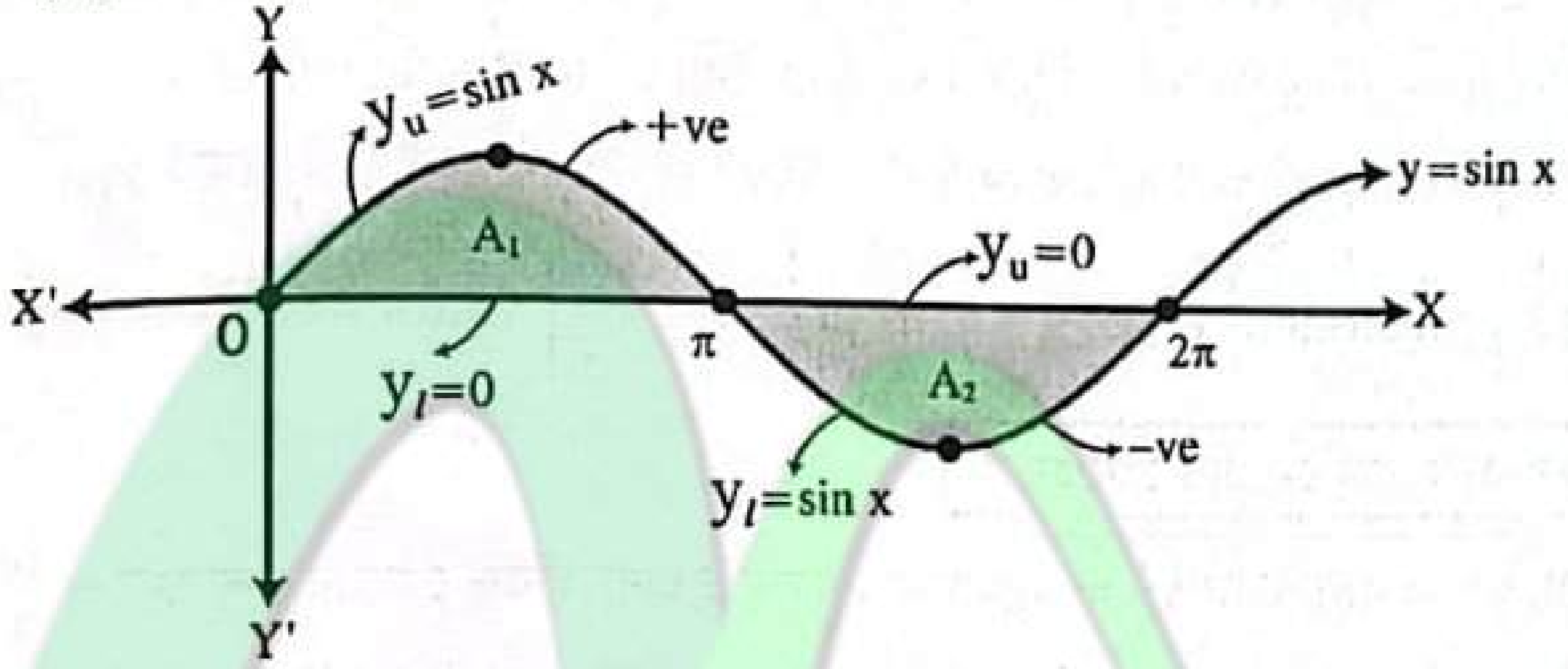
আমরা এখন চিন্তা করবো: $\int_0^{2\pi} \sin x dx = ?$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \sin x dx = -[\cos x]_0^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos \theta] = -(1 - 1) = 0$$

অর্থাৎ x এর একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে যোগজীকরণ করার ক্ষেত্রে ফলাফল 0 (শূন্য) হতে পারে বা ঋণাত্মক হতে পারে এবং এটা নীট ক্ষেত্রফল বুঝায়।

এবার, $y = \sin x$ বক্ররেখা ও x অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $x = 0$ থেকে $x = 2\pi$ পর্যন্ত সীমার মধ্যে আমরা নির্ণয় করবো:

$$\therefore \int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi} (y_u - y_l)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (y_u - y_l)\, dx$$



$$= \int_0^{\pi} (\sin x - 0)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (0 - \sin x)\, dx = -[\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -[\cos\pi - \cos 0] + [\cos\pi - \cos\pi]$$

$= -(-1-1) + \big(1-(-1)\big) = 2 + 2 = 4$ বর্গ একক। তাহলে সারমর্ম দাঁড়াল: ক্ষেত্রফল সর্বদা ধনাত্মক হয়।

Shortcut

(i) $y^2 = 4ax$ এবং $y = mx$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3m^3}$ বর্গ একক।

(ii) $x^2 = 4ay$ এবং $y = mx$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8}{3}a^2m^3$ বর্গ একক।

(iii) $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4by$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{16}{3}ab$ বর্গ একক।

(iv) $y^2 = 4ax$ (বা $x^2 = 4ay$) এবং উহার উপকেন্দ্রিক লম্বের দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3}$ বর্গ একক।

(v) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi a^2$ বর্গ একক

(vi) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi ab$ বর্গ একক

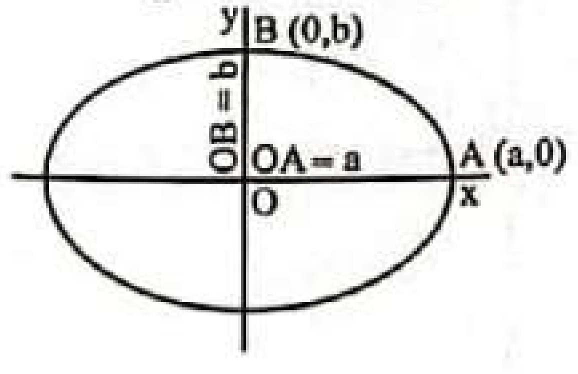
(vii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}\pi ab - \frac{1}{2}ab$ বর্গ একক।

Problems

Example-169: দেখাও যে, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \pi ab$ বর্গ একক

Sol^n: এখানে, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$

$\Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \therefore y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

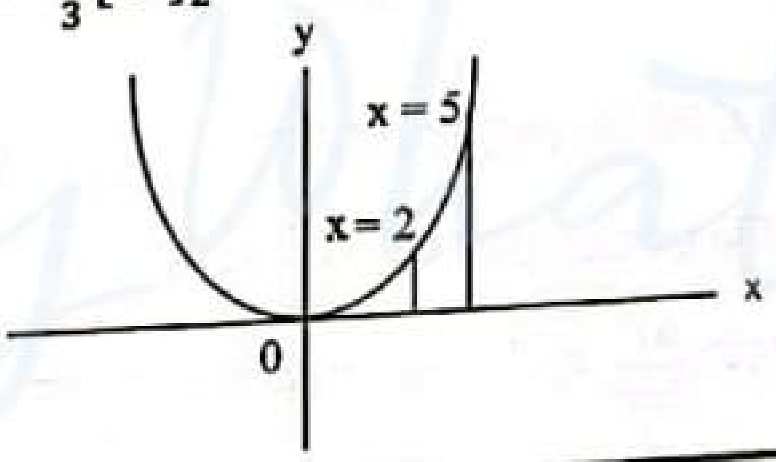


$$A = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 4\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)d\theta$$

$= 2ab\left[\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$ [$x = a\sin\theta$ ধরে]

Example-170: $y = x^2, x$ অক্ষ, $x = 2, x = 5$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[JU' 20-21, 10-11, 09-10]**

Sol^n: ক্ষেত্রফল $= \int_2^5 ydx = \int_2^5 x^2dx = \frac{1}{3}[x^3]_2^5 = 39$ **(Ans.)**



Example-171: $x^2 - 2y = 0$ বক্ররেখা, X অক্ষ ও $x = 2$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sol^n: এখানে, $x^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} \therefore \text{Area} = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{4}{3}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

Example-172: $y^2 = 4x$ এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

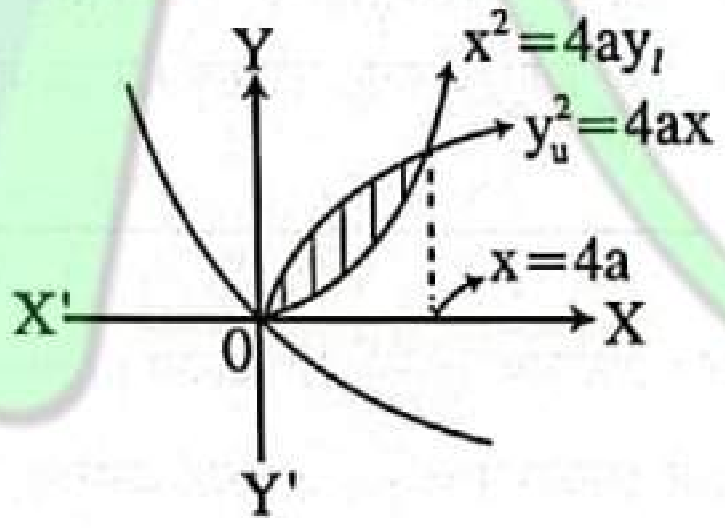
Sol^n: $y^2 = 4x$ এবং $y = x \therefore x^2 = 4x \Rightarrow x = 0, 4$ এবং $y^2 = 4x \Rightarrow y = 2\sqrt{x}$ ইহাই y_1.

আবার, $y = x$ ইহাই $y_2 \therefore \text{Area} = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)dx = \left[2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{4}{3}4\sqrt{4} - \frac{16}{2} = \frac{8}{3}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

Case-01:দুইটি পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রেফল

Example-173: দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{16}{3}a^2$ বর্গ একক।

Sol^n: Step-01: ছবি অঙ্কন:



Step-02: ছেদুবিন্দু নির্ণয়: যেহেতু x অক্ষের সাপেক্ষে

$\therefore x^2 = 4ay \Rightarrow y = \frac{x^2}{4a}$ এখন $y^2 = 4ax$-এ y এর মান বসাই। $\frac{x^4}{16a^2} - 4ax = 0 \Rightarrow x(x^3 - (4x)^3 = 0 \therefore x = 0, 4a$

Step-03: সূত্র ব্যবহার

$$\text{Area} = \int_0^{4a} (y_u - y_l)\,dx = \int_0^{4a} \left(\sqrt{4ax} - \frac{x^2}{4a}\right) dx = \left[\sqrt{4a}.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4a}\frac{1}{3}x^3\right]_0^{4a} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)(4a)^2 = \frac{16}{3}a^2 \text{ বর্গ একক}$$

❖ **Shortcut:** $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4by$ পরাবৃত্ত দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{16}{3}ab = \frac{1}{3}(4a)(4b)$ বর্গ একক হবে যদি প্রদত্ত পরাবৃত্তদ্বয়ের শীর্ষ একই হয়। একটু সাজিয়ে এভাবেও লেখা যায়: $y^2 = 4ax$: ধরি $P = 4a$

$\therefore y^2 = px$ ……… (i) এবং $x^2 = 4ay$; ধরি $q = 4b \therefore x^2 = qy$ ……… (ii) $\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{3}(4a)(4b) = \frac{1}{3}pq$

Example-174: $y^2 = x$ এবং $y = x^2$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল কত? **[DU' 20-21, RU' 09-10]**

Sol^n: ছেদবিন্দু নির্ণয়: $y = x^2$ ……… (i)

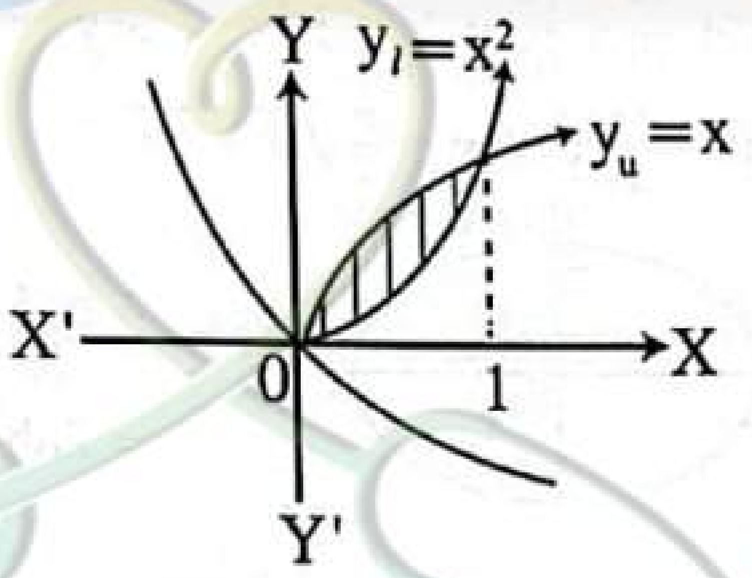
$y^2 = x$ ……… (ii)

(i) ও (ii) হতে লেখা যায়: $x^4 - x = 0$

$\Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \therefore x = 0, 1$

$\therefore A = \int_0^1 (y_u - y_l)\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx$

$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ বর্গ একক



❖ **Shortcut:** $A = \frac{1}{3}pq$ [$\therefore$ p হচ্ছে $y^2 = px$ এর x এর সহগ এবং q হচ্ছে $x^2 = ay$ এর y এর সহগ]

$= \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$ বর্গ একক

Note: (a) $y^2 = 4ax$ এবং $y = mx$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3m^3}$ বর্গ একক

(b) $x^2 = 4ay$ এবং $y = mx$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8}{3}a^2m^3$ বর্গ একক

সতর্কতা: প্রদত্ত রেখাটি মূলবিন্দুগামী হলেই: $\frac{8a^2}{3m^3}$ বা $\frac{8}{3}a^2m^3$ প্রয়োগ করা যাবে।

Case-02: একটি পরাবৃত্ত ও একটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

Example-175: $y^2 = 16x$ এবং $y = 4x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sol^n: ছেদ বিন্দু নির্ণয়: $y = 4x \ldots\ldots\ldots (i) \therefore y^2 = 16x \Rightarrow (4x)^2 - 16x = 0 ; x(16x - 16) = 0 ; x = 0, 1 ; y = 0, 4$

$= 4\left(\left(\frac{2}{3}.1 - \frac{1}{2}\right) - 0\right) = 4 \times \left(\frac{4-3}{6}\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ বর্গ একক।

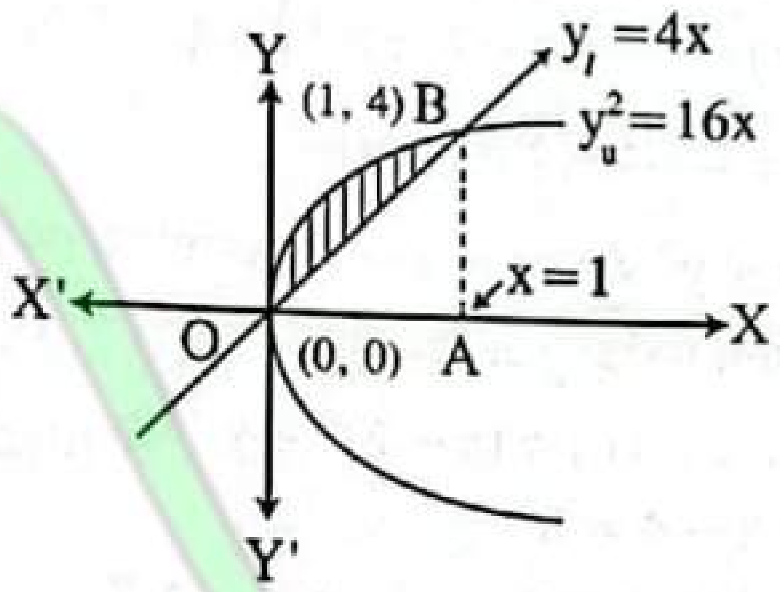
বিকল্প: Area$= \int_0^1 (y_u - y_l)\, dx - \Delta 0AB$

$= \int_0^1 (\sqrt{16x} - 0)\, dx - \frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 4 \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} - 2$

$= 4\left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - 2 = 4 \times \frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3}$ বর্গ একক

$\therefore$ Area $= \int_0^1 (y_u - y_l)\, dx = \int_0^1 (\sqrt{16x} - 4x)\, dx$

$= 4 \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x\right) dx = 4\left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$ বর্গ একক



❖ **Shortcut:** Area $= \frac{8a^2}{3m^3}$ $[a = 4, m = 4] = \frac{8\times4^2}{3\times4^3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ বর্গ একক।

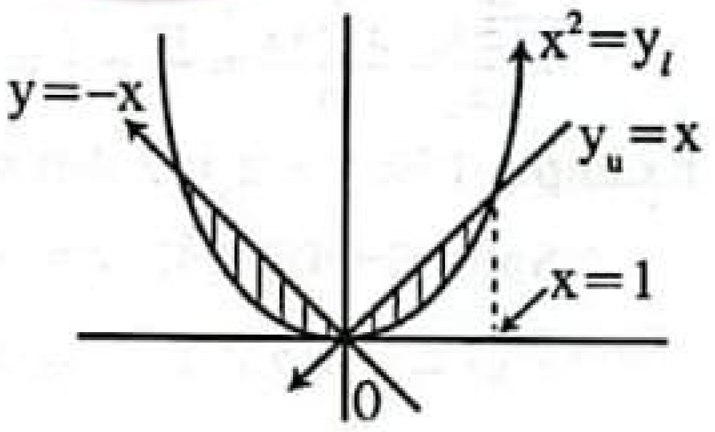
Example-176: $x^2 = y$ এবং $y = |x|$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sol^n: ছেদবিন্দু নির্ণয়: $y = x ; x^2 = y \therefore x^2 - x = 0 ; x(x - 1) = 0 ; x = 0, 1$

$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 2 \times \left(\frac{3-2}{6}\right) = \frac{1}{3}$ বর্গ একক

$y = |x| = \pm x \therefore y = x - - - (i)$ এবং $y = x \ldots\ldots\ldots (ii)$

$\therefore$ Area $= 2 \int_0^1 (y_u - y_l)\, dx = 2 \int_0^1 (x - x^2)\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ বর্গ একক



❖ **Shortcut:** Area $= 2 \times \frac{8a^2}{3m^3} \left[a = \frac{1}{4}, m = 1\right] = 2 \times \frac{8\times\frac{1}{16}}{3\times2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ বর্গ একক

Case-03: পরাবৃত্ত ও সরলরেখা (যা মূলবিন্দুগামী নয়) দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

Example-177: $y^2 = x - 1$ এবং $2y = x - 1$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[DU 21', 22]**

Sol^n: Process-01: ছেদবিন্দু নির্ণয়: $y^2 = x - 1 \ldots\ldots\ldots (i) ; 2y = x - 1$

$\Rightarrow y = \frac{x-1}{2} \ldots\ldots\ldots (ii) \therefore \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - (x - 1) = 0$

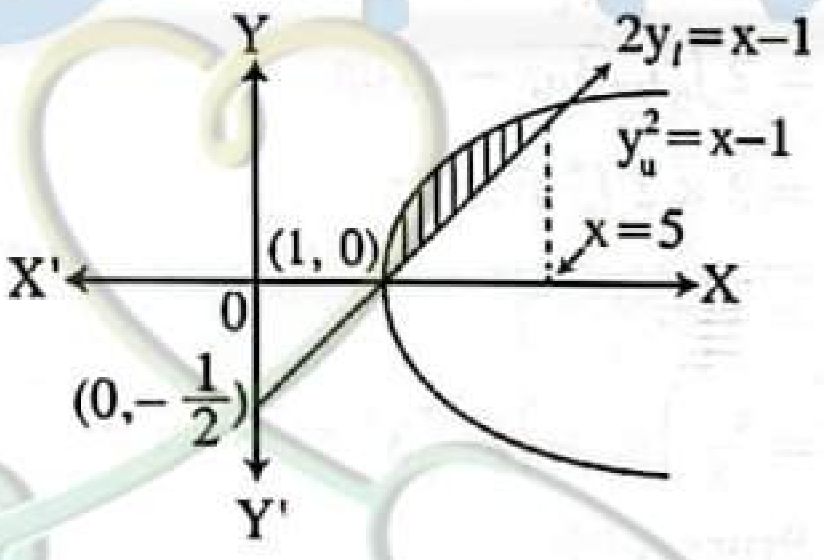
$(x - 1)(x - 1 - 4) = 0 \therefore x = 1, 5 \therefore y = 0, 2$

x অক্ষের সাপেক্ষে Area $= \int_1^5 (y_u - y_l)\, dx$

$= \int_1^5 \left(\sqrt{x-1} - \frac{x-1}{2}\right) dx = \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right]_1^5$

$= \left[\frac{2}{3}(5-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{5^2}{2} - 5\right)\right] - \left[\frac{2}{3}(1-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1^2}{2} - 1\right)\right]$

$= \frac{16}{3} - \frac{15}{4} - 0 - \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$ বর্গ একক।



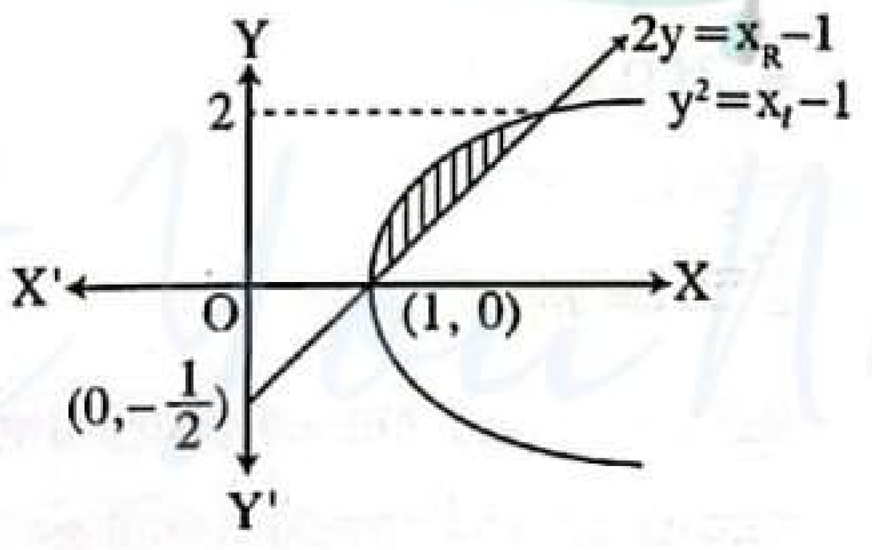
Process-02: (y অক্ষের সাপেক্ষে):

Area $= \int_0^2 (x_R - x_l)\, dy$

$= \int_0^2 ((2y + 1) - (y^2 + 1))\, dy$

$= \int_0^2 (2y - y^2)\, dy = \left[\frac{2y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$

$= \left(4 - \frac{8}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$ বর্গ একক।



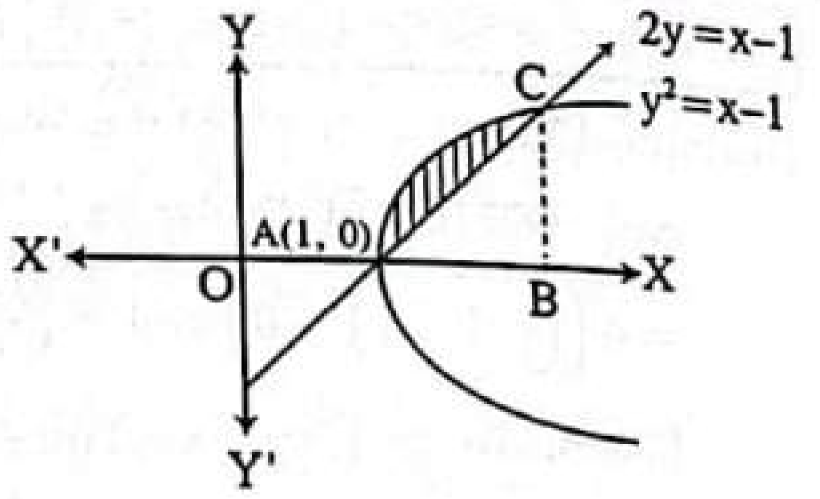
বিকল্প: Area $= \int_1^5 (y_u - y_l)\,dx - \Delta ABC$

$= \int_1^5 (\sqrt{x-1} - 0)\,dx - \frac{1}{2} \times AB \times BC$

$= \frac{2}{3}\left[(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^5 - \frac{1}{2} \times (5-1) \times 2$

$= \frac{2}{3}(5-1)^{\frac{3}{2}} - 0 - 4 = \frac{2}{3} \times 2^{2\times\frac{3}{2}} - 4$

$= \frac{16}{3} - 4 = \frac{16-12}{3} = \frac{4}{3}$ বর্গ একক।



Example-178: $x = y^2$ এবং $y = x - 2$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Solⁿ: ছেদবিন্দু নির্ণয়: $y = x - 2 \ldots\ldots\ldots (i)$

$\therefore y^2 = x \ldots\ldots\ldots (ii) \therefore (x-2)^2 - x = 0$

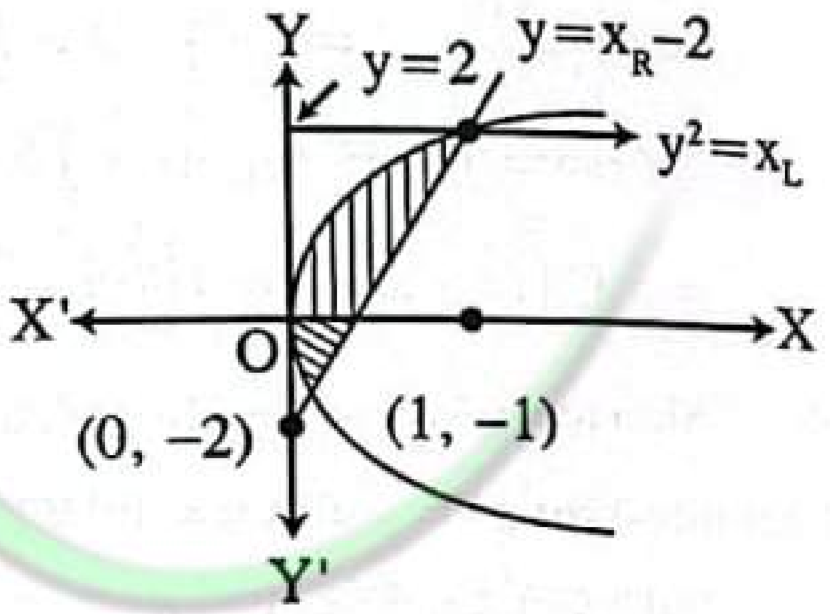
$x^2 - 4x - x + 4 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \therefore x = 1, 4 \therefore y = -1, 2$

y অক্ষের সাপেক্ষে: Area $= \int_{-1}^2 (x_R - x_l)\,dy = \int_{-1}^2 (y+2) - y^2)dy$

$= \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 2y\right]_{-1}^2 = \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2\right)$

$= \frac{10}{3} - \frac{3+2+3}{6} = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{20+7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ বর্গ একক।



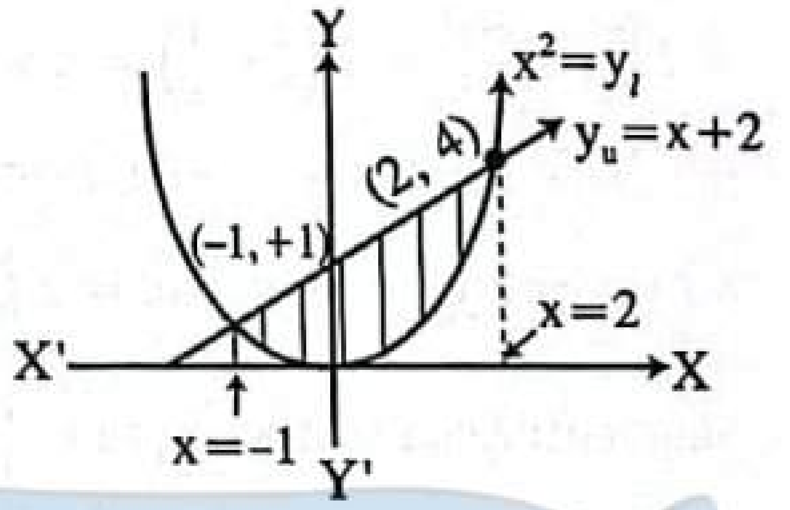
Example-179: $y - x = 2$ এবং $x^2 = y$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Solⁿ: ছেদবিন্দু নির্ণয়: $y = x + 2 \ldots\ldots\ldots (i) \therefore x^2 = y \ldots\ldots\ldots (ii)$

$\therefore x^2 - x - 2 = 0\,;\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \therefore x = 2, -1 \therefore y = 4, 1$

Area $= \int_{-1}^2 (y_u - y_l)\,dx = \int_{-1}^2 \{(x+2) - x^2\}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2$

$= \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2\right) = \frac{27}{6} = 4\frac{1}{2}$ বর্গ একক।



Example-180: দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল $\frac{8}{3}a^2$।

Solⁿ: Process-01:

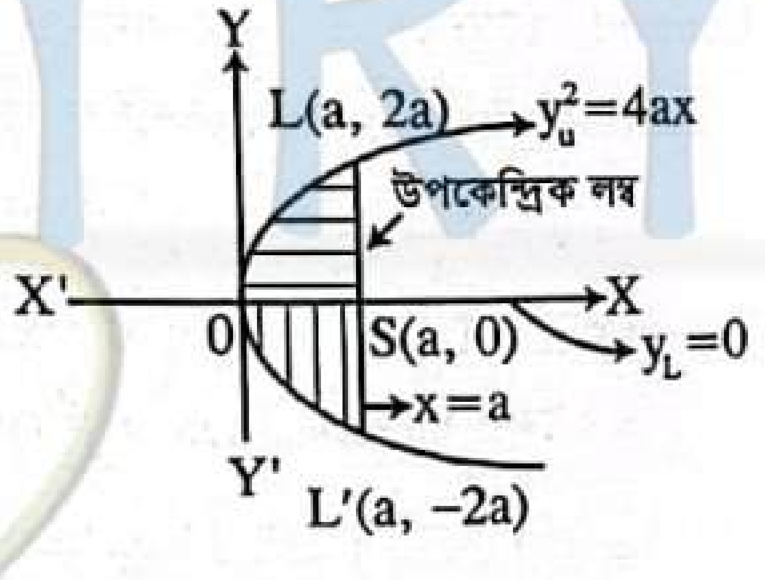
Area $= 2\int_0^a (y_u - y_l)\,dx$

$= 2\int_0^a (\sqrt{4ax} - 0)\,dx$

$= 2 \times 2 \int_0^a a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$

$= 4\left[a^{\frac{1}{2}}, \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$

$= \frac{4\times2}{3}\left[a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{3}a^2$ বর্গ একক।



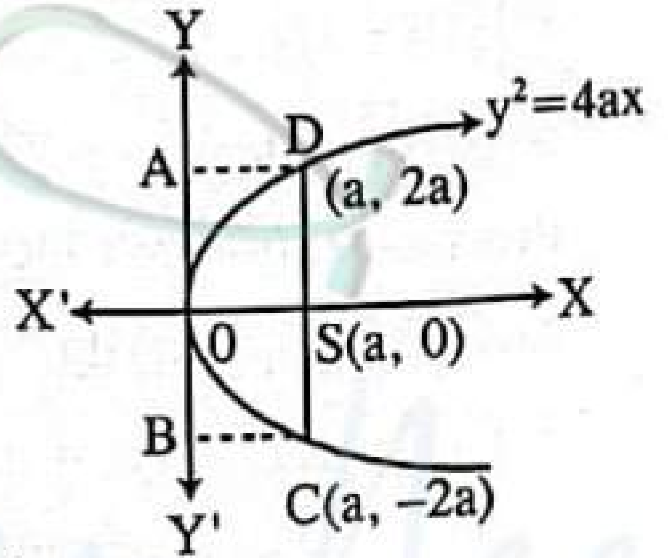
Process-02:

Area $= \frac{2}{3}$(Area of ABCD)

$= \frac{2}{3}(CD \times AD)$

$= \frac{2}{3}(4a \times a)$

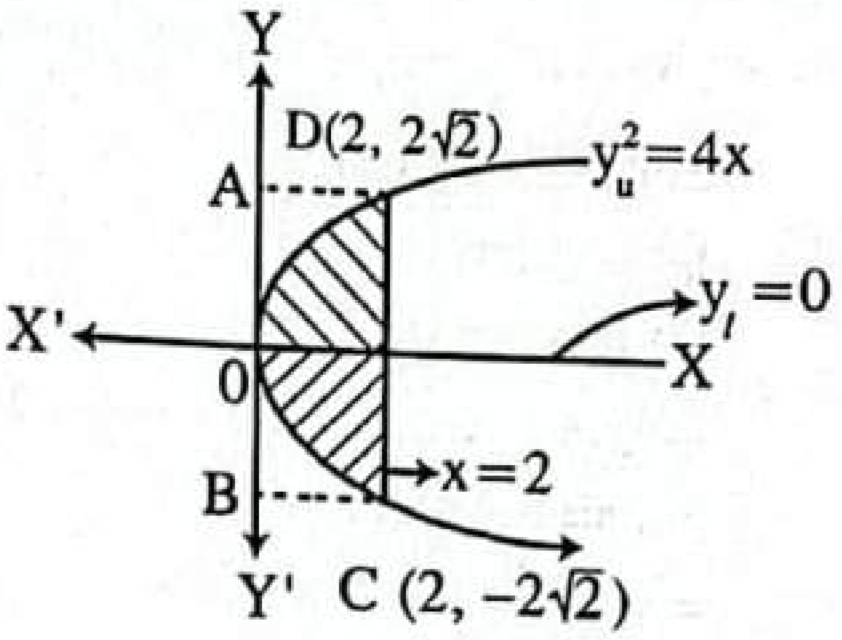
$= \frac{8a^2}{3}$ বর্গ একক।



Note: $y^2 = 4ax$ এবং এরূপ উহার উপকেন্দ্রিক লম্বের দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3}$ বর্গ একক হয়।

সতর্কতা: প্রদত্ত সরলরেখাটি অবশ্যই প্রদত্ত পরাবৃত্ত প্রধান অক্ষের উপর লম্ব বা উলম্বের সমান্তরাল হতে হবে।

Example-181: $y^2 = 4x$ এবং $x = 2$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



Solⁿ: Process-01:

$$\text{Area} = 2\int_0^2 (y_u - y_l)\,dx$$

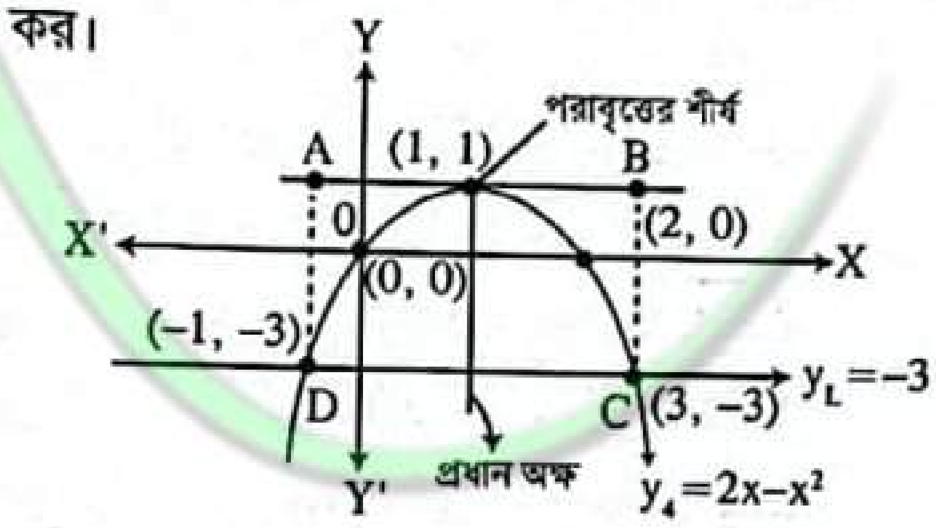
$$= 2\int_0^2 (\sqrt{4x} - 0)\,dx$$

$$= 2 \times 2\int_0^2 x^{\frac{1}{2}}\,dx = 4 \times \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$= \frac{8}{3}2^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}2\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ বর্গ একক

Process-02: Area $= \frac{2}{3}$(Area of ABCD) $= \frac{2}{3}(DC \times AD) = \frac{2}{3}(4\sqrt{2} \times 2) = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ বর্গ একক।

Example-182: $y = 2x - x^2$ এবং $y + 3 = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



Solⁿ: ছেদবিন্দু নির্ণয়: $y = 0$ হলে $2x - x^2 = 0$

$\therefore x(2-x) = 0 \therefore x = 0, x = 2 \therefore (0,0)$ ও $(2, 0)$

$$\text{Area} = \int_{-1}^{3} (y_u - y_l)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (2x - x^2 - (-3))dx = \int_{-1}^{3} (2x - x^2 + 3)\,dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x\right]_{-1}^{3}$$

$= (9 - 9 + 9) - \left(1 - \frac{1}{3} - 3\right) = 9 + \frac{5}{3} = \frac{27+5}{3} = \frac{32}{3}$ বর্গ একক।

- **Shortcut:** Area: $= \frac{2}{3}$(Area of ABCD)

$= \frac{2}{3}(AB \times BC)$

$= \frac{2}{3}(3+1)(3+1)$

$= \frac{2}{3} \times 4 \times 4 = \frac{32}{3}$ বর্গ একক।

Note: এখানে $y + 3 = 0$ রেখা প্রদত্ত পরাবৃত্ত $y = 2x - x^2$ এর প্রধান অক্ষের উপর লম্ব। এবং $y = 2x - x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 - 2x$ (শীর্ষে $\frac{dy}{dx} = 0$)

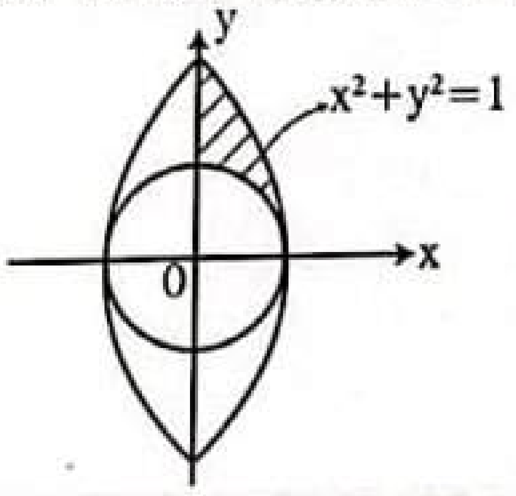
$\therefore 0 = 2(1 - x) \therefore x = 1$

$\therefore y = 2.1 - 1^2 = 1 \therefore$ শীর্ষ $(1, 1)$

Example-183: $x^2 + y^2 = 1$ এবং $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল প্রথম চর্তুভাগে নির্ণয় কর।

Solⁿ: Area $= \left(\frac{1}{4}\pi ab - \frac{1}{4}\pi r^2\right)$

$= \frac{1}{4}\pi(1 \times 2 - 1^2) = \frac{\pi}{4}$ বর্গ একক।



Note: বৃত্ত-উপবৃত্ত এবং সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত:

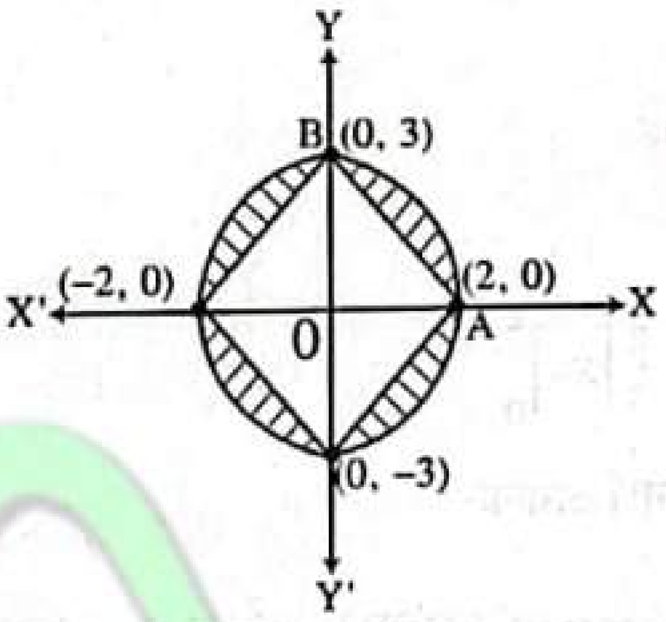
(i) $x^2 + y^2 = a^2$

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi a^2$ বর্গ একক এবং $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi ab$ বর্গ একক।

এবং $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \left(\frac{1}{a}\pi ab - \frac{1}{2}ab\right)$ বর্গ একক

Example-184: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্ত এবং $\frac{|x|}{2}+\frac{|y|}{3}=1$ রেখার বাইরের অংশ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



Sol^n: $\frac{|x|}{2}+\frac{|y|}{3}=1$

$|x|=0$ হলে $y=\pm3$

$|y|=0$ হলে $x=\pm2$

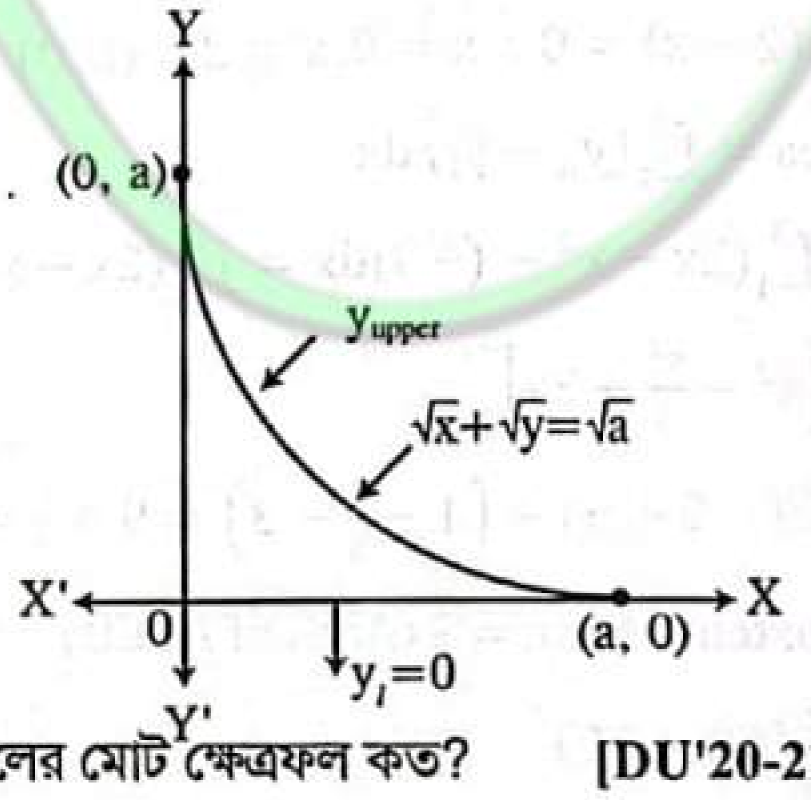
$\therefore$ Area = Area of ellipse $-4\times\Delta OAB$

$=\pi ab-4.\frac{1}{2}\times2\times3$

$=\pi\times2\times3-2\times2\times3$

$=6(\pi-2)$ বর্গ একক।

Example-185: দেখাও যে, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ পরাবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{6}a^2$ বর্গ একক। **[RU'19-20]**



Sol^n: $\therefore\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}$ [বর্গ করে]

$y_u=a+x-2\sqrt{ax}$ এবং $y=0$ হলে $x=a$

$x=0$ হলে $y=a$

Area $=\int_0^a(y_u-y_l)\,dx$

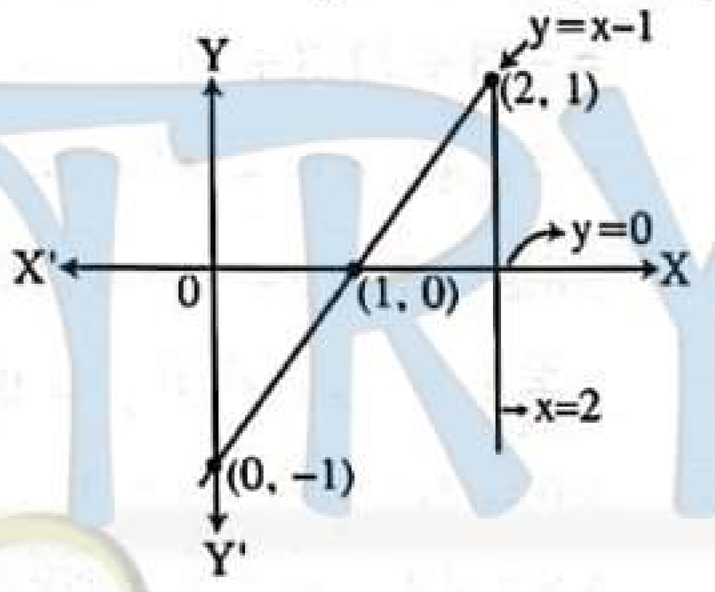
$=\int_0^a(a+x-2\sqrt{ax})\,dx$

$=\left[ax+\frac{x^2}{2}-2a^{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$

$=\left(a^2+\frac{a^2}{2}-\frac{4}{3}a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}-0\right)$

$=\left(a^2+\frac{a^2}{2}-\frac{4}{3}a^2\right)=\frac{6a^2+3a^2-8a^2}{6}=\frac{1}{6}a^2$ বর্গ একক।

Example-186: $[0,\ 2]$ ব্যবধিতে $y=x-1$ এবং $y=0$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের মোট ক্ষেত্রফল কত? **[DU'20-21, 19-20]**



Sol^n: যেহেতু ক্ষেত্রফল সবসময় ধনাত্মক এবং পরমমানের সাহায্যে লিখা হয়।

$\therefore$ Area $=\int_0^2|x-1|\,dx$

$=\int_0^1|x-1|\,dx+\int_1^2|x-1|\,dx$

$=\int_0^1-(x-1)\,dx+\int_1^2(x-1)\,dx$

$=\left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=1$ বর্গ একক।

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

01. $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

02. $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$

03. $\int_b^a f(x)dx=\int_b^a f(a+b-x)dx$

04. $\int_b^a f(x)dx=\int_{b-c}^{a-c} f(x+c)dx$

05. $\int_b^a f(x)dx=\int_{b+c}^{a+c} f(x-c)dx$

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম

MCQ

01. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\,d\theta$ এর মান কত?

(a) $\frac{8}{15}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

02. $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}dx = ?$

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{25\pi}{4}$ (c) $\frac{25}{4}$ (d) 0

03. x অক্ষ এবং $y = \sin x$ বক্ররেখার একটি চাপ দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হবে–

(a) 2 (b) 4 (c) 1 (d) None

04. $\int_0^{\pi} 3\sqrt{(1-\cos x)}\sin x\, dx =$ কত?

(a) $2\sqrt{4}$ (b) $3\sqrt{4}$ (c) $4\sqrt{2}$ (d) $4\sqrt{3}$

05. $\int \sin^5 x \cos x\, dx = f(x) + C$; যেখানে C একটি ধ্রুবক তবে $f(x) = ?$

(a) $\frac{1}{4}\sin^6 x$ (b) $\frac{1}{6}\sin^4 x$ (c) $\frac{1}{5}\sin^4 x$ (d) $\frac{1}{6}\sin^6 x$

06. $y = 4x^2$ এবং $y = 4$ রেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল–

(a) $\frac{16}{3}$ বর্গ একক (b) $\frac{3}{16}$ বর্গ একক (c) $\frac{1}{3}$ বর্গ একক (d) 3 বর্গ একক

07. $y = x$ সরলরেখা, x অক্ষ এবং $x = 4$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল-

(a) 8 (b) 2 (c) 4 (d) 6

08. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$ এর মান কত?

(a) 2 (b) 1 (c) 3 (d) 4

09. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ এর মান–

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (c) 1 (d) $\frac{\pi}{2}$

10. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ এর মান হবে–

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2 + c$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx$ এর মান হলো–

(a) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}$ (b) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$ (c) $\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}$ (d) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}$

12. $\int_{6-c}^{9-c} f(x+3)dx = \int_6^9 f(x)dx$ হলে $c = ?$

(a) 3 (b) −3 (c) 0 (d) 4

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx = ?$

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

14. $\int_a^3 (x+3)\, dx = \frac{11}{2}$ হলে, $a = ?$

(a) −6 (b) −8 (c) 2 (d) both b & c

Written

15. $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

16. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta} = ?$

17. $\int_0^{25} \frac{\ln x^2}{\sqrt{x}}\, dx = ?$

18. দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}a^2$

19. $y = \sin x$ বক্ররেখা, x- অক্ষ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

প্র্যাক্টিস প্রবলেমের সমাধান

MCQ

01. **Ans:** (a) $\frac{8}{15}$

02. **Ans:** (b) $\frac{25\pi}{4}$

03. **Sol^n: (a);** ক্ষেত্রফল $= \int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$

04. **Sol^n: (c);** $\int\limits_0^{\pi} 3\sqrt{1-\cos x}\sin x\ dx$

ধরি, $1-\cos x = z \Rightarrow dz = \sin x\ dx$

যখন, $x=\pi, z=2, x=0$

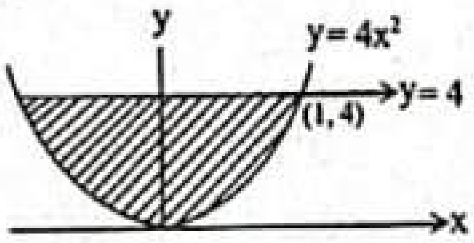
$z=0 \therefore \int\limits_0^2 3\sqrt{z}\,dz = \left[2\,z^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = 4\sqrt{2}$

05. **Sol^n: (d);** ধরি, $\sin x = t \Rightarrow \cos x.dx = dt$

$\int \sin^5 x\cos x\,dx = \int t^5 dt = \frac{1}{6}t^6$

$= \frac{1}{6}\sin^6 x + C\ \therefore f(x) = \frac{1}{6}\sin^6 x$

06. **Sol^n: (a);**



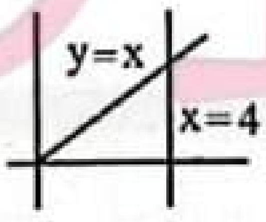
এখানে, $x = \frac{\sqrt{y}}{2}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 2 \times \int_0^4 \frac{\sqrt{y}}{2}dy$

$= \frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$ বর্গ একক

07. **Sol^n: (a);** $\therefore \int_0^4 y\,dx$

$\Rightarrow \int_0^4 x\,dx = \frac{1}{2}[x^2]_0^4 = \frac{4^2}{2} = 8$



08. **Ans:** (b) 1

09. **Sol^n: (c);** $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^1 -\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left[2\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1$

10. **Ans:** (a) $\frac{\pi}{4}$

11. **Sol^n: (b);** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx$

$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$

12. Ans (a) 3

13. Ans (c) $\frac{\pi}{4}$

14. **Sol**

14. **Solⁿ: (d);** $\int_a^3 (x+3)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_a^3 = \frac{11}{2}$

$\Rightarrow \frac{9}{2} + 9 - \frac{a^2}{2} - 3a = \frac{11}{2} \Rightarrow a^2 + 6a - 16 = 0 \therefore a = 2, -8$

Written

15. **Solⁿ:** ধরি, $I = \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{2^2-x^2}\,dx$

এবং $x = 2\sin\theta \therefore dx = 2\cos\theta\,d\theta$

$x = -1$ হলে, $\theta = \sin^{-1}\frac{-1}{2} = -\frac{\pi}{6}$ এবং $x = 1$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2\sin\theta)^2\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}.2\cos\theta\,d\theta$

$= 8\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta.2\cos\theta.\cos\theta\,d\theta = 16\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$

$= 4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2\theta\,d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 4\theta)\,d\theta$

$= 2\left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\left[\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right] - \frac{1}{2}\left[2\sin\frac{4\pi}{6}\right]$

$= 2\times\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

16. **Solⁿ:** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{3+\sec^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\tan\theta)}{4+\tan^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\tan\theta)}{2^2+\tan^2\theta} = \left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \tan^{-1}0\right] = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

17. **Solⁿ:** $\int \frac{\ln x^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{2\ln x}{\sqrt{x}}dx = \left[2\ln x \int\frac{dx}{\sqrt{x}} - \int\frac{d}{dx}(2\ln x)\int\frac{dx}{\sqrt{x}}dx\right]$

$= 4\ln x.\sqrt{x} - \int(\frac{2}{x}\times 2\sqrt{x})\,dx = 4\sqrt{x}\ln x - \int\frac{4}{\sqrt{x}}dx = 4\sqrt{x}\ln x - 8\sqrt{x} + c; \int_0^{25}\frac{\ln x^2}{\sqrt{x}} = \left[4\sqrt{x}\ln x - 8\sqrt{x}\right]_0^{25}$

$= 4\sqrt{25}\ln 25 - 8\sqrt{25} + 0 - 0 = 40\ln 5 - 40 = 40(\ln 5 - 1)$

18. **Solⁿ:** প্রমাণ: $x^2 = 4ay \Rightarrow y = \frac{x^2}{4a}$ হতে y এর মান $y^2 = 4ax$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

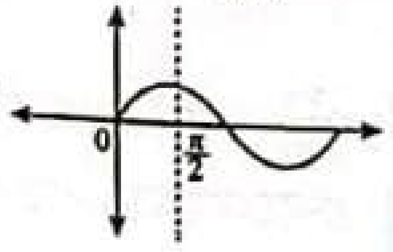
$\left(\frac{x^2}{4a}\right)^2 = 4ax \Rightarrow x^4 = 64a^3x \Rightarrow x(x^3 - 64a^3) = 0 \Rightarrow x = 0, 4a$

এখানে x এর সীমা 0 থেকে 4a এবং $y_1 = 2\sqrt{a}\sqrt{x},\ y_2 = \frac{1}{4a}x^2$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^{4a}(y_1 - y_2)dx = \int_0^{4a}\left(2\sqrt{a}\sqrt{x} - \frac{1}{4a}x^2\right) = \left[2\sqrt{a}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4a}.\frac{x^3}{3}\right]_0^{4a}$

$= \frac{4\sqrt{a}}{3}(4a)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12a}.64a^3 = \frac{4\sqrt{a}}{3}\times 8a\sqrt{a} - \frac{16}{3}a^2 = \frac{32}{3}a^2 - \frac{16}{3}a^2 = \frac{16}{3}a^2$ বর্গ একক।

19. **Solⁿ:**



Area $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = [\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \cos 0 - \cos\frac{\pi}{2} = 1$ বর্গ একক।

> ভুলের ভয়ে শুরু না করাই সবচেয়ে বড় ভুল!
>
> Elbert Hubbard

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট-০১

নিজে পরীক্ষা দাও। অতঃপর উত্তরের সাথে মিলিয়ে নাও।

সময়: 20 মিনিট পূর্ণমান: 25 (MCQ: 15+Written: 10)

MCQ

01. c একটি 4 × 4 ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং $|c| = 2$ হলে, $\left|\frac{5}{3c}\right|^{-1}$ এর মান-

(a) $\frac{6}{5}$ (b) $\frac{162}{5}$ (c) $\frac{48}{5}$ (d) $\frac{5}{162}$

02. বিকাল 4 টার সময় ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটাটির সরলরৈখিক সমীকরণ হবে–

(a) $x - \sqrt{3}y = 0$ (b) $\sqrt{3}x - 2y = 0$ (c) $x + \sqrt{3}y = 0$ (d) $\sqrt{3}x + y = 0$

03. মূলবিন্দু হতে 4 একক দূরে ও −1 ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ কোনটি?

(a) $x + y \pm \sqrt{2} = 0$ (b) $x + y \pm 2\sqrt{2} = 0$ (c) $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$ (d) $x + y - 3 = 0$

04. $14 \sin\theta - 6\cos\theta + r = \frac{16}{r}$ একটি কনিকের পোলার সমীকরণ নির্দেশ করলে, (2, 4) বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত হবে?

(a) $4\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{4}$ (c) $2\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{3}$

05. $\cos\left(7\frac{1}{2}\right)^{o} = ?$

(a) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ (c) $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ (d) $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

06. $\frac{\cos 27° - \cos 63°}{\cos 27° + \cos 63°} = ?$

(a) tan18° (b) tan63° (c) tan27° (d) None

07. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\ln(2+2x+x^2)}{(x+1)^2}$ এর মান কত?

(a) 5 (b) 2 (c) 1 (d) 0

08. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x°}{x}$ এর মান কত?

(a) π (b) $\frac{\pi}{180}$ (c) $\frac{180}{\pi}$ (d) 1

09. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots\ldots\ldots}}}$ হলে $\frac{dx}{dy}$ এর মান কত?

(a) $\frac{1}{2y-1}$ (b) $2y - 1$ (c) $\frac{x}{2y-1}$ (d) $\frac{y}{2y-1}$

10. $f(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]$ হলে, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) 1 (d) 0

11. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ এর মান কত?

(a) $\frac{a\pi}{3}$ (b) $\frac{a^3\pi}{4}$ (c) $\frac{a^2\pi}{4}$ (d) $\frac{a^3\pi}{2}$

12. $\int \frac{e^{6x} + e^{4x}}{e^{-4x} + e^{-2x}} dx = ? + c$

(a) e^{ex} (b) $8e^{8x}$ (c) $\frac{1}{8}e^{8x}$ (d) e^{2x}

13. $2x + 3y = 7$ এবং $3ax - 5by + 15 = 0$ সমীকরণ দুটি একই সরলরেখা প্রকাশ করলে a ও b ধ্রুবকের মান কত হবে?

(a) $\left(-\frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right)$ (b) $\left(-\frac{5}{7}, \frac{9}{7}\right)$ (c) $\left(-\frac{10}{7}, \frac{9}{7}\right)$ (d) $\left(-\frac{10}{7}, \frac{3}{7}\right)$

14. (0, 0), (0, 8) ও (4, 0) শীর্ষত্রয়বিশিষ্ট ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র–

(a) (2, 3) (b) (2, 4) (c) (2, 6) (d) (1, 6)

15. $x = 2 + \sin\theta$ এবং $y = 3 + \cos\theta$ বৃত্তের কেন্দ্র কত?

(a) (2, 3) (b) (−2, −3) (c) (1, 1) (d) (−1, −1)

Written

01. $\int \tan x \tan 2x \tan 3x \, dx$ নির্ণয় কর। 2.5

02. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2 & \sin\theta_3 \\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cos\theta_3 \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় কর। 2.5

03. $x^2+y^2=r^2$ বৃত্তের যেসব জ্যা (α,β) বিন্দুগামী, তাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2.5

04. $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$ হলে দেখাও যে, $C=45°$ অথবা $135°$

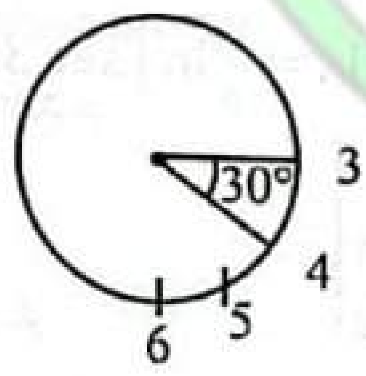
Solution of Model Test-01

MCQ

01. **Sol**

01. **Solⁿ: (b);** $\left|\frac{5}{3c}\right|^{-1}=\frac{|3c|}{5}=\frac{3^4\times|c|}{5}=\frac{81\times2}{5}=\frac{162}{5}$

02. **Solⁿ: (c);** সমীকরণ, $y=\tan(-30°)x+0 \Rightarrow \sqrt{3}y+x=0$



03. **Solⁿ: (c);** সমীকরণটি: $y=-x+c \Rightarrow x+y-c=0$

শর্তমতে, $\left|\frac{-c}{\sqrt{1+1}}\right|=4 \Rightarrow c=\pm4\sqrt{2}$

$\therefore$ রেখাটি, $x+y\pm4\sqrt{2}=0$

04. **Solⁿ: (a);** কনিকটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে, যার কার্তেসীয় সমীকরণ: $x^2+y^2-6x+14y-16=0$

$\therefore$ (2, 4) হতে স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{2^2+4^2-6\times2+14\times4-16}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ একক।

05. **Solⁿ: (b);** $\cos\left(7\frac{1}{2}\right)^{\circ}=\cos\left(\frac{45}{6}\right)^{\circ}=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{24}=\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\pi}{3\times2^3}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ **(Ans.)**

06. **Solⁿ: (a);** $\frac{\cos27°-\sin27°}{\cos27°+\sin27°}=\frac{\tan45°-\tan27°}{1+\tan45°\tan27°}=\tan(45°-27°)=\tan18°$

07. **Solⁿ: (c);** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\ln(2+2x+x^2)}{(x+1)^2}=\lim\limits_{(x+1)^2\to0}\frac{\ln\{1+(x+1)^2\}}{(x+1)^2}=1$

08. **Solⁿ: (b);** $x°=\left(\frac{\pi x}{180}\right)^c$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\pi}{180}\times\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)}{\left(\frac{\pi}{180}\right)x}=\frac{\pi}{180}\times1=\frac{\pi}{180}$

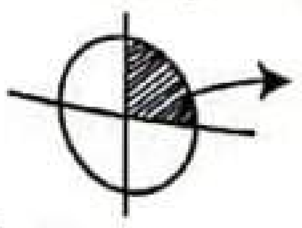
09. **Solⁿ: (b);** $y^2=x+y$

$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y-1}\therefore\frac{dx}{dy}=2y-1$

10. **Solⁿ: (b);** $f'(x)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\times\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\frac{1}{\cos x}=\sec x\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

11. **Solⁿ: (c);** $y=\sqrt{a^2-x^2}\therefore x^2+y^2=a^2$



এই অংশের ক্ষেত্রফল-

$=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi a^2}{4}$

12. **Sol^n: (c);** $\int \frac{e^{6x}+e^{4x}}{e^{-4x}+e^{-2x}}dx = \int \frac{e^{5x}(e^{x}+e^{-x})}{e^{-3x}(e^{x}+e^{-x})}dx = \int e^{5x}\cdot e^{3x}\,dx = \int e^{8x}\,dx = \frac{1}{8}e^{8x}+c$

13. **Sol^n: (c);** শর্তমতে, $\frac{2}{3a} = \frac{3}{-5b} = \frac{-7}{15}$ $\therefore a = -\frac{10}{7}$ & $b = \frac{9}{7}$

14. **Sol^n: (b);** সমকোণী ত্রিভুজ। অতিভুজের মধ্যবিন্দু হবে পরিকেন্দ্র। $x = \frac{4+0}{2} = 2$; $y = \frac{0+8}{2} = 4$

15. **Sol^n: (a);** $x = 2+\sin\theta \Rightarrow x-2 = \sin\theta$

$y = 3+\sin\theta \Rightarrow y-3 = \cos\theta$ $\therefore (x-2)^2+(y-3)^2 = 1$

Written

01. **Sol^n:** $\tan 3x = \tan(x+2x) = \frac{\tan x+\tan 2x}{1-\tan x\tan 2x}$

$\Rightarrow \tan x+\tan 2x = \tan 3x - \tan x\tan 2x\tan 3x$

$\Rightarrow \tan x\tan 2x\tan 3x = \tan 3x - \tan x - \tan 2x$

$\therefore \int \tan x\tan 2x\tan 3x\,dx$

$= \int(\tan 3x - \tan x - \tan 2x)\,dx = \frac{1}{3}\ln|\sec 3x| - \ln|\sec x| - \frac{1}{2}\ln|\sec 2x| + c$

02. **Sol^n:** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2 & \sin\theta_3 \\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cos\theta_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\theta_1-\sin\theta_2 & \sin\theta_2-\sin\theta_3 & \sin\theta_3 \\ \cos\theta_1-\cos\theta_2 & \cos\theta_2-\cos\theta_3 & \cos\theta_3 \end{vmatrix} [c_1' = c_1-c_2, c_2' = c_2-c_3]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} & 2\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2} & \sin\theta_3 \\ 2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2} & 2\sin\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2} & \cos\theta_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\times 2\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} & \cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2} & \sin\theta_3 \\ -\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} & -\sin\frac{\theta_2+\theta_3}{2} & \cos\theta_3 \end{vmatrix}$$

$$= 4\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{3}\left(-\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2+\theta_3}{2} + \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)$$

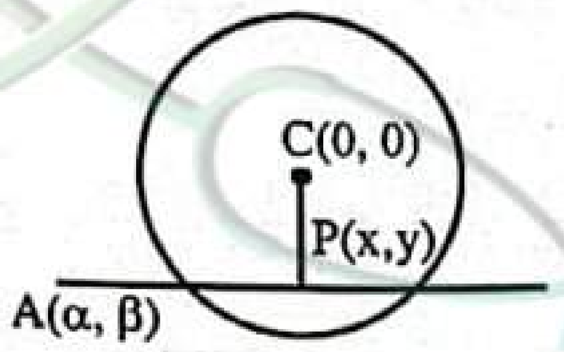
$$= 4\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{3}\times\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_2-\theta_3}{2}\right) = 4\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_3}{2}$$ **(Ans)**

03. **Sol^n:** মনে করি, মধ্যবিন্দু $P(x, y)$

তাহলে, AP রেখার ঢাল × CP রেখার ঢাল $= -1$

$\Rightarrow \frac{y-\beta}{x-\alpha}\times\frac{y}{x} = -1$

$\Rightarrow x(x-\alpha) = -y(y-\beta) \Rightarrow x(x-\alpha)+y(y-\beta) = 0$



04. **সমাধান:** $a^4+b^4+c^4 = 2c^2(a^2+b^2) \Rightarrow a^4+b^4+c^4-2c^2a^2-2b^2c^2 = 0$

$\Rightarrow (a^2)^2+(b^2)^2+(-c^2)^2+2a^2b^2+2b^2(-c^2)+2(-c^2)a^2 = 2a^2b^2$

$\Rightarrow (a^2+b^2-c^2)^2 = 2a^2b^2 \Rightarrow a^2+b^2-c^2 = \pm\sqrt{2}ab$

$\Rightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \pm\frac{\sqrt{2}ab}{2ab} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos C = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore C = 45°$ অথবা $180° - 45° = 135°$ (প্রমাণিত)

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট-০২

নিজে পরীক্ষা দাও। অতঃপর উত্তরের সাথে মিলিয়ে নাও।

সময়: 20 মিনিট পূর্ণমান: 25 (MCQ: 15+Written: 10)

MCQ

01. যদি $AX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$ হয়, তবে XA^2 হবে-

(a) $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ (d) None

02. পোলার স্থানাঙ্কে একটি বক্ররেখার সমীকরণ $r^2 \sin 2\theta = 36$। বক্ররেখাটি কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে নিচের কোন বিন্দু দিয়ে যায়?

(a) $(4,5)$ (b) $(4,9)$ (c) $(2,18)$ (d) $(3,6)$

03. $p^2x^2 + 2px + qy + p^2y^2 = 0$ সমীকরণটি দ্বারা কী নির্দেশ করে?

(a) একজোড়া সরলরেখা (b) বৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) উপবৃত্ত

04. 4 একক বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু দিয়ে যে বৃত্ত আঁকা যায় তার ক্ষেত্রফল কত?

(a) 4π (b) 8π (c) 16π (d) 12π

05. $A = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$ হলে $A^{100} = ?$

(a) 0 (b) 1 (c) A (d) $-A$

06. $(2,3)$ বিন্দুটির প্রতিবিম্ব কোনটি? ($y = x$ এর সাপেক্ষে)

(a) $(3, 2)$ (b) $(2,0)$ (c) $(0,3)$ (d) $(3,3)$

07. $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2} = ?$

(a) $2\tan^{-1}\frac{2a}{1+a^2}$ (b) $2\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}$ (c) $2\tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2}$ (d) $2\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}$

08. $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha$ হলে, $\cos\alpha - \sin\alpha =$ কত?

(a) $\sqrt{2\sin\alpha}$ (b) $\sqrt{3}\cos\alpha$ (c) $\sqrt{5}\sin\alpha$ (d) $\sqrt{2}\sin\alpha$

09. $4x + 3y - 3 = 0, 16y + \lambda x = 19$ এবং $\gamma x + 12y + k = 0$ তিনটি সরলরেখার সমীকরণ। λ ও γ এর মান কত হলে, তৃতীয়টি প্রথমটির সমান্তরাল এবং দ্বিতীয়টি তাদের ওপর লম্ব হবে?

(a) $\lambda = 12, \gamma = -16$ (b) $\lambda = -12, \gamma = 16$ (c) $\lambda = 16, \gamma = 12$ (d) $\lambda = 16, \gamma = -12$

10. $\lim\limits_{\delta \to b^2} \frac{\sqrt{b^2-\delta} - \sqrt{\delta-b^2}}{\sqrt{\delta-b^2} + \sqrt{1-\frac{\delta}{b}}} = ?$

(a) $\sqrt{\frac{1-b}{2b}}$ (b) $b\sqrt{\frac{1-b}{2}}$ (c) $\sqrt{\frac{2b^2}{1-b}}$ (d) $\sqrt{\frac{2b}{1-b}}$

11. $ln x$ এর সাপেক্ষে $ln\left(\frac{1}{x}\right)$ এর অন্তরক সহগ হল–

(a) $\frac{1}{x}$ (b) $-\frac{1}{x}$ (c) 1 (d) -1

12. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x = ?$

(a) e^{-2} (b) e^{-1} (c) e^{-3} (d) e^{-4}

13. $\int_1^{\ln a} xe^x dx = 3a$ হলে a এর মান কত?

(a) e (b) e^2 (c) e^3 (d) e^4

14. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{\sqrt{25+h} - \sqrt{25-h}} = ?$

(a) -5 (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{-1}{5}$ (d) 5

15. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে তাদের কয়টি সাধারণ স্পর্শক বিদ্যমান?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Written

01. $2x + 3y + 5 = 0$ এবং $4x - 6y - 7 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত যে কোণটি $(1, 2)$ বিন্দু ধারণ করে তার সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

02. $y = \sqrt{\cos\theta\sqrt{\cos\theta\sqrt{\cos\theta \ldots\ldots\infty}}}$ হলে দেখাও যে, $\frac{dy}{d\theta} = \frac{y\sin\theta}{\cos\theta - 2y}$ 2.5

03. দেখাও যে, $px + qy = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2q^2 + 2ap = 1$ হয়। 2.5

04. $\sin\alpha + \sin\beta = m$ এবং $\cos\alpha + \cos\beta = n$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2}$ 2.5

Solution of Model Test-02

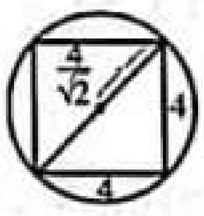
MCQ

01. **Sol**

01. **Sol^n: (d);** $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$। A^2 এর মাত্রা 2×2 এবং X এর মাত্রা 2×1।
$\therefore$ X ও A^2 এর গুণ করা সম্ভব নয়।

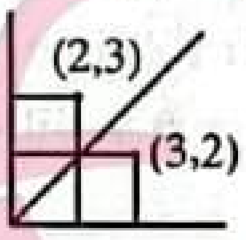
02. **Sol^n: (d);** $r^2\sin 2\theta = 36 \Rightarrow r^2 \times 2\sin\theta\cos\theta = 36 \Rightarrow r^2 \times 2 \times \frac{y}{r} \times \frac{x}{r} = 36$
$[\because x = r\cos\theta \,;\, y = r\sin\theta]$
$\Rightarrow xy = 18 \therefore (3, 6)$ বিন্দু বক্ররেখাটিকে সিদ্ধ করে।

03. **Sol^n: (b)** x^2 ও y^2 এর সহগ সমান এবং xy যুক্ত কোন পদ নেই।

04. **Sol^n: (b);** 

$\therefore$ Area $= \pi \times \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8\pi$

05. **Sol^n: (c);** $A = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix} = \omega I \Rightarrow A^{100} = \omega^{100} I^{100} = \omega I = A \,;\, [I^{100} = I, \omega^{100} = \omega^{99+1} = \omega]$

06. **Sol^n: (a);** 

07. **Sol^n: (d);** $2\tan^{-1}a - 2\tan^{-1}b = 2\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}$

08. **Sol^n: (d);** $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha$ or, $\sin\alpha = (\sqrt{2} - 1)\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{(\sqrt{2}+1)}{2-1}\sin\alpha$
$\Rightarrow \cos\alpha = (\sqrt{2} + 1)\sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha + \sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha$

09. **Sol^n: (c);** ১ম শর্তমতে, $\frac{y}{\gamma} = \frac{3}{12} \Rightarrow \gamma = 16$ & ২য় শর্তমতে, $\left(\frac{-4}{3}\right) \times \left(\frac{-\lambda}{16}\right) = -1 \Rightarrow \lambda = 12$

10. **Sol^n: (c);** লিমিট বসিয়ে পাই, $\frac{\sqrt{2b^2} - 0}{0 + \sqrt{1-b}} = \sqrt{\frac{2b^2}{1-b}}$

11. **Sol^n: (d);** $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \therefore \frac{d}{d\ln x}\left(\ln\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{d\ln x}(-\ln x) = -1$

12. **Sol^n: (b);** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^x} ; \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e} = e^{-1}$ **(Ans.)**

13. **Sol^n: (d);** $\int_1^{\ln a} xe^x dx = 3a \Rightarrow [e^x(x - 1)]_1^{\ln a} = 3a$
$\Rightarrow e^{\ln a}(\ln a - 1) = 3a \Rightarrow \ln a - 1 = 3 \Rightarrow \ln a = 4 \Rightarrow a = e^4$

14. **Sol^n: (d);** $\lim\limits_{h\to\infty}\frac{h(\sqrt{25+h} + \sqrt{25-h})}{(25+h) - (25-h)} = \lim\limits_{h\to\infty}\frac{h(\sqrt{25+h} + \sqrt{25-h})}{2h} = \frac{\sqrt{25} + \sqrt{25}}{2} = 5$

15. **Ans:** (c) 3

Written

01. **Sol^n:** ধরি, $f_1(x,y) = 2x + 3y + 5$ এবং $f_2(x,y) = 4x - 6y - 7$

$f_1(1,2) = 2 \times 1 + 3 \times 2 + 5 = 13$ এবং $f_2(1,2) = 4 \times 1 - 6 \times 2 - 7 = -15$

$f_1(1,2) \times f_2(1,2) = 13 \times (-15) = -195 < 0$

∴ কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণের (−) চিহ্নযুক্ত সমীকরণই হবে (1, 2) বিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

∴ (1, 2) বিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{2x+3y+5}{\sqrt{2^2+3^2}} = -\frac{4x-6y-7}{\sqrt{4^2+6^2}}$$

$$\Rightarrow 2(2x + 3y + 5) = -4x + 6y + 7$$

$$\Rightarrow 4x + 6y + 10 = -4x + 6y + 7$$

$$\therefore 8x + 3 = 0$$ **(Ans.)**

02. **Sol^n:** $y = \sqrt{y\cos\theta}$

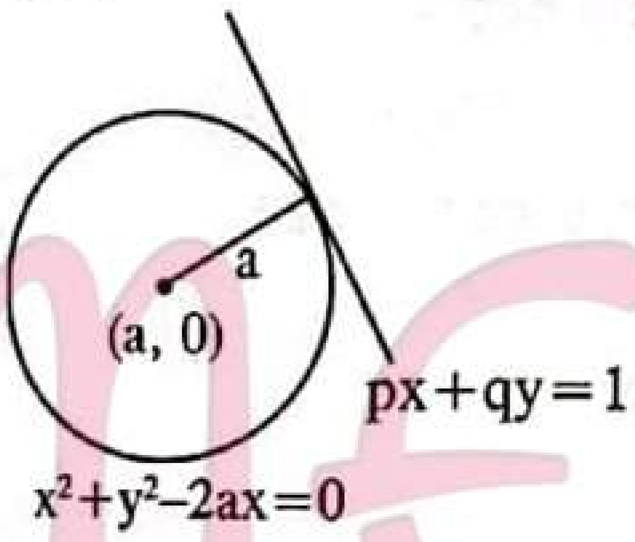
$$\Rightarrow y^2 - y\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{d\theta} - \cos\theta\frac{dy}{d\theta} + \sin\theta \times y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta}(2y - \cos\theta) = -y\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = \frac{-y\sin\theta}{2y-\cos\theta} = \frac{y\sin\theta}{\cos\theta-2y} \therefore \frac{dy}{d\theta} = \frac{y\sin\theta}{\cos\theta-2y}$$

03. **Sol^n:**



$x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(a, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= |a|$

$px + qy = 1$ রেখাটি বৃত্তটির স্পর্শক হবে যদি বৃত্তের কেন্দ্র হতে সরলরেখাটির লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ

$$\Rightarrow \frac{|p.a+q.0-1|}{\sqrt{p^2+q^2}} = |a|$$

$$\Rightarrow |ap - 1| = |a|\sqrt{p^2 + q^2}$$

$$\Rightarrow a^2p^2 + 1 - 2ap = a^2p^2 + a^2q^2$$

$\therefore \boxed{a^2q^2 + 2ap = 1}$ [প্রমাণিত]

04. **Sol^n:** দেওয়া আছে,

$\sin\alpha + \sin\beta = m$

$\Rightarrow 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = m$ ……… (i)

$\cos\alpha + \cos\beta = n$

$\Rightarrow 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = n$ ……… (ii)

(i) ÷ (ii) $\Rightarrow \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{m}{n}$

এখন, $L.S = \cos(\alpha + \beta) = \cos\left(2.\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$= \frac{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2} = \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2} = R.S$ [প্রমাণিত]

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট-০৩

নিজে পরীক্ষা দাও। অতঃপর উত্তরের সাথে মিলিয়ে নাও।

সময়: 20 মিনিট **পূর্ণমান: 25 (MCQ: 15+Written: 10)**

MCQ

01. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মাধ্যমিক পদ কত?
(a) 12 (b) 16 (c) 4 (d) 6

02. $A = (2,2), B = (2,1), C = (0,0)$ বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি-
(a) সমবাহু (b) সমদ্বিবাহু (c) সমকোণী (d) স্থূলকোণী

03. $y = 2x + 4$ এবং $6x = 3y + 5$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?
(a) $\frac{17}{\sqrt{13}}$ (b) 1 (c) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (d) $\frac{17\sqrt{5}}{15}$

04. $x + y = 0,\ x - y = 0,\ x = 7$ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের কোণগুলি কত?
(a) $90°, 45°, 45°$ (b) $90°, 30°, 60°$ (c) $60°, 60°, 60°$ (d) None

05. $x = a$ এবং $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের মান কত?
(a) 30° (b) 60° (c) 45° (d) 90°

06. 6 একক দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি জ্যা $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ বৃত্তের কেন্দ্রে কত কোণ তৈরি করবে?
(a) $\sin^{-1}\left(\frac{6}{5}\right)$ (b) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (c) $2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\frac{6}{5}\right)$

07. $(-8, 2)$ বিন্দু হতে $2(x^2 + y^2) = p$ বৃত্তের ওপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 9 একক হলে, p এর মান কত?
(a) 26 (b) −26 (c) 13 (d) −13

08. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সকে বিপরীতকরণ করে ট্রান্সপোজ করলে প্রাপ্ত ম্যাট্রিক্সের ট্রেস কত হবে?
(a) −2 (b) 8 (c) −8 (d) 2

09. $y = x\tan\theta$ হলে, $x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = ?$
(a) y (b) x (c) 0 (d) কোনোটিই নয়

10. $24\sin\theta + 7\cos\theta$ এর সর্বোচ্চ মান কত?
(a) 27 (b) 24 (c) 31 (d) 25

11. $y = x^{-1/x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান–
(a) $x^{-2+\frac{1}{x}}(\ln x - 1)$ (b) $\frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(\ln x - 1)$ (c) $\frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(1 - \ln x)$ (d) $\frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(\ln x + 2)$

12. যদি $x = \tan \ln y$ হয়, তবে $\frac{y_2}{y_1} = ?$
(a) $\frac{1+x^2}{2x-1}$ (b) $\frac{1-2x}{1+x^2}$ (c) $-\frac{1+x^2}{2x-1}$ (d) $\frac{-(2x-1)}{1+x^2}$

13. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ এর মান কত?
(a) $\frac{x}{x+1} + c$ (b) $\frac{x}{(x+1)^2} + c$ (c) $\frac{e^x}{x+1} + c$ (d) $\frac{e^x}{(x+1)^2} + c$

14. যদি $\int_0^4 f(x)dx = 6$ হয়, তবে $\int_{-1}^{3} f(x+1)dx$ এর মান-
(a) 5 (b) 7 (c) 0 (d) 6

15. $f(x) = \sin x$ হলে, $f^{(19)}(0) = ?$
(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) $\sqrt{2}$

Written

01. দেখাও যে, $x = a, y = b$ ও $y = mx$ রেখা 3টি যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2m}(b - ma)^2$ বর্গ একক। 2.5

02. $[x \quad 4 \quad 1]\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 0 & 2\\0 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\4\\-1\end{bmatrix} = [0]$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। 2.5

03. $y = \tan x + \sec x$ হলে প্রমাণ কর যে, $y_2 = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ 2.5

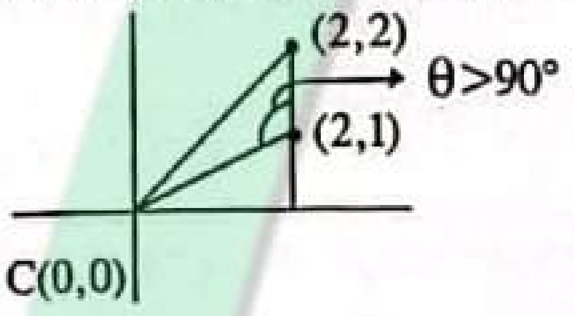
04. প্রমাণ কর যে, $\sec\frac{5x}{2} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 10x}}}$

Solution of Model Test-03

MCQ

01. **Sol^n: (b);** গৌণ কর্ণের 2, 2 ও 4 এর গুণফল $= 2 \times 2 \times 4 = 16$

02. **Sol^n: (d);**

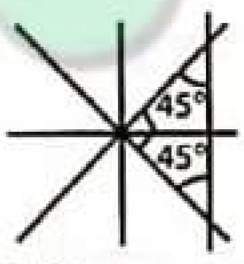


চিত্র হতে পাই, স্থূলকোণী।

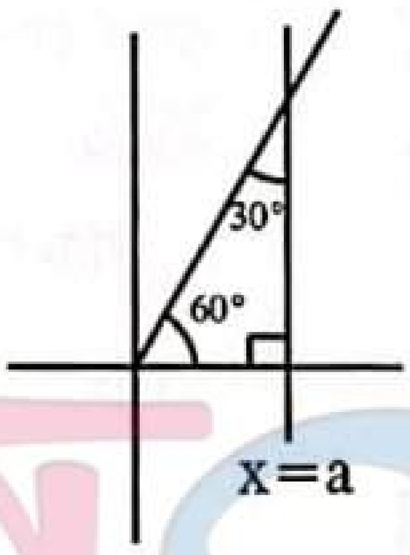
03. **Sol^n: (d);** $y = 2x + 4 \Rightarrow 2x - y + 4 = 0$

$6x = 3y + 5 \Rightarrow 2x - y - \frac{5}{3} = 0 \therefore$ দূরত্ব $= \frac{\left|4+\frac{5}{3}\right|}{\sqrt{4+1}} = \frac{17\sqrt{5}}{15}$

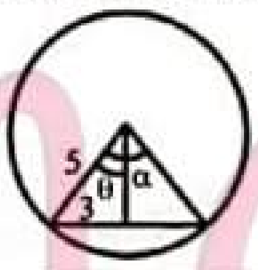
04. **Sol^n: (a);**



05. **Sol^n: (a);** দ্বিতীয় রেখার ঢাল $\sqrt{3} = \tan 60° \longrightarrow$



06. **Sol^n: (c);**



$\alpha = 2\theta = 2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

07. **Sol^n: (b);** $\sqrt{(-8)^2 + 2^2 - \frac{p}{2}} = 9 \Rightarrow 68 - \frac{p}{2} = 81 \therefore p = -26$

08. **Sol^n: (a) ;** নির্ণেয় ম্যাট্রিক্স: $\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}6 & -4\\-4 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{6}{-4} & \frac{-4}{-4}\\\frac{-4}{-4} & \frac{2}{-4}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & 1\\1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} \therefore$ ট্রেস $= -\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right) = -2$

09. **Sol^n: (b);** $\tan\theta = \frac{y}{x}$; $x\cos 2\theta + y\sin 2\theta$

$= x.\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) + y\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = x\left(\frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right) + y\left(\frac{\frac{2y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} + \frac{y.2yx}{(x^2+y^2)} = x$

10. **Sol^n: (d);** $\frac{d}{d\theta}(24\sin\theta + 7\cos\theta) = 0 \Rightarrow 24\cos\theta - 7\sin\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = \frac{24}{7} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{24}{7}$

$\therefore 24\sin\theta + 7\cos\theta = 25$; Shortcut: সর্বোচ্চ মান $= \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$

11. **Sol^n: (b);** $\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{1}{x}}\left\{\frac{-\frac{1}{x}}{x}.1 + \ln x\left(-\frac{1}{x^2}\right)(-1)\right\} = x^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)(\ln x - 1) = \frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(\ln x - 1)$

12. **Sol^n: (b);** $x = \tan\ln y \Rightarrow \ln y = \tan^{-1}x \Rightarrow y = e^{\tan^{-1}x} \Rightarrow y_1 = \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)y_1 = y$

$\Rightarrow (1+x^2)y_2 + y_1.2x = y_1 \therefore \frac{y_2}{y_1} = \frac{1-2x}{1+x^2}$

13. **Sol^n: (c);** $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int\frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2}dx = \int e^x\left[\frac{1}{x+1} - \left(\frac{1}{x+1}\right)^2\right]dx = \frac{e^x}{x+1} + c$

14. **Sol^n: (d);** $\int_{-1}^{3} f(x+1)dx = \int_0^4 f(x)dx = 6$

15. **Sol^n: (c);** $f^n(x) = \sin(n\frac{\pi}{2} + x) \therefore f^{19}(0) = \sin\left(19\frac{\pi}{2} + 0\right) = -1$

Written

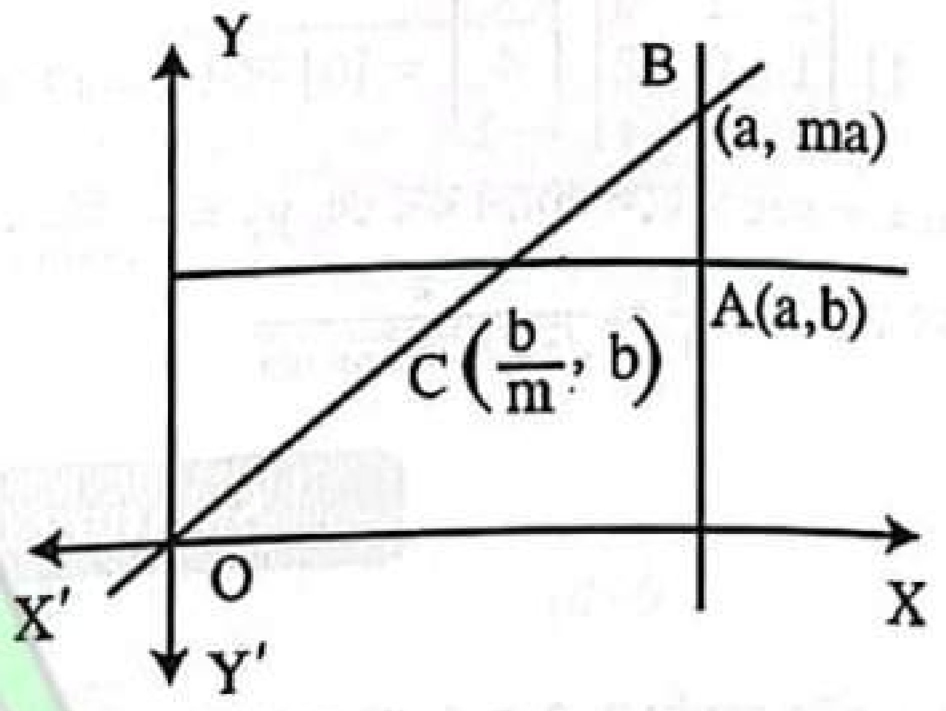
01. **Sol^n:** প্রদত্ত রেখা তিনটি

$x = a$ ……… (i)

$y = b$ ……… (ii)

$y = mx$ …… (iii)

এদের ছেদবিন্দু 3টি $A(a, b), B(a, ma), C\left(\frac{b}{m}, b\right)$



$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a & ma & 1 \\ \frac{b}{m} & b & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}[a(ma - b)] - b\left(a - \frac{b}{m}\right) + ab - ab]$

$= \frac{1}{2}\left[ma^2 - ab - ab + \frac{b^2}{m}\right]$

$= \frac{1}{2m}[m^2a^2 - 2ma.b + b^2]$

$= \frac{1}{2m}(b - ma)^2$ বর্গ একক

02. **Sol^n:** $[x \quad 4 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = [0]$

$\Rightarrow [x \quad 4 \quad 1]\begin{bmatrix} 2x + 4 - 0 \\ x + 0 - 2 \\ 0 + 8 - 4 \end{bmatrix} = [0]$

$\Rightarrow [x \quad 4 \quad 1]\begin{bmatrix} 2x + 4 \\ x - 2 \\ 4 \end{bmatrix} = [0]$

$\Rightarrow [2x^2 + 4x + 4x - 8 + 4] = [0]$

$\Rightarrow 2x^2 + 8x - 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-2)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$

03. **Sol^n:** $y = \tan x + \sec x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

$\Rightarrow y_1 = \frac{\cos x \times \cos x - (1 + \sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{1 - \sin x}$

$\Rightarrow y_2 = \frac{(1 - \sin x) \times 0 - 1(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$

$\therefore y_2 = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$ (প্রমাণিত)

04. **Sol^n:** $L.S = \sec\frac{5x}{2} = \frac{2}{2\cos\frac{5x}{2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{4\cos^2\frac{5x}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2\left(2\cos^2\frac{5x}{2}\right)}} = \frac{2}{\sqrt{2(1 + \cos 5x)}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2 + 2\cos 5x}} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{4\cos^2 5x}}} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2(2\cos^2 5x)}}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 10x)}}} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 10x}}}$

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট-০৪

নিজে পরীক্ষা দাও। অতঃপর উত্তরের সাথে মিলিয়ে নাও।

সময়: 20 মিনিট পূর্ণমান: 25 (MCQ: 15+Written: 10)

MCQ

01. একটি 2×2 ক্রমের প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ট্রেস ও মাধ্যমিক পদ যথাক্রমে -2 ও 81 হলে ম্যাট্রিক্সটি হবে-

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -9 & -8 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & -9 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}$ (d) a ও b উভয়ই

02. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো $A(x, y)$, $B(1, 3)$ ও $C(3, 1)$ হলে এবং $x + y = 12$ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কোনটি?

(a) 8 বর্গ একক (b) 6 বর্গ একক (c) 12 বর্গ একক (d) 9 বর্গ একক

03. $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ কী?

(a) $6y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 4\sqrt{x^2+y^2} - x$ (b) $3y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 2x$

(c) $4y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 6\sqrt{x^2+y^2} - x$ (d) $2y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 3\sqrt{x^2+y^2}$

04. $2x + 3y - 4 = 0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান-

(a) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ (c) $\frac{3}{\sqrt{13}}$ (d) $\frac{4}{\sqrt{13}}$

05. λ এর কোন মানের জন্য $(x + y - 7)^2 - x\{(k^2 - 3)(k + 7) + 2\}y = 0$ সমীকরণটি বৃত্ত নির্দেশ করবে না?

(a) $-\sqrt{3}$ (b) -7 (c) $\sqrt{3}$ (d) -2

06. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ p & 4 \end{bmatrix}$ হলে, p এর কোন মানের জন্য A^{-1} নির্ণয় সম্ভব নয়?

(a) -4 (b) $\frac{20}{3}$ (c) 7 (d) $-\frac{20}{3}$

07. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = ?$

(a) $abc(ab - bc)$ (b) $(a - b)(b - c)(c - a)$

(c) $(a + b)(a + c)(c + a)$ (d) None

08. $\cos 2\theta = \frac{24}{25}$ হলে, $\tan\theta$ এর মান কত?

(a) ± 7 (b) $\pm\frac{5}{7}$ (c) $\pm\frac{1}{7}$ (d) $\pm\frac{7}{5}$

09. $y = (\sin x)^x$ হলে $\frac{dy}{dx} =$ কত?

(a) $x(\sin x)^{x-1}\cos x$ (b) $x \log \operatorname{cosce} x$

(c) $(\sin x)^x(x\cot x + \log\sin x)$ (d) $(\sin x)^{x-1}\cot x$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{10^{-2x} - 10^{-3x}}{x} = ?$

(a) $\log 10$ (b) $-\log 10$ (c) $\log_e 10$ (d) $-\log_e 10$

11. তাপে সিলিন্ডারের ব্যাস ও উচ্চতা বৃদ্ধির হার যথাক্রমে 1 ও 2 হলে আয়তন বৃদ্ধির হার কত? যদি ব্যাস ও উচ্চতা যথাক্রমে 10 ও 25 একক বিশিষ্ট হয়।

(a) 100π (b) 125π (c) 150π (d) 175π

12. $\int\frac{dx}{e^x + e^{-x}} = ?$

(a) $\tan(e^x) + c$ (b) $\tan^{-1}(e^x) + c$

(c) $\tan^{-1}(e^x + e^{-x}) + c$ (d) $\tan^{-1}(e^{-x}) + c$

13. সাবানের একটি গোলাকার বুদবুদে আয়তন বৃদ্ধির হার ও তার ব্যাসার্ধের বৃদ্ধির হারের অনুপাত কত?
(a) πr^2 (b) $\frac{4}{3}\pi r^3$ (c) $4\pi r^2$ (d) πr^3

14. $y = \cos^{-1}\frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$
(a) $\frac{-2}{1+x^2}$ (b) $\frac{2}{1+x^2}$ (c) $\frac{-2}{1-x^2}$ (d) $\frac{2}{1+x^3}$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x} = ?$
(a) 1 (b) -1 (c) both (d) limit doesn't exist

Written

01. দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1 = 2a(x + x_1)$

02. $\int\frac{dx}{x(x^4-1)}$ নির্ণয় কর। 2.5

03. $\cot\alpha + \cot\beta = a, \tan\alpha + \tan\beta = b$ এবং $\alpha + \beta = \theta$ হলে দেখাও যে, $(a - b)\tan\theta = ab$

04. দেখাও যে, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের যেকোনো বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c' = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $\sqrt{c' - c}$। 2.5

Solution of Model Test-04

MCQ

01. **Sol**

01. **Solⁿ: (d);** ধরি, ম্যাট্রিক্সটি $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ প্রশ্নমতে, $2a = -2$ & $b^2 = 81 \therefore a = -1$ এবং $b = \pm 9$
অতএব, ম্যাট্রিক্সটি $A = \begin{bmatrix} -1 & \pm 9 \\ \pm 9 & -1 \end{bmatrix}$

02. **Solⁿ: (a);** Area $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{2x + 2y - 8\} = x + y - 4 = 12 - 4 = 8$ বর্গ একক

03. **Solⁿ: (a);** $6r^3\sin\theta = 4 - \cos\theta \Rightarrow 6r^4\sin\theta = 4r - r\cos\theta \Rightarrow 6y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 4\sqrt{x^2+y^2} - x$

04. **Solⁿ: (d);** $\frac{\cos\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{3} = \frac{p}{4}$
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \therefore \frac{p^2}{4} + \frac{9p^2}{16} = 1 \Rightarrow p = \frac{4}{\sqrt{13}}$

05. **Solⁿ: (d);** Simplify করে পাই, $x^2 + y^2 - 14x - 14y + 49 + 2xy - x(k^2 - 3)(k + 7)y - 2xy = 0$
বা, $x^2 + y^2 - x(k^2 - 3)(k + 7)y - 14x - 14y + 49 = 0$
বৃত্তের সমীকরণে xy সম্বলিত কোনো পদ থাকবে না। $\therefore k^2 - 3 = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{3}$ অথবা, $k + 7 = 0 \therefore k = -7$
$\therefore k = -2$ হলে, বৃত্ত নির্দেশ করবে না।

06. **Solⁿ: (b);** A^{-1} নির্ণয় অসম্ভব কেবল তখনই, যখন $|A| = 0 \therefore |A| = 20 - 3p = 0 \Rightarrow p = \frac{20}{3}$

07. **Solⁿ: (b);** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} r_1' = r_1 - r_2 \\ r_2' = r_2 - r_3 \end{bmatrix} = (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$
$= (a - b)(b - c)(c - a)$; Shortcut: $a = 1, b = 2$ও $c = 3$ বসিয়ে দেখ।

08. **Solⁿ: (c);** $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{24}{25} \Rightarrow 25 - 25\tan^2\theta = 24 + 24\tan^2\theta \therefore \tan\theta = \pm\frac{1}{7}$

09. **Solⁿ: (c);** $y = (\sin x)^x \Rightarrow \ln y = x\ln\sin x$
$\Rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \ln\sin x + x\cot x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\,(x\cot x + \ln\sin x) = (\sin x)^x\,(x\cot x + \ln\sin x)$

10. **Solⁿ: (c);** $\lim_{x\to 0}\frac{10^{-2x} - 10^{-3x}}{x} = \lim_{x\to 0}[(10^{-2x}).\ln(10)(-2) - 10^{-3x}\ln(10)(-3)]$
$= 3\ln(10) - 2\ln(10) = \ln(10) = \log_e 10$

11. **Solⁿ: (d);** $\frac{dh}{dt} = 2 ; \frac{dD}{dt} = 1; D = 10 ; h = 25$

$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\pi D^2 h \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\pi\left(2Dh.\frac{dD}{dt} + D^2.\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\pi}{2} \times 10 \times 25 \times 1 + \frac{1}{4}\pi \times 100 \times 2 = 125\pi + 50\pi = 175\pi$

12. **Solⁿ: (b);** $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{dy}{y^2+1} = \tan^{-1}(y) + c = \tan^{-1}(e^x) + c$ [যেখানে, $e^x = y \Rightarrow e^x dx = dy$]

13. **Solⁿ: (c);** $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \therefore \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 \frac{dr}{dt} \therefore \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = 4\pi r^2$

14. **Solⁿ: (a);** $y = \cos^{-1}\frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}} = \cos^{-1}\frac{1-x^{-2}}{1+x^{-2}} = 2\tan^{-1}\frac{1}{x} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 2\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{1+x^2}$

15. **Solⁿ: (d);** If $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$ limit doesn't exists

Written

01. **Solⁿ:** $y^2 = 4ax \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 4a \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$

(x_1, y_1) বিন্দুটি, $y^2 = 4ax$ এর উপর অবস্থিত হলে, $y_1^2 = 4ax_1$ ……… (1)

আবার, (x_1, y_1) বিন্দুতে, স্পর্শকের ঢাল, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} = \frac{2a}{y_1}$

$\therefore (x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$

$\Rightarrow yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$

$\Rightarrow yy_1 - 4ax_1 = 2ax - 2ax_1$ [(1) হতে]

$\Rightarrow yy_1 = 2ax + 2ax_1$

$\therefore yy_1 = 2a(x + x_1)$ [প্রমাণিত]

02. **Solⁿ:** $\int \frac{dx}{x(x^4-1)}$

$= \int \frac{dx}{x^5\left(1-\frac{1}{x^4}\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{4dx}{x^5\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}$

$= \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{4}\ln|z| = \frac{1}{4}\ln\left|1 - \frac{1}{x^4}\right| + c$

ধরি,

$1 - \frac{1}{x^4} = z$

$\Rightarrow 0 + 4x^{-4-1}dx = dz \Rightarrow \frac{4}{x^5}dx = dz$

03. **Solⁿ:** এখানে, $\cot\alpha + \cot\beta = a \Rightarrow \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} = a$

$\Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha.\tan\beta} = a \Rightarrow \frac{b}{\tan\alpha.\tan\beta} = a$ [$\because \tan\alpha + \tan\beta = b$]

$\therefore \tan\alpha.\tan\beta = \frac{b}{a}$

এখন, $L.S = (a-b)\tan\theta = (a-b)\tan(\alpha+\beta)$ [$\because \alpha + \beta = \theta$]

$= (a-b)\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta} = (a-b).\frac{b}{1-\frac{b}{a}}$

$= (a-b)\frac{b}{\frac{(a-b)}{a}} = b.a = ab = R.S$ **(Showed)**

04. **Solⁿ:** বৃত্ত দুটির সমীকরণ:

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ……… (i)

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c' = 0$ ……… (ii)

(i) নং বৃত্তের ওপর একটি বিন্দু (x_1, y_1) হলে-

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$

$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 = -c$ ……… (iii)

আবার, (x_1, y_1) বিন্দু হতে (ii) নং বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c'}$

$= \sqrt{-c + c'}$ [iii নং হতে]

$= \sqrt{c' - c} \therefore$ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{c' - c}$

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট-০৫

নিজে পরীক্ষা দাও। অতঃপর উত্তরের সাথে মিলিয়ে নাও।

সময়: 20 মিনিট **পূর্ণমান: 25 (MCQ: 15+Written: 10)**

MCQ

01. একটি 2×2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স A এর সাথে একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স B গুণ করে যোগ করলে 2B পাওয়া যায়। A ম্যাট্রিক্স কী হতে পারে?

(a) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

02. t এর সকল বাস্তব মানের জন্য একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$ হলে বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ হবে–

(a) $x^2 + y^2 = a^2$ (b) $y^2 = 4ax$ (c) $x^2 = 4ay$ (d) $x^2 - y^2 = a^2$

03. $x^2 + y^2 - kx + 2y - 4 = 0$ বৃত্তের একটি ব্যাসের সমীকরণ $2x + y - 3 = 0$ হলে, k- এর মান কত?

(a) -3 (b) -2 (c) 3 (d) 4

04. t পরিবর্তনশীল হলে, $p\left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right)$ এর সঞ্চারপথের সমীকরণ কোনটি?

(a) $x^2 + y^2 = 4$ (b) $x^2 - y^2 + 4 = 0$
(c) $x^2 - y^2 = 4$ (d) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

05. $x = 0, y = 0$ ও $x + y - 4 = 0$ রেখাত্রয় যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল কত?

(a) 8 বর্গ একক (b) 16 বর্গ একক (c) 12 বর্গ একক (d) 32 বর্গ একক

06. $(1, -3)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্ত x অক্ষকে $(5, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করলে বৃত্তটির পরিধি হবে—

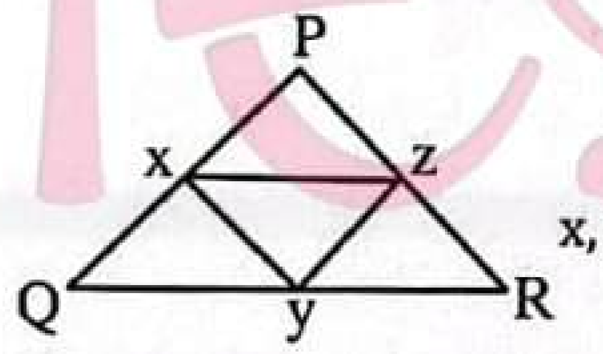
(a) 5π (b) 8π (c) 10π (d) 15π

07. $\sin x - 2 = \cos 2x$ হলে, $x = ?$

(a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{5\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

08. $2\tan\alpha - 2\sec\alpha \cdot \sin^3\alpha - 1 = 0$ হলে, $\sin 2\alpha = ?$

(a) -1 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

09. 

x, y, z যথাক্রমে PQ, QR ও PR এর মধ্যবিন্দু এবং ΔPQR এর ক্ষেত্রফল 18% unit হলে, ট্রাপিজিয়াম XPRY এর ক্ষেত্রফল কত?

(a) $4\frac{1}{2}$ sq. unit (b) $9\frac{1}{2}$ sq. unit (c) $13\frac{1}{2}$ sq. unit (d) 6 sq.unit

10. একক ব্যাসার্ধের বৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য-

(a) $\frac{3}{2}$ একক (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ একক (c) $\sqrt{3}$ একক (d) 1 একক

11. $\tan x \tan 3x = 1$ এর সাধারণ সমাধান কত?

(a) $\frac{n\pi}{4}$ (b) $\frac{(n-1)\pi}{4}$ (c) $\frac{(2n-1)\pi}{8}$ (d) $\frac{(2n+1)\pi}{8}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left\{1 + \frac{2}{3x}\right\}^{\frac{7x}{5}}\right] =$ কত?

(a) $e^{\frac{7}{5}}$ (b) $e^{\frac{14}{15}}$ (c) $e^{\frac{2}{3}}$ (d) $e^{\frac{10}{21}}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}(\sec x)^x =$ কত?

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) লিমিট অস্তিত্বশীল নয়

14. $y=\ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{5}{2}}\right)$ হলে, $\frac{dx}{dy}=?$
(a) $\frac{x^2-1}{x^2+4}$ (b) $\frac{x^2+4}{x^2-1}$ (c) $\frac{x^2-2}{x^2-1}$ (d) $\frac{x^2+2}{x-1}$

15. বক্ররেখা $x=y^2$ এবং $y=x-2$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হবে-
(a) $\frac{7}{3}$ বর্গ একক (b) $\frac{9}{2}$ বর্গ একক (c) $\frac{7}{2}$ বর্গ একক (d) $\frac{11}{2}$ বর্গ একক

Written

01. $\sin\alpha-\sin\beta=2$ এবং $\cos\alpha+\cos\beta=3$ হলে, $\cos(\alpha-\beta)$ এর মান কত? 2.5
02. $x^2+y^2-8x-2y+4=0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক $3x+by-1=0$ হলে, b এর মান নির্ণয় কর। 2.5
03. $\int\frac{dx}{5+3\cos x}$ নির্ণয় কর। 2.5
04. একটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু $6x-8y+5=0$ এবং $3x-4y+10=0$ রেখা দুইটির উপর অবস্থিত। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 2.5

Solution of Model Test-05

MCQ

01. **Sol^n: (c);** $\because I\times B+B=B+B=2B$

02. **Sol^n: (b);** $x=at^2\Rightarrow x=ax\left(\frac{y}{2a}\right)^2\Rightarrow 4ax=y^2$

03. সমাধান: **(d);** বৃত্তের কেন্দ্র $C\left(\frac{-k}{-2},\frac{2}{-2}\right)\equiv\left(\frac{k}{2},-1\right)$, $2x+y-3=0$ রেখার উপর অবস্থিত।
$\therefore 2\left(\frac{k}{2}\right)-1-3=0\therefore k=4$ **(Ans.)**

04. **Sol^n: (c);** $\left(t+\frac{1}{t},t-\frac{1}{t}\right)=(x,y);$
$x=t+\frac{1}{t},y=t-\frac{1}{t}\therefore x+y=2t,x-y=\frac{2}{t}$
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $(x+y)(x-y)=4\Rightarrow x^2-y^2=4$

05. **Sol^n: (a);** নির্ণেয় ত্রিভুজটি মূলত $x+y-4=0$ দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজ।
$\therefore\Delta=\frac{1}{2}.4.4=8$ বর্গ একক।

06. **Sol^n: (c);** $r=\sqrt{(1-5)^2+(-3-0)^2}=5$ $\therefore$ পরিধি $=2\pi.5=10\pi$

07. **Sol^n: (d);** $\sin x-2=\cos 2x$
$\Rightarrow\sin x-2=1-2\sin^2x\Rightarrow 2\sin^2x+\sin x-3=0$
$\Rightarrow 2\sin^2x+3\sin x-2\sin x-3=0\Rightarrow(\sin x-1)(2\sin x+3)=0$
$\Rightarrow\sin x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$

08. **Sol^n: (b);** $\tan\alpha-\sec\alpha\cdot\sin^3\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\tan\alpha(1-\sin^2\alpha)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\cos^2\alpha=\frac{1}{2}$
$\Rightarrow\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin 2\alpha=2\times\frac{1}{2}=1$

09. **Sol^n: (c);** $\Delta P\times Z=\Delta XYZ=\Delta XYQ=\Delta YZR=\frac{1}{4}\Delta PQR$
$\therefore$ ট্রাপিজিয়াম $XPRY=\Delta XYZ+\Delta P\times Z+\Delta YZR=3\times\frac{1}{4}\Delta PQR=\frac{3}{4}\times 18\text{ sq. unit}=13\frac{1}{2}\text{sq. unit}$

10. **Sol^n: (c);** $\frac{a}{\sin A}=2R$ $\Rightarrow a=\sin A\times 2R=\sin 60^\circ\times 2=\sqrt{3}$

11. **Sol^n: (d);** $\frac{\sin x.\sin 3x}{\cos x.\cos 3x}=1\Rightarrow\cos x.\cos 3x-\sin x.\sin 3x=0\Rightarrow\cos 4x=0\ \therefore x=(2n+1)\frac{\pi}{8}$

12. **Sol^n: (b) ;** $\lim\limits_{x\to 0}\left\{1+\frac{2}{3x}\right\}^{\frac{7x}{5}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{1+\frac{1}{\frac{3}{2}x}\right\}^{\frac{3}{2}x\times\frac{14}{15}}=e^{\frac{14}{15}}$

Shortcut: $\lim\limits_{x\to 0}\left\{1+\frac{2}{3x}\right\}^{\frac{7x}{5}}=e^{\frac{1}{x}\text{ এর সহগ}\times x\text{ এর সহগ}}=e^{\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}}=e^{\frac{14}{15}}$

13. **Sol^n: (b);** সরাসরি লিমিট বসিয়ে।

14. **Sol^n: (a);** $y = \ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{5}{2}}\right)$

$= \ln(e^x) + \frac{5}{2}\ln(x-1) - \frac{5}{2}\ln(x+1)$

$= x + \frac{5}{2}\ln(x-1) - \frac{5}{2}\ln(x+1)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{5}{2} \times \frac{1}{x-1} - \frac{5}{2} \times \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+4}{x^2-1} \therefore \frac{dx}{dy} = \frac{x^2-1}{x^2+4}$

15. **Sol^n: (b);** Area $= \left|\int_{y_1}^{y_2}(y^2 - y - 2)dy\right|$

$= \left|\int_{-1}^{2}(y^2 - y - 2)dy\right| = \left|-\frac{9}{2}\right|$ sq. unit $= \frac{9}{2}$ sq. unit

Written

01. **Sol^n:** $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \ldots\ldots (i)$; $\cos\alpha + \cos\beta = 3 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$(i)^2 + (ii)^2;\ 1 + 1 + 2\cos(\alpha+\beta) = 13;\ \cos(\alpha+\beta) = \frac{11}{2}$

$(ii)^2 - (i)^2;\ \cos2\alpha + \cos2\beta + 2\cos(\alpha-\beta) = 5$

$2\cos(\alpha-\beta)\{\cos(\alpha+\beta) + 1\} = 5; \cos(\alpha-\beta) = \frac{5}{13}$

02. **Sol^n:** বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

বৃত্তটির কেন্দ্র $(4, 1)$ ও ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4^2 + 1^2 - 4} = \sqrt{17-4} = \sqrt{13}$

সরলরেখার সমীকরণ: $3x + by - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$\therefore$ স্পর্শ করলে, $\frac{|3\times4+b\times1-1|}{\sqrt{3^2+b^2}} = \sqrt{13}$

$\Rightarrow \frac{|11+b|}{\sqrt{9+b^2}} = \sqrt{13} \Rightarrow (11+b)^2 = 13(9+b^2)$

$\Rightarrow 121 + 22b + b^2 = 117 + 13b^2 \Rightarrow 12b^2 - 22b - 4 = 0$

$\Rightarrow 6b^2 - 11b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2, -\frac{1}{6}$

$\therefore b = 2, -\frac{1}{6}$ **(Ans.)**

03. **Sol^n:** $\int\frac{dx}{5+3\cos x}$

$= \int\frac{dx}{5+3\left(\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)} = \int\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx}{5+5\tan^2\frac{x}{2}+3-3\tan^2\frac{x}{2}}$

$= \int\frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{8+2\tan^2\frac{x}{2}} = \int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx}{4+\tan^2\frac{x}{2}}$

$= \int\frac{dz}{4+z^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{2}\right) + c$

ধরি,
$\tan\frac{x}{2} = z$
$\Rightarrow \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = dz$

04. **Sol^n:** $6x - 8y + 5 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

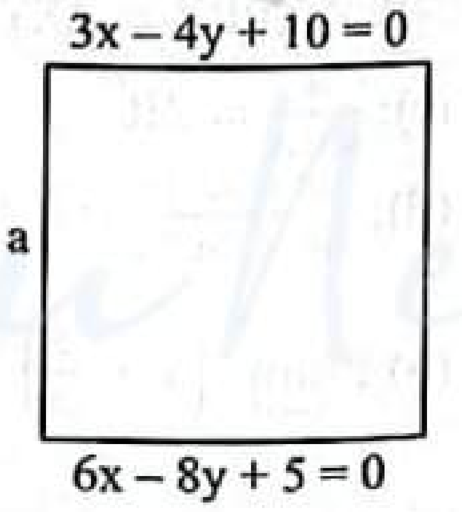
এবং $3x - 4y + 10 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

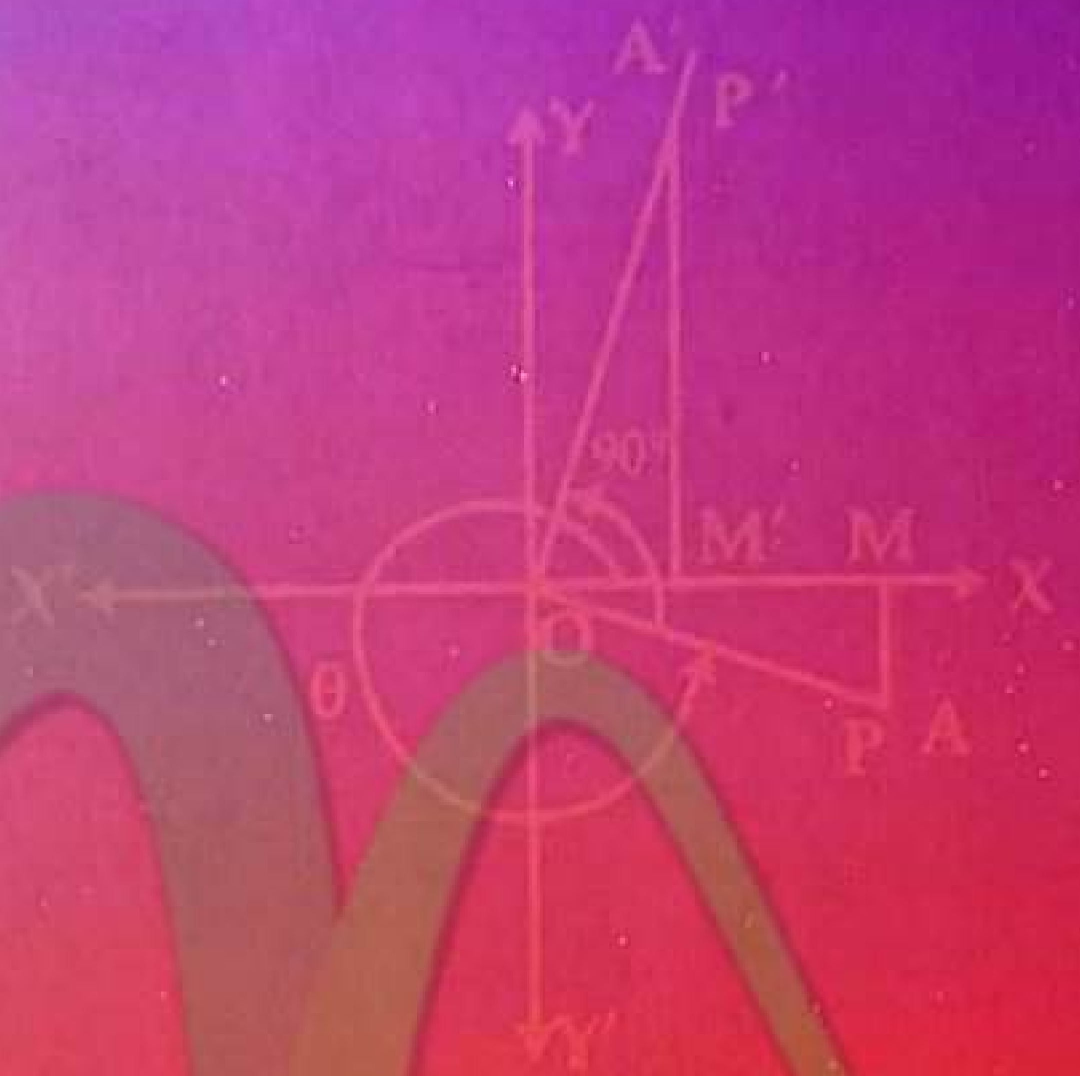
$(ii) \times 2 \Rightarrow 6x - 8y + 20 = 0 \ldots\ldots\ldots (iii)$

(i) ও (iii) এর মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব = বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য

$\Rightarrow a = \frac{|20-5|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= a^2 = \frac{9}{4}$ বর্গ একক





উদ্ভাসিত আলোর মাঝে
দেখো তোমার মুখ;
জীবন মানে সংগ্রাম
আর বিজয় মানে সুখ।