1. (a) মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $|-16+3|+|-1-4|-3-|-1-7|$ [চ. '০০]

$= |-13|+|-5|-3-|-8|$
$= -(-13)+\left(-(-5)\right)-3-\left(-(-8)\right)$
$= 13+5-3-8 = 18-11 = 7$ (Ans.)

(ii) $|-1-8|+|3-1|$ [য.'০১; ব.'০৫]

$= |-9|+|2| = -(-9)+2 = 9+2 = 11$

(iii) $\big||2-6|-|1-9|\big|$ [কু.'০২;ব.'০৫]

$= \big||-4|-|-8|\big| = \left|-(-4)-\left(-(-8)\right)\right|$
$= |4-8| = |-4| = -(-4) = 4$ (Ans.)

(iv) $|-3-5|$ [ঢা. বো.'০০]

$= |-8| = -(-8) = 8$

(v) $\big||-2|-|-6|\big| = \left|-(-2)-\left(-(-6)\right)\right|$
$= |2-6| = |-4| = -(-4) = 4$ (Ans.)

(b) যথাযথ কারণ উল্লেখ করে মান নির্ণয় কর:

$\big||3-5|-|7-12|\big|$ [কু.'০৬]

$\big||3-5|-|7-12|\big| = \big||-2|-|-5|\big|$
$= \left|-(-2)-\left(-(-5)\right)\right|$ [$\because -2<0$ এবং $-5<0$]
$= |2-5| = |-3| = -(-3)$ [$\because -3<0$]
$= 3$ (Ans.)

2. নিম্নের অসমতাগুলো পরম মান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর

(a) $|x-2|<5$ [ব.'০২;ঢা.'০৩,'০৯; দি.'১১]

$\Rightarrow -5 < x-2 < 5$

[$\because |x|<\alpha$ iff $-\alpha<x<\alpha$]

সকল পক্ষে 2 যোগ করে পাই,

$\Rightarrow -5+2 < x-2+2 < 5+2$
$\Rightarrow -3 < x < 7$ (Ans.)

(b) $|2x+3|<7$ [ব.'০২; ঢা.'০৩; চ.'১২]

$\Rightarrow -7 < 2x+3 < 7$
$\Rightarrow -7-3 < 2x+3-3 < 7-3$
$\Rightarrow -10 < 2x < 4$
$\therefore -5 < x < 2$ (Ans.)

2(c) $|x-3|<7$ [কু.'০৫]

$\Rightarrow -7 < x-3 < 7$
$\Rightarrow -7+3 < x-3+3 < 7+3$
$\Rightarrow -4 < x < 10$ (Ans.)

(d) $|x|<3$ [ঢা.'০৩]

$\Rightarrow -3 < x < 3$ [$\because |x|<\alpha$ iff $-\alpha<x<\alpha$]

2(e) $\dfrac{1}{|3x+1|} \geq 5$, এখানে $x \neq -\dfrac{1}{3}$

[চ.'০১;সি.'০৬; য.'০৮]

এখন, $\dfrac{1}{|3x+1|} \geq 5 \Rightarrow |3x+1| \leq \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{5} \leq 3x+1 \leq \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{5}-1 \leq 3x+1-1 \leq \dfrac{1}{5}-1$

$\Rightarrow -\dfrac{6}{5} \leq 3x \leq -\dfrac{4}{5} \Rightarrow -\dfrac{2}{5} \leq x \leq -\dfrac{4}{15}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ঃ $-\dfrac{2}{5} \leq x \leq -\dfrac{4}{15}$ কিন্তু $x \neq -\dfrac{1}{3}$

2(f) $2 \leq \dfrac{1}{|x-1|}$ [রুয়েট'০৫]

যদি $x-1=0$ *ie.* $x=1$ হয়, তবে প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore x \neq 1$

এখন, $2 \leq \dfrac{1}{|x-1|} \Rightarrow |x-1| \leq \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2} \leq x-1 \leq \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2}+1 \leq x-1+1 \leq \dfrac{1}{2}+1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান **:** $\frac{1}{2} \le x < 1$ অথবা $1 < x \le \frac{3}{2}$

2(g) $\frac{1}{|x-1|} < 2$

$\Rightarrow 1 < 2|x-1|. [\because |x-1| > 0]$

$\Rightarrow |x-1| > \frac{1}{2}$

$\therefore x-1 > \frac{1}{2}$, যখন $x-1 > 0$

$\Rightarrow x > 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

আবার, $-(x-1) > \frac{1}{2}$, যখন $x-1 < 0$

$\Rightarrow x-1 < -\frac{1}{2} \Rightarrow x < -\frac{1}{2} + 1$

$\Rightarrow x < \frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান **:** $x < \frac{1}{2}$ অথবা $x > \frac{3}{2}$.

2(h) $3 \le |x-2| \le 7$

সমাধানঃ $(x-2)$ অঋণাত্মক হলে, $|x-2| = x-2$

$\therefore 3 \le |x-2| \le 7 \Rightarrow 3 \le x-2 \le 7$

$\Rightarrow 5 \le x \le 9$

আবার, $(x-2)$ ধণাত্মক হলে, $|x-2| = -(x-2)$

$\therefore 3 \le |x-2| \le 7 \Rightarrow 3 \le -(x-2) \le 7$

$\Rightarrow -7 \le x-2 \le -3$

$\Rightarrow -5 \le x \le -1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধানঃ $-5 \le x \le -1$ অথবা $5 \le x \le 9$

2(i) $|5-2x| \ge 4$

সমাধানঃ $(5-2x) \ge 0$ হলে, $|5-2x| = 5-2x$

$\therefore |5-2x| \ge 4 \Rightarrow 5-2x \ge 4 \Rightarrow -2x \ge -1$

$\Rightarrow x \le \frac{1}{2}$

আবার, $(5-2x) < 0$ হলে, $|5-2x| = -(5-2x)$

$\therefore |5-2x| \ge 4 \Rightarrow -(5-2x) \ge 4$

$\Rightarrow -5+2x \ge 4 \Rightarrow 2x \ge 9 \Rightarrow x \ge \frac{9}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধানঃ $x \le \frac{1}{2}$ অথবা $x \ge \frac{9}{2}$.

3. নিম্নের অসমতাগুলো পরম মান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর **:**

(a) $4 < x < 10$ [ব.'০১; রা.'০২; কু.'০৪]

সকল পক্ষে $-\frac{4+10}{2} = -7$ যোগ করে পাই,

$4-7 < x-7 < 10-7 \Rightarrow -3 < x-7 < 3$

$\Rightarrow |x-7| < 3 \; [\because |x| < \alpha \text{ iff } -\alpha < x < \alpha]$

3(b) $-2 < x < 6$ [ব.'০১; রা.'০২; চ.'০৪]

সকল পক্ষে $-\frac{-2+6}{2} = -2$ যোগ করে পাই,

$-2-2 < x-2 < 6-2$

$\Rightarrow -4 < x-2 < 4$

$\Rightarrow |x-2| < 4$

3(c) $-7 < x < -1$ [রা.'০০; কু'০৫ ; ঢা.'০৬; চ.'০৯]

সকল পক্ষে $-\frac{-7-1}{2} = 4$ যোগ করে পাই,

$-7+4 < x+4 < -1+4$

$\Rightarrow -3 < x+4 < 3 \Rightarrow |x+4| < 3$

3(d) $2 \le x \le 8$ [কু.'০৩; য.'০৭]

সকল পক্ষে $-\frac{2+8}{2} = -5$ যোগ করে পাই,

$2-5 \le x-5 \le 8-5 \Rightarrow -3 \le x-5 \le 3$

$\Rightarrow |x-5| \le 3$

3(e) $-1 < 2x-3 < 5$

[চ.'০১,'১৩ ;সি.'০৬; য.'০৮;রুয়েট'১০-১১]

সকল পক্ষে $-\frac{-1+5}{2} = -2$ যোগ করে পাই,

$-1-2 < 2x-3-2 < 5-2$

$\Rightarrow -3 < 2x-5 < 3 \Rightarrow |2x-5| < 3$

3(f) $-5 < x < 7$ [রা.'০৪,'১৩; য.'০৪;ব.'০৬]

সকল পক্ষে $-\frac{-5+7}{2} = -1$ যোগ করে পাই,

$-5-1 < x-1 < 7-1$

$\Rightarrow -6 < x-1 < 6$

$\Rightarrow |x-1| < 6$

3(g) দেওয়া আছে, $-2 < 3-x < 8$ [ব.'০১]

$\Rightarrow -(-2) > -(3-x) > -8$

$\Rightarrow 2 > x-3 > -8 \Rightarrow -8 < x-3 < 2$

সকল পক্ষে $-\frac{-8+2}{2} = 3$ যোগ করে পাই,

$-8+3 < x-3+3 < 2+3$

$\Rightarrow -5 < x < 5 \Rightarrow |x| < 5$

4. নিম্নের অসমতাগুলি সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও ঃ

(a) $|3x+2| < 7$ [ঢা., রা.'০৪; সি. ০৭; চ.ব.'১০; রা.'১২]

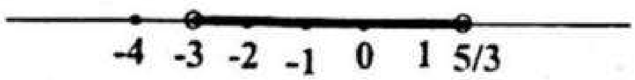
$\Rightarrow -7 < 3x+2 < 7$

$\Rightarrow -7-2 < 3x+2-2 < 7-2$

$\Rightarrow -9 < 3x < 5 \Rightarrow -3 < x < \frac{5}{3}$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < \frac{5}{3}\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ



4(b) $|2x+1| < 3$ [সি.'০৪,'০৭; য.'০৯,'১২]

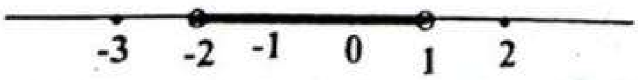
$\Rightarrow -3 < 2x+1 < 3$

$\Rightarrow -3-1 < 2x+1-1 < 3-1$

$\Rightarrow -4 < 2x < 2 \Rightarrow -2 < x < 1$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R}: -2 < x < 1\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ



4(c) $|2x-5| < 3$

[ব.'০৪ ;চ.'০৫ ; রা.'০৬; ঢা.'০৭,'১৩; কু.'০৮]

$\Rightarrow -3 < 2x-5 < 3$

$\Rightarrow -3+5 < 2x-5+5 < 3+5$

$\Rightarrow 2 < 2x < 8 \Rightarrow 1 < x < 4$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R}: 1 < x < 4\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ

(d) $|3x-4| < 2$ [ঢা.'০৫; রা.'০৮; সি.'০৯; কুয়েট'১১-১২]

$\Rightarrow -2 < 3x-4 < 2$

$\Rightarrow -2+4 < 3x-4+4 < 2+4$

$\Rightarrow 2 < 3x < 6 \Rightarrow \frac{2}{3} < x < 2$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R}: \frac{2}{3} < x < 2\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ

4(e) $|2x+5| < 1$ [সি.'০২ ; ব.'০৫]

$\Rightarrow -1 < 2x+5 < 1$

$\Rightarrow -1-5 < 2x+5-5 < 1-5$

$\Rightarrow -6 < 2x < -4 \Rightarrow -3 < x < -2$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R}: -3 < x < -2\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ

4(f) $\frac{1}{|3x-5|} > 2$

[ব.'০৫; য.'০৩; চ.'০৭;ঢা., সি.'১০; কু.'১৩]

$3x-5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ হলে, প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হবে।

$\therefore x \neq \frac{5}{3}$

এখন, $\frac{1}{|3x-5|} > 2 \Rightarrow |3x-5| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < 3x-5 < \frac{1}{2}$

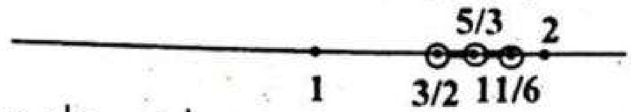
$\Rightarrow -\frac{1}{2} + 5 < 3x-5+5 < \frac{1}{2} + 5$

$\Rightarrow \frac{9}{2} < 3x < \frac{11}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$

$\therefore$ সমাধান সেট ,

$S = \{x \in \mathbb{R}: \frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}$ অথবা $\frac{5}{3} < x < \frac{11}{6}\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ



4(g) $|2x+3| > 9$ [চ.'০৩]

$2x + 3$ অঋণাত্মক হলে , $|2x+3| = 2x+3$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই , $2x+3 > 9$

$\Rightarrow 2x > 9-3 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$

$2x+3$ ঋণাত্মক হলে, $|2x+3| = -(2x+3)$

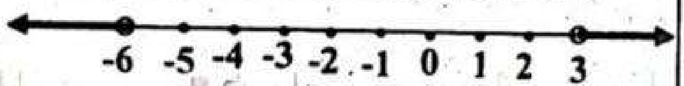
$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই , $-(2x+3) > 9$

$\Rightarrow 2x+3 < -9 \Rightarrow 2x < -9-3 = -12$

$\Rightarrow x < -6$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R}: x < -6$ অথবা $x > 3\}$

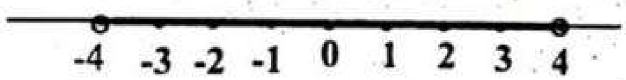
নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ



4(h) $|x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4$ [রা.'০১]

$\therefore$ সমাধান সেট , $S = \{x \in \mathbb{R}: -4 < x < 4\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ



4(i) $|2x-5| < 1 \Rightarrow -1 < 2x-5 < 1$ [চ.'০১]

$\Rightarrow -1+5 < 2x-5+5 < 1+5$

$\Rightarrow 4 < 2x < 6 \Rightarrow 2 < x < 3$

$\therefore$ সমাধান সেট , $S = \{x \in \mathbb{R}: 2 < x < 3\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ

4(j) $|x-5| > 4$

$x-5$ অঋণাত্মক হলে , $|x-5| = x-5$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই , $x-5 > 4$

$\Rightarrow x > 4+5 = 9$

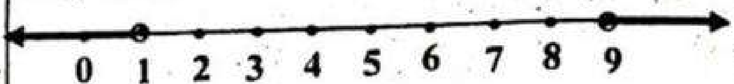
$x-5$ ঋণাত্মক হলে , $|x-5| = -(x-5)$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই , $-(x-5) > 4$

$\Rightarrow x-5 < -4 \Rightarrow x < -4+5 = 1$

$\therefore$ সমাধান সেট , $S = \{x \in \mathbb{R}: x < 1$ অথবা $x > 9\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ



4(k) $|2x+4| < 6$ [য.'০২]

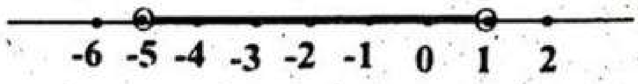
$\Rightarrow -6 < 2x+4 < 6$

$\Rightarrow -6-4 < 2x+4-4 < 6-4$

$\Rightarrow -10 < 2x < 2 \Rightarrow -5 < x < 1$

$\therefore$ সমাধান সেট , $S = \{x \in \mathbb{R}: -5 < x < 1\}$.

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ



4(*l*) $|x-5| = |2x-3|$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 4x^2 - 12x + 9$

[উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 16 = 0$

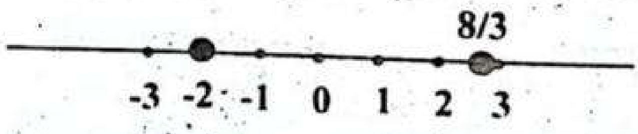
$\Rightarrow 3x^2 - 8x + 6x - 16 = 0$

$\Rightarrow x(3x-8) + 2(3x-8) = 0$

$\Rightarrow (3x-8)(x+2) = 0 \quad \therefore x = -2, \frac{8}{3}$

$\therefore$ সমাধান সেট , $S = \{-2, \frac{8}{3}\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ



5. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{a^2} = |a|$ [সি.'০৩]

প্রমাণ ঃ আমরা জানি ,

$|a| = a$, যখন $a \geq 0$ ...... (1) এবং

$|a| = -a$, যখন $a < 0$ ......(2)

এখন , $a \geq 0$ হলে , $\sqrt{a^2} = a$

$\therefore \sqrt{a^2} = |a|$

$a < 0$ হলে , ধরি $a = -n$, যেখনে $n > 0$

$\therefore \sqrt{a^2} = \sqrt{(-n)^2} = \sqrt{n^2} = n = -a$

$\therefore \sqrt{a^2} = |a|$

$\therefore$ সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য , $\sqrt{a^2} = |a|$

6. প্রমাণ কর যে, $|x| < a$ হলে, $-a < x < a$; যেখানে $a > 0$ [রা.'০১]

প্রমাণ : $x \geq 0$ হলে, $|x| = x < a \cdots\cdots$ (i)

$x < 0$ হলে, $|x| = -x < a \Rightarrow x > -a$

$\therefore \quad -a < x \cdots\cdots$(ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $-a < x < a$.

7. দেখাও যে, $a \in \mathbb{R}$ হলে $-|a| \leq a \leq |a|$

প্রমাণ : $a \geq 0 \Rightarrow 0 \leq a \cdots\cdots$(i) হলে,

$|a| = a \geq 0 \Rightarrow |a| \geq 0$

$\therefore \quad -|a| \leq 0 \cdots\cdots$(ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $-|a| \leq 0 \leq a$

$\therefore \quad -|a| \leq a \cdots\cdots$(iii)

$a < 0 \cdots\cdots$(iv) হলে,

$|a| = -a > 0 \quad [\because a < 0, \quad \therefore -a > 0]$

$\Rightarrow 0 < |a| \cdots\cdots\cdots$(v)

(iv) ও (v) হতে পাই,

$a < 0 < |a| \Rightarrow a < |a| \cdots$(vi)

$a = 0$ হলে, $0 = |0| \Rightarrow a = |a| \cdots \cdots$(vii)

(vi) ও (vii) হতে পাই, $a \leq |a| \cdots$ viii)

(iii) ও (viii) হতে পাই, $-|a| \leq a \leq |a|$

8. যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ac = bc$ এবং $c \neq 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a = b$ [কু.'০৯; চ.'১০; দি.'১০; ব.'১৩]

প্রমাণ : $c \neq 0$ বলে c^{-1} বিদ্যমান।

এখন, $ac = bc$

$\Rightarrow (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$ [গুণনের অনন্যতা অনুযায়ী]

$\Rightarrow a(cc^{-1}) = b(cc^{-1})$ [গুণনের সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$\Rightarrow a.1 = b.1$ [গুণনের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\therefore \quad a = b$ [গুণনের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

9. $a < b$ এবং $b < c$ হলে দেখাও যে, $a < c$. [য.'১২]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $a < b$ এবং $b < c$ ।

মনে করি, $b = a + m$ এবং $c = b + n$; যেখানে $m, n \in \mathbb{R}$ এবং $m.n > 0$.

$\therefore \quad c = b + n = (a + m) + n$, [প্রতিস্থাপন বিধি]

$\Rightarrow c = a + (m + n)$, [সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$m.n \in \mathbb{R}$ এবং $m.n > 0$ বলে, $m + n \in \mathbb{R}$ এবং $m + n > 0$

$\therefore$ $c > a$ অর্থাৎ, $a < c$ (Showed)

10. যদি $a<b$ হয়, তবে দেখাও যে, $a + c < b + c$; যেখানে $a, b, c \in \mathbb{R}$ [রা.'০০, '০৮; চ.'১২]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $a < b$

ধরি, $b = a + m$; যেখানে $m \in \mathbb{R}$ এবং $m>0$

এখন, $b + c = (a + m) + c$ [প্রতিস্থাপন বিধি]

$\Rightarrow b + c = (m + a) + c$ [বিনিময় বিধি]

$\Rightarrow b + c = m + (a + c)$ [সংযোজন বিধি]

$\Rightarrow b + c = (a + c) + m$ [বিনিময় বিধি]

$m \in \mathbb{R}$ এবং $m > 0$ বলে, $b + c < a + c$

11. $a \in \mathbb{R}$ হলে দেখাও যে, $(-1)a = -a$ এবং $-(-a) = a$.

প্রমাণ : $1 \in \mathbb{R}$ বলে,

$1 + (-1) = 0$ [যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\Rightarrow (1 + (-1))a = 0.a$ [গুণনের অনন্যতা অনুযায়ী]

$\Rightarrow 1.a + (-1)a = 0$ [বন্টন বিধি অনুযায়ী এবং সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য, $a.0 = 0.a = 0$]

$\Rightarrow a + (-1)a = 0$ [অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\therefore \quad (-1)a = -a$ [বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

দ্বিতীয় অংশ :

$-a + (-(-a)) = 0$

[যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\Rightarrow a + [-a + (-(-a))] = a + 0$

[যোগের অনন্যতা অনুযায়ী]

$\Rightarrow [a + (-a)] + (-(-a)) = a + 0$

[যোগের সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$\Rightarrow 0 + (-(-a)) = a + 0$

[যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\therefore -(-a) = a$ [যোগের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

12. $a, b \in \mathbb{R}$ হলে দেখাও যে,

$(-a)(-b) = ab$ [কু.'০৭,;সি.'১১]

এবং $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} (a \neq 0, b \neq 0)$ [কু.'১২]

প্রমাণ ঃ $(-a)(-b) = -(a(-b))$

[$\because a, b \in \mathbb{R}$ হলে, $(-a)b = -(ab)$]

$= -((-b)a)$ [গুণনের সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$= -(-(ba))$

[$\because a, b \in \mathbb{R}$ হলে, $(-b)a = -(ba)$]

$= ba$ [$\because a \in \mathbb{R}$ হলে, $-(-a) = a$]

$= ab$ [গুণনের সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

দ্বিতীয় অংশ ঃ

$(a^{-1}b^{-1})(ab)$

$= (ab)(a^{-1}b^{-1})$ [গুণনের সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$= (ab)(b^{-1}a^{-1})$ [ঐ]

$= ((ab)b^{-1})a^{-1}$ [ঐ]

$= (a(bb^{-1}))a^{-1}$ [ঐ]

$= (a.1).a^{-1}$ [গুণনের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$= a.a^{-1}$ [গুণনের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$= 1$ [গুণনের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

অর্থাৎ $(a^{-1}b^{-1})(ab) = (ab)(a^{-1}b^{-1}) = 1$

$\therefore (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

[গুণনের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

13. দেখাও যে, $a \in \mathbb{R}$ হলে, $a.0 = 0$ [কু.'০৬,ঢা.'০৯]

প্রমাণ ঃ $1 \in \mathbb{R}$ বলে,

$1 + 0 = 1$ [যোগের অভেদক বিধি অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow a(1 + 0) = a.1$ [গুণনের অনন্যতা বিধি অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow a.1 + a.0 = a.1$ [বন্টন বিধি অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow a + a.0 = a$ [গুণনের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow (-a) + (a + a.0) = (-a) + a$

[যোগের অনন্যতা বিধি অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow \{(-a) + a\} + a.0 = 0$ [যোগের সংযোজন বিধি এবং বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow 0 + a.0 = 0$

[যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ।]

$\therefore a.0 = 0$ [যোগের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ।]

14. দেখাও যে, যে কোনো বিজোড় সংখ্যার বর্গ বিজোড় সংখ্যা।

প্রমাণ ঃ মনে করি, $2n + 1$ একটি বিজোড় সংখ্যা, যেখানে $n \in \mathbb{N}$.

$2n + 1$ এর বর্গ $= (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$

$= 4(n^2 + n) + 1 = 4(n^2 + n)$

যেহেতু $4(n^2 + n)$ এর একটি উৎপাদক 4 বলে $4(n^2 + n)$ একটি জোড় সংখ্যা ।

$\therefore 4(n^2 + n) + 1$ একটি বিজোড় সংখ্যা ।

15. যদি $a, b \in \mathbb{R}$ হয়, তবে দেখাও যে, (i) $-(a + b) = -a - b$; (ii) $(-a)b = -(ab)$ [ব.'১১]

প্রমাণ ঃ (i) $(-a - b) + (a + b)$

$= \{-a + (-b)\} + (b + a)$

[যোগের বিনিময় বিধি অনুযায়ী]

$= [\{-a + (-b)\} + b] + a$

[সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$= [-a + \{(-b) + b\}] + a$

[সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$= [-a + 0] + a$

[যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$= (-a) + a$ [যোগের অভেদকের অস্তিত অনুযায়ী]

$= 0$ [যোগের বিপরীতকের অস্তিত অনুযায়ী]

$\therefore (-a - b) = -(a + b)$

[যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\Rightarrow -(a + b) = -a - b$

(ii) $(-a)b + (ab) = (-a)b + (a)b$

$= \{(-a) + a\}b$ [বন্টন বিধি অনুযায়ী]

$= 0.b$ [যোগের বিপরীতকের অস্তিত অনুযায়ী]

$= 0$

$\therefore (-a)b = -(ab)$

[যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

16. উদাহরণসহ মূলদ সংখ্যার সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা নয়। [কু.'০৭; ঢা.'০৮; সি.'১৩]

সংজ্ঞা : যে সমস্ত সংখ্যা দুইটি পূর্ন সংখ্যার অনুপাত (ভাজক শূন্য ব্যতীত) আকারে প্রকাশ করা যায় তাদের সেটকে মূলদ সংখ্যার সেট বলা হয়। সকল পূর্ণ সংখ্যা (2), ভগ্নাংশ($-\frac{3}{5}$), সসীম দশমিক ভগ্নাংশ (3·1), পৌন:পোনিক অসীম দশমিক ভগ্নাংশ ($\cdot\dot{3}$) মূলদ সংখ্যা।

দ্বিতীয় অংশ :

$1^2 = 1$, $(\sqrt{2})^2 = 2$, $2^2 = 4$

$\therefore\ 1 < \sqrt{2} < 2$

$\therefore\ \sqrt{2}$ পূর্ন (স্বভাবিক) সংখ্যা নয়।

যদি সম্ভব হয় তবে মনে করি, $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ মূলদ ভগ্নাংশ এবং

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, যেখানে $p, q \in \mathbb{N}$ এবং p, q সহমৌলিক।

[$\sqrt{2}$ ধনাত্মক সংখ্যা বলে $p, q \in \mathbb{Z}$ কে $p, q \in \mathbb{N}$ লিখা যায় এবং $1 < \sqrt{2} < 2$ বলে $q > 1$]

বা, $2 = \frac{p^2}{q^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

বা, $2q = \frac{p}{q} \cdot p$ [উভয় পক্ষকে $q \neq 0$ দ্বারা ভাগ করে।]

স্পষ্টত 2 এবং q স্বাভাবিক (পূর্ন) সংখ্যা বলে তাদের গুণফল 2q পূর্ন সংখ্যা। কিন্তু $\frac{p}{q}$ ভগ্নাংশ এবং p পূর্ণ সংখ্যা বলে তাদের গুণফল $\frac{p}{q} \cdot p$ একটি ভগ্নাংশ, অর্থাৎ পূর্ন সংখ্যা নয়; কেননা p, q সহমৌলিক। আর একটি পূর্ণ সংখ্যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমান হতে পারেনা।

$\therefore\ 2q \neq \frac{p}{q} \cdot p$

$\therefore\ \sqrt{2}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোন সংখ্যা হতে পারেনা

$\therefore\ \sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত)

17. দেখাও যে, $\sqrt{5}$ অমূলদ সংখ্যা।

[য.'০৬; সি.'০৬; ব.'০৭]

প্রমাণ : $2^2 = 4$, $(\sqrt{5})^2 = 5$, $3^2 = 9$

$\therefore\ 2 < \sqrt{5} < 3$

$\therefore\ \sqrt{5}$ পূর্ন (স্বভাবিক) সংখ্যা নয়।

[$\because$ 2 এবং 3 এর মধ্যে কোন স্বভাবিক সংখ্যা নেই।]

যদি সম্ভব হয় তবে মনে করি, $\sqrt{5}$ একটি মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ মূলদ ভগ্নাংশ এবং

$\sqrt{5} = \frac{p}{q}$; যেখানে $p, q \in \mathbb{N}$ এবং p, q সহমৌলিক।

[$\sqrt{5}$ ধনাত্মক সংখ্যা বলে $p, q \in \mathbb{Z}$ কে $p, q \in \mathbb{N}$ লিখা যায়]

বা, $5 = \frac{p^2}{q^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

বা, $5q = \frac{p}{q} \cdot p$

[উভয় পক্ষকে q ($q \neq 0$) দ্বারা ভাগ করে।]

স্পষ্টত 5 এবং q স্বাভাবিক (পূর্ন) সংখ্যা বলে তাদের গুণফল 5q পূর্ন সংখ্যা। কিন্তু $\frac{p}{q}$ ভগ্নাংশ এবং p পূর্ণ সংখ্যা বলে তাদের গুণফল $\frac{p}{q} \cdot p$ একটি ভগ্নাংশ, অর্থাৎ পূর্ন সংখ্যা নয়; কেননা p, q সহমৌলিক। আর একটি পূর্ণ সংখ্যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমান হতে পারেনা।

$\therefore\ 5q \neq \frac{p}{q} \cdot p$

$\therefore\ \sqrt{5}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোন সংখ্যা হতে পারেনা

$\therefore\ \sqrt{5}$ একটি মূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত)

18. a এবং b বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে,

(i) $|a - b| \geq |a| - |b|$ [ব.'০৮; মা.'০৯; ঢা.'১১]

(ii) $|a - b| \geq ||a| - |b||$ [রা.'০২]

(i) প্রমাণ : আমরা জানি,

$|a+b| \leq |a|+|b|$ ....(i)

এখন, $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|$

[(i) নং দ্বারা]

$\Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b|$ ... ... (ii)

$\therefore |a-b| \geq |a|-|b|$ (Proved)

(ii) $|a+b| \leq |a|+|b|$ ....(i)

$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|$

[(i) নং দ্বারা]

$\Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b|$ ... ... (ii)

$\therefore |b|-|a| \leq |b-a| = |a-b|$

$\Rightarrow -(|b|-|a|) \geq -|a-b|$

$\Rightarrow -|a-b| \leq |a|-|b|$ ...... (iii)

(ii) এবং (iii) হতে আমরা পাই ,

$-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|$

$\therefore |a-b| \geq ||a|-|b||$ (Proved)

19. a এবং b বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে, $|a-b| \leq |a|+|b|$ [চ.'০৯; য.'১০; কুয়েট'১২-১৩]

প্রমাণ : $|-ab| \geq -ab$ $[\because |x| \geq x]$

$\Rightarrow 2|ab| \geq -2ab$. $[\because |-x| = |x|]$

$\Rightarrow a^2+b^2+2|a||b| \geq a^2+b^2-2ab$

$[\because |ab| = |a||b|]$

$\Rightarrow |a|^2+|b|^2+2|a||b| \geq (a-b)^2$

$\Rightarrow (|a|+|b|)^2 \geq |a-b|^2$

যেহেতু $|a|+|b| \geq 0$ এবং $|a-b| \geq 0$, সুতরাং উভয় পক্ষকে বর্গমূল করে পাই,

$|a-b| \leq |a| + |b|$ (Proved)

বিকল্প পদ্ধতি : আমরা জানি ,

$-|a| \leq a \leq |a|$ ... ... (i) এবং

$-|b| \leq b \leq |b| \Rightarrow |b| \geq -b \geq -|b|$

$\Rightarrow -|b| \leq -b \leq |b|$ ... ... (ii)

(i) এবং (ii) যোগ করে আমরা পাই ,

$-(|a|+|b|) \leq a-b \leq (|a|+|b|)$

$\therefore |a-b| \leq |a| + |b|$ (Proved)

20. প্রমাণ কর যে, $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$; যেখানে $a, b, c \in \mathbb{R}$.

প্রমাণ : আমরা জানি ,

$|a+b| \leq |a|+|b|$ ....(i)

$|a-c| = |(a-b)+(b-c)| \leq |a-b| + |b-c|$

$\therefore |a-c| \leq |a-b| + |b-c|$ (Proved)

21(a) $|x-1| < 2$ হলে দেখাও যে, $|x^2-1| < 8$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $|x-1| < 2$ ... ... (i)

$|x+1| = |(x-1)+2| \leq |x-1| + |2|$

$[\therefore |a+b| \leq |a|+|b|]$

$\Rightarrow |x+1| \leq |x-1| + |2| < 2+2$. [(i)নং দ্বারা]

$\therefore |x+1| < 4$ ... ... (ii)

(i) $\times$ (ii) $\Rightarrow |x-1||x+1| < 2 \times 4$

$\therefore |x^2-1| < 8$ (Proved)

[বি.দ্র. : $-1 < x < 3$ সীমার মধ্যে x এর সকল মানের জন্য $(-1)^2 < x^2 < 3^2$ সত্য নয় । কেননা $-1 < -\frac{1}{2} < 3$ সত্য হলেও $(-1)^2 < (-\frac{1}{2})^2 < 3^2$ সত্য নয় । তাই, এক্ষেত্রে (8) এর নিয়মে প্রমাণ সঠিক হবেনা]

21(b) $|x-1| < \frac{1}{2}$ হলে দেখাও যে, $|x^2-1| < \frac{5}{4}$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $|x-1| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}+1 < x-1+1 < \frac{1}{2}+1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} < x^2 < \frac{9}{4}$ $[\because x > 0]$

$\Rightarrow \frac{1}{4}-1 < x^2-1 < \frac{9}{4}-1 \Rightarrow -\frac{3}{4} < x^2-1 < \frac{5}{4}$

$\Rightarrow -\frac{5}{4} < -\frac{3}{4} < x^2 - 1 < \frac{5}{4}$

$\Rightarrow -\frac{5}{4} < x^2 - 1 < \frac{5}{4}$

$\therefore \ |x^2 - 1| < \frac{5}{4}$ (Proved)

(c) $|x - 1| < 3$ হলে দেখাও যে, $|x^3 - 1| < 63$

দেওয়া আছে, $|x - 1| < 3 \Rightarrow -3 < x - 1 < 3$

$\Rightarrow -3 + 1 < x - 1 + 1 < 3 + 1$

$\Rightarrow -2 < x < 4 \Rightarrow -8 < x^3 < 64$

$\Rightarrow -8 - 1 < x^3 - 1 < 64 - 1$

$\Rightarrow -9 < x^3 - 1 < 63$

$\Rightarrow -63 < -9 < x^3 - 1 < 63$

$\Rightarrow -63 < x^3 - 1 < 63$

$\therefore \ |x^3 - 1| < 63$ (Proved)

(d) $|x - 1| < \frac{1}{2}$ হলে, দেখাও যে $|x^3 - 1| < \frac{19}{8}$

দেওয়া আছে, $|x - 1| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} + 1 < x - 1 + 1 < \frac{1}{2} + 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{8} < x^3 < \frac{27}{8}$

$\Rightarrow \frac{1}{8} - 1 < x^3 - 1 < \frac{27}{8} - 1$

$\Rightarrow -\frac{7}{8} < x^3 - 1 < \frac{19}{8}$

$\Rightarrow -\frac{19}{8} < -\frac{7}{8} < x^3 - 1 < \frac{19}{8}$

$\Rightarrow -\frac{19}{8} < x^3 - 1 < \frac{19}{8}$

$\therefore \ |x^3 - 1| < \frac{19}{8}$ (Proved)

22. $x \in \mathbb{R}$ এর সীমা নির্ণয় কর ; যেখানে $x^2 + 6x - 27 > 0$ এবং $3x - x^2 + 4 > 0$

সমাধান ঃ $x^2 + 6x - 27 > 0$

$\Rightarrow (x + 9)(x - 3) > 0$

$\Rightarrow \{x - (-9)\}(x - 3) > 0$

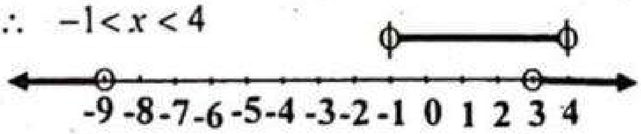
$\therefore \ x > 3$ অথবা $x < -9$

$3x - x^2 + 4 > 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$

$\Rightarrow (x - 4)(x + 1) < 0$

$\Rightarrow (x - 4)\{x - (-1)\} < 0$

$\therefore \ -1 < x < 4$



সংখ্যা রেখা হতে আমরা পাই , $3 < x < 4$

23. $x \in \mathbb{R}$ এর সীমা নির্ণয় কর ; যেখানে $5x - 1 < (x + 1)^2 < 7x - 3$

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $5x - 1 < (x + 1)^2 < 7x - 3$

$\therefore \ 5x - 1 < (x + 1)^2$ এবং $(x + 1)^2 < 7x - 3$

এখন , $5x - 1 < (x + 1)^2 \Rightarrow 5x - 1 < x^2 + 2x + 1$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 1) > 0$

$\therefore \ x > 2$ অথবা $x < 1$

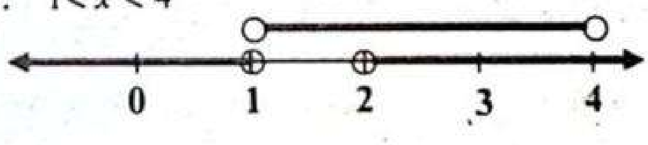
আবার , $(x + 1)^2 < 7x - 3$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 < 7x - 3$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0$

$\Rightarrow (x - 4)(x - 1) < 0$

$\therefore \ 1 < x < 4$



সংখ্যা রেখা হতে আমরা পাই , $2 < x < 4$

24(a) A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5} হলে এর ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা কত ? **[টেক্সটাইল'০৯-১০]**

সমাধান : এখানে, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ এর উর্ধ্বসীমাগুলির সেট $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$. কিন্তু $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$ এর ক্ষুদ্রতম উপাদান 5 .

$\therefore$ A এর ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা 5.

(b) বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S = \{x : 5x^2 - 16x + 3 < 0\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S)

এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (SupS) নির্ণয় কর।

[চ.'০০; কুয়েট'০৪-০৫]

সমাধান ঃ আমাদের আছে, $5x^2-16x+3<0$

$\Rightarrow 5x^2-15x-x+3<0$

$\Rightarrow 5x(x-3)-1(x-3)<0$

$\Rightarrow (x-3)(5x-1)<0$

$\Rightarrow (x-3)(x-\frac{1}{5})<0$

$\therefore \frac{1}{5}<x<3$

$\therefore$ S এর বৃহত্তম নিম্নসীমা $\frac{1}{5}$ এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা 3

25. বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S=\{n-1: n\in\mathbb{N}\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Sup S) নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $S=\{n-1: n\in\mathbb{N}\}$

$=\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

এখানে, S সেটটি নিম্নেসীমিত এবং এর নিম্নসীমাগুলির সেট $\{x\in\mathbb{R}: x\le 0\}$.

$\therefore$ S এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) = 0

আবার, S সেটটি ঊর্ধ্বসীমিত নয় বলে এর কোন ঊর্ধ্বসীমা নাই। সুতরাং, S এর ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Sup S) নাই।

26. বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S=\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীম (Sup S) নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $S=\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\}$

এখানে, S সেটটি নিম্নেসীমিত এবং এর নিম্নসীমাগুলির সেট $\{x\in\mathbb{R}: x\le 0\}$.

$\therefore$ S এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) = 0

আবার, S সেটটি ঊর্ধ্বসীমিত এবং এর ঊর্ধ্বসীমাগুলির সেট $\{x\in\mathbb{R}: x\ge 1\}$.

$\therefore$ S এর ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Sup S) = 1

27. বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S=\{n: n\in\mathbb{Z}\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Sup S) নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $S=\{n: n\in\mathbb{Z}\}$

$=\{\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

এখানে, S সেটটি নিম্নে বা ঊর্ধ্বে সীমিত নয় বলে এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) বা ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Sup S) কোনোটিই নাই।

31. নিচের প্রত্যেক অসমতাযুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর:

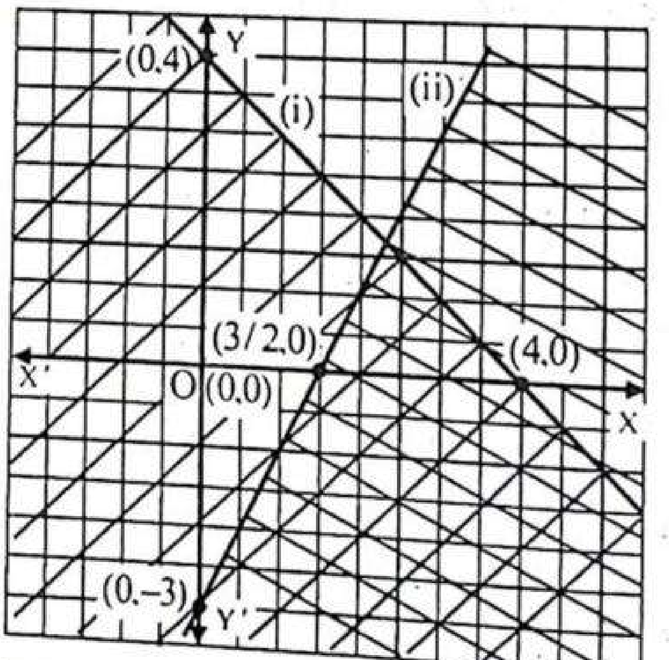
(a) $x+y-4\le 0$ এবং $2x-y-3\ge 0$

সমাধান ঃ প্রদত্ত অসমতাযুগলের অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$x+y=4 \Rightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1\cdots\cdots$(i).

$2x-y=3 \Rightarrow \frac{x}{3/2}+\frac{y}{-3}=1\cdots\cdots$ (ii)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।



প্রদত্ত $x+y-4\le 0$ অসমতায় (0,0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-4\le 0$, যা সত্য। সুতরাং (i) রেখাস্থ ও এর (0,0) বিন্দুর পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই

অসমতার লেখচিত্র। তদ্রূপ $2x - y - 3 \geq 0$ অসমতায় $(0,0)$ বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-3 \geq 0$, যা অসত্য। সুতরাং (ii) রেখাস্থ ও এর যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট $2x - y - 3 \geq 0$ অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশিষ্ট অংশ সহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটির যুগপৎসমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই (সীমারেখাসহ) এই লেখচিত্র।

(b) $x + y - 3 > 0$ এবং $2x - y - 5 > 0$

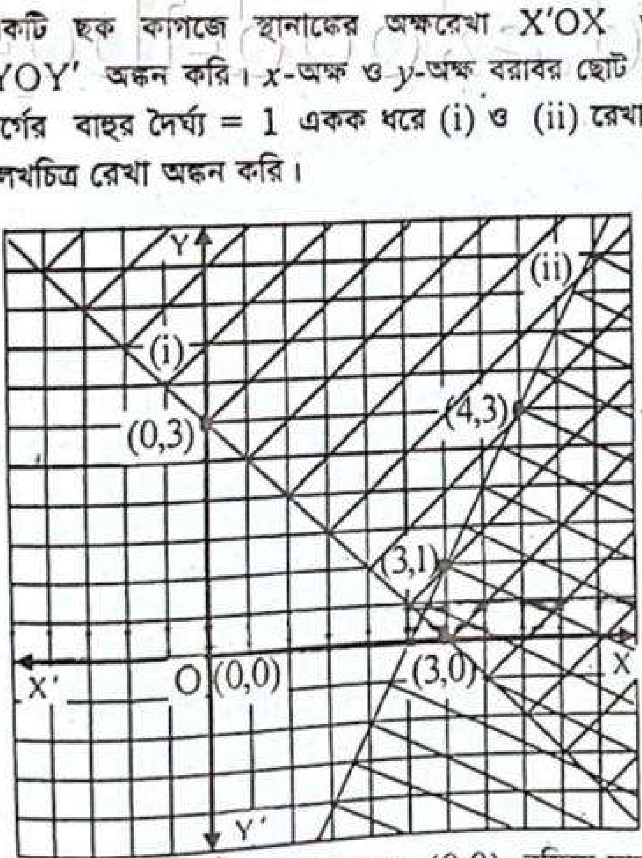
সমাধান : প্রদত্ত অসমতাযুগলের অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$$x + y = 3 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1 \cdots \cdots \text{(i)},$$

$$2x - y = 5 \Rightarrow y = 2x - 5 \cdots \cdots \text{(ii)}.$$

(ii) – এর উপর যেকোনো দুইটি বিন্দু $(3, 1)$ ও $(4, 3)$ নির্ণয় করি।

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।



প্রদত্ত $x + y - 3 > 0$ অসমতায় $(0,0)$ বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-3 > 0$, যা অসত্য। সুতরাং (i) এর যে পাশে মূলবিন্দু $(0,0)$ তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র। তদ্রূপ $2x - y - 5 > 0$ অসমতায় $(0,0)$ বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-5 \geq 0$, যা অসত্য। সুতরাং (ii) রেখার যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশিষ্ট অংশ সহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটির যুগপৎসমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই এই লেখচিত্র।

(c) $3x - 3y > 5$ এবং $x + 3y \leq 9$

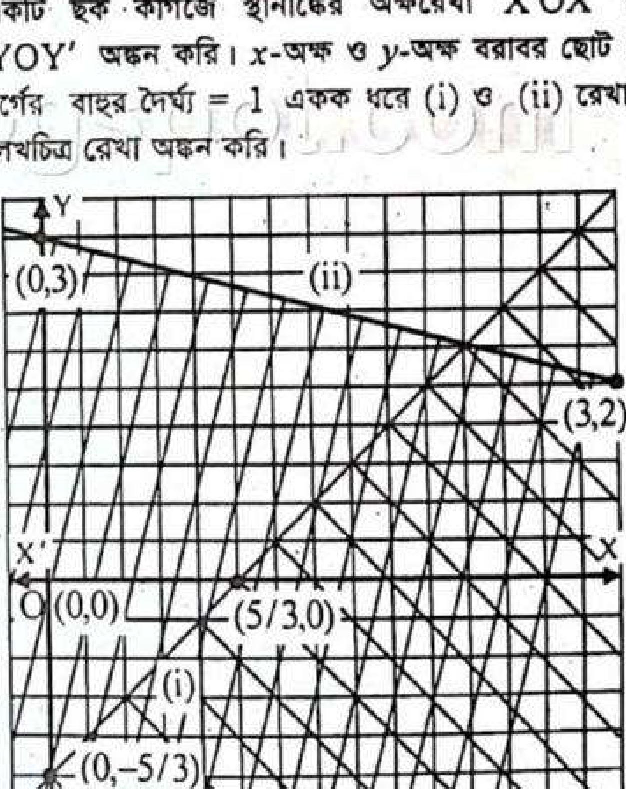
সমাধান : প্রদত্ত অসমতাযুগলের অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$$3x - 3y = 5 \Rightarrow \frac{x}{5/3} + \frac{y}{-5/3} = 1 \cdots \cdots \text{(i)},$$

$$x + 3y = 9 \Rightarrow x = 9 - 3y \cdots \cdots \text{(ii)}.$$

(ii) – এর উপর যেকোনো দুইটি বিন্দু $(0, 3)$ ও $(3, 2)$ নির্ণয় করি।

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 3 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।



প্রদত্ত $3x - 3y > 5$ অসমতায় $(0,0)$ বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $0 > 5$, যা অসত্য। সুতরাং (i) এর যে পাশে মূলবিন্দু $(0,0)$ তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র। তদ্রূপ $x + 3y \leq 9$ অসমতায় $(0,0)$ বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায়

$0 \le 9$, যা সত্য। সুতরাং (ii) রেখাস্থ ও এর (0,0) বিন্দুর পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশিষ্ট অংশ সহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটির যুগপৎসমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে (ii) নং রেখাস্থ বিন্দুসহ গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই এই লেখচিত্র।

(d) $5x - 3y - 9 > 0$ এবং $3x - 2y \ge 5$

সমাধান : প্রদত্ত অসমতাযুগলের অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

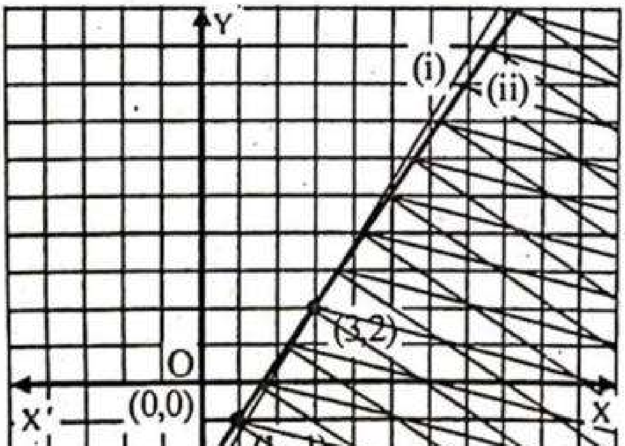
$5x - 3y = 9 \Rightarrow 3y = 5x - 9$

$\Rightarrow y = \frac{5}{3}x - 3 \cdots\cdots$ (i), যা (0, −3), (3,2) দিয়ে অতিক্রম করে।

এবং $3x - 2y = 5 \Rightarrow 2y = 3x - 5$

$\Rightarrow y = \frac{3x-5}{2} \cdots\cdots$ (ii), যা (1, −1), (3, 2) দিয়ে অতিক্রম করে।

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।



প্রদত্ত $5x - 3y - 9 > 0$ অসমতায় (0,0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-9 > 0$, যা অসত্য। সুতরাং (i) এর যে পাশে মূলবিন্দু (0,0) তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র। তদ্রূপ $3x - 2y \ge 5$ অসমতায় (0,0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $0 \ge 5$, যা অসত্য। সুতরাং (ii) রেখাস্থ ও এর (0,0) বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশিষ্ট অংশ সহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটির যুগপৎসমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে (ii) নং রেখাস্থ বিন্দুসহ গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই এই লেখচিত্র।

32. (a) $5x - 5 > 25$ অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি?

A. $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 6\}$ B. $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 6\}$
C. $S = \{x \in \mathbb{R} : x \le 6\}$ D. $S = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 6\}$

***Sol*".:** $5x > 25 + 5 \Rightarrow x > 6 \quad \therefore$ Ans. A

(b) $5x - x^2 - 6 > 0$ অসমতাটির সমাধান কোনটি? **[DU 08-09; JU 09-10]**

A. $x < 2$ B. $2 > x > 3$
C. $2 < x < 3$ D. $x < 2$ অথবা $x > 3$

***Sol*".:** $5x - x^2 - 6 > 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-2) < 0 \Rightarrow x < 3$ এবং $x > 2$

$\Rightarrow 2 < x < 3 \quad \therefore$ Ans. C

(c) বাস্তব সংখ্যায় $0 < |x - 3| < 4$ অসমতাটির সমাধান কোনটি? **[DU 02-03]**

A. $\{x : -1 < x < 7\}$ B. $\{x : -1 \le x \le 7\}$
C. $\{x : -1 < x < 3\} \cap \{x : 3 < x < 7\}$
D. $\{x : -1 < x < 3\} \cup \{x : 3 < x < 7\}$

***Sol*".:** $|x - 3| < 4 \Rightarrow -4 < x - 3 < 4$

$\Rightarrow -1 < x < 7$. কিন্তু $x = 3$ হলে $|x - 3| = 0$ হয়।

$\therefore$ সমাধান সেট

$= \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 3 < x < 7\}$

33. দেওয়া আছে, $f(x) = 3x - x^2 + 4$ এবং $g(x) = x^2 + 6x - 27$.

(a) বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S = \{x : g(x) < 0\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (SupS) নির্ণয় কর।

(b) $f(x) > 0$ অসমতাকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

(c) $x \in \mathbb{R}$ এর সীমা নির্ণয় কর ; যেখানে $f(x) > 0$ এবং $g(x) > 0$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = 3x - x^2 + 4$ এবং $g(x) = x^2 + 6x - 27$.

(a) $S = \{x : g(x) < 0\}$
$= \{x : x^2 + 6x - 27 < 0\}$
$= \{x : (x-3)(x+9) < 0\}$.
$= \{x : -9 < x < 3\}$

$[\because (x-3)\{x-(-9)\} < 0$ এবং $3 > -9]$

$\therefore$ S এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) $= -9$ এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Sup S) $= 3$

(b) $f(x) > 0 \Rightarrow 3x - x^2 + 4 > 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) < 0$

$\therefore -1 < x < 4$

সকল পক্ষে $-\frac{-1+4}{2} = -\frac{3}{2}$ যোগ করে পাই,

$-1 - \frac{3}{2} < x - \frac{3}{2} < 4 - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow -\frac{5}{2} < x - \frac{3}{2} < \frac{5}{2}$

$\therefore |x - \frac{3}{2}| < \frac{5}{2}$

(c) $f(x) > 0 \Rightarrow 3x - x^2 + 4 > 0$

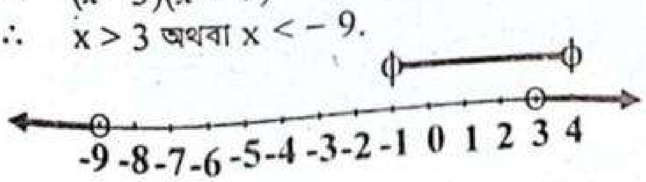
$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) < 0$

$\therefore -1 < x < 4$

$g(x) < 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 27 > 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+9) > 0$

$\therefore x > 3$ অথবা $x < -9$.



যেহেতু $f(x) > 0$ এবং $g(x) > 0$, সুতরাং সংখ্যারেখা হতে $x \in \mathbb{R}$ এর নির্ণেয় সীমা, $3 < x < 4$.

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. x এর মান কত হলে, $\frac{x+2}{|x+1|}$ এর মান বাস্তব হবে?

সমাধান : $\frac{x+2}{|x+1|} \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি, $x \in \mathbb{R}$ এবং $x + 1 \neq 0$ ie $x \neq -1$

সুতরাং, x এর মান $= \mathbb{R} - \{-1\}$

2. $a < b$ এবং **k** ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে, $a < \frac{a+bk}{1+k} < b$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $a < b$

$\therefore ak < bk$ [$\because$ k ধনাত্মক সংখ্যা]

$\Rightarrow a + ak < a + bk$ [উভয় পক্ষে a যোগ করে ।]

$\Rightarrow a(1+k) < a + bk$

$\Rightarrow a < \frac{a+bk}{1+k} \cdots(1)$ [উভয় পক্ষকে $1 + k > 0$ দ্বারা ভাগ করে]

আবার, $ak < bk$

$\Rightarrow ak + b < bk + b$ [উভয় পক্ষে b যোগ করে ।]

$\Rightarrow ak + b < b(k+1)$

$\Rightarrow \frac{a+bk}{1+k} < b \cdots(2)$ [উভয় পক্ষকে $1 + k > 0$ দ্বারা ভাগ করে]

(1) ও (2) হতে পাই, $a < \frac{a+bk}{1+k} < b$

3. $A = \{x : x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$ হলে দেখাও যে, A গুণ প্রক্রিয়ার জন্য আবদ্ধ।

প্রমাণ : ধরি, $x_1 = 3p$ এবং $x_2 = 3q$ প্রদত্ত সেট A এর যেকোনো দুইটি উপাদান ; যেখানে $p, q \in \mathbb{N}$.

এখন, $x_1 x_2 = 3p \times 3q = 9pq$

$= 3(3pq) = 3r$;যেখানে $3pq = r$

যেহেতু 3, p, q $\in \mathbb{N}$, সেহেতু $r = 3\,pq \in \mathbb{N}$

$\therefore\ 3r \in A$

$\therefore$ A গুণন প্রক্রিয়ার জন্য আবদ্ধ। (প্রমাণিত)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ ঃ

1. $|7 - 3x| \le 5$ এর সমাধান –

[DU 06-07; JU 09-10]

Sol".: $|7 - 3x| \le 5 \Rightarrow |3x - 7| \le 5$

$\Rightarrow -5 \le 3x - 7 \le 5 \Rightarrow 2 \le 3x \le 12$

$\therefore\ 2/3 \le x \le 4$

2. $-7 < x < -1$ কে পরম মানের সাহায্যে লিখলে দাঁড়ায়- **[DU 04-05; CU 08-09; JU 09-10]**

Sol".: $-7 + 4 < x + 4 < -1 + 4$

$\Rightarrow\ -3 < x + 4 < 3\ \therefore |x + 4| < 3$

3. $|x| \ge 3$ অসমতার সমাধান হবে- **[CU 07-08]**

Sol".: $|x| \ge 3 \Rightarrow x \le -3$ অথবা $x \ge 3$

$\Rightarrow (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

4. কোন সংখ্যাটি অমূলদ- **[HSTU 05-06; SUST 04-05; SAU 07-08; JU 09-10]**

Sol".: **A.** $\frac{11}{6}$ **B.** -3.3 **C.** 20200.. **D.** 1.1212..

Ans. C

5. সমাধান কর: $|x - 5| - 2x > 4$ **[SUST 08-09]**

Sol".: $x - 5 >$ হলে, $x - 5 - 2x > 4$

$\Rightarrow -x > 9 \Rightarrow x < -9$

$x - 5 < 0$ হলে, $-(x - 5) - 2x > 4$

$\Rightarrow -x + 5 - 2x > 4 \Rightarrow -3x > -1 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x < \frac{1}{3}$

6. বাস্তব সংখ্যায় $\frac{1}{|2x-3|} > 5$ অসমতাটির সমাধান–

[DU 09-10; SUST 08-09]

Sol".: $\frac{1}{|2x-3|} > 5 \Rightarrow |2x - 3| < \frac{1}{5}$

$\Rightarrow -\frac{1}{5} < 2x - 3 < \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} + 3 < 2x < \frac{1}{5} + 3$

$\Rightarrow \frac{14}{5} < 2x < \frac{16}{5} \Rightarrow \frac{7}{5} < x < \frac{8}{5}$

কিন্তু $2x - 3 = 0$ ie, $x = \frac{3}{2}$ হলে, প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ সমাধান $(\frac{7}{5}, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \frac{8}{5})$

7. $X = \{x : x < 0\}$ হলে X এর ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা–

[JU 10-11, 09-10]

Sol".: X এর উর্ধ্বসীমার সেট $= \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$

$\therefore$ X এর ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা = 0.

10. $|\pi - 2|$ কে পরমমান চিহ্ন ব্যতিত লিখলে দাঁড়ায়–

[JU 09-10]

Sol".: $|\pi - 2| = \pi - 2, [\because \pi > 2]$

11. বাস্তব সংখ্যায় $\frac{1}{|3x+1|} \ge 5$ অসমতাটির সমাধান-

DU 13-14

A. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{5}\right)$ B. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{15}\right)$

C. $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{15}\right]$ D. None

Sol".: $\frac{1}{|3x+1|} \ge 5 \Rightarrow |3x + 1| \le \frac{1}{5}$

$\Rightarrow\ -\frac{1}{5} \le 3x + 1 \le \frac{1}{5}$

$\Rightarrow -\frac{1}{5} - 1 \le 3x \le \frac{1}{5} - 1 \Rightarrow -\frac{6}{5} \le 3x \le -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow\ -\frac{2}{5} \le x \le -\frac{4}{15}$. কিন্তু $3x + 1 = 0$ অর্থাৎ $x = -\frac{1}{3}$ হলে, প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{15}\right]$

2. নিচের যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামগুলিকে লিখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে সর্বোচ্চকরণ কর:

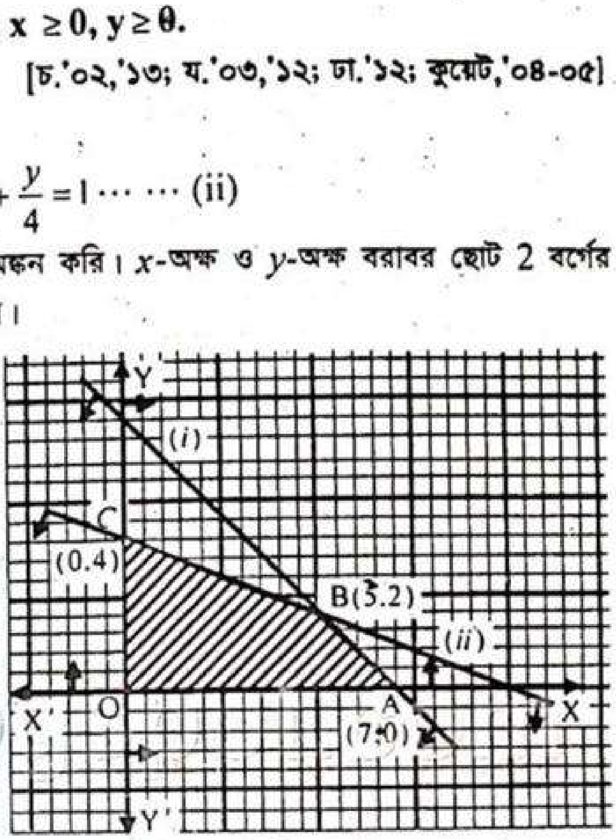
(a) $z = 3x + 4y$, সীমাবদ্ধতা : $x + y \le 7, 2x + 5y \le 20, x \ge 0, y \ge 0$.

[চ.'০২,'১৩; য.'০৩,'১২; ঢা.'১২; কুয়েট,'০৪-০৫]

সমাধান : প্রদত্ত অসমতাগুলোর অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$x + y = 7 \Rightarrow \frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1 \cdots \cdots$(i), $2x + 5y = 20 \Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{4} = 1 \cdots \cdots$ (ii)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(7,0) , $x + y = 7$ ও $2x + 5y = 20$ এর ছেদবিন্দু B(5,2) এবং C(0,4)।

O(0,0) বিন্দুতে $z = 3\times 0 + 4\times 0 = 0$,

A(7,0) বিন্দুতে $z = 3\times 7 + 4\times 0 = 21$,

B(5,2) বিন্দুতে $z = 3\times 5 + 4\times 2 = 23$ এবং

C(0,4) বিন্দুতে $z = 3\times 0 + 4\times 4 = 16$

$\therefore$ B(5,2) বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান = 23

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 5, y = 2$ এবং $Z_{max} = 23$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে $x + y = 7$ ও $2x + 5y = 20$ এর ছেদবিন্দু নির্ণয় :

MODE 3 times 1 EQN 2 1 = 1 = 7 = 2 = 5 = 2 0 = x =5 = y =2

2(b) $z = 3x + y$, সীমাবদ্ধতা: $2x + y \le 8, 2x + 3y \le 12, x , y \ge 0$. [ব.'০৩,'০৫; রা.'১৩]

সমাধান : প্রদত্ত অসমতাগুলোর অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

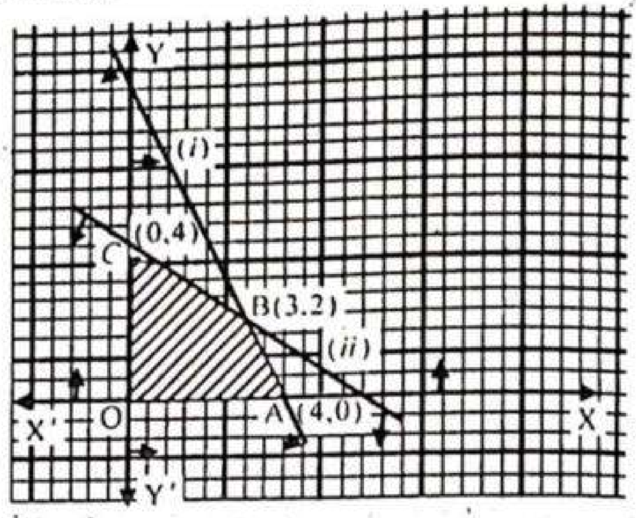
$2x + y = 8 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1 \cdots \cdots$(i), $2x + 3y = 12 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1 \cdots \cdots$ (ii)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(4,0), $2x + y = 8$ ও $2x + 3y = 12$ এর ছেদবিন্দু B(3.2) এবং C(0.4)।

O(0.0) বিন্দুতে $z = 3\times 0 + 0 = 0$, A(4.0) বিন্দুতে $z = 3\times 4 + 0 = 12$.



$B(3,2)$ বিন্দুতে $z = 3\times3+2 = 11$

এবং $C(0,4)$ বিন্দুতে $z = 3\times0+4 = 4$

$\therefore$ $B(4,0)$ বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান = 12

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 4, y = 0$ এবং $Z_{max} = 12$

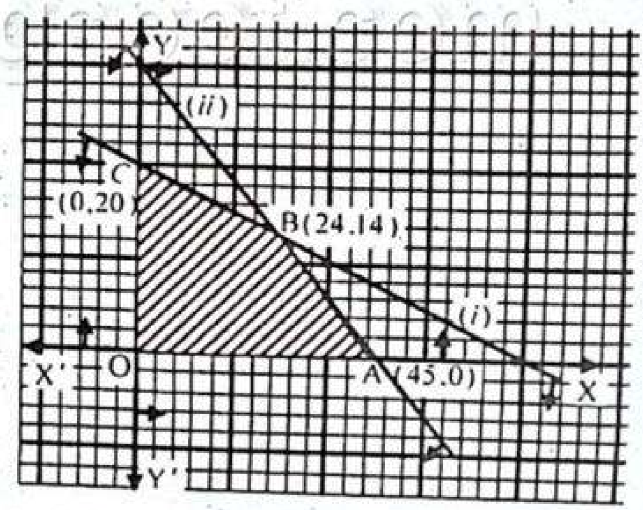
2(c). $z = 45x + 80y$, সীমাবদ্ধতা: $5x + 20y \le 400$, $10x + 15y \le 450$. $x, y \ge 0$. [য.'১০]

সমাধান : প্রদত্ত অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$5x + 20y = 400 \Rightarrow \frac{x}{80} + \frac{y}{20} = 1 \cdots\cdots$(i), $10x + 15y = 450 \Rightarrow \frac{x}{45} + \frac{y}{30} = 1 \cdots\cdots$ (ii)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।



এখানে, $A(45,0)$. $5x + 20y = 400$ ও $10x + 15y = 450$ এর ছেদবিন্দু $B(24,14)$ এবং $C(0,20)$

$O(0,0)$ বিন্দুতে $z = 45\times0 + 80\times0 = 0$,

$A(45,0)$ বিন্দুতে $z = 45\times45 + 80\times0 = 2025$,

$B(24,14)$ বিন্দুতে $z = 45\times24 + 80\times14 = 2200$,

এবং $C(0,20)$ বিন্দুতে $z = 45\times0 + 80\times14 = 1120$

$\therefore$ $B(24,14)$ বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান = 2200

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 24, y = 14$ এবং $Z_{max} = 2200$

2(d) $z = 3x + 4y$, সীমাবদ্ধতা : $x + y \le 450$, $2x - y \le 600$, $x, y \ge 0$. [চ.'০৫; কু.'০৯]

সমাধান : প্রদত্ত অসমতাগুলোর অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$x + y = 450 \Rightarrow \frac{x}{450} + \frac{y}{450} = 1 \cdots\cdots$(i), $2x + y = 600 \Rightarrow \frac{x}{300} + \frac{y}{600} = 1 \cdots\cdots$ (ii)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 30 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, $A(300,0)$, $x + y = 450$ ও $2x + y = 600$ এর ছেদবিন্দু $B(150, 300)$ এবং $C(0, 450)$

O(0,0) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 0 = 0$,

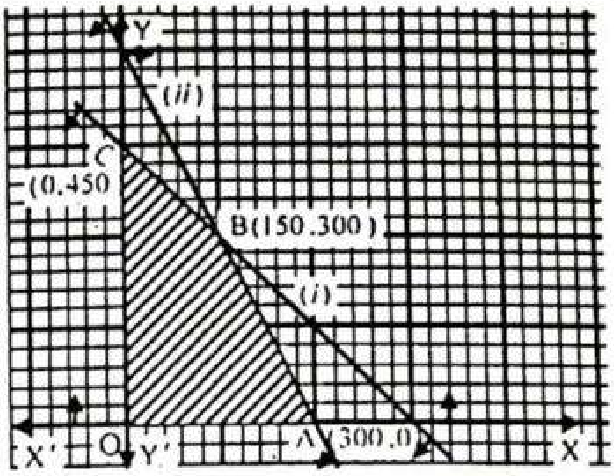
A(300,0) বিন্দুতে $z = 3 \times 300 + 4 \times 0 = 900$,

B(150,300) বিন্দুতে $z = 3 \times 150 + 4 \times 300 = 1650$,

এবং C(0,450) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 450 = 1800$

$\therefore$ C(0,450) বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান =1800

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 0$, $y = 450$ এবং $Z_{max} = 1800$

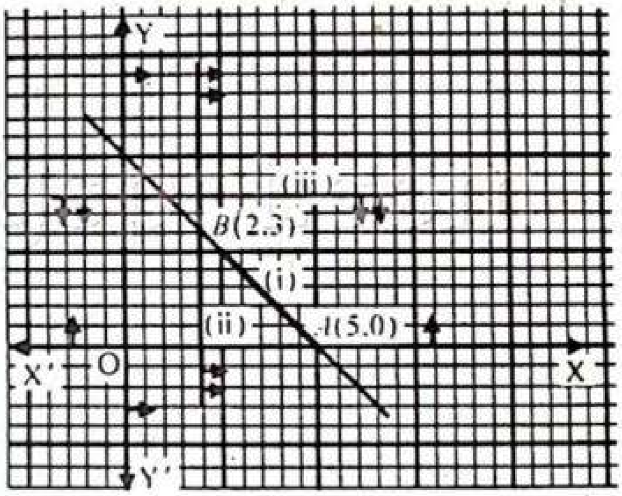


2(e) $z = 4x + 6y$, সীমাবদ্ধতা : $x + y = 5$, $x \geq 2$, $y \leq 4$, $x, y \geq 0$. [য.'০১,'১১; ব.'০২,'০৭]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $x + y = 5 \cdots \cdots$(i) এবং অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$x = 2 \cdots \cdots$ (ii) , $y = 4 \cdots$ (iii)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) . (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



AB রেখাংশস্থ বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব এই এলাকাটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(4,0) এবং $x = 2$ ও $x + y = 5$ এর ছেদবিন্দু B(2,3).

A(4,0) বিন্দুতে $z = 4 \times 4 + 6 \times 0 = 16$ এবং

B(2,3) বিন্দুতে $z = 4 \times 2 + 6 \times 3 = 26$

$\therefore$ B(2,3) বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান = 26

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 2$, $y = 3$ এবং $Z_{max} = 26$

2(f) $z = 12x + 10y$, সীমাবদ্ধতা: $2x + y \leq 90$, $x + 2y \leq 80$, $x + y \leq 50$, $x, y \geq 0$.

[রা.'০৩; ঢা.'০৬; কু.'০৭; দি.'১০]

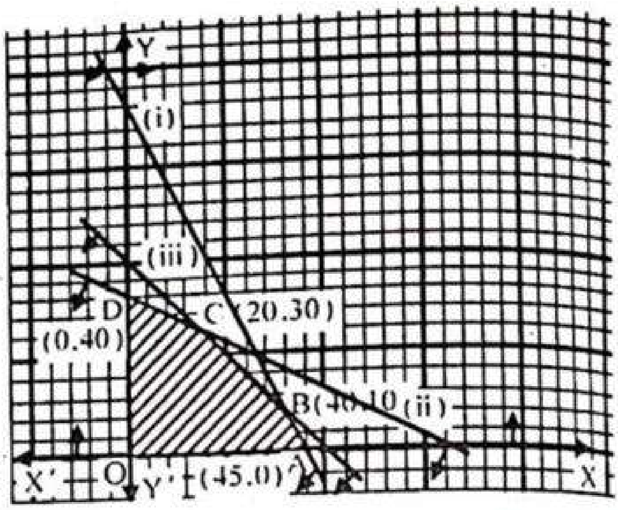
সমাধান : প্রদত্ত অসমতাগুলোর অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $2x + y = 90 \Rightarrow \frac{x}{45} + \frac{y}{90} = 1 \cdots\cdots$ (i),

$x + 2y = 80 \Rightarrow \frac{x}{80} + \frac{y}{40} = 1 \cdots\cdots$ (ii), $x + y = 50 \Rightarrow \frac{x}{50} + \frac{y}{50} = 1 \cdots \cdots$ (iii)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 5 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) . (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

OABCD বহুভূজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(45,0) , $2x + y = 90$ ও $x + y = 50$ এর ছেদবিন্দু B(40,10), $x + 2y = 80$ ও $x + y = 50$ এর ছেদবিন্দু C(20,30) এবং D(0,40)।



O(0,0) বিন্দুতে $z = 12\times0 + 10\times0 = 0.$

A(45,0) বিন্দুতে $z = 12\times45 + 10\times0 = 540.$

B(40,10) বিন্দুতে $z = 12\times40 + 10\times10 = 580,$

C(20,30) বিন্দুতে $z = 12\times20 + 10\times30 = 540$

এবং D(0,40) বিন্দুতে $z = 12\times0 + 10\times40 = 400$

$\therefore$ B(40,10) বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান =580

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 40$, $y = 10$ এবং $Z_{max} = 580$

2(g) $z = 5x + 7y$, সীমাবদ্ধতা: $x + y \le 4$, $3x + 8y \le 24$, $10x + 7y \le 35$, $x\ ,\ y \ge 0$. [সি.'১১; রা.'০৫; ব.'১১]

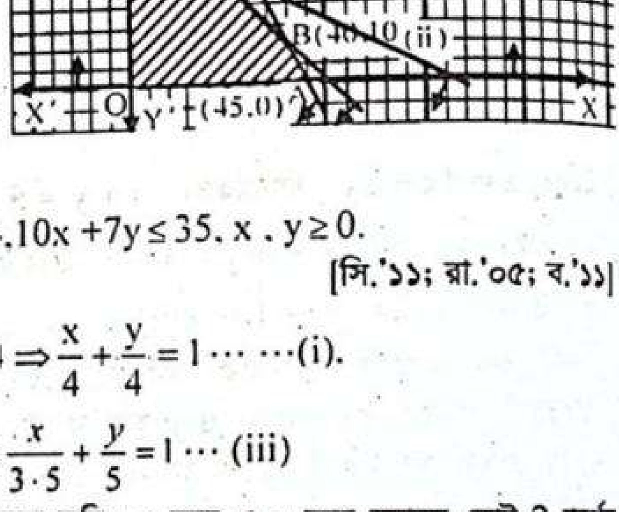
Sol^n. : প্রদত্ত অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $x + y = 4 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \cdots\cdots$(i).

$3x + 8y = 24 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{3} = 1 \cdots\cdots$ (ii); $10x + 7y = 35 \Rightarrow \frac{x}{3\cdot5} + \frac{y}{5} = 1 \cdots$ (iii)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) , (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

OABCD বহুভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(7/2,0) , $x + y = 4$ ও $10x + 7y = 35$ এর ছেদবিন্দু B($\frac{7}{3}$,$\frac{5}{3}$), $x + y = 4$ ও $3x + 8y = 24$ এর ছেদবিন্দু C($\frac{8}{5}$,$\frac{12}{5}$) এবং D(0,3)।



O(0,0) বিন্দুতে $z = 5\times0 + 7\times0 = 0.$

A($\frac{7}{2}$,0) বিন্দুতে $z = 5\times\frac{7}{2} + 7\times0 = 17\frac{1}{2}$,

B($\frac{7}{3}$,$\frac{5}{3}$) বিন্দুতে $z = 5\times\frac{7}{3} + 7\times\frac{5}{3} = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}$,

C($\frac{8}{5}$,$\frac{12}{5}$) বিন্দুতে $z = 5\times\frac{8}{5} + 7\times\frac{12}{5} = \frac{124}{5} = 24\frac{4}{5}$, D(0,3) বিন্দুতে $z = 5\times0 + 7\times3 = 21$

$\therefore$ C($\frac{8}{5}$,$\frac{12}{5}$) বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান $= 24\frac{4}{5}$

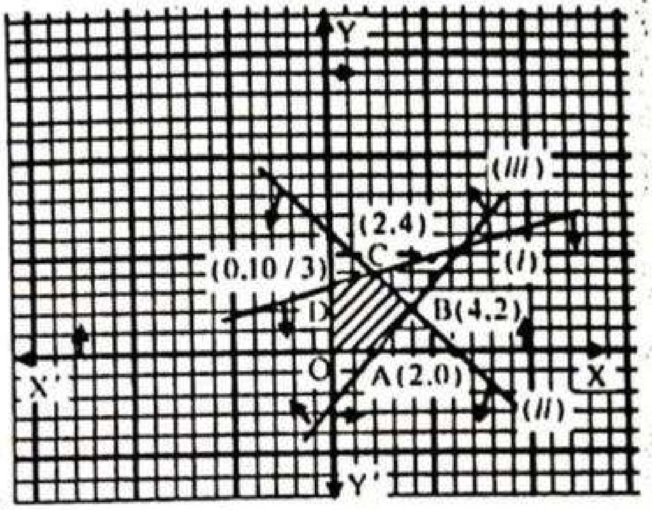
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \frac{8}{5}$, $y = \frac{12}{5}$ এবং $Z_{max} = 24\frac{4}{5} = 24\cdot8$

2(h) $z = 2y - x$, সীমাবদ্ধতা: $3y - x \le 10$, $x + y \le 6$, $x - y \le 2$, $x\ ,\ y \ge 0$. [ব.'০৪; য.'১৩]

সমাধান : প্রদত্ত অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $3y - x = 10 \cdots \cdots$(i) ∴(2,4),(5, 5) বিন্দুগামী।

$x + y = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \cdots \cdots$ (ii), $x - y = 2 \cdots$ (iii) ; যা (3,1),(2, 0) বিন্দুগামী।

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) , (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



OABCD বহুভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(2,0) , $x + y = 6$ ও $x - y = 2$ এর ছেদবিন্দু B(4,2). $3y - x = 10$ ও $x + y =$ ৬ এর ছেদবিন্দু C(2,4) এবং D(0,10/3)।

O(0,0) বিন্দুতে $z = -0 + 2 \times 0 = 0$,

A(2,0) বিন্দুতে $z = -2 + 2 \times 0 = -2$, B(4,2) বিন্দুতে $z = -4 + 2 \times 2 = 0$.

C(2,4) বিন্দুতে $z = -2 + 2 \times 4 = 6$, D(0,10/3) বিন্দুতে $z = -0 + 10/3 = 10/3$

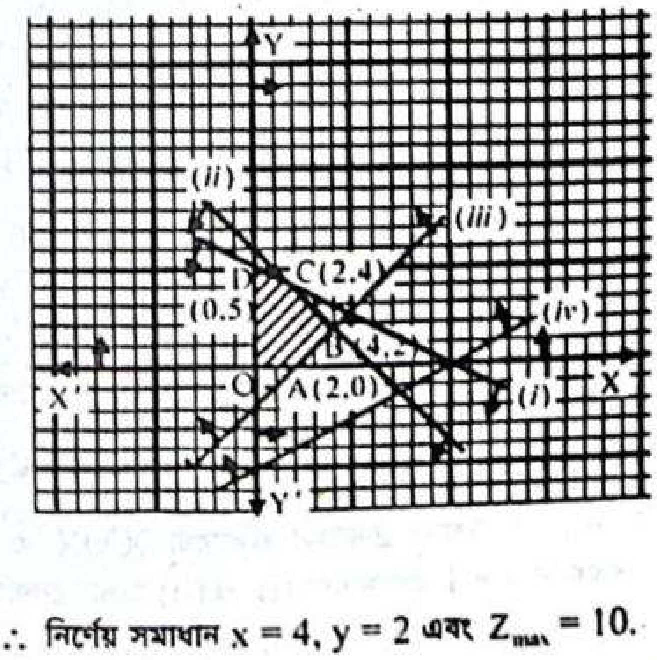
∴ C(2,4) বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান = 6 . ∴ নির্ণেয় সমাধান $x = 2$, $y = 4$ এবং $Z_{max} = 6$

2(i) $z = 2x + y$, সীমাবদ্ধতা: $x + 2y \leq 10$, $x + y \leq 6$, $x - y \leq 2$, $x - 2y \geq 10$, x , $y \geq 0$. [ঢা.'০৩; ব.'১৩]

সমাধান : প্রদত্ত অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $x + 2y = 10 \Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1 \cdots$(i),

$x + y = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \cdots$(ii), $x - y = 2 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1 \cdots$(iii), $x - 2y = 10 \Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{-5} = 1 \cdots$ (iv)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) , (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



OABCD বহুভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(2,0), $x + y = 6$ ও $x - y = 2$ এর ছেদবিন্দু B(4,2), $x + 2y = 10$ ও $x + y = 6$ এর ছেদবিন্দু C(2,4) এবং D(0,5)।

O(0,0) বিন্দুতে $z = 2 \times 0 + 0 = 0$,

A(2,0) বিন্দুতে $z = 2 \times 2 + 0 = 4$,

B(4,2) বিন্দুতে $z = 2 \times 4 + 2 = 10$,

C(2,4) বিন্দুতে $z = 2 \times 2 + 4 = 8$,

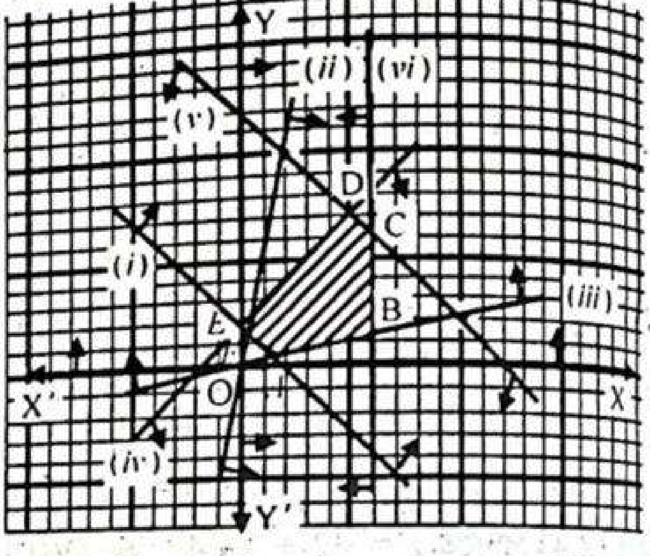
D(0,5) বিন্দুতে $z = 2 \times 0 + 5 = 5$

∴ C(4,2) বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান = 10 ∴ নির্ণেয় সমাধান $x = 4$, $y = 2$ এবং $Z_{max} = 10$.

2(j) $z = 3x + 2y$, সীমাবদ্ধতা : $x + y \geq 1,\ y - 5x \leq 0,\ 5y - x \leq 0,\ x - y \geq -1,\ x + y \leq 6,\ x \leq 3,$ $x, y \geq 0.$ [সি.'০৪]

সমাধান : প্রদত্ত অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $x + y = 1 \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1 \cdots$(i), $y - 5x = 0 \cdots$(ii), যা (0,0),(1, 5) বিন্দুগামী, $5y - x = 0 \cdots$ (iii), যা (0,0),(1, 5) বিন্দুগামী, $x - y = -1 \Rightarrow \frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1 \cdots$(iv),

$x + y = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \cdots$(v), $x = 3 \cdots$(vi).



একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) , (ii), (iii), (iv), (v) ও (vi) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ABCDEF বহুভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, $x + y = 1$ ও $5y - x = 0$ এর ছেদবিন্দু

$A(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$, $5y - x = 0$ ও $x = 3$ এর ছেদবিন্দু $B(3, \frac{3}{5})$,

$x = 3$ ও $x + y = 6$ এর ছেদবিন্দু C(3,3), $x + y = 6$ ও $x - y = -1$ এর ছেদবিন্দু $D(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$, $y - 5x = 0$ ও $x - y = -1$ এর ছেদবিন্দু $E(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$ এবং $x + y = 1$ ও $y - 5x = 0$ এর ছেদবিন্দু $F(\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$।

$A(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ বিন্দুতে $z = 3 \times \frac{5}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = 2\frac{5}{6}$, $B(3, \frac{3}{5})$ বিন্দুতে $z = 3 \times 3 + 2 \times \frac{3}{5} = 10\frac{1}{5}$,

C(3,3) বিন্দুতে $z = 3 \times 3 + 2 \times 3 = 15$, $D(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ বিন্দুতে $z = 3 \times \frac{5}{2} + 2 \times \frac{7}{2} = 14\frac{1}{2}$

$E(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$ বিন্দুতে $z = 3 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{5}{4} = 3\frac{1}{4}$, $F(\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$ বিন্দুতে $z = 3 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{5}{6} = 2\frac{1}{6}$

$\therefore$ C(3,3) বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান = 15

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 3,\ y = 3$ এবং $Z_{max} = 15$.

3. নিচের যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে সর্বনিম্নকরণ কর :

(a) $z = 2x - y$, সীমাবদ্ধতা: $x + y \leq 5,\ x + 2y \geq 8,\ x, y \geq 0.$

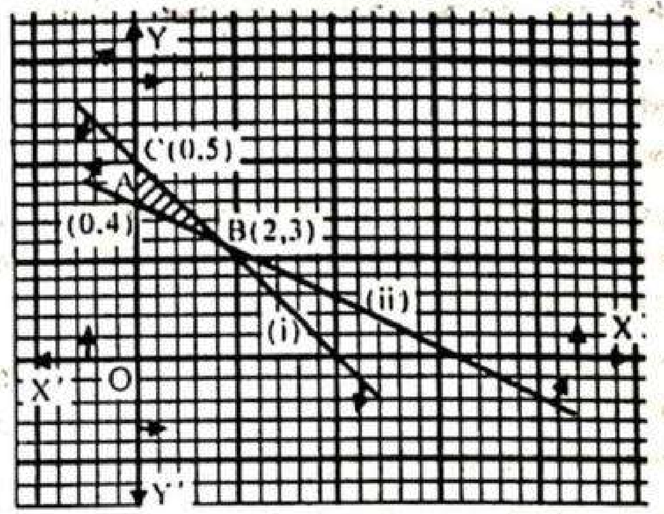
[কু.'০৮; চ.'০৪,'০৮; রা.'০৯,'১২; সি.'১০; ব.'১২; ঢা.'১৩]

সমাধান : প্রদত্ত অসমতাগুলোর অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$x + y = 5 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1 \ldots \ldots$(i), $x + 2y = 8 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1 \ldots \ldots$ (ii)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ABC ত্রিভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।



এখানে, A(0,4), (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু B(2, 3) এবং C(0 , 5) ।

এখন, A(0,4) বিন্দুতে $z = 2\times 0 - 4 = -4$

B(2, 3) বিন্দুতে $z = 2\times 2 - 3 = 1$,

C(0 , 5) বিন্দুতে $z = 2\times 0 - 5 = -5$.

$\therefore$ C(0,5) বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বনিম্ন মান = –5.

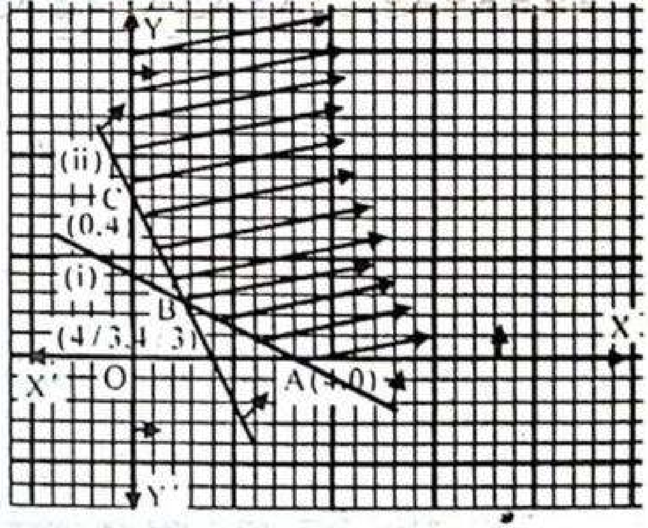
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান x = 0, y = 5 এবং $Z_{min} = -5$.

3(b) $z = 3x + 2y$, সীমাবদ্ধতা: $x + 2y \geq 4$, $2x + y \geq 4$, $x , y \geq 0$. **[চ.'১০]**

সমাধান : প্রদত্ত অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $x + 2y = 4 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \cdots$ (i).

$2x + y = 4 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \cdots$ (ii) এবং $x = 0, y = 0$.

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহু দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



AB ও BC রেখাদ্বয়ের উপরস্থ ও তাদের ডানপার্শ্বস্থ বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে বিধায় ঐ অঞ্চলটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(4,0), (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু $B(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ এবং C(0 , 4) ।

এখন, A(2,0) বিন্দুতে $z = 3\times 4 + 2\times 0 = 12$,

$B(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ বিন্দুতে $z = 3\times \frac{4}{3} + 2\times \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$,

C(0 , 4) বিন্দুতে $z = 3\times 0 + 2\times 4 = 8$

$\therefore$ $B(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বনিম্ন মান $= \frac{20}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{4}{3}$ এবং $Z_{min} = 4$.

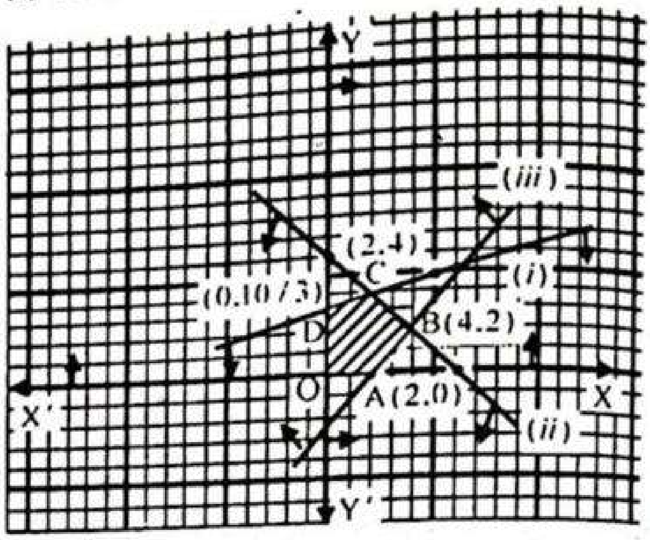
3(c) $z = 2y - x$, সীমাবদ্ধতা: $3y - x \leq 10$, $x + y \leq 6$, $x - y \leq 2$, $x , y \geq 0$.

[ব.'০৮; চ.'০৬,'১০; ঢা., রা., য.'০৭; ঢা.'১০; সি.'১২; কু.,য.'১৩]

সমাধান: প্রদত্ত অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $3y - x = 10 \cdots \cdots$(i) ; যা (2,4),(5, 5) বিন্দুগামী।

$x + y = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \cdots \cdots$ (ii), $x - y = 2 \cdots$ (iii) ; যা (3,1),(2, 0) বিন্দুগামী।

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) , (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



OABCD বহুভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(2,0) , $x + y = 6$ ও $x - y = 2$ এর ছেদবিন্দু B(4,2), $3y - x = 10$ ও $x + y = 6$ এর ছেদবিন্দু C(2,4) এবং D(0,10/3)।

O(0,0) বিন্দুতে $z = -0 + 2 \times 0 = 0$.

A(2,0) বিন্দুতে $z = -2 + 2 \times 0 = -2$, B(4,2) বিন্দুতে $z = -4 + 2 \times 2 = 0$.

C(2,4) বিন্দুতে $z = -2 + 2 \times 4 = 6$, D(0,10/3) বিন্দুতে $z = -0 + 10/3 = 10/3$

$\therefore$ A(2,0) বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বনিম্ন মান = − 2.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 2, y = 0, Z_{min} = -2$

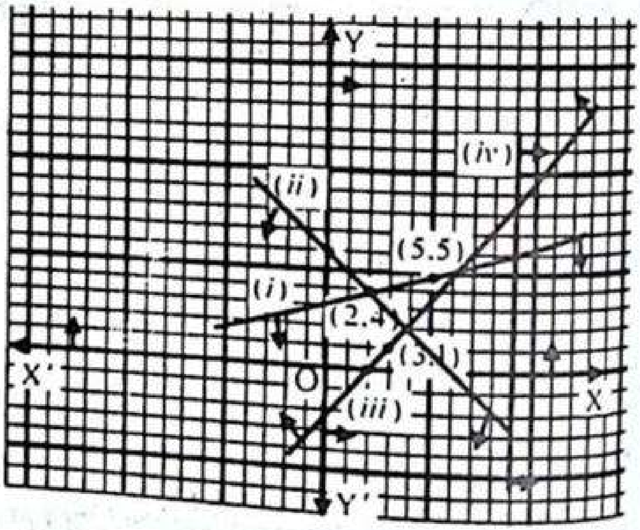
3(d) $z = -x + 2y$, সীমাবদ্ধতা : $-x + 3y \leq 10, x + y \leq 6, x - y \leq 2, x \geq 9, y \geq 0$. [ঢা.'০৩; দি.'১২]

সমাধান : প্রদত্ত অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$3y - x = 10 \cdots \cdots$(i) ; যা (2,4),(5, 5) বিন্দুগামী,

$x + y = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \cdots$(ii), $x - y = 2 \cdots$ (iii) ; যা (3,1),(2, 0) বিন্দুগামী, $x = 2 \cdots$(iv)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) , (ii) , (iii) ও (iv) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



চিত্র হতে স্পষ্ট যে, সমাধানের এমন কোন এলাকা নেই যার বিন্দুসেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, প্রদত্ত যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের কোন সমাধান নেই এবং এর সর্বনিম্নকরণ সম্ভব নয়।

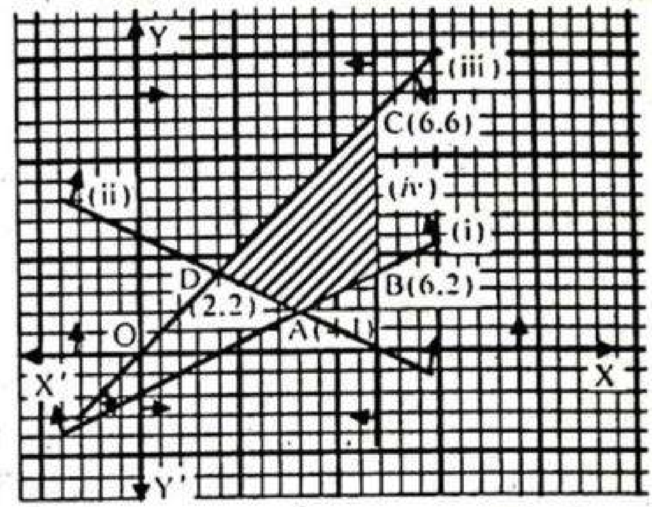
3(e) $z = 3x + 5y$, সীমাবদ্ধতা : $x \leq 2y + 2, x \geq 6 - 2y, y \leq x , x \leq 6$. [সি.'০২]

সমাধান : প্রদত্ত অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$x = 2y + 2 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1 \cdots$(i), $x = 6 - 2y \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \cdots$(ii), $y = x \cdots$(iii), যা (0,0),(2, 2) বিন্দুগামী এবং $x = 6 \cdots$ (iv)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) , (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ABCD চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।



এখানে, $x = 2y + 2$ ও $x = 6 - 2y$ এর ছেদবিন্দু $A(4,1)$. $x = 2y + 2$ ও $x = 6$ এর ছেদবিন্দু $B(6,2)$. $x = 6$ ও $y = x$ এর ছেদবিন্দু $C(6,6)$ এবং $y = x$ ও $x = 6 - 2y$ এর ছেদবিন্দু $D(2,2)$।

$A(4,1)$ বিন্দুতে $z = 3\times4 + 5\times1 = 17$,

$B(6,2)$ বিন্দুতে $z = 3\times6 + 5\times2 = 28$,

$C(6,6)$ বিন্দুতে $z = 3\times6 + 5\times6 = 48$

এবং $D(2 . 2)$ বিন্দুতে $z = 3\times2 + 5\times2 = 16$

$\therefore$ $D(2 . 2)$ বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান $= 16$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 2, y = 2$ এবং $Z_{min} = 16$.

4. (a) একজন ফল বিক্রেতা আম ও পেয়ারা বিক্রি করেন। প্রতি ঝুড়ি আম ও পেয়ারার মূল্য যথাক্রমে 50 টাকা ও 25 টাকা। ঐ বিক্রেতা তার দোকানে 12টির বেশি ঝুড়ি রাখতে পারেন না । প্রতি ঝুড়ি আম ও পেয়ারা বিক্রয়ে লাভ যথাক্রমে 10 টাকা ও 6 টাকা হলে 500 টাকা মূলধন ব্যয়ে কত ঝুড়ি আম ও পেয়ারা ক্রয় করলে ঐ বিক্রেতা সর্বোচ্চ লাভ করতে পারবেন? [ব.'০১; য.'০২; সি.'০৪,'০৭; কু.'০৬; রা.'১০,'১৩]

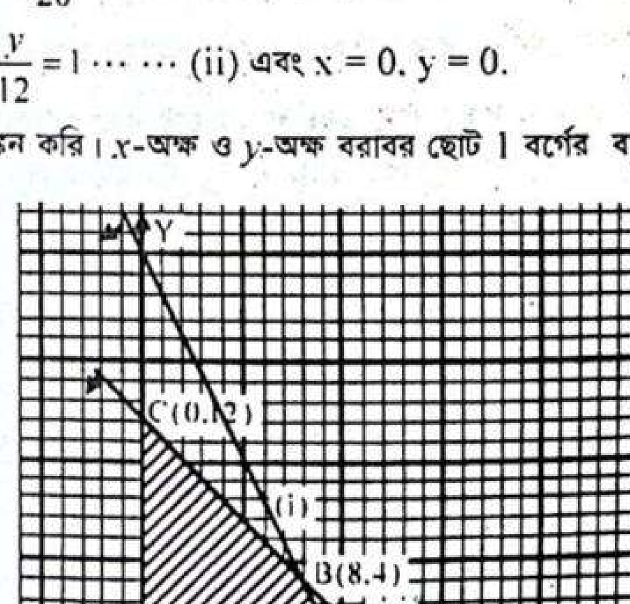
সমাধান : মনে করি, ফল বিক্রেতা x ঝুড়ি আম এবং y ঝুড়ি পেয়ারা কিনলে সর্বোচ্চ লাভ করতে পারবেন।
তাহলে, অভিষ্ট ফাংশন $z = 10x + 6y$.

শর্ত ঃ (মোট খরচ) $50x + 25y \le 500 \Rightarrow 2x + y \le 20$. (ঝুড়ির সংখ্যা) $x + y \le 12$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

অসমতাগুলোর অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $2x + y = 20 \Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{20} = 1 \cdots$ (i)

$$x + y = 12 \Rightarrow \frac{x}{12} + \frac{y}{12} = 1 \cdots\cdots \text{(ii) এবং } x = 0, y = 0.$$

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহু দৈর্ঘ্যের $=1$ একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, $A(10.0)$. (i) ও (iii) এর ছেদবিন্দু $B(8.4)$ এবং $C(0.12)$।

$A(10,0)$ বিন্দুতে $z = 10\times10 + 6\times0 = 100$,

$B(8,4)$ বিন্দুতে $z = 10\times8 + 6\times4 = 104$,

$C(0.12)$ বিন্দুতে $z = 10\times0 + 6\times12 = 72$

$\therefore$ $B(8,4)$ বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান $= 104$.

$\therefore$ ফল বিক্রেতা 8 ঝুড়ি আম ও 4 ঝুড়ি পেয়ারা ক্রয় করবেন।

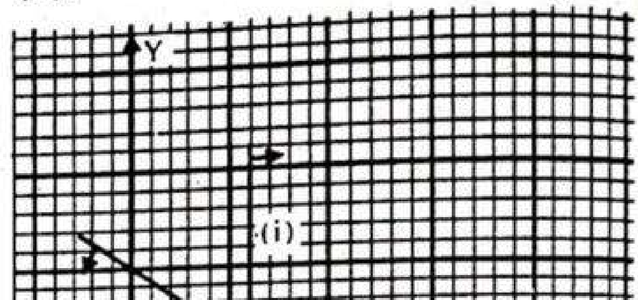
4(b) এক ব্যক্তি তাঁর বাগানে কমপক্ষে 12 টি নারকেলের চারা এবং 8 টি আমের চারা লাগাতে চান। প্রতিটি নারকেলের চারা ও আমের চারার মূল্য যথাক্রমে 20 টাকা এবং 30 টাকা । ঐ ব্যক্তি 600 টাকার বেশী ব্যয় না করে প্রত্যেক প্রকারের কতগুলি চারা কিনতে পারেন যাতে মোট চারার সংখ্যা সর্বাধিক হয়? [দি.'১০]

সমাধান : মনে করি, তিনি x সংখ্যক নারকেলের চারা এবং y সংখ্যক আমের চারা লাগালে একত্রে সর্বাধিক সংখ্যক চারা লাগাতে পারবেন । তাহলে, অভিষ্ট ফাংশন $z = x + y$.

শর্ত ঃ (নারকেলের চারা) $x \geq 12$, (আমের চারা) $y \geq 8$. (মোট খরচ) $20x + 30y \leq 600 \Rightarrow 2x + 3y \leq 60$

অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $x = 12 \cdots$(i), $y = 8 \cdots$(ii).

$2x + 3y = 60 \Rightarrow \frac{x}{30} + \frac{y}{20} = 1 \cdots$ (iii)



একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহু দৈর্ঘ্য = 2 একক ধরে (i), (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ABC ত্রিভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, $x = 12$ ও $y = 8$ এর ছেদবিন্দু A(12,8).
$y = 8$ ও $2x + 3y = 60$ এর ছেদবিন্দু B(18,8) এবং
$x = 12$ ও $2x + 3y = 60$ এর ছেদবিন্দু C(12,12)।

A(12,8) বিন্দুতে $z = 12 + 8 = 20$. B(18,8) বিন্দুতে $z = 18 + 8 = 26$.

C(12,12) বিন্দুতে $z = 12 + 12 = 24$

$\therefore$ B(18,8) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান = 26 .

$\therefore$ তিনি 18 টি নারকেলের চারা ও 8 টি আমের চারা লাগাতে করবেন।

4(c) একজন কৃষক ধান এবং গমের চাষ করতে গিয়ে দেখলেন যে, প্রতি হেক্টর জমিতে ধান ও গম চাষের খরচ যথাক্রমে 1200 টাকা এবং 800 টাকা। প্রতি হেক্টর জমিতে ধান ও গম চাষের জন্য যথাক্রমে 4 জন ও 6 জন শ্রমিকের প্রয়োজন হয়। সর্বাধিক 26 জন শ্রমিক নিয়োগ করে এবং 4800 টাকা বিনিয়োগ করে সর্বোচ্চ কত হেক্টর জমি তিনি চাষ করতে পারবেন? [সি.'০২]

সমাধানঃ মনে করি, কৃষক x হেক্টর জমিতে ধান এবং y হেক্টর জমিতে গম চাষ করলে একত্রে সর্বোচ্চ পরিমান জমিতে চাষ করতে পারবেন । তাহলে, অভিষ্ট ফাংশন $z = x + y$.

শর্ত ঃ (মোট খরচ) $1200x + 800y \leq 4800 \Rightarrow 3x + 2y \leq 12$.

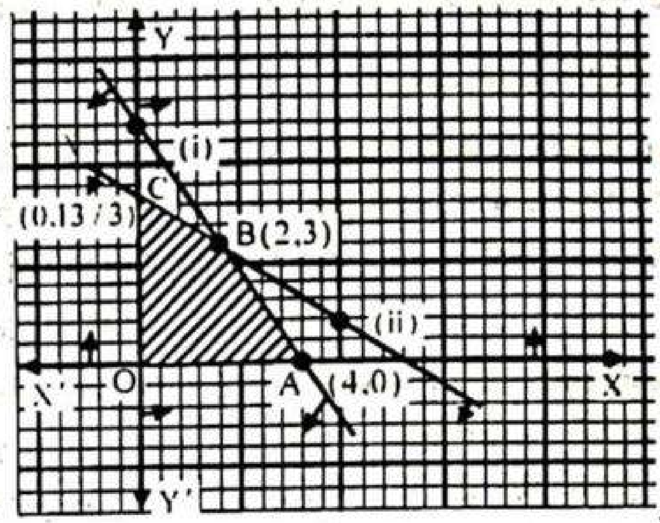
(মোট শ্রমিক) $4x + 6y \leq 26 \Rightarrow 2x + 3y \leq 13$ এবং $x \geq 0$, $y \geq 0$.

অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $3x + 2y = 12$

$\Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \cdots$(i), $2x + 3y = 13 \cdots$(ii), যা (5,1), (2, 3) বিন্দুগামী, এবং $x = 0$, $y = 0$.

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i), (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।



এখানে, A(4,0), (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু B(2,3) এবং C(0,13/3)।

O(0,0) বিন্দুতে z = 0 + 0 = 0,

A(4,0) বিন্দুতে z = 4 + 0 = 4,

B(2,3) বিন্দুতে z = 2 + 3 = 5,

C(0,13/3) বিন্দুতে z = 0 + 13/3 = 13/3

∴ B(2,3) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান = 5 .

∴ তিনি সর্বোচ্চ 5 হেক্টর জমিতে চাষ করতে পারবেন ।

4(d) একটি ফার্ম A এবং B দুইটি মেশিনের সাহায্যে চেয়ার ও টেবিল দুইটি পণ্য তৈরি করে। A মেশিনে 60 ঘন্টা এবং B মেশিনে 48 ঘন্টা পর্যন্ত কাজ করতে সক্ষম। একটি চেয়ার তৈরি করতে A মেশিনে 2 ঘন্টা এবং B মেশিনে 4 ঘন্টা সময় লাগে। একটি টেবিল তৈরি করতে A মেশিনে 4 ঘন্টা এবং B মেশিনে 2 ঘন্টা সময় লাগে। টেবিল প্রতি 8 টাকা এবং চেয়ার প্রতি 6 টাকা মুনাফা হলে সর্বাধিক মুনাফা পাবার জন্য কয়টি চেয়ার এবং কয়টি টেবিল তৈরি করতে হবে? [য.০০,'১০]

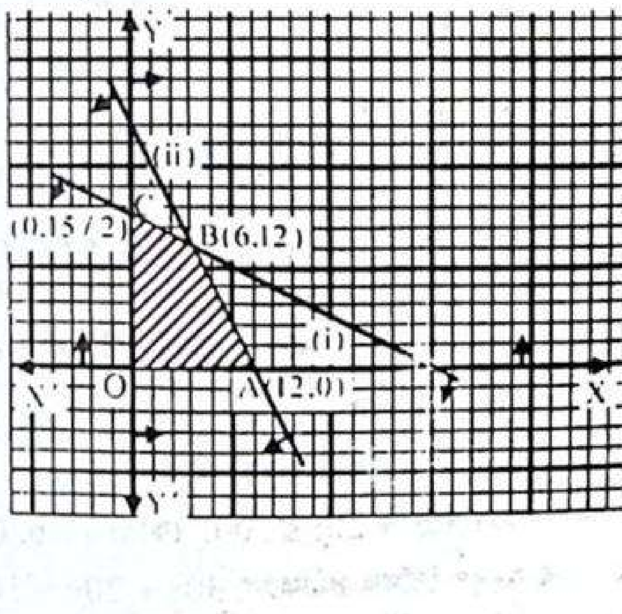
Sol^n. : মনে করি, সর্বাধিক মুনাফা পাবার জন্য x সংখ্যক চেয়ার এবং y সংখ্যক টেবিল তৈরি করতে হবে।

তাহলে, অভিষ্ট ফাংশন $z = 6x + 8y$.

শর্ত ঃ (A মেশিনের জন্য) $2x + 4y \le 60 \Rightarrow x + 2y \le 30$. (B মেশিনের জন্য) $4x + 2y \le 48 \Rightarrow 2x + y \le 24$ এবং $x \ge 0, y \ge 0$.

অসমতাগুলোর অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $x + 2y = 30 \Rightarrow \frac{x}{30} + \frac{y}{15} = 1 \cdots$(i).

$2x + y = 24 \Rightarrow \frac{x}{12} + \frac{y}{24} = 1 \cdots$(ii) এবং $x = 0, y = 0$.



একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট ১বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 একক ধরে (i), (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(12,0), (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু B(6,12) এবং C(0,15/2)।

O(0,0) বিন্দুতে $z = 6 \times 0 + 8 \times 0 = 0$.

A(12,0) বিন্দুতে $z = 6 \times 12 + 8 \times 0 = 72$. B(6,12) বিন্দুতে $z = 6 \times 6 + 8 \times 12 = 132$.

$C(0, \frac{15}{2})$ বিন্দুতে $z = 6 \times 0 + 8 \times \frac{15}{2} = 60$ $\therefore$ $B(6.12)$ বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান = 132 .

$\therefore$ সর্বাধিক মুনাফা পাবার জন্য 6টি চেয়ার এবং 12টি টেবিল তৈরি করতে হবে।

4(e) **একজন ব্যবসায়ী তার দোকানের জন্য রেডিও ও টিলিভিশন মিলে 100 টি সেট কিনতে পারেন। রেডিও সেট ও টেলিভিশন সেট প্রতিটির ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 40 ও 120 ডলার । প্রতি রেডিও ও টেলিভিশন সেটে লাভ যথাক্রমে 16 ও 32 ডলার। সর্বোচ্চ 10400 ডলার বিনিয়োগ করে তিনি সর্বোচ্চ কত লাভ করতে পারেন?**

[রা.'০৪;ব.'০৭,'১১; কু.'১০; সি.'১২; ঢা.'১৩; চুয়েট,'০৭-০৮; কুয়েট'০৮-০৯]

সমাধান: মনে করি, সর্বোচ্চ লাভ করার জন্য x সংখ্যক রেডিও এবং y সংখ্যক টিলিভিশন সেট কিনতে হবে। তাহলে, অভিষ্ট ফাংশন $z = 16x + 32y$.

শর্ত : (মোট সেট) $x + y \le 100$. (মোট খরচ) $40x + 120y \le 10400 \Rightarrow x + 3y \le 260$ এবং $x \ge 0$. $y \ge 0$.

অসমতাগুলোর অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ. $x + y = 100 \Rightarrow \frac{x}{100} + \frac{y}{100} = 1 \cdots (i)$.

$x + 3y = 260 \cdots\cdots (ii)$, যা (20.80). (50. 70) বিন্দুগামী, এবং $x = 0$. $y = 0$.

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 10 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 10একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

OABC চতুর্ভূজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(100.0). (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু B(20.80) এবং C(0. 260/3)।

O(0.0) বিন্দুতে $z = 16 \times 0 + 32 \times 0 = 0$.

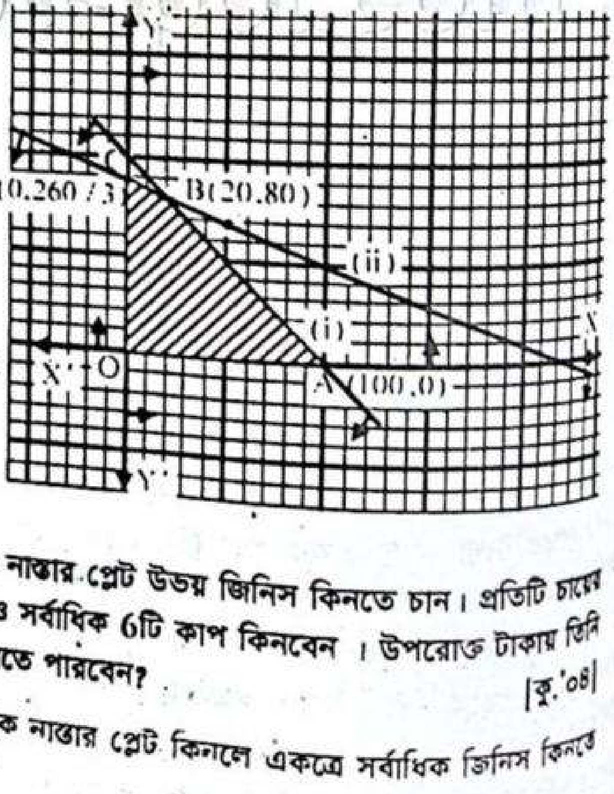
A(100.0) বিন্দুতে $z = 16 \times 100 + 32 \times 0 = 1600$.

B(20.80) বিন্দুতে $z = 16 \times 20 + 32 \times 80 = 2880$.

$C(0, \frac{260}{3})$ বিন্দুতে $z = 16 \times 0 + 32 \times \frac{260}{3} = 2773\frac{1}{3}$

$\therefore$ B(20.80) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান = 2880 .

$\therefore$ ঐ ব্যবসায়ী সর্বোচ্চ 2880 ডলার লাভ করতে পারেন।



4(f) **একটি লোক সর্বাধিক 500 টাকা ব্যয় করে চায়ের কাপ ও নাস্তার প্লেট উভয় জিনিস কিনতে চান। প্রতিটি চায়ের কাপ 30 টাকা ও প্লেটের দাম 20 টাকা। তিনি অন্তত 3 টি প্লেট ও সর্বাধিক 6টি কাপ কিনবেন । উপরোক্ত টাকায় তিনি কোন্ প্রকারের কতগুলি জিনিস কিনলে একত্রে সর্বাধিক জিনিস কিনতে পারবেন?**

[কু.'০৪]

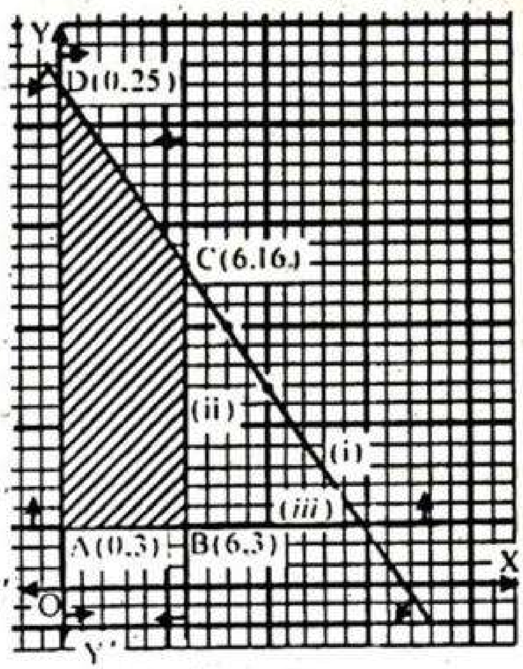
সমাধান : মনে করি, লোকটি x সংখ্যক চায়ের কাপ এবং y সংখ্যক নাস্তার প্লেট কিনলে একত্রে সর্বাধিক জিনিস কিনতে পারবেন। তাহলে, অভিষ্ট ফাংশন $z = x + y$.

শর্ত : (মোট খরচ) $30x + 20y \le 500$. (কাপ) $x \le 6$. (প্লেট) $y \ge 3$. এবং $x \ge 0$.

অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ. $30x + 20y = 500 \cdots (i)$. যা (10. 10). (8. 13) বিন্দুগামী,

$x = 6 \cdots \cdots (ii)$. $y = 3 \cdots \cdots (iii)$ এবং $x = 0$.

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i), (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



ABCD চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব,এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(0.3). $x = 6$ ও $y = 3$ এর ছেদবিন্দু B(6.3). $x = 6$ ও $30x + 20y = 500$ এর ছেদবিন্দু C(6.16) এবং D(0.25).

A(0.3) বিন্দুতে $z = 0 + 3 = 3$.

B(6. 3) বিন্দুতে $z = 6 + 3 = 9$.

C(6.16) বিন্দুতে, $z = 6 + 16 = 22$.

D(0.25) বিন্দুতে $z = 0 + 25 = 25$

$\therefore$ D(0,25) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান = 25 .

কিন্তু লোকটি উভয় প্রকার জিনিস কিনতে চান। এক্ষেত্রে, C(6.16) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান = 22.

$\therefore$ লোকটি 6 টি কাপ 16 টি প্লেট কিনতে পারবেন।

4(g) এক ব্যক্তি **1200** টাকা দিয়ে রুই ও কাতল উভয় মাছের পোনা কিনতে চান। **100** রুই মাছের পোনার দাম **60** টাকা এবং **100** কাতল মাছের পোনার দাম 30 টাকা হলে, তিনি কোন্ মাছের কত পোনা কিনতে পারবেন যার মোট সংখ্যা সর্বাধিক **3000** হবে। [ঢা.'০১,'০৫; রা.'০৬; সি.'০৬]

সমাধান : মনে করি, লোকটি x সংখ্যক রুই মাছের পোনা এবং y সংখ্যক কাতল মাছের পোনা কিনতে পারবেন।

তাহলে, অভিষ্ট ফাংশন $z = x + y$.

শর্ত ঃ (মোট খরচ) $\frac{60x}{100} + \frac{30y}{100} \leq 1200 \Rightarrow 6x + 3y \leq 12000 \Rightarrow 2x + y \leq 4000$.

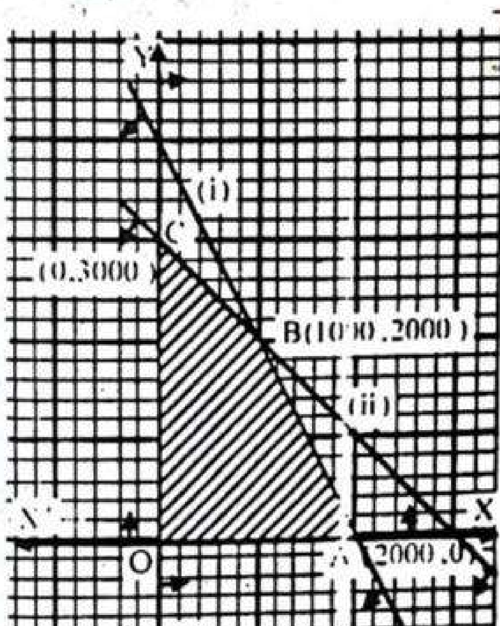
(মাছের মোট সংখ্যা) $x + y \leq 3000,\ x \geq 0.\ y \geq 0$.

অসমতাগুলোর অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $2x + y = 4000$

$$\Rightarrow \frac{x}{2000} + \frac{y}{4000} = 1 \cdots (i)$$

$$x + y = 3000 \Rightarrow \frac{x}{3000} + \frac{y}{3000} = 1 \cdots\cdots (ii).$$

$y = 3\cdots\cdots(iii)$ এবং $x = 0.\ y = 0$.



একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 200 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব,এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(2000.0). (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু B(1000.2000) এবং C(0.3000).

O(0,0) বিন্দুতে, $Z = 0 + 0 = 0$, A(2000,0) বিন্দুতে, $z = 2000 + 0 = 2000$.
B(1000,2000) বিন্দুতে $z = 1000 + 2000 = 3000$. C(0,3000) বিন্দুতে, $z = 0 + 3000 = 3000$.

$\therefore$ B(1000,2000) ও C(0,3000) বিন্দুতে z এর সর্বাধিক মান= 3000

কিন্তু ঐ ব্যক্তি উভয় মাছের পোনা কিনতে চান।

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তাধীনে ঐ ব্যক্তি 1000 টি রুই এবং 2000 টি কাতল মাছের পোনার কিনতে পারেন।

4(h) এক ব্যক্তি 500 টাকার মধ্যে কমপক্ষে 6 খানা গামছা এবং 4 খানা তোয়ালে কিনতে চান। প্রতিখানা গামছার দাম 30 টাকা এবং প্রতিখানা তোয়ালের দাম 40 টাকা। প্রত্যেক প্রকারের কতখানা জিনিস কিনলে সে প্রদত্ত শর্তাধীনে সর্বাপেক্ষা বেশি সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবেন? [কু.'১০,'১২; চ.'০২,'০৮; সি.'০৪,'০৭,'১০; দি.'১০,'১৩; য.'১২]

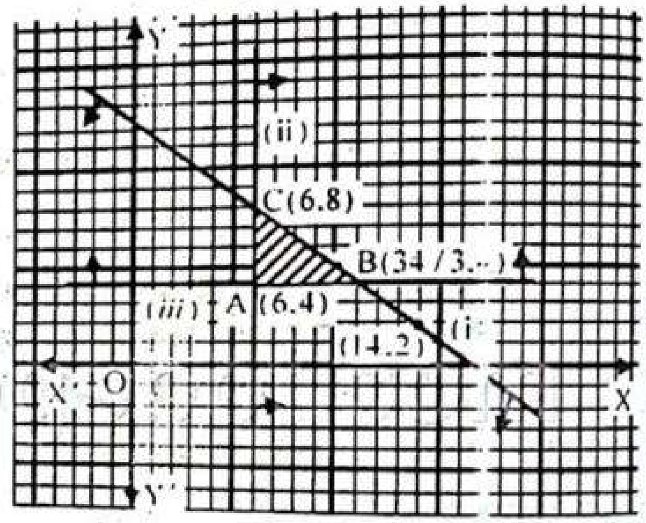
সমাধান : মনে করি, ঐ ব্যক্তি x খানা গামছা এবং y খানা তোয়ালে কিনলে সর্বাপেক্ষা বেশি সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবেন। তাহলে, অভিষ্ট ফাংশন $z = x + y$.

শর্ত ঃ (মোট খরচ) $30x + 40y \le 500 \Rightarrow 3x + 4y \le 50$.

(গামছা) $x \ge 6$, (তোয়ালে) $y \ge 4$.

অসমতাগুলোর অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $3x + 4y = 50 \cdots$(i), যা (14,2), (10, 5) বিন্দুগামী, $x = 6 \cdots \cdots$(ii) এবং $y = 4 \cdots \cdots$(iii).

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহু দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i), (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



ABC ত্রিভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, ঐ ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, $x = 6$ ও $y = 4$ এর ছেদবিন্দু A(6,4), $y = 4$ ও $3x + 4y = 50$ এর ছেদবিন্দু B(34/3, 4) এবং $x = 6$ ও $3x + 4y = 50$ এর ছেদবিন্দু C(6, 8)।

A(6,4) বিন্দুতে $z = 6 + 4 = 10$, B($\frac{34}{3}$,4) বিন্দুতে $z = \frac{34}{3} + 4 = 15\frac{1}{3}$.

C(6, 8) বিন্দুতে $z = 6 + 8 = 14$

$\therefore$ B($\frac{34}{3}$,4) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান $= 15\frac{1}{3}$, যা একটি ভগ্নাংশ। কিন্তু জিনিসের সংখ্যা ভগ্নাংশ হতে পারেনা।

তবে (i) রেখাংস্থ (10, 5) এবং (iii) রেখাংস্থ (11, 4) বিন্দুদ্বয় প্রদত্ত শর্তসমূহকে সিদ্ধ করে এবং বিন্দুদ্বয়ে z এর দ্বিতীয় সর্বোচ্চ মান = 15.

$\therefore$ ঐ ব্যক্তি 10 খানা গামছা ও 5 খানা তোয়ালে অথবা সর্বোচ্চ 11 খানা গামছা ও 4 খানা তোয়ালে কিনতে পারেন।

4(i) একজন ফেরিওয়ালা দৈনিক দুই প্রকারের মোট 500 রসগোল্লা কিনতে পারেন। বড় ও ছোট আকারের রসগোল্লার ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 3 টাকা ও 1 টাকা। প্রতিটি বড় রসগোল্লায় লাভ ছোট রসগোল্লার লাভের দ্বিগুণ হলে 1100 টাকা বিনিয়োগ করে সর্বোচ্চ লাভের জন্য তিনি কোন্ প্রকারের কতটি রসগোল্লা কিনবেন?

সমাধান : মনে করি, ঐ ফেরিওয়ালা সর্বোচ্চ লাভের জন্য x সংখ্যক বড় এবং y সংখ্যক ছোট রসগোল্লা কিনবেন।

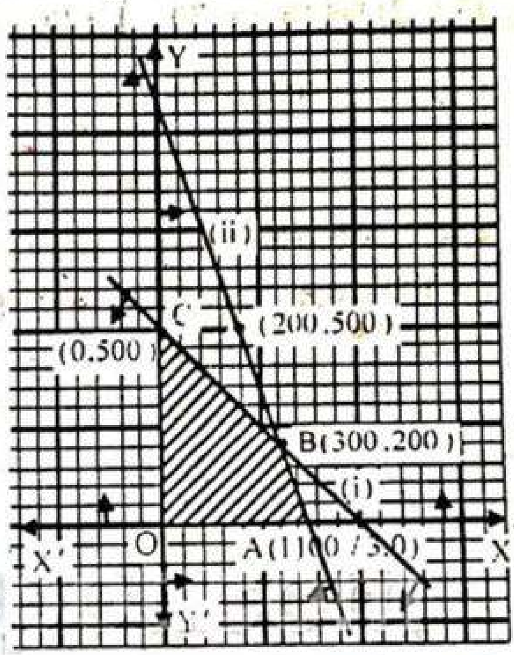
প্রতিটি ছোট রসগোল্লায় লাভ m টাকা হলে অভিষ্ট ফাংশন $z = 2mx + my$.

শর্ত ঃ (মোট রসগোল্লা) $x + y \le 500$, (মোট খরচ) $3x + y \le 1100$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $x + y = 500 \Rightarrow \frac{x}{500} + \frac{y}{500} = 1 \cdots$(i)

$3x + y = 1100$, যা (300, 200), (200, 500) বিন্দুগামী।

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 50 একক ধরে (i) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, $A(\frac{1100}{3}, 0)$, (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু B(300, 200) এবং C(0, 500)।

O(0,0) বিন্দুতে $z = 2m \times 0 + m \times 0 = 0$.

$A(\frac{1100}{3}, 0)$ বিন্দুতে $z = 2m \times \frac{1100}{3} + m \times 0 = 733 \cdot 33m$.

B(300, 200) বিন্দুতে $z = 2m \times 300 + m \times 200 = 800m$.

C(0, 500) বিন্দুতে $z = 2m \times 0 + m \times 500 = 500m$

$\therefore$ B(300, 200) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান = 800m

$\therefore$ ঐ ফেরিওয়ালা 300 টি বড় ও 200 টি ছোট রসগোল্লা কিনতে পারেন।

5. (a) X ও Y প্রকারের খাদ্যের প্রতি কেজিতে প্রোটিন ও শ্বেতসার এর পরিমাণ ও তাদের মূল্য নিম্নের চার্টে দেওয়া হল। সবচেয়ে কম খরচে কিরূপে দৈনিক ন্যূনতম খাদ্যের প্রয়োজন মেটানো সম্ভব? [কু.'০৩,'১৩; দি.'১১]

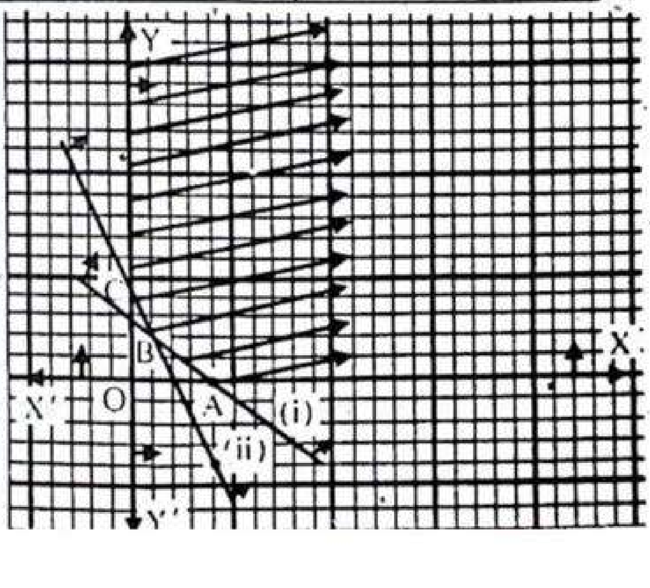
খাদ্যের নাম	প্রতি কেজিতে প্রোটিন	প্রতি কেজিতে শ্বেতসার	প্রতি কেজির মূল্য
X	8	10	70 টাকা
Y	12	6	90 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	32	22	

সমাধান : মনে করি, x কেজি X খাদ্য এবং y কেজি Y খাদ্য প্রয়োজন। তাহলে, মোট খরচ $z = 70x + 90y$

সীমাবদ্ধতা ঃ (প্রোটিন) $8x + 12y \ge 32$, (শ্বেতসার) $10x + 6y \ge 22$ এবং $x \ge 0$, $y \ge 0$.

অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $8x + 12y = 32 \cdots\cdots$ (i), যা (4, 0), (1, 2) বিন্দুগামী,

$10x + 6y = 22 \cdots \cdots$ (ii), যা (1,2) ও (4, −3) বিন্দুগামী এবং $x = 0$, $y = 0$.



একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

AB ও BC রেখাংশদ্বয়ের উপরস্থ ও তাদের ডানপার্শ্বস্থ বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে বিধায় ঐ অঞ্চলটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(4,0), (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু B(1,2) এবং C(0 , 11/3) ।

এখন, A(4,0) বিন্দুতে $z = 70\times 4 + 90\times 0 = 280$,

B(1, 2) বিন্দুতে $z = 70\times 1 + 90\times 2 = 250$,

$C(0 , \frac{11}{3})$ বিন্দুতে $z = 70\times 0 + 90\times \frac{11}{3} = 330$

∴ সবচেয়ে কম খরচ 250 টাকা। সুতরাং 1 কেজি X খাদ্য এবং 2 কেজি Y খাদ্য প্রয়োজন।

5(b) একটি পানীয় তৈরির কারখানায় দুইটি শাখা **I** এবং **II** এরা উভয়েই **A** , **B** এবং **C** তিন ধরনের পানীয় বোতলজাত করে। শাখা দুইটির দৈনিক উৎপাদন ক্ষমতা নিম্নরূপ:

শাখা	A	B	C	দৈনিক ব্যয়
I	3000	1000	2000	600 টাকা
II	1000	1000	6000	400 টাকা
মাসিক চাহিদা	24000	16000	48000	

মাসে কোন শাখা কতদিন চালু রাখলে তা সর্বনিম্ন কার্য পরিচালনা ব্যয়ে পানীয়ের মাসিক চাহিদা পূরণ করতে পারবে? সর্বনিম্ন ব্যয় কত? [য.'০১,'১৩]

সমাধানঃ মনে করি, শাখা -I মাসে x দিন, শাখা–II মাসে y দিন চালু রাখতে হয়। তাহলে,

মোট খরচ $z = 600x + 400y$

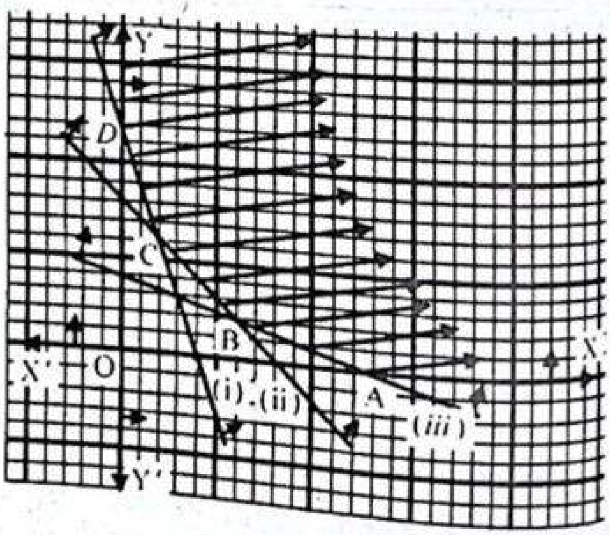
সীমাবদ্ধতা ঃ (A পানীয়) $3000x + 1000y \geq 24000$

$\Rightarrow 3x + y \geq 24$,

(B পানীয়) $1000x + 1000y \geq 16000 \Rightarrow x + y \geq 16$,

(C পানীয়) $2000x + 6000y \geq 48000 \Rightarrow x + 3y \geq 24$

এবং $x \geq 0, y \geq 0$.



অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $3x + y = 24$

$\Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{24} = 1 \cdots$(i), $x + y = 16 \Rightarrow \frac{x}{16} + \frac{y}{16} = 1 \cdots$(ii),

$x + 3y = 24 \Rightarrow \frac{x}{24} + \frac{y}{8} = 1 \cdots$(iii) এবং $x = 0$, $y = 0$.

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 একক ধরে (i),(ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

AB, BC ও CD রেখাংশত্রয়ের উপরস্থ ও তাদের ডানপার্শ্বস্থ বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে বিধায় ঐ অঞ্চলটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(24,0), (ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু B(12,4), (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু C(4,12) এবং D(0,24)।

A(24,0) বিন্দুতে $z = 600 \times 24 + 400 \times 0 = 14400$. B(12,4) বিন্দুতে $z = 600 \times 12 + 400 \times 4 = 8800$.

C(4,12) বিন্দুতে $z = 600 \times 4 + 400 \times 12 = 7200$. D(0, 24) বিন্দুতে $z = 600 \times 0 + 400 \times 24 = 9600$

$\therefore$ সবচেয়ে কম খরচ 7200 টাকা। সুতরাং শাখা -I মাসে 4 দিন, শাখা-II মাসে 12 দিন।

5(c) এক ব্যক্তি **X** ও **Y** দুই রকমের খাদ্য গ্রহণ করে। তিন ধরনের পুষ্টি N_1, N_2, N_3 এর পরিমাণ, খাদ্যের মূল্য ও পুষ্টির দৈনিক সর্বনিম্ন প্রয়োজন নিম্নরূপ :

	X	Y	দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন
দাম	1·00 টাকা	3·00 টাকা	
N_1	30	12	60
N_2	15	15	60
N_3	6	18	36

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সাহায্যে খাদ্যের এমন একটি সমন্বয় নির্ণয় কর যা সর্বনিম্ন খরচে ঐ ব্যক্তির দৈনিক প্রয়োজন মিটাবে। [সি.'০১; চ.'০৪]

সমাধান : মনে করি, x একক X খাদ্য এবং y একক Y খাদ্য প্রয়োজন। তাহলে, মোট খরচ $z = x + 3y$

সীমাবদ্ধতা ঃ (পুষ্টি N_1) $30x + 12y \geq 60 \Rightarrow 5x + 2y \geq 10$,

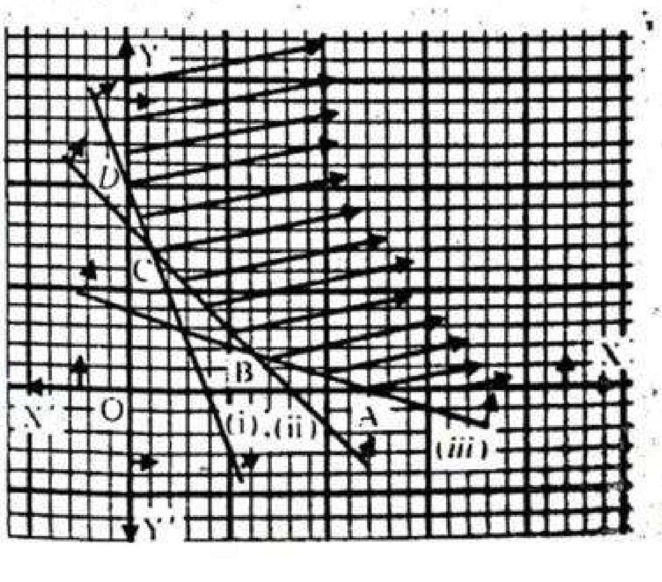
(পুষ্টি N_2) $15x + 15y \geq 60 \Rightarrow x + y \geq 4$,

(পুষ্টি N_3) $6x + 18y \geq 36 \Rightarrow x + 3y \geq 6$ এবং $x \geq 0, y \geq 0$.

অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $5x + 2y = 10 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1 \cdots\cdots$ (i).

$x + y = 4 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \cdots\cdots$ (ii), $x + 3y = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1 \cdots\cdots$ (iii) এবং $x = 0$, $y = 0$.

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i),(ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



AB, BC ও CD রেখাংশত্রয়ের উপরস্থ ও তাদের ডানপার্শ্বস্থ বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে বিধায় ঐ অঞ্চলটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(6,0), (ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু B(3,1), (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু C(2/3 , 10/3) এবং D(0 , 5)।

এখন, A(6,0) বিন্দুতে $z = 6 + 3 \times 0 = 6$.

B(3, 1) বিন্দুতে $z = 3 + 3 \times 1 = 6$.

$C(\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$ বিন্দুতে $z = \frac{2}{3} + 3 \times \frac{10}{3} = 10\frac{2}{3}$

A(6,0) ও B(3, 1) বিন্দুতে সবচেয়ে কম খরচ 6 একক। কিন্তু ঐ ব্যক্তি X ও Y দুই রকমের খাদ্য গ্রহণ করে।

∴ X প্রকারের 3 একক ও Y প্রকারের 1 একক দ্বারা সর্বনিম্ন খরচে ঐ ব্যক্তির দৈনিক প্রয়োজন মিটাবে।

5(d) নিম্নের প্রদত্ত তালিকা থেকে সমাধান বের কর এবং সর্বনিম্ন ব্যয়ে প্রয়োজনীয় পুষ্টি সমন্বিত খাদ্যের সর্বোৎকৃষ্ট সমন্বয় কর: [কু.'০১]

খাদ্যের প্রকৃতি	N_1	N_2	N_3	প্রতি এককের মূল্য
খাদ্য I	20	10	4	1.00 টাকা
খাদ্য II	8	10	12	2.00 টাকা
ন্যূনতম প্রয়োজন	40	40	24	

সমাধান : মনে করি, x একক খাদ্য I এবং y একক খাদ্য II প্রয়োজন। তাহলে, মোট খরচ $z = x + 2y$

সীমাবদ্ধতা ঃ (পুষ্টি N_1) $20x + 8y \geq 40 \Rightarrow 5x + 2y \geq 10$.

(পুষ্টি N_2) $10x + 10y \geq 40 \Rightarrow x + y \geq 4$.

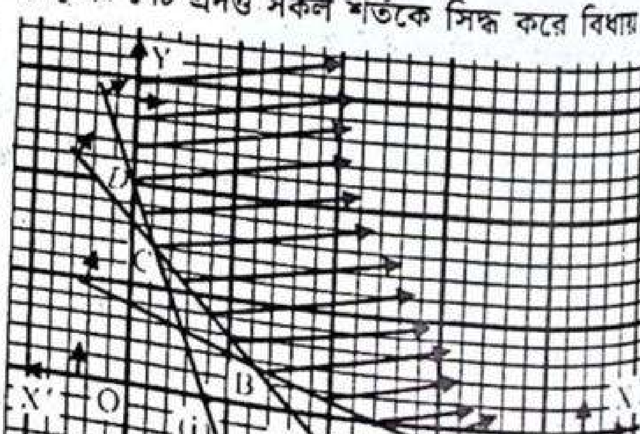
(পুষ্টি N_3) $4x + 12y \geq 24 \Rightarrow x + 3y \geq 6$ এবং $x \geq 0, y \geq 0$.

অসমতাগুলোর অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $5x + 2y = 10 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1 \cdots\cdots (i)$.

$x + y = 4 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \cdots\cdots (ii)$, $x + 3y = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1 \cdots\cdots (iii)$ এবং $x = 0, y = 0$.

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i),(ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

AB, BC ও CD রেখাংত্রয়ের উপরস্থ ও তাদের ডানপার্শ্বস্থ বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে বিধায় ঐ অঞ্চলটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।



এখানে, A(6,0), (ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু B(3,1), (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু C(2/3 , 10/3) এবং D(0 , 5)।

এখন, A(6,0) বিন্দুতে $z = 6 + 2 \times 0 = 6$.

B(3, 1) বিন্দুতে $z = 3 + 2 \times 1 = 5$.

$C(\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$ বিন্দুতে $z = \frac{2}{3} + 2 \times \frac{10}{3} = 7\frac{1}{3}$

B(3, 1) বিন্দুতে সবচেয়ে কম খরচ 5 টাকা।

∴ 3 একক খাদ্য I, 1 খাদ্য II প্রয়োজন।

6 একজন কৃষক ধান এবং গমের চাষ করতে গিয়ে দেখলেন যে, প্রতি হেক্টর জমিতে ধান ও গম চাষের খরচ যথাক্রমে 1200 টাকা এবং 800 টাকা। প্রতি হেক্টর জমিতে ধান ও গম চাষের জন্য যথাক্রমে 4 জন ও 6 জন শ্রমিকের

প্রয়োজন হয়। সর্বাধিক 26 জন শ্রমিক নিয়োগ করে এবং 4800 টাকা বিনিয়োগ করে x হেক্টর জমিতে ধান এবং y হেক্টর জমিতে গম চাষ করে তিনি সর্বোচ্চ জমি চাষ করতে চান। নিম্নের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও।

(a) অভীষ্ট ফাংশন হবে -

A. $1200x + 800y$ B. $4x + 6y$ C. $4x + 6y \leq 12$ D. $x + y$.

(b) মোট খরচের শর্ত হবে –

A. $1200x + 800y < 4800$ B. $3x + 2y \leq 12$ C. $2x + 3y \leq 13$ D. $2x + 3y > 13$

(c) অশূন্য সীমবদ্ধতা কোনটি ?

A. $x \leq 0, y \leq 0$ B. $x \geq 0, y \leq 0$ C. $x \geq 0, y \geq 0$ D. $x = 0, y \leq 0$

উত্তর : (a) D (b) A (c) C

7. একজন ফেরিওয়ালা দৈনিক দুই প্রকারের মোট 500 রসগোল্লা কিনতে পারেন। বড় ও ছোট আকারের রসগোল্লার ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 3 টাকা ও 1 টাকা। প্রতিটি বড় রসগোল্লায় লাভ ছোট রসগোল্লার লাভের দ্বিগুণ। ঐ ফেরিওয়ালা সর্বোচ্চ লাভের জন্য 1100 টাকা বিনিয়োগ করে x সংখ্যক বড় এবং y সংখ্যক ছোট রসগোল্লা ক্রয় করেন।

(a) যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং কাকে বলে?

(b) যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটির সমস্যা গঠন কর।

(c) লেখচিত্রের সাহায্যে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটির সমস্যা সমাধান কর।

সমাধান : (b) যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটির সমস্যা গঠন :

মনে করি, ঐ ফেরিওয়ালা সর্বোচ্চ লাভের জন্য x সংখ্যক বড় এবং y সংখ্যক ছোট রসগোল্লা কিনবেন।

প্রতিটি ছোট রসগোল্লায় লাভ m টাকা হলে অভিষ্ট ফাংশন $z = 2mx + my$.

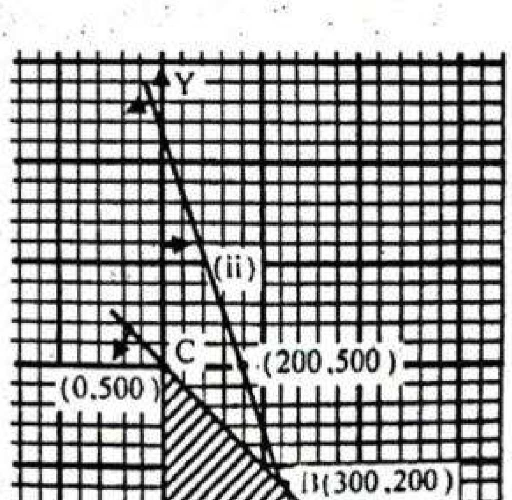
শর্ত ঃ (মোট রসগোল্লা) $x + y \leq 500$, (মোট খরচ) $3x + y \leq 1100$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

(c) লেখচিত্রের সাহায্যে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটির সমস্যা সমাধান :

অসমতাগুলোর অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $x + y = 500$

$$\Rightarrow \frac{x}{500} + \frac{y}{500} = 1 \cdots (i)$$

$3x + y = 1100$, যা (300, 200), (200, 500) বিন্দুগামী।



একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 50 একক ধরে (i) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, $A(\frac{1100}{3}, 0)$. (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু B(300, 200) এবং C(0, 500)।

O(0.0) বিন্দুতে $z = 2m \times 0 + m \times 0 = 0$.

$A(\frac{1100}{3}, 0)$ বিন্দুতে $z = 2m \times \frac{1100}{3} + m \times 0 = 733{\cdot}33m,$

$B(300, 200)$ বিন্দুতে $z = 2m \times 300 + m \times 200 = 800m,$

$C(0, 500)$ বিন্দুতে $z = 2m \times 0 + m \times 500 = 500m$

$\therefore$ $B(300, 200)$ বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান = 800m

$\therefore$ ঐ ফেরিওয়ালা 300 টি বড় ও 200 টি ছোট রসগোল্লা কিনতে পারেন।

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. $x + 4y \leq 80, 2x + 3y \leq 90, x \geq 0, y \geq 0$ শর্তাধীনে $z = 45x + 80y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।

পরীক্ষণ নং 1	তারিখ ঃ

পরীক্ষণের নাম : লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিমাত্রিক যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং এ অভীষ্ট ফাংশন $Z = 45x + 80y$ এর মান সর্বোচ্চকরণ।

শর্তাবলী : $x + 4y \leq 80$, $2x + 3y \leq 90$, $x \geq 0, y \geq 0.$

মূলতত্ত্ব ঃ প্রদত্ত অসমতা $x + 4y \leq 80$, $2x + 3y \leq 90$, $x \geq 0$ এবং $y \geq 0$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করে অনুকূল এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি। কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্কের মান বসিয়ে $Z = 45x + 80y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করি।

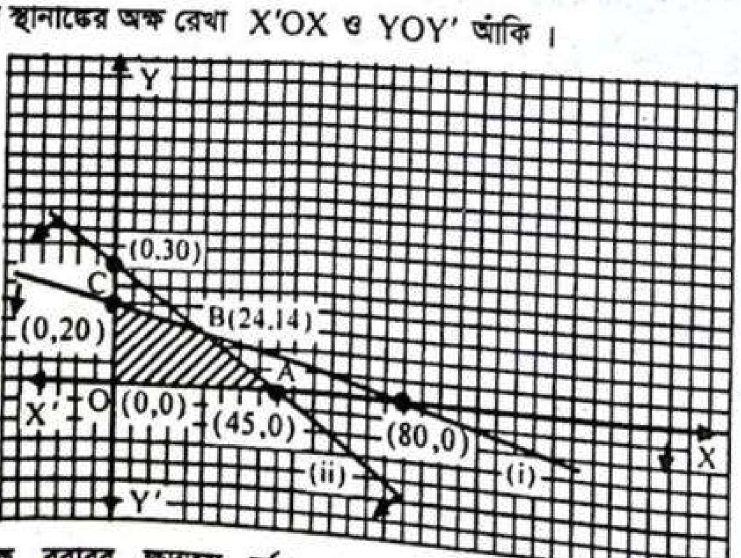
প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি :

1. অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ $x + 4y = 80, 2x + 3y \leq 90$ কে ছেদক আকারে প্রকাশ করে পাই,

$$\frac{x}{80} + \frac{y}{20} = 1 \cdots \text{(i)}, \frac{x}{45} + \frac{y}{30} = 1 \cdots \cdots \text{(ii)}$$

2. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি।



3. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 5 একক ধরে (i) নং রেখাস্থ (80, 0) ও (0, 20) ; (ii) নং রেখাস্থ (45,0) ও (0, 30) বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে প্রতি জোড়া সংযোগ করে যথাক্রমে (i)ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

4. (0, 0) বিন্দু $x + 4y \leq 80$ অসমতাকে সিদ্ধ করে ($\because 0 \leq 80$ সত্য) । সুতরাং (i) রেখাহ্ ও এর (0, 0) বিন্দুর পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট ঐ অসমতার সমাধান। তদ্রূপ, (ii) রেখাহ্ ও এর (0, 0) বিন্দুর পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট $2x + 3y \leq 90$ অসমতার সমাধান। তাছাড়া $x \geq 0$ ও $y \geq 0$ দ্বারা বুঝায় সমাধানের অনুকূল এলাকা ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

5. OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

6. OABC চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক O(0, 0), A(45, 0), (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু B(24,14) এবং C(0, 20)

7. অভীষ্ট ফাংশনে কৌণিক বিন্দুগুলির মান বসিয়ে Z এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করি।

ফল সংকলন :

কৌণিক বিন্দু	**Z = 45x + 80y**	Z_{max}
O(0, 0)	$Z = 45\times0 + 80\times0 = 0$	2200
A(45, 0)	$Z = 45\times45 + 80\times0 = 2025$	
B(24,14)	$Z = 45\times24 + 80\times14 = 2200$	
C(0,20)	$Z = 45\times0 + 80\times20 = 1600$	

ফলাফল : Z এর সর্বোচ্চ মান = 2200.

2. $11x + 6y \geq 132, x + y \geq 18, x + 4y \geq 24, x \geq 0, y \geq 0$ শর্তাধীনে $z = 80x + 50y$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

পরীক্ষণ নং	তারিখ ঃ

পরীক্ষণের নাম : লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিমাত্রিক যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং এ অভীষ্ট ফাংশন $z = 80x + 50y$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয়।

শর্তাবলী : $11x + 6y \geq 132, x + y \geq 18, x + 4y \geq 24, x \geq 0, y \geq 0$

মূলতত্ত্ব ঃ প্রদত্ত অসমতা $11x + 6y \geq 132$, $x + y \geq 18$ এবং $x + 4y \geq 24$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করে অনুকূল এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি। কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্কের মান বসিয়ে $Z = 80x + 50y$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

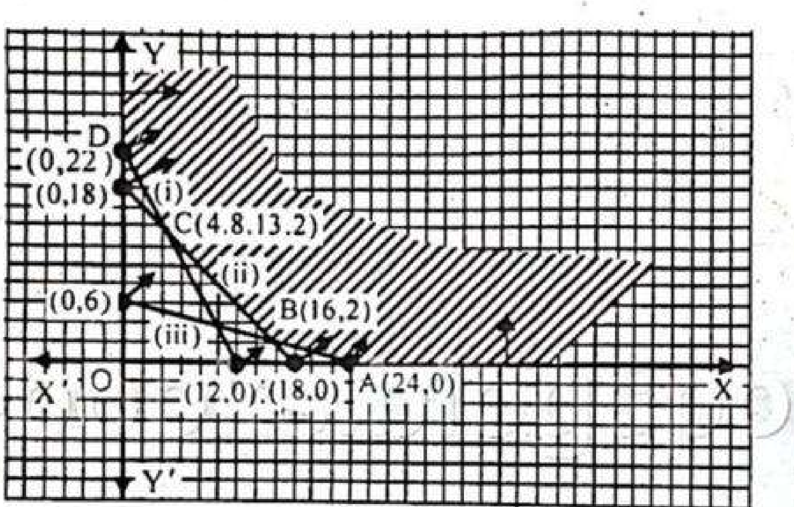
1. অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ $11x + 6y = 132 \Rightarrow \frac{x}{12} + \frac{y}{22} = 1 \cdots\cdots$ (i),

$x + y = 18 \Rightarrow \frac{x}{18} + \frac{y}{18} = 1 \cdots$ (ii) ও $x + 4y = 24 \Rightarrow \frac{x}{24} + \frac{y}{6} = 1 \cdots$ (iii).

2. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি। $6x + 6y = 108$ $x = 24/5$

3. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) নং রেখাস্থ (12, 0) ও (0, 22) ; (ii) নং রেখাস্থ (18,0) ও (0, 18) ; (iii) নং রেখাস্থ (24, 0) ও (0, 6) বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে প্রতি জোড়া সংযোগ করে যথাক্রমে (i), (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

4. (0, 0) বিন্দু $11x + 6y \geq 132$ অসমতাকে সিদ্ধ করেনা ($\because 0 \geq 132$ সত্য নয়)। সুতরাং (i) রেখাস্থ ও এর (0, 0) বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট ঐ অসমতার সমাধান। (0, 0) বিন্দু $x + y \geq 18$ অসমতাকে সিদ্ধ করে না ($\because 0 \geq 18$ সত্য নয়)। সুতরাং (ii) রেখাস্থ ও এর (0, 0) বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট ঐ অসমতার সমাধান। আবার (0, 0) বিন্দু $x + 4y \geq 24$ অসমতাকে সিদ্ধ করে না ($\because 0 \geq 24$ সত্য নয়)। সুতরাং (iii) রেখাস্থ ও এর (0, 0) বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট ঐ অসমতার সমাধান। তাছাড়া $x \geq 0$ ও $y \geq 0$ দ্বারা বুঝায় সমাধানের অনুকূল এলাকা ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত।



5. AB, BC ও CD রেখাত্রয়ের উপরস্থ ও তাদের ডানপার্শ্বস্থ বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে বিধায় ঐ অঞ্চলটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

6. কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক : A(24, 0), (ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু B(16,2), C(4·8, 13·2) এবং D(0,22).

7. অভীষ্ট ফাংশনে কৌণিক বিন্দুগুলির মান বসিয়ে Z এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করি।

ফল সংকলন :

কৌণিক বিন্দু	$Z = 80x + 50y$	Z_{min}
A(24, 0)	$Z = 80 \times 24 + 50 \times 0 = 1920$	1044
B(16, 2)	$Z = 80 \times 16 + 50 \times 2 = 1380$	
C(4·8,13·2)	$Z = 80 \times 6 + 50 \times 6 = 1044$	
D(0,22)	$Z = 80 \times 0 + 50 \times 22 = 1100$	

ফলাফল : Z এর সর্বনিম্ন মান = 1044.

3.

পরীক্ষণ নং	তারিখ ঃ

পরীক্ষণের নাম ঃ একটি ফার্ম A এবং B দুইটি মেশিনের সাহায্যে চেয়ার ও টেবিল দুইটি পণ্য তৈরি করে। A মেশিনে 60 ঘণ্টা এবং B মেশিনে 48 ঘণ্টা পর্যন্ত কাজ করতে সক্ষম। একটি চেয়ার তৈরি করতে A মেশিনে 2 ঘণ্টা এবং B মেশিনে 4 ঘণ্টা সময় লাগে। একটি টেবিল তৈরি করতে A মেশিনে 4 ঘণ্টা এবং B মেশিনে 2 ঘণ্টা সময় লাগে। টেবিল প্রতি 8 টাকা এবং চেয়ার প্রতি 6 টাকা মুনাফা হলে সর্বাধিক মুনাফা পাবার জন্য কয়টি চেয়ার এবং কয়টি টেবিল তৈরি করতে হবে?

মূলতত্ত্ব : সর্বাধিক মুনাফা পাবার জন্য x টি চেয়ার ও y টি টেবিল তৈরি করতে হবে:

মুনাফা, $Z = 6x + 8y$

শর্তাবলী, $2x + 4y \leq 60$, $4x + 2y \leq 48$ এবং $x \geq 0$, $y \geq 0$.

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

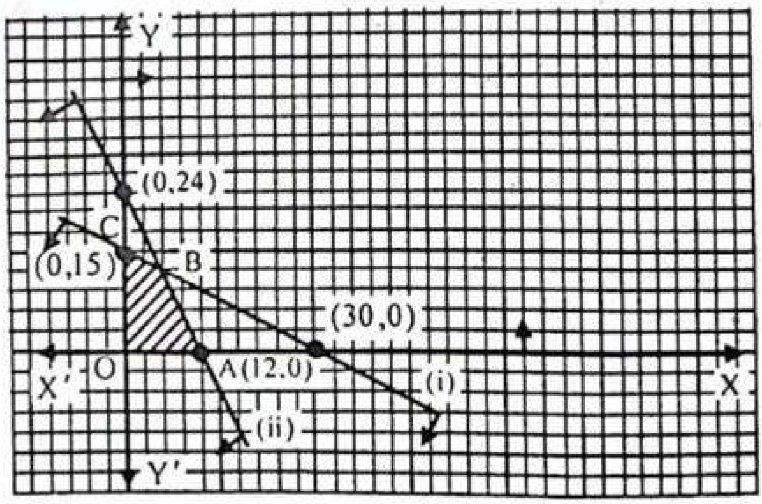
কার্যপদ্ধতি ঃ

1. অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ $2x + 4y = 60 \cdots \cdots$ (i) ও $4x + 2y = 48 \cdots \cdots$ (ii) এর ছেদক আকার যথাক্রমে $\frac{x}{30} + \frac{y}{15} = 1$ ও $\frac{x}{12} + \frac{y}{24} = 1$.

2. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি।

3. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 3 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) নং রেখাস্থ (30, 0) ও (0, 15) ; (ii) নং রেখাস্থ (12,0) ও (0, 24) বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে প্রতি জোড়া সংযোগ করে যথাক্রমে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

4. (0,0) বিন্দু $2x + 4y \leq 60$ অসমতাকে সিদ্ধ করে ($\because 0 \leq 60$ নয়) । সুতরাং (i) রেখাস্থ ও এর (0, 0) বিন্দুর পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট ঐ অসমতার সমাধান। (0, 0) বিন্দু $4x + 2y \leq 48$ অসমতাকে সিদ্ধ করে ($\because 0 \geq 12$ নয়) । সুতরাং (ii) রেখাস্থ ও এর (0, 0) বিন্দুর পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট ঐ অসমতার সমাধান। তাছাড়া $x \geq 0$ ও $y \geq 0$ দ্বারা বুঝায় সমাধানের অনুকূল এলাকা ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত।



OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

6. OABC চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক : O(0,0), A(12, 0), (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু B(6, 12) এবং C(0, 15) .

7. অভীষ্ট ফাংশনে কৌণিক বিন্দুগুলির মান বসিয়ে Z এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করি।

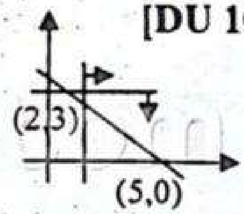
ফল সংকলন :

কৌণিক বিন্দু	$Z = 6x + 8y$	Z_{max}
O(0, 0)	$Z = 6\times0 + 8\times0 = 0$	132
A(12, 0)	$Z = 6\times12 + 8\times0 = 72$	
B(6, 12)	$Z = 6\times6 + 8\times12 = 132$	
C(0, 15)	$Z = 6\times0 + 8\times15 = 120$	

ফলাফল : সর্বাধিক মুনাফা পাবার জন্য 6 টি চেয়ার ও 12 টি টেবিল তৈরি করতে হবে।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ:

1. $x \geq 0, y \geq 0$, $x + y = 5$, $x \geq 2$, $y \leq 4$ শর্তসমূহ সাপেক্ষে গরিষ্ঠকরণ করলে $z = 6x + 2y$ রাশিটির সর্বোচ্চ মান– **[DU 10-11]**



Sol^n : (2, 3) বিন্দুতে z = 18 এবং (5,0) বিন্দুতে z = 30

$\therefore z_{max} = 18$

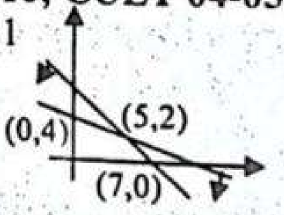
2. সমাধান কর: গরিষ্ঠকরণ কর, **$z = 3x + 4y$ শর্ত হচ্ছে $x + y \leq 7$, $2x + 5y \leq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.**

[DU 09-10; KU 09-10; CUET 04-05; Textile 13-14]

Sol^n : $z(0,4) = 3\times0 + 4\times4 = 16$, $z(7,0) = 3\times7 + 4\times0 = 21$

$z(5,2) = 3\times5 + 4\times2 = 23$

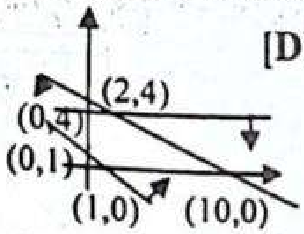
$\therefore$ সমাধানঃ (5, 2)



3. $5x + 10y \leq 50$, $x + y \geq 1$, $y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ শর্তাবলী সাপেক্ষে $z = 2x + 7y$ এর লঘিষ্ঠমান– **[DU 08-09]**

Sol^n : $z(1,0) = 2$, $z(0,1) = 7$, $z(10, 0) = 20$, $z(2,4) = 32$

$z(0,4) = 28$. $\therefore$ $z_{min} = 2$



1.(i) নিচের জটিল সংখ্যাগুলো পোলার আকারে প্রকাশ কর । অতপর প্রতিক্ষেত্রে মডুলাস এবং আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর :

(a) দেওয়া আছে, $1 + \sqrt{3}\,i$ [চ.'০০; রুয়েট'০৬-০৭,১০-১১]

মনে করি , $r\cos\theta = 1$ এবং $r\sin\theta = \sqrt{3}$

$\therefore\ r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$ $[\because r = \sqrt{x^2+y^2}\,]$

$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{1}$ $[\because \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}]$

$= \tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$

$\therefore\ 1 + \sqrt{3}\,i = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$

$\therefore$ মডুলাস $= 2$ এবং আর্গুমেন্ট $= \dfrac{\pi}{3}$

1(b) দেওয়া আছে, $3 - 5\,i$ [চ.'০০]

মনে করি, $r\cos\theta = 3$ এবং $r\sin\theta = -5$

$\therefore\ r = \sqrt{3^2 + (-5)^2}$ $[\because r = \sqrt{x^2+y^2}\,]$

$= \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}(\dfrac{-5}{3})$ $[\because \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}]$

$= -\tan^{-1}\dfrac{5}{3}$ $[\because \tan^{-1}\dfrac{-y}{x} = -\tan^{-1}\dfrac{y}{x}]$

$\therefore 3 - 5i = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

$= \sqrt{34}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$,

যেখানে $\theta = -\tan^{-1}\dfrac{5}{3}$

$\therefore$ মডুলাস $= \sqrt{34}$ এবং আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}(-\dfrac{5}{3})$

1(c) দেওয়া আছে, $-\sqrt{3} + i$ [বুয়েট'১১-১২]

মনে করি , $r\cos\theta = -\sqrt{3}$ এবং $r\sin\theta = 1$

$\therefore\ r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}$ $[\because r = \sqrt{x^2+y^2}\,]$

$= \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{1}{-\sqrt{3}}$ $[\because \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}]$

$= \pi - \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $[\because \tan^{-1}\dfrac{y}{-x} = \pi - \tan^{-1}\dfrac{y}{x}]$

$= \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$

$\therefore\ -\sqrt{3} + i = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

$= 2(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6})$

$\therefore$ মডুলাস $= 2$ এবং আর্গুমেন্ট $= \dfrac{5\pi}{6}$

1(d) দেওয়া আছে, $-8 - 6i$

মনে করি, $r\cos\theta = -8$ এবং $r\sin\theta = -6$

$\therefore\ r = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2}$ $[\because r = \sqrt{x^2+y^2}\,]$

$= \sqrt{64+36} = 10$ $[\because \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}]$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}(\dfrac{-6}{-8})$

$= \tan^{-1}\dfrac{3}{4} - \pi$ $[\because \tan^{-1}\dfrac{-y}{-x} = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} - \pi]$

$\therefore\ -8 - 6i = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

$= 10(\cos\theta + i\sin\theta)$,

যেখানে $\theta = \tan^{-1}\dfrac{3}{4} - \pi$

$\therefore$ মডুলাস = 10 এবং আর্গুমেন্ট = $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$

1(e) $4 + 3i$ [য.'০০; কুয়েট'০৪-০৫,১২-১৩]

মনে করি, $r\cos\theta = 4$ এবং $r\sin\theta = 3$

$\therefore r = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ $[\because r = \sqrt{x^2+y^2}]$

$\therefore \theta = \tan^{-1}(\frac{3}{4})$ $[\because \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}]$

$\therefore 4 + 3i = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$

$= 5(\cos\theta + i\sin\theta)$, যেখানে $\theta = \tan^{-1}(\frac{3}{4})$

$\therefore$ মডুলাস = 5 এবং আর্গুমেন্ট = $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$

1(i) (f) $-1+\sqrt{3}\,i$ [য.'০২]

মনে করি, $r\cos\theta = -1$ এবং $r\sin\theta = \sqrt{3}$

$\therefore r = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$, $[\because r = \sqrt{x^2+y^2}]$

এবং $\theta = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{-1})$ $[\because \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}]$

$= \pi - \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{1}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore -1+\sqrt{3}\,i = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

$\therefore$ মডুলাস = 2 এবং আর্গুমেন্ট = $\frac{2\pi}{3}$.

1(g) $(2\sqrt{3}-2i)(-2\sqrt{3}+6i)$ [কুয়েট'১২-১৩]

$=(2\sqrt{3})(-2\sqrt{3}) - (2i)(6i) + \{12\sqrt{3}+4\sqrt{3}\}i$

$= -12 - 12i^2 + 16\sqrt{3}\,i$

$= -12 + 12 + 16\sqrt{3}\,i = 0 + 16\sqrt{3}\,i$

মনে করি, $r\cos\theta = 0$ এবং $r\sin\theta = 16\sqrt{3}$

$\therefore r = \sqrt{0^2+(16\sqrt{3})^2}$, $[\because r = \sqrt{x^2+y^2}]$

$= 16\sqrt{3}$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{16\sqrt{3}}{0}$ $[\because \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}]$

$= \tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

$\therefore (2\sqrt{3}-2i)(-2\sqrt{3}+6i) = 0 + 16\sqrt{3}\,i$

$= r\cos\theta + i\, r\sin\theta$

$= 16\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$\therefore$ মডুলাস = $16\sqrt{3}$ এবং আর্গুমেন্ট = $\frac{\pi}{2}$

1.(ii) আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর : $1 - \dfrac{i}{1-\dfrac{1}{1+i}}$

সমাধান : $1 - \dfrac{i}{1-\dfrac{1}{1+i}} = 1 - \dfrac{i}{\dfrac{1+i-1}{1+i}}$

$= 1 - \frac{i(1+i)}{i} = 1-(1+i) = -i = 0 - 1.\,i$

$\therefore$ নির্ণেয় আর্গুমেন্ট = $\tan^{-1}\frac{-1}{0}$ $[\because \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}]$

$= -\tan^{-1}\frac{1}{0}$ $[\because \tan^{-1}\frac{-y}{x} = -\tan^{-1}\frac{y}{x}]$

$= -\cot^{-1}\frac{0}{1}$ $[\because \tan^{-1}\frac{y}{x} = \cot^{-1}\frac{x}{y}]$

$= -\cot^{-1} 0 = -\frac{\pi}{2}$ (Ans.)

2. $A + iB$ আকারে প্রকাশ কর :

(a) $\frac{3+2i}{5-7i}=\frac{(3+2i)(5+7i)}{(5-7i)(5+7i)}$

$=\frac{15+21i+10i+14i^2}{5^2-7^2i^2}=\frac{15+31i-14}{25+49}$

$=\frac{1+31i}{74}=\frac{1}{74}+\frac{31}{74}i$, যা $A+iB$ আকারে প্রকাশ করা হল ।

2(b) $\frac{1+5i}{1-2i}+\frac{5-3i}{2+3i}$

$=\frac{(1+5i)(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{(5-3i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$

$=\frac{1+7i-10}{1+4}+\frac{10-21i-9}{4+9}$

$=\frac{-9+7i}{5}+\frac{1-21i}{13}=\frac{-117+91i+5-105i}{65}$

$=(-\frac{112}{65})+(-\frac{14}{65})i$, যা $A+iB$ আকারে প্রকাশ করা হল ।

3. বর্গমূল নির্ণয় কর ঃ

(a) $7-30\sqrt{-2}$ [চ.'০১;ব.'১২]

$=25-18-30i\sqrt{2}$

$=25-30i\sqrt{2}+18i^2$

$=5^2-2.5.3\sqrt{2}\,i+(3\sqrt{2}\,i)^2$

$=(5-3\sqrt{2}\,i)^2$

$\therefore$ $7-30\sqrt{-2}$ এর বর্গমূল $=\pm\sqrt{(5-3\sqrt{2}i)^2}$

$=\pm(5-3\sqrt{2}\,i)$

3(b) $-7+24i=9-16+24i$ [ঢা.'১২]

$=3^2+(4i)^2+2.3.4i=(3+4i)^2$

$\therefore$ $-7+24i$ এর বর্গমূল $=\pm\sqrt{(3+4i)^2}$

$=\pm(3+4i)$

3(c) $2i$ [ঢা.'০১; চ.'০৩ ; সি.'০৫; রা.'০৬,'০৮]

$=1-1+2i=1+i^2+2.1.i=(1+i)^2$

$\therefore$ $2i$ এর বর্গমূল $=\pm\sqrt{(1+i)^2}=\pm(1+i)$

3(d) $1+i$ [চ.'০৫]

$=\frac{1}{2}(2+2i)=\frac{1}{2}\{2+2\sqrt{1}\,i\}$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)+2\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\,i\}$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)i^2+2(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}i\}$

$=\frac{1}{2}\left[\left\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}\right\}^2+\left\{(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}i\right\}^2+2(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}i\right]$

$=\frac{1}{2}\left\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}+(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}i\right\}^2$

$\therefore$ $1+i$ এর বর্গমূল

$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}+(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}i\right\}$

3(e) $2+i\sqrt{x^2-4}$

$=\frac{1}{2}\{4+2i\sqrt{(x+2)(x-2)}\}$

$=\frac{1}{2}\{(x+2)-(x-2)+2i\sqrt{(x+2)(x-2)}\}$

$=\frac{1}{2}\{(x+2)+(x-2)i^2+2i\sqrt{(x+2)(x-2)}\}$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{x+2})^2+(i\sqrt{x-2})^2+$

$2.\sqrt{x+2}.i\sqrt{x-2}\}$

$=\frac{1}{2}\{\sqrt{x+2}+i\sqrt{x-2}\}^2$

$\therefore 2+i\sqrt{x^2-4}$ এর বর্গমূল =

$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x+2}+i\sqrt{x-2})$

3(f) $x+i\sqrt{1-x^2}$ [ব.'০৩]

$=\frac{1}{2}\{2x+2i\sqrt{(1+x)(1-x)}\}$

$=\frac{1}{2}\{(1+x)-(1-x)+2i\sqrt{(1+x)(1-x)}\}$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{1+x})^2+(i\sqrt{1-x})^2$

$+2.\sqrt{1+x}.i\sqrt{1-x}\}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x})^2$

$\therefore x+i\sqrt{1-x^2}$ এর বর্গমূল $=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x}+$

$i\sqrt{1-x})$

3(g) $x+i\sqrt{x^4+x^2+1}$

$=\frac{1}{2}\{2x+i\,2\sqrt{(x^2)^2+2.x^2.1+1^2-x^2}\}$

$=\frac{1}{2}\{2x+2i\sqrt{(x^2+1)^2-x^2}\}$

$=\frac{1}{2}\{2x+2i\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\}$

$=\frac{1}{2}\{(x^2+x+1)-(x^2-x+1)+$

$2i\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2+\left(i\sqrt{x^2-x+1}\right)^2+\right.$

$\left.2.\sqrt{x^2+x+1}.i\sqrt{x^2-x+1}\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1}+i\sqrt{x^2-x+1}\right)^2$

$\therefore x+i\sqrt{x^4+x^2+1}$ এর বর্গমূল

$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x^2+x+1}+i\sqrt{x^2-x+1}\right)$

3(h) $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})=\frac{1}{4}(-2+2\sqrt{3}i)$

$=\frac{1}{4}(1-3+2\sqrt{3}i)$

$=\frac{1}{4}\{1^2+(i\sqrt{3})^2+2.1.i\sqrt{3}\}$

$=\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})^2=\frac{1}{4}(1+\sqrt{-3})^2$

$\therefore \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এর বর্গমূল $=\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$

3(i) $1-i\sqrt{x^2-1}$

$=\frac{1}{2}\{2-2i\sqrt{(x+1)(x-1)}\}$

$=\frac{1}{2}\{(x+1)-(x-1)-2i\sqrt{(x+1)(x-1)}\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\left(i\sqrt{x-1}\right)^2-2.\sqrt{x+1}i\sqrt{x-1}\right\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{x+1}-i\sqrt{x-1}\right\}^2$

$\therefore 1-i\sqrt{x^2-1}$ এর বর্গমূল

$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x+1}-i\sqrt{x-1}\right)$

3(j) $i=\frac{1}{2}.2i=\frac{1}{2}(1-1+2i)$

$=\frac{1}{2}(1^2+i^2+2.1.i)=\frac{1}{2}(1+i)^2$

$\therefore i$ এর বর্গমূল $=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

3(k) $-i=\frac{1}{2}(1-1-2i)$ [দি.'০৯]

$= \frac{1}{2}(1^2 + i^2 - 2.1.i) = \frac{1}{2}(1-i)^2$

$\therefore$ $-i$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

3(l) $-2i$ [ব.'০৫]

$= 1 - 1 - 2i = 1 + i^2 - 2.1.i = (1-i)^2$

$\therefore$ $-2i$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{(1-i)^2} = \pm(1-i)$

3(m) $2i$ [সি.'০৯]

$= 1 - 1 + 2i = 1 + i^2 + 2.1.i = (1+i)^2$

$\therefore$ $2i$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{(1+i)^2} = \pm(1+i)$

3(n) $4 - 4\sqrt{-1}$ [কুয়েট'১০-১১]

$= 4 - 4i = a + bi$ (ধরি) , যেখানে $a = 4, b = -4$

এখানে, $b < 0$.

নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\frac{1}{2}}\}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{4^2+(-4)^2}+4)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{4^2+(-4)^2}-4)^{\frac{1}{2}}\}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(4\sqrt{2}+4)^{\frac{1}{2}} - i(4\sqrt{2}-4)^{\frac{1}{2}}\}$

$= \pm\frac{2}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\}$

$= \pm\sqrt{2}\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\}$

3(o) $\frac{5+12i}{3-4i}$ [কুয়েট'০৯-১০]

$= \frac{(5+12i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$

$= \frac{15+48i^2+(20+36)i}{9-(4i)^2}$

$= \frac{15-48+56i}{9+16} = \frac{-33+56i}{25}$

$= \frac{16-49+56i}{25} = \frac{4^2+(7i)^2+2.4.7i}{25}$

$= \frac{(4+7i)^2}{5^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\frac{4+7i}{5} = \pm(\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i)$

4. মান নির্ণয় কর :

(a) $\sqrt[3]{-1}$ [চা.'০৪]

সমাধান : মনে করি , $x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x^3 = -1$

$\Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x + 1 = 0$ হলে , $x = -1$

$x^2 - x + 1 = 0$ হলে ,

$x = \frac{-(-1) \pm\sqrt{(-1)^2 - 4.1.1}}{2.1}$

$= \frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$

$\therefore$ $x = -1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3}), \frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$.

$\therefore$ $\sqrt[3]{-1} = -1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3}), \frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$

4(b) $\sqrt[4]{-81}$ [রা.'০৪; ব.'০৮; চা.'১০;য.'১১]

মনে করি , $x = \sqrt[4]{-81} \Rightarrow x^4 = -81 = 81\,i^2$

$\Rightarrow (x^2)^2 = (9\,i)^2$

$\therefore$ $x^2 = \pm 9\,i = \frac{9}{2}(\pm 2\,i)$

$= \frac{9}{2}(1^2 + i^2 \pm 2.1.\,i) = \frac{9}{2}(1 \pm i)^2$

$\therefore\ x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i).$

সুতরাং, $\sqrt[4]{-81} = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

4(c) $\sqrt[4]{1}$

মনে করি, $x = \sqrt[4]{1} \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x^4 = i^4$

$\Rightarrow (x^2)^2 - (i^2)^2 = 0$

$\Rightarrow (x^2 + i^2)(x^2 - i^2) = 0$

$x^2 + i^2 = 0$ হলে, $x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 1\ \therefore x = \pm 1$

$x^2 - i^2 = 0$ হলে, $x^2 = i^2\ \therefore x = \pm i$

$\therefore\ \sqrt[4]{1} = \pm 1,\ \pm i$

(d) $\sqrt[3]{i}$ [রা., কু.'০৫,'১২; ঢা.'০৪; চ.'০৯,'১৩; ব.'১০]

মনে করি, $x = \sqrt[3]{i} \Rightarrow x^3 = i = -i^3$

$\Rightarrow x^3 + i^3 = 0 \Rightarrow (x + i)(x^2 - xi + i^2) = 0$

$\Rightarrow (x + i)(x^2 - xi - 1) = 0$

$x + i = 0$ হলে, $x = -i$

$x^2 - xi - 1 = 0$ হলে,

$x = \frac{-(-i) \pm \sqrt{(-i)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$

$= \frac{i \pm \sqrt{-1+4}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \sqrt[3]{i} = -i,\ \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে করি, $x = \sqrt[3]{i}$

$\Rightarrow x^3 = i = (-i)^3$

$\therefore\ x = -i,\ \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})(-i)$

এখন, $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}\,i)(-i) = \frac{1}{2}(i \mp \sqrt{3})$

$\therefore\ \sqrt[3]{i} = -i,\ \frac{1}{2}(i \pm \sqrt{3})$

4(e) $\sqrt[3]{-i}$

[চ.'০১,'০৬; সি.'০৮; ব.,য.'১৩; রুয়েট'১১-১২]

মনে করি, $x = \sqrt[3]{-i} \Rightarrow x^3 = -i = i^3$

$\therefore\ x = i,\ \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}).\,i$

এখন, $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}).\,i = \frac{1}{2}(-i \mp \sqrt{3})$

$\therefore\ \sqrt[3]{-i} = i,\ \frac{1}{2}(-i \pm \sqrt{3})$

4(f) $\sqrt[4]{-1}$

মনে করি, $x = \sqrt[4]{-1} \Rightarrow x^4 = -1 = i^2$

$\Rightarrow (x^2)^2 = i^2 \Rightarrow x^2 = \pm i = \frac{1}{2}(\pm 2i)$

$= \frac{1}{2}(1^2 + i^2 \pm 2i) = \frac{1}{2}(1 \pm i)^2$

$\therefore\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

4(g) $\sqrt[6]{64}$

ধরি, $x = \sqrt[6]{64} \Rightarrow x^6 = 64 \Rightarrow (x^3)^2 = 8^2$

$\therefore\ x^3 = \pm 8 = (\pm 2)^3$

$\therefore\ x = \pm 2,\ \pm 2\,\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

$\therefore\ x = \pm 2,\ \pm(1 \pm i\sqrt{3})$

$\therefore\ \sqrt[6]{64} = \pm 2,\ \pm(1 \pm i\sqrt{3})$

4(h) $\sqrt[4]{-144}$

[সি.'০২]

মনে করি, $x = \sqrt[4]{-144}$

$\Rightarrow x^4 = -144 = 144\,i^2 \Rightarrow (x^2)^2 = (12\,i)^2$

$\therefore\ x^2 = \pm 12\,i = 6(\pm 2\,i)$

$= 6(1^2 + i^2 \pm 2.1.i) = 6(1 \pm i)^2$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{6}\,(1 \pm i)$.

সুতরাং, $\sqrt[4]{-144} = \pm\sqrt{6}\,(1 \pm i)$

5. দেখাও যে, (a) $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{2}$

[য.'১২; কুয়েট'০৬-০৭,০৮-০৯; রুয়েট'১২-১৩]

প্রমাণ ঃ $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{1}{2}.2i} + \sqrt{\frac{1}{2}.(-2i)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}.(1^2 + i^2 + 2.1.i)} + \sqrt{\frac{1}{2}.(1^2 + i^2 - 2.1.i)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}.(1+i)^2} + \sqrt{\frac{1}{2}.(1-i)^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i+1-i) = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{2}$ (Showed)

5(b) $\sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i} = 0$ [রুয়েট'০৫-০৬]

প্রমাণ ঃ $\sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{(-i)^3} + \sqrt[3]{(i)^3}$

$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{(-i)^3} = -i\ ,\ -\frac{i}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$

$\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{(i)^3} = i\ ,\ \frac{i}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$

$\therefore\ \sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i} = 0$ (Showed)

6 (a) দেখাও যে, $\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = 1$ [য.'০৪; কু.'০৭]

প্রমাণ ঃ $\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = \frac{|x-iy|}{|x+iy|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\therefore\ \left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = 1$ (Showed)

6(b) $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$ হলে দেখাও যে,

$\sqrt[3]{a-ib} = x - iy$ [কু.'০৩; য.'০৬; রা.'০৯; দি., সি.'১০; ঢা.'১৩; বুয়েট'০৩-০৪; টেক্সটাইল'০৩-০৪; রুয়েট'০৭-০৮]

এবং $-2(x^2+y^2) = \frac{a}{x} - \frac{b}{y}$ [রা.'০১]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$

$\therefore\ a + ib = x^3 + 3x^2.iy + 3.x.(iy)^2 + (iy)^3$

$= x^3 + 3x^2 y\,i - 3xy^2 - iy^3$

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই, $a = x^3 - 3xy^2$, $b = 3x^2y - y^3$

এখন, $a - ib = x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3)$

$= x^3 - 3xy^2 - 3x^2y\,i + iy^3$

$= x^3 + 3xy^2 i^2 - 3x^2y\,i - i^3 y^3$

$= x^3 - 3.x^2.iy + 3.x.(iy)^2 - (iy)^3$

$= (x - iy)^3$

$\therefore\ \sqrt[3]{a+ib} = x - iy$ (Showed)

এবং $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = \frac{x^3 - 3xy^2}{x} - \frac{3x^2y - y^3}{y}$

$= x^2 - 3y^2 - 3x^2 + y^2$

$= -2x^2 - 2y^2$

$\therefore\ -2(x^2+y^2) = \frac{a}{x} - \frac{b}{y}$ (Showed)

6(c) $(a+ib)(c+id) = x + iy$ হলে দেখাও যে, $(a-ib)(c-id) = x - iy$ [য.'০৩; চ.'০৪]

প্রমাণ :দেওয়া আছে, $(a+ib)(c+id) = x + iy$

$\Rightarrow ac - bd + i(ad + bc) = x + iy$

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই, $x = ac - bd$, $y = ad + bc$

এখন, $x - iy = ac - bd - i(ad + bc)$

$= ac - i\,ad - i\,bc - bd$

$= ac - i\,ad - i\,bc + bd\,i^2$

$$= a(c - i\,d) - i\,b(c - i\,d)$$
$$= (a - i\,b)(c - i\,d)$$
$\therefore$ $(a - i\,b)(c - i\,d) = x - i\,y$ (Showed)

(d) $a^2 + b^2 = 1$ **হলে দেখাও যে,** x **এর একটি বাস্তব মান** $\dfrac{1-ix}{1+ix} = a - ib$ **সমীকরণকে সিদ্ধ করে ; যেখানে** $a, b \in \mathbb{R}$. **[কু. '০৮,'১০; রা.'০৬,'১২; সি.'০৮,'১২; য.'০৬,'০৮; ব.'০৭; ঢা.'০৭; দি.'১২; চ.'১২]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $a^2 + b^2 = 1 \ldots\ldots(1)$ এবং

$$\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$$
$$\Rightarrow 1 - ix = a + iax - ib + bx$$
$$\Rightarrow (ai + b + i)x = 1 - a + ib$$
$$\Rightarrow x = \frac{(1-a)+ib}{b+(a+1)i}$$
$$= \frac{\{(1-a)+ib\}\{b-(a+1)i\}}{\{b+(a+1)i\}\{b-(a+1)i\}}$$
$$= \frac{b(1-a)+b(a+1)+\{b^2-(1+a)(1-a)\}i}{b^2+(a+1)^2}$$
$$= \frac{b-ab+ab+b-\{b^2-1+a^2\}i}{b^2+a^2+2a+1}$$
$$= \frac{2b-0.i}{1+2a+1},\ [\because a^2+b^2=1]$$
$$= \frac{2b}{2(a+1)} = \frac{b}{a+1}$$, যা বাস্তব সংখ্যা ।

6(e) $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ **হলে দেখাও যে ,** $(a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)^2 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ **[ঢা.' ০১;ব.'০৩; কু.'১২]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে ,

$$(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \text{ ---(1)}$$

(1) -এ $x = i$ বসিয়ে পাই ,

$$(1+i)^n = a_0 + a_1i + a_2i^2 + a_3i^3 + a_4i^4 + \cdots\cdots$$
$$\Rightarrow (1+i)^n = a_0 + a_1i - a_2 - a_3i + a_4 + a_5i + \cdots$$
$$\Rightarrow (1+i)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots) + i(a_1 - a_3 + a_5 + \cdots) \text{ --- (2)}$$

(2)-এ i এর পরিবর্তে $-i$ লিখে পাই ,

$$(1-i)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots\cdots) - i(a_1 - a_3 + a_5 + \cdots\cdots) \text{ ----- (3)}$$

(2) এবং (3) নং সমীকরণ গুণ করে পাই ,

$$(1-i^2)^n = \{(a_0 - a_2 + a_4 - \cdots\cdots) + i(a_1 - a_3 + a_5 + \cdots\cdots)\}\{(a_0 - a_2 + a_4 - \cdots) - i(a_1 - a_3 + a_5 + \cdots\cdots)\}$$
$$\Rightarrow (1+1)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)^2 - i^2(a_1 - a_3 + a_5 + \cdots)^2$$
$$\Rightarrow 2^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 + \cdots)^2 \text{ ------ (4)}$$

এখন, (1)-এ $x = 1$ বসিয়ে পাই ,

$$(1+1)^n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$$
$$\Rightarrow 2^n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n \text{-------- (5)}$$

(4) এবং (5) হতে পাই ,

$$(a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)^2 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$$

6(f) $x : y = (a+ib) : (c+id)$ **হলে দেখাও যে,** $(c^2+d^2)x^2 - 2(ac+bd)xy + (a^2+b^2)y^2 = 0$ **[রা.'০৩; কু.'০৪; সি.'০৫,'০৯; য.'০৭; ব. '০৯; য.'১০; দি.'১২; বুয়েট'০৪]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $x : y = (a + i\,b) : (c + i\,d)$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a+ib}{c+id} \Rightarrow cx + i\,dx = ay + i\,by$$
$$\Rightarrow cx - ay = i\,(by - dx)$$
$$\Rightarrow (cx - ay)^2 = i^2(by - dx)^2$$
$$\Rightarrow c^2x^2 - 2cx.ay + a^2y^2 = -(b^2y^2 - 2by.dx + d^2x^2)$$
$$\Rightarrow c^2x^2 - 2cx.ay + a^2y^2 +$$

$(b^2y^2 - 2by.dx + d^2x^2) = 0$

$\therefore (c^2+d^2)x^2 - 2(ac+bd)xy + (a^2+b^2)y^2 = 0$

6(g) $x = \dfrac{a+ib}{a-ib}$ **হলে প্রমাণ কর যে,** $(a^2+b^2)x^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2-b^2)x$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $x = \dfrac{a+ib}{a-ib}$

$\Rightarrow ax - i\,bx = a + i\,b \Rightarrow ax - a = i\,(b + bx)$

$\Rightarrow (ax-a)^2 = i^2(b+bx)^2$

$\Rightarrow a^2x^2 - 2a^2x + a^2 = -(b^2 + 2b^2x + b^2x^2)$

$\Rightarrow a^2x^2 - 2a^2x + a^2 + b^2 + 2b^2x + b^2x^2 = 0$

$\Rightarrow (a^2+b^2)x^2 + a^2 + b^2 - 2(a^2-b^2)x = 0$

$\therefore \quad (a^2+b^2)x^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2-b^2)x$

6(h) $x = -1 + \sqrt{2}\,i$ **হলে দেখাও যে,** $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = 3$ [টেক্সটাইল'০৩-০৪]

প্রমাণ ঃ $x = -1 + \sqrt{2}\,i \Rightarrow x + 1 = \sqrt{2}\,i$

$\Rightarrow (x+1)^2 = 2.\,i^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = -2$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$

$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = x^2(x^2+2x+3) + 2x(x^2+2x+3) - 1(x^2+2x+3) + 3$

$= x^2.0 + 2x.0 - 1.0 + 3 = 3$

$\therefore \quad x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = 3$ (Showed)

6(i) যদি $x = 2 + \sqrt{-3}$ হয় , তবে $3x^4 - 17x^3 + 41x^2 - 35x + 5$ এর মান নির্ণয় কর।

[বুয়েট'০১-০২]

সমাধান : $x = 2 + \sqrt{-3} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{-3}$

$\Rightarrow (x-2)^2 = (\sqrt{-3})^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -3 \Rightarrow x^2 - 4x + 7 = 0$

এখন, $3x^4 - 17x^3 + 41x^2 - 35x + 5$

$= 3x^3(x^2 - 4x + 7) - 5x^2(x^2 - 4x + 7) + 5$

$= 3x^3 \times 0 - 5x^2 \times 0 + 5 = 5$ (Ans.)

6(j)যদি $x = 2 - i$ **হয়, তবে** $x^3 - 3x^2 + x + 10$ **এর মান নির্ণয় কর।** [টেক্সটাইল'০৬-০৭]

সমাধান : $x = 2 - i \Rightarrow x - 2 = -i$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = i^2 = -1$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$

এখন, $x^3 - 3x^2 + x + 10$

$= x(x^2 - 4x + 5) + (x^2 - 4x + 5) + 5$

$= x \times 0 + 0 + 5 = 5$ (Ans.)

7(a) $x = 3 + 2i$ **এবং** $y = 3 - 2i$ **হলে দেখাও যে,** $x^2 + xy + y^2 = 23$ [য.'০৫]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $x = 3 + 2i$

$\Rightarrow x^2 = 9 + 12i + 4i^2$

$= 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$ এবং

$y = 3 - 2i \Rightarrow y^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$

$xy = (3+2i)(3-2i)$

$= 9 - 4i^2 = 9 + 4 = 13$

$\therefore \quad x^2 + xy + y^2 = 5 + 12i + 5 - 12i + 13 = 23$

(b) $z = x + iy$ **এবং** $|2z - 1| = |z - 2|$ **হলে দেখাও যে ,** $x^2 + y^2 = 1$ [রা.'০৫; দি.'০৯; ব.'১০; ঢা.'১১]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $|2z - 1| = |z - 2|$

$\Rightarrow |2(x + iy) - 1| = |x + iy - 2|$

$\Rightarrow |(2x - 1) + i.2y| = |(x-2) + yi|$

$\Rightarrow \sqrt{(2x-1)^2 + 4y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 = 3$

$\therefore \quad x^2 + y^2 = 1$

7(c) $z = x + iy$ **এবং** $3|z - 1| = 2|z - 2|$ **হলে প্রমাণ কর যে ,** $5(x^2 + y^2) = 2x + 7$

[য.'০৮; চ.'১১,'১৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $z = x + iy$ এবং

$3|z-1|=2|z-2|$

$\Rightarrow 3|x+iy-1|=2|x+iy-2|$

$\Rightarrow 3|(x-1)+iy|=2|(x-2)+iy|$

$\Rightarrow 3\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই ,

$9(x^2-2x+1+y^2)=4(x^2-4x+4+y^2)$

$\Rightarrow 5(x^2+y^2)=-16x+16+18x-9$

$\therefore\ 5(x^2+y^2)=2x+7$ (Showed)

7(d) $z=x+iy$ হলে, $|z-8|+|z+8|=20$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[রা.'০২,'১০; য.'০৫]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $|z-8|+|z+8|=20$

$\Rightarrow |x+iy-8|+|x+iy+8|=20$

$\Rightarrow |(x-8)+iy|+|(x+8)+iy|=20$

$\Rightarrow \sqrt{(x-8)^2+y^2}+\sqrt{(x+8)^2+y^2}=20$

$\Rightarrow \sqrt{(x-8)^2+y^2}=20-\sqrt{(x+8)^2+y^2}$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই ,

$x^2-16x+64+y^2=400-40\sqrt{(x+8)^2+y^2}+x^2+16x+64+y^2$

$\Rightarrow 32x+400=40\sqrt{(x+8)^2+y^2}$

$\Rightarrow 4x+50=5\sqrt{x^2+16x+64+y^2}$

আবার উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই ,

$16x^2+400x+2500=25(x^2+16x+64+y^2)$
$=25x^2+400x+1600+25y^2$

$\therefore\ 9x^2+25y^2=900$, ইহাই নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ ।

8(a) $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=\sqrt{3}-i$ হলে দেখাও যে, **(i)** $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$

(ii) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=\sqrt{3}-i$

$\therefore\ \arg z_1=\arg(1+i\sqrt{3})=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$

এবং $\arg z_2=\arg(\sqrt{3}-i)=\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$

(i) $z_1z_2=(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)$

$=\sqrt{3}-i+3i-\sqrt{3}\,i^2$

$=\sqrt{3}+2i+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+2i$

$\therefore\ \arg(z_1z_2)=\tan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}}=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$

এখন, $\arg z_1+\arg z_2=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi-\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \arg(z_1z_2)=\frac{\pi}{6}=\arg z_1+\arg z_2$

(ii) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}=\frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}$

$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}+i+3i}{3+1}=\frac{4i}{4}=i=0+i$

$\therefore\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right)=\cot^{-1}\frac{0}{1}$

$=\cot^{-1}0=\frac{\pi}{2}$

এখন , $\arg z_1-\arg z_2=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi+\pi}{6}$

$=\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \arg(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{\pi}{2} = \arg z_1 - \arg z_2$ (Showed)

৪(b) মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\cdots\cdots\infty}}}$

[বুয়েট'১১-১২]

মনে করি , $y = \sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\cdots\cdots\infty}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3\cdots\cdots\infty}}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{-3+y}$

$\Rightarrow y^2 = -3 + y$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

$\Rightarrow y^2 - y + 3 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.3}}{2.1}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-11})$

$\therefore \sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\cdots\cdots\infty}}} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{11})$

(ii) $\sqrt{-2+2\sqrt{-2+2\sqrt{-2+\cdots\cdots\infty}}}$

[কুয়েট'০৭-০৮]

মনে করি , $y = \sqrt{-2+2\sqrt{-2+2\sqrt{-2+\cdots\cdots\infty}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{-2+2\sqrt{-2+2\sqrt{-2+2\sqrt{-2+\cdots\cdots\infty}}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{-2+2y}$

$\Rightarrow y^2 = -2 + 2y \Rightarrow y^2 - 2y + 2 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.2}}{2.1}$

$= \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4-8}) = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{-4})$

$= \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm i$

$\therefore \sqrt{-2+2\sqrt{-2+2\sqrt{-2+\cdots\cdots\infty}}} = 1 \pm i$

(iii) $\sqrt{i+\sqrt{i+\sqrt{i+\ldots\ldots\ldots\infty}}}$ [বুয়েট'০৩-০৪]

মনে করি , $y = \sqrt{i+\sqrt{i+\sqrt{i+\ldots\ldots\ldots\infty}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{i+\sqrt{i+\sqrt{i+\sqrt{i+\ldots\ldots\ldots\infty}}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{i+y} \Rightarrow = y^2 = i + y$

$\Rightarrow y^2 - y - i = 0$

$\Rightarrow y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-i)}}{2.1}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{1+4i}}{2}$

$\therefore \sqrt{i+\sqrt{i+\sqrt{i+\ldots\ldots\ldots\infty}}} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4i}}{2}$

৪(c) প্রমাণ কর যে,

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

প্রমাণ: মনে করি , $z_1 = a + ib$ এবং $z_2 = c + id$

তাহলে, $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$ এবং

$|z_2| = \sqrt{c^2 + d^2}$

$\therefore |z_1|^2 = a^2 + b^2$ এবং $|z_2|^2 = c^2 + d^2$

L.H.S.$= |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$

$= |a + ib + c + id|^2 + |a + ib - c - id|^2$

$= (a + c)^2 + (b + d)^2 + (a - c)^2 + (b - d)^2$

$= 2(a^2 + c^2) + 2(b^2 + d^2)$

$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

$= 2\{|z_1|^2 + |z_2|^2\} =$ R.H.S.

9. এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে দেখাও যে,

প্রমাণ ঃ

(a)

L.H.S.$= (1+\omega-\omega^2)(\omega+\omega^2-1)(\omega^2+1-\omega)$ [ব.'০৯; ঢা.'১২]

$= (-\omega^2-\omega^2)(-1-1)(-\omega-\omega)$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

$= (-2\omega^2)(-2)(-2\omega) = -8\omega^3$

$= -8.1 = -8 =$ R.H.S.

9(b) L.H.S $= (1-\omega+\omega^2)^2+(1+\omega-\omega^2)^2$ [কু. '০০]

$= (-\omega-\omega)^2+(-\omega^2-\omega^2)^2$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

$= (-2\omega)^2+(-2\omega^2)^2 = 4(\omega^2+\omega^4)$

$= 4(\omega^2+\omega) = 4(-1) = -4 =$ R.H.S.

9(c) L.H.S $= (x+y)^2+(x\omega+y\omega^2)^2+(x\omega^2+y\omega)^2$ [য.'০১; ঢা.'০৩; সি.'১১]

$= x^2+2xy+y^2+x^2\omega^2+2xy\omega^3+y^2\omega^4 + x^2\omega^4+2xy\omega^3+y^2\omega^2$

$= x^2+2xy+y^2+x^2\omega^2+2xy.1+y^2\omega + x^2\omega+2xy.1+y^2\omega^2$

$= x^2(1+\omega^2+\omega)+6xy+y^2(1+\omega+\omega^2)$

$= x^2.0+6xy+y^2.0 = 6xy =$ R.H.S.

9(d) L.H.S.$= (1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16})$ [ব.'০৫; রা.'০৮; য.'১১]

$= (1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)$. [$\because \omega^n = 1, \omega, \omega^2$ হবে যদি n কে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ যথাক্রমে 0, 1, 2 হয়।]

$= (1-\omega+\omega^2)^2(1-\omega^2+\omega)^2$

$= \{(-\omega-\omega)(-\omega^2-\omega^2)\}^2$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

$= \{(-2\omega)(-2\omega^2)\}^2 = (4\omega^3)^2$

$= (4.1)^2 = 16 =$ R.H.S.

9(e) $(-1+\sqrt{-3})^4+(-1-\sqrt{-3})^4 = -16$

[ব.'০৬; কু. '০৮,'১০,'১৩; য.'০৪,'১৩; ঢা. '০৯; চ.'১০ সি.'১২; রা.'১২]

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, $\omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ হলে $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হবে।

$\therefore -1+\sqrt{-3} = 2\omega$, $-1-\sqrt{-3} = 2\omega^2$

L.H.S. $= (-1+\sqrt{-3})^4+(-1-\sqrt{-3})^4$

$= (2\omega)^4+(2\omega^2)^4 = 16(\omega^4+\omega^8)$

$= 16(\omega+\omega^2) = 16(-1) = -16 =$ R.H.S

9(f) L.H.S.$= (1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)$

$= (-\omega-\omega)(-\omega^2-\omega^2)$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

$= (-2\omega)(-2\omega^2) = 4\omega^3 = 4.1 = 4 =$ R.H.S.

9(g) L.H.S.$= (1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3$

$= (-\omega^2-\omega^2)^3-(-\omega-\omega)^3$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

$= (-2\omega^2)^3-(-2\omega)^3 = -8\omega^6+8\omega^3$

$= -8.1+8.1 = 0 =$ R.H.S.

(h) L.H.S.$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)$

$= (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega)(1+\omega^2)$

$= (1+\omega)^2(1+\omega^2)^2 = (1+\omega^2+\omega+\omega^3)^2$

$= (0+1)^2 = 1 =$ R.H.S.

9(i) L.H.S. $= (1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)\ldots$ 2n উৎপাদক পর্যন্ত .

[ব.'১১; দি.'১৩]

$= (1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)(1-\omega+\omega^2)$

$(1-\omega^2+\omega)\cdots\cdots$ 2n উৎপাদক পর্যন্ত

$= \{(1-\omega+\omega^2)(1-\omega+\omega^2)\cdots\cdots n$ উৎপাদক পর্যন্ত $\}$ $\{(1-\omega^2+\omega)(1-\omega^2+\omega)\cdots$ $\cdots n$ উৎপাদক পর্যন্ত $\}$

$= (1-\omega+\omega^2)^n(1-\omega^2+\omega)^n$

$= (-\omega-\omega)^n(-\omega^2-\omega^2)^n$

$= \{(-2\omega)(-2\omega^2)\}^n = (4\omega^3)^n$

$= (2^2.1)^n = 2^{2n} = $ R.H.S.

10(a) উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ঃ

(i) $a^2+ab+b^2 = a^2+ab.1+b^2.1$

$= a^2+ab(-\omega-\omega^2)+b^2\omega^3$

$[\because 1+\omega+\omega^2=0$ এবং $\omega^3=1]$

$= a^2-ab\omega-ab\omega^2+b^2\omega^3$

$= a(a-b\omega)-b\omega^2(a-b\omega)$

$= (a-b\omega)(a-b\omega^2)$ (Ans.)

(ii) $a^2-ab+b^2 = a^2+ab(-1)+b^2.1$

$= a^2+ab(\omega+\omega^2)+b^2.\omega^3$

$[\because 1+\omega+\omega^2=0$ and $\omega^3=1]$

$= a^2+ab\omega+ab\omega^2+b^2\omega^3$

$= a(a+b\omega)+b\omega^2(a+b\omega)$

$= (a+b\omega)(a+b\omega^2)$ (Ans.)

(iii) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$= a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab(\omega+\omega^2)+$ $bc(\omega^4+\omega^2)+ca(\omega+\omega^2)$

$= a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab\omega+ab\omega^2+$ $bc\omega^4+bc\omega^2+ca\omega+ca\omega^2$

$= (a^2+ab\omega+ca\omega^2)+(ab\omega^2+b^2\omega^3+$ $bc\omega^4)+(ca\omega+bc\omega^2+c^2\omega^3)$

$= a(a+b\omega+c\omega^2)+b\omega^2(a+b\omega+c\omega^2)$ $+c\omega(a+b\omega+c\omega^2)$

$= (a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$ (Ans.)

(iv) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$= (a+b+c)\{a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+$ $ab(\omega+\omega^2)+bc(\omega^4+\omega^2)+ca(\omega+\omega^2)\}$

$= (a+b+c)\{a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab\omega+$ $ab\omega^2+bc\omega^4+bc\omega^2+ca\omega+ca\omega^2\}$

$= (a+b+c)\{(a^2+ab\omega+ca\omega^2)+(ab\omega^2+$ $b^2\omega^3+bc\omega^4)+(ca\omega+bc\omega^2+c^2\omega^3)\}$

$= (a+b+c)\{a(a+b\omega+c\omega^2)+$ $b\omega^2(a+b\omega+c\omega^2)+c\omega(a+b\omega+c\omega^2)\}$

$= (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$

(Ans.)

10(b) $p=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}),\ q=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ **হলে দেখাও যে, (*i*)** $p^3+p^{-3}=2$

(*ii*) $q^3+q^{-3}=2$ **(*iii*)** $(1-p)(1-q)=3$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $p=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$,

$q=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

আমরা জানি,

$\omega=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ হলে $\omega^2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হবে; যেখানে ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল।

$\therefore$ আমরা লিখতে পারি, $P=\omega$ এবং $q=\omega^2$

(i) $p^3+p^{-3}=\omega^3+\omega^{-3}$

$=\omega^3+\frac{1}{\omega^3}=1+\frac{1}{1}=1+1=2$

$\therefore\ p^3+p^{-3}=2$ (Showed)

(ii) $q^3 + q^{-3} = q^3 + \frac{1}{q^3} = (\omega^2)^3 + \frac{1}{(\omega^2)^3}$

$= \omega^6 + \frac{1}{\omega^6} = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$

$\therefore q^3 + q^{-3} = 2$ (Showed)

(iii) $(1 - p)(1 - q) = (1 - \omega)(1 - \omega^2)$

$= 1 - (\omega + \omega^2) + \omega^3 = 1 + 1 + 1$

$[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$ এবং $\omega^3 = 1]$

$\therefore (1 - p)(1 - q) = 3$ (Showed)

(iv) $p^4 + p^2q^2 + q^4$ [চুয়েট'১১-১২]

$= \omega^4 + \omega^2(\omega^2)^2 + (\omega^2)^4$

$= \omega^4 + \omega^6 + \omega^8 = \omega^3.\omega + (\omega^3)^2 + (\omega^3)^2\omega^2$

$= 1.\omega + (1)^2 + (1)^2\omega^2 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$

$\therefore p^4 + p^2q^2 + q^4 = 0$

11(a) $(a\omega^2 + b + c\omega)^3 + (a\omega + b + c\omega^2)^3 = 0$ হলে দেখাও যে, $a = \frac{1}{2}(b + c)$, অথবা $b = \frac{1}{2}(c + a)$, অথবা $c = \frac{1}{2}(a + b)$ [কু.'০২]

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$(a\omega^2 + b + c\omega)^3 + (a\omega + b + c\omega^2)^3 = 0$

$\Rightarrow (a\omega^2 + b + c\omega)^3 = -(a\omega + b + c\omega^2)^3$

$\Rightarrow \frac{(a\omega^2 + b + c\omega)^3}{(a\omega + b + c\omega^2)^3} = -1$

$\Rightarrow \left(-\frac{a\omega^2 + b + c\omega}{a\omega + b + c\omega^2}\right)^3 = 1$

$\therefore -\frac{a\omega^2 + b + c\omega}{a\omega + b + c\omega^2} = 1$, অথবা ω, অথবা ω^2

$[\because x^3 = 1$ হলে $x = 1, \omega, \omega^2]$

যদি $-\frac{a\omega^2 + b + c\omega}{a\omega + b + c\omega^2} = 1$ হয়, তাহলে

$a\omega^2 + b + c\omega = -a\omega - b - c\omega^2$

$\Rightarrow 2b = (a + b)(-\omega - \omega^2)$

$\Rightarrow 2b = a + b \quad \therefore b = \frac{1}{2}(a + b)$

যদি $-\frac{a\omega^2 + b + c\omega}{a\omega + b + c\omega^2} = \omega$ হয়, তাহলে

$a\omega^2 + b + c\omega = -a\omega^2 - b\omega - c\omega^3$

$\Rightarrow a\omega^2 + b + c\omega = -a\omega^2 - b\omega - c$

$\Rightarrow 2a\omega^2 = (b + c)(-1 - \omega) = (b + c)\omega^2$

$\Rightarrow 2a = b + c \quad [\because \omega^2 \neq 0]$

$\therefore a = \frac{1}{2}(b + c)$

যদি $-\frac{a\omega^2 + b + c\omega}{a\omega + b + c\omega^2} = \omega^2$ হয়, তাহলে

$a\omega^2 + b + c\omega = -a\omega^3 - b\omega^2 - c\omega^4$

$\Rightarrow a\omega^2 + b + c\omega = -a - b\omega^2 - c\omega$

$\Rightarrow 2c\omega = (a + b)(-1 - \omega^2) = (a + b)\omega$

$\Rightarrow 2c = a + b \quad [\because \omega \neq 0]$

$\therefore c = \frac{1}{2}(a + b)$

$\therefore a = \frac{1}{2}(b + c)$, অথবা $b = \frac{1}{2}(c + a)$,

অথবা $c = \frac{1}{2}(a + b)$ (Showed)

11(b) $x = p + q, y = p\omega + q\omega^2$, $z = p\omega^2 + q\omega$ হলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + z^2 = 6pq$

[সি.'০৭,'১৩; চ.'০৭,'০৯; ঢা.'১০,'১৩; রা.'১১; চ.'১২]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $x = p + q$,

$y = p\omega + q\omega^2$, $z = p\omega^2 + q\omega$

এখন, $x^2 + y^2 + z^2 = (p + q)^2 + (p\omega + q\omega^2)^2$

$+(p\omega^2+q\omega)^2$

$=p^2+q^2+2pq+p^2\omega^2+q^2\omega^4+2pq\omega^3+p^2\omega^4+q^2\omega^2+2pq\omega^3$

$=p^2+q^2+2pq+p^2\omega^2+q^2\omega+2pq+p^2\omega+q^2\omega^2+2pq$

$=6pq+p^2(1+\omega+\omega^2)+q^2(1+\omega+\omega^2)$

$=6pq+p^2.0+q^2.0$

$\therefore x^3+y^3+z^3=6pq$ (Showed)

11(c) প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $x=p+q$, $y=p+\omega q$, $z=p+\omega^2 q$ দেখাতে হবে যে,

$x^3+y^3+z^3=3(p^3+q^3)$

এখন, $x^3+y^3+z^3=(p+q)^3+(p+\omega q)^3+(p+\omega^2 q)^3$

$=p^3+q^3+3p^2q+3pq^2+p^3+\omega^3q^3+3p^2q\omega+3p\omega^2q^2+p^3+\omega^6q^3+3p^2q\omega^2+pq^2\omega^4)$

$=p^3+q^3+3p^2q+3pq^2+p^3+q^3+3p^2q\omega+3p\omega^2q^2+p^3+q^3+3p^2q\omega^2+3pq^2\omega$

$=3(p^3+q^3)+3p^2q(1+\omega+\omega^2)+3pq^2(1+\omega+\omega^2)$

$=3(p^3+q^3)+3p^2q.0+3pq^2.0$

$\therefore x^3+y^3+z^3=3(p^3+q^3)$

11(d) $p=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1})$ হলে দেখাও যে, $p^6+p^4+p^2+1=0$ [চ.'০৮,'১০; ব.'১১]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $p=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1})$

$\Rightarrow \sqrt{2}\,p=1+\sqrt{-1}=1+i \quad [\because i=\sqrt{-1}]$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই,

$2p^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$

$\therefore p^2=i$

এখন, $p^6+p^4+p^2+1=(p^2)^3+(p^2)^2+p^2+1$

$=i^3+i^2+i+1=-i-1+i+1$

$\therefore p^6+p^4+p^2+1=0$ (Showed)

11(e) $(a+b\omega+c\omega^2)^2+(a\omega+b+c\omega^2)^2+(a\omega+b\omega^2+c)^2=0$ **হলে দেখাও যে,** $a=c$ **অথবা,** $b=\frac{1}{2}(a+c)$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $(a+b\omega+c\omega^2)^2+(a\omega+b+c\omega^2)^2+(a\omega+b\omega^2+c)^2=0$

$\Rightarrow a^2+b^2\omega^2+c^2\omega^4+2ab\omega+2bc\omega^3+2ca\omega^2+a^2\omega^2+b^2+c^2\omega^4+2ab\omega+2bc\omega^2+2ca\omega^3+a^2\omega^2+b^2\omega^4+c^2+2ab\omega^3+2bc\omega^2+2ca\omega=0$

$\Rightarrow a^2(1+2\omega^2)+b^2(1+\omega^2+\omega^4)+c^2(1+2\omega^4)+2ab(2\omega+\omega^3)+2bc(\omega^3+2\omega^2)+2ca(\omega^2+\omega^3+\omega)=0$

$\Rightarrow a^2(1+2\omega^2)+b^2(1+\omega^2+\omega)+c^2(1+2\omega)+2ab(2\omega+1)+2bc(1+2\omega^2)+2ca(\omega^2+1+\omega)=0$

$\Rightarrow a^2(-\omega-\omega^2+2\omega^2)+b^2\times 0+c^2(-\omega-\omega^2+2\omega)+2ab(2\omega-\omega^2-\omega)+2bc(-\omega-\omega^2+2\omega^2)+2ca\times 0=0$

$\Rightarrow a^2(\omega^2-\omega)+c^2(\omega-\omega^2)+2ab(\omega-\omega^2)+2bc(\omega^2-\omega)=0$

$\Rightarrow (\omega^2-\omega)(a^2-c^2-2ab+2bc)=0$

$\Rightarrow a^2-c^2-2ab+2bc=0 \quad [\because \omega^2-\omega\neq 0]$

$\Rightarrow (a-c)(a+c)-2b(a-c)=0$

$\Rightarrow (a-c)(a+c-2b)=0$

$\therefore a-c=0 \Rightarrow a=c$ অথবা, $a+c-2b=0$

$\Rightarrow b = \frac{1}{2}(a + c)$ (Showed)

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $(a + b\omega + \omega^2)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 + (a\omega + b\omega^2 + c)^2 = 0$

$\Rightarrow (a\omega^3 + b\omega^4 + c\omega^2)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 + (a\omega + b\omega^2 + c)^2 = 0$

$\Rightarrow \{\omega^2(a\omega + b\omega^2 + c)\}^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 + (a\omega + b\omega^2 + c)^2 = 0$

$\Rightarrow (\omega^4 + 1)(a\omega + b\omega^2 + c)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 = 0$

$\Rightarrow (\omega + 1)(a\omega + b\omega^2 + c)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 = 0$

$\Rightarrow -\omega^2(a\omega + b\omega^2 + c)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 = 0$

$\Rightarrow -(a\omega^2 + b\omega^3 + c\omega)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 = 0$

$\Rightarrow (a\omega + b + c\omega^2)^2 - (a\omega^2 + b + c\omega)^2 = 0$

$\Rightarrow (a\omega + b + c\omega^2 + a\omega^2 + b + c\omega)(a\omega + b + c\omega^2 - a\omega^2 - b - c\omega) = 0$

$\Rightarrow \{a(\omega + \omega^2) + 2b + c(\omega^2 + \omega)\}\{a(\omega - \omega^2) - c(\omega - \omega^2)\} = 0$

$\Rightarrow \{a(-1) + 2b + c(-1)\}(a - c)(\omega - \omega^2) = 0$

$\Rightarrow (2b - a - c)(a - c) = 0$

[∵ এখানে $\omega^2 - \omega \neq 0$]

$\therefore a = c$ অথবা $b = \frac{1}{2}(a + c)$

11(f) $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$ হলে দেখাও যে, $a_0 + a_3 + a_6 + \cdots = 3^{n-1}$

[চ.'০৮]

প্রমাণ ঃ $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots + a_{2n}x^{2n}$ ------- (1)

(1) -এ $x = 1$ বসিয়ে আমরা পাই,

$(1 + 1 + 1)^n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots$

$\Rightarrow 3^n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 +$ ------ (2)

(1) -এ $x = \omega$ বসিয়ে আমরা পাই,

$(1 + \omega + \omega^2)^n = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + a_4\omega^4 + a_5\omega^5 + a_6\omega^6 + \cdots\cdots$

$\Rightarrow 0 = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3 + a_4\omega + a_5\omega^2 + a_6 + \cdots\cdots$ ----- (3)

(1) -এ $x = \omega^2$ বসিয়ে আমরা পাই,

$(1 + \omega^2 + \omega^4)^n = a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + a_3\omega^6 + a_4\omega^8 + a_5\omega^{10} + a_6\omega^{12} + \cdots\cdots$

$\Rightarrow (1 + \omega + \omega^2)^n = a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega + a_3 + a_4\omega^2 + a_5\omega + a_6 + \cdots\cdots$

$\Rightarrow 0 = a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega + a_3 + a_4\omega^2 + a_5\omega + a_6 + \cdots\cdots$ ------- (4)

(2), (3) এবং (4) যোগ করে পাই,

$3^n = 3(a_0 + a_3 + a_6 + \cdots\cdots) + (a_1 + a_2 + a_4 + a_5 \cdots\cdots)(1 + \omega + \omega^2)$

$\Rightarrow 3^n = 3(a_0 + a_3 + a_6 + \cdots\cdots) + (a_1 + a_2 + a_4 + a_5 \cdots\cdots).0$

$\Rightarrow 3^n = 3(a_0 + a_3 + a_6 + \cdots\cdots)$

$\therefore a_0 + a_3 + a_6 + \cdots\cdots = 3^{n-1}$ (Showed)

12(a) $x + y + z = 0$ এবং এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে দেখাও যে, $(x + y\omega + z\omega^2)^3 + (x + y\omega^2 + z\omega)^3 = 27xyz$

[রা.'০২,'০৭,'১০ ;ঢা.'০৫,'০৭; সি.'১০; ব.'১৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $x + y + z = 0$

মনে করি, $a = x + y\omega + z\omega^2$ এবং

$b = x + y\omega^2 + z\omega$

$\therefore a^3 + b^3 = (a + b$ ...

$= (a + b)\{a^2 + (\omega + \omega^2)ab + b^2\omega^3\}$

$= (a + b)(a + \omega b)(a + \omega^2 b)$

$= (x + y\omega + z\omega^2 + x + y\omega^2 + z\omega)$

$\{x + y\omega + z\omega^2 + \omega(x + y\omega^2 + z\omega)\}$

$\{x + y\omega + z\omega^2 + \omega^2(x + y\omega^2 + z\omega)\}$

$= \{2x + y(\omega + \omega^2) + z(\omega + \omega^2)\}$

$\{x + y\omega + z\omega^2 + x\omega + y + z\omega^2\}$

$\{x + y\omega + z\omega^2 + x\omega^2 + y\omega + z\}$

$= \{2x + y(-1) + z(-1)\}$

$\{x(1 + \omega) + y(1 + \omega) + 2z\omega^2\}$

$\{x(1 + \omega^2) + 2y\omega + z(1 + \omega^2)\}$

$= (2x - y - z)\{x(-\omega^2) + y(-\omega^2)$

$+ 2z\omega^2\}\{x(-\omega) + 2y\omega + z(-\omega)\}$

$= \{3x - (x + y + z)\}\{-(x + y + z)$

$+ 3z\}\omega^2\{3y - (x + y + z)\}\omega$

$= \{3x - 0\}\{-0 + 3z\}\{3y - 0\}\omega^3$

$= 27xyz$ = R.H.S. (Proved)

12(b) প্রমাণ কর যে, $[\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})]^n + [\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})]^n = 2$ এবং -1, যখন n-এর মান যথাক্রমে 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং 3 দ্বারা অবিভাজ্য ।

[কু.'০৬; ঢা.'০৮; রা., য. '০৯]

প্রমান ঃ আমরা জানি,

$\omega = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ হলে, $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$,

যেখানে এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω.

L.H.S. $= [\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})]^n + [\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})]^n$

$= \omega^n + (\omega^2)^n$

n −এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে মনে করি,

$n = 3m$, যেখানে $m \in \mathbb{N}$.

$\therefore \omega^n + (\omega^2)^n = \omega^{3m} + (\omega^2)^{3m}$

$= (\omega^3)^m + (\omega^3)^{2m} = 1^m + 1^{2m} = 1 + 1 = 2$

n -এর মান 3 দ্বারা অবিভাজ্য হলে মনে করি, $n = 3m + 1$ অথবা $n = 3m + 2$, যেখানে $m \in \mathbb{N}$.

$n = 3m + 1$ হলে,

$\omega^n + (\omega^2)^n = \omega^{3m+1} + (\omega^2)^{3m+1}$

$= \omega^{3m}.\omega + \omega^{6m}.\omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$

$n = 3m + 2$ হলে,

$\omega^n + (\omega^2)^n = \omega^{3m+2} + (\omega^2)^{3m+2}$

$= \omega^{3m}.\omega^2 + \omega^{6m}.\omega^4 = \omega^2 + \omega = -1$

$\therefore [\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})]^n + [\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})]^n =$ 2 অথবা -1, যখন n -এর মান 3 দ্বারা যথাক্রমে বিভাজ্য এবং 3 দ্বারা অবিভাজ্য ।

12(c) প্রমাণ কর যে, $(1 - \omega^{3n-1})(1 - \omega^{3n-2}) = 3$; যেখানে $n \in \mathbb{N}$.

L.H.S. $= (1 - \omega^{3n-1})(1 - \omega^{3n-2})$

$= (1 - \frac{\omega^{3n}}{\omega})(1 - \frac{\omega^{3n}}{\omega^2})$

$= (1 - \frac{1}{\omega})(1 - \frac{1}{\omega^2})$ [$\because n \in \mathbb{N}$, $\omega^{3n} = 1$]

$= (1 - \omega^2)(1 - \omega)$ [$\because \omega^3 = 1 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{\omega}$]

$= 1 - (\omega^2 + \omega) + \omega^3 = 1 - (-1) + 1$

$= 3$ = R.H.S. (Proved)

13(a) $\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4}$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট হবে-

[DU '12-13]

A. $-\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $-\pi$ D. π

$Sol^n.:$ $\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4}=\frac{i^2+2i+1}{(i^2-2i+1)^2}$

$=\frac{-1+2i+1}{(-1-2i+1)^2}=\frac{2i}{(-2i)^2}=\frac{2i}{4i^2}$

$=\frac{i}{2(-1)}=-\frac{1}{2}i$

$\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4}$ এর আর্গুমেন্ট $=\tan^{-1}\frac{-1/2}{0}$

$=-\tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}$

13(b) $\sqrt{-16}\times\sqrt{-1}$ এর মান কত?

[Textile '10-11]

A. 4i **B.** 4ω **C.** −4 **D.** 4

$Sol^n.:$ $\sqrt{-16}\times\sqrt{-1}=\sqrt{16i^2}\times\sqrt{i^2}$

$=4i\times i=4i^2=4(-1)=-4$

(c) $i^2=-1$ হলে, $i+i^2+i^3+\cdots\cdots+i^{23}=?$

A. i **B.** −i **C.** 1 **D.** −1

$Sol^n.:$ $i+i^2+i^3+\cdots\cdots+i^{23}$

$=i\frac{1-i^{23}}{1-i}=i\frac{1-(i^2)^{11}i}{1-i}=i\frac{1-(-1)^{11}i}{1-i}$

$=i\frac{1-(-1)i}{1-i}=i\frac{1+i}{1-i}=i\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$

$=i\frac{2i}{2}=i^2=-1$

14 সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x)=x^2+x+1$

(a) $f(x)=x^2+2.x.\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}$

$=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

$x+\frac{1}{2}=0$ অর্থাৎ $x=-\frac{1}{2}$ হলে f(x) এর মা ক্ষুদ্রতম হবে। x এর এ বাস্তব মানের জন্য f(x) এ ক্ষুদ্রতম মান $\frac{3}{4}$.

14(b) f(x) = 0 হলে, $x^2+x+1=0$

$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4.1}}{2.1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$

$=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$ যাদের প্রত্যেকটি জটিল সংখ্যার সাধারণ আকার $x+iy$ এর অনুরূপ। সুতরাং, x এর দুইটি জটিল মান পাওয়া যায়।

এখন, $\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\}^2$

$=\frac{1}{4}\{1+2(-1)\sqrt{-3}+(\sqrt{-3})^2\}$

$=\frac{1}{4}\{1-2\sqrt{-3}-3\}$

$=\frac{1}{4}\{-2-2\sqrt{-3}\}=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

আবার, $\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}^2$

$=\frac{1}{4}\{1+2\sqrt{-3}-3\}$

$=\frac{1}{4}(-2-2\sqrt{-3})=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$

$\therefore$ জটিল সংখ্যা দুইটির একটি অপরটির বর্গ।

14(c) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ এর আর্গুমেন্ট $=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}$

$=\pi-\tan^{-1}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ এর আর্গুমেন্ট $=\tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2}$

$$= -\pi + \tan^{-1}\sqrt{3} = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1 দেখাও যে,

(a) $(1-i)^{-2} - (1+i)^{-2} = i$

প্রমাণ ঃ $(1-i)^{-2} - (1+i)^{-2}$

$$= \frac{1}{(1-i)^2} + \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)^2(1+i)^2}$$

$$= \frac{4i}{\{(1-i)(1+i)\}^2} = \frac{4i}{(1^2 - i^2)^2}$$

$$= \frac{4i}{(1+1)^2} = \frac{4i}{4}$$

$\therefore\ (1-i)^{-1} - (1+i)^{-1} = i$ (Showed)

1(b) $(3+4i)^{-\frac{1}{2}} + (3-4i)^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$

প্রমাণ ঃ $(3+4i)^{-\frac{1}{2}} + (3-4i)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3+4i}} + \frac{1}{\sqrt{3-4i}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4-1+4i}} + \frac{1}{\sqrt{4-1-4i}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^2 + i^2 + 2.2.i}} + \frac{1}{\sqrt{2^2 + i^2 - 2.2.i}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2+i)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2-i)^2}} = \frac{1}{2+i} + \frac{1}{2-i}$$

$$= \frac{1}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+2+i}{2^2 - i^2} = \frac{4}{4+1}$$

$\therefore\ (3+4i)^{-\frac{1}{2}} + (3-4i)^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$ (Showed)

1(c) $(5+12i)^{-1/2} + (5-12i)^{-1/2} = \frac{6}{13}$

প্রমাণ ঃ $(5+12i)^{-\frac{1}{2}} + (5-12i)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5+12i}} + \frac{1}{\sqrt{5-12i}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9-4+12i}} + \frac{1}{\sqrt{9-4-12i}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3^2 + (2i)^2 + 2.3.2i}} + \frac{1}{\sqrt{3^2 + (2i)^2 - 2.3.2i}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(3+2i)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(3-2i)^2}} = \frac{1}{3+2i} + \frac{1}{3-2i}$$

$$= \frac{1}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i+3+2i}{3^2 - (2i)^2}$$

$$= \frac{6}{9-4i^2} = \frac{6}{9+4}$$

$\therefore\ (5+12i)^{-\frac{1}{2}} + (5-12i)^{-\frac{1}{2}} = \frac{6}{13}$ (Showed)

2.(a) $\frac{2+i}{2+3i} = x + iy$ হলে, দেখাও যে, $13(x^2 + y^2) = 5$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\frac{2+i}{2+3i} = x + iy \cdots\cdots$ (i)

i কে $-i$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$\frac{2-i}{2-3i} = x - iy \cdots\cdots\cdots$ (ii)

$$(i) \times (ii) \Rightarrow \frac{2+i}{2+3i} \times \frac{2-i}{2-3i} = (x+iy)(x-iy)$$

$$\Rightarrow \frac{2^2 - i^2}{2^2 - (3i)^2} = x^2 - (iy)^2 \Rightarrow \frac{4+1}{4+9} = x^2 + y^2$$

$\therefore\ 13(x^2 + y^2) = 5$ (Showed)

2(b) $x + iy = \frac{2}{3 + \cos\theta + i\sin\theta}$ হলে দেখাও যে, $2(x^2 + y^2) = 3x - 1$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$$x + iy = \frac{2}{3 + \cos\theta + i\sin\theta}$$

$$= \frac{2(3+\cos\theta - i\sin\theta)}{\{(3+\cos\theta)+i\sin\theta\}\{(3+\cos\theta)-i\sin\theta\}}$$

$$= \frac{2(3+\cos\theta)-2i\sin\theta}{(3+\cos\theta)^2 - i^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{2(3+\cos\theta)-2i\sin\theta}{9+6\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow x+iy = \frac{2(3+\cos\theta)}{2(5+3\cos\theta)} + \frac{-2i\sin\theta}{2(5+3\cos\theta)}$$

$$\therefore\ x = \frac{3+\cos\theta}{5+3\cos\theta},\quad y = \frac{-\sin\theta}{5+3\cos\theta}$$

এখন, $x^2+y^2 = \frac{9+6\cos\theta+\cos^2\theta}{(5+3\cos\theta)^2} + \frac{\sin^2\theta}{(5+3\cos\theta)^2}$

$$= \frac{9+6\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(5+3\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{2(5+3\cos\theta)}{(5+3\cos\theta)^2} = \frac{2}{5+3\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{3(3+\cos\theta)-(5+3\cos\theta)}{5+3\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{3(3+\cos\theta)}{5+3\cos\theta} - \frac{5+3\cos\theta}{5+3\cos\theta}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(3x-1)$$

$$\therefore\ 2(x^2+y^2) = 3x-1$$

2(c) $13x^2 - 28xy + 17y^2 = 0$ হলে, $x : y$ কত ?

সমাধান: দেওয়া আছে, $13x^2 - 28xy + 17y^2 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{28y \pm \sqrt{784y^2 - 4.13.17y^2}}{2.13}$$

$$= \frac{28 \pm \sqrt{784-884}}{26}y = \frac{28 \pm 10i}{26}y$$

$$\therefore\ x : y = 14 \pm 5i : 13$$

3.(a) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} = \frac{(1+i)^n(1-i)^2}{(1-i)^n}$

$$= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n (1-2.1.i+i^2)$$

$$= \left\{\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right\}^n (1-2i-1)$$

$$= \left\{\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right\}^n(-2i) = \left\{\frac{1+2i-1}{1+1}\right\}^n(-2i)$$

$$= \left\{\frac{2i}{2}\right\}^n(-2i) = i^n(-2i) = -2i^{n+1} \text{ (Ans.)}$$

3(b) $3 + ix^2y$ এবং $x^2 + y + 4$ র পরস্পর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা। x এবং y এর বাস্তব মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $3 + ix^2y$ এবং x^2+y+4i পরস্পর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা।

$\therefore\ x^2 + y = 3 \Rightarrow x^2 = 3 - y \;\dots\dots (1)$ এবং

$x^2y = -4 \Rightarrow (3-y)y = -4$

$\therefore\ y^2 - 3y - 4 = 0$

$\Rightarrow (y-4)(y+1) = 0$

$\therefore\ y = 4$ অথবা, $y = -1$

$y = 4$ হলে, $x^2 = 3 - 4 = -1 \in \mathbb{R}$

$y = -1$ হলে, $x^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\therefore\ x = \pm 2,\ y = -1$ (Ans.)

3(c) প্রমাণ কর যে, $\left\{\frac{1+(i)^{4n+1}}{1+(i)^{4n+3}}\right\}^{2(2m+1)} = -1$; যেখানে $m, n \in \mathbb{N}$.

$$\text{L.H.S.} = \left\{\frac{1+(i)^{4m+1}}{1+(i)^{4m+3}}\right\}^{2(2m+1)} = \left\{\frac{1+i}{1-i}\right\}^{2(2m+1)}$$

[$\because$ $n \in \mathbb{N}$ এবং $i^{4m+1} = i, i^{4m+3} = -i$]

$$= \left\{\frac{1+i}{1-i}\right\}^{4m+2} = \left\{\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right\}^{4m+2}$$

$$= \left\{\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right\}^{4m+2} = \left\{\frac{1+2i-1}{1+1}\right\}^{4m+2}$$

$$= \left\{\frac{2i}{2}\right\}^{4m+2} = i^{4m+2}$$

$= -1 =$ R.H.S. [$\because$ $m \in \mathbb{N}$ এবং $i^{4m+2} = -1$]

3(d) প্রমাণ কর যে, $(1 + i^{4n+1})(1 + i^{4n-1}) = 2$; যেখানে $n \in \mathbb{N}$.

L. H. S. $= (1 + i^{4n+1})(1 + i^{4n-1})$

$$= (1 + i^{4n}.i)(1 + \frac{i^{4n}}{i})$$

$= (1+i)(1+\frac{1}{i})$ [$\because$ $n \in \mathbb{N}$ এবং $i^{4n} = 1$]

$$= (1+i)(1+\frac{-i^2}{i}) = (1+i)(1-i)$$

$$= 1^2 - i^2 = 1 + 1 = 2 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ ঃ

1. $-2-2i$ জটিল রাশিটির আর্গুমেন্ট-[BUET 07-08; IU 08-09; CU 09-10,08-09; JU 09-10]

Sol^n.: $-2-2i$ এর আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\frac{-2}{-2} = -\pi + \tan^{-1}1 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, Mode 2 (Complex)

Shift ((arg) ((arg) − 2 − 2 ENG (i)) (x) =

Shift) (abc) (x) ((arg) − 2 − 2 ENG (i)) (x) =

-135^0 যা $-\frac{3\pi}{4}$ এর সমান।

$2\sqrt{2}$; যা প্রদত্ত জটিল রাশির মডুলাস।

2. $\frac{2+3i}{2-i} = P + Qi$ হলে এবং P ,Q বাস্তব সংখ্যা হলে Q = ? [BAU 07-08]

Sol^n.: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে,

((arg) 2 + 3 ENG (i)) (x) ÷ ((arg) 2 − ENG (i)) (x) = 1/5 (Real part)

Shift = 8/5 (Imaginary part

$\therefore$ $Q = \frac{8}{5}$

3. i^{-49} এর মান– [BUET 06-07; JU 09-10]

Sol^n.: $i^{-49} = i^{-1} = -i$

4. $i^2 = -1$ হলে $\frac{i - i^{-1}}{i + 2i^{-1}}$ এর মান কত? [DU 07-08, Jt.U 08-09]

Sol^n.: $\frac{i - i^{-1}}{i + 2i^{-1}} = \frac{2i}{-i} = -2$

[$\because$ $i^{-1} = -i, i^{-2} = -1, i^{-3} = i, i^{-4} = 1$]

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও উত্তর পাওয়া যায়।

5. $i^2 = -1$ হলে $\frac{i + i^{-1}}{i - i^{-1}}$ এর মান কত?[DU05-06]

$Sol^n.: \dfrac{i+i^{-1}}{i-i^{-1}} = \dfrac{i-i}{i+i} = 0$

6. $\dfrac{i}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{i}}}$ এর মান– **[DU 06-07; NU 08-09]**

$Sol^n.: \dfrac{i}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{i}}} = \dfrac{i}{1-\dfrac{1}{1+i}} = \dfrac{i(1+i)}{1+i-1} = 1+i$

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও উত্তর পাওয়া যায়।

7. $x=-1+i$ হলে x^3+3x^2+4x+7 এর মান– **[DU 05-06; RU 09-10]**

$Sol^n.:$ ক্যালকুলেটরের সাহায্যে,

( ) 1 + ENG =

Shift x^2 x^3 [illegible]

Ans + 7 = 5 Shift ( ) = 0.

8. $17-20\sqrt{-2}$ এর বর্গমূল– **[RU 07-08]**

A. $\pm(5-2\sqrt{2}i)$ B. $\pm(4-3\sqrt{3}i)$

C. $\pm(4-3\sqrt{2}i)$ D. $\pm(5-3\sqrt{2}i)$

$Sol^n.: 17-20\sqrt{-2}$ এর বর্গমূল

$=\pm\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2-2.5.2\sqrt{2}i} = \pm(5-2\sqrt{2}i)$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, প্রদত্ত Option গুলোর মধ্যে যাকে বর্গ করে $17-20\sqrt{2}i$ বা $17-28.28i$ পাওয়া যাবে সেটিই উত্তর।

((arg) 5 − 2 √ 2 ENG i) x x^2 x^3 (abc)

= 17 Shift ( ) = $-28.28i$

9. $7-24i$ এর বর্গমূল – **[BUET 09-10]**

$Sol^n.: 7-24i$ এর বর্গমূল

$=\pm\sqrt{4^2+(3i)^2-2.4.3i} = \pm(4-3i)$

10. $\sqrt{i}+\sqrt{-i}$ এর মান– **[BUET 05-06, KUET 08-09, 06-07; CU 07-08,05-06; RUET 12-13]**

$Sol^n.: \sqrt{i}+\sqrt{-i} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2i}+\sqrt{-2i})$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{(1+i)^2}+\sqrt{(1-i)^2}\} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\{1+i+1-i\}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times 2 = \sqrt{2}$

11. $\sqrt{-2}\sqrt{-1}$ এর মান– **[CU 08-09]**

$Sol^n.: \sqrt{-2}\sqrt{-1} = \sqrt{2i^2}\sqrt{i^2} = \sqrt{2}i.i$

$=\sqrt{2}i^2 = -\sqrt{2}$

12. $\sqrt[4]{-81}$ এর মান– **[BUET 08-09]**

$Sol^n.: \sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{(9i)^2} = \sqrt{\pm 9i}$

$=\sqrt{\dfrac{9}{2}(\pm 2i)} = \sqrt{\dfrac{9}{2}(1+i^2\pm 2i)}$

$=\sqrt{\dfrac{9}{2}(1\pm i)^2} = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

13. $\sqrt[4]{-169}$ এর মান– **[SU 06-07; RU 06-07]**

$Sol^n.: \sqrt[4]{-169} = \sqrt[4]{(13i)^2} = \sqrt{\pm 13i}$

$=\sqrt{\dfrac{13}{2}(\pm 2i)} = \sqrt{\dfrac{13}{2}(1+i^2\pm 2i)}$

$=\sqrt{\dfrac{26}{4}(1\pm i)^2} = \pm\dfrac{\sqrt{26}}{2}(1\pm i)$

14. $\sqrt[6]{-64}$ এর সম্ভাব্য মান– **[KU 07-08]**

$Sol^n.:$ ধরি, $\sqrt[6]{-64} = x \Rightarrow x^6 = -64 = (-4)^3$

$\therefore\ x^2 = -4, -4.\dfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}i)$

$= -4,\ (2 \pm 2\sqrt{3}i) = (2i)^2,\ (\sqrt{3} \pm i)^2$

$\therefore\ x = \sqrt[6]{-64} = \pm 2i, \pm(\sqrt{3} \pm i)$

কৌশল : $\sqrt{-n + n\sqrt{-n + n\sqrt{-n + \cdots\cdots\infty}}}$

$= \dfrac{n \pm \sqrt{n^2 - 4n}}{2}$

15. $\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \cdots\infty}}}$ এর মান কত? **[JU 06-07; KUET 07-08]**

Sol^n.: $\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \cdots\infty}}}$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4.2}}{2} = 1 \pm i$

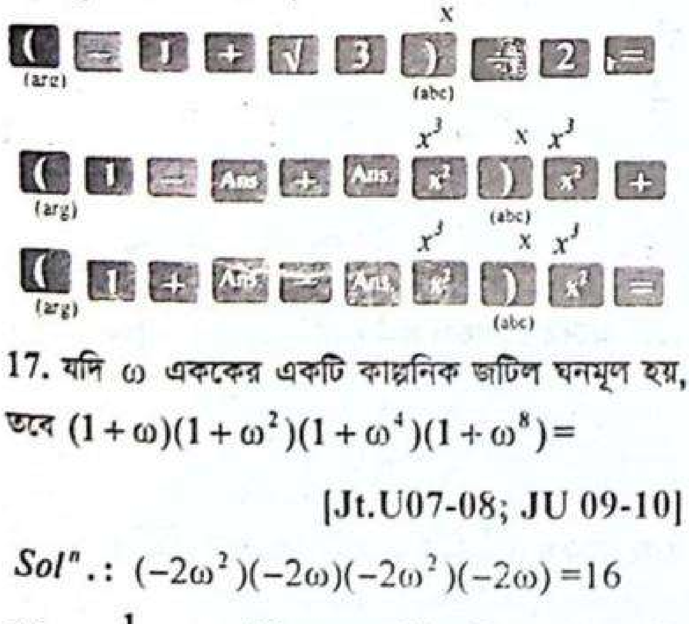
16. যদি ω এককের একটি কাল্পনিক জটিল ঘনমূল হয়, তবে $(1 - \omega + \omega^2)^2 + (1 + \omega - \omega^2)^2 =$

[DU 05-06; 01-02, 97-98; Jt.U 08-09]

Sol^n.: $(1 - \omega + \omega^2)^2 + (1 + \omega - \omega^2)^2$

$= (-2\omega)^2 + (-2\omega^2)^2 = 4(\omega + \omega^2) = -4$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে,



17. যদি ω এককের একটি কাল্পনিক জটিল ঘনমূল হয়, তবে $(1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^4)(1 + \omega^8) =$

[Jt.U07-08; JU 09-10]

Sol^n.: $(-2\omega^2)(-2\omega)(-2\omega^2)(-2\omega) = 16$

18. $x = \dfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ হলে $x^{3(n+2)}$ এর মান কত?

[BAU 05-06]

Sol^n.: এখানে, $x = \omega$ $[\because \omega^{3(n+2)} = 1$

19. $z_1 = 2 + i$ এবং $z_2 = 3 + i$ হলে $z_1\bar{z}_2$-এর মডুলাস- **DU 13-14**

A. 6 B. $5\sqrt{2}$ C. 7 D. $5\sqrt{3}$

Sol^n.: $z_1\bar{z}_2 = (2 + i)(3 - i) = 6 - i^2 + i$

$= 7 + i$

$\therefore$ মডুলাস $= \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

20. যদি $a = \dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}$ হয়, তবে a^6 এর মান হবে-

BUET 11-12

A. -1 B. i C. 1 D. $-i$

Sol^n.: $a^2 = \dfrac{1 + 2i + i^2}{2} = \dfrac{1 + 2i - 1}{2} = i$

$\therefore\ a^6 = (a^2)^3 = i^3 = -i$

1. উৎপাদকের সাহায্যে সমাধান কর:

সমাধান: **(a)** $x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.3 + 3^2 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 3, 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 3, 3$

1(b) $7x - 2 - 3x^2 = 0$

$\Rightarrow \quad 3x^2 - 7x + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad 3x^2 - 6x - x + 2 = 0;$

[$\because ac = 3 \times 2 = 6 > 0$ এবং $b = -7 < 0$]

$\Rightarrow \quad 3x(x-2) - 1(x-2) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-2)(3x-1) = 0$

$x - 2 = 0$ হলে, $x = 2$; $3x - 1 = 0$ হলে, $x = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2, \frac{1}{3}$

1(c) $2^{2x} - 3.2^{x+2} = -32$

$\Rightarrow \quad 2^{2x} - 3.2^x.2^2 + 32 = 0$

$\Rightarrow \quad (2^x)^2 - 12.2^x + 32 = 0$

$\Rightarrow \quad (2^x)^2 - 8.2^x - 4.2^x + 32 = 0$

$\Rightarrow \quad 2^x(2^x - 8) - 4(2^x - 8) = 0$

$\Rightarrow \quad (2^x - 8)(2^x - 4) = 0$

$2^x - 8 = 0$ হলে, $2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

$2^x - 4 = 0$ হলে, $2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2, 3$

2(a) দেখাও যে, $x^2 + 4x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $-2 + \sqrt{2}$ এবং $-2 - \sqrt{2}$.

প্রমাণ: $x^2 + 4x + 2 = 0$

$\therefore \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2}$

$= \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় $-2 + \sqrt{2}$ এবং $-2 - \sqrt{2}$.

2(b) $e^{2x} + 4e^x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় x_1 ও x_2 হলে, দেখাও যে, $x_1 + x_2 = \ln 2$.

প্রমাণ: $e^{2x} + 4e^x + 2 = 0$

অর্থাৎ $(e^x)^2 + 4e^x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় x_1 ও x_2 বলে, $e^{x_1} e^{x_2} = \frac{2}{1} \Rightarrow e^{x_1 + x_2} = 2$

$\therefore \quad x_1 + x_2 = \ln 2.$

2(c) কোন একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হলে সমীকরণটি নির্ণয় কর।

[SUST'12-13]

সমাধান: দ্বিঘাত সমীকরণের প্রদত্ত মূল $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$, যা জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ সমীকরণের অপর মূলটি হবে $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$

[$\because$ জটিল মূল যুগল রূপে আসে]

$\therefore$ এদের যোগফল $= \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3} \; -1+\sqrt{-3})$

$= \frac{1}{2}(-2) = -1$

এবং গুণফল $= \frac{1}{4}(-1-\sqrt{-3})(-1+\sqrt{-3})$

$= \frac{1}{4}\{(-1)^2 - (\sqrt{-3})^2\}$

$= \frac{1}{4}(1+3) = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমী... $+1 = 0$

$\Rightarrow \; x^2 + x + 1 = 0$ (Ans.)

2(d) বাস্তব সহগের একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $3 + 2i$ হলে, সমীকরণটি নির্ণয় কর।[SUST'10-11]

সমাধানঃ দ্বিঘাত সমীকরণের প্রদত্ত মূলটি $3 + 2i$, যা জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ সমীকরণের অপর মূলটি হবে $3 - 2i$

[$\because$ জটিল মূল যুগল রূপে আসে ।]

$\therefore$ এদের যোগফল $= 3 + 2i + 3 - 2i = 6$

এবং গুণফল $= (3 + 2i)(3 - 2i) = 3^2 - (2i)^2$

$= 9 - 4i^2 = 9 - 4(-1) = 13$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - 6x + 13 = 0$

2(e) মূলদ সহগ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন কর যার একটি মূল $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}$. [SUST'07-08]

সমাধানঃ $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}} = \dfrac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}$

$= \dfrac{2+\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2} = \dfrac{2+\sqrt{5}}{4-5} = -2-\sqrt{5}$, যা অমূলদ সংখ্যা।

$\therefore$ দ্বিঘাত সমীকরণের অপর মূলটি হবে $-2 + \sqrt{5}$

[$\because$ অমূলদ মূল যুগল রূপে আসে ।]

$\therefore$ এদের যোগফল $= -2 - \sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} = -4$

এবং গুণফল $= (-2 - \sqrt{5})(-2 + \sqrt{5})$

$= (-2)^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - (-4)x - 1 = 0$

$\Rightarrow \; x^2 + 4x - 1 = 0$

3.(a) $3x^2 + 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর এবং সমাধান করে তোমার উক্তির সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান ঃ পৃথায়ক $= 2^2 - 4.3.1 = 4 - 12 = -8 < 0$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি জটিল ও অসমান ।

এখন , $3x^2 + 2x + 1 = 0$

$\therefore \; x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4.3.1}}{2.1} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$

$= \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{-2}}{2} = -1 \pm \sqrt{-2}$

$\therefore \; x = -1 + \sqrt{-2}\,,\; -1 - \sqrt{-2}$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি জটিল ও অসমান ।

(যাচাই করা হল)

(b) দেখাও যে, $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-k} = 0$ সমীকরণটির মূলগুলো k এর সকল বাস্তব মানের জন্য বাস্তব হবে।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-k} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x-k}$

$\Rightarrow \dfrac{x+x-1}{x(x-1)} = -\dfrac{1}{x-k} \Rightarrow \dfrac{2x-1}{x^2-x} = -\dfrac{1}{x-k}$

$\Rightarrow 2x^2 - 2kx - x + k = -x^2 + x$

$\Rightarrow 3x^2 - 2kx - 2x + k = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 2(k+1)x + k = 0$

$\therefore$ পৃথায়ক $= \{-2(k+1)\}^2 - 4.3.k$

$= 4(k^2 + 2k + 1 - 3k)$

$= 4(k^2 - k + 1) = 4\{(k - \frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4}\}$

$= 4\{(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\}$

k এর সকল বাস্তব মানের জন্য, $4\{(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\} \geq 0$

অতএব, k এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব।

3(c) দেখাও যে, $a = b$ না হলে $2x^2 - 2(a+b)x + a^2 + b^2 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব হতে পারে না। [ঢা.'০০ ; য.'০৪,'১০]

প্রমাণ ঃ পৃথায়ক $= \{-2(a+b)\}^2 - 4.2(a^2 + b^2)$

$= 4(a^2 + b^2 + 2ab - 2a^2 - 2b^2)$
$= 4(- a^2 - b^2 + 2ab)$
$= - 4(a^2 + b^2 - 2ab) = - 4(a - b)^2$

কেবল $a = b$ হলেই $-4(a-b)^2$ অঋণাত্মক হবে।

অতএব, $a = b$ না হলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হতে পারে না।

3(d) $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হলে দেখাও যে, $a = b = c$. [রা.'১৩]

প্রমাণ : $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ বলে,

$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$
$\Rightarrow 3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$

সমীকরণের মূলগুলি সমান হবে এবং ফলে পৃথায়ক শূন্য হবে।

$\therefore \{-2(a + b + c)\}^2 - 4.3(ab + bc + ca) = 0$
$\Rightarrow 4\{ a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) - 3(ab + bc + ca) \} = 0$
$\Rightarrow 4\{ a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\} = 0$
$\Rightarrow 2\{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} = 0$
$\Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$
$\therefore a - b = 0 \Rightarrow a = b$, $b - c = 0 \Rightarrow b = c$
এবং $c - a = 0 \Rightarrow c = a$
$\therefore a = b = c$. (Proved)

3(e) k এর মান কত হলে, $(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ হবে? [কু.'০৬; বুয়েট'০৮-০৯, ১১-১২]

সমাধান : $(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ বলে,

$(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি সমান হবে এবং ফলে পৃথায়ক শূন্য হবে।

$\therefore \{2(k + 3) \}^2 - 4(k + 1) (2k + 3) = 0$
$\Rightarrow 4\{ k^2 + 6k + 9 - 2k^2 - 5k - 3)\} = 0$
$\Rightarrow 4\{ - k^2 + k + 6\} = 0 \Rightarrow k^2 - k - 6 = 0$
$\Rightarrow (k + 2)(k - 3) = 0 \therefore k = - 2 , 3$ (Ans.)

3(f) $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি বাস্তব ও অসমান হলে দেখাও যে, $2x^2 - 4(1 + c)x + (b^2 + 2c^2 + 2) = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি জটিল হবে। [কুয়েট'০৫-০৬]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও অসমান।

$\therefore$ পৃথায়ক, $b^2 - 4.1.c > 0$
$\Rightarrow b^2 - 4c > 0 \cdots\cdots(i)$

এখন, $2x^2 - 4(1 + c)x + (b^2 + 2c^2 + 2) = 0$

সমীকরণের পৃথায়ক $= \{-4(1 + c)\}^2 - 4.2(b^2 + 2c^2 + 2)$
$= 16(1 + 2c + c^2) - 8(b^2 + 2c^2 + 2)$
$= 8(2 + 4c + 2c^2 - b^2 - 2c^2 - 2)$
$= 8 (4c - b^2) < 0$, যেহেতু $b^2 - 4c > 0$

$\therefore 2x^2 - 4(1 + c)x + (b^2 + 2c^2 + 2) = 0$ সমীকরণের মূলগুলি জটিল।

3(g) দেখাও যে, a ও b মূলদ হলে $(a^2 - b^2) x^2 + 2 (a^2 + b^2) x + a^2 - b^2 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি সর্বদা মূলদ হবে।

প্রমাণ : প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক
$= \{2(a^2 + b^2)\}^2 - 4(a^2 - b^2)(a^2 - b^2)$
$= 4\{a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2\}$
$= 4.4a^2b^2 = (4ab)^2$, যা পূর্ণবর্গ এবং a, b বাস্তব

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো মূলদ। (Showed)

3(h) k এর মান কত হলে, $(k - 1)x^2 - (k + 2)x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও সমান হবে? [ব.'০৬; রা.'০৮; য.'১২; ঢা, দি..'১৩]

প্রমাণ : পৃথায়ক $= \{ - (k + 2) \}^2 - 4.(k - 1).4$
$= k^2 + 4k + 4 - 16k + 16$
$= k^2 - 12k + 20$

প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও সমান হলে,

$k^2 - 12k + 20 = 0$

$\Rightarrow k^2 - 10k - 2k + 20 = 0$

$\Rightarrow k(k - 10) - 2(k - 10) = 0$

$\Rightarrow (k - 10)(k - 2) = 0$

$\therefore k = 2$ বা $,10$

3(i) k এর মান কত হলে, $(3k + 1)x^2 - (k + 11)x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হবে? [বুয়েট'১১-১২]

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক

$= \{-(k + 11)\}^2 - 4(3k + 1).9$

$= k^2 + 2.k.11 + 121 - 108k - 36$

$= k^2 + 22k - 108k + 85$

$= k^2 - 86k + 85 = (k - 85)(k - 1)$

মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হলে, পৃথায়ক < 0

$\therefore (k + 85)(k - 1) < 0 \Rightarrow 1 < k < 85$

3(j) $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যদি সমান হয় এবং অপর সমীকরণ $x^2 + ax + 8 = 0$ এর একটি মূল যদি 4 হয়, তবে b এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2 + ax + 8 = 0$ এর একটি মূল 4 হলে,

$4^2 + a \times 4 + 8 = 0 \Rightarrow 4a = -24 \therefore a = -6$

আবার, $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে, $a^2 - 4.1.b = 0 \Rightarrow (-6)^2 = 4b \therefore b = 9$

3(k) $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c} = 0$ সীকরণের মূলগুলি সর্বদা বাস্তব হবে এবং $a = b = c$ না হলে মূলগুলি সমান হতে পারেনা। [ব.'১৩]

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c} = 0$

$\Rightarrow (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0$

প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক

$= \{-2(a + b + c)\}^2 - 4.3(ab + bc + ca)$

$= 4\{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) - 3(ab + bc + ca)$

$= 2\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$

a, b, $c \in \mathbb{R}$ এর জন্য, পৃথায়ক $= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ অঋণাত্মক এবং ফলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি সর্বদা বাস্তব হবে।

আবার, পৃথায়ক $= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$ হবে কেবল $a = b = c$ হলে।

$\therefore$ $a = b = c$ না হলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি সমান হতে পারেনা। (Proved)

4(a) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে মান নির্ণয় কর:

(i) $\Sigma \dfrac{1}{\alpha^2}$ [কু.'০১; য.'০৩; দি.'০৯]

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ.

$\therefore \Sigma\alpha = \alpha + \beta + \gamma = p,$

$\Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ এবং $\alpha\beta\gamma = r$

এখন, $\Sigma \dfrac{1}{\alpha^2} = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2}$

$= \dfrac{\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$= \dfrac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta.\beta\gamma + \beta\gamma.\gamma\alpha + \gamma\alpha.\alpha\beta)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$= \dfrac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\beta + \gamma + \alpha)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$= \dfrac{q^2 - 2rp}{r^2}$ (Ans.)

(ii) $\Sigma \dfrac{1}{\alpha^2\beta^2}$ [রা.'০৩; য.'০৬; সি. '০৯]

$$\sum\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2\alpha^2}$$
$$=\frac{\gamma^2+\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=\frac{p^2-2q}{r^2}$$

4(b) $x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $\sum\alpha^3$ এর মান নির্ণয় কর। [সি.'০৫; চ.'০৬]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ.

$\therefore \sum\alpha=\alpha+\beta+\gamma=-p,$

$\sum\alpha\beta=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$ এবং $\alpha\beta\gamma=-r$

এখন, $\sum\alpha^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma+3\alpha\beta\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3(-r)$

$=-p\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}-3r$

$=-p\{(-p)^2-3q\}-3r = 3pq-p^3-3r$

4(c) $x^3+qx+r=0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$ এর মান নির্ণয় কর। [চ.'০৫]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ.

$\therefore \sum\alpha=\alpha+\beta+\gamma=0,$

$\sum\alpha\beta=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$ এবং $\alpha\beta\gamma=-r$

এখন, $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$

$=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha$

$=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=2\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2q$

$=2\{0-2q\}-2q$

$=-4q-2q=-6q$ (Ans.)

4(d) $3x^3-2x^2+1=0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $\sum\alpha^2\beta$ এর মান নির্ণয় কর। [য.'০৭]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ.

$\therefore \sum\alpha=\alpha+\beta+\gamma=-(-\frac{2}{3})=\frac{2}{3},$

$\sum\alpha\beta=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$ এবং $\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{3}$

এখন, $\sum\alpha^2\beta=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2$

$=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)$

$=\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma-\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma+\alpha-\alpha)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha+\beta-\beta)$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3\alpha\beta\gamma$

$=\frac{2}{3}.0-3(-\frac{1}{3})=1$ (Ans.)

4(e) $x^3+ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে মান নির্ণয় কর ঃ (i) $\sum(\beta+\gamma)^{-1}$ (ii) $\sum\alpha^3$ [চ.'০৪]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ.

$\therefore \sum\alpha=\alpha+\beta+\gamma=-a.$

$\sum\alpha\beta=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$ এবং $\alpha\beta\gamma=-c$

(i) $\sum(\beta+\gamma)^{-1}=\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}$

$$=\frac{1}{-a-\alpha}+\frac{1}{-a-\beta}+\frac{1}{-a-\gamma}$$
$$=-\frac{(a+\beta)(a+\gamma)+(a+\alpha)(a+\gamma)+(a+\alpha)(a+\beta)}{(a+\alpha)(a+\beta)(a+\gamma)}$$
$$=-\frac{3a^2+2a(\alpha+\beta+\gamma)+(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)}{a^3+a^2(\alpha+\beta+\gamma)+a(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)}$$
$$=-\frac{3a^2+2a(-a)+b}{a^3+a^2(-a)+ab-c}=\frac{a^2+b}{c-ab}$$

(ii) $\sum\alpha^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3(-c)$

$= -a\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} - 3c$

$= -a\{(-a)^2 - 3b\} - 3c = -a^3 + 3ab - 3c$

$= 3ab - a^3 - 3c$ (Ans.)

4(f) $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β হলে দেখাও যে, $(\beta - \gamma)^2 = \dfrac{3r - q\alpha}{\alpha}$

[টেক্সটাইল'০২-০৩]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ.

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ এবং $\alpha\beta\gamma = -r$

$\therefore (\beta - \gamma)^2 = (\beta + \gamma)^2 - 4\beta\gamma$

$= (-\alpha)^2 - 4(-\dfrac{r}{\alpha})$

[$\because \alpha + \beta + \gamma = 0$ এবং $\alpha\beta\gamma = -r$]

$= \dfrac{\alpha^3 + 4r}{\alpha}$

এখন, $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের একটি মূল α বলে

$\alpha^3 + q\alpha + r = 0 \Rightarrow \alpha^3 = -q\alpha - r$

$\therefore (\beta - \gamma)^2 = \dfrac{-q\alpha - r + 4r}{\alpha} = \dfrac{3r - q\alpha}{\alpha}$

4(g) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β হলে মান নির্ণয় কর ঃ

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β.

$\therefore \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

(i) $\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2$

$= \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - (\alpha\beta)^2$

$= \{(\dfrac{-b}{a})^2 - 2\dfrac{c}{a}\}^2 - (\dfrac{c}{a})^2$

$= (\dfrac{b^2}{a^2} - 2\dfrac{c}{a})^2 - \dfrac{c^2}{a^2}$

$= \dfrac{b^4}{a^4} + 4\dfrac{c^2}{a^2} - 4\dfrac{b^2}{a^2}.\dfrac{c}{a} - \dfrac{c^2}{a^2}$

$= \dfrac{b^4}{a^4} + 3\dfrac{c^2}{a^2} - 4\dfrac{b^2c}{a^3}$

$= \dfrac{1}{a^4}(b^4 + 3c^2a^2 - 4ab^2c)$ (Ans.)

(ii) $(a\alpha^2 + b)^{-1} + (a\beta^2 + b)^{-1}$

$= \dfrac{1}{a\alpha^2 + b} + \dfrac{1}{a\beta^2 + b}$

$= \dfrac{a\beta^2 + b + a\alpha^2 + b}{(a\alpha^2 + b)(a\beta^2 + b)}$

$= \dfrac{a\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} + 2b}{a^2\alpha^2\beta^2 + ab(\alpha^2 + \beta^2) + b^2}$

$$= \frac{a\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}\right\} + 2b}{a^2\left(\frac{c}{a}\right)^2 + ab\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}\right\} + b^2}$$

$$= \frac{\frac{a}{a^2}(b^2 - 2ca) + 2b}{c^2 + \frac{ab}{a^2}(b^2 - 2ca) + b^2}$$

$$= \frac{b^2 - 2ca + 2ab}{a} \times \frac{a}{c^2a + b^3 - 2abc + ab^2}$$

$$= \frac{b^2 - 2ca + 2ab}{c^2a + b^3 - 2abc + ab^2}$$ (Ans.)

4(f) $r(1-r) = 1$ এর জটিল মূলদ্বয় z_1 ও z_2 হলে, প্রমাণ কর যে, $z_1^3 + z_2^3 = -2$. **[বুয়েট'০৪-০৫]**

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $r(1-r)=1$ অর্থাৎ $r^2 - r + 1 = 0$ এর জটিল মূলদ্বয় z_1 ও z_2.

$\therefore \; z_1 + z_2 = 1$ এবং $z_1 z_2 = 1$

$$\text{L.H.S.} = z_1^3 + z_2^3$$
$$= (z_1 + z_2)^3 - 3z_1z_2(z_1 + z_2)$$
$$= 1^3 - 3\times1\times1$$
$$= 1 - 3 = -2 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

5(a) যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হয়, তবে নিম্নের মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর: (i) $\alpha + \dfrac{1}{\beta}, \beta + \dfrac{1}{\alpha}$ [কু.'০৮]

(ii) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \sqrt{\alpha\beta}$

(iii) $\dfrac{1}{\alpha^3}, \dfrac{1}{\beta^3}$. [ব.'১২; কুয়েট'১১-১২]

সমাধান : দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β.

$\therefore \; \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

(i) $\alpha + \dfrac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \dfrac{1}{\alpha}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$$= \alpha + \beta + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = -\frac{b}{a} + \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{a} - \frac{b}{c}$$

এবং গুণফল $= (\alpha + \dfrac{1}{\beta})(\beta + \dfrac{1}{\alpha}) = \dfrac{(\alpha\beta+1)^2}{\alpha\beta}$

$$= \frac{(\frac{c}{a}+1)^2}{\frac{c}{a}} = \frac{(c+a)^2}{a^2} \times \frac{a}{c} = \frac{(c+a)^2}{ca}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (-\dfrac{b}{a} - \dfrac{b}{c})x + \dfrac{(c+a)^2}{ca} = 0$

$$\therefore \; ca\,x^2 + b(a+c)x + (c+a)^2 = 0$$

(ii) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ এবং $\sqrt{\alpha\beta}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$$= \frac{\alpha+\beta}{2} + \sqrt{\alpha\beta} = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{2\sqrt{ca} - b}{2a}$$

এবং গুণফল $= \dfrac{\alpha+\beta}{2} . \sqrt{\alpha\beta} = -\dfrac{b}{2a} . \sqrt{\dfrac{c}{a}}$

$$= -\frac{b\sqrt{c}}{2a\sqrt{a}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$$x^2 - \frac{2\sqrt{ca} - b}{2a}x - \frac{b\sqrt{c}}{2a\sqrt{a}} = 0$$

$$\therefore \; 2a\sqrt{a}\,x^2 - (2a\sqrt{c} - b\sqrt{a})x - b\sqrt{c} = 0$$

(iii) $\dfrac{1}{\alpha^3}$ এবং $\dfrac{1}{\beta^3}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$$= \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3\beta^3}$$

$$= \frac{a^3}{c^3}\{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}$$

$$= \frac{a^3}{c^3}\{-\frac{b^3}{a^3} - 3\frac{c}{a}(-\frac{b}{a})\} = \frac{a^3}{c^3}\,\frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$= \frac{3abc - b^3}{c^3}$$

এবং গুণফল $= \dfrac{1}{\alpha^3} . \dfrac{1}{\beta^3} = \dfrac{1}{\alpha^3\beta^3} = \dfrac{a^3}{c^3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$$x^2 - \frac{3abc - b^3}{c^3}x + \frac{a^3}{c^3} = 0$$

$$\therefore \; c^3x^2 - (3abc - b^3)x + a^3 = 0$$

5(b) এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূল দুইটি যথাক্রমে $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি এবং অনমশর ফলের ধনাত্মক মান হবে। [রা.'০৩; য.'০৪,'০৮,'১২; ব.'০৮; কু.'০১]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের

$\therefore\ \alpha+\beta=2b$ এবং $\alpha\beta=b^2-a^2$

প্রশ্নমতে, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha+\beta$ এবং $|\alpha-\beta|$

এখন, $|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{4b^2-4(b^2-a^2)}$

$=\sqrt{4b^2-4b^2+4a^2}=\sqrt{4a^2}$

$=2a$, যখন $a>0$

$=-2a$, যখন $a<0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2-\{(\alpha+\beta)+|\alpha-\beta|\}x+(\alpha+\beta)|\alpha-\beta|=0$

$\Rightarrow x^2-(2b+2a)x+2b.2a=0$, যখন $a>0$

$\therefore\ x^2-2(a+b)x+4ab=0$ (Ans.)

আবার, $x^2-(2b-2a)x+2b.(-2a)=0$, যখন $a<0$

$\Rightarrow x^2+2(a-b)x-4ab=0$

5(c) এরূপ সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূল দুইটি $17x^2-3x+14=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল এবং গুণফল। [চ.'০২]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β.

$\therefore\ \alpha+\beta=\dfrac{3}{17}$ এবং $\alpha\beta=\dfrac{14}{17}$

প্রশ্নমতে, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha+\beta$ এবং $\alpha\beta$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2-(\alpha+\beta+\alpha\beta)x+(\alpha+\beta)\alpha\beta=0$

$\Rightarrow x^2-(\dfrac{3}{17}+\dfrac{14}{17})x+\dfrac{3}{17}.\dfrac{14}{17}=0$

$\Rightarrow x^2-\dfrac{17}{17}x+\dfrac{42}{289}=0$

$\therefore\ 289(x^2-x)+42=0$ (Ans.)

5(d) $7x^2-5x-3=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α,β হলে $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta}$ এবং $\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{2}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [কুয়েট'০৪-০৫]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $7x^2-5x-3=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore\ \alpha+\beta=\dfrac{5}{7}$, $\alpha\beta=-\dfrac{3}{7}$

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta}$ এবং $\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{2}{\alpha}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$=(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta})+2(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta})=3(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta})$

$=3\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3.\ \dfrac{5}{7}(-\dfrac{7}{3})=-5$

এবং গুণফল $=(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta})(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{2}{\alpha})$

$=\dfrac{1}{\alpha\beta}+2(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2})+4\dfrac{1}{\alpha\beta}$

$=5\dfrac{1}{\alpha\beta}+2(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2})$

$=5(-\dfrac{7}{3})+2\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}$

$=-\dfrac{35}{3}+2\{(\dfrac{5}{7})^2-2(-\dfrac{3}{7})\}.(-\dfrac{7}{3})^2$

$=-\dfrac{35}{3}+2\{\dfrac{25}{49}+\dfrac{6}{7}\}.\dfrac{49}{9}$

$=-\dfrac{35}{3}+2\dfrac{25+42}{49}.\dfrac{49}{9}$

$=-\dfrac{35}{3}+2\dfrac{67}{9}=\dfrac{-105+134}{9}=\dfrac{29}{9}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-(-5)x+\dfrac{29}{9}=0$

$\Rightarrow 9x^2+45x+29=0$

5(e) $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α,β হলে $(\alpha+\beta)^2$ এবং $(\alpha-\beta)^2$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর এবং b, c এর মাধ্যমে $(\alpha+b)^{-4}+(\beta+b)^{-4}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $x^2 + bx + c = 0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \ \alpha + \beta = -b, \alpha\beta = c$

$(\alpha + \beta)^2$ এবং $(\alpha - \beta)^2$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$= (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2$

$= (-b)^2 + (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= b^2 + b^2 - 4c = 2b^2 - 4c$

এবং গুণফল $= (\alpha + \beta)^2(\alpha - \beta)^2$

$= b^2\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} = b^2(b^2 - 4c)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - 2(b^2 - 2c)x + b^2(b^2 - 4c) = 0$ (Ans.)

দ্বিতীয় অংশ : $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল α বলে, $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

$\Rightarrow \alpha(\alpha + b) = -c \Rightarrow \alpha + b = -\frac{c}{\alpha}$

$\therefore \ (\alpha + b)^{-4} = \left(-\frac{c}{\alpha}\right)^{-4} = \left(-\frac{\alpha}{c}\right)^4 = \frac{\alpha^4}{c^4}$

অনুরূপভাবে আমরা পাই, $(\beta + b)^{-4} = \frac{\beta^4}{c^4}$

$\therefore \ (\alpha + b)^{-4} + (\beta + b)^{-4} = \frac{\alpha^4}{c^4} + \frac{\beta^4}{c^4}$

$= \frac{1}{c^4}(\alpha^4 + \beta^4) = \frac{1}{c^4}\{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2\}$

$= \frac{1}{c^4}[\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - 2c^2]$

$= \frac{1}{c^4}[\{b^2 - 2c\}^2 - 2c^2]$

$= \frac{1}{c^4}(b^4 - 4b^2c + 4c^2 - 2c^2)$

$= \frac{1}{c^4}(b^4 - 4b^2c + 2c^2)$

5(f) যদি $px^2 + qx - p = 0$ এর মূল দুইটি α, β হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $(p\alpha + q)(p\beta + q) = -p^2$ এবং $p\alpha + q$, $p\beta + q$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'১০]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $px^2 + qx - p = 0$ এর মূল দুইটি α, β বলে, $\alpha + \beta = -\frac{q}{p}, \alpha\beta = \frac{-q}{q} = -1$

আবার, $p\alpha^2 + q\alpha - p = 0 \Rightarrow \alpha(p\alpha + q) = p$

$\Rightarrow p\alpha + q = \frac{p}{\alpha}$ এবং এরূপে, $p\beta + q = \frac{p}{\beta}$

এখন, L.H.S. $= (p\alpha + q)(p\beta + q) = \frac{p}{\alpha} \times \frac{p}{\beta}$

$= \frac{p^2}{\alpha\beta} = \frac{p^2}{-1} = -p =$ R.H.S.

আবার, $p\alpha + q$, $p\beta + q$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - (p\alpha + q + p\beta + q)x + (p\alpha + q)(p\beta + q) = 0$

$\Rightarrow x^2 - \{p(\alpha + \beta) + 2q\}x + p^2\alpha\beta + pq(\alpha + \beta) + q^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \{p(-\frac{q}{p}) + 2q\}x + p^2(-1) + pq(-\frac{q}{p}) + q^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \{-q + 2q\}x - p^2 - q^2 + q^2 = 0$

$\therefore \ x^2 - qx - p^2 = 0$ (Ans.)

5(g) $2x^2 + 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β হলে, $\frac{1}{\alpha^3}$ এবং $\frac{1}{\beta^3}$ দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৫-০৬]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $2x^2 + 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \ \alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \ \alpha\beta = \frac{5}{2}$

$\frac{1}{\alpha^3}$ এবং $\frac{1}{\beta^3}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি $= \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$

$= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3\beta^3} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha^3\beta^3}$

$$= \frac{(-3/2)^3 - 3(5/2)(-3/2)}{(5/2)^3}$$

$$= \frac{8}{125}(-\frac{27}{8} + \frac{45}{4}) = \frac{8}{125}(\frac{-27+90}{8}) = \frac{63}{125}$$

এবং গুণফল $= \frac{1}{\alpha^3\beta^3} = (\frac{2}{5})^3 = \frac{8}{125}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ , $x^2 - (\frac{63}{125})x + \frac{8}{125} = 0$

$$\Rightarrow 125x^2 - 63x + 8 = 0$$

5(h) যদি $x^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α , β হয়, তবে α^2 ও β^2 সম্বলিত সমীকরণটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $x^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{2b}{1} = -2b$, $\alpha\beta = \frac{c}{1} = c$

α^2 ও β^2 মূলদ্বয়ের সমষ্টি $= \alpha^2 + \beta^2$

$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2b)^2 - 2c = 4b^2 - 2c$

এবং গুণফল $= \alpha^2\beta^2 = c^2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (4b^2 - 2c)x + c^2 = 0$

6(a) চতুর্থঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর যার দুইটি মূল যথাক্রমে 2 , 3 এবং বাকী মূল $x^2 + 4x + 5 = 0$ সমীকরণের মূল। [বুয়েট'০২-০৩]

সমাধান ঃ 2 এবং 3 মূল বিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - (2 + 3)x + 2.3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\therefore$ চতুর্থঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ ,

$(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 4x + 5) = 0$

$\Rightarrow x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 5x^3 - 20x^2 - 25x + 6x^2 + 24x + 30 = 0$

$\therefore x^4 - x^3 - 9x^2 - x + 30 = 0$

6(b) যদি α ও β অসমান হয় অথচ $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ এবং $\beta^2 = 5\beta - 3$ হয় তবে $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [বুয়েট'০০-০১]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে ,

$\alpha^2 = 5\alpha - 3 \cdots$ (i) এবং $\beta^2 = 5\beta - 3 \cdots$ (ii)

(i) − (ii) $\Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 5(\alpha - \beta)$

$\Rightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 5(\alpha - \beta)$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 5$ [$\therefore \alpha \neq \beta$]

(i) + (ii) $\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 5(\alpha + \beta) - 6$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 5.5 - 6$

$\Rightarrow 25 - 2\alpha\beta = 25 - 6 \quad \therefore \alpha\beta = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ , [কুয়েট'০৬-০৭]

$$x^2 - (\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha})x + \frac{\alpha}{\beta}.\frac{\beta}{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{25 - 6}{3}x + 1 = 0$$

$\therefore 3x^2 - 19x + 3 = 0$

7(a) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α , β হলে $cx^2 - 2bx + 4a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α , β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

[চ.'০৬; দি.'১০; রা.'১১]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = -a(\alpha + \beta)$ এবং

$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\alpha\beta$

এখন , $cx^2 - 2bx + 4a = 0$

$\Rightarrow a\alpha\beta x^2 - 2\{-a(\alpha + \beta)\}x + 4a = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 + 2\alpha x + 2\beta x + 4 = 0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x + 2) + 2(\beta x + 2) = 0$

$\Rightarrow (\alpha x + 2)(\beta x + 2) = 0 \;\; \therefore \; x = -\dfrac{2}{\alpha}, -\dfrac{2}{\beta}$

অতএব, $cx^2 - 2bx + 4a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $-\dfrac{2}{\alpha}$ এবং $-\dfrac{2}{\beta}$

7(b) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

[চ.'০৯,'১৩; কুয়েট'১২-১৩]

সমাধান : দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \; \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow b = -a(\alpha + \beta)$ এবং

$\alpha\beta = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = a\alpha\beta$

এখন, $ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$

$\Rightarrow acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$

$\Rightarrow a^2\alpha\beta x^2 - \{a^2(\alpha + \beta)^2 - 2a^2\alpha\beta\}x + a^2\alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta\}x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

$\Rightarrow (\beta x - \alpha)(\alpha x - \beta) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\alpha}{\beta}, \dfrac{\beta}{\alpha}$

$\therefore \; ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\dfrac{\alpha}{\beta}$ এবং $\dfrac{\beta}{\alpha}$

7(c) $x^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ হলে এরূপ সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $\dfrac{1}{\alpha\gamma} + \dfrac{1}{\beta\delta}$ এবং $\dfrac{1}{\alpha\delta} + \dfrac{1}{\beta\gamma}$ হয়।

প্রমাণ : $x^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β বলে, $\alpha + \beta = b$ এবং $\alpha\beta = c$

আবার, $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ বলে, $\gamma + \delta = c$ এবং $\gamma\delta = b$

$\dfrac{1}{\alpha\gamma} + \dfrac{1}{\beta\delta}$ এবং $\dfrac{1}{\alpha\delta} + \dfrac{1}{\beta\gamma}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$= \dfrac{1}{\alpha\gamma} + \dfrac{1}{\beta\delta} + \dfrac{1}{\alpha\delta} + \dfrac{1}{\beta\gamma}$

$= (\dfrac{1}{\alpha\gamma} + \dfrac{1}{\alpha\delta}) + (\dfrac{1}{\beta\delta} + \dfrac{1}{\beta\gamma})$

$= \dfrac{1}{\alpha}(\dfrac{\gamma + \delta}{\gamma\delta}) + \dfrac{1}{\beta}(\dfrac{\gamma + \delta}{\gamma\delta})$

$= (\dfrac{\alpha + \beta}{\alpha\beta})(\dfrac{\gamma + \delta}{\gamma\delta}) = \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{c}{b} = 1$

এবং গুণফল $= (\dfrac{1}{\alpha\gamma} + \dfrac{1}{\beta\delta})(\dfrac{1}{\alpha\delta} + \dfrac{1}{\beta\gamma})$

$= \dfrac{\beta\delta + \alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma\delta} \times \dfrac{\beta\gamma + \alpha\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}$

$= (\dfrac{1}{\alpha\beta}\dfrac{1}{\gamma\delta})(\beta^2\gamma\delta + \alpha\beta\delta^2 + \alpha\beta\gamma^2 + \alpha^2\gamma\delta)$

$= \dfrac{1}{cb}\{\alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2) + \gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2)\}$

$= \dfrac{1}{bc}[c\{(\gamma + \delta)^2 - 2\gamma\delta\} + b\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}]$

$= \dfrac{1}{bc}\{c(c^2 - 2b) + b(b^2 - 2c)\}$

$= \dfrac{1}{bc}(c^3 - 2bc + b^3 - 2bc)$

$= \dfrac{1}{bc}(b^3 + c^3 - 4bc)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - 1.x + \dfrac{1}{bc}(b^3 + c^3 - 4bc) = 0$

$\Rightarrow bc(x^2 - x) + b^3 + c^3 - 4bc = 0$

7(d) $x^2 + a\,x + \frac{1}{4}(a^2 - b^2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে দেখাও যে, $x^2 + (a \pm b)x \pm ab = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ হবে। [রা.'০২]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $x^2 + ax + \frac{1}{4}(a^2 - b^2) = 0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β.

$\therefore\ \alpha + \beta = -a$ এবং

$\alpha\beta = \frac{1}{4}(a^2 - b^2) \Rightarrow a^2 - 4\alpha\beta = b^2$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2$

$\Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = b^2 \quad \therefore\ \alpha - \beta = \mp b$

এখন, $x^2 + (a \pm b)x \pm ab = 0$

$\Rightarrow x^2 + \{a - (\mp b)\} - a(\mp b) = 0$

$\Rightarrow x^2 + \{-(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)\}x - \{-(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \{(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)\}x + (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 0$

$\therefore\ x^2 + (a \pm b)x \pm ab = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \beta$ এবং $\alpha - \beta$ (Proved)

7(e) যদি $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ রাশি দুইটি $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূল হয়, তবে দেখাও যে, $(p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি হবে $\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}$. [চুয়েট'০৭-০৮]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \sqrt{\beta}$ ও $\alpha - \sqrt{\beta}$.

$\therefore\ \alpha + \sqrt{\beta} + \alpha - \sqrt{\beta} = -p$

$\Rightarrow 2\alpha = -p \Rightarrow p = 2\alpha$ এবং

$(\alpha + \sqrt{\beta})(\alpha - \sqrt{\beta}) = q \Rightarrow q = \alpha^2 - \beta$

এখন, $(p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0$

$\Rightarrow \{(-2\alpha)^2 - 4(\alpha^2 - \beta)\}\{(-2\alpha)^2 x^2 + 4(-2\alpha)x\} - 16(\alpha^2 - \beta) = 0$

$\Rightarrow (4\alpha^2 - 4\alpha^2 + 4\beta)(4\alpha^2x^2 - 8\alpha x) - 16(\alpha^2 - \beta) = 0$

$\Rightarrow 16\beta(\alpha^2x^2 - 2\alpha x) - 16(\alpha^2 - \beta) = 0$

$\Rightarrow \beta\alpha^2x^2 - 2\alpha\beta x - \alpha^2 + \beta = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{2\alpha\beta \pm \sqrt{4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta(\beta - \alpha^2)}}{2\alpha^2\beta}$$

$$= \frac{2\alpha\beta \pm \sqrt{4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^4\beta}}{2\alpha^2\beta}$$

$$= \frac{2\alpha\beta \pm \sqrt{4\alpha^4\beta}}{2\alpha^2\beta} = \frac{2\alpha\beta \pm 2\alpha^2\sqrt{\beta}}{2\alpha^2\beta}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}$$

$\therefore\ (p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0$

সমীকরণের মূল দুইটি হবে $\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}$

8(a) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + 4, \beta + 4$ হলে p, q এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $2x^2 + 10px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + 4,\ \beta + 4$

$\therefore\ \alpha + \beta = -p \cdots\cdots(i),\ \alpha\beta = q \cdots\cdots(ii),$

$\alpha + 4 + \beta + 4 = -5p$

$\Rightarrow \alpha + \beta = -5p - 8 \cdots\cdots(iii)$ এবং

$(\alpha + 4)(\beta + 4) = \frac{q}{2}$

$\Rightarrow \alpha\beta + 4(\alpha + \beta) + 16 = \frac{q}{2}$

$\Rightarrow q + 4(-p) + 16 = \frac{q}{2}$ [(i)&(ii) হতে]

$\Rightarrow \frac{q}{2} - 4p + 16 = 0 \Rightarrow q = 2(4p - 16) \cdots (iv)$

(i)& (iii) হতে আমরা পাই, $-p = -5p - 8$

$\Rightarrow 4p = -8 \quad \therefore p = -2$

(iv) হতে আমরা পাই, $q = 2(-8 - 16) = -48$

$\therefore p = -2$ এবং $q = -48$ (Ans.)

8(b) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয় $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অর্ধেক হলে p ও q এর মান a ও b এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।**

সমাধান : মনে করি, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -p, \ \alpha\beta = q$

প্রশ্নানুসারে, $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় 2α এবং 2β

$\therefore 2(\alpha + \beta) = a + b \Rightarrow 2(-p) = a + b$

$\therefore p = -\frac{1}{2}(a + b)$ এবং $2\alpha . 2\beta = ab$

$\Rightarrow 4\alpha\beta = ab \Rightarrow 4q = ab \quad \therefore q = \frac{1}{4}ab$

8(c) $x^2 - bx + c = 0$ **ও** $x^2 - cx + b = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুবরাশি হলে প্রমাণ কর যে,** $b + c + 4 = 0$ **[চ.'০১; ব.'০৪; য.'০৮,'১৩; সি.'০৯,'১২; কু.'০৯,'১২; ঢা.'১০; টেক্সটাইল ০৩-০৪]**

প্রমাণ : মনে করি, $x^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = b, \ \alpha\beta = c$

প্রশ্নানুসারে, $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + k$ এবং $\beta + k$, যেখানে k ধ্রুবক।

$\therefore \alpha + k + \beta + k = c \Rightarrow \alpha + \beta + 2k = c$

$\Rightarrow b + 2k = c \quad [\because \alpha + \beta = b]$

$\Rightarrow k = \frac{1}{2}(c - b) \cdots (i)$ এবং $(\alpha + k)(\beta + k) = b$

$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha k + \beta k + k^2 = b$

$\Rightarrow \alpha\beta + k(\alpha + \beta) + k^2 = b \Rightarrow c + kb + k^2 = b$

$\Rightarrow c + \frac{1}{2}(c - b).b + \frac{1}{4}(c - b)^2 = b$ [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow 4c + 2bc - 2b^2 + c^2 + b^2 - 2bc - 4b = 0$

$\Rightarrow 4c - b^2 + c^2 - 4b = 0$

$\Rightarrow 4(c - b) + (c - b)(c + b) = 0$

$\Rightarrow (c - b)(b + c + 4) = 0$

$\therefore b + c + 4 = 0 \quad [\because b \neq c]$ (Proved)

8(d) $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত** $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাতের সমান হলে দেখাও যে,** $\frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{a_1c_1}{a_2c_2}$ **[য.'০৩]**

প্রমাণ : মনে করি, $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ.

প্রশ্নমতে, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\gamma + \delta}{\gamma - \delta}$

$\Rightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\gamma + \delta)^2} = \frac{(\alpha - \beta)^2}{(\gamma - \delta)^2}$

$\Rightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\gamma + \delta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}{(\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta}$

$= \frac{(\alpha + \beta)^2 - \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}}{(\gamma + \delta)^2 - \{(\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta\}}$

$\Rightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\gamma + \delta)^2} = \frac{4\alpha\beta}{4\gamma\delta} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$

$\Rightarrow \frac{(-b_1/a_1)^2}{(-b_2/a_2)^2} = \frac{c_1/a_1}{c_2/a_2}$

$\Rightarrow \frac{b_1^2/a_1^2}{b_2^2/a_2^2} = \frac{c_1/a_1}{c_2/a_2} \Rightarrow \frac{b_1^2}{a_1^2} \times \frac{a_2^2}{b_2^2} = \frac{c_1}{a_1} \times \frac{a_2}{c_2}$

$\Rightarrow \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{c_1}{a_1} \times \frac{a_2}{c_2} \times \frac{a_1^2}{a_2^2} \quad \therefore \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{a_1c_1}{a_2c_2}$

9.(a) $ax^2 + bx + b = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত m : n হলে দেখাও যে,**

$\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0$ [কু.'০৭,'১০; ব.'০৩, '০৯; ঢা. '০৮; চ. '০৯; রা.,সি.,দি.'১২]

প্রমাণ : মনে করি , $ax^2+bx+b=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $m\alpha$ এবং $n\alpha$.

$\therefore\ (m+n)\alpha=-\frac{b}{a}\Rightarrow m+n=-\frac{b}{a\alpha}$ এবং

$mn\alpha^2=\frac{b}{a}\Rightarrow mn=\frac{b}{a\alpha^2}$

এখন , $\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

$=\frac{m+n}{\sqrt{mn}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\frac{b}{a\alpha}\times\sqrt{\frac{a\alpha^2}{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

$=-\frac{b}{a\alpha}\times\frac{\alpha\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=0$

$\therefore\ \sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0$ (Showed)

9(b) $27x^2+6x-(p+2)=0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে, p এর মান নির্ণয় কর। [রা.'০৫,'১২ ;ব.'০২, '০৯;ঢা.'০৪; কু.'০৫; চ.'০৭,'১২; য. '০৯,'১৩; সি.'১১; চুয়েট'০৮-০৯]

সমাধান : মনে করি , $27x^2+6x-(p+2)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং α^2 .

$\therefore\ \alpha+\alpha^2=-\frac{2}{9}$ ......(i) এবং

$\alpha.\alpha^2=-\frac{p+2}{27}\Rightarrow\alpha^3=-\frac{p+2}{27}$ ......(ii)

(i) হতে আমরা পাই, $(\alpha+\alpha^2)^3=(-\frac{2}{9})^3$

$\Rightarrow\alpha^3+\alpha^6+3\alpha^3(\alpha+\alpha^2)=-\frac{8}{729}$

$\Rightarrow-\frac{p+2}{27}+(-\frac{p+2}{27})^2+3(-\frac{p+2}{27})(-\frac{2}{9})$

$=-\frac{8}{729}$

$\Rightarrow-27(p+2)+p^2+4p+4+18(p+2)=-8$

$\Rightarrow p^2+4p+4-9(p+2)+8=0$

$\Rightarrow p^2+4p+4-9p-18+8=0$

$\Rightarrow p^2-5p-6=0\Rightarrow(p-6)(p+1)=0$

$\therefore\ p=-1,6$ (Ans.)

9(c) $x^2+px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে দেখাও যে, $p^2+4q^2=(1+2q)^2$

[ঢা.'০২,'০৭ ; চ.'০৫; রা.'০৬,'১৩; ব.'০৮]

প্রমাণ : মনে করি, $x^2+px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $\alpha+1$

$\therefore\ \alpha+\alpha+1=-p\Rightarrow2\alpha=-p-1$

$\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}(-p-1)$ এবং

$\alpha(\alpha+1)=q\Rightarrow\alpha^2+\alpha=q$

$\Rightarrow\frac{1}{4}(p+1)^2-\frac{1}{2}(p+1)=q$

$\Rightarrow p^2+2p+1-2p-2=4q\Rightarrow p^2=4q+1$

এখন , L.H.S.$=p^2+4q^2=4q+1+4q^2$

$=(2q)^2+2.2q.1+1^2=(2q+1)^2=$ R.H.S.

9(d) k এর মান কত হলে, $(k^2-3)x^2+3kx+3k+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর উল্টো হবে?

[ব.'০১;কু. '১০; বুয়েট'০৪-০৫]

প্রমাণ : ধরি , $(k^2-3)x^2+3kx+3k+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং α^{-1}

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল , $\alpha\alpha^{-1}=\frac{3k+1}{k^2-3}$

$\Rightarrow1=\frac{3k+1}{k^2-3}\Rightarrow k^2-3=3k+1$

$\Rightarrow k^2-3k-4=0\Rightarrow(k-4)(k+1)=0$

$\therefore\ k=-1,4$

9(e) $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$ **সমীকরণের মূলদ্বয়ের অন্তর r হলে p কে q ও r এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।**

[য.'০২; রা.'০৪; সি.'০৪,'০৮; ঢা.'০৯; চ.,দি.'১১]

সমাধান : $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$

$\Rightarrow \frac{p-x+x}{x(p-x)}=\frac{1}{q} \Rightarrow pq = px - x^2$

$\Rightarrow x^2 - px + pq = 0$

এখন মনে করি, $x^2 - px + pq = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $\alpha + r$.

$\therefore\ \alpha + \alpha + r = p \Rightarrow 2\alpha = p - r$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(p-r) \cdots\cdots (i)$ এবং

$\alpha(\alpha + r) = pq \Rightarrow \alpha^2 + r\alpha = pq$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(p-r)^2 + \frac{1}{2}r(p-r) - pq = 0$

$\Rightarrow p^2 - 2pr + r^2 + 2pr - 2r^2 - 4pq = 0$

$\Rightarrow p^2 - 4pq - r^2 = 0$

$\therefore\ p = \frac{4q \pm \sqrt{16q^2 - 4.1.(-r^2)}}{2.1}$

$= \frac{4q \pm 2\sqrt{4q^2 + r^2}}{2} = 2q \pm \sqrt{4q^2 + r^2}$

9(f) $ax^2 + bx + c = 0$ **সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে প্রমাণ কর যে,**

(i) $a^2c + ac^2 + b^3 = 3abc$ [ঢা. '০৯]

(ii) $c(a-b)^3 = a(c-b)^3$ [চ.'০২; ব.'০৭]

প্রমাণ : মনে করি, $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং α^2

$\therefore\ \alpha + \alpha^2 = -\frac{b}{a} \cdots\cdots (i)$ এবং

$\alpha.\alpha^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{c}{a} \cdots\cdots (ii)$

(i) হতে পাই, $(\alpha + \alpha^2)^3 = (-\frac{b}{a})^3$

$\Rightarrow \alpha^3 + \alpha^6 + 3\alpha^3(\alpha + \alpha^2) = -\frac{b^3}{a^3}$

$\Rightarrow \frac{c}{a} + (\frac{c}{a})^2 + 3\frac{c}{a}(-\frac{b}{a}) = -\frac{b^3}{a^3}$

$\Rightarrow ca^2 + c^2a - 3abc = -b^3$

$\Rightarrow a^2c + ac^2 + b^3 = 3abc$

(ii) $\frac{(a-b)^3}{(c-b)^3} = \frac{\left\{\frac{a}{a} - \frac{b}{a}\right\}^3}{\left\{\frac{c}{a} - \frac{b}{a}\right\}^3}$

$= \frac{(1+\alpha+\alpha^2)^3}{(\alpha^3+\alpha+\alpha^2)^3} = \frac{(1+\alpha+\alpha^2)^3}{\{\alpha(1+\alpha+\alpha^2)\}^3}$

$= \frac{(1+\alpha+\alpha^2)^3}{\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)^3} = \frac{1}{\alpha^3} = \frac{a}{c}$

$\therefore\ c(a-b)^3 = a(c-b)^3$

9(g) **যদি** $x^2 - px + q = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয় ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে,** $p^2 - 4q - 1 = 0$

[ঢা.'০৩,'১৩; দি.'০৯; ব. '১০; য.'১১]

প্রমাণ : মনে করি, $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $\alpha + 1$

$\therefore\ \alpha + \alpha + 1 = p \Rightarrow 2\alpha = p - 1$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(p-1)$ এবং

$\alpha(\alpha + 1) = q \Rightarrow \alpha^2 + \alpha = q$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(p-1)^2 + \frac{1}{2}(p-1) = q$

$\Rightarrow p^2 - 2p + 1 + 2p - 2 - 4q = 0$

$\Rightarrow p^2 - 4q - 1 = 0$

9(h) $2bx^2 + 2(a+b)x + 3a = 2b$ **সমীকরণের একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হলে দেখাও যে,** $a = 2b$ **অথবা,** $4a = 11b$.

[রা.'০৪; চ.'১০]

প্রমাণ : ধরি , $2bx^2 + 2(a+b)x + 3a = 2b$

$\Rightarrow 2bx^2 + 2(a+b)x + 3a - 2b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং 2α.

$\therefore \alpha + 2\alpha = -\frac{2(a+b)}{2b} \Rightarrow 3\alpha = -\frac{(a+b)}{b}$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{(a+b)}{3b}$ এবং

$\alpha.2\alpha = \frac{3a-2b}{2b} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{3a-2b}{4b}$

$\Rightarrow \left\{-\frac{a+b}{3b}\right\}^2 = \frac{3a-2b}{4b} \; [\because \alpha = -\frac{(a+b)}{3b}]$

$\Rightarrow 4b(a+b)^2 = 9b^2(3a-2b)$

$\Rightarrow 4(a^2 + 2ab + b^2) = 9b(3a-2b)$

$\Rightarrow 4a^2 + 8ab + 4b^2 = 27ab - 18b^2$

$\Rightarrow 4a^2 - 19ab + 22b^2 = 0$

$\Rightarrow 4a^2 - 11ab - 8ab + 22b^2 = 0$

$\Rightarrow a(4a - 11b) - 2b(4a - 11b) = 0$

$\Rightarrow (a-2b)(4a-11b) = 0$

$\therefore a = 2b$ অথবা , $4a = 11b$

9(i) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত 3 : 4 হলে, দেখাও যে, $12b^2 = 49ac$

[চ.'১১,'১৩ ; টেক্সটেইল'০৪-০৫]

প্রমাণ : ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় 3α ও 4α ।

তাহলে, $3\alpha + 4\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{7a} \cdots$(i)

এবং $3\alpha \times 4\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow 12\alpha^2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow 12 \times (-\frac{b}{7a})^2 = \frac{c}{a}$, [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow 12 \times \frac{b^2}{49a^2} = \frac{c}{a}$

$\therefore 12b^2 = 49ac$

10(a) $x^2 - (1+k^2)x + \frac{1}{2}(1+k^2+k^4) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে দেখাও যে, $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$

প্রমাণ : $x^2 - (1+k^2)x + \frac{1}{2}(1+k^2+k^4) = 0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β বলে ,

$\alpha + \beta = 1 + k^2 \cdots\cdots$(i) এবং

$\alpha\beta = \frac{1}{2}(1 + k^2 + k^4) \cdots\cdots\cdots$(ii)

এখন, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (1+k^2)^2 - 2\frac{1}{2}(1+k^2+k^4)$

$= 1 + 2k^2 + k^4 - 1 - k^2 - k^4$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = k^2$ (Showed)

10(b) $\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1$ হলে দেখাও যে, $(h^2 - a^2)x^2 - 2hkx + k^2 - b^2$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ হবে। [সি.'০৪,'১০]

প্রমাণ : $(h^2 - a^2)x^2 - 2hkx + k^2 - b^2$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হলে, $(h^2 - a^2)x^2 - 2hkx + k^2 - b^2 = 0$ …(i) সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হবে এবং ফলে (i) সমীকরণের নিশ্চায়ক শূন্য হবে ।

$\therefore (-2hk)^2 - 4(k^2 - b^2)(h^2 - a^2) = 0$

$\Rightarrow 4h^2k^2 - 4(h^2k^2 - a^2k^2 - b^2h^2 + a^2b^2) = 0$

$\Rightarrow h^2k^2 - h^2k^2 + a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2 = 0$

$\Rightarrow b^2h^2 + a^2k^2 = a^2b^2 \Rightarrow \frac{b^2h^2}{a^2b^2} + \frac{a^2k^2}{a^2b^2} = 1$

$\therefore \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1$ (Showed)

10(c) $mx^2 + nx + l = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাত r হলে দেখাও যে, $\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{n^2}{ml}$

[ব.'০১; কু.'০৮, রুয়েল'১০-১১]

প্রমাণ : মনে করি , $mx^2 + nx + l = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $r\alpha$.

$\therefore\ \alpha + \alpha r = -\dfrac{n}{m} \Rightarrow \alpha = -\dfrac{n}{m(1+r)} \cdots$(i) ,

$\alpha.\alpha r = \dfrac{l}{m} \Rightarrow \alpha^2 r = \dfrac{l}{m}$

$\Rightarrow r\left\{-\dfrac{n}{m(1+r)}\right\}^2 = \dfrac{l}{m} \Rightarrow r\dfrac{n^2}{m^2(1+r)^2} = \dfrac{l}{m}$

$\therefore\ \dfrac{(1+r)^2}{r} = \dfrac{n^2}{ml}$ (Showed)

10(d) $ax^2 + bx + c = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয়** α **,** β **এবং** $bx^2 + cx + a = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয়** γ **,** δ **হলে কি শর্তে** $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$ **হবে?** [প্র.ভ.প.৮৬]

সমাধান : দেওয়া আছে , $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α , β এবং $bx^2 + cx + a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ , δ

$\therefore\ \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}, \alpha\beta = \dfrac{c}{a}, \gamma + \delta = -\dfrac{c}{b}$ এবং

$\gamma\delta = \dfrac{a}{b}$

এখন , $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \dfrac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha+\beta}{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}} = \dfrac{\gamma+\delta}{\sqrt{(\gamma+\delta)^2 - 4\gamma\delta}}$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)\sqrt{(\gamma+\delta)^2 - 4\gamma\delta} = (\gamma+\delta)\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$

$\Rightarrow -\dfrac{b}{a}\sqrt{\left(-\dfrac{c}{b}\right)^2 - 4\dfrac{a}{b}} = -\dfrac{c}{b}\sqrt{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 4\dfrac{c}{a}}$

$\Rightarrow \dfrac{b^2}{a^2}\left(\dfrac{c^2}{b^2} - 4\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{c^2}{b^2}\left(\dfrac{b^2}{a^2} - 4\dfrac{c}{a}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{b^2}{a^2} \times \dfrac{c^2 - 4ab}{b^2} = \dfrac{c^2}{b^2} \times \dfrac{b^2 - 4ca}{a^2}$

$\therefore b^2(c^2 - 4ab) = c^2(b^2 - 4ca)$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত ।

11(a) $x^2 + kx - 6k = 0$ **এবং** $x^2 - 2x - k = 0$ **সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে k এর মান নির্ণয় কর ।** [ঢা.'০০ ; চ.'০১;রা. '০১,'০৭; ব.'০৭]

সমাধান : মনে করি , প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α । তাহলে ,

$\alpha^2 + k\alpha - 6k = 0 \cdots \cdots (1)$ এবং

$\alpha^2 - 2\alpha - k = 0 \cdots\cdots (2)$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই ,

$\dfrac{\alpha^2}{-k^2 - 12k} = \dfrac{\alpha}{-6k + k} = \dfrac{1}{-2-k}$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha^2}{k^2 + 12k} = \dfrac{\alpha}{5k} = \dfrac{1}{k+2}$

$\therefore\ (5k)^2 = k(k+12)(k+2)$

$\Rightarrow k(k^2 + 14k + 24) - 25k^2 = 0$

$\Rightarrow k(k^2 + 14k + 24 - 25k) = 0$

$\Rightarrow k(k^2 - 11k + 24) = 0$

$\Rightarrow k(k-3)(k-8) = 0$

$\therefore\ k = 0\ ,\ 3\ ,\ 8$

11(b) $px^2 + qx + 1 = 0$ **এবং** $qx^2 + px + 1 = 0$ **সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে, দেখাও যে,** $p + q + 1 = 0$ [চ.'০৪; ব.'০৬,'১০ ; মা.বো.'০৯; দি.'১০; রা.'১১; সি.'১১; চুয়েট'০৩-০৪; রুয়েট'০৯-১০]

প্রমাণ : ধরি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α । তাহলে, $p\alpha^2 + q\alpha + 1 = 0$ এবং $q\alpha^2 + p\alpha + 1 = 0$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই ,

$\dfrac{\alpha^2}{q-p} = \dfrac{\alpha}{q-p} = \dfrac{1}{p^2 - q^2}$

$\therefore\ (q-p)^2 = (q-p)(p^2 - q^2)$

$\Rightarrow (q-p)^2 - (q-p)(p-q)(p+q) = 0$

$\Rightarrow (q-p)^2 + (q-p)(q-p)(p+q) = 0$

$\Rightarrow (q-p)^2(1 + p + q) = 0$

এখানে, $p \neq q$. কারণ, $p = q$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের উভয় মূলই সাধারণ হবে ।

∴ $p + q + 1 = 0$ (Proved)

11(c) $ax^2 + bx + c = 0$ ও $cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $c + a = \pm b$ [য.'০২; মা.বো.'০৯; ব., দি.'১৩]

প্রমাণঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α। তাহলে, $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ এবং

$$c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{ab - bc} = \frac{\alpha}{c^2 - a^2} = \frac{1}{ab - bc}$$

∴ $(c^2 - a^2)^2 = (ab - bc)(ab - bc)$

$\Rightarrow b(a - c)b(a - c) - (a - c)^2(a + c)^2 = 0$

$\Rightarrow (a - c)^2\{b^2 - (a + c)^2\} = 0$

এখানে, $a \neq c$. কারণ, $a = c$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের উভয় মূলই সাধারণ হবে।

∴ $b^2 - (a + c)^2 = 0 \Rightarrow (a + c)^2 = b^2$

∴ $a + c = \pm b$ (Showed)

11(d) যে শর্তে $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি মূল সাধারণ হতে পারে তা নির্ণয় কর। [সি.'০৩]

সমাধান ঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α। তাহলে,

$a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0$ এবং

$a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

২য় এবং শেষ অনুপাত হতে আমরা পাই,

$$\alpha = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

আবার, ১ম ও ২য় অনুপাত হতে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{c_1a_2 - c_2a_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{c_1a_2 - c_2a_1} \quad [\because \text{এখানে } \alpha \neq 0]$$

$$\therefore \alpha = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1}$$

$$\therefore \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1}$$

$\Rightarrow (c_1a_2 - c_2a_1)^2 = (b_1c_2 - b_2c_1)(a_1b_2 - a_2b_1)$

ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

(e) যদি $x^2 + bx + c = 0$ ও $x^2 + mx + n = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে, তাহলে দেখাও যে, এ মূলটি $(bn - cm)/(m - b)$ এর বর্গমূল হবে।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α।

তাহলে, $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ ও $\alpha^2 + m\alpha + n = 0$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{bn - cm} = \frac{\alpha}{c - n} = \frac{1}{m - b}$$

১ম এবং শেষ অনুপাত হতে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{bn - cm} = \frac{1}{m - b} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{bn - cm}{m - b}$$

∴ সাধারণ মূলটি $\frac{bn - cm}{m - b}$ এর বর্গমূল। (Showed)

(f) যে শর্ত সাপেক্ষে $px^2 + qx + 1$ এবং $qx^2 + px + 1$ রশি দুইটির একটি সাধারণ উৎপাদক হতে পারে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $px^2 + qx + 1$ এবং $qx^2 + px + 1$ রাশি দুইটির একটি সাধারণ উৎপাদক থাকলে, $px^2 + qx + 1 = 0$ এবং $qx^2 + px + 1 = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকবে।

মনে করি, সাধারণ মূলটি α। তাহলে,

∴ $p\alpha^2 + q\alpha + 1 = 0$ এবং $q\alpha^2 + p\alpha + 1 = 0$.

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{q - p} = \frac{\alpha}{q - p} = \frac{1}{p^2 - q^2}$$

∴ $(q - p)^2 = (q - p)(p^2 - q^2)$

$\Rightarrow (q-p)^2 - (q-p)(p-q)(p+q) = 0$

$\Rightarrow (q-p)^2 + (q-p)(q-p)(p+q) = 0$

$\Rightarrow (q-p)^2(1+p+q) = 0$

এখানে, $p \neq q$. কারণ , $p = q$ হলে , প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের উভয় উৎপাদকই সাধারণ হবে ।

$\therefore$ $p + q + 1 = 0$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত ।

12(a) যদি $x^2 + bx + ac = 0$ এবং $x^2 + cx + ab = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে , তাহলে দেখাও যে, $a + b + c = 0.$ আরও দেখাও যে, তাদের অপর দুইটি মূল দ্বারা $x^2 + ax + bc = 0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হবে ।

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α।

তাহলে, $\alpha^2 + b\alpha + ac = 0$ ও $\alpha^2 + c\alpha + ab = 0$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই ,

$$\frac{\alpha^2}{ab^2 - ac^2} = \frac{\alpha}{ac - ab} = \frac{1}{c - b}$$

$\therefore$ $(ac - ab)^2 = (ab^2 - ac^2)(c - b)$

$\Rightarrow a^2(c-b)^2 - a(b^2 - c^2)(c - b) = 0$

$\Rightarrow a^2(b-c)^2 + a(b-c)^2(b+c) = 0$

$\Rightarrow a(b-c)^2(a+b+c) = 0$

$a = 0$ হলে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের কোন সাধারণমূল থাকবে না এবং $b = c$ হলে উভয় মূলই সাধারণ হয়ে যাবে।

$\therefore$ $a + b + c = 0.$

২য় এবং শেষ অনুপাত হতে আমরা পাই,

$\alpha = \dfrac{a(c-b)}{c-b} = a$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত ।

এখন, $x^2 + bx + ac = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল ac

$\therefore$ অপর মূলটি c

আবার, $x^2 + cx + ab = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল ab

$\therefore$ অপর মূলটি b

$\therefore$ b এবং c মূল দুইটি দ্বারা গঠিত সমীকরণ ,

$x^2 - (b+c)x + bc = 0$

$\Rightarrow x^2 - (-a)x + bc = 0$ [$\because a + b + c = 0$]

$\Rightarrow x^2 + ax + bc = 0$

অতএব, অপর মূল দুইটি দ্বারা $x^2 + ax + bc =$ সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

12(b) $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p =$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও তাদের অপর মূল দুইটি $x^2 + x + pq =$ সমীকরণের মূল হবে।

[ব.'১১; দি.'১২; টেক্সটাইল'০৪-০

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি

তাহলে , $\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \cdots\cdots(1)$ এবং

$$\alpha^2 + q\alpha + p = 0 \cdots\cdots(2)$$

$(1) - (2) \Rightarrow (p-q)\alpha + q - p = 0$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{p-q}{p-q} = 1$, ইহাই সাধারণ মূল ।

(1) -এ $\alpha = 1$ বসিয়ে আমরা পাই, $1 + p + q = 0$

$\Rightarrow p + q = -1 \cdots\cdots(3)$

এখন, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল

$\therefore$ অপর মূলটি q.

আবার, $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল

$\therefore$ অপর মূলটি p.

$\therefore$ q এবং p মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণ ,

$x^2 - (q+p)x + qp = 0$

$\Rightarrow x^2 - (-1) + pq = 0$ [(3) দ্বারা]

$\Rightarrow x^2 + x + pq = 0$

অতএব, অপর মূল দুইটি $x^2 + x + pq = 0$ সমীকর মূল হবে।

12(c) যদি $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx +$ $p = 0$ ($p \neq q$) সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে $2x^2 + (p + q - 2)x = (p + q -$ সমীকরণদ্বয়ের মূল নির্ণয় কর।

[বুয়েট'০২-০

সমাধান ঃ মনে করি , প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α । তাহলে ,

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \cdots\cdots(1) \text{ এবং}$$

$$\alpha^2 + q\,\alpha + p = 0 \cdots\cdots(2)$$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই ,

$$\frac{\alpha^2}{p^2 - q^2} = \frac{\alpha}{q - p} = \frac{1}{q - p}$$

$\therefore\ (q - p)^2 = (p^2 - q^2)(q - p)$

$\Rightarrow (q - l)^2 = -(q - p)(q - p)(q + p)$

$\Rightarrow (q - p)^2(q + p + 1) = 0$

$\therefore\ p + q + 1 = 0$ [$\because$ $p = q$ হলে উভয় মূল সাধারণ হবে ।]

এখন, $2x^2 + (p + q - 2)x = (p + q - 2)^2$

$\Rightarrow 2x^2 + (p + q + 1 - 3)x = (p + q + 1 - 3)^2$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - (-3)^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 3x - 9 = 0$

$\Rightarrow 2x(x - 3) + 3(x - 3) = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(2x + 3) = 0$

$\therefore\ x = 3,\ -\frac{3}{2}$ (Ans.)

12(d) যদি $ax^2 + 2cx + b = 0$ এবং $ax^2 + 2bx + c = 0$ ($b \neq c$) সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে $a + 4b + 4c$ এর মান নির্ণয় কর।

[বুয়েট'০৯-১০]

সমাধান ঃ মনে করি , প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α । তাহলে ,

$$a\alpha^2 + 2c\alpha + b = 0 \cdots\cdots(1) \text{ এবং}$$

$$a\alpha^2 + 2b\,\alpha + c = 0 \cdots\cdots(2)$$

বিয়োগ করে, $(2c - 2b)\,\alpha + (b - c) = 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{b - c}{2(b - c)} = \frac{1}{2}$

(1) হতে পাই, $a\frac{1}{4} + 2c \times \frac{1}{2} + b = 0$

$\Rightarrow\ a + 4b + 4c = 0$ (Ans.)

13(a) দেখাও যে, $x^5 - x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 8x + 699$ রাশিটির একটি উৎপাদক $x + 3$.

সমাধান ঃ ধরি ,

$f(x) = x^5 - x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 8x + 699$

$\therefore\ f(-3) = (-3)^5 - (-3)^4 + 10(-3)^3 - 9(-3)^2 + 8(-3) + 699$

$= -243 - 81 - 270 - 81 - 24 + 699$

$= -699 + 699 = 0$

$\therefore$ ভাগশেষ উপপাদ্যে সাহায্যে, $x-(-3) = x + 3$ হবে $f(x) = x^5 - x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 8x + 699$ বহুপদীর একটি উৎপাদক ।

13(b) দেখাও যে, $2x^3 - 2bx^2 - 2b^2x - 4b^3$ এর একটি উৎপাদক $x - 2b$.

প্রমাণ ঃ ধরি, $f(x) = 2x^3 - 2bx^2 - 2b^2x - 4b^3$

$\therefore\ f(2b) = 2.(2b)^3 - 2b(2b)^2 - 2b^2(2b) - 4b^3$

$= 16b^3 - 8b^3 - 4b^3 - 4b^3$

$= 16b^3 - 16b^3 = 0$

$\therefore$ ভাগশেষ উপপাদ্যে সাহায্যে, $x - (2b) = x - 2b$ হবে $f(x) = 2x^3 - 2bx^2 - 2b^2x - 4b^3$ বহুপদীর একটি উৎপাদক ।

14(a) দুইটি মূলের অনুপাত 3 : 4 হলে, $2x^3 - x^2 - 22x - 24 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

[য.'০১; সি.'০৭,'১০; রা.'০৭; দি.'১১]

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $3\alpha, 4\alpha$ এবং β

$\therefore\ 3\alpha + 4\alpha + \beta = -\left(\frac{-1}{2}\right)$

$\Rightarrow 7\alpha + \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} - 7\alpha \cdots\cdots(i)$ এবং

$3\alpha.4\alpha + 4\alpha.\beta + \beta.3\alpha = \frac{-22}{2} = -11$

$\Rightarrow 12\alpha^2 + 7\alpha\beta = -11$

$\Rightarrow 12\alpha^2 + 7\alpha(\frac{1}{2} - 7\alpha) = -11$ [(i) নং দ্বারা]

$\Rightarrow 24\alpha^2 + 7\alpha - 98\alpha^2 = -22$

$\Rightarrow -74\alpha^2 + 7\alpha + 22 = 0$

$\Rightarrow 74\alpha^2 - 7\alpha - 22 = 0$

$\Rightarrow 74\alpha^2 - 44\alpha + 37\alpha - 22 = 0$

$\Rightarrow 2\alpha(37\alpha - 22) + 1(37\alpha - 22) = 0$

$\Rightarrow (37\alpha - 22)(2\alpha + 1) = 0$

$\therefore 2\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$

অথবা, $37\alpha - 22 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{22}{37}$

এখানে, মূল তিনটির গুণফল = 12

$\alpha = -\frac{1}{2}$ হলে, $\beta = \frac{1}{2} - 7(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$

এক্ষেত্রে প্রদত্ত সমীকরণের মূল তিনটি $-\frac{3}{2}, -2, 4$;

যাদের গুণফল $= (-\frac{3}{2})(-2).4 = 12$

আবার, $\alpha = \frac{22}{37}$ হলে, $\beta = \frac{1}{2} - \frac{154}{37} = \frac{-271}{74}$

এক্ষেত্রে সমীকরণের মূল তিনটি $\frac{66}{37}, \frac{88}{37}, \frac{-271}{74}$;

যাদের গুণফল $= \frac{66}{37} \cdot \frac{88}{37} \cdot \frac{-271}{74} \neq 12$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $-\frac{3}{2}, -2, 4$

14(b) দুইটি মূলের যোগফল শূন্য হলে, $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর। [কু.'০৩]

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, $-\alpha$ এবং β

$\therefore \alpha - \alpha + \beta = -\frac{16}{4} \Rightarrow \beta = -4$

$\alpha \times -\alpha \times \beta = -(\frac{-36}{4})$

$\Rightarrow -\alpha^2 = \frac{9}{\beta} = \frac{9}{-4} \quad \therefore \alpha = \pm\frac{3}{2}$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -4$

14(c) $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ সমীকরণে মূলগুলো গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর। [কু.'০৪]

সমাধানঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $\alpha/\beta, \alpha, \alpha\beta$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}.\alpha.\alpha\beta = -\left(\frac{-24}{3}\right) \Rightarrow \alpha^3 = 8 \therefore \alpha = 2$

এবং $\frac{\alpha}{\beta} + \alpha + \alpha\beta = -\left(\frac{-26}{3}\right)$

$\Rightarrow \alpha(\frac{1}{\beta} + 1 + \beta) = \frac{26}{3}$

$\Rightarrow 2(\frac{1+\beta+\beta^2}{\beta}) = \frac{26}{3} \Rightarrow \frac{1+\beta+\beta^2}{\beta} = \frac{13}{3}$

$\Rightarrow 3\beta^2 + 3\beta + 3 = 13\beta \Rightarrow 3\beta^2 - 10\beta + 3 = 0$

$\Rightarrow 3\beta^2 - 9\beta - \beta + 3 = 0$

$\Rightarrow 3\beta(\beta - 3) - 1(\beta - 3) = 0$

$\Rightarrow (\beta - 3)(3\beta - 1) = 0 \Rightarrow \beta = 3, \frac{1}{3}$

$\beta = 3$ হলে, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}$, $\alpha\beta = 2 \times 3 = 6$ এবং

$\beta = \frac{1}{3}$ হলে, $\frac{\alpha}{\beta} = 6$, $\alpha\beta = \frac{2}{3}$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $\frac{2}{3}, 2, 6$

14(d) $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $1 + i$ হলে, অপর মূলগুলো নির্ণয় কর। [চ.'০৩]

সমাধানঃ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল $1 + i$, যা জটিল।

$\therefore$ অপর একটি মূল $1 - i$

$\therefore$ এ জটিল মূল দুইটির যোগফল $= 1 + i + 1 - i = 2$

এবং গুণফল $= (1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 2$

$\therefore$ $1 + i$ এবং $1 - i$ মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$x^2 - 2x + 2 = 0$

এখন, $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$

$$\Rightarrow x^2(x^2 - 2x + 2) - 3x(x^2 - 2x + 2) + 2(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\therefore x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - x + 2$$

$$\Rightarrow x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \quad \therefore x = 1, 2$$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের অপর মূলগুলো $1 - i, 1, 2$

14(e) $2x^4 - 15x^3 + 35x^2 - 30x + 8 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধান: মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো,

$\frac{\alpha}{\beta^3}, \frac{\alpha}{\beta}, \alpha\beta, \alpha\beta^3$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta^3}.\frac{\alpha}{\beta}.\alpha\beta.\alpha\beta^3 = \frac{8}{2} \Rightarrow \alpha^4 = 4$$

$\therefore \alpha^2 = 2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$ এবং

$$\frac{\alpha}{\beta^3}.\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^3}.\alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta^3}.\alpha\beta^3 + \frac{\alpha}{\beta}.\alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta}.\alpha\beta^3 + \alpha\beta.\alpha\beta^3 = \frac{35}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha^2\left(\frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\beta^2} + 1 + 1 + \beta^2 + \beta^4\right) = \frac{35}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\beta^2} + 2 + \beta^2 + \beta^4 = \frac{35}{2\alpha^2} = \frac{35}{2.2}$$

$$\Rightarrow \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right)^2 + \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right) = \frac{35}{4}$$

এখন মনে করি, $m = \beta^2 + \frac{1}{\beta^2}$ ...... (i)

$$\therefore m^2 + m = \frac{35}{4}$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 4m - 35 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 14m - 10m - 35 = 0$$

$$\Rightarrow 2m(2m + 7) - 5(2m + 7) = 0$$

$$\Rightarrow (2m + 7)(2m - 5) = 0$$

$$\therefore m = \frac{5}{2}, -\frac{7}{2}$$

β^2 এবং $\frac{1}{\beta^2}$ ধনাত্মক বলে $m = \frac{5}{2}$ হবে।

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, $\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \beta^4 + 1 = \frac{5}{2}\beta^2 \Rightarrow 2\beta^4 - 5\beta^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\beta^4 - 4\beta^2 - \beta^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\beta^2(\beta^2 - 2) - 1(\beta^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (2\beta^2 - 1)(\beta^2 - 2) = 0$$

$$\therefore \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}$$

$\beta = \sqrt{2}$ নিয়ে আমরা পাই,

$$\alpha\beta = \sqrt{2}.\sqrt{2} = 2, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1,$$

$$\alpha\beta^3 = \sqrt{2}.(\sqrt{2})^3 = 4, \frac{\alpha}{\beta^3} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ নিয়েও প্রদত্ত সমীকরণের একই মূল পাওয়া যায়।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $\frac{1}{2}, 1, 2, 4$

14(f) $4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $a - d, a, a + d$

$\therefore$ মূলগুলোর যোগফল,

$a-d+a+a+d=-\frac{-24}{4}=6$

$\Rightarrow 3a=6 \Rightarrow a=2$

মূলগুলির গুণফল , $(a-d)\,a\,(a+d)=-\frac{18}{4}$

$\Rightarrow a(a^2-d^2)=-\frac{9}{2} \Rightarrow 2(4-d^2)=-\frac{9}{2}$

$\Rightarrow 4-d^2=-\frac{9}{4} \Rightarrow d^2=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$

$\therefore d=\pm\frac{5}{2}$

$d=\frac{5}{2}$ নিয়ে আমরা পাই , $a-d=2-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$

$a+d=2+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$

$d=-\frac{5}{2}$ নিয়েও প্রদত্ত সমীকরণের একই মূল পাওয়া যায়।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $-\frac{1}{2}$, 2 , $\frac{9}{2}$

14(g) $x^3-px^2+qx-r=0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হবার শর্ত নির্ণয় কর ।

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো

$a-d,\ a,\ a+d.$

$\therefore a-d+a+a+d=-\frac{-p}{1}=p$

$\Rightarrow 3a=p \Rightarrow a=\frac{p}{3}$ .... (1)

$(a-d)a+a(a+d)+(a+d)(a-d)=q$

$\Rightarrow a^2-ad+a^2+ad+a^2-d^2=q$

$\Rightarrow 3a^2-d^2=q$ .... (2) এবং

$(a-d)a(a+d)=r$

$\Rightarrow a(a^2-d^2)=r$ .... (3)

(3) নং সমীকরণে $a=\frac{p}{3}$ বসিয়ে পাই ,

$\frac{p}{3}(\frac{p^2}{9}-d^2)=r \Rightarrow \frac{p^2}{9}-d^2=\frac{3r}{p}$

$\Rightarrow d^2=\frac{p^2}{9}-\frac{3r}{p}$

আবার, (2) নং সমীকরণে d^2 এবং a^2 এর মান বসিয়ে

পাই , $3.\frac{p^2}{9}-\frac{p^2}{9}+\frac{3r}{p}=q \Rightarrow 2\frac{p^2}{9}+\frac{3r}{p}=q$

$\Rightarrow 2p^3+27r=9pq$

$\therefore 2p^3+27r-9pq=0$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

14(h) $32x^3-48x^2+22x-3=0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর। [কু.'১২]

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $a-d, a, a+d$

$\therefore$ মূলগুলির যোগফল,

$a-d+a+a+d=-\frac{-48}{32}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 3a=\frac{3}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

মূলগুলির গুণফল , $(a-d)\,a\,(a+d)=\frac{-3}{32}$

$\Rightarrow a(a^2-d^2)=\frac{-3}{32} \Rightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{4}-d^2)=\frac{-3}{32}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}-d^2=\frac{-3}{16} \Rightarrow d^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$

$\therefore d=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

$d=\frac{\sqrt{7}}{4}$ নিয়ে আমরা পাই ,

$a-d=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{2-\sqrt{7}}{4}$

$a+d=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{2+\sqrt{7}}{4}$

$d=-\frac{\sqrt{7}}{4}$ নিয়েও প্রদত্ত সমীকরণের একই মূল পাওয়া

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $\frac{2-\sqrt{7}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{7}}{4}$.

14(i) $8x^4 - 2x^3 - 27x^2 + 6x + 9 = 0$ সমীকরণের যেকোনো দুইটি মূলের যোগফল শূন্য হলে সমীকরণটির অপর দুইটি মূলের মান নির্ণয় কর। [চুয়েট' ০৯-১০]

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $\alpha, -\alpha, \beta$ ও γ, তাহলে,

$$\alpha - \alpha + \beta + \gamma = -\frac{-2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta + \gamma = \frac{1}{4}$$

আবার, $\alpha(-\alpha)\beta + \alpha(-\alpha)\gamma + \alpha\beta\gamma + (-\alpha)\beta\gamma = -\frac{6}{8}$

$$\Rightarrow -\alpha^2\beta - \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow -\alpha^2(\beta+\gamma) = -\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha^2 = 3$$

এবং $-\alpha^2\beta\gamma = \frac{9}{8} \Rightarrow -3\beta\gamma = \frac{9}{8} \Rightarrow \beta\gamma = -\frac{3}{8}$

এখন, β, γ দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$$x^2 - (\beta + \gamma)x + \beta\gamma = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow 8x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 6x + 4x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(4x-3) + 1(4x-3) = 0$$

$$\Rightarrow (4x-3)(2x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলদ্বয়, $\frac{3}{4}$ ও $-\frac{1}{2}$.

15(a) k এর মান কত হলে $(k+1)x^2 + 2(k+3)x + 2k + 3$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হবে?

[BUET 08-09, KUET09-10; KU 08-09]

(A) 3, 2 (B) 3, −2 (C) −3, 2 (D) −3, −2

*Sol*ⁿ : প্রদত্ত রাশিটি দ্বারা গঠিত সমীকরণের পৃথায়ক,

$$D = 4(k^2 + 6k + 9) - 4(k+1)(2k+3) = 0$$

$$\Rightarrow -(k^2 - k - 6) = 0 \Rightarrow k = 3, -2$$

(b) $a \in \mathbb{R}$ হলে, সমীকরণ $x^4 + a^2x^2 + a^4 = 0$ এর মূলগুলি- **[KUET 09-10]**

(A) বাস্তব (B) জটিল

(C) কাল্পনিক (D) জটিল ও কাল্পনিক

*Sol*ⁿ : $x^4 + a^2x^2 + a^4 = 0$

$$\Rightarrow (x^2)^2 + 2a^2x^2 + (a^2)^2 - a^2x^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + a^2)^2 = a^2x^2 \Rightarrow x^2 + a^2 = \pm ax$$

$$\Rightarrow x^2 \pm ax + a^2 = 0$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক,

$$D = (\pm a)^2 - 4a^2 = a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0$$

$\therefore$ মূলগুলি জটিল।

(c) যদি $\alpha + \beta = 3$ ও $\alpha^3 + \beta^3 = 7$ হয়, তবে α ও β যে সমীকরণের মূল তা হলো- **[KUET 11-12]**

(A) $x^2 - 3x + 7 = 0$ (B) $x^2 - 3x - 7 = 0$

(C) $9x^2 - 27x + 20 = 0$

(D) $9x^2 - 27x - 20 = 0$

*Sol*ⁿ : $\alpha^3 + \beta^3 = 7$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 7$$

$$\Rightarrow 3^3 - 3\alpha\beta \times 3 = 7 \Rightarrow 9\alpha\beta = 20 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{20}{9}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - 3x + \frac{20}{9} = 0$

$$\Rightarrow 9x^2 - 27x + 20 = 0$$

16.

$2x^3 - 9x^2 + 9x + 2 \equiv (x-2)(ax^2 + bx + c)$, যেখানে a, b এবং c ধ্রুবক।

(a) a, b, c এর মান নির্ণয় কর।

(b) $2x^3-9x^2+9x+2=0$ সমীকরণের মূলত্রয় $2, \alpha$ ও β হলে, একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $(\alpha+\frac{k}{\beta})$ এবং $(\beta+\frac{k}{\alpha})$, যেখানে k ধ্রুবক।

(c) (b)-এ প্রাপ্ত সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল -8 হলে k এর সম্ভাব্য দুইটি মান নির্ণয় কর।

সমাধান: (a)

$2x^3-9x^2+9x+2 \equiv (x-2)(ax^2+bx+c)$

$\Rightarrow 2x^3-9x^2+9x+2 \equiv ax^3+(-2a+b)x^2+(-2b+c)x-2c$

উভয় পক্ষ থেকে x^3, x^2 এর সহগ এবং ধ্রুবপদ সমীকৃত কওে পাই, $a=2$,

$-2a+b=-9 \Rightarrow -2\times2+b=-9 \Rightarrow b=-5$

এবং $-2c=2 \Rightarrow c=-1$.

$\therefore$ $a=2, b=-5$ এবং $c=-1$ (Ans.)

(b) দেওয়া আছে, $2x^3-9x^2+9x+2=0$ সমীকরণের মূলত্রয় $2, \alpha$ ও β.

$\therefore\ 2+\alpha+\beta=\frac{9}{2} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$

আবার, $2\alpha\beta=-\frac{2}{2}=-1 \Rightarrow \alpha\beta=-\frac{1}{2}$

এখন, $(\alpha+\frac{k}{\beta})$ ও $(\beta+\frac{k}{\alpha})$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$= \alpha+\frac{k}{\beta}+\beta+\frac{k}{\alpha}=\alpha+\beta+k(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha})$

$= \alpha+\beta+k\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{2}+k\frac{5/2}{-1/2}=\frac{5}{2}-5k$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $=(\alpha+\frac{k}{\beta})(\beta+\frac{k}{\alpha})$

$= \alpha\beta+\frac{k^2}{\alpha\beta}+2k=-\frac{1}{2}-2k^2+2k$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2-(\frac{5}{2}-5k)x-\frac{1}{2}-2k^2+2k=0$

$\Rightarrow 2x^2-(5-10k)x-1-4k^2+4k=0$

(c) প্রশ্নমতে, $-\frac{1}{2}-2k^2+2k=-8$

$\Rightarrow -1-4k^2+4k=-16$

$\Rightarrow 4k^2-4k-15=0$

$\Rightarrow 4k^2-10k+6k-15=0$

$\Rightarrow 2k(2k-5)+3(2k-5)=0$

$\Rightarrow (2k-5)(2k+3)=0$

$\therefore\ k=\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$

ব্যবহারিক প্রশ্নমালা

1. তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান নির্ণয় কর:

(a) $2x^2-7x+2=0$

পরীক্ষণ নং	তারিখ ঃ

পরীক্ষণের নাম ঃ লেখের সাহায্যে $f(x)=2x^2-7x+2=0$ সমীকরণের বাস্তব মূলের আসন্ন মান তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব : লেখের উপর $x=a$ এবং $x=b$ এর জন্য,

(i) যদি f(a) এবং f(b) বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় তবে]a, b[ব্যবধির মধ্যে $f(x)=0$ এর কমপক্ষে একটি অথবা বিজোড় সংখ্যক মূল থাকবে।

(ii) যদি f(a) এবং f(b) একই চিহ্নযুক্ত হয় তবে]a, b[ব্যবধির মধ্যে $f(x)=0$ এর জোড় সংখ্যক মূল থাকবে অথবা কোন মূল থাকবেনা।

(iii) $y=f(x)$ সমীকরণের লেখচিত্র x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে তার ভূজ $f(x)=0$ সমীকরণের বাস্তব মূল হবে। যদি ভূজ ভগ্নাংশ হয় তবে সেই ভূজের আসন্ন মান $f(x)=0$ সমীকরণের মূলের আসন্ন মান হবে।

(iv) যদি $y=f(x)$ সমীকরণের লেখচিত্রটি x- অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ না ...

মূল থাকবে না।

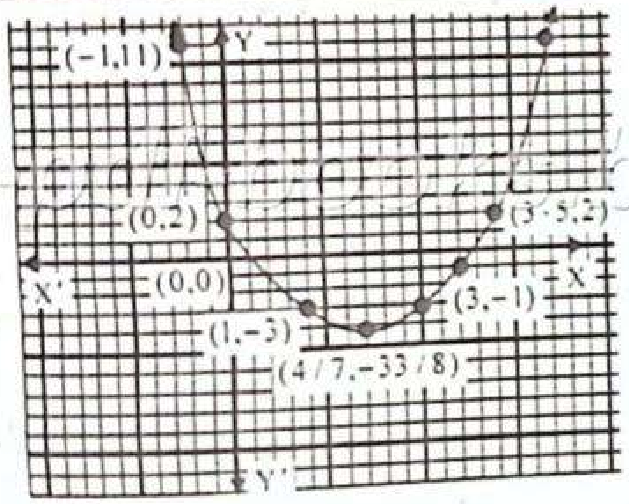
প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

2. $y = f(x) = 2x^2 - 7x + 2 = 0$ সমীকরণে x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি তৈরি করি।

x	−1	0	1	7/4	3	3.5
y	11	2	−3	−33/8	−1	2



3. x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু = 4 একক এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

4. লেখচিত্রটি যে সকল বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে সে সকল বিন্দুর ভুজ নির্ণয় করে প্রদত্ত সমীকরণের বাস্তব মূল নির্ণয় করি।

মূলের মান নির্ণয়: লেখচিত্রটি x-অক্ষকে (−1,0) বিন্দুতে ছেদ করেছে। অতএব, f(x) এর একটি মূল = −1

লেখচিত্র হতে দেখা যাচ্ছে যে, f(x) এর অপর মূলদ্বয়]0, 1[ব্যবধি এবং]3, 3·5[ব্যবধিতে বিদ্যমান।

]0, 1[ব্যবধিতে বিদ্যমান প্রথম মূলের আসন্ন মান নির্ণয়:

$f(0{\cdot}3) = 2(0{\cdot}3)^2 - 7(0{\cdot}3) + 2 = 0{\cdot}08 > 0$

$f(0{\cdot}32) = 2(0{\cdot}32)^2 - 7(0{\cdot}32) + 2$
$= -0{\cdot}0352 < 0$

[$\because 0{\cdot}0352 < 0{\cdot}08$, প্রথম মূলটি 0·32 এর নিকটবর্তী]

$f(0{\cdot}31) = 2(0{\cdot}325)^2 - 7(0{\cdot}325) + 2$
$= 0.0222 > 0$

[$\because$ $0.0222 < 0{\cdot}0352$, প্রথম মূলটি 0·31 এর নিকটবর্তী]

$f(0{\cdot}314) = 2(0{\cdot}314)^2 - 7(0{\cdot}314) + 2$
$= -0.000808 < 0$

$f(0{\cdot}313) = 2(0{\cdot}313)^2 - 7(0{\cdot}313) + 2$
$= 0.0034938 > 0$

$\therefore$ প্রথম মূলের আসন্ন মান = 0·314

]3,3·5[ব্যবধিতে বিদ্যমান দ্বিতীয় মূলের আসন্ন মান নির্ণয়:

$f(3{\cdot}1) = 2(3{\cdot}1)^2 - 7(3{\cdot}1) + 2 = -0{\cdot}48 < 0$

$f(3{\cdot}2) = 2(3{\cdot}2)^2 - 7(3{\cdot}2) + 2 = 0{\cdot}08 > 0$

$f(3{\cdot}17) = 2(3{\cdot}17)^2 - 7(3{\cdot}17) + 2$
$= -0{\cdot}0922 < 0$

$f(3{\cdot}19) = 2(3{\cdot}19)^2 - 7(3{\cdot}19) + 2$
$= 0{\cdot}0222 > 0$

$f(3{\cdot}18) = 2(3{\cdot}18)^2 - 7(3{\cdot}18) + 2$
$= -0{\cdot}0352 < 0$

$f(3{\cdot}185) = 2(3{\cdot}185)^2 - 7(3{\cdot}185) + 2$
$= -0{\cdot}00655 < 0$

$f(3{\cdot}186) = 2(3{\cdot}186)^2 - 7(3{\cdot}186) + 2$
$= -0{\cdot}000808 < 0$

$\therefore$ দ্বিতীয় মূলের আসন্ন মান = 3·186

ফলাফল : নির্ণেয় মূল দুইটি 0·314 (প্রায়) এবং 3·186 (প্রায়)

মন্তব্য : বিপরীত চিহ্নযুক্ত f(a) ও f(b) মানদ্বয়ের মধ্যে যদি f(b) শূন্যের অধিকতর নিকটবর্তী হয় তবে মূলের আসন্ন মান হবে $x = b$.

(b) $x^2 + 8x + 16 = 0$

পরীক্ষণ নং :	তারিখ :

পরীক্ষণের নাম ঃ লেখের সাহায্যে $f(x) = x^2 + 8x + 16 = 0$ সমীকরণের বাস্তব মূলের আসন্ন মান তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব : লেখের উপর $x = a$ এবং $x = b$ এর জন্য,

(i) যদি f(a) এবং f(b) বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় তবে]a , b[ব্যবধির মধ্যে $f(x) = 0$ এর কমপক্ষে একটি অথবা বিজোড় সংখ্যক মূল থাকবে।

(ii) যদি f(a) এবং f(b) একই চিহ্নযুক্ত হয় তবে]a , b[ব্যবধির মধ্যে $f(x) = 0$ এর জোড় সংখ্যক মূল থাকবে অথবা কোন মূল থাকবেনা।

(iii) $y = f(x)$ সমীকরণের লেখচিত্র x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে তার ভূজ $f(x) = 0$ সমীকরণের বাস্তব মূল হবে। যদি ভূজ ভগ্নাংশ হয় তবে সেই ভূজের আসন্ন মান $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলের আসন্ন মান হবে।

(iv) যদি $y = f(x)$ সমীকরণের লেখচিত্রটি x- অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ না করে তবে $f(x) = 0$ এর কোন বাস্তব মূল থাকবে না।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

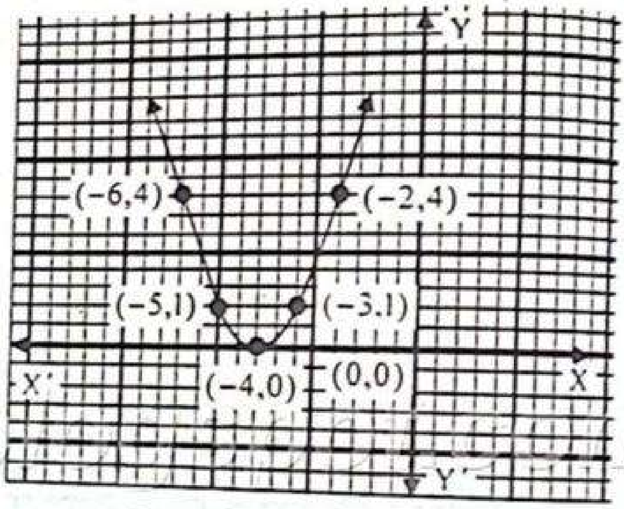
1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি।

2. $y = f(x) = x^2 + 8x + 16 = 0$ সমীকরণে x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি তৈরি করি।

x	−6	−5	−4	−3	−2
y	4	1	0	1	4

3. x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু = 2 একক এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 1 বাহু = 2 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

4. লেখচিত্রটি যে সকল বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে সে সকল বিন্দুর ভূজ নির্ণয় করে প্রদত্ত সমীকরণের বাস্তব মূল নির্ণয় করি।



মূলের মান নির্ণয়: লেখচিত্রটি x-অক্ষকে (−1,0) বিন্দুতে ছেদ করেছে। অতএব, f(x) এর একটি মূল = −1

লেখচিত্র হতে দেখা যাচ্ছে যে, f(x) এর অপর মূলদ্বয়]1, 2[ব্যবধি এবং]4, 6[ব্যবধিতে বিদ্যমান।

লেখচিত্রে দেখা যায় যে ইহা x-অক্ষকে (−4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে। যেহেতু দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল থাকে, সেহেতু সমীকরণটির সমাধান হবে $x = -4, x = -4$.

ফলাফল : নির্ণেয় মূল দুইটি −4, −4

(c) $-x^2 + 5x - 3 = 0$

পরীক্ষণ নং ৪	তারিখ ঃ

পরীক্ষণের নাম ঃ লেখের সাহায্যে $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ সমীকরণের বাস্তব মূলের আসন্ন মান তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব : লেখের উপর $x = a$ এবং $x = b$ এর জন্য,

(i) যদি f(a) এবং f(b) বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় তবে]a , b[ব্যবধির মধ্যে $f(x) = 0$ এর কমপক্ষে একটি অথবা বিজোড় সংখ্যক মূল থাকবে।

(ii) যদি f(a) এবং f(b) একই চিহ্নযুক্ত হয় তবে]a, b[ব্যবধির মধ্যে f(x) = 0 এর জোড় সংখ্যক মূল থাকবে অথবা কোন মূল থাকবেনা।

(iii) y = f(x) সমীকরণের লেখচিত্র x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে তার ভূজ f(x) = 0 সমীকরণের বাস্তব মূল হবে। যদি ভূজ ভগ্নাংশ হয় তবে সেই ভূজের আসন্ন মান f(x) = 0 সমীকরণের মূলের আসন্ন মান হবে।

(iv) যদি y = f(x) সমীকরণের লেখচিত্রটি x- অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ না করে তবে f(x) = 0 এর কোন বাস্তব মূল থাকবে না।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

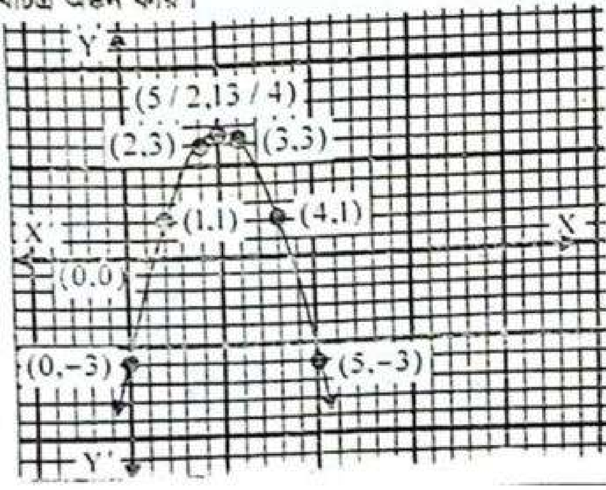
কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি।

2. $y = f(x) = -x^2 + 5x - 3 = 0$ সমীকরণে x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি তৈরি করি।

x	0	1	2	5/2	3	4	5
y	−3	1	3	13/4	3	1	−3

3. x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু = 2 একক এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 4 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে y = f(x) এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।



4. লেখচিত্রটি যে সকল বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে সে সকল বিন্দুর ভূজ নির্ণয় করে প্রদত্ত সমীকরণের বাস্তব মূল নির্ণয় করি।

মূলের মান নির্ণয়: লেখচিত্র হতে দেখা যাচ্ছে যে, f(x) এর মূলদ্বয়]0, 1[ব্যবধি এবং]4, 5[ব্যবধিতে বিদ্যমান।

]0, 1[ব্যবধিতে বিদ্যমান প্রথম মূলের আসন্ন মান নির্ণয়:

$f(0\cdot5) = -(0\cdot5)^2 + 5(0\cdot5) - 3 = -0\cdot75 < 0$

$f(0\cdot7) = -(0\cdot7)^2 + 5(0\cdot7) - 3 = 0\cdot01 > 0$

$f(0\cdot69) = -(0\cdot69)^2 + 5(0\cdot69) - 3$

$= -0\cdot0261 < 0$

$f(0\cdot697) = -(0\cdot697)^2 + 5(0\cdot697) - 3$

$= -0\cdot000809 < 0$

$f(0\cdot698) = -(0\cdot698)^2 + 5(0\cdot698) - 3$

$= 0\cdot002796 < 0$

∴ প্রথম মূলের আসন্ন মান = $0\cdot697$

]4, 5[ব্যবধিতে বিদ্যমান দ্বিতীয় মূলের আসন্ন মান নির্ণয়:

$f(4\cdot3) = -(4\cdot3)^2 + 5(4\cdot3) - 3 = 0\cdot01 < 0$

$f(4\cdot4) = -(4\cdot4)^2 + 5(4\cdot4) - 3 = -0\cdot36 < 0$

$f(4\cdot31) = -(4\cdot31)^2 + 5(4\cdot31) - 3$

$= -0\cdot0261 < 0$

$f(4\cdot302) = -(4\cdot315)^2 + 5(4\cdot315) - 3$

$= 0\cdot002796 > 0$

$f(4\cdot303) = -(4\cdot315)^2 + 5(4\cdot315) - 3$

$= -0\cdot000809 < 0$

∴ দ্বিতীয় মূলের আসন্ন মান = $4\cdot303$

ফলাফল : নির্ণেয় মূল দুইটি $0\cdot697$ (প্রায়) এবং $4\cdot303$ (প্রায়)

মন্তব্য : বিপরীত চিহ্নযুক্ত f(a) ও f(b) মানদ্বয়ের মধ্যে যদি f(b) শূন্যের অধিকতর নিকটবর্তী হয় তবে মূলের আসন্ন মান হবে x = b.

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $px^2 + 8(q-p)x + 4(4p-8q+r) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $4-2\alpha$, $4-2\beta$ হলে α এবং β মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $4-2\alpha$ এবং $4-2\alpha$ $px^2 + 8(q-p)x + 4(4p-8q+r) = 0$ সমীকরণের মূল।

$$\therefore 4-2\alpha+4-2\beta = -\frac{8(q-p)}{p}$$

$$\Rightarrow 8-2(\alpha+\beta) = -8.\frac{q}{p}+8$$

$\therefore \alpha+\beta = 4.\frac{q}{p}$ এবং

$$(4-2\alpha)(4-2\beta) = \frac{1}{p}4(4p-8q+r)$$

$$\Rightarrow 4(2-\alpha)(2-\beta) = \frac{1}{p}4(4p-8q+r)$$

$$\Rightarrow 4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta = \frac{1}{p}(4p-8q+r)$$

$$\Rightarrow 4-2.4.\frac{q}{p}+\alpha\beta = 4-8\frac{q}{p}+\frac{r}{p}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{r}{p}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = 0$

$$\Rightarrow x^2-4\frac{q}{p}x+\frac{r}{p} = 0$$

$$\therefore px^2-4qx+r = 0 \text{ (Ans.)}$$

2. α, β মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে $\alpha+\beta = 2$ এবং $\alpha^2+\beta^2 = 27$ হয়। [প্র.ভ.প.'৯২]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\alpha+\beta = 2$ এবং $\alpha^2+\beta^2 = 27$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = 27 \Rightarrow 4-2\alpha\beta = 27$$

$$\Rightarrow 2\alpha\beta = 4-27 \therefore \alpha\beta = -\frac{23}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = 0$

$$\Rightarrow x^2-2x+\left(-\frac{23}{2}\right) = 0$$

$$\therefore 2x^2-4x-23 = 0 \text{ (Ans.)}$$

3. α, β মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে $\alpha + \beta = 7$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{5}{2} = 0$ হয়। [প্র.ভ.প.'৯

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\alpha+\beta = 7$ এবং

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{5}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = -\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{49-2\alpha\beta}{\alpha\beta} = -\frac{5}{2} \Rightarrow 5\alpha\beta = -98+4\alpha\beta$$

$$\therefore \alpha\beta = -98$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = 0$

$$\Rightarrow x^2-7x-98 = 0$$

4. $p+q+r = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2+px+qr = 0$, $x^2+qx+rp = 0$ এবং $x^2+rx+pq = 0$ সমীকরণত্রয়ের প্রতি জোড়ার একটি করে সাধারণ মূল আছে।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $p+q+r = 0$

$\therefore p = -(q+r)$, $q = -(r+p)$, $r = -(p+q)$

এখন, $x^2+px+qr = 0$

$$\Rightarrow x^2-(q+r)x+qr = 0$$

$$\Rightarrow x^2-qx-rx+qr = 0$$

$$\Rightarrow x(x-q)-r(x-q) = 0$$

$$\Rightarrow (x-q)(x-r) = 0 \quad \therefore x = q, r.$$

$x^2+qx+rp = 0$

$$\Rightarrow x^2-(r+p)x+rp = 0$$

$$\Rightarrow x^2-rx-px+rp = 0$$

$$\Rightarrow x(x-r)-p(x-r) = 0$$

$$\Rightarrow (x-r)(x-p) = 0 \quad \therefore x = r, p.$$

$x^2+rx+pq = 0$

$$\Rightarrow x^2-(p+q)x+pq = 0$$

$$\Rightarrow x^2-px-qx+pq = 0$$

$$\Rightarrow x(x-p)-q(x-p) = 0$$

$\Rightarrow (x-p)(x-q)=0$

$\therefore \; x = p, q.$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণত্রয়ের প্রতি জোড়ার একটি করে সাধারণ মূল আছে ।

2(b) যদি $x^2 + lx + m = 0$ ও $x^2 + mx + l = 0$ $(m \neq l)$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ বীজ থাকে, তাহলে $2x^2 + (l+m)x = (l+m)^2$ সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'৮৯]

সমাধান ঃ মনে করি , প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α । তাহলে ,

$\alpha^2 + l\alpha + m = 0 \;\cdots\cdots(1)$ এবং

$\alpha^2 + m\alpha + l = 0 \cdots\cdots(2)$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই ,

$$\frac{\alpha^2}{l^2 - m^2} = \frac{\alpha}{m-l} = \frac{1}{m-l}$$

$\therefore \; (m-l)^2 = (l^2 - m^2)(m-l)$

$\Rightarrow (m-l)^2 = -(m-l)(m-l)(m+l)$

$\Rightarrow (m-l)^2(m+l+1) = 0$

$\therefore \; l + m + 1 = 0 \quad [\because m \neq l]$

এখন, $2x^2 + (l+m)x = (l+m)^2$

$\Rightarrow 2x^2 - x - (-1)^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x + x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x(x-1) + 1(x-1) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(2x+1) = 0$

$\therefore \; x = 1, -\dfrac{1}{2}$ (Ans.)

3. $4x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $\cos\alpha$ হলে দেখাও যে , অপর মূলটি $\cos 3\alpha$.

সমাধানঃ মনে করি , অপর মূলটি β .

$\therefore$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি , $\cos\alpha + \beta = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \beta = -\dfrac{1}{2} - \cos\alpha$

$4x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $\cos\alpha$ বলে

$4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0$

$\Rightarrow 4\cos^3\alpha + 2\cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos 3\alpha + 3\cos\alpha + \dfrac{1}{2}.4\cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$

$[\because \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha]$

$\Rightarrow \cos 3\alpha + 2\cos\alpha + \dfrac{1}{2}.(1 - 2\cos\alpha) = 0$

$[\because 4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0]$

$\Rightarrow \cos 3\alpha + 2\cos\alpha + \dfrac{1}{2} - \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos 3\alpha = -\dfrac{1}{2} - \cos\alpha = \beta \quad \therefore \beta = \cos 3\alpha$

অতএব , প্রদত্ত সমীকরণের অপর মূলটি $\cos 3\alpha$.

ভর্তি পরীক্ষার MCQ ঃ

1. $x^2 - 5x + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4 হলে অপর মূলটি– **[DU 08-09; JU 09-10]**

Sol^n : অপর মূলটি $= -\dfrac{-5}{1} - 4 = 5 - 4 = 1$

2. $2x^3 + px^2 + qx - 3 = 0$ সমীকরণের দুইটি মূল -3 এবং -1 হলে p এবং q এর মান–**[SUST 07-08]**

Sol^n : উভয় মূল দ্বারা সমীকরণ সিদ্ধ হবে।

$\therefore \; -54 + 9p - 3q - 3 = 0 \Rightarrow 3p - q = 19$

$-2 + p - q - 3 = 0 \Rightarrow p - q = 5$

$\therefore \; p = 7, q = 2$ (ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)

3. $x^3 + 7x^2 - 10x - 16 = 0$ এর একটি মূল– **[SUST 07-08]**

Sol^n : ক্যালকুলেটরের সাহায্যে মূলগুলো 2, – 8, –1.

MODE 3 times 1 (EQN) 3 (Degree 3) 1 + 7 – 10 – 6 = $x_1 = 2$ = $x_2 = -8$

কৌশল ঃ $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ ... হলে,

(a) $-\alpha, -\beta, -\gamma$ ...মূল বিশিষ্ট সমী. $f(-x) = 0$

(b) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ ...মূল বিশিষ্ট সমী. $f(\frac{1}{x}) = 0$

(c) $\alpha + h, \beta + h, \gamma + h$ ...মূল বিশিষ্ট সমীকরণ $f(x-h) = 0$.

(d) $\alpha - h, \beta - h, \gamma - h$ ...মূল বিশিষ্ট সমীকরণ $f(x+h) = 0$.

4. $6x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি হবে– [Jt.U 05-06; SUST 09-10]

Sol" : $6(\frac{1}{x})^2 - 5(\frac{1}{x}) + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

5. $x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 2 কম মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি হল– [DU 07-08]

Sol" : $(x+2)^2 - 5(x+2) - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - x + 7 = 0$

6. $x^2 - 2x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $-\alpha, -\beta$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি হবে– [DU 98-99, Jt.U 08-09]

Sol" : $(-x)^2 - 2(-x) + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$

7. $3x^2 - 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি কত? [CU 06-007;IU 04-05; RU 08-09]

l" : $\alpha + \beta = 2/3$, $\alpha\beta = 1/3$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta) - 4\alpha\beta = 4/9 - 4/3$

$= -2/9$

কৌশল : $ax^2 + bx + c$ রাশির সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন $c - \frac{b^2}{4a}$ হবে $x = -\frac{b}{2a}$ এর জন্য। $a > 0, a <$ হলে প্রদত্ত রাশির যথাক্রমে সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মান হবে।

8. $5 + 3x - x^2$ এর সর্বোচ্চ মান–[DU,CU'08-09]

Sol" : সর্বোচ্চ মান = $5 - \frac{3^2}{4.(-1)} = 5 + \frac{9}{4} = \frac{29}{4}$

9. $3x - x^2 - 5$ এর গরিষ্ঠ মান – [Jt.U 08-09]

Sol" : গরিষ্ঠ মান = $-5 - \frac{9}{4(-1)} = -\frac{11}{4}$

10 $5 - 3x - x^2$ এর সর্বোচ্চ মান– [DU 10-11]

Sol" : সর্বোচ্চ মান $= 5 - \frac{(-3)^2}{4.(-1)} = 5 + \frac{9}{4} = \frac{29}{4}$

11. $x^2 - 3x + 5$ এর ন্যূনতম মান– [DU 03-04, 06-07; Jt.U 07-08; JU 09-10; RU 08-09]

Sol" : ন্যূনতম মান = $5 - \frac{9}{4.1} = \frac{11}{4}$

12. $x^2 - 2x + 5$ এর ন্যূনতম মান– [BUET 09-10]

Sol" : ন্যূনতম মান = $5 - \frac{4}{4.1} = 4$

13. $27x^4 - 195x^3 + 494x^2 - 520x + 192 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমনন শ্রেণীভুক্ত হলে সমীকরণটি সমাধান কর।

A. 8/9, 2/3, 2, 3 (B) 8/9, 4/3, 2,3
(C) 8/9, 4/3, 3,4 (D) 8/9, 2/3, 8, 9

2 7 ALPHA X) ^ 4 − 1 9 5
ALPHA X) ^ 3 + 4 9 4 ALPHA X)
x^2 − 5 2 0 ALPHA X) + 1 9
2 SOLVE= CALC X?

1. নিম্নের দ্বিপদ রাশিগুলোকে বিস্তৃত কর ঃ

(a) $(x + 3y)^4 = x^4 + 4x^3 .3y + 6x^2 (3y)^2 + 4x(3y)^3 + (3y)^4$

$= x^4 + 12x^3y + 54x^2y^2 + 108xy^3 + 81y^4$

1(b) $(x + x^2 - 2x^3)^4 = x^4(1 + x - 2x^2)^4$

$= x^4\{1 + (x - 2x^2)\}^4$

$= x^4\{1 + 4(x - 2x^2) + 6(x - 2x^2)^2 + 4(x - 2x^2)^3 + (x - 2x^2)^4\}$

$= x^4[1 + 4x - 8x^2 + 6x^2(1 - 2x)^2 + 4x^3(1 - 2x)^3 + x^4(1 - 2x)^4]$

$= x^4[1 + 4x - 8x^2 + 6x^2(1 - 4x + 4x^2) + 4x^3(1 - 6x + 12x^2 - 8x^3) + x^4\{1 - 4.2x + 6.(2x)^2 - 4.(2x)^3 + (2x)^4\}]$

$= x^4[1 + 4x - 8x^2 + 6x^2 - 24x^3 + 24x^4 + 4x^3 - 24x^4 + 48x^5 - 32x^6 + x^4\{1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4\}]$

$= x^4[1 + 4x - 2x^2 - 20x^3 + 48x^5 - 32x^6 + x^4 - 8x^5 + 24x^6 - 32x^7 + 16x^8]$

$= x^4[1 + 4x - 2x^2 - 20x^3 + x^4 + 40x^5 - 8x^6 - 32x^7 + 16x^8]$

2.(a) সমাধান ঃ $(1 - \frac{1}{x})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে ৭ম পদ

$= (6 + 1)$তম পদ $= {}^{10}C_6(-\frac{1}{x})^6 = {}^{10}C_6 \frac{1}{x^6}$

2(b) সমাধান ঃ $(2x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{3}})^{20}$ এর বিস্তৃতিতে ১৯তম পদ $= (18 + 1)$ তম পদ

$$= {}^{20}C_{18}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)^{20-18}\left(-y^{\frac{1}{3}}\right)^{18}$$

$$= {}^{20}C_{18}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)^{2}\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^{18} = {}^{20}C_2.4.x\, y^6$$

$= \frac{20.19}{2}.4\, x\, y^6 = 760\, x\, y^6$ (Ans.)

3.(a) ধরি, $(2x - \frac{1}{4x^2})^{12}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদটি x মুক্ত। [ব.'১২; ঢা.'০৭; সি.'১১; দি.'১২]

$(r + 1)$ তম পদ $= {}^{12}C_r(2x)^{12-r}(-\frac{1}{4x^2})^r$

$= {}^{12}C_r 2^{12-r} x^{12-r}(-1)^r 2^{-2r}.x^{-2r}$

$= {}^{12}C_r 2^{12-r-2r}(-1)^r.x^{12-r-2r}$

$= {}^{12}C_r 2^{12-3r}(-1)^r.x^{12-3r}$

যেহেতু $(r + 1)$তম পদটি x মুক্ত, অতএব এই পদে x এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ 12 - 3r = 0 \Rightarrow 3r = 12 \Rightarrow r = 4$

$\therefore\ (4 + 1)$ অর্থাৎ, 5ম পদটি x মুক্ত এবং এর মান $= {}^{12}C_4.2^0.(-1)^4 = {}^{12}C_4 = 495$ (Ans.)

3(b) সমাধান ঃ ধরি, $(2x^3 - \frac{1}{x})^{12}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$তম পদটি x মুক্ত। [ঢা.'০২; দি.'১০]

এখানে $(r + 1)$তম পদ $= {}^{12}C_r(2x^3)^{12-r}(-\frac{1}{x})^r$

$= {}^{12}C_r 2^{12-r} x^{36-3r}(-1)^r.x^{-r}$

$= {}^{12}C_r 2^{12-r}(-1)^r.x^{36-3r-r}$

$= {}^{12}C_r 2^{12-r}(-1)^r.x^{36-4r}$

যেহেতু $(r + 1)$তম পদটি x মুক্ত, অতএব এই পদে x এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ 36 - 4r = 0 \Rightarrow 4r = 36 \Rightarrow r = 9$

$\therefore\ (9 + 1)$ বা, 10ম পদটি x মুক্ত এবং এর মান

$= {}^{12}C_9.2^{12-9}.(-1)^9 = -{}^{12}C_3.2^3$

$= -220.8 = -1760$ (Ans.)

3(c) সমাধান ঃ ধরি, $\left(\frac{x^4}{y^3} + \frac{y^2}{2x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$তম পদটি y মুক্ত। [য.'০৩]

এখানে, $(r + 1)$তম পদ $= {}^{10}C_r(\frac{x^4}{y^3})^{10-r}(\frac{y^2}{2x})^r$

$= {}^{10}C_r\, x^{40-4r}\, y^{-30+3r}\, (y)^{2r}.2^{-r}.x^{-r}$

$= {}^{10}C_r\, 2^{-r}.\, x^{40-4r-r}.\, y^{-30+3r+2r}$

$= {}^{10}C_r\, 2^{-r}.\, x^{40-5r}.y^{-30+5r}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি y মুক্ত, অতএব এই পদে y-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore -30+5r=0 \Rightarrow 5r=30 \Rightarrow r=6$

$\therefore$ $(6+1)$তম বা, 7ম পদটি y মুক্ত এবং এর মান

$= {}^{10}C_6.2^{-6}.(x)^{40-30} = {}^{10}C_4.2^{-6}x^{10}$

$= 210.\dfrac{1}{64}x^{10} = \dfrac{105}{32}x^{10}$ (Ans.)

3(d) $(\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{m}}{x^2})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান 405 হলে, m এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৭]

সমাধান ঃ মনে করি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটি x মুক্ত।

এখানে, $(r+1)$তম পদ $= {}^{10}C_r(\sqrt{x})^{10-r}(-\dfrac{\sqrt{m}}{x^2})^r$

$= {}^{10}C_r.\, x^{\frac{1}{2}(10-r)}(-1)^r\, m^{\frac{r}{2}}\, x^{-2r}$

$= {}^{10}C_r.(-1)^r\, m^{\frac{r}{2}}\, x^{5-\frac{r}{2}-2r}$

$= {}^{10}C_r.(-1)^r\, m^{\frac{r}{2}}\, x^{5-\frac{5r}{2}}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি x মুক্ত, অতএব এই পদে x এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ 5-\dfrac{5r}{2}=0 \Rightarrow 5r=10 \Rightarrow r=2$

$\therefore$ $(2+1)$তম বা, ৩য় পদটি x মুক্ত এবং এর মান

$= {}^{10}C_2.(-1)^2.\, m^{\frac{2}{2}} = {}^{10}C_2.m = 45m$

প্রশ্নমতে, $45m = 405 \therefore m = 9$ (Ans.)

3(e) প্রমাণ ঃ ধরি, $\left(x^p + \dfrac{1}{x^p}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদটি x মুক্ত। [টেক্সটাইল'০৮-০৯]

$(r+1)$তম পদ $= {}^{2n}C_r\,(x^p)^{2n-r}\,(\dfrac{1}{x^p})^r$

$= {}^{2n}C_r\, x^{2pn-pr}.x^{-pr}$

$= {}^{2n}C_r\, x^{2pn-pr-pr}$

$= {}^{2n}C_r\, x^{2pn-2pr} = {}^{2n}C_r\, x^{2p(n-r)}$

$n=r$ হলে $(r+1)$ তম পদ $= {}^{2r}C_r\, x^{2p(r-r)} = {}^{2r}C_r$

$\therefore$ $n=r$ হলে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে সর্বদা একটি x বর্জিত পদ থাকবে।

$n=5$ হলে x বর্জিত পদের মান $= {}^{10}C_5 = 252$

4. নিম্নের বিস্তৃতিতে ধ্রুব পদটির মান নির্ণয় কর ঃ

(a) $(\dfrac{1}{x^2} - x)^{18}$ [ঢা.'০৩; রা.'০৫; কু.'০৫]

ধরি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ।

$(r+1)$ তম পদ $= {}^{18}C_r(\dfrac{1}{x^2})^{18-r}(-x)^r$

$= {}^{18}C_r\, x^{-36+2r}(-1)^r x^r$

$= (-1)^r\, {}^{18}C_r\, x^{-36+2r+r}$

$= (-1)^r\, {}^{18}C_r\, x^{-36+3r}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ, অতএব এই পদে x-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ -36+3r=0 \Rightarrow 3r=36 \Rightarrow r=12$

অতএব, $(12+1)$ বা, 13তম পদটি ধ্রুব পদ এবং এর মান $= (-1)^{12}\, {}^{18}C_{12}. = {}^{18}C_6. = 18564$

4(b) $(x - \dfrac{1}{x})^{2n}$; যেখানে $n \in \mathbb{N}$

ধরি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটি ধ্রুব পদ।

$(r+1)$ তম পদ $= {}^{2n}C_r(x)^{2n-r}(-\dfrac{1}{x})^r$

$= {}^{2n}C_r\, x^{2n-r}(-1)^r\, x^{-r} = (-1)^r\, {}^{2n}C_r\, x^{2n-r-r}$

$= (-1)^r\, {}^{2n}C_r.\, x^{2n-2r}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ, অতএব এই পদে x-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ 2n - 2r = 0 \Rightarrow 2r = 2n \Rightarrow r = n$

অতএব, $(n+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ এবং এর মান $= (-1)^n\ {}^{2n}C_n$ (Ans.)

4(c) $(x + 2 + \dfrac{1}{x})^n$; যেখানে $n \in \mathbb{N}$

Sol^n. এখানে $(x + 2 + \dfrac{1}{x})^n = \dfrac{1}{x^n}(x^2 + 2x + 1)^n$

$= \dfrac{1}{x^n}\{(1+x)^2\}^n = \dfrac{1}{x^n}(1+x)^{2n}$

এখন ধরি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ।

$(r+1)$তম পদ $= \dfrac{1}{x^n}\ {}^{2n}C_r(x)^r = {}^{2n}C_r.\ x^{r-n}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ, অতএব এই পদে x-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ r - n = 0 \Rightarrow r = n$

অতএব, $(n+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ এবং এর মান $= {}^{2n}C_n$ (Ans.)

4 (d) $(1+4x)^p(1 + \dfrac{1}{4x})^q$

$= (1+4x)^p(\dfrac{1}{4x})^q(1+4x)^q$

$= \dfrac{1}{4^q}x^{-q}(1+4x)^{p+q}$

ধরি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটি ধ্রুব পদ।

$(r+1)$ তম পদ $= \dfrac{1}{4^q}x^{-q}\ {}^{p+q}C_r(4x)^r$

$= {}^{p+q}C_r.\dfrac{1}{4^q}x^{-q}.4^r.\ x^r$

$= {}^{p+q}C_r.4^{r-q}.x^{r-q}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ, অতএব এই পদে x-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ r - q = 0 \Rightarrow r = q$

অতএব, $(q+1)$ তম পদটি ধ্রুব পদ এবং এর মান $= {}^{p+q}C_q$

4(e) $(x^2 - 2 + \dfrac{1}{x^2})^6$ [য.'০৭; কু.'১৩]

$(x^2 - 2 + \dfrac{1}{x^2})^6 = \{(x - \dfrac{1}{x})^2\}^6 = (x - \dfrac{1}{x})^{12}$

মনে করি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ।

$(r+1)$ তম পদ $= {}^{12}C_r(x)^{12-r}(-\dfrac{1}{x})^r$

$= {}^{12}C_r(-)^r(x)^{12-2r}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ, অতএব এই পদে x-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ 12 - 2r = 0 \Rightarrow r = 6$

অতএব, $(6+1)$ বা, 7ম পদটি ধ্রুব পদ এবং এর মান $= {}^{12}C_6(-1)^6 = 924$

4(f) $(2x^2 - \dfrac{1}{2x^3})^{10}$ [ঢা.'০৯ ; চুয়েট'০৮–০৯]

ধরি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ।

$(r+1)$ তম পদ $= {}^{10}C_r(2x^2)^{10-r}(-\dfrac{1}{2x^3})^r$

$= {}^{10}C_r(2)^{10-r}x^{20-2r-3r}(-\dfrac{1}{2})^r$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ, অতএব এই পদে x-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ 12 - 2r - 3r = 0 \Rightarrow r = 4$

অতএব, $(4+1)$ বা, 5ম পদটি ধ্রুব পদ এবং এর মান $= {}^{10}C_4 2^{10-4}(-\dfrac{1}{2})^4 = 840$

4(g) $(x^3 + \dfrac{1}{x^6})^{15}$ [টেক্সটাইল'১১-১২]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ।

$(r+1)$ তম পদ $= {}^{15}C_r(x^3)^{15-r}(\dfrac{1}{x^6})^r$

$= {}^{15}C_r x^{45-3r}x^{-6r} = {}^{15}C_r x^{45-9r}$

যেহেতু $(r + 1)$তম পদটি ধ্রুব পদ, সেহেতু এই পদে x-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ 45 - 9r = 0 \Rightarrow r = 5$

অতএব, $(5 + 1)$ বা, ৬ষ্ঠ পদটি ধ্রুব পদ এবং এর মান $= {}^{15}C_5 = 3003$

5(a) $(x^2 + \frac{2y}{x})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^8 এর সহগ নির্ণয় কর। [চ.'০১;য.'০২]

সমাধান : এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r + 1)$তম পদ

$= {}^{10}C_r (x^2)^{10-r} (\frac{2y}{x})^r$

$= {}^{10}C_r x^{20-2r}.(2y)^r x^{-r}$

$= {}^{10}C_r.(2y)^r.x^{20-3r}$.

যদি এ পদে x^8 থাকে তবে, $20 - 3r = 8$

$\Rightarrow 3r = 20 - 8 = 12 \therefore r = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= {}^{10}C_4 .(2y)^4 = 210.16\ y^4$

$= 3360y^4$ (Ans.)

5(b) $(2x^2 - \frac{3}{x})^{11}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ নির্ণয় কর। [কু.'০৮; চ.'০৭; সি.'০৫; রা.'০৬,'১৩; দি.'১১]

সমাধান : এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r + 1)$তম পদ

$= {}^{11}C_r (2x^2)^{11-r} (-\frac{3}{x})^r$

$= (-1)^r\, {}^{11}C_r .2^{11-r} x^{22-2r} .3^r x^{-r}$

$= (-1)^r\, {}^{11}C_r .2^{11-r}.3^r.x^{22-3r}$.

যদি এ পদে x^{10} থাকে তবে, $22 - 3r = 10$

$\Rightarrow 3r = 22 - 10 = 12 \therefore r = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= (-1)^4.{}^{11}C_4 .2^{11-4}.3^4$

$= {}^{11}C_4 .2^7.3^4$ (Ans.)

5(c) $(2x^2 - \frac{3}{x})^{15}$ এর বিস্তৃতিতে x^{18} এর সহগ নির্ণয় কর। [রা.'০১; কু.'১০]

সমাধান : এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r + 1)$তম পদ

$= {}^{15}C_r (2x^2)^{15-r} (-\frac{3}{x})^r$

$= (-1)^r\, {}^{15}C_r .2^{15-r} x^{30-2r} .3^r x^{-r}$

$= (-1)^r\, {}^{15}C_r .2^{15-r}.3^r.x^{30-3r}$.

যদি এ পদটিতে x^{18} থাকে তবে, $30 - 3r = 18$

$\Rightarrow 3r = 30 - 18 = 12 \therefore r = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= (-1)^4.{}^{15}C_4 .2^{15-4}.3^4$

$= {}^{15}C_4 .2^{11}.3^4$ (Ans.)

5(d) $(x^3 - \frac{1}{x^4})^{15}$ এর বিস্তৃতিতে x^{-18} এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r + 1)$তম পদ

$= {}^{15}C_r (x^3)^{15-r} (-\frac{1}{x^4})^r$

$= {}^{15}C_r (-1)^r. x^{45-3r}.x^{-4r}$

$= {}^{15}C_r (-1)^r. x^{45-7r}$.

যদি এ পদটিতে x^{-18} থাকে তবে, $45 - 7r = -18$

$\Rightarrow 7r = 45 + 18 = 63 \quad \therefore r = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= {}^{15}C_9 (-1)^9. = -5005$ (Ans.)

6(a) $(a + 2x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 320 হলে, a এর মান নির্ণয় কর। [ঢা.'০৫; চুয়েট'০৯-১০]

সমাধান : এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r + 1)$তম পদ

$= {}^5C_r.a^{5-r}(2x)^r = {}^5C_r.a^{5-r}.2^r.x^r$

যদি এ পদটিতে x^3 থাকে তবে, $r = 3$

$\therefore\ x^3$ এর সহগ $= {}^5C_3 . a^{5-3}\, 2^3$

$= 10.8.a^2 = 80\ a^2$

প্রশ্নমতে, $80\ a^2 = 320 \Rightarrow a^2 = \frac{320}{80} = 4$

$\therefore\ a = \pm 2$ (Ans.)

6(b) $(1 - x)^8 (1 + x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। [য.'০৬]

$(1 - x)^8(1 + x)^7 = (1 - x)(1 - x)^7(1 + x)^7$

$= (1-x)(1-x^2)^7$

$= (1-x)\{1-{}^7C_1(x^2)+{}^7C_2(x^2)^2-{}^7C_3(x^2)^3 + {}^7C_4(x^2)^4-{}^7C_5(x^2)^5+{}^7C_6(x^2)^6+(x^2)^7\}$

$\therefore$ x^7 এর সহগ $= (-1)(-1)\,{}^7C_3 = 35$

6(c) $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য, $(1-x^2)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^{2r} এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদ $= {}^nC_r.(-x^2)^r = {}^nC_r.(-1)^r x^{2r}$.

$\therefore$ x^{2r} এর সহগ $= {}^nC_r.(-1)^r = (-1)^r \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

6(d) n এর মান কত হলে, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে x, x^2 এবং x^3 এর সহগগুলো একটি সমান্তর প্রগমন ভুক্ত হবে?

$(1+x)^n = 1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+{}^nC_3x^3+\cdots+x^n$

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x, x^2 এবং x^3 এর সহগ যথাক্রমে ${}^nC_1$, ${}^nC_2$ এবং ${}^nC_3$

প্রশ্নমতে, ${}^nC_1+{}^nC_3 = 2\,{}^nC_2$

$\Rightarrow \dfrac{{}^nC_1}{{}^nC_2}+\dfrac{{}^nC_3}{{}^nC_2} = 2$ [${}^nC_2$ দ্বারা ভাগ করে।]

$\Rightarrow \dfrac{2}{n-2+1}+\dfrac{n-3+1}{3} = 2$

$[\because \dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}]$

$\Rightarrow \dfrac{2}{n-1}+\dfrac{n-2}{3} = 2 \Rightarrow \dfrac{6+n^2-3n+2}{3(n-1)} = 2$

$\Rightarrow n^2-3n+8 = 6n-6$

$\Rightarrow n^2-9n+14 = 0$

$\Rightarrow n^2-7n-2n+14 = 0$

$\Rightarrow n(n-7)-2(n-7) = 0$

$\Rightarrow (n-2)(n-7) = 0 \quad \therefore n = 2, 7.$

কিন্তু $n \neq 2$, কারণ যদি $n = 2$ হয়, তবে প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x^3 সম্বলিত কোন পদ থাকবে না।

$\therefore$ $n = 7$ (Ans.)

6(e) $(x+3)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1} এর সহগ দুইটি সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে

$(r+1)$তম পদ $= {}^{15}C_r 3^{15-r}.x^r$ এবং

$\{(r+1)+1\}$তম পদ $= {}^{15}C_{r+1}3^{15-(r+1)}.x^{r+1}$

$= {}^{15}C_{r+1}3^{15-r-1}.x^{r+1}$.

$\therefore$ x^r এবং x^{r+1} এর সহগ যথাক্রমে ${}^{15}C_r3^{15-r}$ এবং ${}^{15}C_{r+1}3^{15-r-1}$

প্রশ্নমতে, ${}^{15}C_r3^{15-r} = {}^{15}C_{r+1}3^{14-r}$

$\Rightarrow \dfrac{{}^{15}C_{r+1}}{{}^{15}C_r} = 3^{15-r-14+r}$

$\Rightarrow \dfrac{15-(r+1)+1}{r+1} = 3 \quad [\because \dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}]$

$\Rightarrow 15-r = 3r+3 \Rightarrow 4r = 12 \;\therefore r = 3$ (Ans.)

6(f) $(1+x+x^3)^9$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ নির্ণয় কর।

$(1+x+x^3)^9 = \{(1+x)+x^3\}^9$

$= (1+x)^9+{}^9C_1(1+x)^8.x^3+{}^9C_2(1+x)^7.x^6+\cdots\cdots$

$= (1+{}^9C_1x+\cdots\cdots+{}^9C_5x^5+\cdots\cdots+x^9\}+{}^9C_1\{1+{}^8C_1x+{}^8C_2x^2+\cdots+x^8)\,x^3+\cdots$

$\therefore$ x^5 এর সহগ $= {}^9C_5+{}^9C_1.{}^8C_2 = 126+9.28$

$= 126+252 = 378$ (Ans.)

6(g) যদি $(1+x)(a-bx)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x^8 এর সহগ শূন্য হয়, তবে $\dfrac{a}{b}$ এর অনুপাতের মান নির্ণয় কর।

[বুয়েট'০৫-০৬]

সমাধান : $(1+x)(a-bx)^{12}$

$= (1 + x)(a^{12} + {}^{12}C_1 a^{12-1}.(-bx)^1 + {}^{12}C_2 a^{12-2}.(-bx)^2 + \dots \dots + {}^{12}C_7 a^{12-7}.(-bx)^7 + {}^{12}C_8 a^{12-8}.(-bx)^8 + \dots \dots + (-bx)^{12}$

$\therefore$ x^8 এর সহগ $= {}^{12}C_8 a^4.b^8 - {}^{12}C_7 a^5.b^7 = 0$

$\Rightarrow {}^{12}C_4\, b = {}^{12}C_5\, a \Rightarrow \dfrac{12!}{4!\,8!} b = \dfrac{12!}{5!\,7!} a$

$\therefore \dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{8}$ (Ans.)

7(a) $(2x^2 + \dfrac{3}{x})^{19}$ এর বিস্তৃতিতে x^{38-3r} এবং x^{35-3r} এর সহগ দুইটি পরস্পর সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদ

$= {}^{19}C_r(2x^2)^{19-r}.(\dfrac{3}{x})^r$

$= {}^{19}C_r.2^{19-r}.3^r.x^{38-2r}.x^{-r}$

$= {}^{19}C_r.2^{19-r}.3^r.x^{38-3r}$ এবং

$\{(r+1)+1\}$তম পদ

$= {}^{19}C_{r+1}.(2x^2)^{19-r-1}.(\dfrac{3}{x})^{r+1}$

$= {}^{19}C_{r+1}.2^{18-r}.3^{r+1}.x^{36-2r}.x^{-r-1}$

$= {}^{19}C_{r+1}.2^{18-r}.3^{r+1}.x^{35-3r}$

$\therefore$ x^{38-3r} এবং x^{35-3r} এর সহগ যথাক্রমে ${}^{19}C_r.2^{19-r}.3^r$ এবং ${}^{19}C_{r+1}.2^{18-r}.3^{r+1}$

প্রশ্নমতে, ${}^{19}C_r.2^{19-r}.3^r = {}^{19}C_{r+1}.2^{18-r}.3^{r+1}$

$\Rightarrow \dfrac{{}^{19}C_{r+1}}{{}^{19}C_r} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{19-(r+1)+1}{r+1} = \dfrac{2}{3}$

$[\because \dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}]$

$\Rightarrow \dfrac{19-r}{r+1} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 57 - 3r = 2r + 2$

$\Rightarrow 5r = 55 \therefore r = 11$ (Ans.)

7(b) $(x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}})^n$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর স নির্ণয় কর এবং যে শর্ত সাপেক্ষে এরূপ একটি পদ থাক তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(p+1)$তম

$= {}^nC_p(x^2)^{n-p}(\dfrac{1}{\sqrt{x}})^p = {}^nC_p.x^{2n-2p}.x^{-\frac{p}{2}}$

$= {}^nC_p.x^{2n-2p-\frac{p}{2}} = {}^nC_p.x^{\frac{4n-5p}{2}}$

যদি এ পদটিতে x^r থাকে তবে,

$r = \dfrac{4n-5p}{2} \Rightarrow 2r = 4n - 5p$

$\Rightarrow 5p = 2(2n+r) \therefore p = \dfrac{2(2n-r)}{5}$

যেহেতু $p \in \mathbb{N}$, অতএব এরূপ একটি পদ থাকবে যদি $2(2n-r)$ এর একটি উৎপাদক 5 হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= {}^nC_{\frac{2(2n-r)}{5}}$

$= \dfrac{n!}{\{\frac{2(2n-r)}{5}\}!\{n - \frac{2(2n-r)}{5}\}!}$

$= \dfrac{n!}{\left(\frac{4n-2r}{5}\right)!\left(\frac{n+2r}{5}\right)!}$ (Ans.)

7(c) যদি $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ x^{r-1} এর সহগের দ্বিগুণ হয়, তাহলে r এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r-1} এর সহগ যথাক্রমে ${}^{20}C_r$ এবং ${}^{20}C_{r-1}$

প্রশ্নমতে, ${}^{20}C_r = 2.{}^{20}C_{r-1}$

$\Rightarrow \dfrac{{}^{20}C_r}{{}^{20}C_{r-1}} = 2$

$\Rightarrow \dfrac{20-r+1}{r} = 2 \quad [\because \dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}]$

$\Rightarrow 21 - r = 2r \Rightarrow 3r = 21 \quad \therefore r = 7$ (Ans.)

7(d) যদি $(2x^2 + \dfrac{k}{x^3})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগ দুইটি সমান হয়, তাহলে k এর মান নির্ণয় কর।

[বুয়েট'০০-০১; টেক্সটাইল'০১-০২; কুয়েট'১০-১১]

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (r + 1)তম পদ

$= {}^{10}C_r (2x^2)^{10-r}.(\dfrac{k}{x^3})^r$

$= {}^{10}C_r 2^{10-r} x^{20-2r} k^r x^{-3r}$

$= {}^{10}C_r 2^{10-r} k^r x^{20-5r}$

এই পদে x^5 থাকলে, $20 - 5r = 5 \Rightarrow r = 3$

$\therefore$ x^5 এর সহগ $= {}^{10}C_3 2^{10-3} k^3 = 120 \times 2^7 k^3$

আবার, এই পদে x^{15} থাকলে, $20 - 5r = 15 \Rightarrow r = 1$

$\therefore$ x^{15} এর সহগ $= {}^{10}C_1 2^{10-1} k = 10 \times 2^9 k$

প্রশ্নমতে, $120 \times 2^7 k^3 = 10 \times 2^9 k$

$\Rightarrow k^2 = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \quad \therefore k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (Ans.)

8(a) x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে $(1+x^2)(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ x এর সহগের ছয়গুণ। $n \in \mathbb{N}$ এর মান নির্ণয় কর এবং এই মানের জন্য x^4 এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $(1+x^2)(1+x)^n = (1+x^2)(1 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + {}^nC_4 x^4 + \ldots\ldots + x^n)$

$\therefore$ x এর সহগ $= {}^nC_1$ এবং

x^3 এর সহগ $= {}^nC_1 + {}^nC_3$

প্রশ্নমতে, $6\,{}^nC_1 = {}^nC_1 + {}^nC_3$

$\Rightarrow 5\,{}^nC_1 = {}^nC_3$

$\Rightarrow 5n = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

$\Rightarrow 5n = \dfrac{n(n^2-3n+2)}{6}$

$\Rightarrow 30n = n^3 - 3n^2 + 2n$

$\Rightarrow n^2 - 3n + 2 - 30 = 0$

$\Rightarrow n^2 - 3n - 28 = 0$

$\Rightarrow n^2 - 7n + 4n - 28 = 0$

$\Rightarrow n(n-7) + 4(n-7) = 0$

$\Rightarrow (n-7)(n+4) = 0 \quad \therefore n = 7, -4$

কিন্তু n ঋণাত্মক হতে পারেনা। $\therefore n = 7$

এখন, x^4 এর সহগ $= {}^nC_2 + {}^nC_4 = {}^7C_2 + {}^7C_4$

$= 21 + 35 = 56$

8(b) $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য প্রমাণ কর যে, $(x^2 + 2x + 2)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এবং x^3 এর সহগ দুইটি যথাক্রমে $2^{n-1} n^2$ এবং $\dfrac{2^{n-1}}{3} n(n^2-1)$

প্রমাণ ঃ $(x^2 + 2x + 2)^n = \{x^2 + 2(1+x)\}^n$

$= \{2(1+x) + x^2\}^n$

$= 2^n(1+x)^n + {}^nC_1.2^{n-1}.(1+x)^{n-1}.x^2 + {}^nC_2.2^{n-2}.(1+x)^{n-2}.x^4 + \ldots\ldots$

$= 2^n\{1 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + \ldots\ldots\} + {}^nC_1.2^{n-1}\{1 + {}^{n-1}C_1 x + \cdots\}x^2 + \ldots\ldots$

$\therefore$ x^2 এর সহগ $= 2^n.{}^nC_2 + {}^nC_1.2^{n-1}$

$= 2.2^{n-1}\dfrac{n(n-1)}{2} + 2^{n-1}n$

$= 2^{n-1}\{n^2 - n + n\}$

$= 2^{n-1} n^2$ (প্রমাণিত)

x^3 এর সহগ $= 2^n.{}^nC_3 + {}^nC_1.2^{n-1}.{}^{n-1}C_1$

$= 2^n \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} + 2^{n-1} n.(n-1)$

$= 2^{n-1}\{2.\dfrac{n(n^2-3n+2)}{6} + n^2 - n\}$

$$= 2^{n-1}\frac{1}{3}\{n^3 - 3n^2 + 2n + 3n^2 - 3n\}$$

$$= \frac{2^{n-1}}{3}\{n^3 - n\} = \frac{2^{n-1}}{3}n(n^2-1).\text{(প্রমাণিত)}$$

8(c) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^{r-1}, x^r এবং x^{r+1} এর সহগগুলো যদি সমান্তরাল প্রগমনে থাকে তবে প্রমাণ কর যে, $n^2 - n(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0$

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x^{r-1}, x^r এবং x^{r+1} এর সহগ যথাক্রমে ${}^nC_{r-1}$, ${}^nC_r$ এবং ${}^nC_{r+1}$.

প্রশ্নমতে, ${}^nC_{r-1} + {}^nC_{r+1} = 2.{}^nC_r$

$$\Rightarrow \frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} + \frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = 2 \quad [{}^nC_r \text{ দ্বারা ভাগ করে।}]$$

$$\Rightarrow \frac{r}{n-r+1} + \frac{n-(r+1)+1}{r+1} = 2$$

$$\left[\because \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{r^2 + r + n^2 - 2nr + r^2 + n - r}{(n-r+1)(r+1)} = 2$$

$$\Rightarrow 2r^2 + n^2 - 2nr + n = 2(nr + n - r^2 + 1)$$

$$\Rightarrow 2r^2 + n^2 - 2nr + n - 2nr - 2n + 2r^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 + 4r^2 - 4nr - n - 2 = 0$$

$$\therefore n^2 - n(4r-1) + 4r^2 - 2 = 0 \text{ (Proved)}$$

8(d) $m, n \in \mathbb{N}$ হলে দেখাও যে, $(1+x)^{m+n}$ এর বিস্তৃতিতে x^m এবং x^n এর সহগ সমান হবে।

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x^m এর সহগ $= {}^{m+n}C_m$

$$= \frac{(m+n)!}{m!(m+n-m)!} = \frac{(m+n)!}{m!n!} \text{ এবং}$$

$$x^n \text{ এর সহগ} = {}^{m+n}C_n = \frac{(m+n)!}{n!(m+n-n)!}$$

$$= \frac{(m+n)!}{n!m!} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

x^m এবং x^n এর সহগ সমান। (Proved)

8(e) $(1+x)^{2n+1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1} এর সহগ সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1} এর সহগ যথাক্রমে ${}^{2n+1}C_r$ এবং ${}^{2n+1}C_{r+1}$

প্রশ্নমতে, ${}^{2n+1}C_r = {}^{2n+1}C_{r+1}$

$$\Rightarrow r + r + 1 = 2n + 1 \Rightarrow 2r = 2n \quad \therefore r = n$$

8(f) $(1+2x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে x^{r-1} এর সহগ C হলে এবং $C_{r+2} = 4C_r$ হলে, r মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে r তম পদ

$= \{(r-1)+1\}$তম পদ $= {}^{10}C_{r-1}.2^{r-1}x^{r-1}$

$\therefore x^{r-1}$ এর সহগ, $C_r = {}^{10}C_{r-1}.2^{r-1}$

$$\therefore C_{r+2} = 2^{(r+2)-1}.{}^{10}C_{(r+2)-1}$$

$$= 2^{r+1}.{}^{10}C_{r+1}$$

প্রশ্নমতে, $C_{r+2} = 4C_r$

$$\Rightarrow 2^{r+1}.{}^{10}C_{r+1} = 4.2^{r-1}.{}^{10}C_{r-1}$$

$$\Rightarrow 2^2.2^{r-1}.{}^{10}C_{r+1} = 2^2.2^{r-1}.{}^{10}C_{r-1}$$

$$\Rightarrow {}^{10}C_{r+1} = {}^{10}C_{r-1}$$

$$\therefore r + 1 + r - 1 = 10 \Rightarrow 2r = 10$$

$$\therefore r = 5 \text{ (Ans.)}$$

9. (i) নিম্নের বিস্তৃতিতে মধ্যপদ (মধ্যপদসমূহ) নির্ণয় কর।

(a) $\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)^{2n+1}$ [চ.'০২; সি.'০১]

সমাধান ঃ এখানে, $(2n+1)$ বিজোড় সংখ্যা ব… মধ্যপদ দুইটি এবং $\frac{2n+1+1}{2}$ i.e.,$(n+1)$তম … $(n+1+1)$ i.e. $(n+2)$তম পদ দুইটি মধ্যপদ।

$$\therefore (n+1)\text{তম পদ} = {}^{2n+1}C_n\left(\frac{a}{x}\right)^{2n+1-n}\left(\frac{x}{a}\right)^n$$

$$= {}^{2n+1}C_n\left(\frac{a}{x}\right)^{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^n = {}^{2n+1}C_n\frac{a}{x}$$

$(n+2)$তম পদ $= {}^{2n+1}C_{n+1}\left(\frac{a}{x}\right)^{2n+1-n-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}$

$= {}^{2n+1}C_{n+1}\left(\frac{a}{x}\right)^{n}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} = {}^{2n+1}C_{n+1}\frac{x}{a}$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যপদ ${}^{2n+1}C_n\frac{a}{x}$ এবং ${}^{2n+1}C_{n+1}\frac{x}{a}$

9(i) (b) $\left(3x^2-\frac{1}{2x}\right)^{10}$ [কু.'০৮]

সমাধান ঃ 10 জোড় সংখ্যা বলে মধ্যপদ একটি এবং $(\frac{10}{2}+1)$ i.e. 6তম পদটি মধ্যপদ।

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে মধ্যপদ = 6 অর্থাৎ (5 +1) তম পদ $= {}^{10}C_5\,(3x^2)^{10-5}(-\frac{1}{2x})^5$

$= -{}^{10}C_5\cdot 3^5 .x^{10}.\frac{1}{2^5x^5} = -{}^{10}C_5\left(\frac{3x}{2}\right)^5$

9(c) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{21}$ [কুয়েট'০৪-০৫]

21 বিজোড় সংখ্যা বলে মধ্যপদ দুইটি এবং $\frac{21+1}{2}$ i.e.11তম ও (11 + 1) i.e.12তম পদ দুইটি মধ্যপদ।

$\therefore$ 11তম পদ $= {}^{21}C_{10}\left(\frac{x}{y}\right)^{21-10}\left(\frac{y}{x}\right)^{10}$

$= {}^{21}C_{10}\left(\frac{x}{y}\right)^{11}\left(\frac{y}{x}\right)^{10} = {}^{21}C_{10}\cdot\frac{x}{y}$

12তম পদ $= {}^{21}C_{11}\left(\frac{x}{y}\right)^{21-11}\left(\frac{y}{x}\right)^{11}$

$= {}^{21}C_{11}\left(\frac{x}{y}\right)^{10}\left(\frac{y}{x}\right)^{11} = {}^{21}C_{11}\frac{y}{x}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে মধ্যপদ ${}^{21}C_{10}.\frac{x}{y}$ এবং ${}^{21}C_{11}\frac{y}{x}$

(d) $(x^2-2+\frac{1}{x^2})^n = \{(x-\frac{1}{x})^2\}^n = (x-\frac{1}{x})^{2n}$

2n জোড় সংখ্যা বলে মধ্যপদ একটি এবং $(\frac{2n}{2}+1)$ i.e.(n + 1)তম পদটি মধ্যপদ।

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে মধ্যপদ $= {}^{2n}C_n(x)^{2n-n}(-\frac{1}{x})^n$

$= (-1)^n.{}^{2n}C_n.x^n.\frac{1}{x^n} = (-1)^n.{}^{2n}C_n$

(ii) যদি $(2x+\frac{1}{6x})^6$ এবং $(x+\frac{1}{3x})^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদদ্বয় সমান হয়, তবে $n\in\mathbb{N}$ এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'১২]

সমাধান ঃ 6 ও 2n জোড় সংখ্যা বলে প্রদত্ত বিস্তৃতি দুইটির মধ্যপদ যথাক্রমে $(\frac{6}{2}+1)=4$র্থ এবং $(\frac{2n}{2}+1)=(n+1)$ তম পদ।

$(2x+\frac{1}{6x})^6$ বিস্তৃতিতে ৪র্থ পদ = (3 + 1) তম পদ

$= {}^6C_3(2x)^{6-3}(\frac{1}{6x})^3 = {}^6C_3\times 2^3\times\frac{1}{2^3 3^3}$

$= {}^6C_3\times\frac{1}{3^3}$

$(x+\frac{1}{3x})^{2n}$ বিস্তৃতিতে (n + 1) তম পদ

$= {}^{2n}C_n x^{2n-n}(\frac{1}{3x})^n = {}^{2n}C_n x^n\frac{1}{3^n x^n}$

$= {}^{2n}C_n\frac{1}{3^n}$

প্রশ্নমতে, ${}^{2n}C_n\frac{1}{3^n} = {}^6C_3\times\frac{1}{3^3} = {}^{2\times3}C_3\times\frac{1}{3^3}$

$\therefore n = 3$ (Ans.)

10(a) $(1+x)^{20}$ **এর বিস্তৃতিতে (2r +1) তম এবং (r + 3) তম পদের সহগ সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (2r + 1)তম এবং (r + 3) i.e. {(r + 2) + 1}তম পদের সহগ যথাক্রমে ${}^{20}C_{2r}$ এবং ${}^{20}C_{r+2}$

প্রশ্নমতে, ${}^{20}C_{2r} = {}^{20}C_{r+2}$

$\Rightarrow 2r + r + 2 = 20 \Rightarrow 3r = 18 \quad \therefore r = 6$

10(b) $(a+3x)^n$ **এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে** $b, \frac{21}{2}bx$ **এবং** $\frac{189}{4}bx^2$ **হলে,** a, b **এবং n এর মান নির্ণয় কর।** [ঢা '০২, '০৬; রা.'০৪,'১২; ব.'০৫; চ.'০৬; সি.'০৮,'১৩; য.'১১; কু.'১২]

সমাধান ঃ $(a+3x)^n = a^n + n\,a^{n-1}.3x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}.3^2.x^2 + \ldots\ldots$

প্রশ্নমতে, $b = a^n \cdots\cdots (1)$,

$\frac{21}{2}bx = n\,a^{n-1}.3x \Rightarrow 7b = 2na^{n-1} \cdots (2)$

এবং $\frac{189}{4}bx^2 = \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}.3^2.x^2$

$\Rightarrow 21b = 2(n^2 - n)\,a^{n-2} \cdots\cdots\cdots (3)$

$(2) \div (1) \Rightarrow 7 = \frac{2na^{n-1}}{a^n} = \frac{2n}{a}$

$\Rightarrow 7a = 2n \cdots\cdots (4)$

$(3) \div (2) \Rightarrow 3 = \frac{2n(n-1)a^{n-2}}{2na^{n-1}}$

$\Rightarrow 3 = \frac{n-1}{a} \Rightarrow 3a = n - 1$

$\Rightarrow n = 3a + 1 \cdots\cdots (5)$

(4) ও (5) হতে আমরা পাই, $7a = 2(3a+1)$

$\Rightarrow 7a - 6a = 2 \Rightarrow a = 2$

$\therefore n = 3\times 2 + 1 = 7$

(1) নং হতে আমরা পাই, $b = 2^7 = 128$

অতএব, $a = 2$, $b = 128$, $n = 7$

10(c) $(1+x)^{24}$ **এর বিস্তৃতিতে দুইটি ক্রমিক প নির্ণয় কর যাদের সহগের অনুপাত 4 : 1 হবে।**

সমাধান ঃ ধরি, (r + 1)তম এবং (r + 2)তম প দুইটি নির্ণেয় পর্যায়ক্রমিক পদ।

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (r + 1)তম এবং (r + 2)তম প দুইটি যথাক্রমে ${}^{24}C_r x^r$ এবং ${}^{24}C_{r+1}x^{r+1}$.

প্রশ্নমতে, ${}^{24}C_r : {}^{24}C_{r+1} = 4 : 1$

$\Rightarrow {}^{24}C_r = 4.\,{}^{24}C_{r+1} \Rightarrow \frac{{}^{24}C_{r+1}}{{}^{24}C_r} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{24-(r+1)+1}{r+1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{24-r}{r+1} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow r + 1 = 96 - 4r$

$\Rightarrow 5r = 95 \Rightarrow r = 19$

$\therefore$ নির্ণেয় পদ দুইটি (19 +1) i.e. 20তম এ (19 + 2) i.e. 21তম পদ।

আবার, ${}^{24}C_{r+1} : {}^{24}C_r = 4 : 1$ হলে,

$\frac{4}{24-r} = \frac{1}{r+1} \Rightarrow 4r + 4 = 24 - r$

$\Rightarrow 5r = 20 \Rightarrow r = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় পদ দুইটি (4 + 1) i.e. 5ম এবং (4 + 2) i.e. 6ষ্ঠ পদ।

অতএব, নির্ণেয় পদ দুইটি 5ম ও 6ষ্ঠ পদ অথবা 20তম ও 21তম পদ।

10(d) $(1+x)^{10}$ **এর বিস্তৃতিতে (4r + 5) তম পদের সহগ (2r + 1) তম পদের সহগের সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (4r + 5) তম এবং (2r + 1) তম পদের সহগ যথাক্রমে ${}^{10}C_{4r+4}$ এবং ${}^{10}C_{2r}$

প্রশ্নমতে, ${}^{10}C_{4r+4} = {}^{10}C_{2r} \Rightarrow 4r + 4 + 2r = 10 \Rightarrow 6r = 6 \quad \therefore r = 1$

10(e) $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদের সহগ $(r + 3)$ তম পদের সহগের সমান হলে দেখাও যে, $2r = n - 2$ $(n \in \mathbb{N})$ [কু.'০৬]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে,

$(r+1)$তম পদের সহগ $= {}^nC_r$ এবং

$(r+3)$তম পদের সহগ $= {}^nC_{r+2}$

প্রশ্নমতে, ${}^nC_r = {}^nC_{r+2}$

$\Rightarrow r + r + 2 = n \quad \therefore 2r = n - 2$ (Showed)

10(f) $(x + a)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে 729, 7290 এবং 30375 হলে a এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট'১২-১৩]

সমাধানঃ $(x + a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 + \cdots + a^n$

প্রশ্নমতে, $x^n = 729 \cdots (i)$, $nax^{n-1} = 7290 \cdots (ii)$

$\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 = 30375 \cdots \cdots (iii)$

$(i) \div (ii) \Rightarrow \frac{x}{na} = \frac{1}{10} \cdots \cdots (iv)$

$(ii) \div (iii) \Rightarrow \frac{2x}{a(n-1)} = \frac{7290}{30375} = \frac{6}{25} \cdots (v)$

$(iv) \div (v) \Rightarrow \frac{x}{na} \times \frac{a(n-1)}{2x} = \frac{1}{10} \times \frac{25}{6}$

$\frac{n-1}{2n} = \frac{5}{12} \Rightarrow 6n - 6 = 5n \Rightarrow n = 6$

(i) হতে, $x^6 = 729 = 3^6 \Rightarrow x = 3$

(iv) হতে, $\frac{3}{6a} = \frac{1}{10} \quad \therefore a = \frac{30}{6} = 5$ (Ans.)

10(g) r এর কোন মানের জন্য $(2x^2 + \frac{3}{x})^{19}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম এবং $(r + 2)$ তম পদের সহগ পরস্পর সমান হবে? [বুয়েট'০৮-০৯]

সমাধানঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদের সহগ $= {}^{19}C_r.2^{19-r}.3^r$ এবং $(r + 2)$ অর্থাৎ $\{(r + 1) + 1\}$ তম পদের সহগ $= {}^{19}C_{r+1}.2^{19-r-1}.3^{r+1}$

প্রশ্নমতে, ${}^{19}C_r.2^{19-r}.3^r = {}^{19}C_{r+1}.2^{19-r-1}.3^{r+1}$

$\Rightarrow \frac{19!}{(19-r)!\,r!}.2 = \frac{19!}{(19-r-1)!\,(r+1)!}.3$

$\Rightarrow \frac{2}{19-r} = \frac{3}{r+1} \Rightarrow 2r + 2 = 57 - 3r$

$\Rightarrow 5r = 55 \quad \therefore r = 11$ (Ans.)

11(a) দেখাও যে, $(1 + x)^{n+1}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদের সহগ $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে r তম এবং $(r + 1)$ তম পদের সহগ দুইটির যোগফলের সমান।

প্রমাণ : $(1 + x)^{n+1}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদের সহগ $= {}^{n+1}C_r$

$(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে rতম ও $(r + 1)$তম পদের সহগ যথাক্রমে ${}^nC_{r-1}$ এবং ${}^nC_r$।

এখন, ${}^nC_{r-1} + {}^nC_r = {}^nC_r(\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} + 1)$

$= {}^nC_r(\frac{r}{n-r+1} + 1) \quad [\because \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}]$

$= \frac{n!}{r!(n-r)!}(\frac{r+n-r+1}{n-r+1})$

$= \frac{n!(n+1)}{r!(n-r)!(n-r+1)} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = {}^{n+1}C_r$

$\therefore {}^{n+1}C_r = {}^nC_{r-1} + {}^nC_r$ (Showed)

11(b) যদি $(1 + x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে r তম পদের সহগ $(r + 4)$ তম পদের সহগের সমান হয়, তাহলে r এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'৮৫]

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে rতম পদরে সহগ $= {}^{20}C_{r-1}$ এবং $(r + 4)$তম পদের সহগ $= {}^{20}C_{r+3}$

প্রশ্নমতে, ${}^{20}C_{r-1} = {}^{20}C_{r+3} \Rightarrow r - 1 + r + 3 = 20$

$\Rightarrow 2r = 18 \quad \therefore r = 9$

11(c) $(1+x)^n$ বিস্তৃতিতে তিনটি ক্রমিক পদের সহগের অনুপাত 1:7:42 হলে, n এর মান নির্ণয় কর; যেখানে $n \in \mathbb{N}$.

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে r তম, (r+1) তম এবং (r + 2)তম ক্রমিক পদ তিনটির সহগের অনুপাত 1 : 7 : 42

$\therefore$ T_r এর সহগ : T_{r+1} এর সহগ = 1 : 7

$$\Rightarrow \frac{T_{r+1} \text{ এর সহগ}}{T_r \text{ এর সহগ}} = 7 \Rightarrow \frac{n-r+1}{r} = 7$$

$$\Rightarrow 7r = n - r + 1 \Rightarrow 8r = n + 1 \Rightarrow r = \frac{n+1}{8}$$

আবার, T_{r+1} এর সহগ : T_{r+2} এর সহগ = 7 : 42

$$\Rightarrow \frac{T_{r+2} \text{ এর সহগ}}{T_{r+1} \text{ এর সহগ}} = \frac{42}{7} \Rightarrow \frac{n-r}{r+1} = 6$$

$$\Rightarrow 6r + 6 = n - r \Rightarrow 7r = n - 6 \Rightarrow r = \frac{n-6}{7}$$

$$\therefore \frac{n+1}{8} = \frac{n-6}{7} \Rightarrow 8n - 48 = 7n + 7$$

$\therefore n = 55$ (Ans.)

(d) $(4x+3)^{34}$ এর বিস্তৃতিতে দুইটি ক্রমিক পদের সহগ সমান হলে,এপদ দুইটির x এর ঘাত নির্ণয় কর। [য. ০৫]

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (r + 1)তম এবং {(r + 1) + 1} তম পদ দুইটির সহগ সমান।

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (r +1)তম এবং {(r +1) + 1} তম পদের সহগ যথাক্রমে $^{34}C_r \,.\, 3^{34-r} \,.4^r$ এবং $^{34}C_{r+1} \,.\, 3^{34-r-1} .4^{r+1}$

$$\therefore {}^{34}C_r . 3^{34-r} . 4^r = {}^{34}C_{r+1} . 3^{34-r-1} . 4^{r+1}$$

$$\Rightarrow \frac{^{34}C_{r+1}}{^{34}C_r} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{34-(r+1)+1}{r+1} = \frac{3}{4} \quad [\because \frac{^nC_r}{^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}]$$

$$\Rightarrow 136 - 4r = 3r + 3$$

$$\Rightarrow 7r = 133 \Rightarrow r = 19$$

$\therefore$ এ পদ দুইটির x এর ঘাত 19 এবং 20 (Ans.)

12. $n \in \mathbb{N}$ হলে, $(x^p - \frac{1}{x^p})^{2n}$ বিস্তৃতির শেষ হতে (n + 1) তম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান: $(x^p - \frac{1}{x^p})^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে শেষ থেকে (n + 1)তম পদ এবং $(-1)^{2n}(\frac{1}{x^p} - x^p)^{2n}$ i.e $(\frac{1}{x^p} - x^p)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে শুরু থেকে (n + 1)তম পদ একই ।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় পদ } = {}^{2n}C_n (\frac{1}{x^p})^{2n-n} (-x^p)^n$$

$$= {}^{2n}C_n (\frac{1}{x^p})^n (-1)^n .(x^p)^n = (-1)^n \, {}^{2n}C_n$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

13(a) যদি $(1+x)^n$ বিস্তৃতিতে S_1 এবং S_2 যথাক্রমে বিজোড় ও জোড় স্থানের পদগুলোর সমষ্টি হয়, তবে দেখাও যে, $(1-x^2)^n = S_1^2 - S_2^2$; যেখানে $n \in \mathbb{N}$

প্রমাণ : $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \ldots\ldots + {}^nC_nx^n$ এবং

$(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - {}^nC_3x^3 + \ldots\ldots + (-1)^n \, {}^nC_nx^n$

প্রশ্নমতে, ${}^nC_0 + {}^nC_2x^2 + {}^nC_4x^4 + \ldots\ldots = S_1$

এবং ${}^nC_1x + {}^nC_3x^3 + {}^nC_5x^5 + \ldots\ldots = S_2$.

$\therefore (1+x)^n = S_1 + S_2 \ldots\ldots(1)$ এবং

$(1-x)^n = S_1 - S_2 \ldots\ldots\ldots(2)$

(1) এবং (2) গুণ করে আমরা পাই,

$(1+x)^n(1-x)^n = (S_1 + S_2)(S_1 - S_2)$

$\therefore (1-x^2)^n = S_1^2 - S_2^2$ (Showed)

13(b) প্রমাণ : L.H.S. = [প্র.ভ.প. '৮৮]

$$\{1+n+\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\cdots\}$$

$$\{1+2n+\frac{2n(2n-1)}{2!}+\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!}+\cdots\}$$

$= (1+1)^n\,(1+1)^{2n} = (1+1)^{n+2n}$

$= (1+1)^{3n}$

$= \{1+3n+\frac{3n(3n-1)}{2!}+\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{3!}+\cdots\}$

= R.H.S. (Proved)

14. $n \in \mathbb{N}$ **এবং** $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots\cdots + C_nx^n$ **হলে, প্রমাণ কর যে,**

(a) $C_0^2+C_1^2+C_2^2+C_3^2+\cdots\cdots+C_n^2=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

দেওয়া আছে,

$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n$

$(x+1)^n = C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_n$

$\therefore\ (1+x)^n(x+1)^n = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots\cdots + C_nx^n)(C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots\cdots + C_n)$

$(1+x)^{2n} = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n)(C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_n)$

উভয় পক্ষ হতে x^n এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$^{2n}C_n = C_0^2+C_1^2+C_2^2+C_3^2+\cdots\cdots+C_n^2$

$\therefore\ C_0^2+C_1^2+C_2^2+C_3^2+\cdots\cdots+C_n^2=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

(b) $C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots\cdots + C_0C_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

দেওয়া আছে,

$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n$

$(1+x)^n = C_nx^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0$

$\therefore (1+x)^n(1+x)^n = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n)(C_nx^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0)$

$(1+x)^{2n} = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n)(C_nx^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0)$

উভয় পক্ষ হতে x^n এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$^{2n}C_n = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots\cdots + C_0C_n$

$\therefore\ C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots\cdots + C_0C_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

14(c) $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n = n.2^{n-1}$

L.H.S. $= C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n$

$= n + 2.\dfrac{n(n-1)}{2} + 3.\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots + n$

$= n\{1 + (n-1) + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2!} + \cdots + 1\}$

$= n(1+1)^{n-1} = n.2^{n-1}$ = R.H.S. (Proved)

বিকল্প পদ্ধতি ঃ দেওয়া আছে,

$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$n(1+x)^n(1+x)^{n-1} = C_1 + C_2(2x) + C_3(3x^2) + \cdots + C_n\,n\,x^{n-1}$

এখন, উভয় পক্ষে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$n(1+1)^{n-1} = C_1 + C_2(2.1) + C_3(3.1^2) + \cdots\cdots + C_n\,n.1^{n-1}$

$\Rightarrow n.2^{n-1} = C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n$

$\therefore\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n = n.2^{n-1}$

14(d) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \cdots\cdots + (n+1)C_n = 2^n + n.2^{n-1}$

L.H.S. $= C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \cdots\cdots + (n+1)C_n$

$= (C_0 + C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_n) + (C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots\cdots + nC_n)$

$= (1+1)^n + n + 2.\dfrac{n(n-1)}{2} + 3.\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots + n$

$= 2^n + n\{1 + (n-1) + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2!} + \cdots + 1\}$

$= 2^n + n(1+1)^{n-1} = 2^n + n.2^{n-1}$ = R.H.S.

14(e) $C_0 + 4C_1 + 7C_2 + \cdots\cdots + (3n+1)C_n$

L.H.S.$= C_0 + 4C_1 + 7C_2 + \ldots\ldots + (3n+1)C_n$

$= (C_0 + C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n) + 3(C_1 + 2C_2 + \ldots\ldots + nC_n)$

$= (1+1)^n + 3.\{n + 2.\frac{n(n-1)}{2} + 3.\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + n\}$

$= 2^n + 3.n\{1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + \ldots + 1\}$

$= 2^n + 3n(1+1)^{n-1}$

$= 2^n + 3n.\,2^{n-1} =$ R.H.S. (Proved)

অসীম দ্বিপদী ধারা

প্রশ্নমালা - V B

1. চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় কর ঃ

(a) $(1-2x)^{\frac{3}{5}} = 1 + \frac{3}{5}(-2x) + \frac{\frac{3}{5}(\frac{3}{5}-1)}{2!}(-2x)^2 + \frac{\frac{3}{5}(\frac{3}{5}-1)(\frac{3}{5}-2)}{3!}(-2x)^3 + \ldots\ldots$

$= 1 - \frac{6}{5}x + \frac{\frac{3}{5}.(-\frac{2}{5})}{2}4.x^2 - \frac{\frac{3}{5}.(-\frac{2}{5})(-\frac{7}{5})}{6}8.x^3 + \ldots\ldots$

$= 1 - \frac{6}{5}x - \frac{12}{25}x^2 - \frac{56}{125}x^3 - \ldots\ldots\ \ldots\ldots$

1(b) $(1-nx)^{-\frac{1}{n}} = 1 + (-\frac{1}{n})(-nx) + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{n})(-\frac{1}{n}-1)(-nx)^2 + \frac{1}{3!}(-\frac{1}{n})(-\frac{1}{n}-1)(-\frac{1}{n}-2)(-nx)^3 + \ldots$

$= 1 + x + \frac{1}{2}(-1)(-n-1)x^2 + \frac{1}{6}(-1)(-n-1)(-1-2n)(-x^3) + \ldots$

$= 1 + x + \frac{1}{2}(n+1)x^2 + \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)x^3 + \cdots\ \cdots$ (Ans.)

1(c) $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{x}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{x}{a}\left\{1-\frac{x^2}{a^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{x}{a}[1 + (-\frac{1}{2})(-\frac{x^2}{a^2}) + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{x^2}{a^2})^2 + \frac{1}{3!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)(-\frac{x^2}{a^2})^3 + \ldots\ldots\ldots]$

$= \frac{x}{a}[1 + \frac{1}{2}.\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{x^4}{a^4} + \frac{1}{6}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{x^6}{a^6} + \ldots\ldots\ldots\ldots]$

$= \frac{x}{a} + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{a^3} + \frac{3}{2^3}\frac{x^5}{a^5} + \frac{5}{2^4}.\frac{x^7}{a^7} + \cdots$

2(a) $x < 8$ হলে $(1-\frac{x}{8})^{\frac{1}{2}}$ কে x এর উর্ধ্বক্রমিক ধারায় চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং দেখাও যে,

$1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}.\frac{1}{16} - \frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{3}{24} - \cdots = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [কু.০০]

$(1-\frac{x}{8})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(-\frac{x}{8}) + \frac{1}{2!}.\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(-\frac{x}{8})^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(-\frac{x}{8})^3 + \frac{1}{4!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)(-\frac{x}{8})^4 + \cdots$

$= 1 - \frac{1}{2}.\frac{x}{8} + \frac{1}{2!}.\frac{1}{2}.(-\frac{1}{2}).\frac{x^2}{8^2} + \frac{1}{3!}.\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})$

$$(-\frac{3}{2})(-\frac{x^3}{8^3}) + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\frac{x^4}{8^4} + \cdots\cdots$$

$$= 1-\frac{x}{16}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^2}{16^2}-\frac{3}{3!}\cdot\frac{x^3}{16^3}-\frac{15}{4!}\cdot\frac{x^4}{16^4}-\cdots \quad ---(i)$$

এখন, (i) এ $x = 2$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$(1-\frac{2}{8})^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{2}{16}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{2^2}{16^2}-\frac{3}{3!}\cdot\frac{2^3}{16^3}-\frac{15}{4!}\cdot\frac{2^4}{16^4}-\cdots\cdots$$

$$\Rightarrow (\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{24}-\cdots\cdots$$

$$\therefore 1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{24}-\cdots\cdots = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(Showed)

2(b) $(1-x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি সরলতম আকারে প্রকাশ কর এবং তা থেকে প্রথম চারটি পদ বের কর।

সমাধান : প্রদত্ত বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ

$$= \frac{-3(-3-1)(-3-2)\cdots\cdots(-3-r+1)}{r!}(-x)^r$$

$$= (-1)^r\frac{1}{r!}\{3.4.5.6.7.\cdots\cdots(r+2)\}(-1)^r x^r$$

$$= (-1)^{2r}\frac{1}{r!}\frac{1.2.3.4\cdots\cdots r(r+1)(r+2)}{1.2}x^r$$

$$= \frac{1}{r!}\frac{(1.2.3.4\cdots\cdots r)(r+1)(r+2)}{2}x^r$$

$$= \frac{1}{r!}\frac{r!(r+1)(r+2)}{2}x^r = \frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r$$

$r = 0, 1, 2, 3$ বসিয়ে প্রথম চারটি পদ পাওয়া যায় $1, 3x, 6x^2, 10x^3$

$$\therefore (1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots\cdots$$

2(c) দেওয়া আছে, $x < 6 \Rightarrow \frac{x}{6} < 1 \Rightarrow 1-\frac{x}{6} > 0.$

$\therefore (1-\frac{x}{6})^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিকে x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমিক ধারায় বিস্তৃত করা যাবে।

এখন, $(1-\frac{x}{6})^{\frac{1}{2}} = \left\{1+(-\frac{x}{6})\right\}^{\frac{1}{2}}$

$$= 1+\frac{1}{2}(-\frac{x}{6})+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(-\frac{x}{6})^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(-\frac{x}{6})^3 + \frac{1}{4!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)(-\frac{x}{6})^4+\cdots$$

$$= 1-\frac{x}{12}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(\frac{x}{6})^2+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{x}{6})^3+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(\frac{x}{6})^4+\cdots$$

$$= 1-\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{x^2}{2^2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}\frac{x^3}{2^3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}\frac{5}{24}\cdot\frac{x^4}{2^4}-\cdots \text{ (Ans.)}$$

এখন, $x = 2$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$(1-\frac{2}{6})^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{2^2}{2^2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}\frac{2^3}{2^3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}\frac{5}{24}\cdot\frac{2^4}{2^4}-\cdots$$

$$\therefore 1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}-\cdots\cdots = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

2(d) $x > 1$ হলে, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ এর বিস্তৃতির চতুর্থ পদ পর্যন্ত বের কর।

দেওয়া আছে, $x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < 1$

এখন, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{x}[1+(-\frac{1}{2})(\frac{1}{x^2})+\frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{x^2})^2$

$+\frac{1}{3!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{x^2})^3+\ldots\ldots]$

$=\frac{1}{x}[1-\frac{1}{2}.\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\frac{1}{x^4}.-$

$\frac{1}{6}\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\frac{1}{x^6}+\ldots\ldots\ldots]$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}.\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\frac{1}{x^5}.-\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\frac{1}{x^7}+\ldots$

2(e) xএর মান কত হলে, x-এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $\frac{1}{(8-3x)^{1/2}}$ এর বিস্তৃতি বৈধ হবে । ঐ বিস্তৃতিকে চতুর্ঘাত পর্যন্ত বিস্তৃত কর । [প্র.ভ.প. '৮৬]

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিকে x-এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে বিস্তৃত করা যাবে যদি,

$|8|>|3x| \Rightarrow |\frac{3x}{8}|<1 \Rightarrow |x|<\frac{8}{3}$ হয় ।

এখন , $\frac{1}{\sqrt{8-3x}}=\frac{1}{\sqrt{8(1-\frac{3x}{8})}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{3x}{8})}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1-\frac{3x}{8}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\{1+(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{8}x)+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(-\frac{3}{8}x)^2$

$+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}(-\frac{3}{8}x)^3+\ldots\ldots\}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\{1+\frac{3}{16}x+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{2!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2x^2\cdot$

$-\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}\left(\frac{3}{8}\right)^3x^3+\cdots\cdots\cdots\}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\{1+\frac{3}{16}x+\frac{1.3}{2!.2^2}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2x^2-$

$\frac{1.3.5}{3!.2^3}\left(\frac{3}{8}\right)^3x^3+\cdots\cdots\}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{16}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1.3}{2!}\cdot\left(\frac{3}{16}\right)^2x^2-$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{3}{16}\right)^3x^3+\ldots\}$

2(f) $|x|<\frac{8}{3}$ হলে, $\frac{1}{(8-3x)^{1/3}}$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর । [বুয়েট'০৪-০৫]

$\frac{1}{(8-3x)^{1/3}}=\frac{1}{\{8(1-\frac{3x}{8})\}^{1/3}}=\frac{1}{2}(1-\frac{3x}{8})^{-\frac{1}{3}}$

$\frac{1}{2}(1-\frac{3x}{8})^{-\frac{1}{3}}$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ

$=\frac{1}{2}\frac{-\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}-1)(-\frac{1}{3}-2)}{3!}(-\frac{3}{8})^3$

$=\frac{1}{2}\frac{(-1)(-4)(-7)}{3!\,3^3}(-\frac{3}{8})^3=\frac{4\times7}{2\times6\times8^3}$

$=\frac{7}{1536}$ (Ans.)

(g) $|x|>1$ হলে $(1-x)^{-1}$ বিস্তৃত কর ।[প্র.ভ.প.'৯৮]

সমাধান : $|x|>1 \Rightarrow |\frac{1}{x}|<1$

এখন, $(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{-x(1-1/x)}$

$=-\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x})^{-1}=-\frac{1}{x}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots)$

$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \ldots\ldots$ (Ans.)

3(a) দেখাও যে, $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$ [ঢা.'১০; য. '০৮,'১১; সি.'০৬,'১২ ; রা.'০৮,'১১; দি.'১৩]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদেও সহগ

$$= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\ldots\ldots(-\frac{1}{2}-r+1)}{r!}(-4)^r$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\ldots\ldots(-\frac{2r-1}{2})}{r!}(-1)^r 2^{2r}$$

$$= \frac{(-1)^r 1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2^r r!}(-1)^r 2^{2r}$$

$$= (-1)^{2r}.2^r \frac{1.2.3.4.5.6\ldots\ldots(2r-1).2r}{(2.4.6.8\ldots..2r)r!}$$

$$= 2^r \frac{(2r)!}{2^r(1.2.3.4\ldots..r).r!} = \frac{(2r)!}{r!r!} = \frac{(2r)!}{(r!)^2}$$

(Showed)

3(b) $(2x+1)/(1+x^2)$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

$$(2x+1)/(1+x^2) = (2x+1)(1+x^2)^{-1}$$

$$= (2x+1)\{1-x^2+(x^2)^2-(x^2)^3+\cdots+(-1)^{n-1}(x^2)^{n-1}+(-1)^n(x^2)^n+\cdots\},$$ যেখানে $n \in \mathbb{N}$

$$= (2x+1)\{1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+(-1)^n x^{2n}+\ldots\ldots\}$$

মনে করি, r একটি জোড় সংখ্যা এবং $r = 2n \therefore n = \frac{r}{2}$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= x^{2n}$ এর সহগ $= (-1)^n = (-1)^{\frac{r}{2}}$

আবার মনে করি, r একটি বিজোড় সংখ্যা এবং $r = 2n-1 \therefore n = \frac{r+1}{2}$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= x^{2n-1}$ এর সহগ $= 2(-1)^{n-1}$

$$= 2(-1)^{\frac{r+1}{2}-1} = 2(-1)^{\frac{r-1}{2}}$$

3(c) দেখাও যে, $(1+x)^n/(1-x)$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ 2^n $(n \in \mathbb{N})$ [কু.'১২]

প্রমাণ ঃ

$$(1+x)^n/(1-x) = (1+x)^n(1-x)^{-1}$$

$$= \{1+{}^nC_1 x+{}^nC_2 x^2+\cdots+{}^nC_{n-1}x^{n-1}+x^n\}\{1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^{n-1}+x^n+\ldots\}$$

$\therefore$ x^n এর সহগ

$$= 1+{}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+\cdots+{}^nC_{n-1}+{}^nC_n$$

$$= 1+{}^nC_1.1+{}^nC_2.1^2+{}^nC_3.1^3+\ldots\ldots+{}^nC_{n-1}.1^{n-1}+1^n$$

$$= (1+1)^n = 2^n$$ (Showed)

3(d) $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^3}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^3} = (1+x^2)(1-x)^{-3}$

$$= (1+2x+x^2)\{1+3x+6x^2+10x^3+\cdots+\frac{1}{2}(r-1)r\,x^{r-2}+\frac{1}{2}r(r+1)\,x^{r-1}+\frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r+\cdots\ \cdots\ \cdots\}$$

$\therefore$ x^r এর সহগ

$$= \frac{1}{2}(r+1)(r+2)+2.\frac{1}{2}r(r+1)+\frac{1}{2}(r-1)r$$

$$= \frac{1}{2}\{r^2+3r+2+2r^2+2r+r^2-r\}$$

$$= \frac{1}{2}(4r^2+4r+2) = 2r^2+2r+1$$ (Ans.)

3(e) দেখাও যে, $\frac{1+x}{(1-x)^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $2r+1$.

প্রমাণ : $\frac{1+x}{(1-x)^2} = (1+x)(1-x)^{-2}$

$= (1+x)\{1+2x+3x^2+\cdots\cdots+rx^{r-1}$
$+(r+1)x^r+\cdots\cdots\}$

∴ x^r এর সহগ $= r+1+r$
$= 2r+1$ (Showed)

3(f) দেখাও যে, $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $4n$ [রুয়েট'১১-১২]

প্রমাণ : $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = (1+x)^2(1-x)^{-2}$

$= (1+2x+x^2)\{1+2x+3x^2+\cdots\cdots+$
$(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}+(n+1)x^n+\cdots\}$

∴ x^n এর সহগ $= n+1+2n+n-1$
$= 4n$ (Showed)

4(a) $\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

[ব.'০৩,'০৭; সি.'০৮; চ.'কু.,দি.'১০; চ.'১৩]

সমাধান : $\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$

$= \frac{1}{(1-x)(1-2.1)}+\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-2x)}$

$= -\frac{1}{(1-x)}+2\frac{1}{(1-2x)}$

$= 2(1-2x)^{-1}-(1-x)^{-1}$

$= 2\{1+2x+(2x)^2+\cdots+(2x)^r+\cdots\}-$
$\{1+x+x^2+\cdots\cdots+x^r+\cdots\cdots\}$

∴ x^r এর সহগ $= 2.2^r-1 = 2^{r+1}-1$ (Ans.)

4(b) সমাধান : $\frac{x}{(1-4x)(1-5x)}$ [ব.'১

$= \frac{\frac{1}{4}}{(1-4x)(1-5.\frac{1}{4})}+\frac{\frac{1}{5}}{(1-4.\frac{1}{5})(1-5x)}$

$= -\frac{1}{(1-4x)}+\frac{1}{(1-5x)}$

$= (1-5x)^{-1}-(1-4x)^{-1}$

$= \{1+5x+(5x)^2+\cdots\cdots+(5x)^n+\ldots\}$
$\{1+4x+(4x)^2+\cdots\cdots+(4x)^n+\ldots\}$

∴ x^n এর সহগ $= 5^n-4^n$ (Ans.)

4(c) প্রমাণ : $\frac{1}{(1-x)(3-x)}$

$= \frac{1}{(1-x)(3-1)}+\frac{1}{(1-3)(3-x)}$

$= \frac{1}{2}(1-x)^{-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{3(1-\frac{x}{3})}$

$= \frac{1}{2}(1-x)^{-1}-\frac{1}{6}(1-\frac{x}{3})^{-1}$

$= \frac{1}{2}\{1+x+x^2+\ldots+x^n+\cdots\cdots\}$

$-\frac{1}{6}\{1+\frac{x}{3}+(\frac{x}{3})^2+\cdots\cdots+(\frac{x}{3})^n+\cdots\}$

∴ x^n এর সহগ $= \frac{1}{2}-\frac{1}{6}.(\frac{1}{3})^n$
$= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{n+1}})$ (Showed)

4(d) সমাধান : $\frac{x}{(1-ax)(1-bx)}$ [রা.'০২

$= \frac{1/a}{(1-ax)(1-b\frac{1}{\ldots}}+\frac{1/b}{\ldots}$

$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{(1-ax)} - \frac{1}{(1-bx)}\right]$

$= \frac{1}{a-b}[(1-ax)^{-1} - (1-bx)^{-1}]$

$= \frac{1}{a-b}[\{1 + ax + (ax)^2 + \cdots + (ax)^n + \cdots\} -$
$\{1 + bx + (bx)^2 + \cdots\cdots + (bx)^n + \cdots\cdots\}]$

$\therefore$ x^n এর সহগ $= \frac{1}{a-b}(a^n - b^n)$ (Ans.)

5(a) $(1+x^2)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে x^{4r} এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(n+1)$তম পদ

$= \frac{-3(-3-1)(-3-2)\ldots.(-3-n+1)}{n!}(x^2)^n$

$= (-1)^n \frac{3.4.5\ldots..(n+2)}{n!} x^{2n}$

$= (-1)^n \frac{1.2.3.4.5\ldots..n(n+1)(n+2)}{1.2.n!} x^{2n}$

$= (-1)^n \frac{n!(n+1)(n+2)}{2.n!} x^{2n}$

$= \frac{1}{2}(-1)^n (n+1)(n+2) x^{2n}$

যদি এই পদে x^{4r} থাকে, তবে $2n = 4r \Rightarrow n = 2r$

$\therefore$ x^{4r} এর সহগ $= \frac{1}{2}(-1)^{2r}(2r+1)(2r+2)$

$= (r+1)(2r+1)$ (Ans.)

5(b) $(1-x)^{-1} - 2(1-2x)^{-2}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি নির্ণয় কর। [রা.'১৩]

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ

$= x^r - 2(r+1)(2x)^r$

$= x^r - 2^{r+1}(r+1)x^r$

$= \{1 - 2^{r+1}(r+1)\}x^r$ (Ans.)

6(a) $y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots\infty$ হলে দেখাও যে, $x = y + y^2 + y^3 + y^4 + \cdots\infty$

[ঢা.,ব.'০৮;দি.'০৯; রা.'১০; য.'১২]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow -y = -x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots\cdots\cdots\cdots\infty$

$1 - y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots\cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow 1 - y = (1+x)^{-1} \Rightarrow 1 - y = \frac{1}{1+x}$

$\Rightarrow 1 + x = \frac{1}{1-y} \Rightarrow 1 + x = (1-y)^{-1}$

$\Rightarrow 1 + x = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots\cdots\infty$

$\therefore$ $x = y + y^2 + y^3 + \cdots\cdots\cdots\infty$ (Showed)

6(b) $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\infty$ হলে দেখাও যে, $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - \cdots\infty$

[ব.'০২,'১০; কু.'০৭; রা.'০৭; সি.'০৯,'১৩; দি.'১১; বুয়েট'০১-০২; চুয়েট'০১-০২]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow 1 + y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow 1 + y = (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow (1-x)^2 = \frac{1}{1+y} \Rightarrow 1 - x = (1+y)^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow 1 - x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)y^2 +$
$\frac{1}{3!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)y^3 + \cdots\cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow -x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}y^2 -$
$\frac{1}{6}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}y^3 + \cdots\cdots\infty$

$\therefore$ $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - \cdots\cdots\cdots\infty$

(Showed)

6(c) $y = 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots\infty$ হলে দেখাও যে, $x = \frac{1}{3}y - \frac{1.4}{3^2.2!}y^2 + \frac{1.4.7}{3^3.3!}y^3 - \cdots\infty$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$$y = 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots\cdots\infty$$

$$\Rightarrow 1 + y = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots\cdots\infty$$

$$\Rightarrow 1 + y = (1 - x)^{-3} = \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow (1 - x)^3 = \frac{1}{1+y} \Rightarrow (1 - x)^3 = (1 + y)^{-1}$$

$$\Rightarrow 1 - x = (1 + y)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow 1 - x = 1 - \frac{1}{3}y + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3} - 1)y^2$$

$$-\frac{1}{3!}(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3} - 1)(-\frac{1}{3} - 2)y^3 + \cdots\cdots\infty$$

$$\Rightarrow -x = -\frac{1}{3}y + \frac{1}{2!}.\frac{1}{3}\frac{4}{3}y^2 - \frac{1}{3!}\frac{1}{3}\frac{4}{3}.\frac{7}{3}y^3 + \cdots\cdots\infty$$

$$\therefore\ x = \frac{1}{3}y - \frac{1.4}{3^2.2!}y^2 + \frac{1.4.7}{3^3.3!}y^3 - \cdots\cdots\cdots\infty$$

7(a) $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots\infty)^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর। [সি.'০১]

সমাধান ঃ $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\infty)^{\frac{1}{2}}$

$$= \{(1 - x)^{-2}\}^{\frac{1}{2}} = (1 - x)^{-1}$$

$$= 1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^r + \cdots\cdots\infty$$

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $= 1$ (Ans.)

7(b) প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, [য.'০৭]

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\infty)(1 + 2x + 3x^2 + \cdots\infty)$$

$$= (1 - x)^{-1}(1 - x)^{-2}$$

$$= (1 - x)^{-3}$$

$$= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots\cdots\cdots\infty$$

$$= \frac{1}{2}(1.2 + 2.3x + 2.6x^2 + 2.10x^3 + \cdots\infty)$$

$$= \frac{1}{2}(1.2 + 2.3x + 3.4x^2 + 4.5x^3 + \cdots\cdots\infty)$$

(Showed)

(c) দেখাও যে, $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots\infty)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots\cdots + nx^{n-1} + \cdots\infty$

প্রমাণ ঃ $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots\cdots\infty)^2$

$$= \{(1 - x)^{-1}\}^2 = (1 - x)^{-2}$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots + nx^{n-1} + \cdots\infty$$

7(d) $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\infty)^{-15}$ এর বিস্তৃতিতে x^{15} এবং x^{16} এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots\infty)^{-15}$

$$= \{(1 - x)^{-1}\}^{-15} = (1 - x)^{15}$$

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r + 1)$তম পদ $= {}^{15}C_r(-x)^r$

$$= (-1)^r.{}^{15}C_r x^r.$$

যদি এই পদে x^{15} থাকে, তবে $r = 15$

$\therefore$ x^{15} এর সহগ $= (-1)^{15}.{}^{15}C_{15} = -1$

$(1 - x)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে শেষ পদে x^{15} বিদ্যমান

$\therefore$ x^{16} সম্বলিত পদের সহগ শূন্য হবে।

অতএব, x^{16} এর সহগ $= 0$

7(e) সমাধান ঃ $(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\cdots\infty)^3$

$$= \{(1 + x)^{-1}\}^3 = (1 + x)^{-3}$$

পদত্ত বিস্তৃতি $(1 + x)^{-3}$ এর $(r + 1)$তম পদ

$$= \frac{-3(-3-1)(-3-2)\ldots\ldots(-3-r+1)}{r!}x^r$$

$$= (-1)^r\frac{3.4.5.6\ldots\ldots(r+2)}{r!}x^r$$

$$= (-1)^r\frac{1.2.3.4.5.6\ldots\ldots r.(r+1)(r+2)}{1.2.r!}x^r$$

$$= (-1)^r\frac{r!.(r+1)(r+2)}{2.r!}x^r$$

$$= (-1)^r \frac{(r+1)(r+2)}{2} x^r$$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= (-1)^r \frac{(r+1)(r+2)}{2}$ (Ans.)

8(a) সমাধান ঃ $(1-x+x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= \left\{\frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\frac{1+x^3}{1+x}\right\}^{\frac{1}{2}} = (1+x^3)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \{1+\frac{1}{2}x^3+\cdots\cdots\}\{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)x^2+\frac{1}{3!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)x^3+\cdots\}$$

$$= \{1+\frac{1}{2}x^3+\cdots\cdots\}\{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}x^5+\cdots\cdots\}$$

$$=\{1+\frac{1}{2}x^3+\cdots\}\{1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots\}$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+(\frac{1}{2}-\frac{5}{16})x^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{16}x^3+\cdots\cdots\cdots \text{ (Ans.)}$$

8(b) সমাধান ঃ $(1-x+x^2)^{-1} = \frac{1}{1-x+x^2}$

$$= \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{1+x}{1+x^3}$$

$$= (1+x)(1+x^3)^{-1}$$

$$= (1+x)\{1-x^3+(x^3)^2-(x^3)^3+(x^3)^4-(x^3)^5+\cdots\}$$

$$= (1+x)\{1-x^3+x^6-x^9+x^{12}-x^{15}+\cdots\}$$

$\therefore$ x^{13} এর সহগ $= 1$

8(c) $(1-x+x^2-x^3)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^4 এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $(1-x+x^2-x^3)^{-1} = \frac{1}{1-x+x^2-x^3}$

$$= \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2-x^3)} = \frac{1+x}{1-x^4}$$

$$= (1+x)(1-x^4)^{-1} = (1+x)[1+x^4+(x^4)^2+(x^4)^3+\cdots\cdots\cdots\infty]$$

$$= [1+x^4+(x^4)^2+(x^4)^3+\cdots\cdots\cdots]+[x+x(x^4)+x(x^4)^2+\cdots\cdots\cdots]$$

$\therefore$ x^4 এর সহগ $= 1$

9(a) সমাধান ঃ $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

$$= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= (1+x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1+x)\{1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}(x^2)^2+\frac{1}{3!}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}(x^2)^3+\cdots\cdots\}$$

$$= (1+x)\{1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\cdots\cdots\}$$

$$= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4+\cdots\cdots\cdots$$

9(b) x এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(1+3x)^{\frac{1}{2}}(1-2x)^{-\frac{1}{3}}$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $(1+3x)^{\frac{1}{2}}(1-2x)^{-\frac{1}{3}}$

$$= \{1+\frac{1}{2}(3x)+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(3x)^2+\cdots\cdots\}$$

$$\{1+(-\frac{1}{3})(-2x)+\frac{-\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}-1)}{2!}(-2x)^2+\cdots\}$$

$$=\{1+\frac{3}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}9x^2+\cdots\cdots\}$$

$$\{1+\frac{2}{3}x+\frac{-\frac{1}{3}(-\frac{4}{3})}{2}4x^2+\cdots\cdots\}$$

$$=\{1+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}x^2+\cdots\cdots\}$$

$$\{1+\frac{2}{3}x+\frac{8}{9}x^2+\cdots\cdots\}$$

$$=1+(\frac{2}{3}+\frac{3}{2})x+(\frac{8}{9}-\frac{9}{8}+\frac{3}{2}\times\frac{2}{3})x^2+\cdots$$

$$=1+\frac{13}{6}x+\frac{64-81+72}{72}x^2+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{13}{6}x+\frac{55}{72}x^2+\cdots\cdots$$

9(c) x এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(1+3x)/(1+2x)^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\frac{1+3x}{(1+2x)^{1/2}}=(1+3x)(1+2x)^{-1/2}$

$$=(1+3x)\{1+(-\frac{1}{2})(2x)+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(2x)^2$$
$$+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}(2x)^3+\cdots\cdots\}$$

$$=(1+3x)\{1-\frac{1}{2}(2x)+\frac{(-1)(-3)}{2^2 2!}(2x)^2$$
$$\frac{(-1)(-3)(-5)}{2^3 3!}(2x)^3+\cdots\}$$

$$=(1+3x)\{1+\frac{(-1)^1.1}{1!}x^2+\frac{(-1)^2.1.3}{2!}x^2$$
$$+\frac{(-1)^3.1.3.5}{3!}x^3+\cdots+(-1)^6\frac{1.3.5.7.9.11}{6!}x^6$$
$$+(-1)^7\frac{1.3.5.7.9.11.13}{7!}x^7+\cdots\}$$

$\therefore$ x^7 এর সহগ $=(-1)^7\frac{1.3.5.7.9.11.13}{7!}+$

$$3(-1)^6\frac{1.3.5.7.9.11}{6!}$$

$$=-\frac{429}{16}+\frac{693}{16}=\frac{-429+693}{16}=\frac{264}{16}=16\frac{1}{2}$$

10(a) $x=\frac{1}{3}$ হলে $(2+5x)^{10}$ এর বিস্তৃতির সাংখ্যমান বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{10-r+1}{r}\times\frac{5x}{2}=1 \quad [\because 10>0]$$

$$\Rightarrow \frac{11-r}{r}\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}=1 \quad [\because x=\frac{1}{3}]$$

$$\Rightarrow 55-5r=6r\Rightarrow 11r=55\Rightarrow r=5$$

$\therefore$ T_5 ও T_{5+1} অর্থাৎ 5ম এবং 6ষ্ঠ পদ দুইটি সাংখ্যমান বৃহত্তম পদ।

10(b) $x=\frac{3}{4}$ হলে $(1-x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমান বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{-3-r+1}{r}\times x=-1 \quad [\because -3<0]$$

$$\Rightarrow \frac{-2-r}{r}\times\frac{3}{4}=-1 \quad [\because x=\frac{3}{4}]$$

$$\Rightarrow -6-3r=-4r\Rightarrow r=6$$

$\therefore$ T_6 ও T_{6+1} অর্থাৎ 6ষ্ঠ এবং 7ম পদ দুইটি সাংখ্যমান বৃহত্তম পদ।

10(c) $x=\frac{4}{15}$ হলে $(1+x)^{-7}$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমান বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{-7-r+1}{r} \times x = -1 \quad [\because -7 < 0]$$

$$\Rightarrow \frac{-6-r}{r} \times \frac{4}{15} = -1 \quad [\because x = \frac{4}{15}]$$

$$\Rightarrow -24 - 4r = -15r \Rightarrow 11r = 24$$

$$\Rightarrow r = 2\frac{2}{11}$$

r ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা বলে, (2 + 1) তম অর্থাৎ 3য় পদটিই বৃহত্তম।

11. ধারার যোগফল নির্ণয় কর :

(a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \cdots\cdots\infty$

সমাধান : মনে করি,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \cdots\infty$$

$$\Rightarrow 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots\cdots\infty = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \cdots\cdots\infty$$

$$\therefore nx = \frac{1}{3} \Rightarrow n^2x^2 = \frac{1}{9} \cdots\cdots (i),$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{1.3}{3.6} \Rightarrow \frac{n^2-n}{2}x^2 = \frac{1}{6} \cdots (ii)$$

$$(ii) \div (i) \Rightarrow \frac{n^2-n}{2n^2} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{1} \Rightarrow \frac{n^2-n}{2n^2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 6n^2 = 2n^2 - 2n \Rightarrow 4n = -2$$

[∵ এখানে $n \neq 0$]

$$\therefore n = -\frac{1}{2} \text{ এবং } x.(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{ প্রদত্ত ধারার নির্ণেয় সমষ্টি } = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3^{1/2} = \sqrt{3} \text{ (Ans.)}$$

11(b) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} + \frac{1.3.5}{4.8.12} + \cdots\infty$

[টেস্টপেপার'১১-১২]

সমাধান : মনে করি,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} + \frac{1.3.5}{4.8.12} + \cdots\cdots\infty$$

$$\Rightarrow 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots\cdots\infty = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} + \frac{1.3.5}{4.8.12} + \cdots\cdots\infty$$

$$\therefore nx = \frac{1}{4} \Rightarrow n^2x^2 = \frac{1}{16} \cdots\cdots (i),$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{1.3}{4.8} \Rightarrow \frac{n^2-n}{2}x^2 = \frac{3}{32} \cdots (ii)$$

$$(ii) \div (i) \Rightarrow \frac{n^2-n}{2n^2} = \frac{3}{32} \times \frac{16}{1} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 6n^2 = 2n^2 - 2n \Rightarrow 4n = -2$$

[∵ এখানে $n \neq 0$]

$$\therefore n = -\frac{1}{2} \text{ এবং } x.(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ প্রদত্ত ধারার নির্ণেয় সমষ্টি } = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{1/2} = \sqrt{2} \text{ (Ans.)}$$

11(c) $1 + 2.\frac{1}{3^2} + \frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{1}{3^4} + \frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{8}{3}.\frac{1}{3^6} + \cdots\cdots$

[টেস্টপেপার'১১-১২]

সমাধান : মনে করি, $(1+x)^n = 1 +$

$$1 + 2.\frac{1}{3^2} + \frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{1}{3^4} + \frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{8}{3}.\frac{1}{3^6} + \cdots\infty$$

$$\Rightarrow 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots\infty$$

$= 1 + 2.\frac{1}{3^2} + \frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{1}{3^4} + \frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{8}{3}.\frac{1}{3^6} + \cdots\infty$

$\therefore\ nx = \frac{2}{9} \Rightarrow n^2x^2 = \frac{4}{81} \cdots\cdots$ (i),

$\frac{n(n-1)}{2}x^2 = \frac{5}{81} \cdots\cdots$ (ii)

(ii) ÷ (i) $\Rightarrow \frac{n-1}{2n} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{n-1}{n} = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 5n = 2n - 2 \Rightarrow 3n = -2 \Rightarrow n = -\frac{2}{3}$

$\therefore\ -\frac{2}{3}x = \frac{2}{9} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার নির্ণেয় সমষ্টি $= (1 - \frac{1}{3})^{-2/3}$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^{-2/3}$

12(a) $\left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর সম্প্রসারণে x বর্জিত পদের মান – **[DU 07-08]**

A. $\frac{28}{27}$ B. $\frac{27}{28}$ C. 1 D. 3

সমাধান : x বর্জিত পদের জন্য, $r = \frac{1 \times 10 - 0}{1 - (-1)} = 5$

$\therefore$ x বর্জিত পদের মান $= {}^{10}C_5\, 2^{10-5}(\frac{1}{6})^5 = \frac{28}{27}$

(b) a এর কোন মানের জন্য $(1 + ax)^8$ এর বিস্তৃতিতে x^3 ⋯ x^4 এর সহগ পরস্পর সমান হবে?

ƽ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{16}{5}$ D. $\frac{5}{16}$

$\mathrm{ax})^8 = 1 + {}^8C_1(ax) + {}^8C_2(ax)^2$

C ⋯ $+ {}^8C_4(ax)^4 + \cdots + (ax)^8$

$C_3a^3 = {}^8C_4a^4 \Rightarrow 56 = 70a \Rightarrow a = \frac{4}{5}$

(c) $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$, $|x|<1$ বিস্তৃতিতে x^n এর স⋯ হলো –

A. 2n B. 3n C. 4n D. 5n

সমাধান : $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = (1+x)^2(1-x)^{-2}$

$= (1 + 2x + x^2)\{1 + 2x + 3x^2 + \cdots\cdots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} + (n+1)x^n + \cdots\}$

$\therefore$ x^n এর সহগ $= n + 1 + 2n + n - 1$

$= 4n$

13(a) x এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ এর বিস্তৃতিতে x^2 সম্বলিত পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

সমাধান :

$$\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{2!}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{12} + \frac{\frac{1}{3}.(-\frac{2}{3})}{2}\frac{x^2}{16} + \cdots\cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{12} - \frac{1}{144}x^2 + \cdots\cdots$$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $1 + \frac{x}{12} - \frac{1}{144}x^2$

13(b) বিস্তৃতিতে $x = 0{\cdot}5$ প্রতিস্থাপন করে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt[3]{9}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x}{12} - \frac{1}{144}x^2 + \cdots\cdots$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{0{\cdot}5}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{0{\cdot}5}{12} - \frac{1}{144}(0{\cdot}5)^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + 0{\cdot}04167 - 0{\cdot}00173 + \cdots$$

$\Rightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 1{\cdot}03994 + \cdots\cdots$

$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{9}}{2} = 1{\cdot}03994 + \cdots\cdots$

$\Rightarrow \sqrt[3]{9} = 2{\cdot}07988 + \cdots\cdots$

$\therefore$ দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt[3]{9}$ এর মান $= 2{\cdot}08$

13(c) x এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}$ এবং $\left(\frac{4+x}{4-x}\right)^{\frac{1}{3}}$ এর বিস্তৃতিতে x^2 সম্বলিত পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

$$\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{3}} = 1-\frac{1}{3}\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}-1)}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + \cdots\cdots$$

$$= 1+\frac{x}{12}+\frac{-\frac{1}{3}.(-\frac{4}{3})}{2}\frac{x^2}{16}+\cdots\cdots$$

$$= 1+\frac{x}{12}+\frac{1}{72}x^2+\cdots\cdots$$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $1+\frac{x}{12}+\frac{1}{72}x^2$

দ্বিতীয় অংশ : $\left(\frac{4+x}{4-x}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1+x/4}{1-x/4}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$= \left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= (1+\frac{x}{12}-\frac{1}{144}x^2+\cdots\cdots)(1+\frac{x}{12}+\frac{1}{72}x^2+\cdots\cdots)$$

$$= 1+2\times\frac{x}{12}+(\frac{1}{72}-\frac{1}{144}+\frac{1}{144})x^2+\cdots$$

$$= 1+\frac{1}{6}x-\frac{1}{72}x^2+\cdots\cdots$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $m, n \in \mathbb{N}$ হলে, $(1+4x)^m(1+\frac{1}{4x})^n$ বিস্তৃতির কমপক্ষে একটি পদ কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান : $(1+4x)^m(1+\frac{1}{4x})^n = \frac{(1+4x)^{m+n}}{(4x)^n}$

বিস্তৃতির পদসংখ্যা $= m+n+1$

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতির কমপক্ষে একটি পদ বাছাই করার উপায় সংখ্যা $= 2^{m+n+1}-1$

2(a) $1-\frac{1}{5}+\frac{1.4}{5.10}-\frac{1.4.7}{5.10.15}+\cdots\cdots\infty$

সমাধান : মনে করি,

$(1+x)^n = 1-\frac{1}{5}+\frac{1.4}{5.10}-\frac{1.4.7}{5.10.15}+\cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots\cdots\infty = 1-\frac{1}{5}+\frac{1.4}{5.10}-\frac{1.4.7}{5.10.15}+\cdots\cdots\infty$

$\therefore\ nx = -\frac{1}{5} \Rightarrow n^2x^2 = \frac{1}{25}\ \cdots\cdots(i),$

$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{1.4}{5.10} \Rightarrow \frac{n^2-n}{2}x^2 = \frac{2}{25}\cdots(ii)$

$(ii)\div(i) \Rightarrow \frac{n^2-n}{2n^2} = \frac{2}{25}\times\frac{25}{1} = 2$

$\Rightarrow 4n^2 = n^2-n \Rightarrow 3n = -1$ [$\because$ এখানে $n \neq 0$]

$\therefore\ n = -\frac{1}{3}$ এবং $x.(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার নির্ণেয় সমষ্টি $= \left(1+\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$= \left(\frac{8}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{5}$ (Ans.)

2(b) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} - \frac{1.3.5}{4.8.12} + \cdots\cdots\infty$

সমাধান : মনে করি,

$(1+x)^n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} - \frac{1.3.5}{4.8.12} + \cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3$

$+ \cdots\cdots\infty = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} - \frac{1.3.5}{4.8.12} + \cdots\cdots\infty$

$\therefore\ nx = -\frac{1}{4} \Rightarrow n^2x^2 = \frac{1}{16}\ \cdots\cdots$ (i),

$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{1.3}{4.8} \Rightarrow \frac{n^2-n}{2}x^2 = \frac{3}{32} \cdots$(ii)

(ii) $\div$ (i) $\Rightarrow \frac{n^2-n}{2n^2} = \frac{3}{32} \times \frac{16}{1} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 6n^2 = 2n^2 - 2n \Rightarrow 4n = -2$

[$\because$ এখানে $n \neq 0$]

$\therefore\ n = -\frac{1}{2}$ এবং $x.(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার নির্ণেয় সমষ্টি $= \left(1+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (Ans.)

2(c) $\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{5} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{5^2} +$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^n}$ [প্র.ভ.প. ৮৩]

$= (1 + {}^nC_1 \cdot \frac{1}{5} + {}^nC_2 \cdot \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}) - 1$

$= (1+\frac{1}{5})^n - 1 = (\frac{6}{5})^n - 1$

ভর্তি পরীক্ষায় MCQ :

কৌশল –1. $(1+x)^n$ বিস্তৃতিতে p তম ও q তম পদদ্বয়ের সহগ সমান হলে, $p + q = n + 2$

$(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে $(2r+1)$ তম এবং $(r+3)$ তম পদের সহগ সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $2r + 1 + r + 3 = 20 + 2 \Rightarrow r = 6$

কৌশল–2. $(ax^m + bx^p)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদে x^k বিদ্যমান থাকলে, $r = \frac{m \times n - k}{m - p}$, এবং x^k সম্বলিত পদ $= {}^nC_r a^{n-r} b^r x^k$

(a) $(3x^2 - \frac{1}{2x})^9$ এর বিস্তৃতিতে কততম পদ x বর্জিত? [DU 99–00]

সমাধান : x বর্জিত পদের জন্য, $r = \frac{2\times9-0}{2-(-1)} = 6$

$\therefore (6+1)$ বা 7ম পদ x বর্জিত।

(b) $(x^4 - \frac{1}{x^3})^8$ এর বিস্তৃতিতে x^{11} এর সহগ কত?

[DU 95-96, 98-99; RU 06-07]

সমাধান : x^{11} এর ক্ষেত্রে, $r = \frac{4\times8-11}{4-(-3)} = 3$

$\therefore\ x^{11}$ এর সহগ $= {}^8C_3(-1)^3 = -56$

(c) $(2x^2 - \frac{1}{4x})^{11}$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ–

[Jt.U 07-08; NU 06-07; RU 05-06; DU 13-14]

সমাধান : x^7 এর ক্ষেত্রে, $r = \frac{2\times11-7}{2-(-1)} = 5$

$\therefore\ x^7$ এর সহগ $= {}^{11}C_5 2^{11-5}(-\frac{1}{4})^5 = -\frac{231}{8}$

(d) $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ ও x^{r-1} এর সহগের দ্বিগুণ হলে r এর মান – [JU 05-06]

এখানে, ${}^{20}C_r = 2\times {}^{20}C_{r-1} \Rightarrow \dfrac{20-r+1}{r} = 2$

$\Rightarrow r = 7$

(e) k-এর কোন মানের জন্য $(\sqrt{x} - \dfrac{k}{x^2})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ 405? [BUET 07-08]

সমাধান : x বর্জিত পদের জন্য, $r = \dfrac{\frac{1}{2}\times 10 - 0}{\frac{1}{2} - (-2)} = 2$

$\therefore$ x বর্জিত পদের মান $= {}^{10}C_2\, k^2 = 405$

$\Rightarrow k = \pm 3$

3 $(x + x^{-1})^{10}$ বিস্তৃতিতে ৬ষ্ঠ পদ- [Textile 13-14]

A. 521 B. 522 C. 252 D. −252

সমাধান : ৬ষ্ঠ পদ $= {}^{10}C_5\, x^5 \times \left(\dfrac{1}{x}\right)^{10-5} = 252$

4. ${}^nC_2 = {}^nC_6$ হলে ${}^nC_5 = ?$ [Textile 13-14]

A. 64 B. 56 C. 48 D. 98

সমাধান : ${}^nC_2 = {}^nC_6 \Rightarrow n = 2 + 6 = 8$

$\therefore\ {}^nC_5 = {}^8C_5 = {}^8C_3 = 56$

কনিক

প্রশ্নমালা VI

পরাবৃত্ত

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

1. পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (α , β) এবং অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল হলে এর সাধারণ সমীকরণ, $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ এবং অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণকে লেখা যায়, $x = ay^2 + by + c$.

2. পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (α , β) এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল হলে এর সাধারণ সমীকরণ $(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$ এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণকে লেখা যায়, $y = ax^2 + bx + c$

3. পরাবৃত্তের প্রয়োজনীয় ফলাফল ঃ

পরাবৃত্তের আকার ঃ	$y^2 = 4ax$	$x^2 = 4ay$	$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$	$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$
a. শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক ঃ	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α , β)	(α , β)
b. উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ঃ	$(a, 0)$	$(0, a)$	$(a+\alpha , \beta)$	$(\alpha , a+\beta)$
c. দিকাক্ষের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক ঃ	$(-a, 0)$	$(0, -a)$	$(-a+\alpha , \beta)$	$(\alpha , -a+\beta)$
d. অক্ষরেখার সমীকরণ ঃ	$y = 0$	$x = 0$	$y-\beta = 0$	$x-\alpha = 0$
e. দিকাক্ষের সমীকরণ ঃ	$x + a = 0$	$y + a = 0$	$x - \alpha + a = 0$	$y - \beta + a = 0$
f. উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ ঃ	$x = a$	$y = a$	$x - \alpha = a$	$y - \beta = a$
g. শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ ঃ	$x = 0$	$y = 0$	$x - \alpha = 0$	$y - \beta = 0$
h. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ঃ	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$
i. উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক ঃ	$(a, \pm 2a)$	$(\pm 2a, a)$	$(a+\alpha , \pm 2a+\beta)$	$(\pm 2a+\alpha , a+\beta)$
j. (x, y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব ঃ	$x + a$	$y + a$	$x - \alpha + a$	$y - \beta + a$

4. অক্ষরেখা x-অক্ষ এবং উপকেন্দ্র মূলবিন্দু হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4a(x+a)$ এবং অক্ষরেখা y-অক্ষ এবং উপকেন্দ্র মূলবিন্দু হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = 4a(y+a)$.

5. অক্ষরেখা x-অক্ষ এবং দিকাক্ষ y-অক্ষ হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4a(x-a)$ এবং দিকাক্ষকে x-অক্ষ ধরে পরাবৃত্তের সমীকরণ , $x^2 = 4a(y-a)$.

6. উপকেন্দ্র (α,β) এবং দিকাক্ষ $lx + my + n = 0$ এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \left\{\dfrac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right\}^2$

7. $y = mx + c$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে $c = \dfrac{a}{m}$ হবে। অতএব, m এর $(m \neq 0)$ সকল মানের জন্য $y = mx + \dfrac{a}{m}$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ প্রকাশ করে এবং স্পর্শ বিন্দুর $(\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m})$ । $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx - am^2$.

প্রশ্নমালা VI A

1. নিচের প্রতিটি পরাবৃত্তে শীর্ষবিন্দু , উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(a) $(y-1)^2 = 4(x-2)$ [ঢা.'০২;মা.'০৭;দি.'১০]

সমাধান : $(y-1)^2 = 4(x-2)$ কে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (2 , 1)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha + a , \beta) = (2+1, 1)$

$= (3, 1)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক $= 4$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $y - \beta = 0 \Rightarrow y - 1 = 0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x - \alpha + a = 0$

$\Rightarrow x - 2 + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

1(b) $3y^2 - 10x - 12y - 18 = 0$ [চ.'০৩,'১৩]

সমাধান : $3y^2 - 10x - 12y - 18 = 0$

$\Rightarrow 3(y^2 - 4y + 4) - 12 - 10x - 18 = 0$

$\Rightarrow 3(y-2)^2 = 10(x+3)$

$\Rightarrow (y-2)^2 = \frac{10}{3}(x+3)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = \frac{10}{3} \Rightarrow a = \frac{5}{6}$,

$\alpha = -3$, $\beta = 2$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (-3 , 2)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha + a, \beta) = (-3 + \frac{5}{6}, 2)$

$= (-\frac{13}{6}, 2)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক $= \frac{10}{3}$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $y - \beta = 0 \Rightarrow y - 2 = 0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x - \alpha + a = 0$

$\Rightarrow x + 3 + \frac{5}{6} = 0 \Rightarrow 6x + 23 = 0$

1(c) $y^2 = 4y + 4x - 8$ [য.'০৭; রা.'১০; ব.'১১]

সমাধান : $y^2 = 4y + 4x - 8$

$\Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 4x - 4$

$\Rightarrow (y-2)^2 = 4(x-1)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (1 , 2)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha + a, \beta) = (1+1, 2)$

$= (2, 2)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক $= 4$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $y - \beta = 0 \Rightarrow y - 2 = 0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x - \alpha + a = 0$

$\Rightarrow x - 1 + 1 = 0 \Rightarrow x = 0$

1(d) $y^2 + 8x - 2y - 23 = 0$ [কু.'০৬]

সমাধান : $y^2 + 8x - 2y - 23 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -8x + 24$

$\Rightarrow (y-1)^2 = -8(x-3)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = -8 \Rightarrow a = -2$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (3 , 1)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha + a, \beta) = (3-2, 1)$

$= (1, 1)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$

$= |-8| = 8$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $y - \beta = 0 \Rightarrow y - 1 = 0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x - \alpha + a = 0$

$\Rightarrow x-3-1=0 \Rightarrow x=5$

1(e) $y^2=4y+4x-16$ [য.'০৫]

সমাধান : $y^2=4y+4x-16$

$\Rightarrow y^2-4y+4=4x-12$

$\Rightarrow (y-2)^2=4(x-3)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a=1$, $\alpha=3$, $\beta=2$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta)=(3,2)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\alpha+a,\beta)=(3+1,2)$

$=(4,2)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=|4a|$ একক $=4$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $y-\beta=0 \Rightarrow y-2=0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x-\alpha+a=0$

$\Rightarrow x-3+1=0 \Rightarrow x-2=0$

1(f) $x^2+2y-8x+7=0$

[ব.'০৬; ঢা.'০৩; সি.'০৮,'১৩; মা.বো.'০৩]

সমাধান : $x^2+2y-8x+7=0$

$\Rightarrow (x^2-8x+16)-16+2y+7=0$

$\Rightarrow (x-4)^2=-2y+9=-2\left(y-\frac{9}{2}\right)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a=-2$

$\Rightarrow a=-\frac{1}{2}, \alpha=4, \beta=\frac{9}{2}$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta)=\left(4, \frac{9}{2}\right)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta+a)=\left(4, \frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=(4,4)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=|4a|=|-2|=2$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $x-\alpha=0 \Rightarrow x-4=0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y-\beta+a=0$

$\Rightarrow y-\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow y-5=0$

1(g) $(x-4)^2=-4(y-5)$ [রা.'০৭]

সমাধান : $(x-4)^2=-4(y-5)$ কে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a=-4 \Rightarrow a=-1, \alpha=4$, $\beta=5$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta)=(4,5)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta+a)=(4,5-1)$

$=(4,4)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=|4a|=|-4|=4$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $x-\alpha=0 \Rightarrow x-4=0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y-\beta+a=0$

$\Rightarrow y-5-1=0 \Rightarrow y-6=0$

1(h) $5x^2+15x-10y-4=0$ [সি.'০৫,'০৯; কু.'০২,'০৪,'১১; রা.'০৭; ঢা.'০৮; প্র.ভ.প.'০৬]

সমাধান : $5x^2+15x-10y-4=0$

$\Rightarrow 5\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)=10y+4+\frac{45}{4}$

$\Rightarrow 5\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=10y+\frac{61}{4}=10\left(y+\frac{61}{40}\right)$

$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=2\left(y+\frac{61}{40}\right)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a=2$

$\Rightarrow a=\frac{1}{2}, \alpha=-\frac{3}{2}, \beta=-\frac{61}{40}$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta)=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{61}{40}\right)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta+a)$

$=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{61}{40}+\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{41}{40}\right)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=|4a|=|2|=2$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $x - \alpha = 0$

$$\Rightarrow x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0$$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y - \beta + a = 0$

$$\Rightarrow y + \frac{61}{40} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y + \frac{81}{40} = 0$$

2(a) $y^2 = 8x + 5$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু.'০৪;ঢা.'১৩]

সমাধান : $y^2 = 8x + 5 \Rightarrow y^2 = 8(x + \frac{5}{8})$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = 8$ $\Rightarrow a = 2$, $\alpha = -\frac{5}{8}$, $\beta = 0$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (-\frac{5}{8}, 0)$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক

$= |8|$ একক $= 8$ একক ।

2(b) $y^2 = 8y + 5x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প. '৮৬]

সমাধান : $y^2 = 8y + 5x$

$$\Rightarrow y^2 - 8y + 16 = 5x + 16$$

$$\Rightarrow (y-4)^2 = 5(x + \frac{16}{5})$$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = 5$ $\Rightarrow a = \frac{5}{4}$, $\alpha = -\frac{16}{5}$, $\beta = 4$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (-\frac{16}{5}, 4)$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক

$= |5|$ একক $= 5$ একক ।

2(c) $y^2 = 2(x + 3)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু , উপকেন্দ্র এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৩]

সমাধান : $y^2 = 2(x + 3)$ কে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, \alpha = -3$, $\beta = 0$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (-3, 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক

$= |2|$ একক $= 2$ একক ।

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x - \alpha + a = 0$

$$\Rightarrow x + 3 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2x + 7 = 0$$

3.(a) $x^2 = 4(1 - y)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু , উপকেন্দ্র এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'০৮; ঢা.,চ.'১১]

সমাধান : $x^2 = 4(1-y) \Rightarrow x^2 = -4(y-1)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = -4 \Rightarrow a = -1, \alpha = 0$; $\beta = 1$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (0, 1)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta + a)$

$= (0, 1 - 1) = (0,0)$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y - 1 - 1 = 0$

$$\Rightarrow y - 2 = 0$$

3(b) $y^2 = 4(x - 2)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [রা.'০২]

সমাধান : $y^2 = 4(x - 2)$ কে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (2, 0)$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক

$= |4|$ একক $= 4$ একক ।

4(a) $x^2 + 4x + 2y = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু , উপকেন্দ্র , অক্ষরেখা ও দিকাক্ষের সমীকরণ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ব.'০৪; বুয়েট '০২-০৩ ,০৪-০৫]

সমাধান : $x^2 + 4x + 2y = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = -2y + 4$

$\Rightarrow (x+2)^2 = -2(y-2)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = -2$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}, \alpha = -2, \beta = 2.$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (-2, 2)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta + a)$

$= (-2, 2 - \frac{1}{2}) = (-2, \frac{3}{2})$

অক্ষরেখার সমীকরণ $x - \alpha = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$

দিকাক্ষের সমীকরণ $y - 2 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2y - 5 = 0$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক

$= |-2|$ একক $= 2$ একক ।

4(b) $3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং অক্ষরেখা ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০১]

সমাধান : $3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 + 2x + 1) = 4y + 5 + 3$

$\Rightarrow 3(x+1)^2 = 4y + 8 = 4(y+2)$

$\Rightarrow (x+1)^2 = \frac{4}{3}(y+2)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{3}, \alpha = -1, \beta = -2.$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (-1, -2)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta + a)$

$= (-1, -2 + \frac{1}{3}) = (-1, -\frac{5}{3})$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |\frac{4}{3}| = \frac{4}{3}$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $x - \alpha = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y - \beta + a = 0$

$\Rightarrow y + 2 + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 3y + 7 = 0$

5(a) $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রিক লম্বের ধনাত্মক দিকের প্রান্ত বিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৪]

সমাধান : $y^2 = 12x$ কে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$4a = 12 \Rightarrow a = 3$

$\therefore$ প্রদত্ত পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর $(0,0)$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের ধনাত্মক দিকের প্রান্ত বিন্দু $(a, 2a)$ অর্থাৎ $(3, 6)$ এর সংযোগ রেখার সমীকরণ,

$y = \frac{6}{3}x \Rightarrow y = 2x$ (Ans.)

5(b) $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা.'০৬; সি. '০৭; য. '০২; কু. '০৩; ব. '০৫,'১০; মা.বো.'০৬; দি.'০৯]

সমাধান : $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে ।

$\therefore (-2)^2 = 4p.3 \Rightarrow P = \frac{1}{3}.$

$\therefore$ পরাবৃত্তটির সমীকরণ হবে, $y^2 = \frac{4}{3}x.$

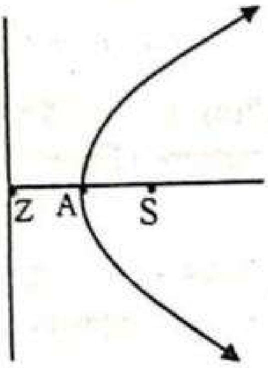
একে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |\frac{4}{3}| = \frac{4}{3}$ একক

এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (a, 0) = (\frac{1}{3}, 0)$

6(a) একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (0, 0) ও (– 2 , – 1) বিন্দুতে অবস্থিত হলে তার দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৮; চ.'১০; সি.'১১]

সমাধান : ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S(0 , 0), শীর্ষবিন্দু A(−2,−1) এবং দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু $Z(\alpha,\beta)$.



সংজ্ঞানুসারে, ZS এর মধ্যবিন্দু A.

$\therefore \frac{\alpha+0}{2} = -2 \Rightarrow \alpha = -4$

এবং $\frac{\beta+0}{2} = -1 \Rightarrow \beta = -2$

$\therefore$ দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু Z(−4 , −2).

অক্ষরেখা AS এর সমীকরণ $y = \frac{-1}{-2}x$

$\Rightarrow x - 2y = 0$

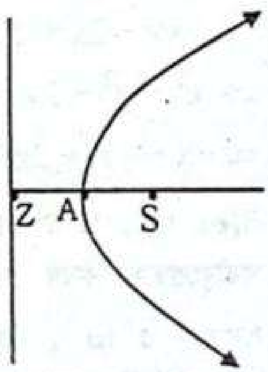
$\therefore$ অক্ষরেখা $x - 2y = 0$ এর উপর লম্ব এবং Z(−4,−2) বিন্দুগামী দিকাক্ষের সমীকরণ,

$2x + y = 2 \times -4 + (-2) = -8 - 2$

$\therefore$ $2x + y + 10 = 0$ (Ans.)

6(b) একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (3, 4) ও (0, 0) বিন্দুতে অবস্থিত হলে তার দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০২, '০৮; ব. '০৭; য. '০৪,'১৩ ; ঢা. '০৮,'১১; সি. '০৯; দি.'১১;কু.'১৩; বুয়েট '০৬-০৭]

সমাধান : ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S(3 , 4), শীর্ষবিন্দু A(0 , 0) এবং দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু $Z(\alpha,\beta)$.



সংজ্ঞানুসারে, ZS এর মধ্যবিন্দু A.

$\therefore \frac{\alpha+3}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = -3$

এবং $\frac{\beta+4}{2} = 0 \Rightarrow \beta = -4$

$\therefore$ দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু Z(−3 , −4).

অক্ষরেখা AS এর সমীকরণ $y = \frac{4}{3}x$

$\Rightarrow 4x - 3y = 0$

$\therefore$ অক্ষরেখা $4x - 3y = 0$ এর উপর লম্ব এবং Z(−3,−4) বিন্দুগামী দিকাক্ষের সমীকরণ,

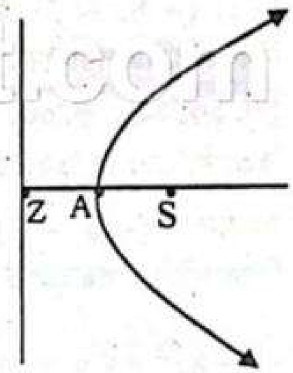
$3x + 4y = 3 \times -3 + 4 \times -4 = -9 - 16$

$\therefore$ $3x + 4y + 25 = 0$ (Ans.)

6(c) একটি পরাবৃত্তের অক্ষরেখা ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ (– 1, 1) বিন্দুতে এবং শীর্ষ (2, – 3) বিন্দুতে অবস্থিত।

[রা.'০৩,'১৩; চ.'১৩; কুয়েট '০৫-০৬]

সমাধান : ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S(−1 , 1), শীর্ষবিন্দু A(2,−3) এবং দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু $Z(\alpha,\beta)$.



সংজ্ঞানুসারে, ZS এর মধ্যবিন্দু A.

$\therefore \frac{\alpha-1}{2} = 2 \Rightarrow \alpha = 5$

এবং $\frac{\beta+1}{2} = -3 \Rightarrow \beta = -7$

$\therefore$ দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু Z(5 , −7).

$\therefore$ S(−1 , 1) ও A(2,−3) বিন্দুগামী অক্ষরেখার সমীকরণ $(x+1)(1+3) - (y-1)(-1-2) = 0$

$\Rightarrow 4x + 4 + 3y - 3 = 0$

$\therefore$ $4x + 3y + 1 = 0$ (Ans.)

অক্ষরেখা $4x + 3y + 1 = 0$ এর উপর লম্ব এবং Z(5, − 7) বিন্দুগামী দিকাক্ষের সমীকরণ,

$3x - 4y = 3 \times 5 - 4 \times -7 = 15 + 28$

$\therefore$ $3x - 4y - 43 = 0$ (Ans.)

7. $y^2 = 12x$ **পরাবৃত্তের উপর P একটি বিন্দু। x-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে তার দূরত্বের দ্বিগুণ হলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।**

সমাধান : ধরি, $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের উপর P বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (α, β).

$\therefore$ x-অক্ষ হতে $P(\alpha, \beta)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |\beta|$ এবং

y-অক্ষ হতে $P(\alpha, \beta)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |\alpha|$

প্রশ্নমতে, $|\beta| = 2|\alpha| \Rightarrow \beta = \pm 2\alpha \cdots(1)$

$\therefore$ $(\alpha, \pm 2\alpha)$, $y^2 = 12x$ এর উপর অবস্থিত।

$\therefore$ $(\pm 2\alpha)^2 = 12.\alpha \Rightarrow 4\alpha^2 = 12\alpha$

$\Rightarrow \alpha = 3$ [এখানে $\alpha \neq 0$]

(1) হতে পাই, $\beta = \pm 6$

$\therefore$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (3 , 6) বা, (3, – 6).

8(a) (– 8, – 2) উপকেন্দ্র ও $2x - y - 9 = 0$ **দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

[ঢা.'১০,'১২; কু.'০০, ০৭; সি.'০১,'০৪; রা.'০১,'০৬,'১৩; ব.'০৮; দি.'১২; কুয়েট '০৮-০৯]

সমাধান : (– 8, – 2) উপকেন্দ্র ও $2x - y - 9 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x+8)^2 + (y+2)^2 = \left(\frac{2x-y-9}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 16x + 64 + y^2 + 4y + 4 = \frac{4x^2 + y^2 + 81 - 4xy - 36x + 18y}{5}$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 + 80x + 20y + 340 = 4x^2 + y^2 - 4xy - 36x + 18y + 81$$

$$\therefore x^2 + 4y^2 + 4xy + 116x + 2y + 259 = 0$$

8(b) (0,– 4) উপকেন্দ্র ও $y - 4 = 0$ **দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [ব.'০৭]

সমাধান : (0,– 4) উপকেন্দ্র ও $y - 4 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-0)^2 + (y+4)^2 = \left(\frac{y-4}{\sqrt{1^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 8y + 16 = y^2 - 8y + 16$$

$$\therefore x^2 + 16y = 0 \text{ (Ans.)}$$

8(c) (2, 0) উপকেন্দ্র ও $x + 2 = 0$ **দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

[কু.'০৪; মা.'০৫; সি.'১০]

সমাধান : (2, 0) উপকেন্দ্র ও $x + 2 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{x+2}{\sqrt{1^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\therefore y^2 = 8x \text{ (Ans.)}$$

8(d) (– 1, 1) উপকেন্দ্র ও $x + y + 1 = 0$ **দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

[কু.'০৩; ঢা.'০৫; রা.'০৮; দি.'১০]

সমাধান : (– 1, 1) উপকেন্দ্র ও $x + y + 1 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{x+y+1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = \frac{x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x^2 + 4x - 4y + 4 = x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 6y + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + 2x - 6y + 3 = 0 \text{ (Ans.)}$$

8(e) (a , 0) উপকেন্দ্র ও $x - c = 0$ **দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [য.'০৬]

সমাধান : (a , 0) উপকেন্দ্র ও $x - c = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ

$(x-a)^2 + (y-0)^2 = (\frac{x-c}{\sqrt{1^2}})$

$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2$

$\Rightarrow y^2 = 2ax - 2cx + c^2 - a^2$

$\therefore y^2 = 2(a-c)x + c^2 - a^2$ (Ans.)

9(a) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6 ; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[য.'০৩; ঢা.'০৫,'০৯,'১২; রা.'০৭; সি.'০৭,'১২; দি., কু.'১০ ; ব.'১৩; প্র.ভ.প.'০৫]

সমাধান ঃ $y^2 = 16x \cdots (1)$ কে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$4a = 16 \Rightarrow a = 4$

ধরি, প্রদত্ত পরাবৃত্তের উপরিস্থিত (x , y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6.

(1) আমরা জানি, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত (x , y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব = x + a.

$\therefore x + a = 6 \Rightarrow x + 4 = 6 \Rightarrow x = 2$

(1) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $y^2 = 16.2$

$\Rightarrow y = 4\sqrt{2}$ বা, $-4\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 4\sqrt{2})$ বা, $(2, -4\sqrt{2})$

9(b) $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 8; ঐ বিন্দু স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[চ. '০৭,'১১; কু. '০৬; ঢা. '০৬; ব. '০৮,'১০; সি.'১০; য.'১০; রা.'১১,'১৩; দি.'১৩]

সমাধান ঃ $y^2 = 8x \cdots (1)$ কে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$4a = 8 \Rightarrow a = 2$

ধরি, প্রদত্ত পরাবৃত্তের উপরিস্থিত (x , y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 8.

আমরা জানি, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত (x , y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব = x + a.

$\therefore x + a = 8 \Rightarrow x + 2 = 8 \Rightarrow x = 6$

(1) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $y^2 = 8.6$

$\Rightarrow y = 4\sqrt{3}$ বা, $-4\sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 4\sqrt{3})$ বা, $(2, -4\sqrt{3})$

9(c) $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর কোটি 12 ; P বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব নির্ণয় কর।

[ব.'০২; বুয়েট'০৩-০৪]

সমাধান ঃ ধরি, $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 12)$

$\therefore 12^2 = 9\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{144}{9} = 16$

$y^2 = 8x \cdots (1)$ কে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$4a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{4}$

$\therefore$ আমরা জানি, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত (x , y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব = x + a.

$\therefore y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত $P(\alpha, 12)$ বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= \alpha + a = 16 + \frac{9}{4} = 18\frac{1}{4}$

10. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (– 1 , 3) এবং শীর্ষ (4, 3) বিন্দুতে অবস্থিত ।

[ঢা.'০২; য.'০২; সি.'০৬; কু.'১১; ব.'১৩]

সমাধান ঃ পরাবৃত্তের অক্ষরেখার উপরস্থ উপকেন্দ্র (– 1,3) ও শীর্ষ (4, 3) এর কোটি অভিন্ন । অতএব, পরাবৃত্তের অক্ষরেখাটি x– অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, শীর্ষবিন্দু (4, 3) এবং অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(y-3)^2 = 4a(x-4) \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক = (4+ a, 3)

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $4 + a = -1 \Rightarrow a = -5.$

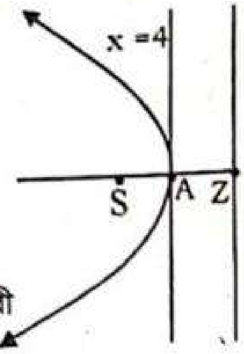
$\therefore$ (1) এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$(y-3)^2 = 4.(-5)(x-4)$

$\therefore (y-3)^2 = -20(x-4)$

11(a) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (2 , 5) বিন্দুতে অবস্থিত এবং $x = 4$ রেখাটি এর শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শ করে। [য.'০৪; কু.'১২; সি.'১৩]

সমাধান ঃ যেহেতু $x = 4$ রেখাটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শ করে, সুতরাং এর অক্ষরেখা x- অক্ষের সমান্তরাল।



$x = 4$ রেখার উপর লম্ব এবং উপকেন্দ্র (2,5) দিয়ে অতিক্রমকারী অক্ষরেখার সমীকরণ $y = 5$.

$x = 4$ ও $y = 5$ রেখার ছেদবিন্দু A(4, 5), যা পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ।

ধরি, শীর্ষবিন্দু (4, 5) এবং অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(y-5)^2 = 4a(x-4) \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (4 + a, 5)$

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $4 + a = 2 \Rightarrow a = -2$.

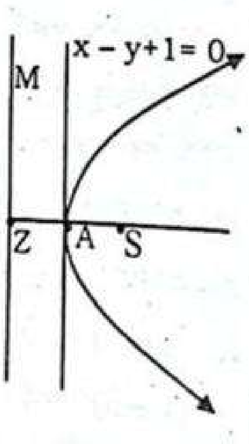
$\therefore$ (1) এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$(y-5)^2 = 4.(-2)(x-4)$

$\therefore \ (y-5)^2 = -8\,(x-4)$

11(b) একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং $x - y + 1 = 0$ রেখাটি শীর্ষবিন্দুতে অক্ষরেখার উপর লম্ব । পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৫-০৬]

সমাধান ঃ ধরি, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A, উপকেন্দ্র S(0,0) এবং দিকাক্ষ MZ. $x - y + 1 = 0$ রেখাটি শীর্ষবিন্দু A তে অক্ষরেখার উপর লম্ব ।



$\therefore$ S(0,0) দিয়ে অতিক্রমকারী এবং $x - y + 1 = 0$ রেখার উপর লম্ব অক্ষরেখার সমীকরণ $x + y = 0$

এ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $A \equiv (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ধরি, দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু $Z(\alpha\ ,\ \beta)$. A, ZS এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \dfrac{\alpha + 0}{2} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -1$ এবং $\dfrac{\beta + 0}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \beta = 1$

$\therefore \ x - y + 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং Z(–1,1) দিয়ে অতিক্রমকারী দিকাক্ষ MZ এর সমীকরণ

$x - y = -1 - 1 \Rightarrow x - y + 2 = 0$

$\therefore$ S(0,0) উপকেন্দ্র ও $x - y + 2 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ উপকেন্দ্র ,

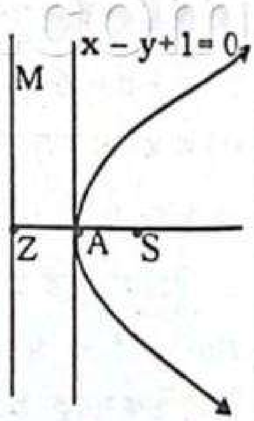
$(x-0)^2 + (y-0)^2 = (\dfrac{x - y + 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}})^2$

$\Rightarrow 2(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + 4 - 2xy + 4x - 4y$

$\therefore \ x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y - 4 = 0$

11(c) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র **(1, –1)** বিন্দুতে অবস্থিত এবং $x - y + 2 = 0$ রেখাটি শীর্ষবিন্দুতে অক্ষরেখার উপর লম্ব । [বুয়েট'০৮-০৯]

সমাধান ঃ ধরি, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A, উপকেন্দ্র S(1 ,– 1) এবং দিকাক্ষ MZ. $x - y + 2 = 0$ রেখাটি শীর্ষবিন্দু A তে অক্ষরেখার উপর লম্ব ।



$\therefore$ S(1,–1) দিয়ে অতিক্রমকারী এবং $x - y + 2 = 0$ রেখার উপর লম্ব অক্ষরেখার সমীকরণ

$x + y = 1 - 1 \Rightarrow x + y = 0$

এ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $A \equiv (-1, 1)$

ধরি, দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু $Z(\alpha,\beta)$. A, ZS এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \dfrac{\alpha + 1}{2} = -1 \Rightarrow \alpha = -3$ এবং $\dfrac{\beta - 1}{2} = 1 \Rightarrow \beta = 3$

$\therefore \ x - y + 2' = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং Z(–3, 3) দিয়ে অতিক্রমকারী দিকাক্ষ MZ এর সমীকরণ

$x - y = -3 - 3 \Rightarrow x - y + 6 = 0$

∴ $S(1, -1)$ উপকেন্দ্র ও $x - y + 6 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ উপকেন্দ্র ,

$$(x-1)^2+(y+1)^2=\left(\frac{x-y+6}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2(x^2-2x+1+y^2+2y+1) = x^2+y^2+36-2xy+12x-12y$$

$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-4x+4y+4 = x^2+y^2+36-2xy+12x-12y$$

$$\therefore x^2+y^2+2xy-16x+16y-32=0$$

12(a) (2, 3) শীর্ষ এবং $y = 6$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৩]

সমাধান : পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $y = 6 \cdots(1)$, যা x-অক্ষের সমান্তরাল। অতএব, দিকাক্ষের উপর লম্ব অক্ষরেখা হবে y-অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, শীর্ষ (2 , 3) এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2 = 4a(y-3) \cdots (2)$

(2) পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ, $y - 3 = -a$

$\therefore\ y = 3 - a \cdots \cdots (3)$

(1) ও (3) হতে পাই, $3 - a = 6 \Rightarrow a = -3$

(2) এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$(x-2)^2 = 4.(-3)(y-3)$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -12y + 36$

$\therefore\ x^2 - 4x + 12y - 32 = 0$ (Ans.)

12(b) একটি পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $x - c=0$ এবং তার শীর্ষ $(c', 0)$ বিন্দুতে অবস্থিত। দেখাও যে পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4(c' - c)(x - c')$

প্রমাণ : পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $x - c = 0$ অর্থাৎ $x = c \cdots(1)$, যা y-অক্ষের সমান্তরাল।

∴ দিকাক্ষের উপর লম্ব অক্ষরেখা হবে x-অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, শীর্ষ $(c', 0)$ এবং অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(y-0)^2 = 4a(x-c') \cdots (2)$

(2) পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ, $x - c' = -a$

$\therefore\ x = c' - a \cdots \cdots (3)$

(1) ও (3) হতে পাই, $c' - a = c \Rightarrow a = c' - c$

(2) এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$y^2 = 4(c'-c)(x-c')$

12(c) (4, 3) শীর্ষ এবং $y = 7$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি.'০৪; কু.'০৮; কুয়েট ০৫-০৬]

সমাধান : পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $y = 7 \cdots(1)$, যা x-অক্ষের সমান্তরাল। অতএব, দিকাক্ষের উপর লম্ব অক্ষরেখা হবে y-অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, শীর্ষ (4 , 3) এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(x-4)^2 = 4a(y-3) \cdots (2)$

(2) পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ, $y - 3 = -a$

$\therefore\ y = 3 - a \cdots \cdots (3)$

(1) ও (3) হতে পাই, $3 - a = 7 \Rightarrow a = -4$

(2) এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$(x-4)^2 = 4.(-4)(y-3)$

$\therefore\ (x-4)^2 = -16(y-3)$ (Ans.)

13(a) (2, 5) বিন্দুগামী পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ (0, 2) বিন্দুতে অবস্থিত এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল।

সমাধান : ধরি, শীর্ষ (0 , 2) এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(x-0)^2 = 4a(y-2) \Rightarrow x^2 = 4a(y-2) \cdots \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তটি (2, 5) বিন্দুগামী ।

$\therefore\ 4 = 4a(5-2) \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

(1) এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 = 4.\frac{1}{3}(y-3)\ \ \therefore 3x^2 = 4(y-2)$

[MCQ এর জন্য , $\frac{(x-0)^2}{y-2} = \frac{2^2}{5-2}$]

13(b) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ (4, – 3) বিন্দুতে অবস্থিত , দিকাক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং যা (– 4, – 7) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

[চ.'০২; সি.'০৫]

সমাধান ঃ যেহেতু পরাবৃত্তের দিকাক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল, সুতরাং দিকাক্ষের উপর লম্ব এর অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল ।

ধরি, শীর্ষ (4, – 3) এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(x-4)^2 = 4a(y+3) \cdots(1)$

(1) পরাবৃত্তটি (–4, –7) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore\ (-4-4)^2 = 4a(-7+3)$

$\Rightarrow 64 = -16a \Rightarrow a = -4$

(1) এ a এর মান বসিয়ে পাই, $(x-4)^2 = 4(-4)(y+3)$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = -16y - 48$

$\therefore\ x^2 - 8x + 16y + 64 = 0$

13(c) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ (4 , – 3) বিন্দুতে অবস্থিত , উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 4 একক এবং অক্ষটি x-অক্ষের সমান্তরাল।

[সি.'০৪; কু.'০৮; প্র.ভ.প.'০৫]

সমাধান ঃ ধরি, শীর্ষ (4, – 3) এবং অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(y+3)^2 = 4a(x-4) \cdots \cdots(1)$

(1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = $|4a|$

প্রশ্নমতে, $|4a| = 4 \Rightarrow 4a = \pm 4 \Rightarrow a = \pm 1$

(1) এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$(y+3)^2 = 4(\pm 1)(x-4)$

$\therefore\ (y+3)^2 = \pm 4(x-4)$ (Ans.)

14(a) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল, শীর্ষবিন্দু y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যা (0 , 2) ও (1, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

[প্র.ভ.প.'৮৬]

সমাধান ঃ ধরি, y-অক্ষের উপর অবস্থিত শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, \beta)$.

ধরি, শীর্ষ $(0, \beta)$ এবং অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(y+\beta)^2 = 4a(x-0)$

$\Rightarrow (y+\beta)^2 = 4ax \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তটি (0 , 2) ও (1, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore\ (2+\beta)^2 = 4a.0 \Rightarrow \beta + 2 = 0 \Rightarrow \beta = -2$

এবং $(0-2)^2 = 4a.1 \quad [\because \beta = -2]$

$\Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$

(1) এ a ও β এর মান বসিয়ে পাই,

$(y-2)^2 = 4.1.x \ \therefore (y-2)^2 = 4x$

14(b) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষরেখা x- অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যা (3 , 2) ও (– 2, –1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান ঃ যেহেতু পরাবৃত্তের অক্ষরেখা x- অক্ষের উপর অবস্থিত, সুতরাং এর শীর্ষও x-অক্ষের উপর অবস্থিত।

ধরি, শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$ এবং শীর্ষ $(\alpha, 0)$ ও অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(y+0)^2 = 4a(x-\alpha)$

$\Rightarrow y^2 = 4a(x-\alpha) \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তটি (3 , 2) ও (–2, –1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore\ 4 = 4a(3-\alpha) \cdots \cdots (2)$ এবং

$1 = 4a(-2-\alpha) \cdots \cdots (3)$

$(2) \div (3) \Rightarrow 4 = \dfrac{3-\alpha}{-2-\alpha}$

$\Rightarrow -8 - 4\alpha = 3 - \alpha \Rightarrow 3\alpha = -11$

$\Rightarrow \alpha = -\dfrac{11}{3}$

(3) এ α এর মান বসিয়ে পাই,

$1 = 4a(-2 + \dfrac{11}{3}) \Rightarrow 3 = 4a(-6+11)$

$\Rightarrow 20a = 3 \Rightarrow a = \dfrac{3}{20}$

(1) এ a ও β এর মান বসিয়ে পাই,

$y^2 = 4.\frac{3}{20}.(x+\frac{11}{3})$

$\Rightarrow y^2 = \frac{3}{5}.\frac{3x+11}{3}$ $\therefore 5y^2 = 3x+11$

15(a) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং যা $(-2, 1)$, $(1, 2)$ ও $(-1, 3)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান ঃ ধরি, অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $x = ay^2 + by + c \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তটি $(-2, 1)$, $(1, 2)$ ও $(-1, 3)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore -2 = a + b + c \cdots\cdots (2)$,

$1 = 4a + 2b + c \cdots\cdots (3)$,

$-1 = 9a + 3b + c = 0 \cdots (4)$

এখন, $(2)-(3) \Rightarrow -3 = -3a - b$

$\Rightarrow b = 3 - 3a \cdots\cdots (5)$

$(3)-(4) \Rightarrow 2 = -5a - b$

$\Rightarrow 2 = -5a - 3 + 3a \Rightarrow 2a = -5$

$\Rightarrow a = -\frac{5}{2}$

(5) হতে পাই, $b = 3 + 3\times\frac{5}{2} = \frac{21}{2}$ এবং

(2) হতে পাই, $-2 = -\frac{5}{2} + \frac{21}{2} + c \Rightarrow c = -10$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$x = -\frac{5}{2}y^2 + \frac{21}{2}y - 10$

$\Rightarrow 5y^2 - 21y + 2x + 20 = 0$

15(b) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং যা $(4, 5)$, $(-2, 11)$ ও $(-4, 21)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান ঃ ধরি, অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y = ax^2 + bx + c \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তটি $(4, 5)$, $(-2,11)$ ও $(-4, 21)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore 5 = 16a + 4b + c \cdots\cdots (2)$,

$11 = 4a - 2b + c \cdots\cdots (3)$,

$21 = 16a - 4b + c = 0 \cdots (4)$

এখন, $(4)-(2) \Rightarrow 16 = -8b \Rightarrow b = -2$

$(3)-(2) \Rightarrow 6 = -12a - 6b$

$\Rightarrow 1 = -2a - b \Rightarrow 1 = -2a + 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

(2) হতে পাই, $5 = 16\times\frac{1}{2} + 4\times -2 + c$

$\Rightarrow 5 = 8 - 8 + c \Rightarrow c = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5 \Rightarrow 2y = x^2 - 4x + 10$

$\therefore x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$ (Ans.)

16(a) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত্য বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(3, 5)$ ও $(3, -3)$।

সমাধান ঃ ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুইটি $L(3, 5)$ ও $L'(3, -3)$

LL' এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ উপকেন্দ্র S এর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{3+3}{2}, \frac{5-3}{2}) = (3,1)$

$L(3, 5)$ ও $L'(3, -3)$ এর ভুজ অভিন্ন বলে বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা অর্থাৎ উপকেন্দ্রিক লম্ব y- অক্ষের সমান্তরাল। অতএব, পরাবৃত্তের অক্ষরেখা x - অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (α,β) এবং (α, β) শীর্ষবিন্দু ও অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha) \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রি লম্বের দৈর্ঘ্য,

$|4a| = LL' = |5+3| = 8 \Rightarrow 4a = \pm 8$

$\therefore a = 2, -2$

(1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(a+\alpha, \beta)$

$\therefore$ $a+\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 3-a$ এবং $\beta = 1$

$a = 2$ হলে, $\alpha = 3-2 = 1$

$a = -2$ হলে, $\alpha = 3-(-2) = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(y-1)^2 = 4.2(x-1)$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 8x - 8$

$\therefore$ $y^2 - 2y - 8x + 9 = 0$ এবং

$(y-1)^2 = 4.(-2)\,(x-5)$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -8x + 40$

$\therefore$ $y^2 - 2y + 8x - 39 = 0$

16(b) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(-2, 2)$ ও $(-2, -4)$ ।

সমাধান ঃ ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুইটি $L(-2, 2)$ ও $L'(-2, -4)$

LL' এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ উপকেন্দ্র S এর স্থানাঙ্ক $= (\frac{-2-2}{2}, \frac{2-4}{2}) = (-2, -1)$

$L(3, 5)$ ও $L'(3, -3)$ এর ভুজ অভিন্ন বলে বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা অর্থাৎ উপকেন্দ্রিক লম্ব y- অক্ষের সমান্তরাল। অতএব, পরাবৃত্তের অক্ষরেখা x - অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (α, β) এবং (α, β) শীর্ষবিন্দু ও অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ ···(1)

(1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রি লম্বের দৈর্ঘ্য,

$|4a| = LL' = |2+4| = 6 \Rightarrow 4a = \pm 6$

$\therefore$ $a = \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$

1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(a+\alpha, \beta)$

$\therefore$ $a+\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -2-a$ এবং $\beta = -1$

$a = \frac{3}{2}$ হলে, $\alpha = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

$a = -\frac{3}{2}$ হলে, $\alpha = -2 - (-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(y+1)^2 = 4.\frac{3}{2}(x+\frac{7}{2})$

$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 3(2x+7)$

$\therefore$ $y^2 + 2y - 6x - 20 = 0$ এবং

$(y+1)^2 = 4.(-\frac{3}{2})\,(x+\frac{1}{2})$

$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 = -3(2x+1)$

$\therefore$ $y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$

17(a) $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের $(1, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের $(1, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y.2 = 2(x+1)$

$\Rightarrow y = x + 1$ $\therefore$ $x - y + 1 = 0$

17(b) $x^2 = 8y$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x + y + 1 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব।

সমাধান ঃ ধরি, $x + y + 1 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব স্পর্শকের সমীকরণ $x - y + k = 0$ ··· (1) অর্থাৎ $y = x + k$.

প্রদত্ত পরাবৃত্ত $x^2 = 8y$ তে $y = x + k$ বসিয়ে পাই

$x^2 = 8(x+k) \Rightarrow x^2 - 8x - 8k = 0$ ······ (2)

$x - y + k = 0$ রেখা প্রদত্ত পরাবৃত্তের স্পর্শক। অতএব এ রেখা পরাবৃত্তকে সমপাত বিন্দুতে ছেদ করবে। তাই (2) সমীকরণের মূল দুইটি সমান হবে।

$\therefore$ $(-8)^2 - 4.1.(-8k) = 0$

$\Rightarrow 32k + 64 = 0 \Rightarrow k = -2$

(1) এ k এর মান বসিয়ে নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ

$x - y - 2 = 0$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $x^2 = 8y \Rightarrow x^2 = 4.2.y$ কে $x^2 = 4ay$ সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2$.

প্রদত্ত রেখা $x + y + 1 = 0$ এর ঢাল $= -\frac{1}{1} = -1$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $m = 1$

$\therefore$ প্রদত্ত পরাবৃত্তে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y = mx - am^2$

$\Rightarrow y = 1.x - 2.(1)^2 \therefore x - y - 2 = 0$ (Ans.)

17(c) $y^2 = 12x$ **পরাবৃত্তের (3, 6) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের (1, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y.6 = 6(x + 3)$

$\Rightarrow y = x + 3 \quad \therefore x - y + 3 = 0$ (Ans.)

আবার, $x - y + 3 = 0$ স্পর্শকের উপর লম্ব এবং (3, 6) বিন্দুগামী নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$x + y = 3 + 6 \therefore x + y - 9 = 0$

18(a) $y = 3x + 1$ **রেখাটি** $y^2 = 4ax$ **পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে। পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।** [প্র.ভ.প.'৯১]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $y = 3x + 1 \cdots (1)$

$y^2 = 4ax \cdots (2)$ পরাবৃত্তের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx + \frac{a}{m} \cdots \cdots (3)$

(1) ও (3) রেখা অভিন্ন হলে, $m = 3$ এবং

$\frac{a}{m} = 1 \Rightarrow a = m = 3.$

$\therefore$ (2) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব $= 4|a|$

$= 4|3| = 12$ একক

18(b) $y = 2x + 1$ **রেখাটি** $y^2 = 4ax$ **পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে। 'a' এর মান, স্পর্শবিন্দু, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $y = 2x + 1 \cdots (1)$

$y^2 = 4ax \cdots (2)$ পরাবৃত্তের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx + \frac{a}{m} \cdots \cdots (3)$

(1) ও (3) রেখা অভিন্ন হলে, $m = 2$ এবং

$\frac{a}{m} = 1 \Rightarrow a = m = 2.$

$\therefore$ স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}) = (\frac{2}{4}, \frac{4}{2})$

$= (\frac{1}{2}, 2)$

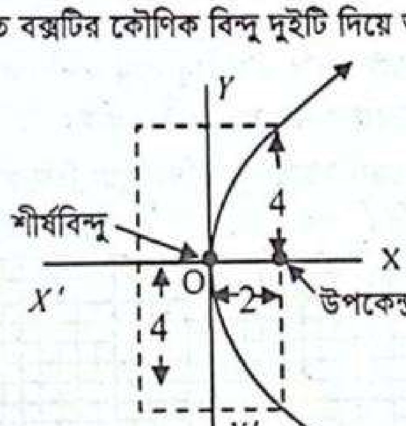
উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (a, 0) = (2, 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্ব $= 4|a| = 4|2| = 8$ একক

দিকাক্ষের সমীকরণ $x = -a \Rightarrow x + 2 = 0$

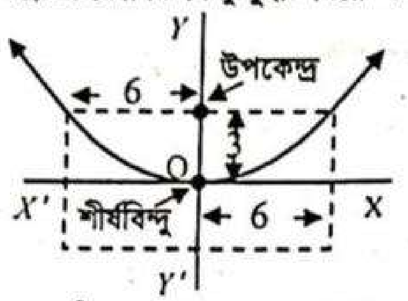
19 পরাবৃত্তের লেখচিত্র স্কেচ কর:

(a) $y^2 = 8x \Rightarrow y^2 = 4.2.x$ পরাবৃত্তের শীর্ষ মূলবিন্দু। উপকেন্দ্র মূলবিন্দু হতে 2 একক ডানে ($\because a = 2 > 0$) x অক্ষের উপর অবস্থিত । একটি বক্স তৈরি করি যেন শীর্ষ থেকে উভয় দিকে x অক্ষ বরাবর 2 একক এবং শীর্ষ থেকে উভয় দিকে y অক্ষ বরাবর 4 একক হয়। এ বক্সের সাহায্যে পরাবৃত্তটির লেখচিত্র স্কেচ করি যেন এর শীর্ষ মূলবিন্দু হয় এবং ইহা y অক্ষের ডান দিকে অবস্থিত বক্সটির কৌণিক বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে।



(b) $x^2 = 12y \Rightarrow x^2 = 4.3.y$ পরাবৃত্তের শীর্ষ মূলবিন্দু। উপকেন্দ্র মূলবিন্দু হতে 3 একক উপরে ($\because a = 3 > 0$) y অক্ষের উপর অবস্থিত । একটি বক্স তৈরি করি যেন শীর্ষ থেকে উভয় দিকে y অক্ষ বরাবর 3 একক এবং শীর্ষ থেকে উভয় দিকে x অক্ষ বরাবর 6 একক

হয়। এ বক্রের সাহায্যে পরাবৃত্তটির লেখচিত্র স্কেচ করি যেন এর শীর্ষ মূলবিন্দু হয় এবং ইহা x অক্ষের উপর দিকে অবস্থিত বক্রটির কৌণিক বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে।



20(a) $y = x^2 - x$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : $y = x^2 - x \Rightarrow y + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = 4.\frac{1}{4}(y + \frac{1}{4})$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি পরাবৃত্ত যার শীর্ষ $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ বিন্দুতে অবস্থিত। নিচের তালিকায় x-এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = x^2 - x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

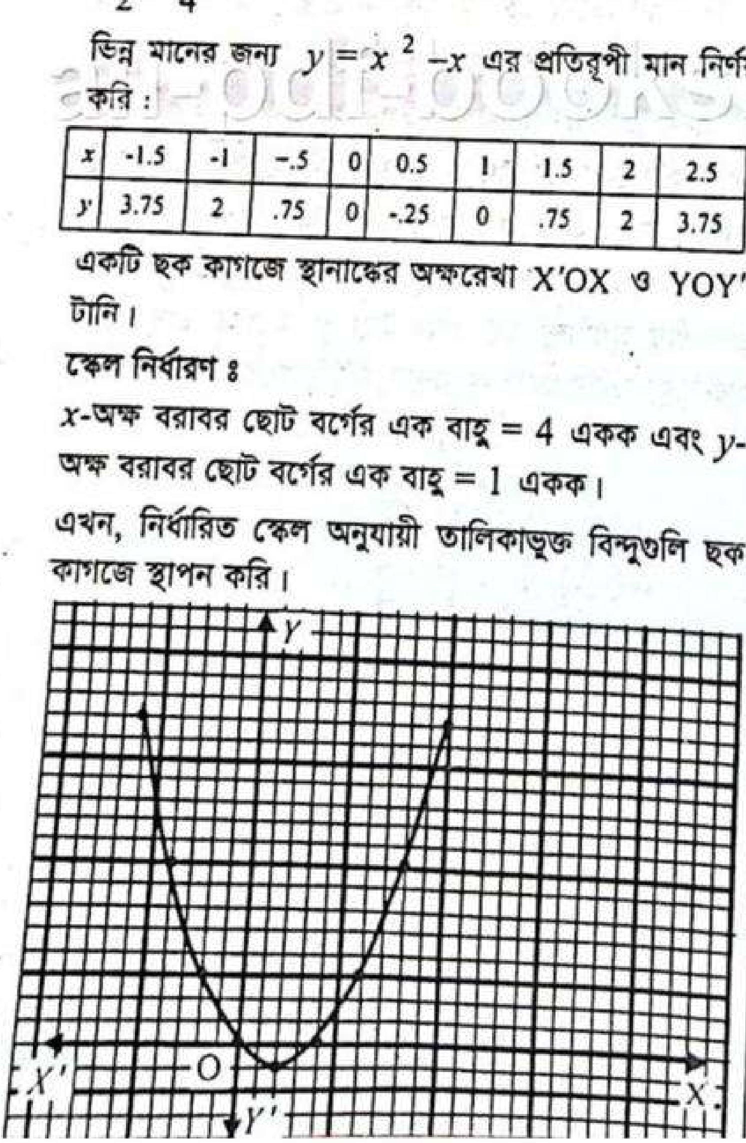
x	-1.5	-1	-.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	3.75	2	.75	0	-.25	0	.75	2	3.75

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' টানি।

স্কেল নির্ধারণ :

x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু = 4 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু = 1 একক।

এখন, নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি।



স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = x^2 - x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

$y < -\frac{1}{4}$ হলে, x এর মান অবাস্তব হয়। সুতরাং, y এর মান $-\frac{1}{4}$ এর কম হতে পারেনা

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $y^2 = 24x$ পরাবৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2 , 3)।

সমাধান : $y^2 = 24x$ অর্থাৎ $y^2 - 24x = 0$ পরাবৃত্তে যে জ্যা এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2 , 3) তার সমীকরণ,

$y.3 - 12(x + 2) = 3^2 - 24.2$

$\Rightarrow 3y - 12x - 24 = 9 - 48$

$\Rightarrow 3y - 12x + 15 = 0$

$\therefore$ $4x - y - 5 = 0$ (Ans.)

2. একটি সরলরেখা $x^2 + y^2 = 2a^2$ বৃত্ত ও $y^2 = 8ax$ পরাবৃত্ত উভয়কে স্পর্শ করে। দেখাও যে, রেখাটির সমীকরণ $y = \pm(x + 2a)$

প্রমাণ : মনে করি, $y^2 = 8ax \Rightarrow y^2 = 4.2a.x$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ,

$y = mx + \frac{2a}{m} \ldots(1)$ বা, $m^2x - my + 2a = 0$

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যসার্ধ = $\sqrt{2}a$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে,

$\left|\frac{m^2.0 - m.0 + 2a}{\sqrt{m^4 + m^2}}\right| = \sqrt{2}a$

$\Rightarrow 4a^2 = 2a^2(m^4 + m^2)$ [বর্গ করে।]

$\Rightarrow m^4 + m^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow (m^2 - 1)(m^2 + 2) = 0$

$\therefore$ $m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$ [$\because m^2 + 2 \neq 0$]

m এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$y = (\pm 1)x + \frac{2a}{\ldots}$

$\therefore\ y = \pm(x + 2a)$ (Showed)

3. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ বৃত্ত উভয়কে স্পর্শ করে।

সমাধান **:** মনে করি, $y^2 = 4x \Rightarrow y^2 = 4.1.x$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y = mx + \frac{1}{m} \Rightarrow mx - y + \frac{1}{m} = 0 \text{ ......(1)}$$

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(-1, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ = 1

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে,

$$\frac{|m.(-1) - 0 + 1/m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-m^2+1}{m}\right)^2 = m^2 + 1$$

$$\Rightarrow m^4 - 2m^2 + 1 = m^4 + m^2$$

$$\Rightarrow 3m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

m এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x \pm \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\,y = \pm(x + 3)$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $\sqrt{3}\,y = \pm(x + 3)$

4. $y^2 = 4x$ ও $x^2 = 4y$ পরাবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সাধারণ স্পর্শকের ঢাল m. তাহলে, $y^2 = 4x \Rightarrow y^2 = 4.1.x$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx + \frac{1}{m} \Rightarrow mx - y + \frac{1}{m} = 0 \cdots$(i)

এবং $x^2 = 4y \Rightarrow x^2 = 4.1.y$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ, $x = my + \frac{1}{m} \Rightarrow -x + my + \frac{1}{m} = 0 \cdots$(ii)

(i) ও (ii) রেখা অভিন্ন হলে, $m = -1$

(i) হতে পাই, $y = -x - 1$

$\therefore\ x + y + 1 = 0$ (Ans.)

5. (8, 2) বিন্দু হতে $x^2 = 4y$ পরাবৃত্তে অবস্থিত নিকটতম বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, (8, 2) বিন্দু হতে $x^2 = 4y$ পরাবৃত্তে অবস্থিত নিকটতম বিন্দুর স্থানাঙ্ক (a, b) . তাহলে,

$a^2 = 4b \Rightarrow b = \frac{a^2}{4} \cdots \cdots$ (i) , এবং (a, b) বিন্দুতে অঙ্কিত প্রদত্ত পরাবৃত্তের অভিলম্ব এবং (8, 2) ও (a, b) বিন্দুগামী রেখা অভিন্ন হবে।

(a, b) বিন্দুতে অঙ্কিত প্রদত্ত পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$ax = 2(y + b) \Rightarrow y + b = \frac{a}{2}x \cdots \cdots \text{(ii)}$$

$\therefore$ (ii) এর উপর লম্ব অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{2}{a}$ এবং

(a, b) ও (8, 2) বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= \frac{b-2}{a-8}$ সমান।

$$\therefore\ \frac{b-2}{a-8} = -\frac{2}{a} \Rightarrow ab - 2a = -2a + 16$$

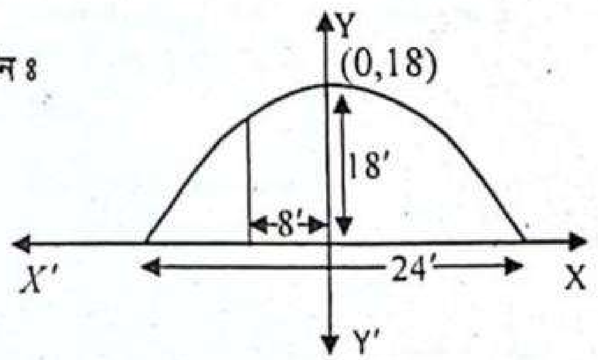
$$\Rightarrow ab = 16 \Rightarrow a\frac{a^2}{4} = 16 \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $b = \frac{16}{4} = 4.$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 4)

6. একটি পরাবৃত্তাকার খিলানের উচ্চতা 18 ফুট ও তার প্রান্তদ্বয়ের আনুভূমিক দূরত্ব 24 ফুট। প্রান্তদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু হতে 8 ফুট দূরে খিলানের উচ্চতা কত?

সমাধান **:**



ধরি, পরাবৃত্তাকার খিলানের প্রান্তদ্বয়ের সংযোগ রেখা x- অক্ষ এবং এর উচ্চতা y- অক্ষ। তাহলে, প্রান্তদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু মূলবিন্দু (0, 0).

$\therefore$ পরাবৃত্তের শীর্ষ $(0, 18)$ এবং এর অক্ষরেখা y- অক্ষ।

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ $(x - 0)^2 = 4a(y - 18)$

$\Rightarrow x^2 = 4a(y - 18)$, যা $(\pm \frac{24}{2}, 0)$ অর্থাৎ $(\pm 12, 0)$ বিন্দুগামী।

$\therefore (\pm 12)^2 = 4a(0 - 18) \Rightarrow a = -\frac{144}{72} = -2$

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = -8(y - 18)$

পরাবৃত্তস্থ কোন বিন্দুর ভুজ 8 বা −8 হলে,

$8^2 = -8(y - 18) \Rightarrow 8 = -y + 18$

$\Rightarrow y = 18 - 8 = 10$

$\therefore$ প্রান্তদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু হতে 8 ফুট দূরে খিলানের উচ্চতা 10 ফুট।

উপবৃত্ত (প্রশ্নমালা VI B)

1. উপবৃত্তের কেন্দ্র $(\alpha\ ,\ \beta)$ এবং অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষের সমান্তরাল হলে এর সাধারণ সমীকরণ, $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

2. বৃহৎ অক্ষকে x- অক্ষ এবং উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{(x\pm ae)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

3. বৃহৎ অক্ষকে x-অক্ষ এবং একটি দিকাক্ষকে y - অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{(x\pm a/e)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

4. উপকেন্দ্র $(\alpha\ ,\ \beta)$, দিকাক্ষ $ax+by+c=0$, এবং e উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\,\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

5. $y=mx+c$ রেখাটি $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $c^2=a^2m^2+b^2$ হয়। অতএব, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$.

6. উপবৃত্তের প্রয়োজনীয় ফর্মূলা ঃ

উপবৃত্তের আকার	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ যখন $a>b$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ যখন $a<b$	$\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ যখন $a>b$	$\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ যখন $a<b$
a. কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক	$(0\ ,\ 0)$	$(0\ ,\ 0)$	$(\alpha\ ,\ \beta)$	$(\alpha\ ,\ \beta)$
b. উৎকেন্দ্রিকতা	$e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{b^2}}$	$e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{b^2}}$
c. বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য	$2a$	$2b$	$2a$	$2b$
d. ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য	$2b$	$2a$	$2b$	$2a$
e. বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ	$y=0$	$x=0$	$y-\beta=0$	$x-\alpha=0$
f. ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ	$x=0$	$y=0$	$x-\alpha=0$	$y-\beta=0$
g. শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm a\ ,\ 0)$	$(0,\ \pm b)$	$(\pm a+\alpha\ ,\ \beta)$	$(\alpha\ ,\ \pm b+\beta)$
h. ফোকাসদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm ae\ ,\ 0)$	$(0\ ,\ \pm be)$	$(\pm ae+\alpha\ ,\ \beta)$	$(\alpha\ ,\ \pm be+\beta)$
i. ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব	$2ae$	$2be$	$2ae$	$2be$
j. দিকাক্ষের পাদবিন্দু	$(\pm\dfrac{a}{e},\ 0)$	$(0\ ,\ \pm\dfrac{b}{e})$	$(\pm\dfrac{a}{e}+\alpha\ ,\ \beta)$	$(\alpha\ ,\ \pm\dfrac{b}{e}+\beta)$
k. দিকাক্ষ দুইটির দূরত্ব	$\dfrac{2a}{e}$	$\dfrac{2b}{e}$	$\dfrac{2a}{e}$	$\dfrac{2b}{e}$
l. দিকাক্ষ দুইটির সমীকরণ	$x=\pm\dfrac{a}{e}$	$y=\pm\dfrac{b}{e}$	$x-\alpha=\pm\dfrac{a}{e}$	$y-\beta=\pm\dfrac{b}{e}$
m. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$\dfrac{2b^2}{a}$	$\dfrac{2a^2}{b}$	$\dfrac{2b^2}{a}$	$\dfrac{2a^2}{b}$
n. উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=\pm be$	$x-\alpha=\pm ae$	$y-\beta=\pm be$

1. (a) $5x^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.,সি.'০২; কু.'১০; বুয়েট'০৪-০৫]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $5x^2 + 4y^2 = 1$ অর্থাৎ

$\frac{x^2}{(1/\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{(1/2)^2} = 1$ কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

$b = \frac{1}{2}$. এখানে, $a < b$.

$$\therefore \text{ উৎকেন্দ্রিকতা , } e = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{1/4}}$$

$$= \sqrt{\frac{5-4}{20} \times \frac{4}{1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\therefore$ দিকাক্ষের সমীকরণ $y = \pm \frac{b}{e} = \pm \frac{1/2}{1/\sqrt{5}}$

$\therefore$ $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ (Ans.)

1(b) $9x^2 + 25y^2 = 225$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০২; সি. '০৭]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $9x^2 + 25y^2 = 225$ অর্থাৎ

$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 5$,

$b = 3$. এখানে, $a > b$.

$$\therefore \text{ উৎকেন্দ্রিকতা } e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \frac{4}{5}$$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0) = (\pm 5.\frac{4}{5}, 0)$

$= (\pm 4 , 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.9}{.5} = \frac{18}{5}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x = \pm ae \Rightarrow x = \pm 4$

দিকাক্ষের সমীকরণ $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{5}{4/5}$

$\therefore$ $4x = \pm 25$

1(c) $3x^2 + 4y^2 = 12$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'০১; কু.'০২, '০৩; ঢা.'০৩]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $3x^2 + 4y^2 = 12$ অর্থাৎ

$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$ কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 2$,

$b = \sqrt{3}$. এখানে, $a > b$.

$$\therefore \text{ উৎকেন্দ্রিকতা } e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{4-3}{4}} = \frac{1}{2}$$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0) = (\pm 2.\frac{1}{2}, 0)$

$= (\pm 1 , 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.3}{2} = 3$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x = \pm ae \Rightarrow x = \pm 1$

দিকাক্ষের সমীকরণ $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{2}{1/2}$ $\therefore$ $x = \pm 4$

1(d) $9x^2 + 16y^2 = 144$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৭]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $9x^2 + 16y^2 = 144$ অর্থাৎ

$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 4$, $b = 3$. এখানে, $a > b$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{\frac{16-9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0) = (\pm 4.\frac{\sqrt{7}}{4}, 0)$

$= (\pm\sqrt{7}\ , 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.9}{4}=\frac{9}{2}$

1(e) $16x^2+25y^2=400$ **উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

[রা.'০৫; কু.'০৫; প্র.ভ.প.'০৬]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $16x^2+25y^2=400$ অর্থাৎ $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 5$, $b = 4$. এখানে, $a > b$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{25-16}{25}}=\frac{3}{5}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0) = (\pm 5.\frac{3}{5}, 0)$

$= (\pm 3\ , 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.16}{5}=\frac{32}{5}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x = \pm ae \Rightarrow x = \pm 3$

দিকাক্ষের সমীকরণ $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{5}{3/5}$ $\therefore 3x=\pm 25$

1(f) $2x^2+3y^2=1$ **উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।**

[ব. '০৩; য. '০৪; ঢা. '০৬; মা.'০৬; সি.'১১]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $2x^2+3y^2=1$ অর্থাৎ $\frac{x^2}{(1/\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{(1/\sqrt{3})^2}=1$ কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{3}}$. এখানে, $a > b$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1/2}}$

$=\sqrt{\frac{1}{6}\times\frac{2}{1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.\frac{1}{3}}{1/\sqrt{2}}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0)$

$=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)=(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, 0)$

1(g) **দেখাও যে,** $2x^2+y^2-8x-2y+1=0$ **সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত প্রকাশ করে; ইহার উপকেন্দ্র নির্ণয় কর।** [কু.'১২; সি.'১৩]

প্রমাণ : প্রদত্ত সমীকরণে x^2 ও y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান। x^2 এর সহগ 2 ও y^2 এর সহগ 1 অসমান ও অভিন্ন চিহ্নযুক্ত । সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত প্রকাশ করে।

এখন, $2x^2+y^2-8x-2y+1=0$

$\Rightarrow 2(x^2-4x+4)-8+(y^2-2y+1)-1+1=0$

$\Rightarrow 2(x-2)^2+(y-1)^2=8$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{8}=1$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{(2\sqrt{2})^2}=1$. ইহাকে উপবৃত্তের

সাধারণ সমীকরণ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$. এখানে, $b > a$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{8-4}{8}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha\ , \pm be+\beta)$

$$=(2, \pm 2\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+1)$$

$$=(2, 1\pm 2)=(2,-1),(2,3)$$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(2, 3)$ ও $(2, -1)$

2.(a) $5x^2 + 9y^2 - 20x = 25$ উপবৃত্তের কেন্দ্র, উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। [বুয়েট'০২-০৩]

সমাধান ঃ $5x^2+9y^2-20x=25$

$\Rightarrow 5(x^2-4x+4)+9y^2=25+20$

$\Rightarrow 5(x-2)^2+9y^2=45$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y-0)^2}{(\sqrt{5})^2}=1.$ ইহাকে উপবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 3$, $b = \sqrt{5}$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$. এখানে, $a > b$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{9-5}{9}}=\frac{2}{3}$

$\therefore$ উপবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\alpha , \beta)=(2, 0)$

এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\pm ae+\alpha , \beta)$

$$=(\pm 3.\frac{2}{3}+2 , 0)$$

উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $(0, 0)$ ও $(4, 0)$

2(b) $4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য , উৎকেন্দ্রিকতা এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি.'০৩; রা.'০৭; চ.'১১; ব.'১৩]

সমাধান ঃ $4x^2+5y^2-16x+10y+1=0 \Rightarrow 4(x^2-4x+4)+5(y^2+2y+1)$

$$=16+5-1$$

$\Rightarrow 4(x-2)^2+5(y+1)^2=20$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{(y+1)^2}{2^2}=1.$ ইহাকে উপবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=\sqrt{5}$, $b=2$, $\alpha=2$, $\beta=-1$ এখানে, $a > b$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{5-4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\pm ae+\alpha , \beta)$

$=(\pm\sqrt{5}.\frac{1}{\sqrt{5}}+2 , -1)=(\pm 1+2 , -1)$

$\therefore$ উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $(-1, -1)$ ও $(3,-1)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{8}{\sqrt{5}}$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x-\alpha=\pm\frac{a}{e}$

$\Rightarrow x-2=\pm\frac{\sqrt{5}}{1/\sqrt{5}} \Rightarrow x=2\pm 5$

$\therefore$ দিকাক্ষ দুইটির সমীকরণ $x = 7$ এবং $x = -3$

3. (a) p এর মান কত হলে $px^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে ? উপবৃত্তের অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[য.'০৩; রা.'০৪,'০৮; চ.'০৫; ব.'০৫]

সমাধান ঃ $px^2 + 4y^2 = 1 \cdots (1)$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে,

$p.(\pm 1)^2 + 4.0^2 = 1 \therefore p = 1$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $1.x^2 + 4y^2 = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(1/2)^2} = 1$. একে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই,

$a = 1, b = \frac{1}{2}$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2.1 = 2$ এবং

ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 2.\frac{1}{2} = 1$

3(b) p এর মান কত হলে $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ উপবৃত্তটি (6 , 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে ? উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর।

[রা.'০১,'১২; ঢা.'০৪,'০৯,'১২; ব.'০২; চ.'০৩; কু.'০৬; সি.'০৮,'১২; দি.'০৯,'১১;য.'১৩ বুয়েট'০৪-০৫,০৮-০৯]

সমাধান ঃ $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \cdots (1)$ উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে, $\frac{36}{p} + \frac{16}{25} = 1$

$\Rightarrow \frac{36}{p} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$

$\Rightarrow p = \frac{36.25}{9} = 100$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

একে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে

এখানে, $a > b$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{100-25}{10}}$

$= \sqrt{\frac{75}{100}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae\ , 0)$

$= (\pm 10.\frac{\sqrt{3}}{2}\ , 0) = (\pm 5\sqrt{3}, 0)$

(c) p এর মান কত হলে $4x^2 + py^2 = 80$ উপবৃত্তটি (0, ± 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে? উপবৃত্তটির অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য ও উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।[য.'০৮; রা.'১১]

সমাধান ঃ $4x^2 + py^2 = 80 \cdots (1)$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে,

$4.0 + p(\pm 4)^2 = 80 \Rightarrow 16p^2 = 80 \therefore p = 5$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $4x^2 + 5y^2 = 80$

$\Rightarrow \frac{x^2}{(2\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$. একে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই,

$a = 2\sqrt{5}\ , b = 4.$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2.2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ এবং

ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2.4 = 8$

এখানে , $a > b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{20-16}{20}}$

$= \sqrt{\frac{4}{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

3(d) উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে **(2,2)** ও **(3 , 1)** বিন্দুগামী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। এর উৎকেন্দ্রিকতাও নির্ণয় কর।

[ঢা'০২; য. '০৬; ব. '০৬; চ. '০৬,'০৮]

সমাধান : মনে করি, উপবৃত্তটির সমীকরণ,
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ...... (i)
(i) উপবৃত্তটি (2, 2) ও (3 , 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে, $\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \cdots$(ii) এবং $\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \cdots$ ... (iii)

$4\times$(iii) − (ii) $\Rightarrow \frac{36}{a^2}-\frac{4}{a^2}=4-1$

$\Rightarrow \frac{32}{a^2}=3 \quad \therefore a^2=\frac{32}{3}$

(iii) হতে আমরা পাই, $\frac{27}{32}+\frac{1}{b^2}=1$

$\Rightarrow \frac{1}{b^2}=1-\frac{27}{32}=\frac{5}{32} \quad \therefore b^2=\frac{32}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{3x^2}{32}+\frac{5y^2}{32}=1$

$\Rightarrow 3x^2+5y^2=32$

$a^2>b^2$ বলে,

উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{32}{5}\times\frac{3}{32}}$

$=\sqrt{1-\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}$ (Ans)

3(e) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{p}=1$ উপবৃত্তটি (4 , 6) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে p এর মান নির্ণয় কর। ইহার উৎকেন্দ্রিকতা ও উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। [চ.'০৭]

সমাধান : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{p}=1 \cdots(1)$ উপবৃত্তটি (4 , 6) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। $\therefore \frac{16}{25}+\frac{36}{p}=1$

$\Rightarrow \frac{36}{p}=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}\Rightarrow p=\frac{36.25}{9}=100$

(1) এ p এর মান বসিয়ে পাই, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$

একে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=5, b=10$.

এখানে, $a<b$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{100-25}{100}}$

$=\sqrt{\frac{75}{100}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(0, \pm be)$

$=(0, \pm 10.\frac{\sqrt{3}}{2})=(0, \pm 5\sqrt{3})$

4.(a) উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে $(1, \sqrt{6})$ ও (3, 0) বিন্দুগামী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০২; সি.'০৭]

সমাধান : ধরি, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

এ উপবৃত্তটি $(1, \sqrt{6})$ ও (3, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে, $\frac{1}{a^2}+\frac{6}{b^2}=1\cdots$(i) এবং $\frac{9}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1$

$\Rightarrow a^2=9$

(i) এ a^2 এর মান বসিয়ে পাই, $\frac{1}{9}+\frac{6}{b^2}=1$

$\Rightarrow \frac{6}{b^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\Rightarrow b^2=\frac{6\times 9}{8}=\frac{27}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{27/4}=1$

$\Rightarrow 3x^2+4y^2=27$ (Ans.)

4(b) উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে (2, 4) ও $(5, \sqrt{2})$ বিন্দুগামী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা '০৩]

সমাধান ঃ ধরি, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

এ উপবৃত্তটি $(2, 4)$ ও $(5, \sqrt{2})$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে, $\frac{4}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \cdots$(i)এবং $\frac{25}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1 \cdots$(ii)

(ii) $-8\times$ (i) $\Rightarrow \frac{4}{a^2}-\frac{200}{a^2}=1-8$

$\Rightarrow \frac{4-200}{a^2}=-7 \Rightarrow a^2=\frac{196}{7}=28$

(ii) হতে আমরা পাই, $\frac{25}{28}+\frac{2}{b^2}=1$

$\Rightarrow \frac{2}{b^2}=1-\frac{25}{28}=\frac{3}{28}$ $\therefore$ $b^2=\frac{56}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{56/3}=1$

$\Rightarrow 2x^2+3y^2=56$ (Ans.)

5(a) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র **(-2 , 3), দিকাক্ষ $x-y+7=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $1/\sqrt{3}$.** [রা.'০২; ঢা.'০৩; চ.'০৮; য.'১৩]

সমাধান ঃ $(-2 , 3)$ উপকেন্দ্র, $x-y+7=0$ দিকাক্ষ এবং $\frac{1}{\sqrt{3}}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x+2)^2+(y-3)^2=(\frac{1}{\sqrt{3}})^2\frac{(x-y+7)^2}{1^2+1^2}$$

$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ সূত্রের সাহায্যে]

$$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9$$
$$=\frac{x^2+y^2+49-2xy+14x-14y}{6}$$

$\Rightarrow 6(x^2+y^2+4x-6y+13)=x^2+y^2-2xy+14x-14y+49$

$\Rightarrow 6x^2+6y^2+24x-36y+78$
$=x^2+y^2-2xy+14x-14y+49$

$\therefore$ $5x^2+5y^2+2xy+10x-22y+29=0$

5(b) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র **(− 1 , 1),** দিকাক্ষ $x-y+3=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা **1/2 .** [রা. '০২; ঢা. '০৩; চ. '০৮]

সমাধান ঃ $(-1 , 1)$ উপকেন্দ্র, $x-y+3=0$ দিকাক্ষ এবং $\frac{1}{2}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x+1)^2+(y-1)^2=(\frac{1}{2})^2\frac{(x-y+3)^2}{1^2+1^2}$$

$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ সূত্রের সাহায্যে]

$$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1$$
$$=\frac{x^2+y^2+9-2xy+6x-6y}{8}$$

$\Rightarrow 8(x^2+y^2+2x-2y+2)=x^2+y^2-2xy+6x-6y+9$

$\Rightarrow 8x^2+8y^2+16x-16y+16$
$=x^2+y^2-2xy+6x-6y+9$

$\therefore$ $7x^2+7y^2+2xy+10x-10y+7=0$

5(c) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র **(0,2), দিকাক্ষ $y+4=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা 1/2 .** [সি.'০৩; কু.'০৮]

সমাধান ঃ $(0 , 2)$ উপকেন্দ্র, $y+4=0$ দিকাক্ষ এবং $\frac{1}{2}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-0)^2+(y-2)^2=(\frac{1}{2})^2\frac{(y+4)^2}{1^2}$$

$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ সূত্রের সাহায্যে]

$$\Rightarrow x^2+y^2-4y+4=\frac{y^2+8y+16}{4}$$
$$\Rightarrow 4x^2+4y^2-16y+16=y^2+8y+16$$
$$\therefore\ 4x^2+3y^2-24y=0 \text{ (Ans.)}$$

5(d) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(1,-1)$, দিকাক্ষ $x-y+2=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $1/\sqrt{2}$ । ইহার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [চ.'০৬]

সমাধান : $(1,-1)$ উপকেন্দ্র, $x-y+2=0$ দিকাক্ষ এবং $\frac{1}{\sqrt{2}}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-1)^2+(y+1)^2=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\frac{(x-y+2)^2}{1^2+1^2}$$

$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ সূত্রের সাহায্যে]

$$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1=\frac{x^2+y^2+4-2xy+4x-4y}{4}$$
$$\Rightarrow 4(x^2+y^2-2x+2y+2)=x^2+y^2-2xy+4x-4y+4$$
$$\Rightarrow 4x^2+4y^2-8x+8y+8=x^2+y^2-2xy+4x-4y+4$$
$$\therefore\ 3x^2+3y^2+2xy+12x+12y+4=0$$

দ্বিতীয় অংশ : উৎকেন্দ্রিকতা, $e=1/\sqrt{2}$

উপকেন্দ্র $(1,-1)$ হতে দিকাক্ষ $x-y+2=0$ এর লম্ব দূরত্ব $=\frac{|1+1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=2e\times$ উপকেন্দ্র হতে দিকাক্ষের লম্ব দূরত্ব $=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{4}{\sqrt{2}}=4$ একক।

5(e) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(-2, 3)$, দিকাক্ষ $2x+y-3=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $1/\sqrt{3}$. [সি.'০৫]

সমাধান : $(-2,3)$ উপকেন্দ্র, $2x+y-3=0$ দিকাক্ষ এবং $\frac{1}{\sqrt{3}}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x+2)^2+(y-3)^2=(\frac{1}{\sqrt{3}})^2\frac{(2x+y-3)^2}{2^2+1^2}$$

$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ সূত্রের সাহায্যে]

$$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9=\frac{4x^2+y^2+9+4xy-12x-6y}{15}$$
$$\Rightarrow 15(x^2+y^2+4x-6y+13)=4x^2+y^2+4xy-12x-6y+9$$
$$\Rightarrow 15x^2+15y^2+60x-90y+195=4x^2+y^2+4xy-12x-6y+9$$
$$\therefore 11x^2+14y^2-4xy+72x-84y+186=0$$

5(f) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(2, 1)$, দিকাক্ষ $2x+y-3=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $1/\sqrt{3}$. [চ.'০১; ঢা.'০১]

সমাধান : $(2,1)$ উপকেন্দ্র, $2x+y-3=0$ দিকাক্ষ এবং $\frac{1}{\sqrt{3}}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-2)^2+(y-1)^2=(\frac{1}{\sqrt{3}})^2\frac{(2x+y-3)^2}{2^2+1^2}$$

$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ সূত্রের সাহায্যে]

$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1$$

$$= \frac{4x^2+y^2+9+4xy-12x-6y}{15}$$

$\Rightarrow 15(x^2+y^2-4x-2y+5) = 4x^2+y^2+4xy-12x-6y+9$

$\Rightarrow 15x^2+15y^2-60x-30y+75$
$= 4x^2+y^2+4xy-12x-6y+9$

$\therefore 11x^2+14y^2-4xy+48x-24y+66=0$

5(g) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র মূলবিন্দু, দিকাক্ষ $x=2$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা 4/5 ।

[কু.'০৪; মা.বো.'০৫]

সমাধান ঃ উপকেন্দ্র মূলবিন্দু (0 , 0), দিকাক্ষ $x=2$ অর্থাৎ $x-2=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{4}{5}$ বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-0)^2+(y-0)^2 = (\frac{4}{5})^2\frac{(x-2)^2}{1^2}$$

$$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow x^2+y^2 = \frac{16}{25}(x^2-4x+4)$

$\Rightarrow 25x^2+25y^2 = 16x^2-64x+64$

$\therefore 9x^2+25y^2+64x-64=0$

6(a) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক (0, 1) , (0, – 1) এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য এককের সমান।

সমাধান ঃ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি (0, 1) ও (0, – 1) এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{0+0}{2}, \frac{1-1}{2}) = (0,0)$ এবং উপকেন্দ্র দুইটির ভুজ = 0.

$\therefore$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ y- অক্ষ এবং ক্ষুদ্র অক্ষ x-অক্ষ।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, b>a

প্রশ্নমতে, ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

এবং উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব , $2be = |1+1| = 2$

$\Rightarrow be = 1 \Rightarrow b^2e^2 = 1$

এখন b>a এর জন্য , $a^2 = b^2(1-e^2)$

$\Rightarrow a^2 = b^2-b^2e^2 \Rightarrow \frac{1}{4} = b^2-1$

$\Rightarrow b^2 = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{1/4}+\frac{y^2}{5/4}=1$

$\Rightarrow 4x^2+\frac{4y^2}{5}=1$ (Ans.)

6(b) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক (1, 0) ও (– 1, 0) এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 3 একক । [কু.'১১]

সমাধান ঃ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি (1, 0) ও (–1, 0) এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{1-1}{2}, \frac{0+0}{2}) = (0,0)$ এবং উপকেন্দ্র দুইটির কোটি = 0.

$\therefore$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষ এবং ক্ষুদ্র অক্ষ y-অক্ষ ।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, a>b

প্রশ্নমতে, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $\frac{2b^2}{a}=3$

$\Rightarrow b^2 = \frac{3}{2}a \cdots\cdots(1)$ এবং

উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব , $2ae = |1+1| = 2$

$\Rightarrow a = \frac{1}{e} \cdots\cdots(2)$

এখন a >b এর জন্য, $b^2 = a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow \frac{3}{2}a = a^2(1-e^2)$ $[\because b^2 = \frac{3a}{2}]$

$\Rightarrow 3 = 2a(1-e^2)$

$\Rightarrow 3 = 2\frac{1}{e}(1-e^2)$ $[\because a = \frac{1}{e}]$

$\Rightarrow 3e = 2 - 2e^2 \Rightarrow 2e^2 + 3e - 2 = 0$

$\Rightarrow 2e^2 + 4e - e - 2 = 0$

$\Rightarrow 2e(e+2) - 1(e+2) = 0$

$\Rightarrow (e+2)(2e-1) = 0$

$\therefore$ $e = \frac{1}{2}$ এবং অন্য মান $e = -2$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore$ $a = \frac{1}{e} = 2$ এবং $b^2 = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}.2 = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

6(c) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটি $S'(2,0)$ ও $S(-2, 0)$ এবং যা $P(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2})$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [রুয়েট' ০৫-০৬]

সমাধান : উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি $(2, 0)$ ও $(-2, 0)$ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{2-2}{2}, \frac{0+0}{2}) = (0, 0)$ এবং উপকেন্দ্র দুইটির কোটি $= 0$.

$\therefore$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষ এবং ক্ষুদ্র অক্ষ y-অক্ষ।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $a > b$.

$P(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2})$ বিন্দুটি উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

$\therefore$ $S'P + SP =$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a$

$$\Rightarrow \sqrt{(2-\frac{3}{2})^2 + (0-\frac{\sqrt{15}}{2})^2} + \sqrt{(-2-\frac{3}{2})^2 + (0-\frac{\sqrt{15}}{2})^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{15}{4}} + \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{15}{4}} = 2a$$

$$\Rightarrow 2a = \sqrt{\frac{16}{4}} + \sqrt{\frac{64}{4}} = 2 + 4 \Rightarrow a = 3$$

উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব, $2ae = |2 + 2|$

$\Rightarrow 2.3.e = 4 \Rightarrow e = \frac{2}{3}$

আবার, $a > b$ এর জন্য, $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$\Rightarrow b^2 = 9(1 - \frac{4}{9}) = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

6(d) উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $(\pm 2, 0)$ এবং যার বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 8 একক। [চ.'০৩; দি.'১১]

সমাধান : ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots$ $\cdots (1)$, যেখানে $a > b$

(1) উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a$ এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $2a = 8$ $\therefore a = 4$ এবং $\pm ae = \pm 2$

$\Rightarrow ae = 2 \Rightarrow 4e = 2 \therefore e = \frac{1}{2}$

আবার, $a>b$ এর জন্য, $b^2 = a^2(1-e^2) = 16(1-\frac{1}{4})$ $= 12$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 0$

(e) উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ বিবেচনা করে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 4)$ এর উৎকেন্দ্রিকতা $= 4/5$. [চ.'১০]

সমাধান ঃ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি (0, 4) ও (0, – 4) এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক = $(\frac{0+0}{2}, \frac{4-4}{2}) = (0, 0)$ এবং উপকেন্দ্র দুইটির ভুজ = 0.

$\therefore$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ y- অক্ষ এবং ক্ষুদ্র অক্ষ x-অক্ষ।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, b>a

প্রশ্নমতে, উৎকেন্দ্রিকতা e = 4/5

উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব , 2be = | 4 + 4 | = 8

$\Rightarrow b\times\frac{4}{5}=4 \Rightarrow b=5$

এখন b > a এর জন্য, $a^2 = b^2(1-e^2)$

$\Rightarrow a^2 = 25(1-\frac{16}{25}) = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

7. (a) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক (–1, – 1) ও (1, 1) এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{3}$ একক। [বুয়েট'০০-০১]

সমাধান ঃ ধরি, উপবৃত্তের ফোকাস দুইটি S(–1, – 1) ও S′(1, 1) এবং উপবৃত্তটির উপর P(x , y) যেকোনো একটি বিন্দু ।

উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, SP + S′P = বৃহৎ অক্ষ

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+2x+1+y^2+2y+1} = 2\sqrt{3}-\sqrt{x^2-2x+1+y^2-2y+1}$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$$x^2+2x+y^2+2y+2 = 12 + x^2-2x+y^2 -2y+2-4\sqrt{3}\sqrt{x^2-2x+y^2-2y+2}$$

$$\Rightarrow 4x+4y-12 = -4\sqrt{3}\sqrt{x^2-2x+y^2-2y+2}$$

$$\Rightarrow x+y-3 = -\sqrt{3}\sqrt{x^2-2x+y^2-2y+2}$$

আবার, উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$$x^2+y^2+9-2xy-6x-6y = 3(x^2-2x+y^2-2y+2)$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+9-2xy-5x-6y = 3x^2-6x+3y^2-6y+6$$

$\therefore$ $2x^2+2y^2-2xy-3=0$; এটিই নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ।

7(b) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক **(1,– 1)** , অনুরূপ দিকাক্ষ $x-y-4=0$ এবং যা **(1 , 1)** বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে । [বুয়েট'০৩-০৪]

সমাধান ঃ ধরি, উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা e.

(1 , – 1) উপকেন্দ্র, $x-y-4=0$ দিকাক্ষ এবং e উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-1)^2+(y+1)^2 = e^2\frac{(x-y-4)^2}{1^2+1^2} \cdots(1)$$

(1) উপবৃত্তটি (1 , 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে ।

$$\therefore (1-1)^2+(1+1)^2 = e^2\frac{(1-1-4)^2}{2}$$

$$\Rightarrow 4.2 = e^2.16 \Rightarrow e^2 = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ (1) এ এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2-2x+1+y^2+2y+1 = \frac{1}{4}(x^2+y^2+16-2xy-8x+8y)$$

$$\Rightarrow 4x^2-8x+4y^2+8y+8 = x^2+y^2+16-2xy-8x+8y$$

$$\therefore 3x^2+3y^2+2xy-8=0$$

8.(a) বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার

উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{4}{5}$ এবং যা $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [সি.'০১; চ.'০৭; ঢা.'০৮,'১৩; য.'০৮,'১০]

সমাধান : ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots \cdots (1), \text{ যেখানে } a>b$$

(1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e=\frac{4}{5}$

$a>b$ এর জন্য, $b^2=a^2(1-e^2)$

$$\Rightarrow b^2=a^2(1-\frac{16}{25})=\frac{9}{25}a^2 \cdots (2)$$

আবার (1) উপবৃত্তটি $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দুগামী।

$$\therefore \frac{100}{9a^2}+\frac{5}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{100}{9a^2}+\frac{5}{\frac{9a^2}{25}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{100+125}{9a^2}=1 \Rightarrow a^2=\frac{225}{9}=25$$

$\therefore$ (2) হতে পাই, $b^2=\frac{9}{25}a^2=\frac{9}{25}.25=9$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

8(b) অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্র অক্ষের অর্ধেক এবং যা $(0, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান : ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots \cdots (1), \text{ যেখানে } a>b$$

(1) উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}$

শর্তমতে, $\frac{2b^2}{a}=\frac{1}{2}(2b) \Rightarrow 2b=a \cdots (2)$

আবার (1) উপবৃত্তটি $(0, 1)$ বিন্দুগামী।

$$\therefore \frac{0}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=1$$

$$\therefore a^2=4b^2=4.1=4$$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

$$\Rightarrow x^2+4y^2=4$$

8(c) অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $1/3$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 8 একক। [ঢা. '০৫,'১১; চ. '০৫,'১৩; রা. '০৬,'১১; মা.বো.'০৩; দি.'১০,'১৩; য.'১১]

সমাধান : ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots \cdots (1), \text{ যেখানে } a>b$$

(1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e=\frac{1}{3}$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $\frac{2b^2}{a}=8$

$$\Rightarrow b^2=4a \cdots \cdots (2)$$

$a>b$ এর জন্য, $b^2=a^2(1-e^2)$

$$\Rightarrow 4a=a^2(1-\frac{1}{9}) \Rightarrow 4=a.\frac{8}{9} \quad \therefore a=\frac{9}{2}$$

(2) থেকে পাই, $b^2=4a=4.\frac{9}{2}=18$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{81/4}+\frac{y^2}{18}=1$

$$\therefore \frac{4x^2}{81}+\frac{y^2}{18}=1$$

8(d) অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $2/3$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক।

[চ.'০২; বুয়েট'০৫-'০৬]

সমাধান : ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে

x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $a > b$

(1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e=\frac{2}{3}$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $\frac{2b^2}{a}=5$

$\Rightarrow b^2=\frac{5}{2}a \cdots \cdots (2)$

$a > b$ এর জন্য, $b^2=a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow \frac{5}{2}a = a^2(1-\frac{4}{9}) \Rightarrow \frac{5}{2}=a.\frac{5}{9} \quad \therefore a=\frac{9}{2}$

(2) থেকে পাই, $b^2=\frac{5}{2}a=\frac{5}{2}.\frac{9}{2}=\frac{45}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{81/4}+\frac{y^2}{45/4}=1$

$\Rightarrow \frac{4x^2}{81}+\frac{4y^2}{45}=1 \quad \therefore 20x^2+36y^2=405$

8(e) অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $1/3$ এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 12 একক। [কু.'০১,'১৩; য.'০৭]

সমাধান ঃ ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $a > b$

(1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e=\frac{1}{3}$ এবং

বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য, $2a=12 \quad \therefore a=6$

$a > b$ এর জন্য, $b^2=a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow b^2=36(1-\frac{1}{9})=36.\frac{8}{9}=32$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$

(f) অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $1/\sqrt{2}$ এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য 4 একক। [মা.বো. '০৪,'০৬]

সমাধান ঃ ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $a > b$

(1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং

ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য, $2b=4 \quad \therefore b=2$

$a > b$ এর জন্য, $b^2=a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow 4=a^2(1-\frac{1}{2}) \Rightarrow a^2=8$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

8(g) বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 8 এবং দিকাক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 18 । [রা.'০২,'০৩; প্র.ভ.প. '৯৭]

সমাধান ঃ ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $a > b$

(1) উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $=2ae$

এবং দিকাক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{2a}{e}$

প্রশ্নমতে, $2ae=8 \Rightarrow ae=4 \cdots \cdots (2)$ এবং

$\frac{2a}{e}=18 \Rightarrow \frac{a}{e}=9 \cdots (3)$

(2) কে (3) দ্বারা গুণ করে পাই, $a^2=36$

$a > b$ এর জন্য, $b^2=a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow b^2=a^2-a^2e^2=36-16=20$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{20} = 1$

$\therefore \; 5x^2 + 9y^2 = 180$

9(a) একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য তার ক্ষুদ্র অক্ষের অর্ধেক। তার উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, a, b এবং e যথাক্রমে উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহৎ অক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্র অক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা।

$\therefore$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2b^2}{a}$ একক

এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2b একক।

প্রশ্নমতে, $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{1}{2}(2b) \Rightarrow 2b^2 = ab$

$\therefore \; a = 2b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{(2b)^2}}$

$= \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{4b^2}} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (Ans.)

9(b) একটি উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য তার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্বের সমান এবং তার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 10 একক। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা ও সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'১০; বুয়েট'০৯-১০]

সমাধান : ধরি, a, b এবং e যথাক্রমে উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহৎ অক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্র অক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা।

$\therefore$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্বের = 2ae একক, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2b^2}{a}$ একক এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2b একক।

প্রশ্নমতে, $2b = 2ae \Rightarrow b = ae \cdots (1)$ এবং

$\dfrac{2b^2}{a} = 10 \Rightarrow b^2 = 5a \cdots (2)$

(2) কে (1) দ্বারা ভাগ করে পাই, $b = \dfrac{5}{e} \cdots (3)$

$a > b$ এর জন্য, $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$\Rightarrow a^2e^2 = a^2(1 - e^2) \quad [\because b = ae]$

$\Rightarrow e^2 = 1 - e^2 \Rightarrow 2e^2 = 1 \therefore e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) হতে পাই, $b = \dfrac{5}{e} = 5\sqrt{2}$ এবং

(2) হতে পাই, $(5\sqrt{2})^2 = 5a \Rightarrow a = 10$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{(10)^2} + \dfrac{y^2}{(5\sqrt{2})^2} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{50} = 1 \quad \therefore x^2 + 2y^2 = 100$

9(c) কোনো উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যকার দূরত্ব 16 ইঞ্চি এবং তার উৎকেন্দ্রিকতা 3/5; অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ব.'১১]

সমাধান : ধরি, উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহৎ অক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্র অক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা যথাক্রমে a ইঞ্চি, b ইঞ্চি এবং e।

$\therefore$ উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= (\dfrac{a}{e} - ae)$ ইঞ্চি.

প্রশ্নমতে, উৎকেন্দ্রিকতা $e = \dfrac{3}{5}$ এবং

$\dfrac{a}{e} - ae = 16 \Rightarrow a(\dfrac{5}{3} - \dfrac{3}{5}) = 16$

$\Rightarrow a\dfrac{25 - 9}{15} = 16 \therefore a = 15$

এখন $a > b$ এর জন্য, $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$\Rightarrow b^2 = 225\,(1 - \dfrac{9}{25}) = 9 \times 16 \therefore b = 12$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2a ইঞ্চি = 30 ইঞ্চি এবং

ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2 b ইঞ্চি = 24 ইঞ্চি

9(d) কোনো উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা শূন্য হলে দেখাও যে, উপবৃত্তটি বৃত্তে পর্যবসিত হবে।

সমাধান ঃ ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $a > b$.

$a > b$ এর জন্য, (1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

এখন, (1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = 0$ হলে,

$$\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = 0 \Rightarrow 1-\frac{b^2}{a^2} = 0 \quad \therefore b^2 = a^2$$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \therefore x^2+y^2=a^2$

ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ। অতএব, কোন উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা শূন্য হলে, উপবৃত্তটি বৃত্তে পর্যবসিত হয়।

10(a) একটি উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির উপর অবস্থিত। উপবৃত্তটি $\frac{x}{9}+\frac{y}{4}=1$ রেখাকে x-অক্ষের উপর এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ রেখাকে y-অক্ষের উপর ছেদ করে । তার সমীকরণ, উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [বুয়েট'১১-১২]

সমাধান: $\frac{x}{9}+\frac{y}{4}=1$ রেখাটি x-অক্ষকে $(9,0)$ বিন্দুতে এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ রেখাটি y-অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, যা $(9, 0)$ ও $(0, 3)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$$\therefore \frac{9^2}{a^2}+0=1 \Rightarrow a^2 = 81 \text{ এবং}$$

$$0+\frac{3^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=9.$$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$

এখানে, $a > b$

$$\therefore \text{ উৎকেন্দ্রিকতা } e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{81-9}{81}}$$

$$=\frac{\sqrt{72}}{9}=\frac{6\sqrt{2}}{9}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0)$

$$=(\pm 9\times\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0)=(\pm 6\sqrt{2}, 0)$$

10(b) একটি উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির উপর অবস্থিত। উপবৃত্তটি $5x+9y=45$ রেখাকে x-অক্ষের উপর এবং $7x+5y=36$ রেখাকে y-অক্ষের উপর ছেদ করে । তার উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৭-০৮]

সমাধান: $5x+9y=45$ রেখাটি x-অক্ষকে $(9, 0)$ বিন্দুতে এবং $7x+5y=36$ রেখাটি y-অক্ষকে $(0, 36/5)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, যা $(9, 0)$ ও $(0, 36/5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$$\therefore \frac{9^2}{a^2}+0=1 \Rightarrow a^2=81 \text{ এবং}$$

$$0+\frac{36^2/5^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=\frac{1296}{25}$$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{1296/25}=1$

এখানে, $a > b$

$$\therefore \text{ উৎকেন্দ্রিকতা } e=\sqrt{\frac{81-1295/25}{81}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$$

এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $= (\pm 9 \times \frac{3}{5}, 0)$

$$= (\pm \frac{27}{5}, 0)$$

(c) একটি উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির উপর অবস্থিত। $3x + 2y - 9 = 0$ সরলরেখাটি উপবৃত্তটিকে অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদ করে। উপবৃত্তটির সমীকরণ এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[টেক্সটাইল'০৪-০৫]

সমাধানঃ $3x + 2y - 9 = 0$ রেখাটি x-অক্ষকে $(3, 0)$ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে $(0, 9/2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, যা $(3, 0)$ ও $(0, 9/2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore \frac{3^2}{a^2} + 0 = 1 \Rightarrow a^2 = 9$ এবং

$0 + \frac{9^2/2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{81}{4}$.

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{81/4} = 1$

$\Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 81$

এখানে, $b > a$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{\frac{81}{4} - 9}{81/4}}$

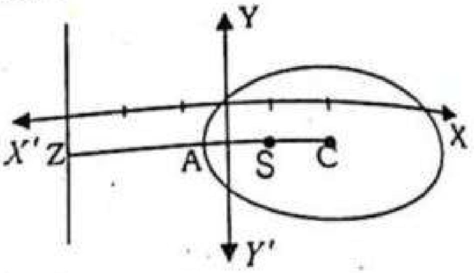
$$= \sqrt{\frac{45}{81}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $= (0, \pm be)$

$$= (\pm \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{3}, 0) = (\pm \frac{3\sqrt{5}}{2}, 0)$$

12.(a) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল, একটি উপকেন্দ্র **(1, –1)** এবং কেন্দ্র **(2, – 1)** হতে উপকেন্দ্রটির অনুরূপ দিকাক্ষের দূরত্ব **5** একক।

সমাধান ঃ



ধরি, উপবৃত্তটির কেন্দ্র $C(2, -1)$, উপকেন্দ্র $S(1, -1)$, শীর্ষ A এবং কেন্দ্র C হতে অনুরূপ দিকাক্ষের দূরত্ব $CZ = 5$.

$\therefore CS = |1 - 2| = 1$

বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল বলে,

$CA = a, CS = ae, CZ = \frac{a}{e}$

$\therefore CS \,.\, CZ = ae. \frac{a}{e}$

$\Rightarrow 1.5 = a^2 \therefore a^2 = 5$

আবার, $b^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2 - CS^2$

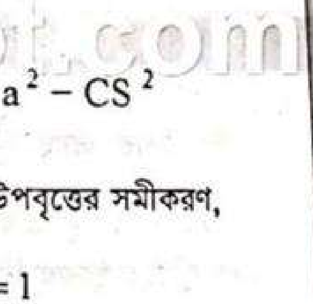
$$= 5 - 1^2 = 4$$

$\therefore (2, -1)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$$

$\therefore \frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ (Ans.)

12. (b) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার বৃহৎ অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল, একটি উপকেন্দ্র **(2, 3)** এবং কেন্দ্র **(2 , 1)** হতে উপকেন্দ্রটির অনুরূপ দিকাক্ষের দূরত্ব 4 একক।



সমাধান ঃ ধরি, উপবৃত্তটির কেন্দ্র $C(2,1)$, উপকেন্দ্র $S(2, 3)$, শীর্ষ B এবং কেন্দ্র C হতে অনুরূপ দিকাক্ষের দূরত্ব $CZ = 4$.

$\therefore CS = |1 - 3| = 2$

বৃহৎ অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল বলে, $CB = b$, $CS = be$, $CZ = \dfrac{b}{e}$

$\therefore$ $CS \,.\, CZ = be.\, \dfrac{b}{e}$

$\Rightarrow 2.\,4 = b^2 \quad \therefore b^2 = 8$

আবার, $a^2 = b^2 - b^2e^2 = b^2 - CS^2$

$= 8 - 2^2 = 4$

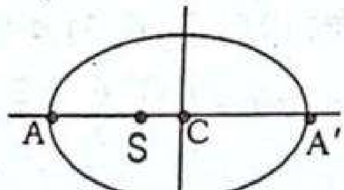
$\therefore$ (2 , 1) কেন্দ্র বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1 \text{ (Ans.)}$$

12(c) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক **(3, – 1)** ও **(1, – 1)** এবং যেকোনো উপকেন্দ্র হতে শীর্ষদ্বয়ের দূরত্বের গুণফল **4** একক।

সমাধান ঃ ধরি, উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(3, -1)$ ও $S'(1, -1)$ এর মধ্যবিন্দু $C = (\dfrac{3+1}{2}, \dfrac{-1-1}{2})$ $= (2, -1)$ এবং শীর্ষদ্বয় A ও A'.



যেহেতু উপকেন্দ্রদ্বয়ের কোটি অভিন্ন ; সুতরাং উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল। a , b এবং e যথাক্রমে উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহৎ অক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্র অক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা হলে,

$CA = CA' = a$, $CS = ae$

$\therefore$ $SA = CA - CS = a - ae$ এবং

$SA' = CA' + CS = a + ae$

প্রশ্নমতে, $SA.SA' = 4$

এখন, $b^2 = a^2 - a^2e^2 = (a - ae)(a + ae)$

$= SA.SA' = 4 \;\therefore b^2 = 4$

$\therefore$ আবার, $b^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2 - CS^2$

$\Rightarrow 4 = a^2 - \sqrt{(2-3)^2 + (-1+1)^2}$

$\Rightarrow 4 = a^2 - 1 \quad \therefore a^2 = 5$

$\therefore$ (2 , – 1) কেন্দ্র বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \text{ (Ans.)}$$

12(d) দুইটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল, ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য **6** একক এবং উপকেন্দ্র **(– 2, 3)** ও এর অনুরূপ শীর্ষের মধ্যকার দূরত্ব **1** একক।

সমাধান ঃ ধরি, বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে, ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $2b = 6 \;\therefore b = 3$

উপকেন্দ্র ও অনুরূপ শীর্ষের মধ্যকার দূরত্ব $a - ae = 1$

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{1-e} \cdots\cdots (2)$

এখন, $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$\Rightarrow 9 = \dfrac{(1-e)(1+e)}{(1-e)^2} = \dfrac{1+e}{1-e}$

$\Rightarrow 9 - 9e = 1 + e \Rightarrow 10e = 8 \;\therefore e = \dfrac{4}{5}$

$\therefore$ $(2) \Rightarrow a = \dfrac{1}{1-4/5} = 5$

আবার, (1) উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $(\pm ae + \alpha, \beta)$

$\therefore$ $\pm ae + \alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -2 \pm ae$

$\Rightarrow \alpha = -2 \pm 5.\dfrac{4}{5} = -2 \pm 4$

$\therefore$ $\alpha = 2, -6$ এবং $\beta = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^3}{9}=1 \text{ এবং}$$

$$\frac{(x+6)^2}{25}+\frac{(y-3)^3}{9}=1$$

13. (a) দেখাও যে, $x - y = 5$ সরলরেখা $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে।

[ঢা.'০৩,'০৪; চ.'০৪]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত রেখাটি $y = x - 5 \cdots (1)$ এবং উপবৃত্তটি

$9x^2 + 16y^2 = 144 \cdots (2)$

(2) এ $y = x - 5$ বসিয়ে পাই,

$9x^2 + 16(x-5)^2 = 144$

$\Rightarrow 9x^2 + 16(x^2 - 10x + 25) = 144$

$\Rightarrow 25x^2 - 160x + 400 - 144 = 0$

$\Rightarrow 25x^2 - 160x + 256 = 0$

$\Rightarrow (5x)^2 - 2.5x.16 + 16^2 = 0$

$\Rightarrow (5x-16)^2 = 0 \therefore x = \frac{16}{5}, \frac{16}{5}$

যেহেতু x এর মান দুইটি সমান, সুতরাং প্রদত্ত রেখাটি উপবৃত্তকে স্পর্শ করবে।

(1) এ $x = \frac{16}{5}$ বসিয়ে পাই, $y = \frac{16}{5} - 5 = -\frac{9}{5}$

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{16}{5}, -\frac{9}{5})$

13(b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তের একটি জ্যা $(1, -2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় ; জ্যাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ অর্থাৎ $9x^2 + 16y^2 = 144$

উপবৃত্তের যে জ্যা $(1, -2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার সমীকরণ,

$9.x.1 + 16.y.(-2) = 9.1^2 + 16.(-2)^2$

$\Rightarrow 9x - 32y = 9 + 64$

$\therefore 9x - 32y = 73$ (Ans.)

13(c) একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু এবং $9(x-2)^2 + 25(y-3)^2 = 225$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়। [প্র.ভ.প.'৯৬]

প্রদত্ত উপবৃত্ত $9(x-2)^2 + 25(y-3)^2 = 225$

অর্থাৎ $\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1 \cdots \cdots \cdots (1)$ কে

$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$\alpha = 2, \beta = 3, a = 5, b = 3.$

$a > b$ এর জন্য, উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$

$= \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \frac{4}{5}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $= (ae + \alpha, \beta)$

$= (\pm 5.\frac{4}{5} + 2, 3) = (\pm 4 + 2, 3)$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয় $(6, 3)$ এবং $(-2, 3)$

$\therefore$ মূলবিন্দু $(0,0)$, $(6, 3)$ ও $(-2, 3)$ দ্বারা গঠিত

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক।

$= \frac{1}{2}|0 + 18 + 0 - 0 + 6 - 0|$ বর্গ একক।

$= 12$ বর্গ একক।

(d) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তে $y = mx + c$ রেখা স্পর্শক হলে, প্রমাণ কর যে, $c^2 = a^2m^2 + b^2$.

প্রমাণ ঃ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ অর্থাৎ $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

উপবৃত্তের সমীকরণে $y = mx + c$ বসিয়ে পাই,

$b^2x^2 + a^2(mx+c)^2 = a^2b^2$

$\Rightarrow b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2mxc + c^2) = a^2b^2$

$\Rightarrow (b^2 + a^2 m^2) x^2 + 2a^2 mcx + a^2c^2 - a^2 b^2 = 0 \cdots \cdots (1)$, যা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। অতএব, এ সমীকরণ থেকে x-এর দুইটি মান পাওয়া যাবে।

প্রদত্ত রেখাটি পরাবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি x-এর মান দুইটি সমান হয়, অর্থাৎ (1) সমীকরণের নিশ্চায়ক শূন্য হয়।

$\therefore (2a^2 mc)^2 - 4.(b^2 + a^2 m^2)(a^2c^2 - a^2b^2) = 0$

$\Rightarrow 4a^4 m^2 c^2 - 4a^2 b^2 c^2 + 4a^2 b^4 - 4a^4 m^2 c^2 + 4a^4 m^2 b^2 = 0$

$\Rightarrow -4a^2 b^2 c^2 + 4a^2 b^4 + 4a^4 m^2 b^2 = 0$

$\Rightarrow -c^2 + b^2 + a^2 m^2 = 0$

$\therefore c^2 = a^2 m^2 + b^2$ (Showed)

15. লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{8} = 1$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{8} = 1$ একটি উপবৃত্ত যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (2 , 1).

এখন, $\dfrac{(y-1)^2}{8} = 1 - \dfrac{(x-2)^2}{4}$

$\Rightarrow (y-1)^2 = 8\dfrac{4 - x^2 + 4x - 4}{4} = 2x(4-x)$

$\Rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{2x(4-x)}$

$\Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{2x(4-x)}$; যেখানে , $x(4-x) \geq 0$

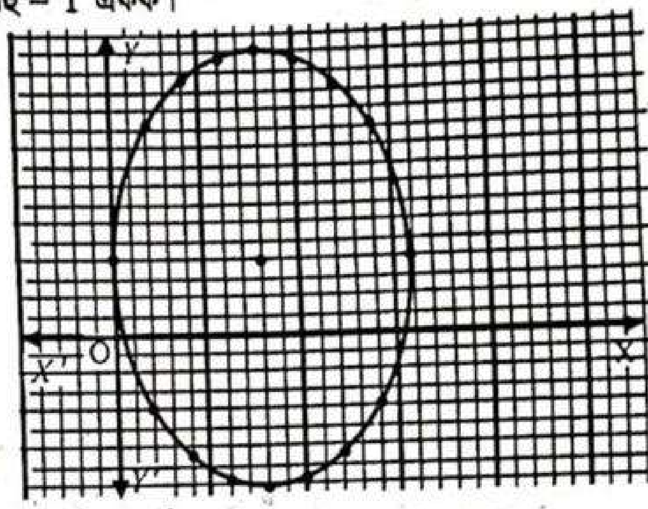
$\Rightarrow x(x-4) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$

নিচের তালিকায় x $(0 \leq x \leq 4)$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = 1 \pm \sqrt{2x(x-4)}$ এর প্রতিবূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	0.5	0.5	1	1	1.5
y	1	2.87	-0.87	3.45	-1.45	3.74
x	1.5	2	2	3	3	4
y	-1.74	3.83	-1.83	3.45	-1.45	0

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 4 বাহু = 1 একক।



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি।

স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{8} = 1$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

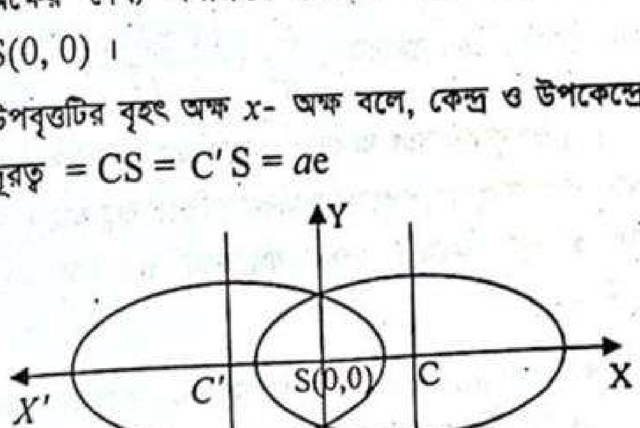
অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

দুইটি বিশেষ অবস্থায় উপবৃত্তের সমীকরণ

বৃহৎ অক্ষকে x- অক্ষ এবং উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{(x \pm ae)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

ধরি, উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা e, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$ এবং উপকেন্দ্র S(0, 0)।

উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষ x- অক্ষ বলে, কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রের দূরত্ব = CS = C′S = ae

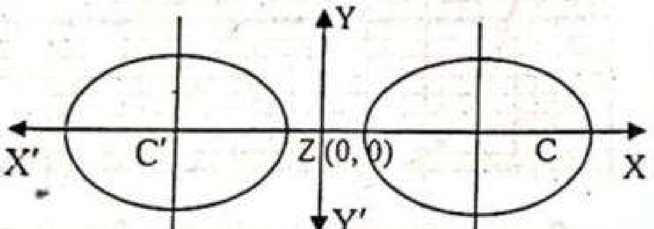


উপবৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$ এবং এর সমীকরণ,

$$\frac{(x \pm ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

অনুরূপভাবে, বৃহৎ অক্ষকে y-অক্ষ এবং উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y \pm be)^2}{b^2} = 1$

বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষ এবং একটি দিকাক্ষ y – অক্ষ হলে উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x \pm a/e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



মনে করি, উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা e, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$ এবং অক্ষ ও একটি দিকাক্ষের ছেদবিন্দু $Z(0, 0)$ ।

উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষ x- অক্ষ বলে, Z হতে উপবৃত্তের কেন্দ্রের দূরত্ব $= CZ = C'Z = \frac{a}{e}$

উপবৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm\frac{a}{e}, 0)$ এবং এর সমীকরণ,

$$\frac{(x \pm a/e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

তদ্রূপ, বৃহৎ অক্ষকে y –অক্ষ এবং একটি দিকাক্ষকে x – অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y \pm b/e)^2}{b^2} = 1$

1 (a) উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষকে x-অক্ষ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 একক ও $\sqrt{2}$ একক।

সমাধান ঃ ধরি, a , b এবং e যথাক্রমে উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহৎ অক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্র অক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা ।

প্রশ্নমতে, বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a = 6 \Rightarrow a = 3$ এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $2b = 4\sqrt{2} \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$

$a > b$ এর জন্য, উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$

$$= \sqrt{\frac{9-8}{9}} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষকে x- অক্ষ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x \pm ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{(x \pm 3.\frac{1}{3})^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad \therefore \frac{(x \pm 1)^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

1(b) উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষকে x-অক্ষ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা 4/5 এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 18/5 একক।

সমাধান ঃ ধরি, a , b এবং e যথাক্রমে উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহৎ অক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্র অক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা ।

প্রশ্নমতে, উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{4}{5}$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5}$

$$\Rightarrow \frac{2a^2(1-e^2)}{a} = \frac{18}{5} \quad [\because b^2 = a^2(1-e^2)]$$

$$\Rightarrow 2a(1 - \frac{16}{25}) = \frac{18}{5} \quad [\because e = \frac{4}{5}]$$

$$\Rightarrow 2a.\frac{9}{25} = \frac{18}{5} \Rightarrow a = 5$$

$$\therefore b^2 = a^2(1 - e^2) = 25(1 - \frac{16}{25}) = 9$$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষকে x- অক্ষ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বকে y- অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x \pm ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{(x\pm 5.\frac{4}{5})^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \therefore \frac{(x\pm 4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

1(c) উপকেন্দ্রিক লম্বকে x-অক্ষ এবং বৃহৎ অক্ষকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা 1/3 এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 16 একক।

সমাধান ঃ মনে করি, উপকেন্দ্রিক লম্বকে x-অক্ষ এবং বৃহৎ অক্ষকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y\pm be)^2}{b^2}=1 \cdots\cdots (1)$, যেখানে $b>a$.

প্রশ্নমতে, (1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e=\frac{1}{3}$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2a^2}{b}=\frac{18}{5}$

$$\Rightarrow \frac{2b^2(1-e^2)}{b}=16$$

$[\because b>a$ এর জন্য, $a^2=b^2(1-e^2)]$

$$\Rightarrow 2b(1-\frac{1}{9})=16 \quad [\because e=\frac{1}{3}]$$

$$\Rightarrow 2b.\frac{8}{9}=\frac{18}{5} \Rightarrow b=9$$

$$\therefore a^2=b^2(1-e^2)=81(1-\frac{1}{9})=72$$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{72}+\frac{(y\pm 9.\frac{1}{3})^2}{81}=1$

$$\therefore \frac{x^2}{72}+\frac{(y\pm 3)^2}{81}=1 \text{ (Ans.)}$$

1(d) উপবৃত্তের একটি দিকাক্ষকে x-অক্ষ এবং বৃহৎ অক্ষকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 8 এবং উৎকেন্দ্রিকতা 1/2.

সমাধান ঃ মনে করি, একটি দিকাক্ষকে x-অক্ষ এবং বৃহৎ অক্ষকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তটির সমীকরণ, .

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y\pm\frac{b}{e})^2}{b^2}=1$$

প্রশ্নমতে, $e=\frac{1}{2}$ এবং $2be=8$

$$\Rightarrow 2\times b\times\frac{1}{2}=8 \Rightarrow b=8$$

$\therefore a^2=b^2(1-e^2)=64(1-\frac{1}{4})=48$ এবং

$$\frac{b}{e}=\frac{8}{1/2}=16$$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{48}+\frac{(y\pm 16)^2}{64}=1$

2 (a) যেসব বিন্দু থেকে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব হয় তাদের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ স্পর্শকের ঢাল m হলে, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তে স্পর্শকের সমীকরণ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

$$\Rightarrow y-mx=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

$$\Rightarrow y^2-2mxy+m^2x^2=a^2m^2+b^2$$

$$\Rightarrow (x^2-a^2)m^2-2mxy+y^2-b^2=0$$

যা m-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। অতএব, এ সমীকরণ থেকে m -এর দুইটি মান পাওয়া যাবে। m -এর দুইটি মান m_1 ও m_2 এর জন্য, প্রাপ্ত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে $m_1 m_2=-1$

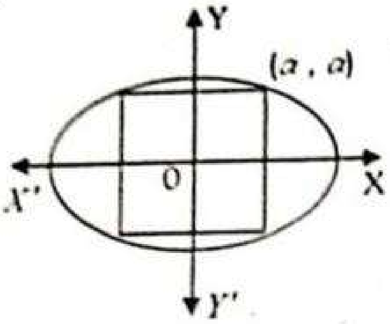
$$\therefore \frac{y^2-b^2}{x^2-a^2}=-1 \Rightarrow y^2-b^2=-x^2+a^2.$$

$\therefore x^2+y^2=a^2+b^2$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

2(b) যদি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের অন্তর্লিখিত বর্গের বাহুগুলি অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ঐ

বর্গের ক্ষেত্রফল হবে $\frac{4ab^2}{\sqrt{a^2e^4+4b^2}}$, যেখানে e উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা । [প্র.ভ.প.'৯৫]

প্রমাণ :



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \cdots(1)$$

উপবৃত্তের অন্তর্লিখিত বর্গের বাহুগুলি অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল বলে, অক্ষদ্বয় হতে বর্গের শীর্ষ চারটি সমদূরবর্তী হবে। অতএব, ধরি (α , α) বর্গের একটি শীর্ষ যা (1) উপবৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।

$\therefore\ b^2\alpha^2+a^2\alpha^2=a^2b^2$

$$\Rightarrow \alpha^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

এখন, বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $= 2\alpha$

$\therefore$ অন্তর্লিখিত বর্গের ক্ষেত্রফল $= (2\alpha)^2$

$$= 4\alpha^2=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{4a^2b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)^2}}$$

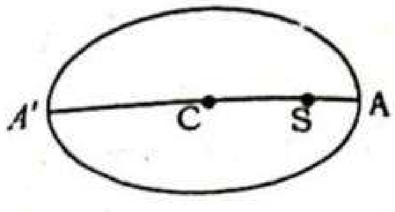
$$=\frac{4a^2b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}$$

$$=\frac{4a^2b^2}{\sqrt{(a^2e^2)^2-4a^2b^2}}\ [\because b^2=a^2-a^2e^2]$$

$$=\frac{4a^2b^2}{a\sqrt{a^2e^2-4b^2}}=\frac{4ab^2}{\sqrt{a^2e^4+4b^2}} \text{(Proved)}$$

3. পৃথিবীর কক্ষপথ উপবৃত্তাকার। এর একটি উপকেন্দ্রে সূর্য অবস্থিত। উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহদাক্ষ 9.3×10^7 মাইল এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{62}$ (প্রায়) হলে সূর্য ও পৃথিবীর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান :



ধরি, a , b এবং e যথাক্রমে উপবৃত্তাকার পৃথিবীর কক্ষপথের অর্ধ-বৃহদাক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্রাক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা। উপবৃত্তাকার পৃথিবীর কক্ষপথের কেন্দ্র C , শীর্ষ দুইটি A, A' এবং S উপকেন্দ্রে সূর্য অবস্থিত।

$\therefore\ CA = CA' = a, CS = ae$

প্রশ্নমতে, $a = 9.3\times10^7$ মাইল এবং $e=\frac{1}{62}$

$\therefore$ সূর্য ও পৃথিবীর ক্ষুদ্রতম দূরত্ব $= SA = CA - CS$

$= a - ae = 9.3\times10^7(1-\frac{1}{62})$ মাইল

$= 9.15\times10^7$ মাইল এবং

বৃহত্তম দূরত্ব $= SA' = CA' + CS = a + ae$

$= 9.3\times10^7(1+\frac{1}{62})$ মাইল

$= 9.45\times10^7$ মাইল ।

অধিবৃত্ত (প্রশ্নমালা VI C)

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

1. অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2. আড় অক্ষকে x-অক্ষ ধরে এবং (α , β) কেন্দ্রবিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$.

3. আড় অক্ষকে x-অক্ষ এবং একটি উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x \pm ae)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4. আড় অক্ষকে x-অক্ষ এবং একটি দিকাক্ষকে y-অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x \pm \frac{a}{e})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

5. (α , β) উপকেন্দ্র , e উৎকেন্দ্রিকতা এবং $lx + my + n = 0$ দিকাক্ষ বিশিষ্ট অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ ,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2 \frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2}$$

6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের অনুবন্ধী অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

7. $y = mx + c$ রেখাটি $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $c^2 = a^2 m^2 - b^2$ হয়। অতএব,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তে স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

8. অধিবৃত্তের প্রয়োজনীয় ফলাফল ঃ

অধিবৃত্তের আকার ঃ	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$
a. কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ঃ	$(0 , 0)$	$(0 , 0)$	(α , β)	(α , β)
b. উৎকেন্দ্রিকতা ঃ	$e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$	$e = \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$	$e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$	$e = \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$
c. আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য ঃ	$2a$	$2b$	$2a$	$2b$
d. অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য ঃ	$2b$	$2a$	$2b$	$2a$
e. আড় অক্ষের সমীকরণ ঃ	$y = 0$	$x = 0$	$y - \beta = 0$	$x - \alpha = 0$
f. অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ ঃ	$x = 0$	$y = 0$	$x - \alpha = 0$	$y - \beta = 0$
g. শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ঃ	$(\pm a , 0)$	$(0, \pm b)$	$(\pm a + \alpha , \beta)$	$(\alpha , \pm b + \beta)$
h. ফোকাসদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ঃ	$(\pm ae , 0)$	$(0 , \pm be)$	$(\pm ae + \alpha , \beta)$	$(\alpha , \pm b + \beta)$
i. ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব ঃ	$2ae$	$2be$	$2ae$	$2be$
j. দিকাক্ষের পাদবিন্দুর ঃ	$(\pm \frac{a}{e} , 0)$	$(0 , \pm \frac{b}{e})$	$(\pm \frac{a}{e} + \alpha , \beta)$	$(\alpha , \pm \frac{b}{e} + \beta)$
k. দিকাক্ষ দুইটির দূরত্ব ঃ	$\frac{2a}{e}$	$\frac{2b}{e}$	$\frac{2a}{e}$	$\frac{2b}{e}$
l. দিকাক্ষ দুইটির সমীকরণ ঃ	$x = \pm \frac{a}{}$	$y = \pm \frac{b}{}$	$x - \alpha = \pm \frac{a}{}$	$y - \beta = \pm \frac{b}{}$

m. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য : $\frac{2b^2}{a}$ $\frac{2a^2}{b}$ $\frac{2b^2}{a}$ $\frac{2a^2}{b}$

n. উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ : $x = \pm ae$ $y = \pm be$ $x - \alpha = \pm ae$ $y - \beta = \pm be$

প্রশ্নমালা IV C

1(a) $9x^2 - 16y^2 = 144$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু, উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র এবং অক্ষ ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০০; সি.'০৫; মা.বো.'০৪]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $9x^2 - 16y^2 = 144$ অর্থাৎ $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ কে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 4$, $b = 3$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$

শীর্ষবিন্দু $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$

উপকেন্দ্র $(\pm ae, 0) = (\pm 4\frac{5}{4}, 0) = (\pm 5, 0)$

আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a = 2.4 = 8$

অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $2b = 2.3 = 6$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2}$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{4}{5/4}$

$\therefore\ 5x = \pm 16$ (Ans.)

1(b) $9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$ বক্ররেখাটির প্রকৃতি, তার কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নিয়ামকরেখার সমীকরণ ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত বক্ররেখাটিতে x^2 ও y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান। x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান ও ভিন্ন চিহ্নযুক্ত। সুতরাং, প্রদত্ত বক্ররেখা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

এখন, $9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$

$\Rightarrow 9(x^2 + 8x) - 16(y^2 + 2y) = 16$

$\Rightarrow 9(x^2 + 2.x.4 + 4^2) - 144 - 16(y^2 + 2y.1 + 1^2) + 16 = 16$

$\Rightarrow 9(x+4)^2 - 16(x+1)^2 = 144$

$\Rightarrow \frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{(x+4)^2}{4^2} - \frac{(x+1)^2}{3^2} = 1$

ইহাকে অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 4$, $b = 3$, $\alpha = -4$ এবং $\beta = -1$

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\alpha, \beta) = (-4, -1)$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \frac{5}{4}$

উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $= (\alpha \pm ae, \beta)$

$= (-4 \pm 4 \times \frac{5}{4}, -1) = (-4 \pm 5, -1) = (1, -1)$ এবং $(-9, -1)$

নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $x - \alpha = \pm\frac{a}{e}$

$\Rightarrow x + 4 = \pm\frac{4}{5/4}$ $\therefore x + 4 = \pm\frac{16}{5}$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 3^2}{4} = \frac{9}{2}$ একক।

2(a) দেখাও যে, $x^2 - 8y^2 = 2$ অধিবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $3x = \pm 4$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $1/2\sqrt{2}$. [বুয়েট'১০-১১]

[ব.'০৪; য.'০৭,'১৩; কু.'১০; ঢা.'১২; চ.'১২; সি.'১২]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $x^2-8y^2=2$ অর্থাৎ

$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{(1/2)^2}=1$ কে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=\sqrt{2}$, $b=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{2+\frac{1}{4}}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{9}{4\times 2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$\therefore$ অধিবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ,

$x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{\sqrt{2}}{\frac{3}{2\sqrt{2}}}=\pm\frac{4}{3}$ $\therefore 3x=\pm 4$

এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times\frac{1}{4}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2(b) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা.'০৩; চ.'০৫; সি.'০৮]

সমাধান : $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ অর্থাৎ $\frac{x^2}{12^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$ কে

অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে

তুলনা করে পাই, $a=12$, $b=5$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{144+25}{144}}$

$$=\frac{13}{12}$$

এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\pm ae, 0)$

$$=(\pm 12.\frac{13}{12},0)=(\pm 13, 0)$$

2(c) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ এর উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[রা.'০০,'০৬; য.'০৫,'১০; ঢা.'০৭,'১১; সি.'০১]

সমাধান : $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ অর্থাৎ $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$ কে

অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে

তুলনা করে পাই, $a=3$, $b=4$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{9+16}{9}}=\frac{5}{3}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\pm ae, 0)$

$$=(\pm 3.\frac{5}{3}, 0)=(\pm 5, 0)$$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{3}{5/3}$

$\therefore 5x=\pm 9$

2(d) $9x^2-4y^2+36=0$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০১]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $9x^2-4y^2+36=0$ অর্থাৎ

$\frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{2^2}=1$ কে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=2$; $b=3$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{4+9}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$

$\therefore$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু স্থানাঙ্ক $=(0, \pm b)=(0,\pm 3)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(0,\pm be)$

$$=(0,\pm 3\frac{\sqrt{13}}{3})=(0, \pm\sqrt{13})$$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $y=\pm be$

$\Rightarrow y = \pm 3.\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ $\therefore y = \pm\sqrt{13}$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ, $y = \pm\dfrac{b}{e} = \pm\dfrac{3}{\sqrt{13}/3}$

$\therefore \sqrt{13}\,y = \pm 9$

2(e) $25x^2 - 16y^2 = 400$ **অধিবৃত্তের কেন্দ্র, উপকেন্দ্র, উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।** [সি.'০১]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $25x^2 - 16y^2 = 400$ অর্থাৎ $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{5^2} = 1$ কে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 4$, $b = 5$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}$

$= \sqrt{\dfrac{16+25}{16}} = \dfrac{\sqrt{41}}{4}$

অধিবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (0, 0)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0)$

$= (\pm 4.\dfrac{\sqrt{41}}{4}, 0) = (\pm\sqrt{41}, 0)$

2(f) $16x^2 - 25y^2 = 400$ **অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।**

[রা.'০৪,'০৮; কু.'০৫]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $16x^2 - 25y^2 = 400$ অর্থাৎ $\dfrac{x^2}{5^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ কে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 5$, $b = 4$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}$

$= \sqrt{\dfrac{25+16}{25}} = \dfrac{\sqrt{41}}{5}$

এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0)$

$= (\pm 5.\dfrac{\sqrt{41}}{5}, 0) = (\pm\sqrt{41}, 0)$

2(g) $4y^2 - 5x^2 = 20$ **অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [চ.'০৭]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $4y^2 - 5x^2 = 20$ অর্থাৎ $\dfrac{y^2}{(\sqrt{5})^2} - \dfrac{x^2}{2^2} = 1$ কে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 2$, $b = \sqrt{5}$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{b^2}} = \sqrt{\dfrac{4+5}{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (0, \pm be)$

$= (0, \pm\sqrt{5}.\dfrac{3}{\sqrt{5}}) = (0, \pm 3)$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y = \pm\dfrac{b}{e} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{3/\sqrt{5}}$

$\therefore 3y = \pm 5$

3 একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার দিকাক্ষ $2x + y = 1$, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(1, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$. [কু. '০৪,'০৮; রা. '০১; য. '০৩,'০৮; ঢা. '০৪, '০৮,'১৩; ব.'০৮; মা.বো.'০৭; দি.'০৯; চ.'১১]

সমাধান ঃ $(1, 1)$ উপকেন্দ্র, $2x + y - 1 = 0$ দিকাক্ষ এবং $\sqrt{3}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{3})^2\,\dfrac{(2x+y-1)^2}{2^2+1^2}$

$\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2\,\dfrac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}\right.$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$

$$= \frac{3(4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 4x - 2y)}{5}$$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 10x - 10y + 10 = 12x^2 + 3y^2 + 12xy - 12x - 6y + 3$

$\therefore\ 7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 4y - 7 = 0$

4(a) একটি অধিবৃত্ত (6, 4) ও (– 3, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৪,'১১; ব.'০৬]

সমাধান ঃ ধরি, কেন্দ্র মূলবিন্দুতে ও আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর এরূপ অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots (1)$

(1) অধিবৃত্তটি (6 , 4) ও (– 3 , 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore \frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \cdots (2)$ এবং $\frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \cdots (3)$

$(2) - 16 \times (3) \Rightarrow (36 - 144)\frac{1}{a^2} = 1 - 16$

$\Rightarrow -108\ \frac{1}{a^2} = -15 \Rightarrow a^2 = \frac{108}{15} = \frac{36}{5}$

(3) হতে আমরা পাই, $9 \times \frac{5}{36} - \frac{1}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow b^2 = 4.$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{5x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1.$

4(b) (4 , 0) , (5, 2.25) বিন্দুগামী একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর অবস্থিত। [চ.'০৩]

সমাধান ঃ ধরি, কেন্দ্র মূলবিন্দুতে ও আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর এরূপ অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots (1)$

(1) অধিবৃত্তটি (4 , 0) ও (5 ,2.25) অর্থাৎ $(5, \frac{9}{4})$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore\ \frac{16}{a^2} - 0 = 1 \Rightarrow a^2 = 16$

এবং $\frac{25}{a^2} - \frac{81/16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{25}{16} - \frac{81}{16b^2} = 1$

$\Rightarrow 25b^2 - 81 = 16b^2 \Rightarrow 9b^2 = 81$

$\therefore\ b^2 = 9$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$

4(c) একটি অধিবৃত্ত (–2,1) ও (–3,–2) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর হলে , অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৯]

সমাধান ঃ ধরি, কেন্দ্র মূলবিন্দুতে ও আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর এরূপ অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots (1)$

(1) অধিবৃত্তটি (– 2 , 1) ও (– 3, – 2) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \cdots (2)$, $\frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \cdots (3)$

$(2) \times 4 - (3) \Rightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{9}{a^2} = 4 - 1$

$\Rightarrow\ \frac{7}{a^2} = 3\ \therefore\ a^2 = \frac{7}{3}$

(2) হতে আমরা পাই, $\frac{4}{7/3} - \frac{1}{b^2} = 1$

$\Rightarrow\ \frac{1}{b^2} = \frac{12}{7} - 1 = \frac{5}{7} \Rightarrow b^2 = \frac{7}{5}$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{x^2}{7/3} - \frac{y^2}{7/5} = 1$

$\Rightarrow\ 3x^2 - 5y^2 = 7$ (Ans.)

5(a) অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার আড় অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 এবং 8 একক।

সমাধান ঃ অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots\cdots (1)$

(1) উপবৃত্তের আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a$ একক
এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b$

প্রশ্নমতে, $2a = 6 \Rightarrow a = 3$ এবং
$2b = 8 \Rightarrow b = 4.$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1 \;\therefore 16x^2 - 9y^2 = 144$

5(b) অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 24 এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 13)$। [কু.'০৭]

সমাধান ঃ অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্র $(0, \pm 13)$., y –অক্ষের উপর অবস্থিত এবং অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ। সুতরাং এর আড় অক্ষটি y–অক্ষ বরাবর।

ধরি, অধিবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \cdots (1)$

(1) উপবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a$ একক
এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm be)$.

প্রশ্নমতে, $2a = 24 \Rightarrow a = 12$ এবং

$\pm be = \pm 13 \Rightarrow be = 13$

আবার, $a^2 = b^2e^2 - b^2$

$\Rightarrow 12^2 = 13^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 13^2 - 12^2$

$\therefore b^2 = 5^2 = 25$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{144} = 1$

5(c) অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তীর দূরত্ব 16 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ ।

[রা.'০৭; কু.'১২;চ.'১৩; বুয়েট'১২-১৩]

সমাধান ঃ ধরি, অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \cdots\cdots (1)$

প্রশ্নমতে, (1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{2}$

এবং উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তীর দূরত্ব $2ae = 16$

$\Rightarrow a \times \sqrt{2} = 8 \Rightarrow a = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

এখন, $b^2 = a^2(e^2 - 1) = (4\sqrt{2})^2(2 - 1)$

$\therefore b^2 = 32$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ $\dfrac{x^2}{(4\sqrt{2})^2} - \dfrac{y^2}{32} = 1$

$\therefore x^2 - y^2 = 32$

5(d) আড় অক্ষকে y-অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষকে x-অক্ষ ধরে একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তীর দূরত্ব 2 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$।

[চ.'১০; ব.'১৩; দি.'১৩]

সমাধান ঃ ধরি, আড় অক্ষকে y-অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষকে x-অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে, (1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{2}$

এবং উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $2b = 2$

$\Rightarrow b = 1 \;\therefore b^2 = 1$

এখন, $a^2 = b^2(e^2 - 1) = (2 - 1) = 1$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ $\dfrac{y^2}{1} - \dfrac{x^2}{1} = 1$

$\therefore y^2 - x^2 = 1$

6(a) আড় অক্ষকে x- অক্ষ এবং একটি দিকাক্ষকে y- অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা 2 এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 8 একক।

সমাধান ঃ মনে করি, আড় অক্ষকে x-অক্ষ এবং একটি দিকাক্ষকে y-অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ

$$\frac{(x \pm \frac{a}{e})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots (1)$$

(1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = 2$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\dfrac{2b^2}{a} = 8$

$\Rightarrow b^2 = 4a \;\cdots\cdots (2)$

এখন, $b^2 = a^2(e^2-1)$

$\Rightarrow 4a = a^2(2^2-1) \Rightarrow 4 = 3a \therefore a = \frac{4}{3}$

(2) হতে পাই, $b^2 = 4\times\frac{4}{3} = \frac{16}{3}$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{(x\pm\frac{4/3}{2})^2}{(4/3)^2} - \frac{y^2}{16/3} = 1$

$\Rightarrow \frac{(x\pm\frac{2}{3})^2}{16/9} - \frac{y^2}{16/3} = 1$

$\Rightarrow 9\frac{(3x\pm2)^2}{9} - 3y^2 = 16$

$\therefore (3x\pm2)^2 - 3y^2 = 16$

6(b) আড় অক্ষকে y - অক্ষ এবং একটি উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার দিকাক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 6 একক এবং উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 12 একক।

সমাধান ঃ মনে করি, আড় অক্ষকে y-অক্ষ এবং একটি উপকেন্দ্রকে x-অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ

$\frac{(y\pm be)^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \cdots (1)$

(1) অধিবৃত্তের দিকাক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী দূরত $\frac{2b}{e}$ একক এবং উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 2be একক ।

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $\frac{2b}{e} = 6\cdots(2)$ এবং $2be = 12\cdots(3)$

$\therefore (2)\times(3) \Rightarrow 4b^2 = 72 \Rightarrow b^2 = 18$

$\Rightarrow b = 3\sqrt{2}$

$(3)\div(2) \Rightarrow e^2 = 2 \Rightarrow e = \sqrt{2}$

এখন, $a^2 = b^2(e^2-1) = 18(2-1) = 18$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ ,

$\frac{(y\pm3\sqrt{2}\times\sqrt{2})^2}{18} - \frac{x^2}{18} = 1$

$\therefore (y\pm6)^2 - x^2 = 18$ (Ans.)

6(c) একটি দিকাক্ষকে x -অক্ষ এবং আড় অক্ষকে y-অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{5}{4}$ এবং আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য 8 একক।

সমাধান ঃ মনে করি, একটি দিকাক্ষকে x -অক্ষ এবং আড় অক্ষকে y-অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ

$\frac{(y\pm\frac{b}{e})^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\cdots(1)$

(1) অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{5}{4}$ এবং উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $2b = 8 \therefore b = 4$

এখন, $a^2 = b^2(e^2-1) = 16(\frac{25}{16}-1) = 9$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ ,

$\frac{(y\pm\frac{4}{5/4})^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

$\therefore \frac{(y\pm16/5)^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ (Ans.)

7(a) $25x^2 - 16y^2 = 400$ অধিবৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 3).

সমাধান ঃ $25x^2 - 16y^2 = 400$ অধিবৃত্তের যে জ্যা এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 3) তার সমীকরণ,

$25(x.5) - 16(y.3) = 25.5^2 - 16.3^2$

[$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow 125x - 48y = 625 - 144$

$\therefore 125x - 48y = 481$ (Ans.)

7(b) $3x^2 - 2y^2 + 6 = 0$ অধিবৃত্তের (2 , 3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $3x^2 - 2y^2 + 6 = 0$ অধিবৃত্তের (2 , 3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $3(x\cdot2) - 2(y\cdot3) + 6 = 0$

$\Rightarrow 6x - 6y + 6 = 0 \therefore x - y + 1 = 0$

7(c) $y = k - 2x$ সরলরেখাটি $xy = 1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করলে k এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $y = k - 2x \cdots \cdots (1)$ হতে y এর মান $xy = 1 \cdots \cdots (2)$ বক্ররেখায় বসিয়ে পাই,

$x(k - 2x) = 1 \Rightarrow kx - 2x^2 = 1$

$\Rightarrow 2x^2 - kx + 1 = 0 \cdots (3)$, যা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। অতএব, এ সমীকরণ থেকে x-এর দুইটি মান পাওয়া যাবে।

(1) রেখাটি (2) বক্ররেখাকে স্পর্শ করবে যদি x-এর মান দুইটি সমান হয়, অর্থাৎ (3) সমীকরণের নিশ্চায়ক শূন্য হয়।

$\therefore\ k^2 = 4.2.1 = 8 \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{2}$ (Ans.)

7(d) $25x^2 - 16y^2 = 400$ অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয়ের সমীকরণ,

$25x^2 - 16y^2 = 0 \Rightarrow 16y^2 = 25x^2$

$\Rightarrow y = \pm \frac{5}{4}x$

অসীমতটদ্বয়ের ঢাল, (ধরি) $m_1 = \frac{5}{4}$ ও $m_2 = -\frac{5}{4}$

$\therefore$ অসীমতটদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ

$$= \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{5}{4} - (-\frac{5}{4})}{1 + \frac{5}{4}(-\frac{5}{4})}\right|$$

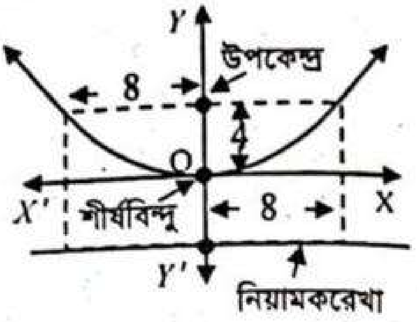
$$= \tan^{-1}\left|\frac{\frac{10}{4}}{\frac{16-25}{16}}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{40}{-9}\right| = \tan^{-1}\frac{40}{9}$$

8. নিম্নলিখিত কণিকগুলির আকার কি হবে তা কারণসহ উল্লেখ কর। এদের স্কেচ অঙ্কন করে উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা চিহ্নিত কর।

(a) $x^2 = 16y = 4.4.y$

প্রদত্ত সমীকরণে x^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান কিন্তু y^2 সম্বলিত পদ অনুপস্থিত। সুতরাং, ইহা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

নিম্নে ইহার স্কেচ অঙ্কন করে উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা চিহ্নিত করা হলো :



8(b) $y^2 = 4y + 4x - 16$

$\Rightarrow y^2 - 4y = -4x - 16$

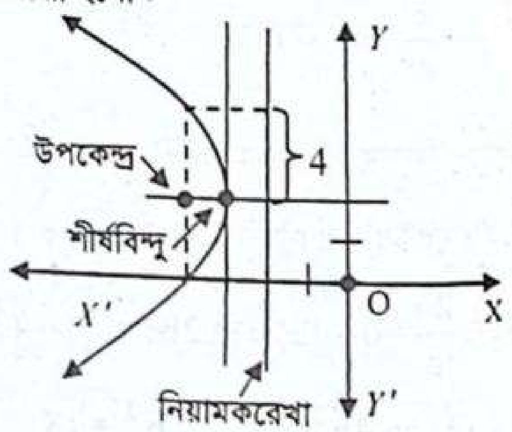
$\Rightarrow (y-2)^2 = -4x - 16 + 4$

$\Rightarrow (y-2)^2 = -4(x+3)$

$\Rightarrow (y-2)^2 = 4(-1)(x+3)$

প্রদত্ত সমীকরণে y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান কিন্তু x^2 সম্বলিত পদ অনুপস্থিত। সুতরাং, ইহা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

নিম্নে ইহার স্কেচ অঙ্কন করে উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা চিহ্নিত করা হলো :



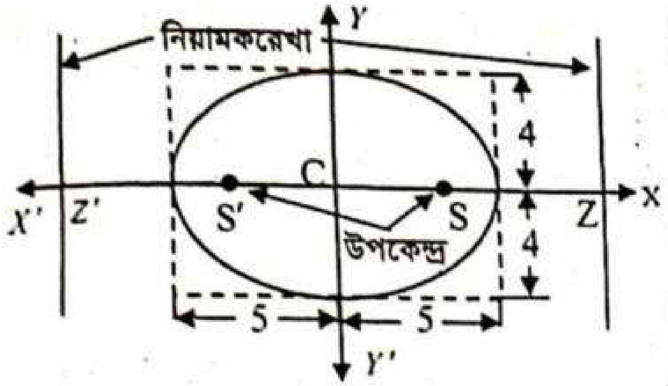
8(c) $16x^2 + 25y^2 = 400$

$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

প্রদত্ত সমীকরণে x^2 ও y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান। x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান ও অভিন্ন চিহ্নযুক্ত। সুতরাং, ইহা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

নিম্নে ইহার স্কেচ অঙ্কন করে উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা

চিহ্নত করা হলো :



এখনে, CS $=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}\ = 3$ একক

এবং $CZ=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\dfrac{25}{3}=8\dfrac{1}{3}$ একক

8(d) $9x^2+108x+25y^2-150y+324=0$

$\Rightarrow\ 9(x^2+12x+6^2)-324+$
$25(y^2-6y+3^2)-225+324=0$

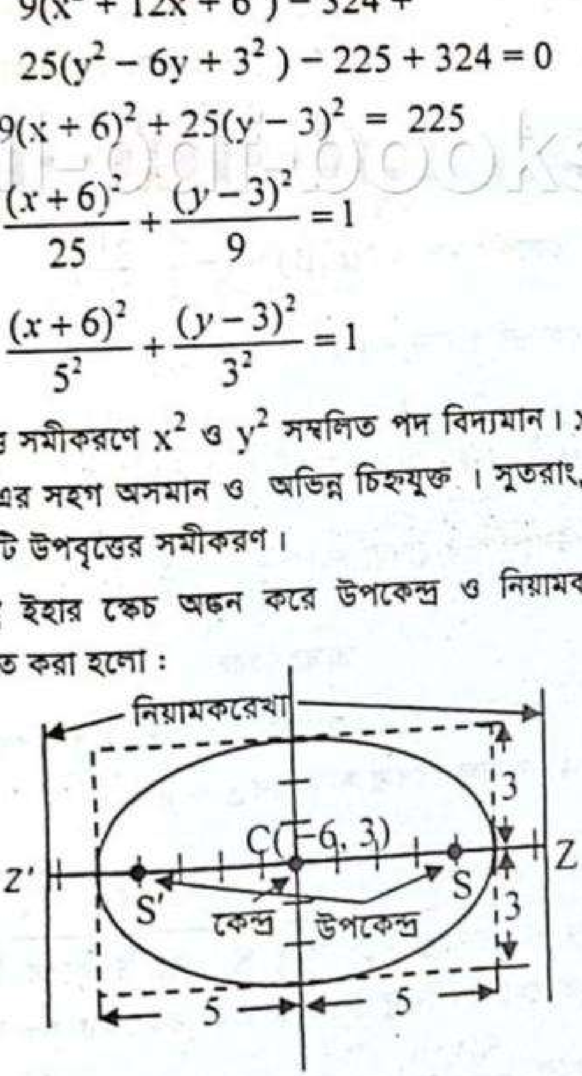
$\Rightarrow 9(x+6)^2+25(y-3)^2\ =\ 225$

$\Rightarrow\ \dfrac{(x+6)^2}{25}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

$\Rightarrow\ \dfrac{(x+6)^2}{5^2}+\dfrac{(y-3)^2}{3^2}=1$

প্রদত্ত সমীকরণে x^2 ও y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান। x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান ও অভিন্ন চিহ্নযুক্ত । সুতরাং, ইহা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

নিম্নে ইহার স্কেচ অঙ্কন করে উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা চিহ্নত করা হলো :



এখনে, CS $=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}\ = 4$ একক এবং

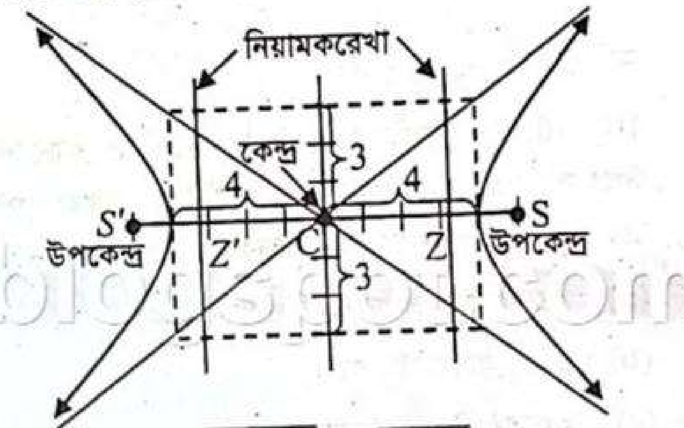
$CZ=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\dfrac{25}{4}=6\cdot25$ একক

8(e) $9x^2-16y^2=144$

$\Rightarrow\ \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1\Rightarrow\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$

প্রদত্ত সমীকরণে x^2 ও y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান। x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান ও ভিন্ন চিহ্নযুক্ত । সুতরাং, ইহা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

নিম্নে ইহার স্কেচ অঙ্কন করে উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা চিহ্নত করা হলো :



এখনে, CS $=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=5$ একক এবং

$CZ=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{16}{5}=3\dfrac{1}{5}$ একক।

9(a) $11x^2+14y^2-4xy-48x-24y+66=0$ একটি- **[BUET'11-12]**

A. বৃত্ত B. পরাবৃত্ত C. উপবৃত্ত D. অধিবৃত্ত

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণে x^2 ও y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান। x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান ও অভিন্ন চিহ্নযুক্ত । সুতরাং, ইহা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

9(b) কোনো উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব এর বৃহদাক্ষের অর্ধেক। এর উৎকেন্দ্রিকতা হলো- **[Textile'12-13]**

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ C. 2 D. $\sqrt{2}$

সমাধান : এখানে, $\frac{2b^2}{a} = a \Rightarrow a^2 = 2b^2$

$\therefore \quad e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{2b^2 - b^2}{2b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

9(c) একটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (0,2), অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল এবং যা (2, 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, তার সমীকরণ হলো- [SUST'12-13]

A. $4x^2 = 3(y-2)$ B. $3x^2 = 12(y-2)$

C. $3x^2 = 4(y-2)$ D. $2x^2 = 3(y-2)$

সমাধান : পরাবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{2^2} = \frac{4(y-2)}{4(5-2)}$

$\Rightarrow \quad 3x^2 = 4(y-2)$

10. (0, 2) বিন্দুটি $y = 5x^2 + 3x + c$ বক্ররেখার উপর অবস্থিত। ঐ বিন্দুতে বক্ররেখার উপর অঙ্কিত স্পর্শক $ax + cy + 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল।

(a) বক্ররেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(b) a এর মান নির্ণয় কর।

(c) বক্ররেখাটি কী আকারের কণিক কারণসহ উল্লেখ করে এর শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : (a) দেওয়া আছে, (0, 2) বিন্দুটি $y = 5x^2 + 3x + c$ বক্ররেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore \quad 2 = 5 \times 0 + 3 \times 0 + c \Rightarrow c = 2$

$\therefore$ বক্ররেখাটির সমীকরণ, $y = 5x^2 + 3x + 2$

10(b) (0, 2) বিন্দুটিতে $y = 5x^2 + 3x + 2$ বক্ররেখার উপর অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

$\frac{1}{2}(y + 2) = 5 \times x \times 0 + \frac{3}{2}(x + 0) + 2$

$\Rightarrow y + 2 = 3x + 4 \Rightarrow 3x - y + 2 = 0$; যা $ax + cy + 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল।

$\therefore \quad \frac{a}{3} = \frac{c}{-1} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{2}{-1} \Rightarrow a = -6$

10(c) $y = 5x^2 + 3x + 2$ সমীকরণে x^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান কিন্তু y^2 সম্বলিত পদ অনুপস্থিত। সুতরাং ইহা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

এখন, $y = 5x^2 + 3x + 2 = 5(x^2 + \frac{3}{5}x) + 2$

$\Rightarrow \quad y = 5(x + \frac{3}{10})^2 - \frac{45}{100} + 2$

$\Rightarrow \quad 5(x + \frac{3}{10})^2 = y + \frac{9}{20} - 2 = y - \frac{31}{20}$

$\Rightarrow \quad (x + \frac{3}{10})^2 = \frac{1}{5}(y - \frac{31}{20})$

$\Rightarrow \quad (x + \frac{3}{10})^2 = 4.\frac{1}{20}(y - \frac{31}{20})$

ইহাকে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x + \alpha)^2 = 4a(y + \beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = \frac{1}{20}$, $\alpha = -\frac{3}{10}$ এবং $\beta = \frac{31}{20}$

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\alpha, \beta) = (-\frac{3}{4}, \frac{31}{20})$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha, -a + \beta)$

$= (-\frac{3}{10}, \frac{1}{20} + \frac{31}{20}) = (-\frac{3}{10}, \frac{32}{20})$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (-\frac{3}{10}, \frac{8}{5})$

ব্যবহারিক

1. একটি পরাবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন কর যার উপকেন্দ্র (3 , 4) দিকাক্ষ রেখার সমীকরণ $x + y = 2$ ।

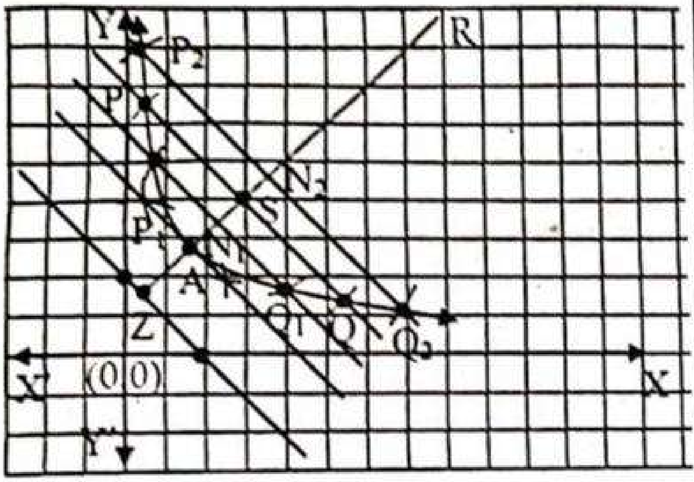
পরীক্ষণ নং	তারিখ :

মূলতত্ত্ব : পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S এবং উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যেকোন বিন্দু P হতে এর দিকাক্ষের লম্ব দূরত্ব PM হলে, $\frac{SP}{PM} = 1 \Rightarrow SP = PM$.

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি :

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি।



2. x-অক্ষ ও y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S (3, 4) ছক কাগজে স্থাপন করি।

3. x-অক্ষের সমান্তরাল পরাবৃত্তের নিয়ামকরেখা $MM' \equiv x + y = 2$ আঁকি।

4. S বিন্দুগামী এবং দিকাক্ষ রেখার উপর লম্বরেখা ZR টানি যেন ZR রেখা MM' রেখাকে Z বিন্দুতে ছেদ করে।

5. ZS এর মধ্যবিন্দু A নির্ণয় করি যা পরাবৃত্তের শীর্ষ।

6. AR এর উপরিস্থিত S এর মধ্য দিয়ে AR রেখার উপর লম্ব টানি।

7. S কে কেন্দ্র করে ZS এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যা লম্বরেখাটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং, P ও Q বিন্দু দুইটি পরাবৃত্তটির উপর অবস্থিত হবে।

8. অনুরূপভাবে, পরাবৃত্তটির উপর P_1 ,Q_1, P_2, Q_2 ,...... ইত্যাটি বিন্দু নির্ধারণ করা যায়। বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে পরাবৃত্তটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $3(x-1)^2 + 4y^2 = 12$ সমীকরণটি কি বর্ণনা করে ? [DU 98-99]

A. বৃত্ত যার কেন্দ্র (1, 0)

B. প্যারাবোলা যার শীর্ষ (1 , 0)

C. উপবৃত্ত যার ফোকাস (1 , 0)

D. উপবৃত্ত যার ফোকাস (0 , 0)

$Sol^n : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, e = \sqrt{\frac{4-3}{4}} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ উপবৃত্ত যার ফোকাস $= (\pm 2\frac{1}{2} + 1 , 0)$

$\therefore = (0 ,0)$ এবং $(2, 0)$. Ans. D

2. যে পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (4, 0) এবং নিয়ামক(দিকাক্ষ) $x + 2 = 0$ তার সমীকরণ – [DU 08-09]

$Sol^n : (x-4)^2 + (y-0)^2 = \frac{(x+2)^2}{1^2}$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + 4x + 4$

$\therefore y^2 = 12(x-1)$

3. $2x = y^2 + 8y + 22$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক - [DU 07-08]

$Sol^n : (y+4)^2 = 2x - 22 + 16 = 2(x-3)$

$\therefore$ শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, -4)$

4. $y^2 = 4x + 8y$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ - [DU 01-02, 99-00, 96-97, 95-96]

$Sol^n : y^2 - 8y + 16 = 4x + 16$

$\Rightarrow (y-4)^2 = 4(x+4)$

$\therefore$ শীর্ষ বিন্দু $(-4 , 4)$

5. $y^2 - 4y - 4x + 16 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক - (DU 01-02]

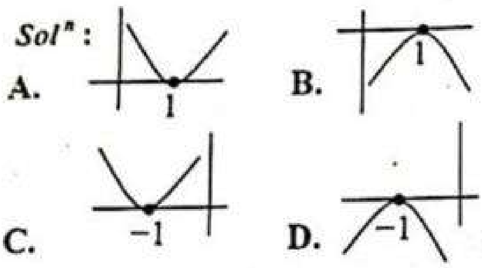
Sol^n : $y^2 - 4y + 4 = 4x - 12$

$\Rightarrow (y-2)^2 = 4.1.(x-3)$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (3+1, 2) = (4, 2)$

6. নিচের কোনটি $y = -(x-1)^2$ এর লেখচিত্র – [DU 02-03]

Sol^n :



Sol^n : পরাবৃত্তটির শীর্ষ (1, 0) এবং a ঋণাত্মক বলে ইহা অক্ষের নীচে অবস্থান করবে? Ans. B

7. $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের (4,6) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ– [NU 08-09]

Sol^n : $y.6 = \frac{9}{2}(x+4) \Rightarrow 4y = 3x + 12$

$\therefore 3x - 4y + 12 = 0$

8. সরলরেখা $y = kx - 1$ বক্ররেখা $y = x^2 + 3$ এর স্পর্শক হবে যদি k এর মান– [DU;NU 07-09]

Sol^n : $y = kx - 1 = x^2 + 3$

$\Rightarrow x^2 - kx + 4 = 0 \therefore D = k^2 - 4.1.4 = 0$

$\therefore k = \pm 4$

9. $y = 2x + b$ রেখাটি $y^2 = 16x$ প্যারাবোলাকে স্পর্শ করে তবে $b = ?$ [DU 96-97]

Sol^n : $c = \frac{a}{m}$ সূত্রের সাহায্যে, $b = \frac{4}{2} = 2$

10. $\frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(y+2)^2}{100} = 1$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা- [DU 07-08, 05-06, 97-98; NU 08-09, 06-07]

Sol^n : $e = \sqrt{\frac{100-64}{100}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

11. $xy = 2$ কোনটির সমীকরণ – [SU 08-09]

A. সরলরেখা B. বৃত্ত C. উপবৃত্ত D. অধিবৃত্ত

Sol^n : এখানে $h = \frac{1}{2}, a = 0, b = 0$

$h^2 = \frac{1}{4} > ab$; সমীকরণটি উপবৃত্ত।

কৌশল : $x^2 + gx + fy + c = 0$ এবং $y^2 + gx + fy + c = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $|f|$ এবং $|g|$.

$ax^2 + by^2 + gx + fy + c = 0$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2b}{\sqrt{a}}$, যখন $a > b$; $\frac{2a}{\sqrt{b}}$, যখন $b > a$.

12. $x^2 - 4x + 12y - 40 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য- [DU 13-14]

A. 12 B. 8 C. 6 D. 4

Sol^n : উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = | y এর সহগ | = 12

[$\because$ পরাবৃত্তের সমীকরণে y^2 অনুপস্থিত।]

13. $25x^2 + 16y^2 = 400$ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? [Textile 13-14]

A. $\frac{7}{30}$ B. $\frac{32}{5}$ C. $\frac{5}{32}$ D. $\frac{30}{7}$

Sol^n : উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a}{\sqrt{b}} = \frac{2\times16}{\sqrt{25}}$

$= \frac{32}{5}$

প্রমাণ কর যে,

1.(a) $\tan^{-1}\frac{5}{6}-\tan^{-1}\frac{1}{11}=\tan^{-1}\frac{49}{71}$

L.H.S. $=\tan^{-1}\frac{5}{6}-\tan^{-1}\frac{1}{11}=\tan^{-1}\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{1}{11}}{1+\frac{5}{6}.\frac{1}{11}}$

$=\tan^{-1}(\frac{49}{66}\times\frac{66}{71})=\tan^{-1}\frac{49}{71}=$ R.H.S. (Proved)

1(b) $\tan^{-1}\frac{5}{7}+\cot^{-1}\frac{8}{5}=\cot^{-1}\frac{31}{75}$

L.H.S. $=\tan^{-1}\frac{5}{7}+\cot^{-1}\frac{8}{5}$

$=\tan^{-1}\frac{5}{7}+\tan^{-1}\frac{5}{8}=\tan^{-1}\dfrac{\frac{5}{7}+\frac{5}{8}}{1-\frac{5}{7}.\frac{5}{8}}$

$=\tan^{-1}(\frac{40+35}{56}\times\frac{56}{56-25})=\tan^{-1}\frac{75}{31}$

$=\cot^{-1}\frac{31}{75}=$ R.H.S. (Proved)

1(c) $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$

Proof: $\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{5^2-3^2}}=\tan^{-1}\frac{3}{4}$

L.H.S. $=\cot^{-1}\frac{5}{3}+\sin^{-1}\frac{3}{5}$

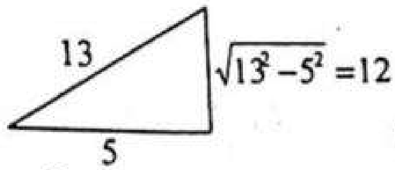
$=\tan^{-1}\frac{3}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{4}=\tan^{-1}\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{5}.\frac{3}{4}}$

$=\tan^{-1}(\frac{12+15}{20}\times\frac{20}{20-9})$

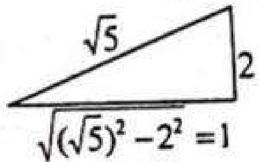
$=\tan^{-1}\frac{27}{11}=$ R.H.S. (Proved)

1(d) $\sec^{-1}\frac{13}{5}-\text{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}=\tan^{-1}\frac{2}{29}$

[চ.'০২]



চিত্র-1



চিত্র-2

চিত্র-1 হতে , $\sec^{-1}\frac{13}{5}=\tan^{-1}\frac{12}{5}$ এবং

চিত্র -2 হতে, $\text{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}=\tan^{-1}2$

L.H.S. $=\sec^{-1}\frac{13}{5}-\text{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}$

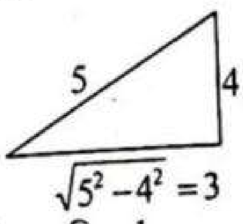
$=\tan^{-1}\frac{12}{5}-\tan^{-1}2$

$=\tan^{-1}\dfrac{\frac{12}{5}-2}{1+\frac{12}{5}.2}=\tan^{-1}(\frac{12-10}{5}\times\frac{5}{5+24})$

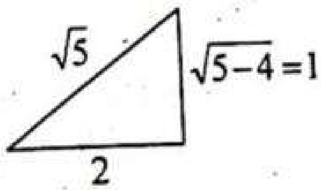
$=\tan^{-1}\frac{2}{29}=$ R.H.S. (Proved)

1(e) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\tan^{-1}\frac{11}{2}$

[কু. '০০,'০৫; সি.'০৫,'১২; চ.'০৫; দি.'০৯,'১৩; ব.'১০]



চিত্র-1



চিত্র-2

চিত্র-1 হতে , $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\tan^{-1}\frac{4}{3}$ এবং

চিত্র -2 হতে , $\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\tan^{-1}\frac{1}{2}$

$$\text{L.H.S.} = \sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{3}.\frac{1}{2}}$$

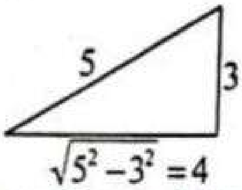
$$= \tan^{-1}\frac{\frac{8+3}{6}}{\frac{6-4}{6}} = \tan^{-1}\left(\frac{11}{6}\times\frac{6}{2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\frac{11}{2} = \text{R.H.S (Proved)}$$

1(f) $\cot^{-1}\frac{5}{3} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{27}{11}$ [বুয়েট'০৩-০৪]

পাশের চিত্র হতে আমরা পাই,

$$\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$$



চিত্র-1

$$\text{L.H.S.} = \tan^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{5}+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}} = \tan^{-1}\frac{\frac{12+15}{20}}{\frac{20-9}{20}}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{27}{20}\times\frac{20}{11}\right) = \tan^{-1}\frac{27}{11} = \text{R.H.S.}$$

2. $\tan^{-1}\frac{7}{11} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{13} = \frac{\pi}{4}$

$$\text{L.H.S.} = \tan^{-1}\frac{7}{11} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{13}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{7}{11}+\frac{1}{7}}{1-\frac{7}{11}.\frac{1}{7}} + \tan^{-1}\frac{1}{13}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{49+11}{22}\times\frac{22}{77-7}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{13}$$

$$= \tan^{-1}\frac{60}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{13} = \tan^{-1}\frac{6}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{13}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{6}{7}+\frac{1}{13}}{1-\frac{6}{7}.\frac{1}{13}} = \tan^{-1}\left(\frac{78+7}{91}\times\frac{91}{91-6}\right)$$

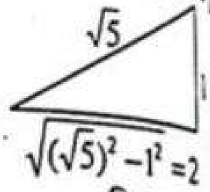
$$= \tan^{-1}\frac{85}{85} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} = \text{R.H.S.(Proved)}$$

3(a) $4(\cot^{-1}3 + \text{cosec}^{-1}\sqrt{5}) = \pi$

[ব.'০২,'০৪; চ.'০৪; ঢা.'০৬]

পাশের চিত্র হতে আমরা পাই,

$$\text{cosec}^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$$



চিত্র

L.H.S.

$$= 4(\cot^{-1}3 + \text{cosec}^{-1}\sqrt{5})$$

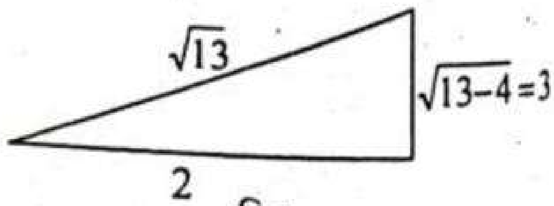
$$= 4\left(\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2}\right) = 4\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}}$$

$$= 4.\tan^{-1}\left(\frac{3+2}{6}\times\frac{6}{6-1}\right) = 4\tan^{-1}\frac{5}{5}$$

$$= 4\tan^{-1}1 = 4.\frac{\pi}{4} = \pi = \text{R.H.S}$$

3(b) $\tan^{-1}\frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2}$

[চ.'০৪; ঢা.'০২,'১১; য.'০৮; ব.'০৯; সি.'১০]



চিত্র

চিত্র হতে আমরা পাই, $\sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2} = \tan^{-1}\frac{3}{2}$

এখন, $\tan^{-1}\frac{2}{3} + \sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2} = \tan^{-1}\frac{2}{3} + \tan^{-1}\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{2}{3} + \sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2} = \tan^{-1}\frac{2}{3} + \cot^{-1}\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{2}{3} + \sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\pi}{2}$

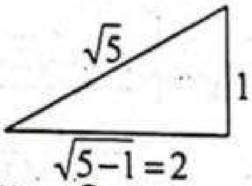
$\therefore \tan^{-1}\frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2}$

3(c) $4\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1}3\right) = \pi$

[ব.'০৭; ঢা.'০৯ ; য.'১১; দি.'১২]

পাশের চিত্র হতে আমরা পাই ,

$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$



চিত্র

L.H.S.= $4(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1}3)$

$= 4(\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3})$

$= 4\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}} = 4\,.\tan^{-1}(\frac{3+2}{6}\times\frac{6}{6-1})$

$= 4\tan^{-1}\frac{5}{5} = 4\tan^{-1}1 = 4.\frac{\pi}{4} = \pi = $ R.H.S

4(a) $\tan^{-1}(\frac{x\cos\theta}{1-x\sin\theta}) - \tan^{-1}(\frac{x-\sin\theta}{\cos\theta}) = \theta$

L.H.S. $= \tan^{-1}(\frac{x\cos\theta}{1-x\sin\theta}) - \tan^{-1}(\frac{x-\sin\theta}{\cos\theta})$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{x\cos\theta}{1-x\sin\theta} - \frac{x-\sin\theta}{\cos x}}{1+\frac{x\cos\theta}{1-x\sin\theta}.\frac{x-\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \tan^{-1}\frac{x\cos^2\theta-(x-\sin\theta)(1-x\sin\theta)}{\cos\theta(1-x\sin\theta)+x\cos\theta(x-\sin\theta)}$

$= \tan^{-1}\frac{x\cos^2\theta-(x-x^2\sin\theta-\sin\theta+x\sin^2\theta)}{\cos\theta-x\sin\theta\cos\theta+x^2\cos\theta-x\sin\theta\cos\theta}$

$= \tan^{-1}\frac{x(1-\sin^2\theta)-x+x^2\sin\theta+\sin\theta-x\sin^2\theta}{x^2\cos\theta-2x\sin\theta\cos\theta+\cos\theta}$

$= \tan^{-1}\frac{x-x\sin^2\theta-x+x^2\sin\theta+\sin\theta-x\sin^2\theta}{(x^2-2x\sin\theta+1)\cos\theta}$

$= \tan^{-1}\frac{(x^2-2x\sin\theta+1)\sin\theta}{(x^2-2x\sin\theta+1)\cos\theta}$

$= \tan^{-1}\tan\theta = \theta = $ R.H.S. (Proved)

4(b) $\tan^{-1}\frac{m}{n} - \tan^{-1}\frac{m-n}{m+n} = \frac{\pi}{4}$ [প্র.ভ.প.'১৭]

L.H.S.= $\tan^{-1}\frac{m}{n} - \tan^{-1}\frac{m-n}{m+n}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{m}{n}-\frac{m-n}{m+n}}{1+\frac{m}{n}.\frac{m-n}{m+n}}$

$= \tan^{-1}\frac{m^2+mn-mn+n^2}{mn+n^2+m^2-mn}$

$= \tan^{-1}\frac{m^2+n^2}{n^2+m^2} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} = $ **R.H.S.**

4(c) $\tan^{-1}\frac{1}{m+n} - \tan^{-1}\frac{n}{m^2+mn+1} = \tan^{-1}\frac{1}{m}$

L.H.S.= $\tan^{-1}\frac{1}{m+n} + \tan^{-1}\frac{n}{m^2+mn+1}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{m+n}+\frac{n}{m^2+mn+1}}{1-\frac{1}{m+n}.\frac{n}{m^2+mn+1}}$

$= \tan^{-1}\frac{m^2+mn+1+mn+n^2}{m^3+m^2n+m+m^2n+mn^2+n-n}$

$= \tan^{-1}\frac{m^2+2mn+1+n^2}{m(m^2+2mn+1+n^2)}$

$= \tan^{-1}\frac{1}{m} = $ **R.H.S.** (Proved)

4(d) $\tan^{-1}\{(\sqrt{2}+1)\tan\alpha\} - \tan^{-1}\{(\sqrt{2}-1)\tan\alpha\} = \tan^{-1}(\sin 2\alpha)$

[কু.'০১; চ.'১০; দি.'১৩]

L.H.S. =

$\tan^{-1}\{(\sqrt{2}+1)\tan\alpha\} - \tan^{-1}\{(\sqrt{2}-1)\tan\alpha\}$

$= \tan^{-1}\dfrac{(\sqrt{2}+1)\tan\alpha-(\sqrt{2}-1)\tan\alpha}{1+(\sqrt{2}+1)\tan\alpha(\sqrt{2}-1)\tan\alpha}$

$= \tan^{-1}\dfrac{(\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1)\tan\alpha}{1+(2-1)\tan^2\alpha}$

$= \tan^{-1}\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \tan^{-1}(\sin 2\alpha) = $ R.H.S.

4(e) $\tan^{-1}\dfrac{a^2-b^2}{1+a^2b^2} + \tan^{-1}\dfrac{b^2-c^2}{1+b^2c^2} + \tan^{-1}\dfrac{c^2-a^2}{1+c^2a^2} = 0$

L.H.S. $= \tan^{-1}\dfrac{a^2-b^2}{1+a^2b^2} + \tan^{-1}\dfrac{b^2-c^2}{1+b^2c^2} + \tan^{-1}\dfrac{c^2-a^2}{1+c^2a^2}$

$= \tan^{-1}a^2 - \tan^{-1}b^2 + \tan^{-1}b^2 - \tan^{-1}c^2 + \tan^{-1}c^2 - \tan^{-1}a^2 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

5(a) $\sin^{-1}\dfrac{3}{5} + \sin^{-1}\dfrac{8}{17} = \sin^{-1}\dfrac{77}{85}$

L.H.S. $= \sin^{-1}\dfrac{3}{5} + \sin^{-1}\dfrac{8}{17}$

$= \sin^{-1}\left\{\dfrac{3}{5}\sqrt{1-\left(\dfrac{8}{17}\right)^2} + \dfrac{8}{17}\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\dfrac{3}{5}\sqrt{\dfrac{289-64}{289}} + \dfrac{8}{17}\sqrt{\dfrac{25-9}{25}}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\dfrac{3}{5}.\dfrac{15}{17} + \dfrac{8}{17}.\dfrac{4}{5}\right\} = \sin^{-1}\dfrac{45+32}{85}$

$= \sin^{-1}\dfrac{77}{85} =$ R.H.S. (Proved)

5(b) $\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ **[কু.'০২]**

L.H.S. $= \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$

$= \cos^{-1}\left\{\sqrt{\dfrac{2}{3}} \times \dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} + \sqrt{\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\left(1-\dfrac{(\sqrt{6}+1)^2}{(2\sqrt{3})^2}\right)}\right\}$

$= \cos^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{6}+1)}{6} + \sqrt{\dfrac{1}{3}.\dfrac{12-6-2\sqrt{6}-1^2}{12}}\right\}$

$= \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{2}}{6} + \dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{6}\right)$

$= \cos^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{2}-\sqrt{(\sqrt{3})^2-2.\sqrt{3}.\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}}{6}\right\}$

$= \cos^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}{6}\right\}$

$= \cos^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}\right) = \cos^{-1}\dfrac{3\sqrt{3}}{6}$

$= \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6} =$ R.H.S. (Proved)

5(c) $\sin^{-1}\dfrac{4}{5} + \sin^{-1}\dfrac{5}{13} + \sin^{-1}\dfrac{16}{65} = \dfrac{\pi}{2}$

[রুয়েট' ০৭-০৮]

L.H.S. $= \sin^{-1}\dfrac{4}{5} + \sin^{-1}\dfrac{5}{13} + \sin^{-1}\dfrac{16}{65}$

$= \sin^{-1}\left\{\dfrac{4}{5}\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2} + \dfrac{5}{13}\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}\right\} + \sin^{-1}\dfrac{16}{65}$

$= \sin^{-1}\left\{\dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{169-25}{169}} + \dfrac{5}{13}\sqrt{\dfrac{25-16}{25}}\right\} + \sin^{-1}\dfrac{16}{65}$

$= \sin^{-1}\left\{\dfrac{4}{5}.\dfrac{12}{13} + \dfrac{5}{13}.\dfrac{3}{5}\right\} + \sin^{-1}\dfrac{16}{65}$

$= \sin^{-1}\dfrac{48+15}{65} + \sin^{-1}\dfrac{16}{65}$

$= \sin^{-1}\dfrac{63}{65} + \sin^{-1}\dfrac{16}{65}$

$= \sin^{-1}\left\{\frac{63}{65}\sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2}+\frac{16}{65}\sqrt{1-\left(\frac{63}{65}\right)^2}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\frac{63}{65}\sqrt{\frac{4225-256}{4225}}+\frac{16}{65}\sqrt{\frac{4225-3969}{4225}}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\frac{63}{65}\sqrt{\frac{3969}{4225}}+\frac{16}{65}\sqrt{\frac{256}{4225}}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\frac{63}{65}.\frac{63}{65}+\frac{16}{65}.\frac{16}{65}\right\}$

$= \sin^{-1}\frac{3969+256}{4225}$

$= \sin^{-1}\frac{4225}{4225} = \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}$ = R.H.S .

5(d) $\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\Theta) - \cos^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta}) = 0$ **[প্র.ভ.প.'১১]**

L.H.S.= $\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)-\cos^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)-\sin^{-1}(\sqrt{1-(\sqrt{\cos 2\theta})^2}$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)-\sin^{-1}(\sqrt{1-\cos 2\theta}$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)-\sin^{-1}(\sqrt{2\sin^2\theta})$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)-\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)$

= 0 = R.H.S. (Proved)

6(a) $\tan^{-1}\frac{3}{4} - 2\tan^{-1}\frac{1}{5} = \cos^{-1}\frac{63}{65}$

L.H.S.= $\tan^{-1}\frac{3}{4} - 2\tan^{-1}\frac{1}{5}$

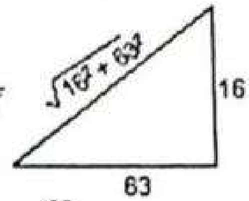
$= \tan^{-1}\frac{3}{4} - \tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2}$

$= \tan^{-1}\frac{3}{4} - \tan^{-1}(\frac{2}{5}\times\frac{25}{25-1})$

$= \tan^{-1}\frac{3}{4} - \tan^{-1}\frac{10}{24} = \tan^{-1}\frac{3}{4} - \tan^{-1}\frac{5}{12}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{1+\frac{3}{4}\frac{5}{12}} = \tan^{-1}(\frac{36-20}{48}\times\frac{48}{48+15})$

$= \tan^{-1}\frac{16}{63} = \cos^{-1}\frac{63}{\sqrt{16^2+63^2}}$



[পাশের চিত্র হতে]

$= \cos^{-1}\frac{63}{\sqrt{256+3969}} = \cos^{-1}\frac{63}{\sqrt{4225}}$

$= \cos^{-1}\frac{63}{65}$ = R.H.S.

6(b) $2\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4} = \tan^{-1}\frac{32}{43}$

L.H.S. = $2\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4}$

$= \tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2} + \tan^{-1}\frac{1}{4}$

$= \tan^{-1}(\frac{2}{5}\times\frac{25}{25-1}) + \tan^{-1}\frac{1}{4}$

$= \tan^{-1}\frac{5}{12} + \tan^{-1}\frac{1}{4} = \tan^{-1}\frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{12}.\frac{1}{4}}$

$= \tan^{-1}(\frac{20+12}{48}\times\frac{48}{48-5})$

$= \tan^{-1}\frac{32}{43}$ = R.H.S.

6(c) $2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$ **[রা.'০৩]**

L.H.S.= $2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \tan^{-1}(\frac{2}{3} \times \frac{9}{9-1}) + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \tan^{-1}(\frac{2}{3} \times \frac{9}{9-1}) + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}.\frac{1}{7}}$

$= \tan^{-1}(\frac{21+4}{28} \times \frac{28}{28-3}) = \tan^{-1}\frac{25}{25}$

$= \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} =$ R.H.S. (Proved)

6(d) $2\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

L.H.S. $= 2\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\tan^{-1}\frac{1}{8}$

$= \tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{8}}{1-(\frac{1}{8})^2}$

$= \tan^{-1}(\frac{2}{5} \times \frac{25}{25-1}) + \tan^{-1}\frac{1}{7} +$

$\tan^{-1}(\frac{2}{8} \times \frac{64}{64-1})$

$= \tan^{-1}\frac{5}{12} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{16}{63}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{7}}{1-\frac{5}{12}.\frac{1}{7}} + \tan^{-1}\frac{16}{63}$

$= \tan^{-1}(\frac{35+12}{84} \times \frac{84}{84-5}) + \tan^{-1}\frac{16}{63}$

$= \tan^{-1}\frac{47}{79} + \tan^{-1}\frac{16}{63} = \tan^{-1}\frac{\frac{47}{79}+\frac{16}{63}}{1-\frac{47}{79}\frac{16}{63}}$

$= \tan^{-1}(\frac{2961+1264}{4977} \times \frac{4977}{4977-752})$

$= \tan^{-1}\frac{4225}{4225} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$

6(e) $\tan(2\tan^{-1}x) = 2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$ [রা.'০১; ব.'০৫; কু.'০৭]

R.H.S. $= 2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$

$= 2\tan.\tan^{-1}\frac{x+x^3}{1-x.x^3} = 2\frac{x(1+x^2).}{(1+x^2)(1-x^2)}$

$= \frac{2x}{1-x^2} = \tan\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

$= \tan(2\tan^{-1}x) =$ L.H.S. = (Proved)

7(a) $4\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{17}} - \tan^{-1}\frac{79}{401} = \frac{\pi}{4}$

Proof : $4\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{17}} = 4\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{17})^2-1^2}}$

$= 4\tan^{-1}\frac{1}{4} = 2\tan^{-1}\frac{2\frac{1}{4}}{1-(\frac{1}{4})^2}$

$= 2\tan^{-1}(\frac{1}{2} \times \frac{16}{16-1}) = 2\tan^{-1}\frac{8}{15}$

$= \tan^{-1}\frac{2\frac{8}{15}}{1-(\frac{8}{15})^2} = \tan^{-1}(\frac{16}{15} \times \frac{225}{225-64})$

$= \tan^{-1}\frac{16.15}{161} = \tan^{-1}\frac{240}{161}$

L.H.S. $= 4\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{17}} - \tan^{-1}\frac{29}{40}$

$= \tan^{-1}\frac{240}{161} - \tan^{-1}\frac{79}{401} = \tan^{-1}\frac{\frac{240}{161}-\frac{79}{401}}{1+\frac{240}{161}.\frac{79}{401}}$

$= \tan^{-1}(\frac{96240-12719}{64561} \times \frac{64561}{64561+18960})$

$= \tan^{-1}\frac{83521}{83521} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} = \text{R.H.S.}$

7(b) $\cos(2\tan^{-1}\frac{1}{7}) = \sin(4\tan^{-1}\frac{1}{2})$

[রা.'০৩,'১৩]

L.H.S. $= \cos(2\tan^{-1}\frac{1}{7}) = \cos\cos^{-1}\frac{1-(\frac{1}{7})^2}{1+(\frac{1}{7})^2}$

$= \frac{49-1}{49+1} = \frac{48}{50} = \frac{24}{25}$

R.H.S. $= \sin(4\tan^{-1}\frac{1}{2}) = \sin 2(2\tan^{-1}\frac{1}{2})$

$= 2\sin(2\tan^{-1}\frac{1}{2})\cos(2\tan^{-1}\frac{1}{2})$

$= 2\sin(\sin^{-1}\frac{2\frac{1}{2}}{1+(\frac{1}{2})^2}).\cos\cos^{-1}\frac{1-(\frac{1}{2})^2}{1+(\frac{1}{2})^2}$

$= 2.1\times\frac{4}{4+1}.\frac{4-1}{4}\times\frac{4}{4+1} = 2.\frac{4}{5}.\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (Proved)

8(a) $2\tan^{-1}\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\} = \cos^{-1}\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}$

[ঢা.'০৫; কু.'০৮; সি.'০৯]

L.H.S. $= 2\tan^{-1}\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\}$

$= 2\tan^{-1}\{\frac{\sqrt{a-b}\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{a+b}\cos\frac{\theta}{2}}\}$

$= \cos^{-1}\frac{1-\frac{(a-b)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(a+b)\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{(a-b)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(a+b)\cos^2\frac{\theta}{2}}}$

$= \cos^{-1}\frac{(a+b)\cos^2\frac{\theta}{2}-(a-b)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(a+b)\cos^2\frac{\theta}{2}+(a-b)\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$= \cos^{-1}\frac{a(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})+b(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2})}{a(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2})+b(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})}$

$= \cos^{-1}\frac{a\cos\theta+b}{a+b\cos\theta} = \cos^{-1}\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}$

8(b) $2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$

$= \sin^{-1}\frac{2\sqrt{ab}\sin\theta}{b+a+(b-a)\cos\theta}$

[ঢা.'০৫; কু.'০৮; সি.'০৯; সি.'১৩; চট্টগ্রাম বোর্ড'০০-০১]

L.H.S.

$= 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = \sin^{-1}\frac{2\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\tan\frac{\theta}{2}}{1+\frac{a}{b}\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$= \sin^{-1}\frac{\frac{2\sqrt{a}\sin\theta/2}{\sqrt{b}\cos\theta/2}}{1+\frac{a\sin^2\theta/2}{b\cos^2\theta/2}}$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{a}\sin\theta/2}{\sqrt{b}\cos\theta/2}\times\frac{b\cos^2\theta/2}{b\cos^2\theta/2+a\sin^2\theta/2}\right)$$

$$=\sin^{-1}\frac{2\sqrt{a}\sin\theta/2\,.\,\sqrt{b}\cos\theta/2}{b\frac{1}{2}(1+\cos\theta)+a\frac{1}{2}(1-\cos\theta)}$$

$$=\sin^{-1}\frac{2\sqrt{ab}(2\sin\theta/2\,.\cos\theta/2)}{b+b\cos\theta+a-a\cos\theta)}$$

$$=\sin^{-1}\frac{2\sqrt{ab}\sin\theta}{b+a+(b-a)\cos\theta}=\text{R.H.S.}$$

8(c) $2\tan^{-1}\left\{\tan\frac{\alpha}{2}\ \tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})\right\}$

$$=\tan^{-1}\frac{\sin\alpha\ \cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}$$

$$\text{L.H.S.}=2\tan^{-1}\{\tan\frac{\alpha}{2}\ \tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})\}$$

$$=2\tan^{-1}\left\{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})}\right\}$$

$$=\tan^{-1}\frac{2\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})}}{1-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})}}$$

$$=\tan^{-1}\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})\cos\frac{\alpha}{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})}$$

এখন, $2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha\sin 2(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})=\frac{1}{2}\sin\alpha\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)$$

$=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\beta$ এবং

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})$$

$$=\{\cos\frac{\alpha}{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})+\sin\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})\}$$

$$\{\cos\frac{\alpha}{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})-\sin\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})\}$$

$$=\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4})\,.\cos(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4})$$

$$=\cos\{\frac{\alpha}{2}+(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4})\}.\cos\{\frac{\alpha}{2}-(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4})\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos 2.\frac{\alpha}{2}+\cos 2.(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4})\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos\alpha+\cos(\beta-\frac{\pi}{2})\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos\alpha+\sin\beta)$$

$$\therefore\ \text{L.H.S.}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\beta}{\frac{1}{2}(\sin\beta+\cos\alpha)}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}=\text{R.H.S.}$$

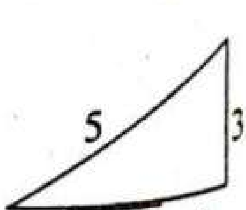
(Proved)

9(a) $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}-\cot^{-1}2=\tan^{-1}\frac{28}{29}$

[রা.'০০,'০৫; কু.'১২; ব., সি., চ.'১৩]

পাশের চিত্র হতে আমরা পাই ,

$$\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{3}{4}$$



চিত্র

মনে করি, $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}=\Theta$

$\cos 2\theta = \frac{5}{13}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$

$= \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1-\cos 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}}$

$= \frac{1-\frac{5}{13}}{\sqrt{1-\frac{25}{169}}} = \frac{\frac{13-5}{13}}{\sqrt{\frac{169-25}{169}}} = \frac{\frac{8}{13}}{\frac{12}{13}}$

$= \frac{8}{13}\times\frac{13}{12} = \frac{2}{3}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} = \tan^{-1}\frac{2}{3}$

L.H.S. $= \sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} - \cot^{-1}2$

$= \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{4}.\frac{2}{3}} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}(\frac{9+8}{12}\times\frac{12}{12-6}) - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{17}{6} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{17}{6}-\frac{1}{2}}{1+\frac{17}{6}.\frac{1}{2}} = \tan^{-1}(\frac{34-6}{12}\times\frac{12}{12+17})$

$= \tan^{-1}\frac{28}{29} =$ R.H.S. (Proved)

9(b) $\tan\{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\}$

$= \frac{2x}{1-x^2}$

L.H.S. $= \tan\{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\}$

$= \tan\{\tan^{-1}x + \tan^{-1}x) = \tan(2\tan^{-1})$

$= \tan\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2} =$ R.H.S.

9(c) $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5} = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{3}$ [চ.ভ.প.'১৩]

R.H.S. $= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1}\frac{1-\frac{1}{3}}{1+1.\frac{1}{3}} = \tan^{-1}(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}) = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}.2\tan^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\cos^{-1}\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}$

$= \frac{1}{2}\cos^{-1}(\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}) = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5} =$ L.H.S.

10(a) $\cos^{-1}x = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$

$= 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ [বুয়েট'০৪-০৫]

মনে করি, $\cos^{-1}x = \theta$. তাহলে $\cos\theta = x$

$\Rightarrow 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = x \Rightarrow 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1-x$

$\Rightarrow \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-x}{2} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$

$\Rightarrow \frac{\theta}{2} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}} \Rightarrow \theta = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$

$\therefore \cos^{-1}x = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ ……… (1)

আবার, $\cos\theta = x$

$\Rightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = x \Rightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1+x$

$\Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+x}{2} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

$\Rightarrow \frac{\theta}{2} = \cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}} \Rightarrow \theta = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$

$\therefore \cos^{-1}x = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}} \ldots\ldots\ldots (2)$

$\therefore$ (1) ও (2) হতে পাই,

$\cos^{-1}x = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}} = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$

10(b) $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$

[কু.'০৮; টেক্সটাইল' ০৮-০৯]

L. H. S. $= \tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}.2\tan^{-1}\sqrt{x}$

$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-(\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x} =$ R.H.S.

10(c) $\cos^{-1}\left\{1+\cos(2\tan^{-1}\frac{x}{a})\right\}^{\frac{1}{2}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}}$

L.H.S. $= \cos^{-1}\{1+\cos(2\tan\frac{x}{a})\}^{\frac{1}{2}}$

$= \sin^{-1}\sqrt{1-\{1+\cos(2\tan\frac{x}{a})\}}$

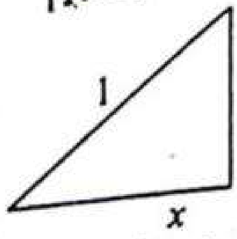
$= \sin^{-1}\sqrt{1-1-\cos(2\tan\frac{x}{a})}$

$= \sin^{-1}\sqrt{-\cos\cos^{-1}\frac{1-(\frac{x}{a})^2}{1+(\frac{x}{a})^2}}$

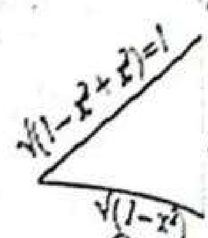
$= \sin^{-1}\sqrt{-\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}} =$ R.H.S.

(a) $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x = x$

[কু.'০৫; ঢা.'১২; ব.'০৯ ;সি. ০৭; রা.'০৮,'১১;



চিত্র -1



চিত্র - 2

L.H.S.$= \sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x$

$= \sin\cot^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ [চিত্র -1 হতে]

$= \sin\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ [চিত্র -2 হতে]

$= \sin\sin^{-1}\frac{x}{1} = \sin\sin^{-1}x = x =$ R.H.S.

11(b) $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}x = x$

[ব.'০১,'০২,'১১ ; চ.'০৩; সি.'০

L.H.S. $= \cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}x$

$= \cot\cos^{-1}\sin\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

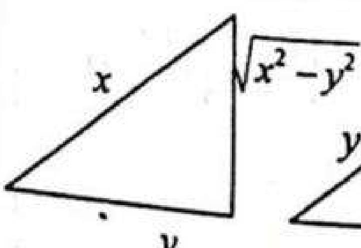
$= \cot\cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \cot\cot^{-1}\frac{x}{\sqrt{(\sqrt{1+x^2})^2-x^2}} = \cot\cot^{-1}\frac{x}{1}$

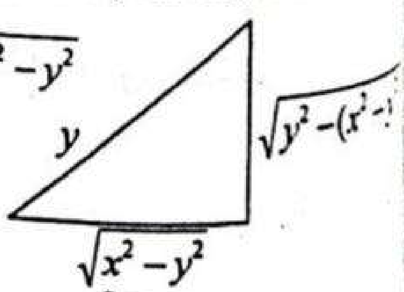
$= x =$R.H.S. (Proved)

11(c) $\sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$

[য.'০১,'০৯; ব.'০৪ ; সি.'০৫; দি.'০৯; ঢা.'১০



চিত্র–১



চিত্র–২

L.H.S. $= \sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{x}{y}$

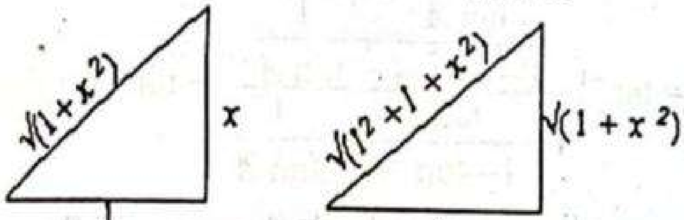
$= \sin\cos^{-1}\tan\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$ [চিত্র–১ হতে]

$= \sin\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

$= \sin\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$ [চিত্র-২ হতে]

$= \dfrac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$ = R.H.S. (Proved)

11(d) $\sin\cot^{-1}\cos\tan^{-1}x = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{2+x^2}}$



চিত্র - 1 চিত্র - 2

L.H.S. $= \sin\cot^{-1}\cos\tan^{-1}x$

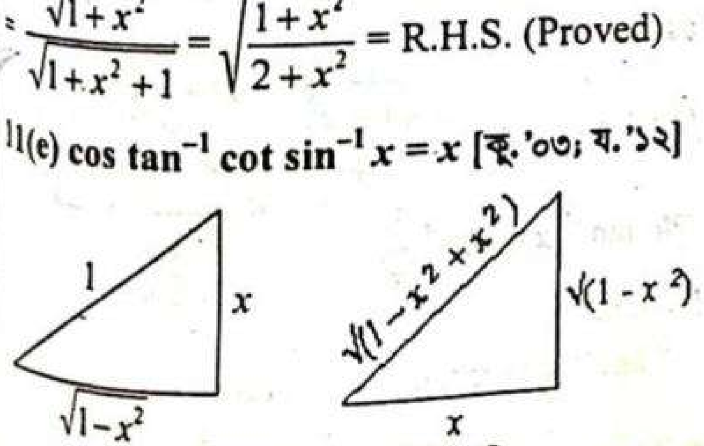
$= \sin\cot^{-1}\cos\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ [চিত্র -1 হতে]

$= \sin\cot^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \sin\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2+1}}$ [চিত্র -2 হতে]

$= \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2+1}} = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{2+x^2}}$ = R.H.S. (Proved)

11(e) $\cos\tan^{-1}\cot\sin^{-1}x = x$ [কু.'০৩; য.'১২]



চিত্র -1 চিত্র -2

L.H.S. $= \cos\tan^{-1}\cot\sin^{-1}x$

$= \cos\tan^{-1}\cot\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ [চিত্র -1 হতে]

$= \cos\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$= \cos\cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2+x^2}}$ [চিত্র -2 হতে]

$= \dfrac{x}{\sqrt{1}} = x$ = R.H.S. (Proved).

11(f) $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}$

[ঢা.'০২; প্র.ভ.প.'০৪]

L.H.S. $= \cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$

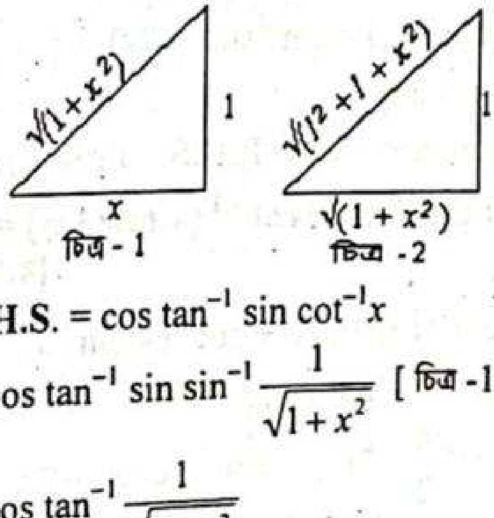
$= \cot\cos^{-1}\sin\sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$= \cot\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{5^2}} = \cot\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$

$= \cot\cot^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{5^2-3^2}} = \dfrac{3}{4}$ = R.H.S. (Proved)

11(g) $\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{2+x^2}}$

[কু.'০২]



চিত্র - 1 চিত্র - 2

L.H.S. $= \cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x$

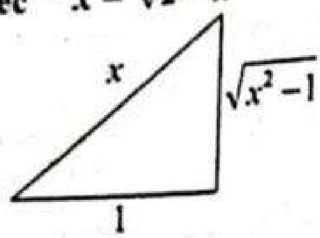
$= \cos\tan^{-1}\sin\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ [চিত্র -1 হতে]

$= \cos\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \cos\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}$ [চিত্র -2 হতে]

$= \sqrt{\dfrac{1+x^2}{2+x^2}} =$ R.H.S. (Proved)

12(a) $\sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}x = \sqrt{2-x^2}$



চিত্র

L.H.S. .

$= \sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}x$

$= \sin\cos^{-1}\tan\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{1}$ [চিত্র -1 হতে]

$= \sin\cos^{-1}\sqrt{x^2-1}$

$= \sin\sin^{-1}\sqrt{1-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$

$= \sqrt{1-x^2+1} = \sqrt{2-x^2} =$ R.H.S. (Proved)

12(b) $\sin^{-1}(-\cos x) + \sin^{-1}(\cos 3x) = -2x$

[ঢা.'০৩, সি.'০৯]

L.H.S. $= \sin^{-1}(-\cos x) + \sin^{-1}(\cos 3x)$

$= \sin^{-1}(\cos 3x) - \sin^{-1}(\cos x)$

$= \sin^{-1}\{\cos 3x\sqrt{1-\cos^2 x} - \cos x\sqrt{1-\cos^2 3x}\ \}$

$= \sin^{-1}(\ \cos 3x\sqrt{\sin^2 x} - \cos x\sqrt{\sin^2 3x}\ )$

$= \sin^{-1}(\ \cos 3x\ .\ \sin x - \cos x\sin 3x)$

$= \sin^{-1}\sin(x-3x) = \sin^{-1}\sin(-2x)$

$= \sin^{-1}(-\sin 2x)$

$= -\sin^{-1}\sin 2x = -2x =$ R.H.S. (Proved)

(c) $\cot^{-1}(\tan 2x) + \cot^{-1}(-\tan 3x) = x$

[ব.'১১]

L.H.S.$= \cot^{-1}(\tan 2x) + \cot^{-1}(-\tan 3x)$

$= \cot^{-1}(\tan 2x) - \cot^{-1}(\tan 3x)$

$= \cot^{-1}\{\cot(\frac{\pi}{2}-2x)\} - \cot^{-1}\{\cot(\frac{\pi}{2}-3x)\}$

$= \dfrac{\pi}{2} - 2x - \dfrac{\pi}{2} + 3x = x =$ R.H.S. (Proved)

12(d) $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2A) + \tan^{-1}(\cot A) + \tan^{-1}(\cot^3 A) = 0$ [র.'

L.H.S.$= \tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2A) + \tan^{-1}(\cot A) + \tan^{-1}(\cot^3 A)$

$= \tan^{-1}(\dfrac{1}{2}\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}) + \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\tan A}\right) + \tan^{-1}(\cot^3 A)$

$= \tan^{-1}(\dfrac{\tan A}{1-\tan^2 A}) + \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\tan A}\right) + \tan^{-1}(\cot^3 A)$

$= \tan^{-1}\dfrac{\dfrac{\tan A}{1-\tan^2 A} + \dfrac{1}{\tan A}}{1 - \dfrac{\tan A}{1-\tan^2 A}\times\dfrac{1}{\tan A}} + \tan^{-1}(\cot^3 A)$

$= \tan^{-1}\dfrac{\tan^2 A + 1 - \tan^2 A}{\tan A - \tan^3 A - \tan A} + \tan^{-1}(\cot^3 A)$

$= \tan^{-1}(\dfrac{1}{-\tan^3 A}) + \tan^{-1}(\cot^3 A)$

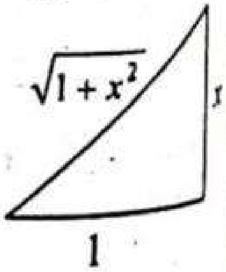
$= \tan^{-1}(-\cot^3 A) + \tan^{-1}(\cot^3 A)$

$= -\tan^{-1}(\cot^3 A) + \tan^{-1}(\cot^3 A)$

$= 0 =$ R.H.S. (Proved)

12(e) $2\tan^{-1}(\ \text{cosec}\tan^{-1}x - \tan\cot^{-1}x) = \tan^{-1}x$ [রা.'০২,'১১; সি.'০২,'০৪; দি.'১০; ব.'

চিত্র হতে পাই,



চিত্র

$\tan^{-1}x = \text{cosec}^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

এবং $\tan^{-1}x = \cot^{-1}\dfrac{1}{x}$

L.H.S.

$= 2\tan^{-1}(\text{cosec}\tan^{-1}x - \tan\cot^{-1}x)$

$= 2\tan^{-1}(\text{cosec}\ \text{cosec}^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \tan\tan^{-1}$

$$= 2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right) = 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}}{1-\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\dfrac{2(\sqrt{1+x^2}-1)}{x}}{\dfrac{x^2-(1+x^2-2\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\dfrac{2(\sqrt{1+x^2}-1)}{x}}{\dfrac{x^2-1-x^2+2\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\dfrac{2(\sqrt{1+x^2}-1)}{x}}{\dfrac{2(\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2}}$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{2(\sqrt{1+x^2}-1)}{x} \times \frac{x^2}{2(\sqrt{1+x^2}-1)}\right\}$$

$= \tan^{-1}x =$ R.H.S. (Proved)

12(f) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right) = \frac{2b}{a}$

মনে করি, $\cos^{-1}\frac{a}{b} = x \Rightarrow \frac{a}{b} = \cos x$

L.H.S. $= \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}$$

$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}) + \sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}$$

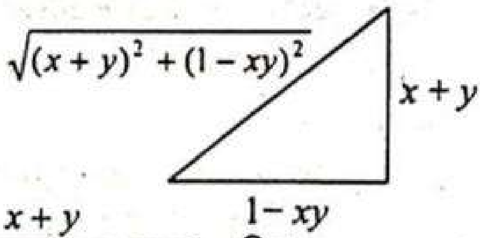
$$= \frac{2\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}{2\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})} = \frac{2\sin 2.\frac{\pi}{4}}{\cos 2.\frac{\pi}{4}+\cos 2.\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}+\cos x} = \frac{2}{0+\frac{a}{b}} = \frac{2b}{a} = \text{R.H.S.}$$

13(a) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \sin^{-1}\dfrac{x+y}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$

L.H.S. $= \tan^{-1}x + \tan^{-1}y$

$$= \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$



চিত্র

$$= \sin^{-1}\frac{x+y}{\sqrt{(x+y)^2+(1-xy)^2}}$$

$$= \sin^{-1}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy+y^2+1-2xy+x^2y^2}}$$

$$= \sin^{-1}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+1+x^2y^2}}$$

$$= \sin^{-1}\frac{x+y}{\sqrt{(1+x^2)+y^2(1+x^2)}}$$

$$= \sin^{-1}\frac{x+y}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

(b) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$

L.H.S. $= \tan^{-1}x+\tan^{-1}y$

$= \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} = \frac{1}{2}.2\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2\frac{x+y}{1-xy}}{1+(\frac{x+y}{1-xy})^2}$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2\frac{x+y}{1-xy}}{\frac{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2}{(1-xy)^2}}$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2(x+y)(1-xy)}{1+x^2y^2+x^2+y^2}$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$ = R.H.S. (Proved)

14(a) $\sec^2(\tan^{-1}2)+\operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3)=15$

[ঢা.'০৫,'০৭,'১৩; য.'০২,'০৭; ব.'০৫,'০৮,'১২; চ.'০৫]

L.H.S.

$= \sec^2(\tan^{-1}2)+\operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3)$

$= 1+\tan^2(\tan^{-1}2)+1+\cot^2(\cot^{-1}3)$

$= 2+(\tan\tan^{-1}2)^2+(\cot\cot^{-1}3)^2$

$= 2+2^2+3^2$

$= 2+4+9 = 15$ = R.H.S. (Proved)

14(b) $\sin^2(\cos^{-1}\frac{1}{3})-\cos^2(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{2}{9}$

[চ.'০৭; সি.'০২; য.'০৪; রা.'০৭; টেক্সটাইল'০৯-১০]

L.H.S. $= \sin^2(\cos^{-1}\frac{1}{3})-\cos^2(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}})$

$= 1-\cos^2(\cos^{-1}\frac{1}{3})-\{1-\sin^2(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}})\}$

$= 1-(\cos\cos^{-1}\frac{1}{3})^2-1+(\sin\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}})^2$

$= -(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = -\frac{1}{9}+\frac{1}{3}$

$= \frac{-1+3}{9} = \frac{2}{9}$ = R.HS. (Proved)

14(c) $\sec^2(\tan^{-1}4)+\tan^2(\sec^{-1}3)=25$

[ঢা.'০৩; কু.'১৩; রা.'১৩; চুয়েট'১১-১২]

L.H.S. $= \sec^2(\tan^{-1}4)+\tan^2(\sec^{-1}3)$

$= 1+(\tan\tan^{-1}4)^2+(\sec\sec^{-1}3)^2-1$

$= 4^2+3^2 = 16+9 = 25$ = R.H.S. (Proved)

14(d) $\sec^2(\cot^{-1}3)+\operatorname{cosec}^2(\tan^{-1}2)=2\frac{13}{36}$

L.H.S. $= \sec^2(\cot^{-1}3)+\operatorname{cosec}^2(\tan^{-1}2)$

$= \sec^2(\tan^{-1}\frac{1}{3})+\operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}\frac{1}{2})$

$= 1+\tan^2(\tan^{-1}\frac{1}{3})+1+\cot^2(\cot^{-1}\frac{1}{2})$

$= 2+(\tan\tan^{-1}\frac{1}{3})^2+(\cot\cot^{-1}\frac{1}{2})^2$

$= 2+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{2})^2$

$= 2+\frac{1}{9}+\frac{1}{4} = 2+\frac{4+9}{36} = 2\frac{13}{36}$

14(e) $\operatorname{cosec}^2(\tan^{-1}\frac{1}{2})-3\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3})=1$

[চ.'০১,'০

L.H.S. $= \operatorname{cosec}^2(\tan^{-1}\frac{1}{2})-3\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3})$

$= \operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}2)-3\sec^2(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}})$

$= 1+\cot^2(\cot^{-1}2)-3\{1+\tan^2(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}})\}$

$= 1+(\cot\cot^{-1}2)^2-3-3(\tan\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}})^2$

$= -2+2^2-3.\frac{1}{3} = -2+4-1 = 1$ = R.H.S

15(a) $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\theta$ হলে দেখাও যে,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy\cos\theta}{ab}+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta$ [য.'০৩,'১৩; ঢা.'০৬,'১১; রা.'০৬,'১০; ব.'০৮; চ.'০৯; কু.'০৯; সি.'১১]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\theta$

$$\Rightarrow \cos^{-1}\left\{\frac{x}{a}.\frac{y}{b}-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right\}=\theta$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{ab}-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}=\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{ab}-\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই,

$$\frac{x^2y^2}{a^2b^2}-2\frac{xy}{ab}\cos\theta+\cos^2\theta=(1-\frac{x^2}{a^2})(1-\frac{y^2}{b^2})$$

$$\Rightarrow \frac{x^2y^2}{a^2b^2}-2\frac{xy}{ab}\cos\theta$$

$$=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2y^2}{a^2b^2}-\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy\cos\theta}{ab}+\frac{y^2}{b^2}=1-\cos^2\theta$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy\cos\theta}{ab}+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta \quad \text{(Showed)}$$

(b) $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$ হলে দেখাও যে, $x=\frac{a-b}{1+ab}$ [সি.'০৩; য.'০৫; সি.'১১]

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$$\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow 2\tan^{-1}a-2\tan^{-1}b=2\tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow 2(\tan^{-1}a-\tan^{-1}b)=2\tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}=\tan^{-1}x$$

$$\therefore x=\frac{a-b}{1+ab} \quad \text{(Showed)}$$

15(c) $\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{1+y^2}{1-y^2}+\frac{1}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1+z^2}{2z}=\pi$ হলে দেখাও যে, $x+y+z=xyz$ [য.'০৪; চ.'১১]

প্রমাণ : $\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{1+y^2}{1-y^2}+$

$$\frac{1}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1+z^2}{2z}=\pi$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2z}{1+z^2}=\pi$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}=\pi$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}=\tan\pi=0$$

$$\Rightarrow x+y+z-xyz=0\times(1-xy-yz-zx)=0$$

$$\therefore x+y+z=xyz \quad \text{(Showed).}$$

16(a) $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$ হলে দেখাও যে, $\theta=\pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

[ঢা.,রা.,ব.'১০; সি.'১২; কু.'১৩]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$

$$\Rightarrow \sin(\pi\cos\theta)=\sin(\frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \pi\cos\theta=\frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta \Rightarrow \cos\theta\mp\sin\theta=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta+\sin^2\theta\mp 2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow 1 \mp \sin 2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow (1-\frac{1}{4}) = \pm \sin 2\theta$

$\Rightarrow \frac{3}{4} = \pm \sin 2\theta \Rightarrow \sin 2\theta = \pm \frac{3}{4}$

$\therefore 2\theta = \sin^{-1}(\pm \frac{3}{4}) = \pm \sin^{-1}\frac{3}{4}$

$\therefore \theta = \pm \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ (Showed)

16(b) $\sin(\pi \cos\theta) = \cos(\pi \sin\theta)$ হলে দেখাও যে, $\theta = \pm \frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$ [কু.'১২]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$

$\Rightarrow \sin(\pi\cos\theta) = \sin(\frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta)$

$\Rightarrow \pi\cos\theta = \frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta \Rightarrow \cos\theta \mp \sin\theta = \frac{1}{2}$

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ ভাগ দ্বারা করে পাই,

$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\theta\cos\frac{\pi}{4} \mp \sin\theta\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos(\theta \mp \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \theta \mp \frac{\pi}{4} = \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (Showed).

(c) $\sin(\pi\,\mathrm{cosec}\theta) = \cos(\frac{\pi}{2}\mathrm{cosec}\,\theta)$ হলে দেখাও যে, $\theta = \sin^{-1}(\frac{3}{4n+1})$ অথবা $\theta = \sin^{-1}(\frac{1}{1-4n})$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$\sin(\pi\,\mathrm{cosec}\,\theta) = \cos(\frac{\pi}{2}\mathrm{cosec}\theta)$

$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}\mathrm{cosec}\theta) = \cos\{\frac{\pi}{2} - \pi\,\mathrm{cosec}\,\theta\}$

$\therefore \frac{\pi}{2}\mathrm{cosec}\,\theta = 2n\pi \pm (\frac{\pi}{2} - \pi\,\mathrm{cosec}\,\theta)$

$\therefore \frac{\pi}{2}\mathrm{cosec}\,\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \pi\,\mathrm{cosec}\,\theta$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\mathrm{cosec}\,\theta = 2n + \frac{1}{2} = \frac{4n+1}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{4n+1}{3} \Rightarrow \sin\theta = \frac{3}{4n+1}$

$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{3}{4n+1}$

অথবা, $\frac{\pi}{2}\mathrm{cosec}\,\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + \pi\,\mathrm{cosec}\,\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{cosec}\,\theta = 2n - \frac{1}{2} + \mathrm{cosec}\,\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{2} - 2n$

$\Rightarrow \mathrm{cosec}\,\theta = 1-4n \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{1-4n}$

$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{1}{1-4n}$

$\therefore \theta = \sin^{-1}\frac{3}{4n+1}$ অথবা $\theta = \sin^{-1}\frac{1}{1-4n}$

(Showed)

17(a) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-y^2}\} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-y^2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

(b) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$ হলে দেখাও যে, $x^2+y^2+z^2+2xyz = 1$ [কু.'১২;প্র.ভ.প.'১৪]

প্রমাণ ঃ $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$

$\Rightarrow \cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \pi - \cos^{-1}z$

$\Rightarrow \cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\} = \pi - \cos^{-1}z$

$\Rightarrow xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = \cos(\pi - \cos^{-1}z)$

$\Rightarrow xy-\sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2}$

$= -\cos(\cos^{-1}z) = -z$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2} = xy+z$

$\Rightarrow 1-x^2-y^2+x^2y^2 = x^2y^2+2xyz+z^2$

$\therefore x^2+y^2+z^2+2xyz = 1$ (Showed)

17(c) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $xy+yz+zx=1$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}z$

$\Rightarrow \frac{x+y}{1-xy} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}z\right)$

$\Rightarrow \frac{x+y}{1-xy} = \cot(\tan^{-1}z) = \cot(\cot^{-1}\frac{1}{z}) = \frac{1}{z}$

$\Rightarrow xz+yz = 1-xy$

$\therefore xy+yz+zx = 1$ (Showed)

17(d) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$ হলে দেখাও যে, $x+y+z = xyz$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} = \pi - \tan^{-1}z$

$\Rightarrow \frac{x+y}{1-xy} = \tan(\pi - \tan^{-1}z)$

$= -\tan(\tan^{-1}z) = -z$

$\Rightarrow x+y = -z+xyz$

$\therefore x+y+z = xyz$ (Showed)

(e) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = \pi$ হলে দেখাও যে, $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$

প্রমাণ : মনে করি, $\sin^{-1}x = A \Rightarrow \sin A = x$

$\sin^{-1}y = B \Rightarrow \sin B = y$ এবং

$\sin^{-1}z = C \Rightarrow \sin C = z$

$\therefore A+B+C = \pi$

এখন, $A+B+C=\pi$ হলে,

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$

$\Rightarrow 2\sin A\cos B + 2\sin B\cos B +$

$2\sin C\cos C = 4\sin A\sin B\sin C$

$\Rightarrow \sin A\sqrt{1-\sin^2 A} + \sin B\sqrt{1-\sin^2 B}$

$+ \sin C\sqrt{1-\sin^2 C} = 2\sin A\sin B\sin C$

$\Rightarrow x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$

18(a) $\sec\theta - \operatorname{cosec}\theta = \frac{4}{3}$ হলে দেখাও যে, $\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sec\theta - \operatorname{cosec}\theta = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\sin\theta} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow 3(\sin\theta - \cos\theta) = 2\sin 2\theta$

$\Rightarrow 9(\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$= 4\sin^2 2\theta$

$\Rightarrow 9(1-\sin 2\theta) = 4\sin^2 2\theta$

$\Rightarrow 4\sin^2 2\theta + 9\sin 2\theta - 9 = 0$

$\Rightarrow 4\sin^2 2\theta + 12\sin 2\theta - 3\sin 2\theta - 9 = 0$

$\Rightarrow 4\sin 2\theta(\sin 2\theta + 3) - 3(\sin 2\theta + 3) = 0$

$\Rightarrow (\sin 2\theta + 3)(4\sin 2\theta - 3) = 0$

এখানে, $\sin 2\theta \neq -3$ $[\because -1 \leq \sin\theta \leq 1]$

$\therefore 4\sin 2\theta - 3 = 0 \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 2\theta = \sin^{-1}\frac{3}{4}$ $\therefore \theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ (Showed)

18(b) $\tan(\theta-\alpha)\tan(\theta-\beta)=\tan^2\theta$ হলে দেখাও যে, $\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$\tan(\theta-\alpha)\tan(\theta-\beta)=\tan^2\theta$

$\Rightarrow \frac{\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)\cos(\theta-\beta)}=\tan^2\theta$

$\Rightarrow \frac{\cos(\theta-\alpha)\cos(\theta-\beta)}{\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)}=\frac{1}{\tan^2\theta}$

$\Rightarrow \frac{\cos(\theta-\alpha)\cos(\theta-\beta)+\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)\cos(\theta-\beta)-\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)}$

$=\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$ [যোজন- বিয়োজন করে।]

$\Rightarrow \frac{\cos(\theta-\alpha-\theta+\beta)}{\cos(\theta-\alpha+\theta-\beta)}=\frac{1}{\cos 2\theta}$

$\Rightarrow \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\{2\theta-(\alpha+\beta)\}}=\frac{1}{\cos 2\theta}$

$\Rightarrow \cos 2\theta\cos(\alpha+\beta)+\sin 2\theta\sin(\alpha+\beta)$
$=\cos 2\theta\cos(\alpha-\beta)$

$\Rightarrow \sin 2\theta\sin(\alpha+\beta)=$
$\cos 2\theta\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$

$\Rightarrow \sin 2\theta\sin(\alpha+\beta)=\cos 2\theta\,.\,2\sin\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow \tan 2\theta=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\Rightarrow 2\theta=\tan^{-1}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\therefore\ \theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ (Showed)

18(c) $A+B+C=\pi$, $A=\tan^{-1}2$ এবং $B=\tan^{-1}3$ হলে দেখাও যে, $C=\frac{\pi}{4}$

[চ.'০৭,'১৩; ব.'০৭; ঢা.'০৮]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $A+B+C=\pi$ ……(1),

$A=\tan^{-1}2\Rightarrow\tan A=2$ এবং

$B=\tan^{-1}3\Rightarrow\tan B=3$

এখন, $A+B=\pi-C$

$\Rightarrow \tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$\Rightarrow \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$

$\Rightarrow \frac{2+3}{1-2.3}=-\tan C\Rightarrow\frac{5}{-5}=-\tan C$

$\Rightarrow \tan C=\tan\frac{\pi}{4}\quad\therefore\ C=\frac{\pi}{4}$ (Showed)

19(a) দেখাও যে, $\tan^{-1}6+\tan^{-1}\frac{7}{5}=\frac{3\pi}{4}$

প্রমাণ ঃ $\tan^{-1}6+\tan^{-1}\frac{7}{5}=\tan^{-1}\frac{6+\frac{7}{5}}{1-6\times\frac{7}{5}}$

$=\tan^{-1}\frac{37}{5-42}=\tan^{-1}\frac{37}{-37}=\pi-\tan^{-1}\frac{37}{37}$

$=\pi-\tan^{-1}1=\pi-\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \tan^{-1}6+\tan^{-1}\frac{7}{5}=\frac{3\pi}{4}$ (Showed)

19(b) প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}5+\tan^{-1}6+\tan^{-1}7+\tan^{-1}8=2\pi-\tan^{-1}\frac{8}{11}$

প্রমাণ ঃ $\tan^{-1}5+\tan^{-1}6+\tan^{-1}7+\tan^{-1}8$

$=\tan^{-1}\frac{5+6}{1-5\times6}+\tan^{-1}\frac{7+8}{1-7\times8}$

$=\tan^{-1}\frac{11}{-29}+\tan^{-1}\frac{15}{-55}$

$=\pi-\tan^{-1}\frac{11}{29}+\pi-\tan^{-1}\frac{3}{11}$

$=2\pi-\tan^{-1}\frac{\frac{11}{29}+\frac{3}{11}}{1-\frac{11}{29}.\frac{3}{11}}=2\pi-\tan^{-1}\frac{\frac{121+87}{29.11}}{\frac{319-33}{29.11}}$

$= 2\pi - \tan^{-1}(\frac{208}{29.11} \times \frac{29.11}{286})$

$= 2\pi - \tan^{-1}\frac{8}{11} =$ R.H.S. (Proved)

20. সমাধান কর :

(a) $\sec^{-1}\frac{x}{2} - \sec^{-1}\frac{x}{3} = \sec^{-1}3 - \sec^{-1}2$

$\Rightarrow \cos^{-1}\frac{2}{x} - \cos^{-1}\frac{3}{x} = \cos^{-1}\frac{1}{3} - \cos^{-1}\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos^{-1}\frac{2}{x} + \cos^{-1}\frac{1}{2} = \cos^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\frac{3}{x}$

$\Rightarrow \cos^{-1}\{\frac{2}{x}.\frac{1}{2} - \sqrt{(1-\frac{4}{x^2})(1-\frac{1}{4})}\} =$

$\cos^{-1}\{\frac{1}{3}.\frac{3}{x} - \sqrt{(1-\frac{1}{9})(1-\frac{9}{x^2})}\}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}.\frac{3}{4}} = \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{8}{9}\frac{x^2-9}{x^2}}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}.\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{8}{9}\frac{x^2-9}{x^2}}$

$\Rightarrow \frac{3x^2-12}{4x^2} = \frac{8x^2-72}{9x^2}$

$\Rightarrow 27x^2 - 108 = 32x^2 - 288$ [এখানে $x \neq 0$]

$\Rightarrow 5x^2 = 180 \Rightarrow x^2 = 36$

$\therefore x = 6$

[যেহেতু ঋণাত্মক মান সমীকরণকে সিদ্ধ করে না]

20(b) $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$ [বুয়েট'০৬-০৭]

$\Rightarrow 2\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{2\frac{1-x}{1+x}}{1-(\frac{1-x}{1+x})^2} = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x)^2-(1-x)^2} = x$

$\Rightarrow \frac{2(1-x^2)}{4x} = x \Rightarrow 2x^2 = 1 - x^2$

$\Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (Ans.)

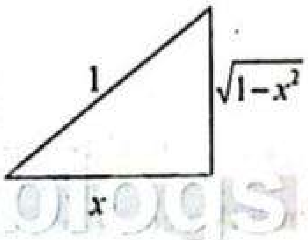
20(c) $\tan^{-1}x + 2\cot^{-1}x = \frac{2}{3}\pi$ [বুয়েট'১০-১১]

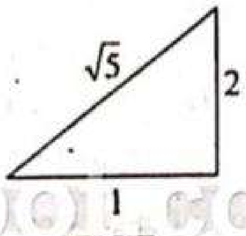
$\Rightarrow \tan^{-1}x + \cot^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{2}{3}\pi$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \cot^{-1}x = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow \cot^{-1}x = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cot^{-1}x = \frac{2}{3}\pi - \frac{4\pi-3\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ $\therefore x = \sqrt{3}$

20(d) $\tan(\cos^{-1}x) = \sin(\tan^{-1}2)$ [বুয়েট'১২-১৩]





চিত্র হতে পাই, $\cos^{-1}x = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ এবং

$\tan^{-1}2 = \sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

এখন, $\tan(\cos^{-1}x) = \sin(\tan^{-1}2)$

$\Rightarrow \tan(\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}) = \sin(\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}})$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow 4x^2 = 5 - 5x^2 \Rightarrow 9x^2 = 5$ $\therefore x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. দেখাও যে, $\cot^{-1}(2n-1) - \cot^{-1}(2n+1) = \cot^{-1}(2n^2)$. ইহার সাহায্যে দেখাও যে,

$\cot^{-1}(2.1^2) + \cot^{-1}(2.2^2) + \cot^{-1}(2.3^2)$
$= \cot^{-1}\dfrac{4}{3}$

প্রমাণ : $\cot^{-1}(2n-1) - \cot^{-1}(n+1)$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{2n-1} - \tan^{-1}\frac{1}{2n+1}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}}{1 + \dfrac{1}{2n-1}\cdot\dfrac{1}{2n+1}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\dfrac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}}{\dfrac{4n^2-1+1}{(2n-1)(2n+1)}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2}{4n^2} = \tan^{-1}\frac{1}{2n^2}$$

$\therefore \cot^{-1}(2n-1) - \cot^{-1}(n+1) = \cot^{-1}(2n^2)$.

এখন, $\cot^{-1}(2n-1) - \cot^{-1}(2n+1) = \cot^{-1}(2n^2)$

$n = 1, 2, 3, 4$ বসিয়ে আমরা পাই,

$\cot^{-1}1 - \cot^{-1}3 = \cot^{-1}(2.1^2)$

$\cot^{-1}3 - \cot^{-1}5 = \cot^{-1}(2.2^2)$

$\cot^{-1}5 - \cot^{-1}7 = \cot^{-1}(2.3^2)$

যোগ করে আমরা পাই, $\cot^{-1}1 - \cot^{-1}7 =$
$\cot^{-1}(2.1^2) + \cot^{-1}(2.2^2) + \cot^{-1}(2.3^2)$
$\Rightarrow \cot^{-1}(2.1^2) + \cot^{-1}(2.2^2) + \cot^{-1}(2.3^2)$

$$= \tan^{-1}1 - \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{1-\dfrac{1}{7}}{1+1.\dfrac{1}{7}} = \tan^{-1}\frac{6}{8}$$

$\therefore \cot^{-1}(2.1^2) + \cot^{-1}(2.2^2) + \cot^{-1}(2.3^2)$
$= \tan^{-1}\dfrac{3}{4} = \cot^{-1}\dfrac{4}{3}$

2. দেখাও যে, $\tan^{-1}(1+a) - \tan^{-1}a = \cot^{-1}(1+a+a^2)$.ইহার সাহায্যে দেখাও যে, $\cot^{-1}3 + \cot^{-1}7 + \cot^{-1}13 + \cot^{-1}21 = \cot^{-1}\dfrac{3}{2}$

প্রমাণ : $\tan^{-1}(1+a) - \tan^{-1}a$

$$= \tan^{-1}\frac{1+a-a}{1+(1+a).a} = \tan^{-1}\frac{1}{1+a+a^2}$$

$\therefore \tan^{-1}(1+a) - \tan^{-1}a = \cot^{-1}(1+a+a^2)$

$n = 1, 2, 3, 4$ বসিয়ে আমরা পাই,

$\tan^{-1}2 - \tan^{-1}1 = \cot^{-1}3$

$\tan^{-1}3 - \tan^{-1}2 = \cot^{-1}7$

$\tan^{-1}4 - \tan^{-1}3 = \cot^{-1}13$

$\tan^{-1}5 - \tan^{-1}4 = \cot^{-1}21$

যোগ করে আমরা পাই, $\tan^{-1}5 + \tan^{-1}1 =$
$\cot^{-1}3 + \cot^{-1}7 + \cot^{-1}13 + \cot^{-1}21$

3. দেখাও যে, $\cot^{-1}(1-a+a^2) = \tan^{-1}a - \tan^{-1}(a-1)$

প্রমাণ : $\tan^{-1}a - \tan^{-1}(a-1) = \tan^{-1}\dfrac{a-a+1}{1+a(a-1)}$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{1-a+a^2} = \cot^{-1}(1-a+a^2)$$

$\therefore \cot^{-1}(1-a+a^2) = \tan^{-1}a - \tan^{-1}(a-1)$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $\cos(\sin^{-1}\frac{1}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{4})$ এর মান–[DU 00-01]

Sol^n.: $\cos 90° = 0$ [$\because \sin x + \cos x = 90°$]

2. $\sin[2(\sin^{-1} + \cos^{-1})] = a$ হলে, a এর মান কত? [DU 97-98]

Sol^n.: $\sin(2.90°) = a \Rightarrow a = 0$

3. $\sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1}\dfrac{2b}{1+b^2}$ এর মান– [DU 06-07]

Sol^n.: প্রদত্ত রাশি $= 2\tan^{-1}a - (\frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}b)$

$$= 2\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab} - \frac{\pi}{2}$$

4. $\cot(\sin^{-1}\frac{1}{2})$ এর মান– [DU 98-99, 08-09]

Sol^n.: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, মান $=1.73=\sqrt{3}$

5. $\tan^{-1}6+\tan^{-1}\frac{7}{5}$ এর মান– [DU 07-08]

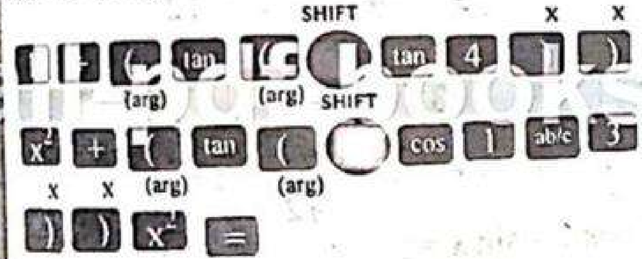
Sol^n.: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, মান $=135°=\frac{3\pi}{4}$

6. $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3$ এর মান–
[DU 03-04, 06-07; Jt.U 08-09; RU 05-06]

Sol^n.: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, মান $=180°=\pi$

7. $\sec^2(\tan^{-1}4)+\tan^2(\sec^{-1}3)$ এর মান–
[JU 06-07; EA 05-06]

Sol^n.: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, মান $=25$



8. যদি $A+B+C=\pi$, $\tan^{-1}2=A$ এবং $\tan^{-1}3=B$ হয় তবে $C=?$
[IU 04-05; CU 06-07; RU 06-07]

Sol^n.: $C=180°-(\tan^{-1}2+\tan^{-1}3)=45°$

9. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x=?$ [CU 04-05; RU 06-07]

কৌশল: $fn_1\,(cofn_2)^{-1}\,fn_2\,(cofn_1)^{-1}x=x$

Sol^n.: কৌশল অনুযায়ী , মান $=x$

10. $\tan^{-1}x+2\cot^{-1}x=\frac{2\pi}{3}$ হলে x এর মান–
[RU 07-08]

A. 0 B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\sqrt{3}$ D. 1

Sol^n.: $x=\sqrt{3}$ বসালে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। Ans.C

11. $\arctan\left\{\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ সমান-
DU 13-14

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

Sol^n.: $\arctan\{\sin(\arcsin\frac{\sqrt{3-2}}{\sqrt{3}})$

$=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$

12. যদি $\sin^{-1}x=\theta$ হয়, তবে $\cos\theta$-এর মান কত?
Jagannat 13-14

A. $1-x^2$ B. $\sqrt{1-x^2}$ C. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ D. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Sol^n.: $\sin^{-1}x=\theta\Rightarrow\sin\theta=x$

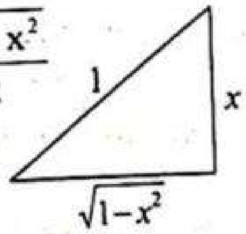
$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$

13. $\sin^{-1}x$ এর মান হবে- [Textile 13-14]

A. $\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ B. $\cot^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

C. $\cot^{-1}\sqrt{1-x^2}$ D. $\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Sol^n.: $\sin^{-1}x=\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$



ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

প্রশ্নমালা VII B

1. সমাধান কর ঃ

1(a) $\sin x + \cos x = 1$ [ঢ.'০৫; সি.'০৯; চ.'১০]

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sin x \sin\frac{\pi}{4} + \cos x \cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ x - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, যেখানে $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

$\therefore\ x = 2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2n\pi + \frac{\pi}{2} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

অথবা, $x = 2n\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2n\pi$; যেখানে $n \in \mathbb{Z}$.

1(b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

[ঢা., য.'০২; ব.,রা.'০৩; দি.'১০; বুয়েট'০২-০৩]

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4} = 1$

$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \ \therefore x - \frac{\pi}{4} = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x = 2n\pi + \frac{\pi}{4} = 2n\pi$

$n = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{4}$; $n = 1$ হলে, $x = 2\pi + \frac{\pi}{4}$;

$n = -1$ হলে, $x = -2\pi + \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{\pi}{4}$

1(c) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ [য.'০৯]

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ x - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

$\therefore\ x = 2n\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}$

অথবা, $x = 2n\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = 2n\pi - \frac{\pi}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}, 2n\pi - \frac{\pi}{12}; n \in \mathbb{Z}$

1(d) $\cos x - \sin x = 1$

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 2n\pi$ অথবা, $x = 2n\pi - 2.\frac{\pi}{4} = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2n\pi, (4n-1)\frac{\pi}{2}$

1(e) $\sin x + 2\cos x = 1$

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

মনে করি, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\therefore \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ এবং

$$\cos x\cos\theta + \sin x\sin\theta = \sin\theta$$

$$\Rightarrow \cos(x-\theta) = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$$

$$\therefore x-\theta = 2n\pi \pm (\frac{\pi}{2}-\theta), \ n\in Z.$$

$$\Rightarrow x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

অথবা, $x = 2n\pi - (\frac{\pi}{2} - 2\theta)$, যেখানে $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

$$\therefore \sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) = \cos 2\theta$$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

নির্ণেয় সমাধান, $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $2n\pi - \alpha$; যেখানে

$n\in Z$ এবং $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

1(f) $\cos\theta + 2\sin\theta = 1$ [চ.'০৪; বুয়েট'০৫-০৬]

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

মনে করি, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\therefore \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ এবং

$$\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha = \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos(x-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\therefore x - \alpha = 2n\pi \pm \alpha, \ n\in Z.$$

$$\Rightarrow x = 2n\pi, \ 2n\pi + 2\alpha$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2n\pi$, $2(n\pi + \alpha)$;

যেখানে $n\in Z$ এবং $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

√, √, 9

2(a) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$, $-2\pi < x < 2\pi$

[রা.'০৬,'০৮; সি. '০৮; ব.'০৪; য.'০৭,'১০;কু.'০৮]

উভয় পক্ষকে $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \ n\in Z.$$

$$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore x = 2n\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

অথবা, $x = 2n\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = 2n\pi - \frac{\pi}{6}$

$n = 0$ হলে, $x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

$n = -1$ হলে, $x = -2\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$

অথবা, $x = -2\pi - \frac{\pi}{6}$

$n = 1$ হলে, $x = 2\pi + \frac{\pi}{2}$

অথবা, $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান,

$$x = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$$

2(b) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$

[কু.'০০ ; চ.'০৩ ; সি.'০৪ ; ব.'০৫,'১২]

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6}$$

$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$

$\therefore \ x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $n \in Z$.

$\Rightarrow x = 2n\pi \ , 2n\pi + 2.\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $x = 2n\pi \ , 2n\pi + \frac{\pi}{3}$; $n \in Z$

2(c) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ [রা.'০৫; ঢা.'০৭]

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে পাই ,

$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore \ x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n \in Z$.

$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

$\therefore \ x = 2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = 2n\pi + \frac{5\pi}{12}$.

অথবা , $x = 2n\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = 2n\pi - \frac{\pi}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2n\pi - \frac{\pi}{12}$, $2n\pi + \frac{5\pi}{12}$; যেখানে $n \in Z$.

2(d) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$

[কু.'০৬; ব.'০৮; য.'০৯,'১২]

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে পাই ,

$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1$

$\Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3} = 1$

$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \ \therefore x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi$, $n \in Z$.

$\Rightarrow x = (6n + 1)\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = (6n + 1)\frac{\pi}{3}$; যেখানে $n \in Z$

3(a) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$, যখন $-2\pi < x < 2\pi$

[রা.'০৮,'১১; কু.'০৪; চ.'০৫; ঢা.'০৬,'০৯,'১০; টেক্সটাইল'০৩-০৪; বুয়েট'০৭-০৮; চুয়েট'০৭-০৮]

উভয় পক্ষকে $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = 1$

$\Rightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{6} - \cos x\sin\frac{\pi}{6} = 1$

$\Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

$\therefore \ x - \frac{\pi}{6} = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$, যেখানে $n \in Z$.

$\Rightarrow x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

$= 2n\pi + \frac{3\pi + \pi}{6} = 2n\pi + \frac{2\pi}{3}$

$n = 0$ হলে, $x = \frac{2\pi}{3}$.

$n = -1$ হলে , $x = -2\pi + \frac{2\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$.

$x = 1$ হলে , $x = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান, $x = -\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

3(b) $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 1$, যখন $-\pi < x < \pi$

[কু, দি.'১৩]

উভয় পক্ষকে $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে পাই ,

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

$\therefore x = 2n\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = 2n\pi + \frac{\pi}{12}$

অথবা, $x = 2n\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = 2n\pi - \frac{7\pi}{12}$

$n = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}$

$n = -1$ হলে, $x = -2\pi + \frac{\pi}{12}, -2\pi - \frac{7\pi}{12}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান, $x = -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}$

3(c) $\sin x + \cos x + \sqrt{2} = 0$

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$

$\Rightarrow \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = -1$

$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1$

$\therefore x + \frac{\pi}{4} = (4n - 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 2n\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 2n\pi - \frac{3\pi}{4} = (8n - 3)\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = (8n - 3)\frac{\pi}{4}$; যেখানে $n \in \mathbb{Z}$

3(d) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

[রা.'০১; কু.'০২,'০৬; ব.'০২,'০৮; য.'০৯]

উভয় পক্ষকে $\sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে পাই

$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{3} + \sin x \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$

$\therefore x = 2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}$

অথবা, $x = 2n\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = 2n\pi + \frac{\pi}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2n\pi + \frac{\pi}{12}, 2n\pi + \frac{7\pi}{12}$; $n \in \mathbb{Z}$

4(a) $\sqrt{2}\sec x + \tan x = 1$ [রা. '০২]

$\Rightarrow \sqrt{2}\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{2} + \sin x = \cos x \Rightarrow \cos x - \sin x = \sqrt{2}$

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = 1$

$\Rightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4} = 1$

$\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ $\therefore x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 2n\pi - \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2n\pi - \frac{\pi}{4}$; যেখানে $n \in \mathbb{Z}$.

4(b) $\text{cosec}\, x + \cot x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = -1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = -\frac{1}{2}$ [উভয় পক্ষকে $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে ।]

$\Rightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore\ x + \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 2n\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$

অথবা, $x = 2n\pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = (2n-1)\pi$

কিন্তু $x = (2n-1)\pi$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণ সিদ্ধ হয় না ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$; যেখানে $n \in \mathbb{Z}$

বিকল্প পদ্ধতি : $\text{cosec}\, x + \cot x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1+\cos x}{\sin x} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot\frac{x}{2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$; যেখানে $n \in \mathbb{Z}$

4(c) $2\cos x + 3\sin x = 1$

প্রদত্ত সমীকরণের উভয় পক্ষকে $\sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{2}{\sqrt{13}}\cos x + \frac{3}{\sqrt{13}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{13}}$

মনে করি, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$ এবং $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\therefore\ \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\therefore\ \cos x\cos\theta + \sin x\sin\theta = \cos\alpha$

$\Rightarrow \cos(x - \theta) = \cos\alpha$

$\therefore\ x - \theta = 2n\pi \pm \alpha$, $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \alpha + \theta$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2n\pi \pm \alpha + \theta$; যেখানে $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$ এবং $n \in \mathbb{Z}$.

4(d) $\text{cosec}\,\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cot\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \sqrt{2} = \tan\alpha$ (ধরি),

যেখানে $\tan\alpha = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = n\pi + \alpha \Rightarrow x = 2(n\pi + \alpha)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2(n\pi + \alpha)$; যেখানে $\tan\alpha = \sqrt{2}$ এবং $n \in \mathbb{Z}$

5. সমাধান :

(a) $6\cos^2\theta + \sin\theta = 5$

$\Rightarrow 6(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta = 5$

$\Rightarrow 6 - 6\sin^2\theta + \sin\theta = 5$

$\Rightarrow 6\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow 6\sin^2\theta - 3\sin\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow 3\sin\theta(2\sin\theta - 1) + 1(2\sin\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow (2\sin\theta - 1)(3\sin\theta + 1) = 0$

$2\sin\theta - 1 = 0$ হলে, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$, যেখানে $n \in \mathbb{Z}$

$3\sin\theta + 1 = 0$ হলে , $\sin\theta = -\frac{1}{3} = \sin\alpha$ (ধরি)

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\alpha , n\in\mathbb{Z}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$,

$n\pi + (-1)^n\alpha$; যেখানে $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ এবং $n\in\mathbb{Z}$

5(b) $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5, -2\pi < \theta < 2\pi$
[সি.'০৭ ; রা.,ব.,সি.'১০; চ.'১১; দি.'১২]

$\Rightarrow 4(1 - \cos^2\theta + \cos\theta) = 5$

$\Rightarrow 4 - 4\cos^2\theta + 4\cos\theta = 5$

$\Rightarrow 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 \Rightarrow (2\cos\theta - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}.$

$n = 0$ হলে, $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$

$n = -1$ হলে , $\theta = -2\pi \pm \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$

$n = 1$ হলে , $\theta = 2\pi \pm \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{3}$

5(c) $2\cos^2\theta - 3\sin\theta = 0$

$\Rightarrow 2(1 - \sin^2\theta) - 3\sin\theta = 0$

$\Rightarrow 2 - 2\sin^2 - 3\sin\theta = 0$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta + 4\sin\theta - \sin\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta(\sin\theta + 2) - 1(\sin\theta + 2)$

$\Rightarrow (\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) = 0$

কিন্তু $\sin\theta + 2 \neq 0$ অর্থাৎ $\sin\theta \neq -2$, যেহেতু $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

$\therefore 2\sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$, $n\in\mathbb{Z}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$, $n\in\mathbb{Z}$

5(d) $8\sin^2\theta - 2\cos\theta = 5$

$\Rightarrow 8(1 - \cos^2\theta) - 2\cos\theta = 5$

$\Rightarrow 8\cos^2\theta + 2\cos\theta + 5 - 8 = 0$

$\Rightarrow 8\cos^2\theta + 2\cos\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow 8\cos^2\theta + 6\cos\theta - 4\cos\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(4\cos\theta + 3) - 1(4\cos\theta + 3) = 0$

$\Rightarrow (4\cos\theta + 3)(2\cos\theta - 1) = 0$

$2\cos\theta - 1 = 0$ হলে , $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$

$4\cos\theta + 3 = 0$ হলে, $\cos\theta = -\frac{3}{4} = \cos\alpha$ (ধরি)

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \alpha , n\in\mathbb{Z}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, 2n\pi \pm \alpha$;

যেখানে $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ এবং $n\in\mathbb{Z}$.

5(e) $\tan^2\theta - 2\sqrt{3}\sec\theta + 4 = 0$ [কু.'০৫]

$\Rightarrow \sec^2\theta - 1 - 2\sqrt{3}\sec\theta + 4 = 0$

$\Rightarrow \sec^2\theta - 2\sqrt{3}\sec\theta + 3 = 0$

$\Rightarrow (\sec\theta - \sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow \sec\theta - \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \sec\theta = \sqrt{3} = \sec\alpha$ (ধরি)

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \alpha, n\in\mathbb{Z}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = 2n\pi \pm \alpha$; যেখানে $\sec\alpha = \sqrt{3}$ এবং $n\in\mathbb{Z}$.

5(f) $4\cos^2\theta + 6\sin^2\theta = 5$

$\Rightarrow 4\cos^2\theta + 6\sin^2\theta = 5(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$\Rightarrow \sin^2\theta = \cos^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \pm 1 = \tan(\pm\frac{\pi}{4})$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$; যেখানে $n\in\mathbb{Z}$.

(g) $2\sin^2 x = 3\cos x$, যখন $0<\theta<2\pi$ [য.'০৯]

$\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 3\cos x$

$\Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2 x + 4\cos x - \cos x - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos x(\cos x + 2) - 1(\cos x + 2) = 0$

$\Rightarrow (\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$

$\therefore 2\cos x - 1 = 0$ $[\because \cos x + 2 \neq 0]$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যেখানে $n\in\mathbb{Z}$.

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{3}$

$n = 1$ হলে, $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ এবং

$\theta = 2\pi + \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান , $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

5(h) $\sin^2 2x - 3\cos^2 x = 0$ [কু.'০৯]

$\Rightarrow (2\sin x\cos x)^2 - 3\cos^2 x = 0$

$\Rightarrow 4\sin^2 x\cos^2 x - 3\cos^2 x = 0$

$\Rightarrow (4\sin^2 x - 3)\cos^2 x = 0$

$\therefore \cos^2 x = 0$ হলে, $\cos x = 0$

$\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, যেখানে $n\in\mathbb{Z}$.

$4\sin^2 x - 3 = 0$ হলে, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$.

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$.

6(a) $5\tan^2\theta - \sec^2\theta = 11$

$\Rightarrow 5\tan^2\theta - (1 + \tan^2\theta) = 11$

$\Rightarrow 4\tan^2\theta = 12 \Rightarrow \tan^2\theta = 3$

$\tan\theta = \pm\sqrt{3} = \tan(\pm\frac{\pi}{3})$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যেখানে $n\in\mathbb{Z}$.

6(b) $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3$

$\Rightarrow \cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = 3 \Rightarrow 2\cot^2\theta = 2$

$\Rightarrow \cot^2\theta = 1 \Rightarrow \tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \pm 1 = \tan(\pm\frac{\pi}{4})$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$; যেখানে $n\in\mathbb{Z}$

6(c) $\tan^2\theta + \sec^2\theta = 3$

$\Rightarrow \tan^2\theta + 1 + \tan^2\theta = 3 \Rightarrow 2\tan^2\theta = 2$

$\Rightarrow \tan^2\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = \pm 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan(\pm\frac{\pi}{4})$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$; যেখানে $n\in\mathbb{Z}$.

6(d) $\sec^2\frac{\theta}{2} - 2\sqrt{2}\tan\frac{\theta}{2} = 0$; $0 < \theta < 2\pi$

[কু.'০৩; সি.'০৩; ব.'১৩]

$\Rightarrow \sec^2\frac{\theta}{2} = 2\sqrt{2}\tan\frac{\theta}{2}$

উভয় পক্ষকে $\cos^2\frac{\theta}{2}$ দ্বারা গুণ করে আমরা পাই ,

$1 = 2\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}\sin\theta$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$.

$n = 0$ হলে , $\theta = \frac{\pi}{4}$

$n = -1$ হলে , $\theta = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$

$n = 1$ হলে , $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$n = -2$ হলে , $\theta = -2\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$

$n = 2$ হলে , $\theta = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান , $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

5(e) $\tan^2\theta - 3\operatorname{cosec}^2\theta + 1 = 0$

[কুয়েট'০৩-০৪; টেক্সটাইল'০৫-০৬]

$\Rightarrow \sec^2\theta - 3\operatorname{cosec}^2\theta = 0$

$\Rightarrow \sec^2\theta = 3\operatorname{cosec}^2\theta \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} = 3\frac{1}{\sin^2\theta}$

$\Rightarrow \tan^2\theta = 3 \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3} = \tan(\pm\frac{\pi}{3})$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যেখানে $n\in\mathbb{Z}$.

7(a) $4\sin^2\theta + \sqrt{3} = 2(1+\sqrt{3})\sin\theta$

$\Rightarrow 4\sin^2\theta - 2(1+\sqrt{3})\sin\theta + \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow 4\sin^2\theta - 2\sin\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta + \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta(2\sin\theta - 1) - \sqrt{3}(2\sin\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow (2\sin\theta - 1)(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$

$2\sin\theta - 1 = 0$ হলে , $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$2\sin\theta - \sqrt{3} = 0$ হলে , $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$,

$n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$; যেখানে $n\in\mathbb{Z}$

V.V.9

(b) $1 + \sqrt{3}\tan^2\theta = (1+\sqrt{3})\tan\theta$, $0<\theta<2\pi$

[সি.'০১; য.'০৫; প্র.ভ.প.'০৩]

$\Rightarrow \sqrt{3}\tan^2\theta - \sqrt{3}\tan\theta - \tan\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta - 1) - 1(\tan\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow (\tan\theta - 1)(\sqrt{3}\tan\theta - 1) = 0$

$\tan\theta - 1 = 0$ হলে, $\tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}, n\in\mathbb{Z}$

$\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$ হলে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi + \frac{\pi}{6}$, $n\in\mathbb{Z}$.

$n = 0$ হলে , $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$

$n = 1$ হলে , $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

অথবা , $\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান ,

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}$

7(c) $\sqrt{3}\cot^2\theta + 4\cot\theta + \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3}\cot^2\theta + 3\cot\theta + \cot\theta + \sqrt{3} = 0$

$\sqrt{3}\cot\theta(\cot\theta + \sqrt{3}) + 1(\cot\theta + \sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow (\cot\theta + \sqrt{3})(\sqrt{3}\cot\theta + 1) = 0$

$\cot\theta + \sqrt{3} = 0$ হলে, $\cot\theta = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan\frac{\pi}{6} = \tan(\pi - \frac{\pi}{6})$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{5\pi}{6}$ $\therefore \theta = n\pi + \frac{5\pi}{6}$, $n \in Z$

$\sqrt{3}\cot\theta + 1 = 0$ হলে, $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\theta = -\sqrt{3} = -\tan\frac{\pi}{3} = \tan(\pi - \frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{2\pi}{3}$ $\therefore \theta = n\pi + \frac{2\pi}{3}$, $n \in Z$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = n\pi + \frac{2\pi}{3}, n\pi + \frac{5\pi}{6}$; যেখানে $n \in Z$.

7(d) $\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sin\theta + \frac{1}{\sin\theta} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin^2\theta + \sqrt{2} = 3\sin\theta$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin^2\theta - 3\sin\theta + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin^2\theta - 2\sin\theta - \sin\theta + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\theta(\sin\theta - \sqrt{2}) - 1(\sin\theta - \sqrt{2}) = 0$

$\Rightarrow (\sin\theta - \sqrt{2})(\sqrt{2}\sin\theta - 1) = 0$

$\therefore \sin\theta - \sqrt{2} = 0$ অথবা, $\sqrt{2}\sin\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{2}$ অথবা, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

কিন্তু $\sqrt{2} > 1$ বলে $\sin\theta \neq \sqrt{2}$.

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}$, $n \in Z$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}$; যেখানে $n \in Z$

7(e) $\cos\theta + \sec\theta = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta + 2 = 5\cos\theta$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 4\cos\theta - \cos\theta + 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(\cos\theta - 2) - 1(\cos\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow (\cos\theta - 2)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore \cos\theta = 2$ অথবা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

কিন্তু $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ বলে $\cos\theta \neq 2$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in Z$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, যেখানে $n \in Z$.

8(a) $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$ [ম.'০০; চ.'০১; ব.'০৭]

$\Rightarrow \tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} = 2$

$\Rightarrow \tan^4\theta - 2\tan^2\theta + 1 = 0 \Rightarrow (\tan^2\theta - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \tan^2\theta - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \pm 1 = \tan(\pm\frac{\pi}{4})$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n \in Z$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, যেখানে $n \in Z$.

8(b) $\sec^2\theta + 3\operatorname{cosec}^2\theta = 8$

$\Rightarrow 1 + \tan^2\theta + 3(1 + \cot^2\theta) = 8$

$\Rightarrow \tan^2\theta + 3\,\frac{1}{\tan^2\theta} = 4$

$\Rightarrow \tan^4\theta - 4\tan^2\theta + 3 = 0$

$\Rightarrow \tan^4\theta - 3\tan^2\theta - \tan^2\theta + 3 = 0$

$\Rightarrow \tan^2\theta(\tan^2\theta - 3) - 1(\tan^2\theta - 3) = 0$

$\Rightarrow (\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta - 1) = 0$

$\tan^2\theta - 3 = 0$ হলে, $\tan^2\theta = 3$

$\Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3} = \tan(\pm\frac{\pi}{3})$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n\in Z$.

$\tan^2\theta - 1 = 0$ হলে , $\tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \pm 1 = \tan(\pm\frac{\pi}{4})$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n\in Z$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যেখানে $n\in Z$.

9(a) $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \tan\theta = 2$ [রা.'০২; সি.'১৩]

$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2$

$\Rightarrow \cos^2\theta + \sin\theta + \sin^2\theta = 2\cos\theta(1 + \sin\theta)$

$\Rightarrow 1 + \sin\theta - 2\cos\theta(1 + \sin\theta) = 0$

$\Rightarrow (1 + \sin\theta)(1 - 2\cos\theta) = 0$

$\therefore 1 + \sin\theta = 0$ অথবা, $1 - 2\cos\theta = 0$.

কিন্তু , এখানে $1 + \sin\theta \neq 0$.

$\therefore 1 - 2\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n\in Z$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ; $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যেখানে $n\in Z$.

9(b) $\cot\theta - \tan\theta = 2$ [চ.'০২]

$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2$

$\Rightarrow \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2$

$\Rightarrow \cos 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow \cos 2\theta = \sin 2\theta \Rightarrow \tan 2\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore 2\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$, $n\in Z$.

$\Rightarrow \theta = (4n + 1)\frac{\pi}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = (4n + 1)\frac{\pi}{8}$; যেখানে $n\in Z$.

9(c) $\operatorname{cosec}\theta \cot\theta = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}\sin^2\theta - \cos\theta = 0$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}(1 - \cos^2\theta) - \cos\theta = 0$

$\Rightarrow 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\cos^2\theta - \cos\theta = 0$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}\cos^2\theta + \cos\theta - 2\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3\cos\theta - 2\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(\sqrt{3}\cos\theta + 2) - \sqrt{3}(\sqrt{3}\cos\theta + 2) = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{3}\cos\theta + 2)(2\cos\theta - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore \sqrt{3}\cos\theta + 2 = 0$ অথবা, $2\cos\theta - \sqrt{3} = 0$.

$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ অথবা , $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$-\frac{2}{\sqrt{3}} < -1$ বলে $\cos\theta \neq -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

$\therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $n\in Z$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, যেখানে $n\in Z$.

9(d) $3\tan\theta + \cot\theta = 5\operatorname{cosec}\theta$ [রা.'১৩]

$\Rightarrow 3.\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 5\frac{1}{\sin\theta}$

$\Rightarrow 3\sin^2\theta + \cos^2\theta = 5\cos\theta$

$\Rightarrow 3(1 - \cos^2\theta) + \cos^2\theta = 5\cos\theta$

$\Rightarrow 3 - 3\cos^2\theta + \cos^2\theta = 5\cos\theta$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta + 5\cos\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta + 6\cos\theta - \cos\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(\cos\theta + 3) - 1(\cos\theta + 3) = 0$

$\Rightarrow (\cos\theta + 3)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore$ $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta + 3 = 0$.

কিন্তু $-3 < -1$ বলে, $\cos\theta \neq -3$

$\therefore$ $2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, যেখানে $n \in Z$.

9(e) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2\sin 2\theta}$ [য.'০৪]

$\Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin 2\theta$

$\Rightarrow 1 + \sin 2\theta = 2\sin 2\theta \Rightarrow \sin 2\theta = 1$

$\therefore$ $2\theta = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$.

$\Rightarrow \theta = (4n + 1)\frac{\pi}{4} = n\pi + \frac{\pi}{4}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = (4n + 1)\frac{\pi}{4}$, যেখানে $n \in Z$.

9(f) $\frac{\sqrt{3}}{\sin 2x} - \frac{1}{\cos 2x} = 4$ [বুয়েট'০৬-০৭]

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x}{\sin 2x\cos 2x} = 4$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = 2\sin 2x\cos 2x$

$\Rightarrow \cos 2x\sin\frac{\pi}{3} - \sin 2x\cos\frac{\pi}{3} = \sin 4x$

$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) = \sin 4x$

$\Rightarrow \sin 4x + \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 0$

$\Rightarrow 2\sin\frac{1}{2}(6x - \frac{\pi}{3})\cos\frac{1}{2}(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$

$\Rightarrow \sin(3x - \frac{\pi}{6})\cos(x + \frac{\pi}{6}) = 0$

$\sin(3x - \frac{\pi}{6})$ হলে, $3x - \frac{\pi}{6} = n\pi$, $n \in Z$

$\Rightarrow 3x = n\pi + \frac{\pi}{6}$ $\therefore$ $x = (6n + 1)\frac{\pi}{18}$

$\cos(x + \frac{\pi}{6})$ হলে, $x + \frac{\pi}{6} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$

$\Rightarrow x = n + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = n + \frac{\pi}{3} = (3n + 1)\frac{\pi}{3}$.

9(g) $2\sin\theta\tan\theta + 1 = \tan\theta + 2\sin\theta$ [চুয়েট'০৫-০৬]

$\Rightarrow 2\sin\theta \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + 1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + 2\sin\theta$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta + \cos\theta = \sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos\theta - \sin\theta = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta(\sin\theta - \cos\theta) - 1(\sin\theta - \cos\theta) = 0$

$\Rightarrow (\sin\theta - \cos\theta)(2\sin\theta - 1) = 0$

$\sin\theta - \cos\theta = 0$ হলে, $\sin\theta = \cos\theta$

$\Rightarrow \tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ $\therefore$ $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$, $n \in Z$

$2\sin\theta - 1 = 0$ হলে, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$, $n \in Z$

10. সমাধান ঃ V.V.g (10-All a-f)

(a) $\cos 6x + \cos 4x = \sin 3x + \sin x$ [ব.'০২]

$\Rightarrow 2\cos 5x\cos x = 2\sin 2x\cos x$

$\Rightarrow \cos x(\cos 5x - \sin 2x) = 0$

$\therefore$ $\cos x = 0 \Rightarrow x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$

অথবা, $\cos 5x - \sin 2x = 0$

$\Rightarrow \cos 5x = \sin 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$

$\therefore$ $5x = 2n\pi \pm (\frac{\pi}{2} - 2x)$, $n \in Z$.

$\Rightarrow 10x = 4n\pi \pm (\pi - 4x)$

'+' চিহ্ন নিয়ে আমরা পাই , $10x = 4n\pi + \pi - 4x$

$\Rightarrow 14x = (4n+1)\pi \quad \therefore x = (4n+1)\frac{\pi}{14}$

'-' চিহ্ন নিয়ে আমরা পাই , $10x = 4n\pi - \pi + 4x$

$\Rightarrow 6x = (4n-1)\pi \quad \therefore x = (4n-1)\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$,

$(4n+1)\frac{\pi}{14}, (4n-1)\frac{\pi}{6}$; $n \in \mathbb{Z}$.

10(b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
[ব.'০১,'১৩ ; রা.'০৭; কু.'১৩]

$\Rightarrow \sin 2x + (\sin x + \sin 3x) = 0$

$\Rightarrow \sin 2x + 2\sin 2x \cos x = 0$

$\Rightarrow \sin 2x(1 + 2\cos x) = 0$

$\sin 2x = 0$ হলে, $2x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$1 + 2\cos x = 0$ হলে, $\cos x = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \cos x = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $x = \frac{n\pi}{2}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$; $n \in \mathbb{Z}$.

10(c) $\cos\theta - \cos 7\theta = \sin 4\theta$
[ঢা.'০৩, '১০; কু. '০৬; য.'০৮; সি.'০৯; ব.'১১]

$\Rightarrow 2\sin\frac{1}{2}(\theta + 7\theta)\sin\frac{1}{2}(7\theta - \theta) = \sin 4\theta$

$\Rightarrow 2\sin 4\theta \sin 3\theta - \sin 4\theta = 0$

$\Rightarrow \sin 4\theta(2\sin 3\theta - 1) = 0$

$\therefore \sin 4\theta = 0$

$\therefore 4\theta = n\pi \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$.

অথবা , $2\sin 3\theta - 1 = 0 \Rightarrow \sin 3\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin 3\theta = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore 3\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{18}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{n\pi}{4}, \frac{n\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{18}$; $n \in \mathbb{Z}$

10(d) $\cos 2x + \sin x = 1$ [ব.'০১ ; ঢা.'০৪]

$\Rightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x = 1$

$\Rightarrow 2\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0$

$\sin x = 0$ হলে, $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

$2\sin x - 1 = 0$ হলে , $\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = n\pi, n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$; $n \in \mathbb{Z}$.

10(e) $2\sin\theta\tan\theta + 1 = \tan\theta + 2\sin\theta$
[য.'০৩; প্র.ভ.প.,'০৫]

$\Rightarrow 2\sin\theta\tan\theta + 1 - \tan\theta - 2\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \tan\theta(2\sin x - 1) - 1(2\sin x - 1) = 0$

$\Rightarrow (2\sin\theta - 1)(\tan\theta - 1) = 0$

$2\sin\theta - 1 = 0$ হলে , $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$.

$\tan\theta = 1$ হলে , $\tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ,

$\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n\pi + \frac{\pi}{4}$; $n \in \mathbb{Z}$.

10(f) $\sqrt{2}\cos 3\theta - \cos\theta = \cos 5\theta$
[সি.'০১,'১০; ঢা.'০৪; চ.'০৮; কু.'০৮; য.'১৩]

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos 3\theta - (\cos\theta + \cos 5\theta) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos 3\theta - 2\cos 3\theta\cos 2\theta = 0$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos 3\theta(1 - \sqrt{2}\cos 2\theta) = 0$

$\sqrt{2}\cos 3\theta = 0$ হলে, $\cos 3\theta = 0$

$\therefore\ 3\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in Z$.

$\Rightarrow \theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{6}$

$1 - \sqrt{2}\cos 2\theta = 0$ হলে, $\cos 2\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos 2\theta = \cos\dfrac{\pi}{4}\ \therefore 2\theta = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$, $n \in Z$.

$\Rightarrow \theta = n\pi \pm \dfrac{\pi}{8}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান,

$\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{6}$, $n\pi \pm \dfrac{\pi}{8}$; যেখানে $n \in Z$.

11(a) $\sin 5\theta + \sin\theta = \sin 3\theta$.

$\Rightarrow 2\sin 3\theta\cos 2\theta - \sin 3\theta = 0$

$\Rightarrow \sin 3\theta(2\cos 2\theta - 1) = 0$

$\sin 3\theta = 0$ হলে, $3\theta = n\pi \therefore \theta = \dfrac{1}{3}n\pi$, $n \in Z$

$2\cos 2\theta - 1 = 0\ \cos 2\theta = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore\ 2\theta = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$, $n \in Z$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \dfrac{1}{3}n\pi$, $n\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$; $n \in Z$.

11(b) $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 0$

$\Rightarrow (\cos 7\theta + \cos\theta) + (\cos 5\theta + \cos 3\theta) = 0$

$\Rightarrow 2\cos 4\theta\cos 3\theta + 2\cos 4\theta\cos\theta = 0$

$\Rightarrow 2\cos 4\theta(\cos 3\theta + \cos\theta) = 0$

$\Rightarrow 2\cos 4\theta . 2\cos 2\theta\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta = 0$

$\cos\theta = 0$ হলে, $\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in Z$.

$\cos 2\theta = 0$ হলে, $2\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in Z$.

$\Rightarrow \theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{4}$

$\cos 4\theta = 0$ হলে, $4\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in Z$.

$\Rightarrow \theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{8}$

$n = 0$ ধরলে, $\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{8}$

$n = 1$ ধরলে, $\theta = \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{8}$

$n = 2$ ধরলে, $\theta = \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{8}$

$n = 3$ ধরলে, $\theta = \dfrac{7\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{8}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান,

$\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{7\pi}{8}$.

11(c) $2\sin 2\theta + 3\cos\theta = 0$

$\Rightarrow 2.2\sin\theta\cos\theta + 3\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \cos\theta(4\sin\theta + 3) = 0$

$\cos\theta = 0$ হলে, $\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in Z$.

$4\sin\theta + 3 = 0$ হলে, $\sin\theta = -\dfrac{3}{4} = \sin\alpha$ (ধরি)

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n\alpha$, $n \in Z$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$,

$n\pi + (-1)^n\alpha$; যখন $\sin\alpha = -\dfrac{3}{4}$ এবং $n \in Z$.

11(d) $\sin 7\theta - \sqrt{3}\cos 4\theta = \sin\theta$

[য.'০৫; দি.'১০; প্র.ভ.প.'৯৬]

$\Rightarrow \sin 7\theta - \sin\theta - \sqrt{3}\cos 4x = 0$

$\Rightarrow 2\sin 3\theta\cos 4\theta - \sqrt{3}\cos 4x = 0$

$\Rightarrow \cos 4x(2\sin 3\theta - \sqrt{3}) = 0$

$\cos 4x = 0$ হলে, $4x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = (2n+1)\dfrac{\pi}{8}$

$2\sin 3\theta - \sqrt{3} = 0$ হলে, $\sin 3\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \sin 3\theta = \sin\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore 3\theta = n\pi + (-1)^n\dfrac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \theta = \dfrac{1}{3}\{ n\pi + (-1)^n\dfrac{\pi}{3} \}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{8}$,

$\dfrac{1}{3}\{ n\pi + (-1)^n\dfrac{\pi}{3} \}$; $n \in \mathbb{Z}$.

11(e) $\sin 2\theta + 4\cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta + 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta + 4\cos\theta - \sqrt{3}(\sin\theta + 2) = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(\sin\theta + 2) - \sqrt{3}(\sin\theta + 2) = 0$

$\Rightarrow (\sin\theta + 2)(2\cos\theta - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore 2\cos\theta - \sqrt{3} = 0$ $[\because -2 < -1, \sin\theta + 2 \neq 0]$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$.

12(a) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$; $0° < x < 360°$ [ঢা.'১২]

$\Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0$

$\Rightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 0$

$\cos x = 0$ হলে, $x = (2n+1)90°$, $n \in \mathbb{Z}$.

$2\cos x + 1 = 0$ হলে, $\cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos 120°$

$\therefore x = n.360° \pm 120°$, $n \in \mathbb{Z}$.

$n = 0$ এর জন্য $x = 90°, \pm 120°$;

$n = 1$ এর জন্য $x = 270°, 240°, 480°$,

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান,

$x = 90°, 120°, 240°, 270°$

(b) $\sec 4x - \sec 2x = 2$; $0° < x < 360°$

[য. '০১; ঢা.'০৮; চুয়েট'০৩-০৪]

$\Rightarrow \dfrac{1}{\cos 4x} - \dfrac{1}{\cos 2x} = 2$

$\Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = 2\cos 4x\cos 2x$

$\Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = \cos 6x + \cos 2x$

$\Rightarrow \cos 6x + \cos 4x = 0 \Rightarrow 2\cos 5x\cos x = 0$

$\cos x = 0$ হলে, $x = (2n+1)90°$, $n \in \mathbb{Z}$.

$n = 0, 1, 2$ বসিয়ে পাই, $x = 90°, 270°, 450°$

আবার, $\cos 5x = 0$ হলে, $5x = (2n+1)90°$

$\Rightarrow x = (2n+1)18°$, $n \in \mathbb{Z}$.

$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ বসিয়ে পাই, $x = 18°, 54°, 90°, 126°, 162°, 198°, 234°, 270°, 306°, 342°, 378°$.

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান,

$x = 18°, 54°, 90°, 126°, 162°, 198°, 234°, 270°, 306°, 342°$.

12(c) $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$

[ঢা.'০৫; কু.'১৩]

$\Rightarrow 2\cos 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta = 0$

$\Rightarrow \cos 2\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

এখন, $\cos 2\theta = 0$ হলে, $2\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$2\cos\theta + 1 = 0$ হলে, $\cos\theta = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\therefore \theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{4}$, $2n\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}$; $n \in \mathbb{Z}$.

12(d) $\sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta + \sin 9\theta = 0$

[সি.'০৩]

$\Rightarrow (\sin 3\theta + \sin 9\theta) + (\sin 5\theta + \sin 7\theta) = 0$

$\Rightarrow 2\sin 6\theta\cos 3\theta + 2\sin 6\theta\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \sin 6\theta\ (\cos 3\theta + \cos\theta) = 0$

$\Rightarrow \sin 6\theta\ .2\cos 2\theta \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \sin 6\theta \cos\theta \cos 2\theta = 0$

এখন, $\sin 6\theta = 0$ হলে $6\theta = n\pi \Rightarrow \theta = \dfrac{n\pi}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\cos\theta = 0$ হলে, $\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

এবং $\cos 2\theta = 0$ হলে, $2\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\ x = \dfrac{n\pi}{6}, (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, (2n+1)\dfrac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

(e) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta$ [চ.'০৮; বুয়েট'০৮-০৯]

$\Rightarrow (\sin 3\theta + \sin\theta) + \sin 2\theta = (1 + \cos 2\theta) + \cos\theta$

$\Rightarrow 2\sin 2\theta \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 2\cos^2\theta + \cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta\ (2.\ 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta - 2\cos\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow \cos\theta\ \{2\sin\theta\ (2\cos\theta + 1) - 1(2\cos\theta - 1)\} = 0$

$\Rightarrow \cos\theta\ (2\cos\theta + 1)\ (2\sin\theta - i) = 0$

$\therefore\ \cos\theta = 0$ n‡j, $\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$2\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$ হলে,

$\theta = 2n\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$2\sin\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$ হলে, $\theta = n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{6}$

13(a) $\cos 9\theta \cos 7\theta = \cos 5\theta \cos 3\theta$, $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ [ঢা.'১২]

$\Rightarrow 2\cos 9\theta \cos 7\theta = 2\cos 5\theta \cos 3\theta$

$\Rightarrow \cos 16\theta + \cos 2\theta = \cos 8\theta + \cos 2\theta$

$\Rightarrow \cos 16\theta - \cos 8\theta = 0$

$\Rightarrow 2\sin 12\theta \sin 4\theta = 0$

$\sin 4\theta = 0$ হলে, $4\theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. $\therefore\ \theta = \dfrac{n\pi}{4}$

$\sin 12\theta = 0$ হলে, $12\theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. $\therefore\ \theta = \dfrac{n\pi}{12}$

যখন $n = 0$, তখন $\theta = 0$

যখন $n = \pm 1$, তখন $\theta = \pm\dfrac{\pi}{4}, \pm\dfrac{\pi}{12}$

যখন $n = \pm 2$, তখন $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{\pi}{6}$

যখন $n = -3$, তখন $\theta = \pm\dfrac{3\pi}{4}, \pm\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে, $\theta = 0, \pm\dfrac{\pi}{12}, \pm\dfrac{\pi}{6}$.

13(b) $4\cos x \cos 2x \cos 3x = 1$, $0 < x < \pi$ [সি.'০৮,'১১; কু.'১২; ঢা.'০৭; রা.'০৯,'১২; দি.'১১]

$\Rightarrow 2\cos 2x\ (2\cos 3x \cos x) = 1$

$\Rightarrow 2\cos 2x\ (\cos 4x + \cos 2x) = 1$

$\Rightarrow 2\cos 4x \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos 4x \cos 2x + \cos 4x = 0$

$\Rightarrow \cos 4x(2\cos 2x + 1) = 0$

$\cos 4x = 0$ হলে, $4x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x = (2n+1)\dfrac{\pi}{8}$

$2\cos 2x + 1 = 0$ হলে, $\cos 2x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$

$\therefore\ 2x = 2n\pi \pm \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow x = n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$n = 0$ হলে, $x = \dfrac{\pi}{8}, \pm\dfrac{\pi}{3}$

$n = 1$ হলে, $x = \dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$

$n = 2$ হলে, $x = \dfrac{5\pi}{8}, 2\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$

$n = 3$ হলে, $x = \dfrac{7\pi}{8}, 3\pi \pm \dfrac{5\pi}{8}$.

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান,

$x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$

13(c) $2\sin\theta \sin 3\theta = 1$

[চ.'০১; য. '০৮,'১৩; চ., সি., ব.'০৯; রা.'১০; দি.'১২]

$\Rightarrow \cos 2\theta - \cos 4\theta = 1$

$\Rightarrow \cos 2\theta - (1 + \cos 4\theta) = 0$

$\Rightarrow \cos 2\theta - 2\cos^2 2\theta = 0$

$\Rightarrow \cos 2\theta(1 - 2\cos 2\theta) = 0$

$\cos 2\theta = \theta$ হলে, $2\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$$

$1 - 2\cos 2\theta = 0$ হলে, $\cos 2\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore 2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{6}$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান,

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

13(d) $4\sin\theta\cos\theta = 1 - 2\sin\theta + 2\cos\theta$

$, 0° < \theta < 180°$ [রা'০৩; সি.'১৩]

$\Rightarrow 4\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta - 1(1 + 2\cos\theta) = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta(2\cos\theta + 1) - 1(1 + 2\cos\theta) = 0$

$\Rightarrow (2\cos\theta + 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

$2\sin\theta - 1 = 0$ হলে, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n \times 180° + (-1)^n 30°$, $n \in \mathbb{Z}$.

$2\cos\theta + 1 = 0$ হলে, $\cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos 120°$

$\therefore \theta = n \times 360° \pm 120°$; $n \in \mathbb{Z}$.

$n = 0$ হলে, $\theta = 30°, \pm 120°$

$n = 1$ হলে, $\theta = 150°, 240°, 480°$.

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান,

$\theta = 30°, 120°, 150°$.

13(e) $\sin 2\theta = \cos 3\theta$

$\Rightarrow \cos 3\theta = \sin 2\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\therefore 3\theta = 2n\pi \pm (\frac{\pi}{2} - 2\theta)$

$\therefore 3\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - 2\theta \Rightarrow 5\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \theta = (4n+1)\frac{\pi}{10}$$

অথবা, $3\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + 2\theta \Rightarrow \theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$.

13(f) $\sin 3x \sin x = \cos 2x + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2\sin 3x \sin x = 2\cos 2x + 1$

$\Rightarrow \cos 2x - \cos 4x - 2\cos 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow -\cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) - 1 = 0$

$\Rightarrow -\cos 2x - 2\cos^2 2x + 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \cos 2x(2\cos 2x + 1) = 0$

$\therefore \cos 2x = 0$ হলে, $2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

আবার, $2\cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3}$ হলে,

$2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $n \in \mathbb{Z}$

14(a) $\cos^3 x - \cos x \sin x - \sin^3 x = 1$

$\Rightarrow (\cos x - \sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x\cos x) - (1 + \sin x\cos x) = 0$

$\Rightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x\cos x) - 1(1 + \sin x\cos x) = 0$

$\Rightarrow (1 + \sin x\cos x)(\cos x - \sin x - 1) = 0$

$\Rightarrow (1 + \frac{1}{2}\sin 2x)(\cos x - \sin x - 1) = 0$

$\Rightarrow (2 + \sin 2x)(\cos x - \sin x - 1) = 0$

$\therefore \cos x - \sin x - 1 = 0$ $[\because -2 < -1, \sin 2x \neq -2]$

$\Rightarrow \cos x - \sin x = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2n\pi, 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $x = 2n\pi, 2n\pi - \frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$.

14(b) $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4}$ [চ.'০২]

$\Rightarrow \cos^3 x(3\sin x - 4\sin^3 x) + \sin^3 x(4\cos^3 x - 3\cos x) = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 4(3\sin x \cos^3 x - 4\sin^3 x \cos^3 x + 4\sin^3 x \cos^3 x - 3\sin^3 x \cos x) = 3$

$\Rightarrow 12\sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = 3$

$\Rightarrow 2\sin 2x . \cos 2x = 1 \Rightarrow \sin 4x = 1$

$\therefore 4x = (4n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (4n+1)\frac{\pi}{8}$; $n \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $x = (4n+1)\frac{\pi}{8}$, $n \in \mathbb{Z}$.

14(c) $\sin^2 2x - 3\cos^2 x = 0$ [কু.'১০; সি.'১১]

$\Rightarrow (2\sin x \cos x)^2 - 3\cos^2 x = 0$

$\Rightarrow \cos^2 x(4\sin^2 x - 3 = 0$

$\cos^2 x = 0$ হলে , $\cos x = 0$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$4\sin^2 x - 3 = 0$ হলে , $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\pm\frac{\pi}{3})$

$\therefore x = n\pi \pm (-1)^n\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ,

$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n\pi \pm (-1)^n\frac{\pi}{3}$; $n \in \mathbb{Z}$.

15(a) $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1$ [রা.'০২; ঢা.'০৯]

$\Rightarrow \tan 2x + \tan x = 1 - \tan 2x \tan x$

$\Rightarrow \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x} = 1 \Rightarrow \tan(2x + x) = 1$

$\Rightarrow \tan 3x = \tan\frac{\pi}{4}$ $\therefore 3x = n\pi + \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}(n\pi + \frac{\pi}{4}) = (4n+1)\frac{\pi}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $x = (4n+1)\frac{\pi}{12}$, $n \in \mathbb{Z}$.

15(b) $\sqrt{3}(\tan x + \tan 2x) + \tan x \tan 2x = 1$
[রা. '০৪,'১১ ; সি.'০৭; য.'১১; চ.'১৩; দি.'১৩]

$\Rightarrow \sqrt{3}(\tan x + \tan 2x) = 1 - \tan 2x \tan x$

$\Rightarrow \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan(2x+x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan 3x = \tan\frac{\pi}{6}$ $\therefore 3x = n\pi + \frac{\pi}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x = (6n+1)\frac{\pi}{18}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = (6n+1)\frac{\pi}{18}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(c) $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = \tan\theta \tan 2\theta \tan 3\theta$

$\Rightarrow \tan 2\theta + \tan\theta = \tan\theta \tan 2\theta \tan 3\theta - \tan 3\theta$

$\Rightarrow \tan 2\theta + \tan\theta = -\tan 3\theta(1 - \tan 2\theta \tan\theta)$

$\Rightarrow \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta \tan\theta} = -\tan 3\theta$

$\Rightarrow \tan 3\theta = -\tan 3\theta \Rightarrow 2\tan 3\theta = 0$

$\Rightarrow \tan 3\theta = 0 \therefore 3\theta = n\pi \Rightarrow \theta = \frac{1}{3}n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = \frac{1}{3}n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

15(d) $\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta = \sqrt{3}$ [রা.'০৬ ; য.'০৬; চ. '০৯,'১১; ব.'০৯]

$\Rightarrow \tan\theta + \tan 2\theta = \sqrt{3}(1 - \tan\theta\tan 2\theta)$

$\Rightarrow \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta\tan\theta} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan(2\theta + \theta) = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan 3\theta = \tan\frac{\pi}{3} \therefore 3\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \theta = (3n+1)\frac{\pi}{9}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = (3n+1)\frac{\pi}{9}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(e) $\cot x + \cot 2x + \cot 3x = \cot x\cot 2x\cot 3x$

$\Rightarrow \cot x + \cot 2x = \cot x\cot 2x\cot 3x - \cot 3x$

$\Rightarrow \cot x + \cot 2x = \cot 3x(\cot 2x\cot x - 1)$

$\Rightarrow \cot 3x \frac{\cot x\cot 2x - 1}{\cot x + \cot 2x} = 1$

$\Rightarrow \cot 3x . \cot 3x = 1 \Rightarrow \tan^2 3x = 1$

$\Rightarrow \tan 3x = \pm 1 = \tan(\pm\frac{\pi}{4})$

$\therefore 3x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow x = \frac{n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $x = \frac{n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$, $n \in \mathbb{Z}$.

16(a) $\tan(\frac{\pi}{4} + \theta) + \tan(\frac{\pi}{4} - \theta) = 4$

$\Rightarrow \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} + \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} = 4$

$\Rightarrow \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} + \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta} = 4$

$\Rightarrow \frac{(1 + \tan\theta)^2 + (1 - \tan\theta)^2}{(1 - \tan\theta)(1 + \tan\theta)} = 4$

$\Rightarrow \frac{2(1 + \tan^2)}{1 - \tan^2\theta} = 4$

$\Rightarrow 1 + \tan^2\theta = 2 - 2\tan^2\theta \Rightarrow 3\tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan(\pm\frac{\pi}{6})$

$\Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$.

16(b) $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = 0$

$\Rightarrow \tan\theta + \tan 2\theta + \tan(2\theta + \theta) = 0$

$\Rightarrow \tan\theta + \tan 2\theta + \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta\tan\theta} = 0$

$\Rightarrow (\tan\theta + \tan 2\theta)(1 - \tan\theta\tan 2\theta) + 1(\tan 2\theta + \tan\theta) = 0$

$\Rightarrow (\tan 2\theta + \tan\theta)(1 - \tan 2\theta\tan\theta + 1) = 0$

$\Rightarrow (\tan 2\theta + \tan\theta)(2 - \tan 2\theta\tan\theta) = 0$

এখন , $\tan 2\theta + \tan\theta = 0$ হলে ,

$\tan 2\theta + \tan\theta = 0(1 - \tan 2\theta\tan\theta)$

$\Rightarrow \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta\tan\theta} = 0$

$\Rightarrow \tan(2\theta + \theta) = 0 \Rightarrow \tan 3\theta = 0$

$\therefore 3\theta = n\pi \Rightarrow \theta = \frac{1}{3}n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

আবার , $2 - \tan 2\theta\tan\theta = 0$ হলে ,

$\Rightarrow 2 - \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}\tan\theta = 0$

$\Rightarrow 2 - 2\tan^2\theta - 2\tan^2\theta = 0$

$\Rightarrow 4\tan^2\theta = 2 \Rightarrow 2\tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\tan\alpha = \tan(\pm\alpha)$,যেখানে

$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \theta = n\pi \pm \alpha$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $\theta = \frac{1}{3}n\pi$, $n\pi \pm \alpha$;

যেখানে $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $n \in Z$.

16(c) $\tan x + \tan 3x = 0$ [রা.'০৫]

$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0$

$\Rightarrow \frac{\sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x}{\cos x \cos x} = 0$

$\Rightarrow \sin(3x + x) = 0 \Rightarrow \sin 4x = 0$

$\therefore 4x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{4}$, $n \in Z$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{n\pi}{4}$, $n \in Z$.

(d) $\cos 7\theta = \cos 3\theta + \sin 5\theta$ [চ.'০৫ ; য.'০৭]

$\Rightarrow \cos 3\theta - \cos 7\theta + \sin 5\theta = 0$

$\Rightarrow 2 \sin 5\theta \sin 2\theta + \sin 5\theta = 0$

$\Rightarrow \sin 5\theta\,(2 \sin 2\theta + 1) = 0$

$\sin 5\theta = 0$ হলে, $5\theta = n\pi$, $n \in Z$.

$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{5}$

$2\sin 2\theta + 1 = 0$ হলে , $\sin 2\theta = -\frac{1}{2} = -\sin(\frac{\pi}{6})$

$\Rightarrow \sin 2\theta = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{7\pi}{6}$

$\therefore 2\theta = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$

$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{7\pi}{12}$, $n \in Z$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ,

$\theta = \frac{n\pi}{5}, \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{7\pi}{12}; n \in Z$

16(e) $\sin\theta - 2 = \cos 2\theta$, যখন $-2\pi \le \theta \le 2\pi$ [য.'০৬; চ.'১০; সি.'১২]

$\Rightarrow \sin\theta - 2 = 1 - 2\sin^2\theta$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta + \sin\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2\sin\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta\,(2\sin\theta + 3) - 1(2\sin\theta + 3) = 0$

$\Rightarrow (\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 3) = 0$

$-\frac{3}{2} < -1$ বলে , $\sin\theta \neq -\frac{3}{2}$ .i.e. $2\sin\theta + 3 \neq 0$

$\therefore \sin\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = 1 \quad \therefore \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$.

$n = 0, -1, 1$ ইত্যাদি বসিয়ে পাই ,

$\theta = \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান ,

$\theta = \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$

17(a) নিচের কোন সম্পর্কটি সত্য ?

A. $\sin^{-1}(\sin x) = x$, যখন $-1 \le x \le 1$

B. $\cos(\cos^{-1} x) = x$, যখন $0 \le x \le \pi$

C. $\sin(\sin^{-1} x) = x$, যখন $-1 \le x \le 1$

D $\cos^{-1}(\cos x) = x$, যখন $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

(b) $\tan(\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2})$ এর মান হবে-

A. $\frac{5}{6}$ B. 1 C. $\frac{\pi}{4}$ D. $-\frac{5}{6}$

সমাধান: $\tan(\tan^{-1}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}})$

$= \tan\{\tan^{-1}(\frac{5}{6} \times \frac{5}{6})\} = \tan\{\tan^{-1} 1\} = 1$

(c) যদি $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}\theta - 5 = 0$ হয়, তবে $0 < \theta < 90^0$ এর জন্য θ এর মান হবে-

A. 0^0 B. 30^0 C. 45^0 D. 60^0

সমাধান: $\theta = 30^0$ এর জন্য, $\cot^2\theta = 3, \operatorname{cosec}\theta = 2$

18. $f(x) \equiv 8 \sin x^0 + 15 \cos x^0 \equiv 17 \sin(x^0 + a^0)$, যেখানে $0 < a < 90$.

(a) এক দশমিক স্থান পর্যন্ত a এর মান নির্ণয় কর।

(b) সমাধান করঃ $f(x) = 0$, যখন $0 < x < 360.$

(c) $0 < x < 360$ এর জন্য $y = f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর। এর সাহায্যে এর বিপরীত অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধানঃ

(a) $8\sin x^0 + 15\cos x^0$

$= 27(\frac{8}{\sqrt{8^2+15^2}}\sin x^0 + \frac{15}{\sqrt{8^2+15^2}}\cos x^0)$

$= 27(\frac{8}{\sqrt{8^2+15^2}}\sin x^0 + \frac{15}{\sqrt{8^2+15^2}}\cos x^0)$

$= 27(\cos\theta^0 \sin x^0 + \sin\theta^0 \cos x^0)$, যখন

$\sin\theta^0 = \frac{15}{\sqrt{8^2+15^2}}$ এবং $\cos\theta^0 = \frac{8}{\sqrt{8^2+15^2}}$

$\therefore\ 27\sin(x^0 + \theta^0) \equiv 17\sin(x^0 + a^0)$

$\Rightarrow a^0 = \theta^0 = \sin^{-1}\frac{15}{\sqrt{8^2+15^2}} = \sin^{-1}\frac{15}{17}$

$\Rightarrow a^0 = 61{\cdot}9^0$ (প্রায়)

এক দশমিক স্থান পর্যন্ত a এর মান $61{\cdot}9$

(b) $f(x) = 0 \Rightarrow 17\sin(x^0 + a^0) = 0$

$\Rightarrow \sin(x^0 + 61{\cdot}9^0) = 0$

$\Rightarrow x^0 + 61{\cdot}93^0 = n\times 180^0$, যেখানে $n = 1$ অথবা $n = 2$, $[\because 0 < x < 360]$

$n = 1$ হলে, $x^0 + 61{\cdot}9^0 = 180^0 \Rightarrow x^0 = 118{\cdot}1^0$

$\therefore\ x = 118{\cdot}1$

আবার, $n = 2$ হলে, $x^0 + 61{\cdot}9^0 = 360^0$

$\Rightarrow x^0 = 298{\cdot}1^0 \quad \therefore x = 298{\cdot}1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 118{\cdot}1, 298{\cdot}1.$

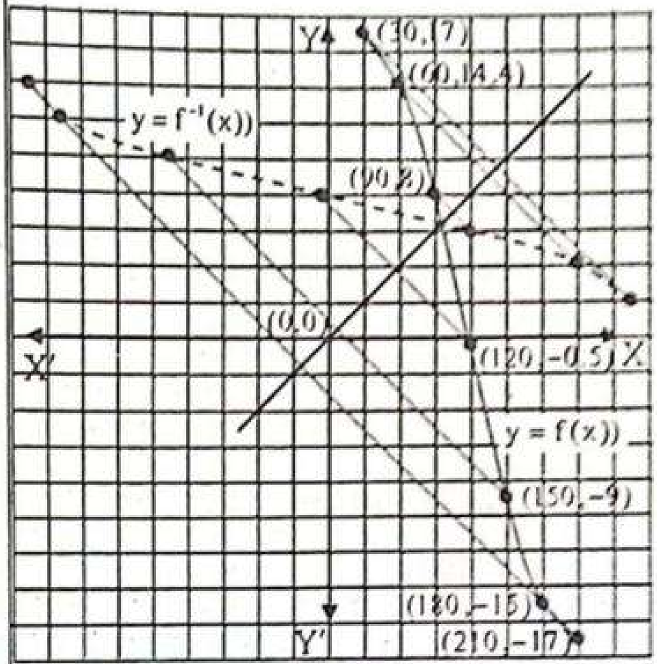
(c) $y = 8\sin x^0 + 15\cos x^0$

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [28 , 208]$ এর জন্য $y = 17\sin(x^0 + 61{\cdot}9^0)$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	30	60	90	120	150	180	210
y	17	14.4	8	-0.5	-9	-15	-17

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু =30 এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 2



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি । স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = f(x)$ এর লেখ অঙ্কন করা হল ।

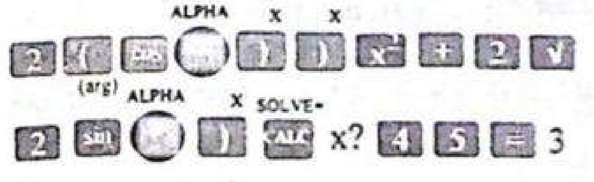
$y = x$ রেখা থেকে স্থাপিত বিন্দুগুলির সমদূরবর্তী বিন্দু ছক কাগজে স্থাপন করি । স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = f(x)$ এর বিপরীত অন্বয় $y = f^{-1}(x)$ এর লেখ অঙ্কন করা হল ।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\ \sin\theta = 3$ হলে θ এর মান – **[RU 06-07; Jt.U 08-09; DU 07-08;]**

A. 30^0 *B.* 45^0 *C.* 60^0 *D.* 135^0

Sol^n.: $\theta = 45^0$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। Ans. B



2. $\cot x - \tan x = 2$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান- **[DU 05-06; Jt.U 05-06]**

A. $\frac{n\pi}{4}$ *B.* $\frac{n\pi}{2}$ *C.* $\frac{(4n+1)\pi}{8}$ *D.* $\frac{(4n+1)\pi}{2}$

Solⁿ.: Option গুলোতে $n = 0$ বসালে $C = \frac{\pi}{8}$ হয় যা দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। $\therefore$ **Ans. C**

3. $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান- **[DU 03-04]**

A. $2n\pi \pm \pi/2$ **B.** $2n\pi \pm \pi/3$
C. $2n\pi \pm \pi/4$ **D.** $2n\pi \pm \pi/5$

Solⁿ.: $\theta = \pi/3$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।
$\therefore$ **Ans. B**

4. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান- **[DU 04-05; SU 08-09]**

Solⁿ.: $\sqrt{1+3}\cos(\theta - \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}) = 2$

$\Rightarrow \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

5. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, যখন $-\pi < \theta < \pi$ এর সমাধান কত? **[RU 06-07]**

Solⁿ.: $\sqrt{2}\cos(x - \tan^{-1}1) = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

6. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta < \sqrt{3}\,; 0 < \theta < \pi/2$ সমীকরণের সমাধান- **[IU 07-08]**

A. $\theta > \pi/3$ B. $\theta < \pi/6$ C. $\theta > \pi/6$ D. $\theta < \pi/3$

Solⁿ.: $0 < \theta < \pi/6$ এর জন্য প্রদত্ত অসমতাটি সত্য হয়। যেমন $\theta = 20°$ এর জন্য বামপক্ষ $= 1.53 < \sqrt{3}$

7. $\tan 2\theta \tan\theta = 1$ এর সমাধান - [BUET 06-07]

Solⁿ.: (a) $2n\pi + \frac{\pi}{3}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(c) $n\pi + \frac{\pi}{6}$ (d) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

Solⁿ.: $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। $\therefore$ Ans. (d)

8. যদি $\tan^2\theta + \sec\theta = -1; 0 < \theta < 2\pi$ হয় তবে θ এর মান নির্ণয় কর। **[BUET 07-08]**

(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{3\pi}{2}$

Solⁿ.: $\theta = \pi$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।
$\therefore$ Ans. (a)

9. $\cos\theta = -1$ হলে সাধারণ সমাধান কত? **[Textile 13-14]**

A. 0 B. $2n\pi$ C. $(2n+1)\pi$ D. $n\pi$

Solⁿ.: $\cos\theta = -1$ হলে $\theta = (2n+1)\pi$

10. $\tan 2x \tan x = 1$ হলে x এর দুইটি মানই কোন ক্ষেত্রে সঠিক নয়? [Textile 13-14]

A. $\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ B. $\frac{13\pi}{6}, \frac{15\pi}{6}$ C. $\frac{8\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}$ D. $\frac{13\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

Solⁿ.: $\tan 2x \tan x = 1$

$\Rightarrow \sin 2x \sin x = \cos 2x \cos x \Rightarrow \cos 3x = 0$

$\Rightarrow 3x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{6}$

$n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $x = \frac{8\pi}{6}$ সত্য নয়।

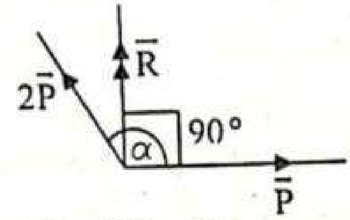
নিচের কোন সম্পর্কটি সত্য নয়? [Textile 13-14]

A. $\sin x = \sin(2n\pi + x)$ B. $\sin(\sin^{-1}x) = x$
C. $\sin^2 x = (-\sin x)^2$ D. $\sin^{-1}x = (\sin x)^{-1}$

Solⁿ.: $\sin^{-1}x = (\sin x)^{-1}$ সম্পর্কটি সত্য নয়।

1(a) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত **P** ও **2P** বলদ্বয়ের লব্ধি **R** যদি **P** এর ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হয় তবে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [টেক্সটাইল'১২-১৩]

সমাধান ঃ পদ্ধতি -১ ঃ মনে করি, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α ।



P এর দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P\cos 0° + 2P\cos\alpha = R\cos 90°$

$\Rightarrow P + 2P\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \alpha = 120°$

$\therefore$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $120°$ ।

পদ্ধতি-২ ঃ মনে করি, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α । $\overline{P}$ এবং $2\overline{P}$ বলদ্বয়ের লব্ধি $\overline{R}$ বলে, $\overline{R} = \overline{P} + 2\overline{P}$

$\therefore\ \overline{R}\cdot\overline{P} = (\overline{P} + 2\overline{P})\cdot\overline{P} \Rightarrow RP\cos 90° = P^2 + P.2P\cos\alpha$

$\Rightarrow 0 = P^2 + 2P^2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \alpha = 120°$ $\therefore$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $120°$ ।

পদ্ধতি-৩ ঃ মনে করি, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α ।

শর্তানুসারে, $\tan 90° = \frac{2P\sin\alpha}{P + 2P\cos\alpha} \Rightarrow \cot 90° = \frac{P + 2P\cos\alpha}{2P\sin\alpha} \Rightarrow 0 = \frac{1 + 2\cos\alpha}{2\sin\alpha}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \alpha = 120°$ $\therefore$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $120°$ ।

1(b) একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত **P** ও **13 N** বল দুইটির লব্ধি **12 N** যার ক্রিয়ারেখা **P** এর সাথে **90°** কোণ উৎপন্ন করে। P এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α ।

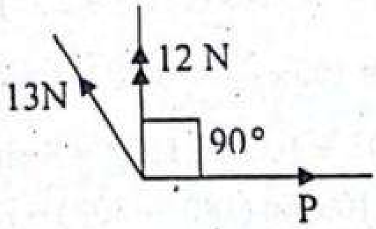
P এর দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P\cos 0° + 13\cos\alpha = 12\cos 90°$

$\Rightarrow P + 13\cos\alpha = 12\times 0 \Rightarrow \cos\alpha = -P/13$

এখন, $(12)^2 = P^2 + (13)^2 + 2.P.13\cos\alpha \Rightarrow 144 = P^2 + 169 + 26.P(-P/13)$

$\Rightarrow 144 = P^2 + 169 - 2.P^2 \Rightarrow P^2 = 169 - 144 = 25 \quad \therefore P = 5\text{ N}$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $Q^2 = P^2 + R^2 - 2PR\cos\theta$ সূত্র প্রয়োগ করে পাই,



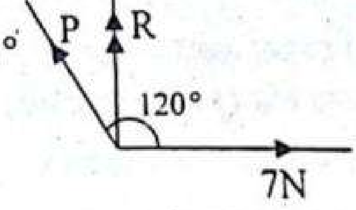
$13^2 = P^2 + 12^2 - 2P\times 12\times\cos 90^0$

$\Rightarrow 169 = P^2 + 144 - 24\times 0$

$\Rightarrow P^2 = 169 - 144 = 25 \quad \therefore P = 5\text{ N}$

1(c) কোনো বিন্দুতে **120°** কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে। ক্ষুদ্রতর বলটির মান **7N** হলে বৃহত্তর বলটির মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, বৃহত্তর বলটির মান P নিউটন এবং তাদের লব্ধির মান R নিউটন ।

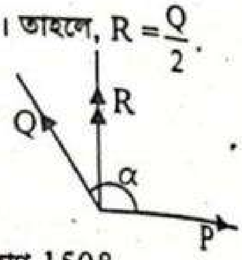


ক্ষুদ্রতর বলটির দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $7\cos 0° + P\cos 120° = R\cos 90°$

$\Rightarrow 7 + P\times(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow P = 14$ $\therefore$ বৃহত্তর বলটির মান 14 নিউটন।

1(d) একটি কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধি একটি বলের উপর লম্ব এবং এর মান অপরটির অর্ধেকের সমান। দেখাও যে, তাদের মধ্যবর্তী কোণ $150°$.

সমাধান ঃ মনে করি, পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলের লব্ধি R, যা P বলের উপর লম্ব। তাহলে, $R=\frac{Q}{2}$.



চ বলের দিকের উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P\sin 0°+Q\sin\alpha = R\sin 90°$

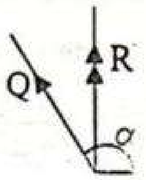
$\Rightarrow Q\sin\alpha = R = \frac{Q}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} = \sin 30° = \sin(180°-30°)$

$\therefore\ \alpha = 30°$ অথবা, $150°$.

কিন্তু লব্ধি R, P বলের উপর লম্ব বলে $\alpha = 30°$ হতে পারে না। সুতরাং, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $150°$.

1(e) কোনো কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধি একটি বলের উপর লম্ব এবং এর মান অপরটির মানের এক তৃতীয়াংশের সমান। দেখাও যে, বল দুইটির অনুপাত $2\sqrt{2}\ :3$. [য.'১০; বুয়েট'১২-১৩]

প্রমাণঃ মনে করি, পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত চ ও Q বলের লব্ধি R, যা P বলের উপর লম্ব। তাহলে, $R=\frac{Q}{3}$.



P বলের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P\cos 0° + Q\cos\alpha = R\cos 90°$

$\Rightarrow P + Q\cos\alpha = 0 \Rightarrow Q\cos\alpha = -P \cdots\cdots$ (i)

আবার, $R^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha \Rightarrow (\frac{Q}{3})^2 = P^2+Q^2+2P(-P)$

$\Rightarrow \frac{Q^2}{9} = Q^2-P^2 \Rightarrow P^2 = Q^2-\frac{Q^2}{9} = \frac{8Q^2}{9} \Rightarrow \frac{P^2}{Q^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

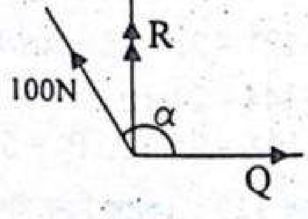
$\therefore$ বল দুইটির অনুপাত $= 2\sqrt{2}\ :3$

1(f) কোন বিন্দুতে $150°$ কোণে ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধি ক্ষুদ্রতর উপাংশের উপর লম্ব। বৃহত্তর উপাংশের পরিমাণ $100N$ হলে ক্ষুদ্রতর উপাংশ এবং তাদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, ক্ষুদ্রতর উপাংশ এবং তাদের লব্ধির মান যথাক্রমে Q নিউটন এবং R নিউটন। তাহলে,
Q এর দিক এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $Q\cos 0° + 100\cos 150° = R\cos 90°$

$\Rightarrow Q + 100\cos(180°-30°) = 0 \Rightarrow Q - 100\cos 30° = 0$

$\therefore\ Q = 100\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$ এবং



$Q\sin 0° + 100\sin 150° = R\sin 90°$

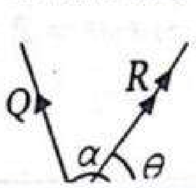
$\Rightarrow 0 + 100\sin(180°-30°) = R\times 1$

$\Rightarrow 100\sin 30° = R\ \therefore R = 100\times\frac{1}{2} = 50$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতর উপাংশ এবং তাদের লব্ধির মান যথাক্রমে $50\sqrt{3}$ N এবং 50 N.

1(g) কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q দুটি বলের লব্ধি P হলে দেখাও যে, একই রেখা বরাবর ক্রিয়ারত $2P$ ও Q বলের লব্ধি Q বলের উপর লম্ব।

প্রমাণ ঃ ধরি, ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α.



১ম ক্ষেত্রে বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই, $P^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow Q^2 + 2PQ\cos\alpha = 0 \Rightarrow Q + 2P\cos\alpha = 0,\ [\because Q \neq 0]$

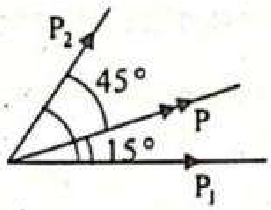
২য় ক্ষেত্রে, ধরি 2P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R , যা Q বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে,

Q বলের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $R\cos\theta = Q\cos 0° + 2P\cos\alpha = Q + 2P\cos\alpha = 0$

$\because\ R \neq 0,\ \cos\theta = 0 = \cos 90° \Rightarrow \theta = 90°\ \therefore$ লব্ধি, Q বলের উপর লম্ব।

2(a) P বলের উপাংশদ্বয় বিপরীত দিকে P এর সাথে 15° ও 45° কোণ উৎপন্ন করে। উপাংশদ্বয়ের মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, P বলের উপাংশদ্বয় P_1 ও P_2 বিপরীত দিকে P এর সাথে 15° ও 45° কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে,



$$P_1 = \frac{P\sin 45^0}{\sin(15^0+45^0)} = \frac{P(1/\sqrt{2})}{\sin 60^0} = \frac{P(1/\sqrt{2})}{\sqrt{3}/2} = \frac{P}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}P$$

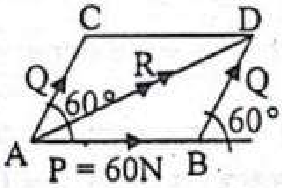
এবং $$P_2 = \frac{P\sin 15^0}{\sin 60^0} = \frac{P(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4}{\sqrt{3}/2} = \frac{P(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}P$$

2(b) A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $\overrightarrow{F_1}$ ও $\overline{F_2}$ বলদ্বয় যথাক্রমে $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ দ্বারা প্রকাশিত। যদি $F_1 = 50$ N, $F_2 = 40$ N এবং $AB = 0{\cdot}5$ মিটার হয় , তবে AC এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে, $\overline{AB} = \overline{F_1}$ এবং $\overline{AC} = \overline{F_2}$

$$\therefore\ \frac{AB}{F_1} = \frac{AC}{F_2} \Rightarrow \frac{0{\cdot}5}{50} = \frac{AC}{40} \Rightarrow AC = 0{\cdot}4 \text{ মিটার।}$$

2(c) A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P ও Q বলদ্বয় ABDC সামান্তরিকে AB ও AC বাহু দ্বারা প্রকাশিত। P = 60 N, AB = 4 m, AC = 3 m এবং $\angle A = 60°$ হলে, P ও Q এর লব্ধির প্রাপ্ত মান হতে সামান্তরিকটির AD কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ লব্ধি R হলে, $\overline{R} = \overline{AD}$

এখন, $\overline{AB} = \overline{P},\ \overline{AC} = \overline{Q},\ \overline{AD} = \overline{R}$.

$$\therefore\ \frac{AB}{P} = \frac{AC}{Q} = \frac{AD}{R} \Rightarrow \frac{4}{60} = \frac{3}{Q} = \frac{AD}{R} \ \ldots\ldots \text{(i)}$$

$\therefore\ Q = \dfrac{3\times 60}{4} = 45N$ এবং $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 60° = 60^2 + 45^2 + 2\times 60\times 45\times \dfrac{1}{2}$

$$= 15^2(4^2 + 3^2 + 12) = 15^2 \times 37\ \therefore\ R = 15\sqrt{37}$$

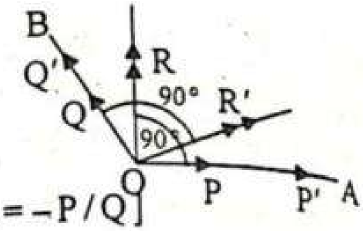
(i) নং হতে পাই, $\dfrac{4}{60} = \dfrac{AD}{15\sqrt{37}}\ \therefore\ AD = \sqrt{37}$ m (Ans.)

3(a) OA ও OB সরলরেখা বরাবর ক্রিয়ারত P ও Q বল দুইটির লব্ধি OA এর উপর লম্ব। একই রেখা বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P′ এবং Q′ বল দুইটির লব্ধি OB এর উপর লম্ব হলে প্রমাণ কর যে, $PP' = QQ'$.

প্রমাণঃ ধরি, P ও Q বল দুইটির লব্ধি R, যা OA এর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে এবং $\angle AOB = \alpha$

OA বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P\cos 0° + Q\cos\alpha = R\cos 90°$

$\Rightarrow P + Q\cos\alpha = R\times 0 \Rightarrow \cos\alpha = -P/Q$



আবার ধরি, একই রেখা বরাবর ক্রিয়ারত P' এবং Q' বল দুইটির লব্ধির R', যা OB এর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে।

OB বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $Q'\cos 0° + P'\cos\alpha = R'\cos 90°$

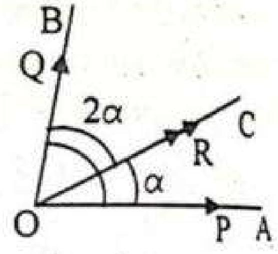
$\Rightarrow Q' + P'\cos\alpha = R'\times 0 \Rightarrow Q' + P'(-P/Q) = 0 \quad [\because \cos\alpha = -P/Q]$

$\therefore\ PP' = QQ'$.

3(b) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q (P > Q) বল দুইটির লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে। দেখাও যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $3\cos^{-1}(\frac{P}{2Q})$ এবং লব্ধির মান $\frac{P^2-Q^2}{Q}$.

[কু.'০১,'১০; রা.'০১,'০৪, '০৮; চ.'০১; ব.'০৩; য.'০৬,'১২; ঢা.'১৩; টেক্সটাইল'০৯-১০]

প্রমাণঃ মনে করি, পরস্পর 3α কোণে OA ও OB বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q (P>Q) বল দুইটির লব্ধি R, যা OC বরাবর ক্রিয়ারত। তাহলে, $\angle AOB = 3\alpha$, $\angle AOC = \alpha$ এবং $\angle COB = 2\alpha$, [$\because$ P>Q]



এখন OC এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos 0° = P\cos(-\alpha) + Q\cos 2\alpha \Rightarrow R = P\cos\alpha + Q\cos 2\alpha \cdots$(i)

এবং $R\sin 0° = P\sin(-\alpha) + Q\sin 2\alpha$

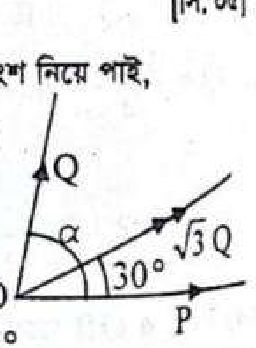
$\Rightarrow 0 = -P\sin\alpha + Q.2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{P}{2Q} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(\frac{P}{2Q})$

(i) হতে, $R = P\cos\alpha + Q(2\cos^2\alpha - 1) = P\times\frac{P}{2Q} + Q(2\frac{P^2}{4Q^2} - 1) = \frac{P^2}{2Q} + \frac{P^2}{2Q} - Q = \frac{P^2-Q^2}{Q}$

$\therefore$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $= 3\alpha = 3\cos^{-1}(\frac{P}{2Q})$ এবং লব্ধির মান $= \frac{P^2-Q^2}{Q}$

3(c) পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বল দুইটির লব্ধির মান $\sqrt{3}\,Q$ এবং তা P এর ক্রিয়ারেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, P = Q অথবা, P = 2Q. [সি.'০৫]

প্রমাণঃ P এর দিক এবং এর উপর লম্ব বরাবর P ও Q বলদ্বয় এবং এদেও লব্ধি $\sqrt{3}\,Q$ এর লম্বাংশ নিয়ে পাই,



$\sqrt{3}\,Q\cos 30° = P\cos 0° + Q\cos\alpha \Rightarrow Q\cos\alpha = \sqrt{3}\,Q\cos 30° - P \cdots$(i)

এবং $\sqrt{3}\,Q\sin 30° = P\sin 0° + Q\sin\alpha$

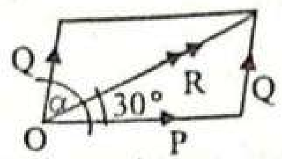
$\Rightarrow Q\sin\alpha = \sqrt{3}\,Q\sin 30° \cdots\cdots$(ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow Q^2 = 3Q^2\cos^2 30° - 2\sqrt{3}\,QP\cos 30° + P^2 + 3Q^2\sin^2 30°$

$\Rightarrow Q^2 = 3Q^2 - 2\sqrt{3}\,QP\times\frac{\sqrt{3}}{2} + P^2 \Rightarrow P^2 + 2Q^2 - 3PQ = 0 \Rightarrow P^2 - 2PQ - PQ + 2Q^2 = 0$

$\Rightarrow P(P-2Q) - Q(P-2Q) = 0 \Rightarrow (P-2Q)(P-Q) = 0 \therefore P = Q$ অথবা, $P = 2Q$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ এখানে বল দুইটির লব্ধি $R = \sqrt{3}\,Q$, যা P এর ক্রিয়ারেখার সাথে $\theta = 30°$ কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore\ Q^2 = P^2 + R^2 - 2PR\cos\theta$ [ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র হতে]

$Q^2 = P^2 + (\sqrt{3}\,Q)^2 - 2P\times\sqrt{3}\,Q\cos 30°$

$\Rightarrow Q^2 = P^2 + 3Q^2 - 2P\times\sqrt{3}\,Q\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow P^2 + 2Q^2 - 3PQ = 0 \Rightarrow P^2 - 2PQ - PQ + 2Q^2 = 0$

$\Rightarrow P(P-2Q) - Q(P-2Q) = 0 \Rightarrow (P-2Q)(P-Q) = 0 \therefore P = Q$ অথবা, $P = 2Q$

4(a) কোনো বিন্দুতে 7 N এবং 8 N মানের দুইটি বল পরস্পর 60° কোণে কার্যরত আছে। এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বল দুইটির লব্ধির মান R নিউটন। তাহলে,

$R^2 = 7^2 + 8^2 + 2\times7\times8\cos 60° = 49 + 64 + 2\times56\times\dfrac{1}{2} = 169 \ \therefore R = 13$

$\therefore$ বল দুইটির লব্ধির মান 13 N.

4(b) দুইটি বল সমকোণে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান $2\sqrt{13}$ N এবং এদের বৃহত্তম লব্ধির মান 10N, বল দুইটি 120° কোণে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, বল দুইটি P নিউটন ও Q নিউটন (P > Q). তাহলে, বল দুইটি সমকোণে ক্রিয়া করে বলে,

$P^2 + Q^2 = (2\sqrt{13})^2 = 52 \cdots\cdots$ (i) এবং বৃহত্তম লব্ধি, $P + Q = 10 \cdots\cdots$ (ii)

(i) হতে পাই, $2(P^2+Q^2) = 2\times52 \Rightarrow (P+Q)^2 + (P-Q)^2 = 104 \Rightarrow 10^2 + (P-Q)^2 = 104$

$\Rightarrow (P-Q)^2 = 4 \Rightarrow P - Q = 2 \cdots\cdots$ (iii)

(ii) + (iii) $\Rightarrow 2P = 12 \therefore P = 6, Q = 10 - P = 10 - 6 = 4$

$\therefore$ বল দুইটি 120° কোণে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান $= \sqrt{6^2 + 4^2 + 2\times6\times4\cos120°}$

$= \sqrt{36+16-24} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

4(c) একটি কণার উপর কার্যরত P, P দুইটি বলের লব্ধি P হলে বল দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, প্রদত্ত বল দুইটির অন্তর্গত কোণ α . তাহলে বলের সামান্তরিক সূত্র হতে আমরা পাই,

$P^2 = P^2 + P^2 + 2PP\cos\alpha \Rightarrow 2P^2\cos\alpha + P^2 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \alpha = 120°$

$\therefore$ বল দুইটির অন্তর্গত কোণ = 120°

4(d) একটি বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধির মান 6 N হলে বল দুইটির মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, P নিউটন মানের সমান বল দুইটির লব্ধি 6N । তাহলে বলের সামান্তরিক সূত্র হতে আমরা পাই,

$6^2 = P^2 + P^2 + 2PP\cos 60° \Rightarrow 36 = 2P^2 + 2P^2\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow 3P^2 = 36 \Rightarrow P^2 = 12 \Rightarrow P = 2\sqrt{3}$. অতএব সমান বল দুইটির মান $2\sqrt{3}$ N , $2\sqrt{3}$ N.

4(e) একটি বিন্দুতে কার্যরত P ও Q বলের লব্ধি R ; Q বলকে দ্বিগুণ করলে নতুন লব্ধি P বলের ক্রিয়া রেখার উপর লম্ব হয়। প্রমাণ কর যে, Q = R.

প্রমাণঃ মনে করি, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α . তাহলে ১ম ক্ষেত্রে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \cdots\cdots$(i)

২য় ক্ষেত্রে, ধরি P ও 2Q বলের লব্ধি R_1 , যা P বলের ক্রিয়া রেখার উপর লম্ব । তাহলে, P বলের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P\cos 0^\circ + 2Q\cos\alpha = R_1\cos 90^\circ \Rightarrow P + 2Q\cos\alpha = 0 \Rightarrow 2Q\cos\alpha = -P.$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $R^2 = P^2 + Q^2 + P(-P) = P^2 + Q^2 - P^2 \Rightarrow R^2 = Q^2 \;\therefore\; R = Q$ (Proved)

5(a) 2α কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধি , 2β কোণে ক্রিয়ারত বল দুইটির লব্ধির দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, cos α = 2 cos β. [সি.'০৩; রা.'০৫,'১০; কু.'১১]

প্রমাণঃ মনে করি, 2β কোণে ক্রিয়ারত P ও P সমান বল দুইটির লব্ধি R. তাহলে 2α কোণে ক্রিয়ারত বল দুইটির লব্ধি 2R হবে।

$\therefore$ বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই, $R^2 = P^2 + P^2 + 2PP\cos 2\beta = 2P^2(1+\cos 2\beta)$

$\Rightarrow R^2 = 2P^2 \times 2\cos^2\beta \Rightarrow R^2 = 4P^2\cos^2\beta \cdots\cdots$ (i)

আবার, $(2R)^2 = P^2 + P^2 + 2PP\cos 2\alpha = 2P^2(1+\cos 2\alpha)$

$\Rightarrow 4R^2 = 2P^2 \times 2\cos^2\alpha \Rightarrow R^2 = P^2\cos^2\alpha \Rightarrow 4P^2\cos^2\beta = P^2\cos^2\alpha$, [(i) হতে।]

$\Rightarrow \cos^2\alpha = 4\cos^2\beta \quad \therefore \cos\alpha = 2\cos\beta$ (Proved)

5(b) পরস্পর θ কোণে ক্রিয়াশীল P, Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধির মান $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$, তারা যখন $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ কোণে ক্রিয়া করে , তখন লব্ধির মান $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$ হয়। প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \frac{m-1}{m+1}$ [রা.'০৬,'০৯; চা.'০৮,'১২]

প্রমাণঃ সামান্তরিক সূত্রানুযায়ী ১ম শর্ত হতে পাই, $\{(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}\}^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$

$\Rightarrow (4m^2+4m+1)(P^2+Q^2) = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$

$\Rightarrow (4m^2+4m+1-1)(P^2+Q^2) = 2PQ\cos\theta \Rightarrow 4m(m+1) = 2PQ\cos\theta \cdots\cdots$ (i)

২য় শর্ত হতে পাই, $\{(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}\}^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$\Rightarrow (4m^2-4m+1)(P^2+Q^2) = P^2 + Q^2 + 2PQ\sin\theta$

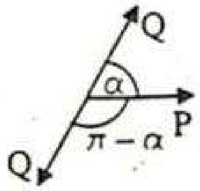
$\Rightarrow (4m^2-4m+1-1)(P^2+Q^2) = 2PQ\sin\theta \Rightarrow 4m(m-1) = 2PQ\sin\theta \cdots\cdots$ (ii)

$$(ii) \div (i) \Rightarrow \frac{2PQ\sin\theta}{2PQ\cos\theta} = \frac{4m(m-1)}{4m(m+1)} \quad \therefore \tan\theta = \frac{m-1}{m+1} \text{ (Proved)}$$

5(c) একটি বিন্দুতে কার্যরত P ও Q বলের লব্ধি R; Q বলকে দ্বিগুণ করলে R দ্বিগুণ হয়। আবার Q বিপরীতমুখী হলেও R দ্বিগুণ হয়। প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

প্রমাণঃ ধরি, P ও Q বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ α. তাহলে Q বিপরীতমুখী হলে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে

প্রদত্ত শর্তানুসারে বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই,



১ম ক্ষেত্রে : $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \cdots\cdots$(i)

২য় ক্ষেত্রে : $(2R)^2 = P^2 + (2Q)^2 + 2P.2Q\cos\alpha$

$\Rightarrow 4R^2 = P^2 + 4Q^2 + 4PQ\cos\alpha \cdots$ (ii)

৩য় ক্ষেত্রে : $4R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\pi - \alpha) \Rightarrow 4R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha \cdots\cdots$(iii)

এখন, (i) + (iii) $\Rightarrow 5R^2 = 2P^2 + 2Q^2 \Rightarrow 2P^2 + 2Q^2 - 5R^2 = 0 \cdots\cdots$ (iv)

(ii) + 2×(iii)$\Rightarrow 12R^2 = 3P^2 + 6Q^2 \Rightarrow P^2 + 2Q^2 - 4R^2 = 0 \cdots\cdots$ (v)

বজ্রগুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে (iv) ও (v) থেকে পাই, $\frac{P^2}{-8+10} = \frac{Q^2}{-5+8} = \frac{R^2}{4-2} \Rightarrow \frac{P^2}{2} = \frac{Q^2}{3} = \frac{R^2}{2}$

$\therefore\ P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

5(d) এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে 8 ও 2 কেজি ওজন। যখন বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $60°$ তখন এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বল দুইটির মান P ও Q (P>Q) কেজি-ওজন।

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $P + Q = 8 \cdots\cdots$ (i) এবং $P - Q = 2 \cdots\cdots$ (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2P = 10 \Rightarrow P = 5$. (i) − (ii) $\Rightarrow 2Q = 6 \Rightarrow Q = 3$.

যখন বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ $60°$ তখন তাদের লব্ধির মান R কেজি-ওজন হলে,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 60° = 5^2 + 3^2 + 2\times5\times3\times\frac{1}{2} = 25 + 9 + 15 = 49 \Rightarrow R = 7$$

$\therefore$ লব্ধির মান 7 কেজি ওজন।

5(e) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে F ও G । প্রমাণ কর যে, বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণ α হলে তাদের লব্ধির মান $\sqrt{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ হবে। [দি.'১২]

প্রমাণঃ মনে করি, P ও Q বল দুইটির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে F ও G. তাহলে,

$P + Q = F \cdots\cdots$ (i) , $P - Q = G \cdots\cdots$ (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow P = (F + G)/2$ এবং (i) − (ii) $\Rightarrow Q = (F - G)/2$.

ধরি, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে লব্ধির মান R.

$\therefore$ বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$$\therefore\ R^2 = \frac{1}{4}(F+G)^2 + \frac{1}{4}(F-G)^2 + 2.\frac{1}{2}(F+G).\frac{1}{2}(F-G)\cos\alpha$$

$$= \frac{2}{4}(F^2 + G^2) + \frac{1}{2}(F^2 - G^2)\cos\alpha = \frac{1}{2}F^2(1 + \cos\alpha) + \frac{1}{2}G^2(1 - \cos\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}F^2\times 2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}G^2\times 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$\therefore$ লব্ধির মান $R=\sqrt{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

6(a) কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি এদের একটির ক্রিয়ারেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। এই বলটিকে দ্বিগুণ করলে উক্ত কোণটি $30°$ হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [বুয়েট'১১-১২]

সমাধান ঃ ধরি, α কোণে কার্যরত P ও Q বল দুইটির লব্ধি P এর সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore\ \tan 60°=\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}\cdots$ (i) এবং $\tan 30°=\frac{Q\sin\alpha}{2P+Q\cos\alpha}\cdots$ (ii)

$$(i)\div(ii)\Rightarrow\frac{\tan 60^0}{\tan 30^0}=\frac{2P+Q\cos\alpha}{P+Q\cos\alpha}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}}=\frac{2P+Q\cos\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow 2P+Q\cos\alpha=3(P+Q\cos\alpha)\Rightarrow P=-2Q\cos\alpha\cdots\cdots(iii)$$

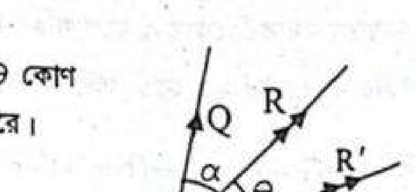
এখন (i) হতে পাই, $\sqrt{3}=\frac{Q\sin\alpha}{-2Q\cos\alpha+Q\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha$

$\Rightarrow\tan\alpha=-\tan 60°=\tan(180°-60°)$ $\therefore$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\alpha=120°$

6(b) কোনো একটি বিন্দুতে $2P$ এবং P মানের বলদুইটি ক্রিয়ারত। প্রথমটিকে তিনগুণ করলে এবং দ্বিতীয়টির মান 12 একক বৃদ্ধি করলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত OA ও OB দ্বারা সূচিত যথাক্রমে $2P$ ও P বল দুইটির লব্ধি $OABC$ সামান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা মানে ও দিকে সুচিত হবে।

আবার, OE ও OF দ্বারা সূচিত যথাক্রমে $6P$ ও $P+12$ বল দুইটির লব্ধি $OEDF$ সামান্তরিকের কর্ণ OD দ্বারা মানে ও দিকে সুচিত হবে, যা OC বরাবর ক্রিয়াশীল।

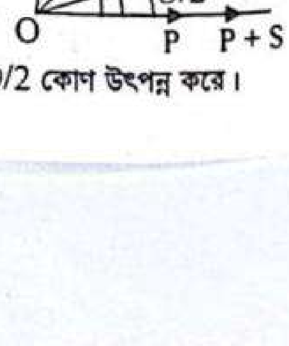


এখন ΔOAC এবং ΔOED সদৃশকোণী।

$$\therefore\ \frac{OA}{AC}=\frac{OE}{ED}\Rightarrow\frac{2P}{P}=\frac{6P}{P+12}\Rightarrow 1=\frac{3P}{P+12}$$

$\Rightarrow P+12=3P\Rightarrow 2P=12\ \therefore\ P=6$ (একক)

6(c) P, Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, যদি P কে S পরিমাণে বাড়ানো হয় তবে নতুন লব্ধি, R এবং P এর মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, দেখাও যে, $S=R$.



প্রমাণ ঃ ধরি, α কোণে ক্রিয়ারত P, Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, P এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে নতুন লব্ধি R' (ধরি), P এর সাথে $\theta/2$ কোণ উৎপন্ন করে।

১ম ক্ষেত্রে, P এর ক্রিয়ারেখা এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$P+Q\cos\alpha=R\cos\theta\cdots$ (i) এবং $Q\sin\alpha=R\sin\theta\cdots$ (ii)

২য় ক্ষেত্রে, α কোণে ক্রিয়ারত $(P+S)$ ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R', $(P+S)$ এর সাথে $\theta/2$ কোণ উৎপন্ন করে।

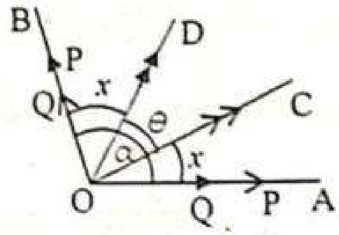
$\therefore\ \tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{Q\sin\alpha}{P+S+Q\cos\alpha}=\dfrac{R\sin\theta}{S+R\cos\theta}$, [(i) ও (ii) হতে।]

$\Rightarrow \dfrac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}=\dfrac{2R\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{S+R\cos\theta}\Rightarrow S+R\cos\theta=2R\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$\Rightarrow S+R\cos\theta=R(\cos\theta+1)=R\cos\theta+R\ \ \therefore S=R$ (Showed)

7(a) P ও Q (P>Q) বল দুইটি পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত। এদের অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধি θ কোণে ঘুরে যায়। প্রমাণ কর যে, $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{P-Q}{P+Q}\tan\dfrac{\alpha}{2}$. [ঢা.'০৯]

প্রমাণঃ মনে করি, OA ও OB বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q বল দুইটির লব্ধি OC বরাবর ক্রিয়ারত। এদের অবস্থান বিনিময় করলে অর্থাৎ OA ও OB বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে Q ও P বল দুইটির লব্ধি OD বরাবর ক্রিয়ারত। তাহলে, $\angle AOB=\alpha$, $\angle COD=\theta$, $\angle AOC=\angle DOB=x$ (ধরি)



$\therefore\ x+\theta+x=\alpha\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}(\alpha-\theta)=\angle AOC$ এবং

$\angle BOC=x+\theta=\dfrac{1}{2}(\alpha-\theta)+\theta=\dfrac{1}{2}(\alpha+\theta)$

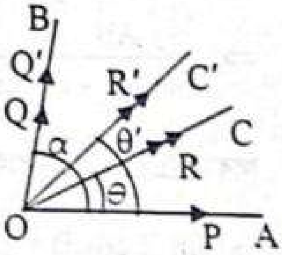
এখন, বলের সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\dfrac{P}{\sin BOC}=\dfrac{Q}{\sin AOC}$

$$\therefore\ \frac{P}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)}=\frac{Q}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}\Rightarrow\frac{P}{Q}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}\Rightarrow\frac{P+Q}{P-Q}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)+\sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)-\sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}$$

$$\Rightarrow\frac{P+Q}{P-Q}=\frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\alpha}=\frac{\tan\frac{1}{2}\alpha}{\tan\frac{1}{2}\theta}\qquad\therefore\ \tan\frac{\theta}{2}=\frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\alpha}{2}.$$

7(b) পরস্পর α ($\alpha\neq\pi$) কোণে আনত OA ও OB রেখাংশ বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q বল দুইটির লব্ধি R, যা OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। একই রেখা বরাবর Q এর স্থলে Q' ক্রিয়া করলে এদের লব্ধি R', যা OA এর সাথে θ' কোণ উৎপন্ন করে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{R}{R'}=\dfrac{\sin(\alpha-\theta')}{\sin(\alpha-\theta)}$. [দি.'১০; ব.'১৩]

প্রমাণঃ ধরি, R ও R' যথাক্রমে OC ও OC' বরাবর ক্রিয়ারত।



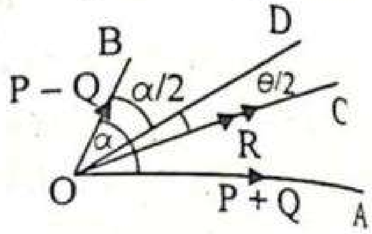
বলের সাইন সূত্র প্রয়োগ করে ১ম ক্ষেত্রে পাই, $\dfrac{P}{\sin BOC}=\dfrac{Q}{\sin AOC}=\dfrac{R}{\sin AOB}$

$\Rightarrow\ \dfrac{P}{\sin(\alpha-\theta)}=\dfrac{R}{\sin\alpha}$ …… (i), [১ম ও ৩য় অনুপাত নিয়ে]

এবং ২য় ক্ষেত্রে পাই, $\dfrac{P}{\sin BOC'} = \dfrac{Q'}{\sin AOC'} = \dfrac{R'}{\sin AOB}$

$\Rightarrow \dfrac{P}{\sin(\alpha - \theta')} = \dfrac{R'}{\sin\alpha}$ ...... (ii) $\therefore$ (i) ÷ (ii) $\Rightarrow \dfrac{R}{R'} = \dfrac{\sin(\alpha - \theta')}{\sin(\alpha - \theta)}$

7(c) $P + Q$ ও $P - Q$ বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়ারত । তাদের লব্ধি বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সাথে $\dfrac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P : Q = \tan\dfrac{\alpha}{2} : \tan\dfrac{\theta}{2}$ [চ.'০৪; সি.'১৩]



প্রমাণঃ মনে করি, OA ও OB বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে $P + Q$ ও $P - Q$ বলদ্বয়ের লব্ধি R , OC বরাবর ক্রিয়াশীল এবং $\angle AOB$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক OD , OC এর সাথে $\theta/2$ কোণ উৎপন্ন করে অর্থাৎ $\angle COD = \theta/2$, $\angle AOD = \angle BOD = \alpha/2$.

$\therefore \angle AOC = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\theta}{2}$ এবং $\angle COB = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\theta}{2}$

এখন বলের সাইন সূত্র পয়োগ করে পাই, $\dfrac{P+Q}{\sin BOC} = \dfrac{P-Q}{\sin AOC} = \dfrac{R}{\sin AOB}$

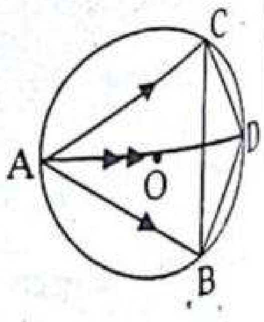
$\Rightarrow \dfrac{P+Q}{\sin(\alpha/2+\theta/2)} = \dfrac{P-Q}{\sin(\alpha/2-\theta/2)} \Rightarrow \dfrac{P+Q}{P-Q} = \dfrac{\sin(\alpha/2+\theta/2)}{\sin(\alpha/2-\theta/2)}$

$\Rightarrow \dfrac{2P}{2Q} = \dfrac{\sin(\alpha/2+\theta/2)+\sin(\alpha/2-\theta/2)}{\sin(\alpha/2+\theta/2)-\sin(\alpha/2-\theta/2)} = \dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\sin\dfrac{\theta}{2}\operatorname{co}\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{2\tan\dfrac{\theta}{2}}$

$\therefore P : Q = \tan\dfrac{\alpha}{2} : \tan\dfrac{\theta}{2}$

7(d) $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ বল দুইটির লব্ধি ΔABC এর পরিকেন্দ্রগামী হলে, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী বা সমদ্বিবাহু হবে।

প্রমাণঃ মনে করি, ΔABC এর পরিকেন্দ্র O এবং A বিন্দুগামী AD ব্যাস। C, D এবং B, D যোগ করি। তাহলে, $\angle CAD = \angle CBD = 90° - \angle CBA = 90° - B$. তদ্রূপ, $\angle BAD = 90° - C$.



বলের সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\dfrac{\overline{AB}}{\sin CAD} = \dfrac{\overline{AC}}{\sin BAD}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{\sin(90^0 - B)} = \dfrac{AC}{\sin(90^0 - C)} \Rightarrow \dfrac{AB}{\cos B} = \dfrac{AC}{\cos C} \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\cos B}{\cos C}$ ... (i)

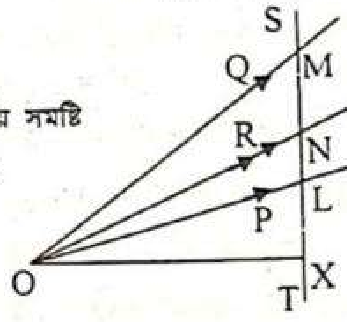
আবার ΔABC –এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B} \Rightarrow \dfrac{\sin C}{\sin B} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\cos B}{\cos C}$ [(i) হতে]

$\Rightarrow \sin B\cos B = \sin C\cos C \Rightarrow \sin 2B = \sin 2C \Rightarrow 2B = 2C \Rightarrow B = C \therefore AC = AB.$

অতএব, $\sin 2B = \sin 2C = \sin(180° - 2C) \Rightarrow 2B = 180° - 2C \therefore B + C = 90° = A$

সুতরাং, ABC ত্রিভুজটি সমকোণী বা সমদ্বিবাহু।

8(a) O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P, Q বল দুইটির লব্ধি R. যদি কোনো ছেদক P, Q, R বলের ক্রিয়া রেখাকে যথাক্রমে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখাও যে, $\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$. [য.'০৮; কুয়েট'১১-১২]



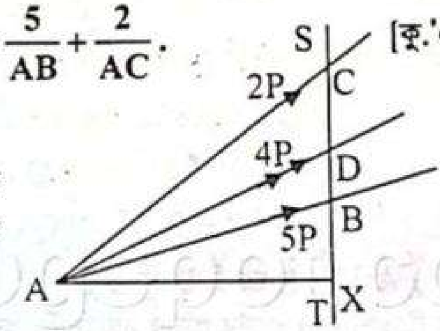
প্রমাণঃ ধরি, ছেদকটি ST এবং O হতে ছেদক ST এর উপর OX লম্ব।

সমতলস্থ যেকোনো রেখা বরাবর P ও Q বল দুইটির লম্বাংশের বীজগণিতীয় সমষ্টি তাদের লব্ধি R এর লম্বাংশের সমান বলে OX বরাবর তাদের লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$P \cos XOL + Q \cos XOM = R \cos XON$

$\Rightarrow P\frac{OX}{OL} + Q\frac{OX}{OM} = R\frac{OX}{ON} \therefore \frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$ (Showed)

8(b) 5P ও 2P মানের দুইটি বল A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং এদের লব্ধির মান 4P। যদি কোনো ছেদক এদের ক্রিয়া রেখাকে যথাক্রমে B, C ও D বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখাও যে, $\frac{4}{AD} = \frac{5}{AB} + \frac{2}{AC}$. [কু.'০৫]



প্রমাণঃ ধরি, ছেদকটি ST এবং A হতে ছেদক ST এর উপর AX লম্ব।

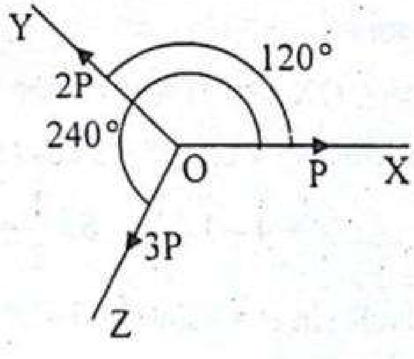
সমতলস্থ যেকোনো রেখা বরাবর 5P ও 2P বল দুইটির লম্বাংশের বীজগণিতীয় সমষ্টি তাদের লব্ধি 4P এর লম্বাংশের সমান বলে AX বরাবর তাদের লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$5P \cos XAB + 2P \cos XAC = 4P \cos XAD$

$\Rightarrow 5\frac{AX}{AB} + 2\frac{AX}{AC} = 4\frac{AX}{AD} \therefore \frac{4}{AD} = \frac{5}{AB} + \frac{2}{AC}$ (Showed)

9(a) একটি বিন্দুতে পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়ারত P, 2P, 3P মানের বলত্রয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, O বিন্দুতে OX, OY, OZ বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P, 2P, 3P বলগুলোর লব্ধির মান R, যা P এর কিয়ারেখার সাথে θ কোণে কার্যরত।



এখন OX এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = P\cos 0° + 2P\cos 120° + 3P\cos 240°$

$= P - 2P \times (-\frac{1}{2}) + 3P \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}P \cdots\cdots(i)$

এবং $R\sin\theta = P\sin 0° + 2P\sin 120° + 3P\sin 240°$

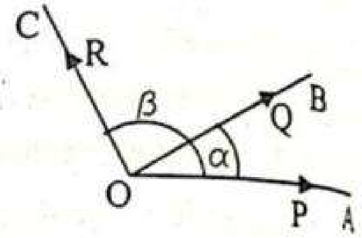
$= 0 + 2P \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3P \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}P \cdots (ii)$

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2 = \frac{9}{4}P^2 + \frac{3}{4}P^2 = 3P^2$. $\therefore$ বলগুলোর লব্ধির মান $\sqrt{3}\,P$.

$(ii) \div (i) \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ = \tan(180^\circ + 30^\circ)$

$\therefore \theta = 210^\circ$, যেহেতু $R\sin\theta$ এবং $R\cos\theta$ উভয়ে ঋণাত্মক।

9(b) একই সমতলে অবস্থিত OA , OB, OC রেখা বরাবর যথাক্রমে P, Q, R বলগুলোর লব্ধি F হলে প্রমাণ কর যে, $F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2QR\cos BOC + 2RP\cos COA + 2PQ\cos AOB$



প্রমাণঃ মনে করি, লব্ধি F, OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এবং $\angle AOB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$. তাহলে, $\angle BOC = \beta - \alpha$.

OA এবং এর উপর লম্ব রেখা বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$F\cos\theta = P\cos 0^\circ + Q\cos\alpha + R\cos\beta$

$\quad = P + Q\cos\alpha + R\cos\beta \cdots\cdots (i)$ এবং

$F\sin\theta = P\sin 0^\circ + Q\sin\alpha + R\sin\beta = Q\sin\alpha + R\sin\beta \cdots\cdots (ii)$

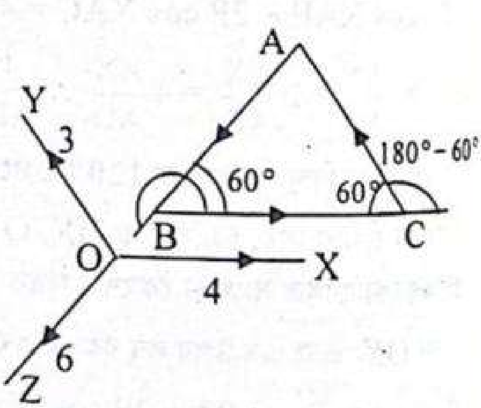
$\therefore (i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow F^2 = P^2 + Q^2\cos^2\alpha + R\cos^2\beta + 2PQ\cos\alpha + 2QR\cos\alpha\cos\beta + 2RP\cos\beta + Q^2\sin^2\alpha + R^2\sin^2\beta + 2QR\sin\alpha\sin\beta.$

$\Rightarrow F^2 = P^2 + Q^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + R^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + 2PQ\cos\alpha + 2RP\cos\beta + 2QR(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$\quad = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\alpha + 2RP\cos\beta + 2QR\cos(\beta - \alpha)$

$\therefore F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos AOB + 2QR\cos BOC + 2RP\cos COA$

9(c) ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহুর সমান্তরালে যথাক্রমে 4 N, 3 N, 6 N মানের তিনটি সমবিন্দু বল ক্রিয়াশীল । এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ মনে করি, ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA, BC বাহুর সমান্তরালে যথাক্রমে 4 N, 3 N, 6 N মানের বল তিনটি O বিন্দুতে OX, OY, OZ বরাবর কার্যরত। ধরি, বলগুলোর লব্ধি R, যা OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। এখানে, OX এর সাথে 3 N ও 6 N বলদ্বয় যথাক্রমে $(180^\circ - 60^\circ)$ ও $(180^\circ + 60^\circ)$ কোণ উৎপন্ন করে।

এখন, OX এবং এর উপর লম্ব রেখা বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = 4\cos 0^\circ + 3\cos(180^\circ - 60^\circ) + 6\cos(180^\circ + 60^\circ) = 4 - 3\cos 60^\circ - 6\cos 60^\circ$

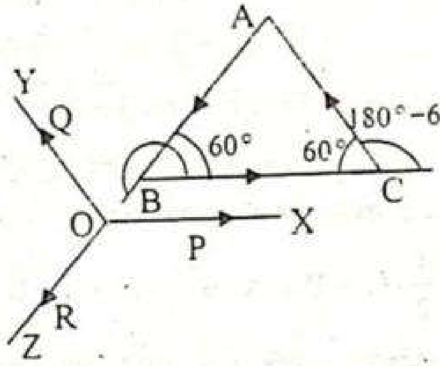
$\quad = 4 - 3\times\frac{1}{2} - 6\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdots (i)$

এবং $R\sin\theta = 4\sin 0^\circ + 3\sin(180^\circ - 60^\circ) + 6\sin(180^\circ + 60^\circ)$

$\quad = 3\sin 60^\circ - 6\sin 60^\circ = 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdots (ii)$

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4} + \frac{27}{4} = \frac{28}{4} = 7 \quad \therefore$ লব্ধির মান $\sqrt{7}$ N

9(d) কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R মানের বলগুলির দিক একইক্রমে কোন সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 - QR - RP - PQ}$



প্রমাণঃ মনে করি, O বিন্দুতে OX, OY, OZ বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R মানের বলগুলোর দিক ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল। ধরি, বলগুলোর লব্ধি F, যা OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। এখানে, OX এর সাথে Q ও R বলদ্বয় যথাক্রমে $(180° - 60°)$ ও $(180° + 60°)$ কোণ উৎপন্ন করে।

এখন, OX এবং এর উপর লম্ব রেখা বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$$F\cos\theta = P\cos 0° + Q\cos(180° - 60°) + R\cos(180° + 60°)$$

$$= P - Q\cos 60° - R\cos 60° = P - \frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}R \cdots (i)$$

এবং $F\sin\theta = P\sin 0° + Q\sin(180° - 60°) + R\sin(180° + 60°)$

$$= Q\sin 60° - R\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}Q - \frac{\sqrt{3}}{2}R \cdots (ii)$$

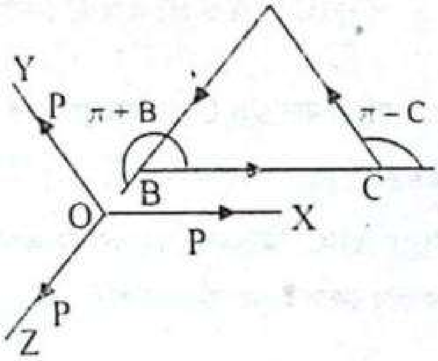
$$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow F^2 = P^2 + \frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{4}R^2 - PQ + \frac{1}{2}QR - RP + \frac{3}{4}Q^2 + \frac{3}{4}R^2 - \frac{3}{2}QR$$

$$= P^2 + Q^2 + R^2 - PQ - RP - QR \Rightarrow F = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 - QR - RP - PQ}$$

$\therefore$ লব্ধির মান $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 - QR - RP - PQ}$.

9(e) P মানের তিনটি বল একটি বিন্দুতে এরূপভাবে কার্যরত যেন এদের দিক ΔABC এর BC, CA এবং AB বাহুর সমান্তরাল। প্রমাণ করে যে, এদের লব্ধির মান $P\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$.

[ঢা.'১০; বুয়েট'০০-০১]



প্রমাণঃ মনে করি, O বিন্দুতে OX, OY, OZ বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P মানের বল তিনটি দিক ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল। ধরি, বলগুলোর লব্ধি F, যা OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

এখন, OX এবং এর উপর লম্ব রেখা বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$$F\cos\theta = P\cos 0^c + P\cos(\pi - C) + P\cos(\pi + B)$$

$$= P(1 - \cos C - \cos B)$$

এবং $F\sin\theta = P\sin 0^c + P\sin(\pi - C) + P\sin(\pi + B)$

$$= P(\sin C - \sin B)$$

(i) ও (ii) এর বর্গের সমষ্টি নিয়ে পাই,

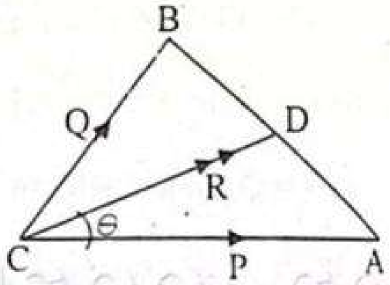
$$F^2 = P^2 (1 + \cos^2 C + \cos^2 B - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos B \cos C + \sin^2 C + \sin^2 B - 2\sin B \sin C)$$

$$\Rightarrow F^2 = P^2 \{ 3 - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos (B + C)\}$$
$$= P^2 \{ 3 - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos (\pi - A)\}$$

$\therefore$ লব্ধির মান , $F = P\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$

9(f) দুইটি বল **ABC** ত্রিভুজের **CA** ও **CB** বাহু বরাবর ক্রিয়া করে এবং এদের মান যথাক্রমে **cos A** ও cos B এর সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান **sin C** এর সমানুপাতিক এবং এর গতি পথ C কোণকে $\frac{1}{2}(C + B - A)$ ও $\frac{1}{2}(C + A - B)$ এ দুই অংশে বিভক্ত করে। [ব.'০৫,'১০; ঢা.'০৬; চ.'১১]

প্রমাণঃ মনে করি, CA ও CB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q বলের লব্ধি R, যা CD বরাবর ক্রিয়াশীল। ধরি, $\angle ACD = \theta$. শর্তানুসারে, $P = k\cos A$, $Q = k\cos B$, যেখানে k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক।



CA এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$R\cos\theta = P\cos 0^\circ + Q\cos C = P + Q\cos C$$
$$= k\cos A + k\cos B\cos C$$
$$= k\cos(\pi - \overline{A+B}) + k\cos B\cos C$$
$$= -k\cos(B + C) + k\cos B\cos C$$
$$= -k\cos B\cos C + k\sin B\sin C + k\cos A\cos B$$

$\therefore R\cos\theta = k\sin B\sin C \cdots\cdots$ (i) এবং

$R\sin\theta = Q\sin C = k\cos B\sin C \cdots\cdots$ (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2 = k^2\sin^2 C(\sin^2 B + \cos^2 B) = k^2\sin^2 C \Rightarrow R = k\sin C.$

$\therefore$ লব্ধির মান sin C এর সমানুপাতিক ।

এখন $(ii) \div (i) \Rightarrow \tan\theta = \cot B = \tan(\frac{\pi}{2} - B) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - B = \frac{1}{2}(A + B + C) - B$

$= \frac{1}{2}(C + A - B)$ এবং C কোণের অপর অংশ $= C - \theta = C - \frac{1}{2}(C + A - B) = \frac{1}{2}(C + B - A)$

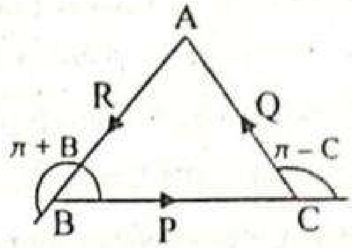
$\therefore$ লব্ধির মান sin C এর সমানুপাতিক এবং এর গতি পথ C কোণকে $\frac{1}{2}(C + B - A)$ ও $\frac{1}{2}(C + A - B)$ অংশে বিভক্ত করে।

9(g) ABC ত্রিভুজের বাহু বরাবর একইক্রমে কার্যরত তিনটি সমবিন্দু বলের মান এদের স্ব স্ব ক্রিয়ারেখার বিপরীত কোণের কোসাইনের সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, $\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$.

প্রমাণঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত বলত্রয় যথাক্রমে $P = k\cos A$, $Q = k\cos B$ এবং $R = k\cos C$, যেখানে k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক।

ধরি, বলগুলোর লব্ধি F, যা BC এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

P বলের দিক এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,



$$\begin{aligned}
F\cos\theta &= P\cos 0^\circ + Q\cos(\pi - C) + R\cos(\pi + B)\\
&= P - Q\cos C - R\cos B\\
&= k\cos A - k\cos B\cos C - k\cos C\cos B\\
&= k\cos A - 2k\cos B\cos C\\
&= k\cos A - k\{\cos(B + C) + \cos(B - C)\}\\
&= 2k\cos A - k\cos(B - C)\cdots(i),\\
&[\because \cos(B + C) = \cos(\pi - A) = -\cos A]
\end{aligned}$$

এবং $F\sin\theta = P\sin 0^\circ + Q\sin(\pi - C) + R\sin(\pi + B) = Q\sin C - R\sin B$

$$= k\cos B\sin C - k\cos C\sin B = -k\sin(B - C)\cdots\cdots(ii)$$

এখন, $(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow F^2 = k^2\{4\cos^2 A + \cos^2(B - C) - 4\cos A\cos(B - C) + \sin^2(B - C)\}$

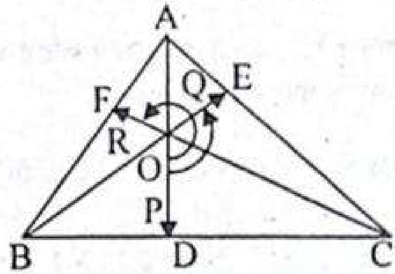
$\Rightarrow F^2 = k^2[1 - 4\cos A\{\cos(B - C) - \cos A\}]$

$= k^2[1 - 4\cos A\{\cos(B - C) + \cos(B + C)\}] = k^2[1 - 8\cos A\cos B\cos C]$

$\Rightarrow F = k\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ $\therefore$ লব্ধির মান $\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ এর সমানুপাতিক।

9(h) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত বলগুলোর মান এদের অনুসঙ্গী শীর্ষ কোণের কোসাইনের সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ এর সমানুপাতিক।

প্রমাণঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব AD, BE, CF বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়। শর্তানুসারে, $P = k\cos A$, $Q = k\cos B$ এবং $R = k\cos C$, যেখানে k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। ধরি, বলগুলোর লব্ধি S, যা P বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। P বলটি Q বলের সাথে $\angle DOE = \pi - C$ এবং R বলের সাথে $2\pi - \angle DOF = 2\pi - (\pi - B) = \pi + B$ কোণ উৎপন্ন করে।



P বলের দিক এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$\begin{aligned}
S\cos\theta &= P\cos 0^\circ + Q\cos(\pi - C) + R\cos(\pi + B) = P - Q\cos C - R\cos B\\
&= k\cos A - k\cos B\cos C - k\cos C\cos B = k\cos A - 2k\cos B\cos C\\
&= k\cos A - k\{\cos(B + C) + \cos(B - C)\} = 2k\cos A - k\cos(B - C)\cdots(i)\\
&[\because \cos(B + C) = \cos(\pi - A) = -\cos A]
\end{aligned}$$

এবং $S \sin\theta = P\sin 0^\circ + Q\sin(\pi - C) + R\sin(\pi + B) = Q\sin C - R\sin B$

$= k\cos B\sin C - k\cos C\sin B = -k\sin(B - C) \cdots\cdots (ii)$

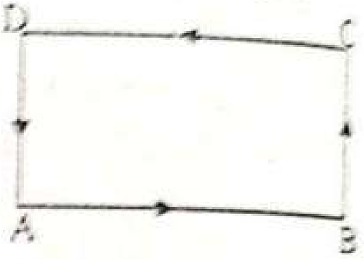
এখন, $(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow S^2 = k^2\{4\cos^2 A + \cos^2(B-C) - 4\cos A\cos(B-C) + \sin^2(B-C)\}$

$\Rightarrow S^2 = k^2[1 - 4\cos A\{\cos(B-C) - \cos A\}]$

$= k^2[1 - 4\cos A\{\cos(B-C) + \cos(B+C)\}] = k^2[1 - 8\cos A\cos B\cos C]$

$\Rightarrow S = k\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ $\therefore$ লব্ধির মান $\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ এর সমানুপাতিক।

10(a) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R, S বলের কার্যরেখা $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের যথাক্রমে AB, BC, CD ও DA বাহুর সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 - 2PQ - 2QS}$.



প্রমাণ: ধরি, বলগুলো O বিন্দুতে ক্রিয়ারত এবং এদের লব্ধির মান F, যা P এর দিক AB এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, P এর দিক AB এবং এর উপর লম্ব বরাবর অংশক নিয়ে পাই,

$F\cos\theta = P\cos 0^\circ + Q\cos 90^\circ + R\cos 180^\circ + S\cos 270^\circ$

$\Rightarrow F\cos\theta = P - R \cdots\cdots (i)$ এবং

$F\sin\theta = P\sin 0^\circ + Q\sin 90^\circ + R\sin 180^\circ + S\sin 270^\circ = Q - S \cdots\cdots (ii)$

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow F^2 = P^2 + R^2 - 2PR + Q^2 + S^2 - 2QS$

$\therefore$ লব্ধির মান, $F = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 - 2PQ - 2QS}$

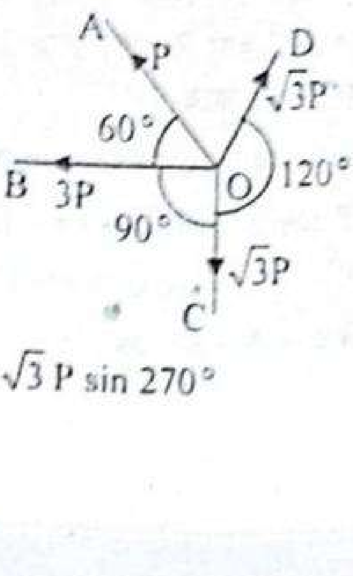
10(b) P, $3P$, $\sqrt{3}P$ ও $\sqrt{3}P$ মানের বলগুলো যথাক্রমে একতলীয় OA, OB, OC ও OD সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে। যদি $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$ এবং $\angle COD = 120^\circ$ হয়, তাহলে এদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত বলগুলোর লব্ধির মান R, যা OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। OA বরাবর এবং এর উপর লম্ব বরাবর অংশক নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = P\cos 0^\circ + 3P\cos 60^\circ + \sqrt{3}P\cos(90^\circ + 60^\circ) + \sqrt{3}P\cos 270^\circ$

$= P + 3P \times \frac{1}{2} - \sqrt{3}P\sin 60^\circ + \sqrt{3}P \times 0$

$= P + 3P \times \frac{1}{2} - \sqrt{3}P\sin 60^\circ + \sqrt{3}P \times 0$



$= P + \frac{3}{2}P - \sqrt{3}P \times \frac{\sqrt{3}}{2} = P \cdots\cdots (i)$ এবং

$R\sin\theta = P\sin 0^\circ + 3P\sin 60^\circ + \sqrt{3}P\sin(90^\circ + 60^\circ) + \sqrt{3}P\sin 270^\circ$

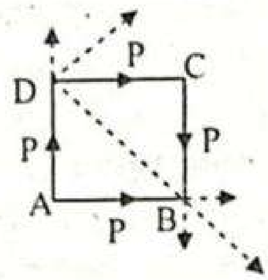
$$= 3P \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\,P\cos 60^\circ - \sqrt{3}\,P = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}P - \sqrt{3}\,P = \sqrt{3}\,P$$

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2 = P^2 + 3P^2 = 4P^2 \;\therefore\; R = 2P$

$(ii) \div (i) \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} = \tan 60^\circ \;\therefore \theta = 60^\circ$

$\therefore$ লব্ধির মান 2P, যা P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে।

(c) P মানের চারটি বল ABCD বর্গের AB, CB , AD ও DC বরাবর ক্রিয়াশীল। লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

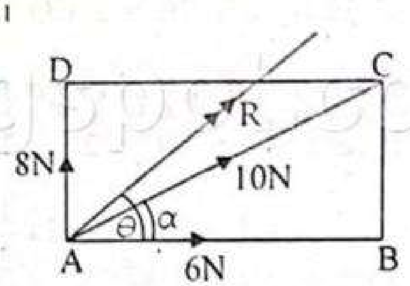


সমাধান : AB ও CB বরাবর সমকোণে কার্যরত P মানের সমান বল দুইটির লব্ধি মান $= \sqrt{P^2 + P^2} = \sqrt{2}P$, যা DB কর্ণ বরাবর ক্রিয়ারত।

আবার, AD ও DC বরাবর সমকোণে কার্যরত P মানের সমান বল দুইটির লব্ধি মান $= \sqrt{P^2 + P^2} = \sqrt{2}P$, যা DC এর সাথে 45° কোণে ক্রিয়ারত।

এখন, পরস্পর সমকোণে কার্যরত $\sqrt{2}P$ মানের সমান বল দুইটির লব্ধি অর্থাৎ P মানের সমান বল চারটির লব্ধির মান $= \sqrt{(P\sqrt{2})^2 + (P\sqrt{2})^2} = \sqrt{2P^2 + 2P^2} = 2P$, যা DC বরাবর ক্রিয়ারত।

10(d) ABCD আয়তক্ষেত্রের AB ও BC বাহু যথাক্রমে 4 cm এবং 3 cm । AB, AC, AD বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে 6N, 10N ও 8N সমবিন্দু বল তিনটির লব্ধি ও ক্রিয়া রেখা নির্ণয় কর।



সমাধান : দেওয়া আছে, AB = 4 cm, BC = 3 cm.

$\therefore\; AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow AC = 5$

ধরি, $\angle BAC = \alpha$. তাহলে, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

মনে করি , বলগুলোর লব্ধির মান R নিউটন, যা A বিন্দুতে AC এর সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল।

AB এবং AD বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$R\cos\theta = 6\cos 0^\circ + 10\cos\alpha + 8\cos 90^\circ = 6 + 10\times\frac{4}{5} = 14 \cdots\cdots (i) \text{ এবং}$$

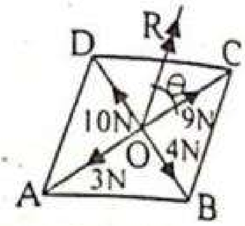
$$R\sin\theta = 6\sin 0^\circ + 10\sin\alpha + 8\sin 90^\circ = 10\times\frac{3}{5} + 8 = 14 \cdots\cdots (ii)$$

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2 = (14)^2 + (14)^2 = 2(14)^2 \Rightarrow R = 14\sqrt{2}$

$(ii) \div (i) \Rightarrow \tan\theta = 1 = \tan 45^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$

সুতরাং, বলগুলোর লব্ধির মান $14\sqrt{2}$ N এবং তা $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক বরাবর ক্রিয়াশীল।

10(e) ABCD রম্বসের কর্ণদ্বয়ের ছেদ বিন্দু O তে 3 N, 4 N, 9 N এবং 10 N মানের বলগুলো যথাক্রমে OA, OB, OC এবং OD বরাবর ক্রিয়া করে। লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ ধরি, বলগুলোর লব্ধির মান R নিউটন, যা O বিন্দুতে OC এর সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল। তাহলে, OC এবং OD বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$R\cos\theta = 9\cos 0^\circ + 10\cos 90^\circ + 3\cos 180^\circ + 4\cos 270^\circ$$
$$= 9 - 3 = 6 \cdots \text{(i)}$$

এবং $R\sin\theta = 9\sin 0^\circ + 10\sin 90^\circ + 3\sin 180^\circ + 4\sin 270^\circ = 10 - 4 = 6 \cdots$ (ii)

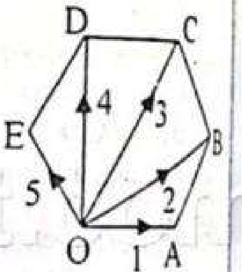
$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2 = (6)^2 + (6)^2 = 2.(6)^2 \Rightarrow R = 6\sqrt{2}$

$(ii) \div (i) \Rightarrow \tan\theta = 1 = \tan 45^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$

সুতরাং, বলগুলোর লব্ধির মান $6\sqrt{2}$ N এবং তা O বিন্দুতে OC এর সাথে 45° কোণে কিয়াশীল।

10(f) 1, 2, 3, 4, 5 কেজি ওজনের বলগুলি কোন সুষম ষড়ভুজের একটি কৌণিক বিন্দু থেকে যথাক্রমে অন্য কৌণিক বিন্দুগুলির দিকে ক্রিয়ারত আছে। এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, OABCDE সুষম ষড়ভুজের OA, OB, OC, OD, OF বরাবর যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5 কেজি ওজনের বলগুলো ক্রিয়াশীল এবং এদের লব্ধির মান R কেজি ওজন, যা OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



তাহলে, $\angle AOE = 180^\circ - \dfrac{360^0}{6} = 120^\circ$ এবং

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \frac{120^0}{4} = 30^\circ$$

এখন OA এবং OD বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

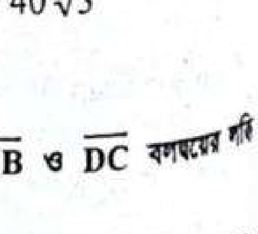
$$R\cos\theta = 1\cos 0^\circ + 2\cos 30^\circ + 3\cos 60^\circ + 4\cos 90^\circ + 5\cos 120^\circ$$
$$= 1 + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\times\frac{1}{2} + 4\times 0 + 5\times -\frac{1}{2} = \sqrt{3} \cdots\cdots \text{(i) এবং}$$

$$R\sin\theta = 1\sin 0^\circ + 2\sin 30^\circ + 3\sin 60^\circ + 4\sin 90^\circ + 5\sin 120^\circ$$
$$= 1\times 0 + 2\times\frac{1}{2} + 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\times 1 + 5\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 5 + 4\sqrt{3} \cdots\cdots \text{(ii)}$$

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2 = (\sqrt{3})^2 + (5 + 4\sqrt{3})^2 = 3 + 25 + 48 + 40\sqrt{3} = 76 + 40\sqrt{3}$

$\therefore$ বলগুলোর লব্ধির মান $= \sqrt{76 + 40\sqrt{3}} = 2\sqrt{19 + 10\sqrt{3}}$ কেজি ওজন।

11(a) ABCD চতুর্ভুজের BC ও AD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F. দেখাও যে, $\overline{AB}$ ও $\overline{DC}$ বলদ্বয়ের লব্ধি $2\overline{FE}$.



প্রমাণঃ F, B এবং F, C যোগ করি। বল সংযোজনের ত্রিভুজ সূত্র হতে,

$$\overline{AB} + \overline{DC} = (\overline{AF} + \overline{FB}) + (\overline{DF} + \overline{FC})$$
$$= (\overline{AF} + \overline{DF}) + (\overline{FB} + \overline{FC})$$

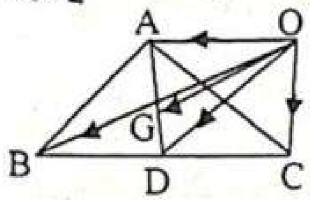
$= \underline{0} + 2\overline{FE}$ [অনুপাত সূত্র দ্বারা]

$\therefore \overline{AB} + \overline{DC} = 2\overline{FE}$ (প্রমাণিত)

(b) **ΔABC এর ভরকেন্দ্র G হলে, দেখাও যে** প্রশ্নমালা VIII A **$\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ বলত্রয়ের লব্ধি $3\overline{OG}$.**

প্রমাণঃ O , D যোগ করি , যেখানে D, BC এ: ...BC এর ভরকেন্দ্র

G , AD এর উপর অবস্থিত হবে এবং AG : GD = 2 : 1.



এখন, $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA} + (\overline{OB} + \overline{OC})$

$= 1.\overline{OA} + 2.\overline{OD}$ [অনুপাত সূত্র দ্বারা]

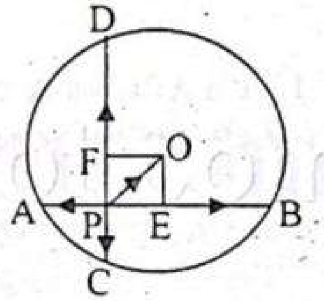
$= (1+2)\overline{OG}$ [অনুপাত সূত্র দ্বারা ; যেহেতু AG : GD = 2 : 1]

$\therefore \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 3\,\overline{OG}$

11(c) কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা AB ও CD পরস্পর P বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। বৃত্তের কেন্দ্র O হলে, দেখাও যে, $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$ বলগুলোর লব্ধি $2\overline{PO}$ হবে।

প্রমাণঃ বৃত্তের কেন্দ্র O থেকে OE ⊥ AB এবং OF ⊥ CD অঙ্কন করি ।

তাহলে E ও F হবে যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু।



এখন, $\overline{PA} + \overline{PB} = (\overline{EA} - \overline{EP}) + (\overline{PE} + \overline{EB})$

$= \overline{EA} + \overline{PE} + \overline{AE} + \overline{PE}$ [$\because$ AE = EB]

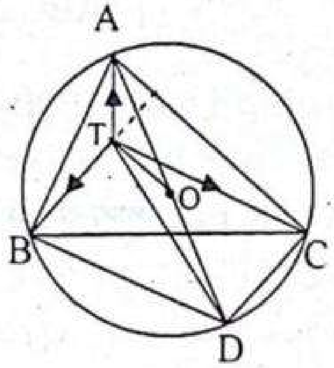
$= \overline{EA} + 2\overline{PE} - \overline{EA} = 2\overline{PE}$

তদ্রূপ, $\overline{PC} + \overline{PD} = 2\overline{PF}$

$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 2\overline{PE} + 2\overline{PF} = 2(\overline{PE} + \overline{PF}) = 2\,\overline{P0}$ [বলের সামন্ড়িরিক সূত্রানুযায়ী।]

(d) T, O যথাক্রমে ΔABC –এর লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র। দেখাও যে, $\overline{TA}$, $\overline{TB}$, $\overline{TC}$ বলত্রয়ের লব্ধি $2\overline{TO}$

প্রমাণঃ AO বর্ধিত করে AD ব্যাস অঙ্কন করি। B , D ও C , D যোগ করি। তাহলে,



$\angle ACD = 90°$ [$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ] $\therefore$ DC ⊥ AC

আবার BT ⊥ AC [$\because \Delta$ ABC –এর লম্ববিন্দু T]

$\therefore$ BT || DC . তদ্রূপ, BD || TC.

$\therefore$ BDCT একটি সামান্তরিক এবং TD একটি কর্ণ।

$\therefore$ বলত্রয়ের লব্ধি $= \overline{TA} + \overline{TB} + \overline{TC} = \overline{TA} + \overline{TD}$ [বলের সামান্তরিক সূত্র দ্বারা]

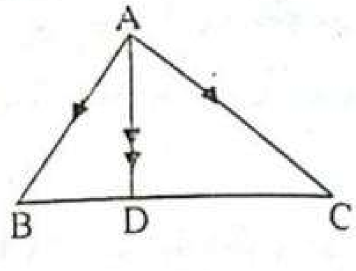
$= 2\overline{TO}$ [$\because$ O, AD এর মধ্যবিন্দু।]

$\therefore$ বলত্রয়ের লব্ধি $2\overline{TO}$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1(a) ΔABC **-এর AB ও AC বরাবর দুইটি বল secB এবং secC কার্যরত। দেখাও যে, এদের লব্ধি A হতে BC-এর উপর লম্ব বরাবর কার্যরত এবং এর মান tan B + tan C.**

প্রমাণ : BC –এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করি। AB বরাবর কার্যরত secB বলকে $(\frac{\sec B}{AB})\overline{AB} = m\overline{AB}$ এবং AC বরাবর কার্যরত secC বলকে $(\frac{\sec C}{AC})\overline{AC} = m\overline{AC}$ হিসাবে গণ্য করা যায়, যেখানে $m = \frac{\sec B}{AB} = \frac{AB/BD}{AB} = \frac{1}{BD}$ এবং $n = \frac{\sec C}{AC} = \frac{AC/CD}{AC} = \frac{1}{CD}$



এখন, $n : m = \frac{1}{CD} : \frac{1}{BD} = BD : CD.$

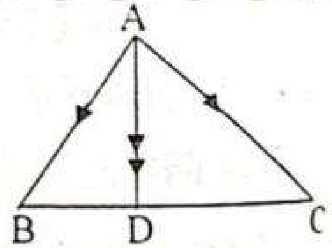
$\therefore$ (m, n) উপপাদ্য অনুযায়ী লব্ধি CD বরাবর কার্যরত এবং এর মান $= (m+n)\,AD = (\frac{1}{BD} + \frac{1}{CD})AD$

$$= \frac{AD}{BD} + \frac{AD}{CD} = \tan B + \tan C$$

1(b) ΔABC **-এ A কোণটি এক সমকোণ। AD, BC বাহুর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, AB বরাবর ক্রিয়ারত** μ / AB **এবং AC বরাবর ক্রিয়ারত** μ / AC **বলের লব্ধির মান** μ / AD **এবং লব্ধি বল AD বরাবর ক্রিয়া করে।**

প্রমাণ : AB বরাবর কার্যরত μ/AB বলকে $(\frac{\mu}{AB^2})\overline{AB} = m\overline{AB}$ এবং AC বরাবর কার্যরত μ/AC বলকে $(\frac{\mu}{AC^2})\overline{AC} = n\overline{AC}$ হিসাবে গণ্য করা যায়,

যেখানে $m = \mu / AB^2$ এবং $n = \mu / AC^2$



এখন, $n : m = \frac{\mu / AC^2}{\mu / AB^2} = \frac{AB^2}{AC^2} = \tan^2 C \quad [\because \angle A = 90^0]$

$$= \tan C \tan(90^0 - B) = \tan C \cot B = \frac{AD}{CD} \times \frac{BD}{AD} = BD : CD$$

$\therefore$ (m, n) উপপাদ্য অনুযায়ী লব্ধি CD বরাবর কার্যরত এবং এর মান $= (m+n)\,AD = (\frac{\mu}{AB^2} + \frac{\mu}{AC^2})AD$

$= (\frac{AB^2 + AC^2}{AB^2.AC^2})\mu\, AD = \frac{\mu.BC^2.AD}{AB^2.AC^2} = \mu.\frac{BC^2}{AB^2}.\frac{AD^2}{AC^2}.\frac{1}{AD} = \mu.\sec^2 B.\sin^2 C.\frac{1}{AD}$

$= \mu.\sec^2 B.\sin^2(90^0 - B).\frac{1}{AD} = \mu.\sec^2 B.\cos^2 B.\frac{1}{AD} = \frac{\mu}{AD}$

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, লব্ধির মান R, যা AB –এর সাথে θ কোণে কার্যরত। তাহলে R, AC এর সাথে $(90^\circ - \theta)$ কোণ উৎপন্ন করবে, যেহেতু $\angle BAC = 90^\circ$; বলের সাইন সূত্র হতে পাই,

$$\frac{\mu/AB}{\sin(90^\circ-\theta)}=\frac{\mu/AC}{\sin\theta}=\frac{R}{\sin 90^\circ}\Rightarrow\frac{\mu}{AB\cos\theta}=\frac{\mu}{AC\sin\theta}=R\ \dots\dots(i)$$

১ম ও ২য় অনুপাত হতে পাই, $\tan\theta=\frac{AC}{AB}=\cot C=\tan(90^\circ-B)=\tan BAD\Rightarrow\theta=\angle BAD$

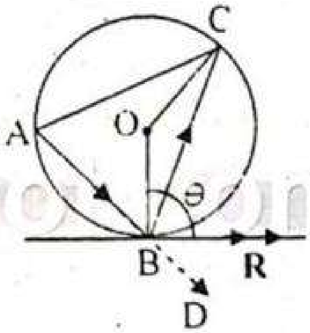
$\therefore$ লব্ধি AD বরাবর কার্যরত। আবার $\cos\theta=\cos BAD=\frac{AD}{AB}\Rightarrow AB\cos\theta=AD$

১ম ও ৩য় অনুপাত হতে পাই, $R=\frac{\mu}{AB\cos\theta}=\frac{\mu}{AD}$

$\therefore$ লব্ধির মান μ/AD এবং লব্ধি বল AD বরাবর ক্রিয়া করে।

1(c) A, B, C একটি বৃত্তের পরিধিস্থ তিনটি বিন্দু। AB ও BC -এর সাথে ব্যস্তানুপাতিক দুইটি বল যথাক্রমে AB ও BC বরাবর ক্রিয়াশীল। দেখাও যে, এদের লব্ধি B বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক বরাবর কার্যরত।

প্রমাণ : ধরি, AB ও BC বরাবর ক্রিয়াশীল বল দুইটি যথাক্রমে $\frac{k}{AB}$ ও $\frac{k}{BC}$ এর লব্ধি R. যা BO এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে, যেখানে O বৃত্তের কেন্দ্র। OB কে D পর্যন্ত বর্ধিত করি।



এখন, কেন্দ্রস্থ $\angle BOC=2A$. ΔOBC-এ, $OB=OC=r$ (বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

$\therefore\angle OCB=\angle OBC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BOC)=\frac{1}{2}(180^\circ-2A)=90^\circ-A$

তদ্রূপ, $\angle OBA=90^\circ-C$ $\therefore\angle OBD=180^\circ-(90^\circ-C)=90^\circ+C$.

এখন, BO বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$R\cos\theta=\frac{k}{BC}\cos(90^\circ-A)+\frac{k}{AB}\cos(90^\circ+C)$$

$$\Rightarrow R\cos\theta=\frac{k}{2r\sin A}\sin A-\frac{k}{2r\sin C}\sin C=0\Rightarrow\cos\theta=0\quad[\because R\neq 0]$$

$$\Rightarrow\cos\theta=\cos 90^\circ\Rightarrow\theta=90^\circ$$

$\therefore$ লব্ধি B বিন্দুতে BO- এর সাথে লম্ব বরাবর, অর্থাৎ B বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক বরাবর ক্রিয়াশীল।

1(d) কোনো বিন্দুতে দুইটি বল এরূপভাবে ক্রিয়া করে যেন এদের একটিকে বিপরীতমুখী করলে লব্ধির দিক এক সমকোণ ঘুরে যায়। প্রমাণ কর যে, বলদ্বয়ের মান সমান।

সমাধান : মনে করি, বলদ্বয় $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ এবং এদের লব্ধি $\overline{R}=\overline{P}+\overline{Q}$.

$\overline{Q}$ বলকে বিপরীতমুখী করা হলে, এদের লব্ধি হবে, $\overline{S}=\overline{P}-\overline{Q}$.

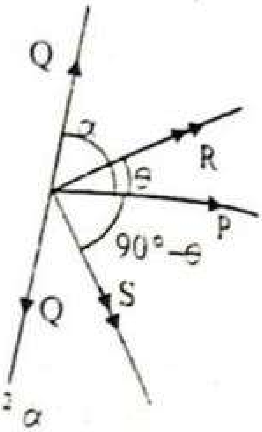
প্রশ্নমতে, $\overline{R}$ ও $\overline{S}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 90°.

$\therefore\ \overline{R}\cdot\overline{S}=0\Rightarrow(\overline{P}+\overline{Q})\cdot(\overline{P}-\overline{Q})=0$

$\Rightarrow \overline{P}\cdot\overline{P}-\overline{P}\cdot\overline{Q}+\overline{Q}\cdot\overline{P}-\overline{Q}\cdot\overline{Q}=0 \Rightarrow P^2-\overline{P}\cdot\overline{Q}+\overline{P}\cdot\overline{Q}-Q^2=0$, যেহেতু $\overline{Q}\cdot\overline{P}=\overline{P}\cdot\overline{Q}$

$\Rightarrow P^2-Q^2=0 \Rightarrow P^2=Q^2 \quad \therefore P=Q$. সুতরাং, বলদ্বয়ের মান সমান।

বিকল্প পদ্ধতি: মনে করি, α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলের লব্ধি R, যা P এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। $\therefore \tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}\cdots\cdots$(i)



Q কে বিপরীতমুখী করলে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে $(180°-\alpha)$ এবং প্রশ্নমতে এদের লব্ধি S (ধরি) P এর সাথে $(90°-\theta)$ কোণ উৎপন্ন করবে।

$\therefore \tan(90°-\theta)=\dfrac{Q\sin(180°-\alpha)}{P+Q\cos(180°-\alpha)} \Rightarrow \cot\theta=\dfrac{Q\sin\alpha}{P-Q\cos\alpha}\cdots$(ii)

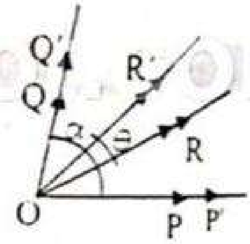
(i) $\times$ (ii) $\Rightarrow 1=\dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}\times\dfrac{Q\sin\alpha}{P-Q\cos\alpha} \Rightarrow P^2-Q^2\cos^2\alpha=Q^2\sin^2\alpha$

$\Rightarrow P^2=Q^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) \Rightarrow P^2=Q^2 \Rightarrow P=Q$ $\therefore$ বলদ্বয়ের মান সমান।

1(e) P ও Q বল দুইটির পরস্পর α কোণে আনত ও লব্ধির মান R ; একই রেখা বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P' ও Q' বল দুইটির লব্ধি R'। $R \wedge R'=\theta$ হলে দেখাও যে, $RR'\cos\theta=(PQ'+P'Q)\cos\alpha+P'P+QQ'$

প্রমাণ: দেওয়া আছে, P ও Q বল দুইটির লব্ধির মান R এবং P' ও Q' বল দুইটির লব্ধি মান R'।

$\therefore$ ভেক্টরের সাহায্যে পাই, $\overline{R}=\overline{P}+\overline{Q}$ এবং $\overline{R'}=\overline{P'}+\overline{Q'}$



এখন, $\overline{R}\cdot\overline{R'}=(\overline{P}+\overline{Q})\cdot(\overline{P'}+\overline{Q'})=\overline{P}\cdot\overline{P'}+\overline{P}\cdot\overline{Q'}+\overline{Q}\cdot\overline{P'}+\overline{Q}\cdot\overline{Q'}$

$\Rightarrow \quad RR'\cos\theta = PP'\cos 0°+PQ'\cos\alpha+QP'\cos\alpha+QQ'\cos 0°$

$\therefore \quad RR'\cos\theta=(PQ'+P'Q)\cos\alpha+P'P+QQ'$ (Showed)

2(a) এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $\sqrt{3}$ N ও 2 N মানের বল $\overline{F_1}$ ও $\overline{F_2}$, x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে $30°$ ও $60°$ কোণ উৎপন্ন করে।

(i) দ্বিমাত্রিক কার্তেসীয় উপাংশে এদের লব্ধি নির্ণয় কর; **(ii)** লব্ধির ভেক্টর রূপায়ন প্রদর্শন কর; **(iii)** লব্ধিটির মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, লব্ধি $\vec{R}$, তাহলে, $\vec{R}=\overline{F_1}+\overline{F_2}$

$\therefore \quad R_x=F_1x+F_2x=\sqrt{3}\cos 30°+2\cos 60°=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$

$R_y=F_1y+F_2y=\sqrt{3}\sin 30°+2\sin 60°=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ (i) দ্বিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে লব্ধি $\vec{R}$ এর প্রকাশ $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

(ii) লব্ধি $\vec{R}$ এর ভেক্টর রূপায়ন $\vec{R} = \frac{5}{2}\,\hat{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\hat{j}$

(iii) $\vec{R}$ এর মান $R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{13}\,N$ এবং

$\vec{R}$ এর দিক $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}/2}{5/2}\right) = \tan^{-1}\frac{3\sqrt{3}}{5}$

2(b) $\overline{F_1} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $\overline{F_2} = -5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\overline{F_3} = \hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ও $\overline{F_4} = 4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ বল চারটি একটি বস্তুকণায় ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি ও তার মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ লব্ধি $\vec{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \overline{F_4}$

$$= (2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) + (-5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) + (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) + (4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= (2 - 5 + 1 + 4)\,\hat{i} + (3 + 1 - 2 - 3)\,\hat{j} + (-5 + 3 + 4 - 2)\,\hat{k} = 2\hat{i} - \hat{j}$$

$\therefore$ $\vec{R}$ এর মান $R = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ একক।

প্রশ্নমালা VIII B

1(a) 5N, 7N ও 8N বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করলে 8N ও 5N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৫-০৬]

সমাধান ঃ মনে করি, 8N ও 5N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α । যেহেতু প্রদত্ত বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে, সুতরাং প্রত্যেকটি বল অপর দুইটি বলের লব্ধির মানের সমান ও বিপরীমুখী ক্রিয়াশীল। তাহলে, 8N ও 5N বলদ্বয়ের লব্ধির মান হবে 7N । সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই,

$$7^2 = 8^2 + 5^2 + 2 \times 8 \times 5 \cos\alpha \Rightarrow 49 = 64 + 25 + 80\cos\alpha \Rightarrow 80\cos\alpha = -40$$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \alpha = 120°$ $\therefore$ 8N ও 5N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $= 120°$

1(b) কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 15 N বলের সাহায্যে ভারসাম্যে রাখলে বলের মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, P, P সমান বলদ্বয় পরস্পর 60° কোণে ক্রিয়াশীল। শর্তানুসারে এদের লব্ধি হবে R = 15 N.

$\therefore$ $R^2 = P^2 + P^2 + 2P.P\cos 60° = 2P^2 + 2P^2 \times \frac{1}{2} = 3P^2$ $\therefore$ বলের মান, $P = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}}\,N = 5\sqrt{3}\,N$

1(c) কোনো বিন্দুতে 1, 2 ও $\sqrt{3}$ একক বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [সি.'০১]

সমাধান ঃ যেহেতু প্রদত্ত বলত্রয় কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে, সুতরাং প্রত্যেকটি বল অপর দুইটি বলের লব্ধির মানের সমান ও বিপরীমুখী ক্রিয়াশীল। তাহলে, 1 ও 2, 2 ও $\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{3}$ ও 1 এর মধ্যবর্তী কোণ যথাক্রমে α, β ও γ হলে বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই,

$(\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2^2 + 2\times 1\times 2\cos\alpha \Rightarrow -2 = 4\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \therefore \alpha = 120°$

$1^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2\times 2\times \sqrt{3}\cos\beta \Rightarrow -6 = 4\sqrt{3}\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = -\frac{6}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos\beta = -\cos 30° = \cos(180° - 30°) = \cos 150° \therefore \beta = 150°$

এবং $2^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 + 2\times 1\times \sqrt{3}\cos\gamma \Rightarrow 0 = 2\sqrt{3}\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = 0 = \cos 90° \therefore \gamma = 90°$

সুতরাং বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ $120°, 150°, 90°$.

1(d) কোন্ শর্তে একটি বস্তুকণার উপর কার্যরত 3 : 4 : 7 অনুপাতের বলগুলো সাম্যাবস্থায় থাকবে?

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুকণার উপর কার্যরত বল তিনটি $P = 3k$, $Q = 4k$ এবং $R = 7k$, যেখানে k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক।

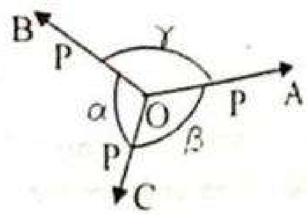
যেহেতু $P + Q = 3k + 4k = 7k = R$, সুতরাং বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকবে যদি তারা একই সরলরেখা বরাবর এবং P ও Q বলদ্বয় একত্রে যেদিকে R তার বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হয়।

1(e) দেখাও যে কোন বস্তুর উপর ক্রিয়ারত 5 : 6: 12 অনুপাতের বলগুলো সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করতে পারে না।

প্রমাণঃ মনে করি, বলগুলোর মান $P = 5k$, $Q = 6k$ ও $R = 12k$ একক। বলের ত্রিভুজ সূত্র হতে আমরা জানি, একবিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বলের মান ও দিক একইক্রমে কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা সূচিত করা গেলে তারা সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। আবার বলগুলোর মানের যেকোনো দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তম না হলে এদের দ্বারা কোন ত্রিভুজ গঠিত হয় না।

এক্ষেত্রে, $P + Q = 5k + 6k = 11k < 12k$ অর্থাৎ $P + Q < R$, সুতরাং প্রদত্ত বল তিনটি কোনো ত্রিভুজের বাহু দ্বারা সূচিত করা যায় না। কাজেই তারা সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করতে পারে না।

2 (a) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি সমান বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে এদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

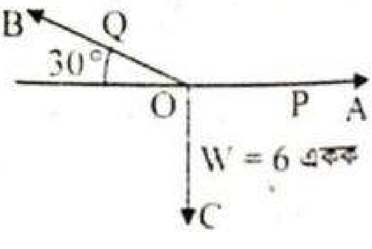


সমাধান ঃ মনে করি, O বিন্দুতে OA, OB, OC বরাবর ক্রিয়ারত P, P, P বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র থেকে পাই,

$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin\beta} = \frac{P}{\sin\gamma}$, যেখানে $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$.

$\Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{360°}{3} = 120°$ $\therefore$ বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ $120°$.

2(b) 6 একক ওজনের একটি বস্তুকে দুইটি বল দ্বারা টেনে রাখা হয়েছে। তাদের একটি অনুভূমিক এবং অপরটি অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করেছে। বলদ্বয় নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৬-০৭]



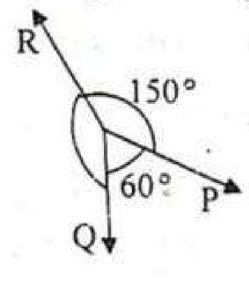
সমাধান ঃ মনে করি, O বিন্দুতে উল্লম্ব OC বরাবর ক্রিয়ারত $W = 6$ একক ওজনের বস্তুটিকে অনুভূমিক OA ও অনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণে আনত OB বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q বল দ্বারা টেনে রাখা হয়েছে। লামির সূত্র থেকে পাই, $\frac{P}{\sin(90° + 30°)} = \frac{Q}{\sin 90°} = \frac{W}{\sin(180° - 30°)}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\cos 30^0} = \frac{Q}{1} = \frac{W}{\sin 30^0} \Rightarrow \frac{P}{\sqrt{3}/2} = Q = \frac{W}{1/2}$$

$\therefore$ বলদ্বয় $P = \sqrt{3}\,W = 6\sqrt{3}$ একক এবং $Q = 2W = 2 \times 6 = 12$ একক।

2(c) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। P ও Q এর অন্তর্গত কোণ 60° এবং P ও R এর অন্তর্গত কোণ 150° হলে দেখাও যে, $P = Q = \frac{R}{\sqrt{3}}$. [কুয়েট'০৫-০৬]

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, P ও Q এর অন্তর্গত কোণ 60° এবং P ও R এর অন্তর্গত কোণ 150°



$\therefore$ P ও R এর অন্তর্গত কোণ $= \{360° - (150° + 60°)\} = 150°$

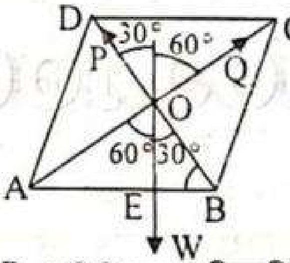
$\therefore$ লামির সূত্র থেকে পাই,

$$\frac{P}{\sin 150^0} = \frac{Q}{\sin 150^0} = \frac{R}{\sin 60^0} \Rightarrow \frac{P}{1/2} = \frac{Q}{1/2} = \frac{R}{\sqrt{3}/2}$$

$\therefore P = Q = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

2(d) রম্বস আকারের একটি সুষম পাতের একটি ধার ভূ-সমান্তরাল ও একটি কোণ 120°, রম্বসটির কেন্দ্র থেকে কর্ণ বরাবর P ও Q বল দুইটি ক্রিয়া করে একে খাড়াভাবে স্থির রাখে। P > Q হলে প্রমাণ কর যে, $P^2 = 3Q^2$. [চ.'১০]

প্রমাণঃ মনে করি, ABCD রম্বসের AB বাহু ভূ-সমান্তরাল, $\angle ABC = 120°$ এবং AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। পাতের ওজন W (ধরি) AB এর উপর লম্ব OE বরাবর ক্রিয়ারত। তাহলে, $\angle OBE = \frac{1}{2}\angle ABC = 60°$



$\therefore \angle BOE = 30°$ $[\because \angle OEB = 90°]$

$\therefore \angle AOE = 60°$ $[\because \angle AOB = 90°]$

যেহেতু লব্ধি বৃহত্তর বলের দিকে অধিক আনত এবং P > Q, সুতরাং P, Q যথাক্রমে OD ও OC বরাবর ক্রিয়াশীল হবে। O বিন্দুতে P, Q, W বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে লমির সূত্র হতে পাই,

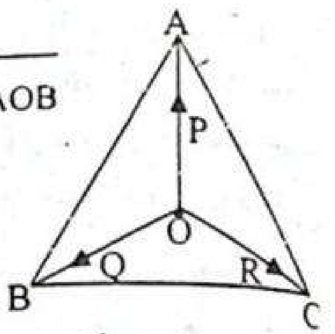
$$\frac{P}{\sin COE} = \frac{Q}{\sin DOE} = \frac{R}{\sin DOC} \Rightarrow \frac{P}{\sin(90^0 + 30^0)} = \frac{Q}{\sin(90^0 + 60^0)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\cos 30^0} = \frac{Q}{\cos 60^0} \Rightarrow \frac{P}{\sqrt{3}/2} = \frac{Q}{1/2} \Rightarrow P = \sqrt{3}\,Q \quad \therefore P^2 = 3\,Q^2$$

2(e) সমান দৈর্ঘ্যের তিনটি একতলীয় সরলরেখা OA, OB, OC যদি O বিন্দুগামী কোন সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত না হয় এবং P, Q, R বলত্রয় যদি উক্ত রেখাগুলো বরাবর এমনভাবে ক্রিয়া করে যেন $\frac{P}{\Delta OBC} = \frac{Q}{\Delta OCA} = \frac{R}{\Delta OAB}$ হয়, তবে দেখাও যে বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকবে। [চ.'০২]

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, OA = OB = OC এবং $\frac{P}{\Delta OBC} = \frac{Q}{\Delta OCA} = \frac{R}{\Delta OAB}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\frac{1}{2}OB \times OC \sin BOC} = \frac{Q}{\frac{1}{2}OA \times OC \sin AOC} = \frac{R}{\frac{1}{2}OA \times OB \sin AOB}$$



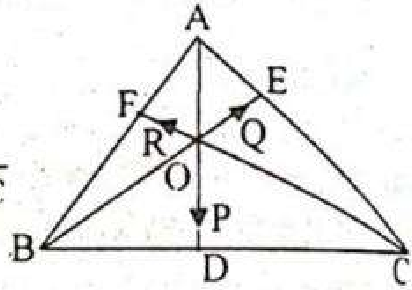
$$\Rightarrow \frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin AOB} \quad [\because OA = OB = OC]$$

লামির সূত্রের বিপরীত সূত্রানুসারে P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকবে।

3(a) ABC ত্রিভুজের O লম্বকেন্দ্র। O থেকে BC, CA, AB বাহুর উপর লম্ব বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে, (i) P:Q:R = sinA: sinB: sinC [চুয়েট'০৩-০৪]

(ii) P: Q: R = $a : b : c$ [রা.'০৩; ঢা.'১১; সি.'১১; ব.'১২]

প্রমাণঃ ধরি, P, Q, R বল তিনটি ABC ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র O থেকে যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুর উপর লম্ব OD, OE, OF বরাবর কার্যরত।



লামির সূত্র হতে পাই, $\frac{P}{\sin EOF} = \frac{Q}{\sin DOF} = \frac{R}{\sin DOE}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin(\pi - A)} = \frac{Q}{\sin(\pi - B)} = \frac{R}{\sin(\pi - C)} \Rightarrow \frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$$

$\therefore$ P : Q: R = sinA : sinB : sinC ⋯ ⋯ (i) (Showed)

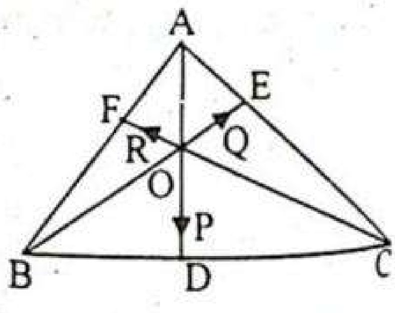
আবার, ΔABC -এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{k}$ (ধরি)

$\Rightarrow \sin A = ak$, $\sin B = bk$, $\sin C = ck$

(i) হতে পাই, P : Q: R = $ak : bk : ck$ $\therefore$ P : Q: R = $a : b : c$ (Showed)

3(b) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে, P : Q : R = $a : b : c$ [ঢা., য., চ,'০০; সি.'০৪; বুয়েট ৯৯]

প্রমাণঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A , B, C হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব AD, BE, CF পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং প্রদত্ত বলত্রয়ের ক্রিয়ারেখা O বিন্দুতে ছেদ করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।



লামির সূত্র হতে পাই, $\frac{P}{\sin EOF} = \frac{Q}{\sin DOF} = \frac{R}{\sin DOE}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin(\pi - A)} = \frac{Q}{\sin(\pi - B)} = \frac{R}{\sin(\pi - C)} \Rightarrow \frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$$

$\Rightarrow$ P : Q: R = sinA : sinB : sinC ⋯ (i)

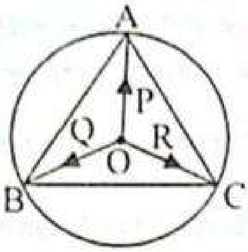
আবার, ΔABC -এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{k}$ (ধরি)

$\Rightarrow \sin A = ak$, $\sin B = bk$, $\sin C = ck$

(i) হতে পাই, $P : Q : R = ak : bk : ck$ $\therefore$ $P : Q : R = a : b : c$ (Showed)

3(c) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O থেকে OA, OB, OC বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে, $\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O থেকে OA, OB, OC বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। লামির সূত্র থেকে পাই,



$$\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin AOB} \Rightarrow \frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$$

[∵ বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের দ্বিগুণ]

$$\Rightarrow \frac{P}{2\sin A\cos A} = \frac{Q}{2\sin B\cos B} = \frac{R}{2\sin C\cos C}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{(a/2r)(b^2+c^2-a^2)/2bc} = \frac{Q}{(b/2r)(c^2+a^2-b^2)/2ca} = \frac{R}{(c/2r)(a^2+b^2-c^2)/2ab}$$

;যেখানে ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ r ।

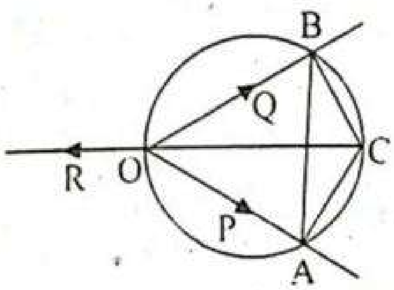
$$\Rightarrow \frac{4abcrP}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{4abcrQ}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{4abcrR}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

$$\therefore \frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

3(d) O বিন্দুতে কার্যরত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। O বিন্দুগামী একটি বৃত্ত বলত্রয়ের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = BC : CA : AB$.

প্রমাণঃ O বিন্দুতে কার্যরত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। লামির সূত্র থেকে পাই,

$$\frac{P}{\sin(Q \wedge R)} = \frac{Q}{\sin(R \wedge P)} = \frac{R}{\sin(P \wedge Q)}$$



$$\Rightarrow \frac{P}{\sin(\pi - \angle BOC)} = \frac{Q}{\sin(\pi - \angle AOC)} = \frac{R}{\sin AOB}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin(\pi - \angle ACB)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin BAC} = \frac{Q}{\sin ABC} = \frac{R}{\sin ACB} \cdots (i)$$

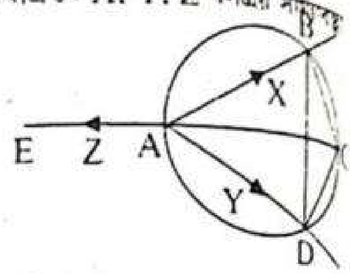
[∵ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় সম্পূরক এবং একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণদ্বয় সমান।]

$$\Rightarrow \frac{P}{BC/2r} = \frac{Q}{AC/2r} = \frac{R}{AB/2r}$$; এখানে r, ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ।

$\therefore \quad P : Q : R = BC : CA : AB$

3(e) ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB, AD বরাবর যথাক্রমে X, Y বলদ্বয় ক্রিয়ারত আছে। C হতে A এর দিকে CA বরাবর ক্রিয়ারত Z বল দ্বারা নিষ্ক্রিয় করা হলে, দেখাও যে, $\frac{X}{CD} = \frac{Y}{CB} = \frac{Z}{BD}$. [য.'০৭]

প্রমাণ ঃ CA কে E পর্যন্ত বর্ধিত করি। তাহলে, CA বরাবর ক্রিয়ারত Z বলটিকে A বিন্দুতে AE বরাবর ক্রিয়াশীল হিসাবে গণ্য করা যায়। শর্তানুসারে A বিন্দুতে AB, AD, AE বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে X, Y, Z বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। লামির সূত্র থেকে পাই, $\frac{X}{\sin EAD} = \frac{Y}{\sin BAE} = \frac{Z}{\sin BAD}$



কিন্তু $\sin EAD = \sin(\pi - \angle CAD) = \sin CAD = \sin CBD$

$\sin BAE = \sin(\pi - \angle BAC) = \sin BAC = \sin BDC$

$\sin BAD = \sin(\pi - \angle BCD) = \sin BCD$

$\therefore \quad \frac{X}{\sin CBD} = \frac{Y}{\sin BDC} = \frac{Z}{\sin BCD} \Rightarrow \frac{X}{CD/2R} = \frac{Y}{BC/2R} = \frac{Z}{BD/2R}$; এখানে R, BCD ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ।

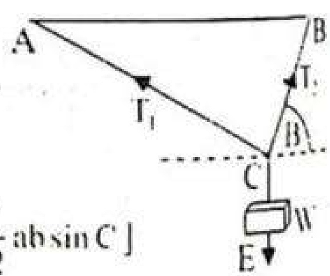
$\therefore \quad \frac{X}{CD} = \frac{Y}{CB} = \frac{Z}{BD}$

4(a) ACB রশির দুই প্রান্তে একই অনুভূমিক রেখার A ও B বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। রশিটির C বিন্দুতে W ওজনের একটি বস্তুকে গিট দিয়ে বাঁধা। ABC ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য *a*, *b*, *c* এবং ক্ষেত্রফল Δ দ্বারা সূচিত হলে দেখাও যে, রশির CA অংশের টান $\frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$. [য.'০০; ঢা.,চ.'০৭]

প্রমাণঃ মনে করি, CA ও CB অংশের টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 এবং বস্তুর ওজন W খাড়া নিচের দিকে CE বরাবর কার্যরত। এখন C বিন্দুতে ক্রিয়ারত T_1, T_2 ও W বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{T_1}{\sin BCE} = \frac{T_2}{\sin ACE} = \frac{W}{\sin C} \Rightarrow \frac{T_1}{\sin(90^\circ + B)} = \frac{W}{\sin C}$$

[১ম ও ৩য় অনুপাত হতে]



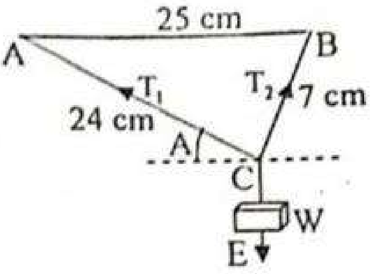
$$\Rightarrow \frac{T_1}{\cos B} = \frac{W}{\sin C} \Rightarrow T_1 = \frac{\cos B}{\sin C} W = \frac{(c^2 + a^2 - b^2)/2ca}{2\Delta/ab} W \left[\because \Delta = \frac{1}{2} ab \sin C\right]$$

$\therefore$ CA অংশের টান , $T_1 = \frac{(c^2 + a^2 - b^2) \cdot ab}{2\Delta \times 2ca} W = \frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$ (Showed)

4(b) একটি অনুভূমিক রেখায় 25 cm ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে 31 cm লম্বা একটি রশির দুইপ্রান্ত বাঁধা আছে। রশির একপ্রান্ত হতে 7 cm দূরে W ওজনের একটি বস্তু সংযুক্ত করা হলে 7 cm রশির টান 48 কেজি-ওজন হয়। W এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, রশিটি AB = 25 cm অনুভূমিক রেখার A ও B বিন্দুতে বাঁধা আছে এবং C বিন্দুতে W ওজনের বস্তুটি সংযুক্ত আছে, যেখানে BC = 7 cm, AC = (31 − 7) cm = 24 cm.

যেহেতু $AC^2 + BC^2 = 24^2 + 7^2 = 625 = 25^2 = AB^2$,
সুতরাং $\angle ACB = 90°$.



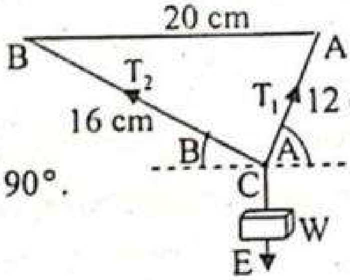
ধরি, CA ও CB রশির টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 = 48 কেজি ওজন এবং বস্তুর ওজন CE বরাবর ক্রিয়াশীল। C বিন্দুতে বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{T_1}{\sin BCE} = \frac{T_2}{\sin ACE} = \frac{W}{\sin ACB} \Rightarrow \frac{T_2}{\sin(90^0 + A)} = \frac{W}{\sin 90^0}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{\cos A} = \frac{W}{1} \Rightarrow W = T_2 \sec A \Rightarrow W = \frac{AB}{AC} T_2 = \frac{25}{24} \times 48 \text{ কেজি ওজন} = 50 \text{ কেজি ওজন (Ans.)}$$

4(c). 5 কেজি-ওজনের একটি বস্তু 12 cm ও 16 cm দীর্ঘ দুইটি রশির সাহায্যে একটি অনুভূমিক রেখার 20 cm ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে বাঁধা আছে। রশিতে টানের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, রশি দুইটি AB = 20 cm অনুভূমিক রেখার A ও B বিন্দুতে বাঁধা আছে এবং C বিন্দুতে W = ৫ কেজি-ওজন পরিমাণের বস্তুটি সংযুক্ত আছে, যেখানে AC = 12 cm, BC = 16 cm.



যেহেতু $AC^2 + BC^2 = 12^2 + 16^2 = 400 = 20^2 = AB^2$, সুতরাং $\angle ACB = 90°$.

ধরি, CA ও CB রশির টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 এবং বস্তুর ওজন CE বরাবর ক্রিয়াশীল। C বিন্দুতে বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{T_1}{\sin BCE} = \frac{T_2}{\sin ACE} = \frac{W}{\sin ACB} \Rightarrow \frac{T_1}{\sin(90^0 + B)} = \frac{T_2}{\sin(90^0 + A)} = \frac{W}{\sin 90}$$

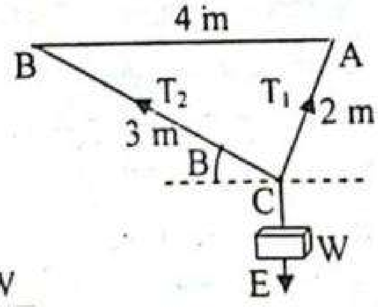
$$\Rightarrow \frac{T_1}{\cos B} = \frac{T_2}{\cos A} = \frac{W}{1} \quad \therefore T_1 = W \cos B = \frac{BC}{AB} W = \frac{16}{20} \times 5 \text{ কেজি-ওজন} = 4 \text{ কেজি-ওজন এবং}$$

$$T_2 = W \cos A = \frac{AC}{AB} W = \frac{12}{20} \times 5 \text{ কেজি-ওজন} = 3 \text{ কেজি-ওজন ।}$$

$\therefore$ রশিতে টানের পরিমাণ 3 কেজি-ওজন ও 4 কেজি-ওজন।

4(d) 4 মি. দৈর্ঘ্যের অনুভূমিক AB রেখার A, B বিন্দুতে 2 মি. ও 3 মি. দৈর্ঘ্যের দুইটি তারের দুইপ্রান্ত বাঁধা আছে। C বিন্দুতে তারের অপর প্রান্তদ্বয় দিয়ে 8 কেজি- ওজনের একটি বস্তুকে বেঁধে ঝুলানো হলে তার দুইটির টান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, তারটি AB = 4 মি. অনুভূমিক রেখার A ও B বিন্দুতে বাঁধা আছে এবং C বিন্দুতে W = 8 কেজি- ওজনের বস্তুটি সংযুক্ত আছে, যেখানে AC = 2 মি., BC = 3 মি.। ধরি, CA ও CB তারের টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 এবং বস্তুর ওজন CE বরাবর ক্রিয়াশীল। C বিন্দুতে W, T_1 ও T_2 সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,



$$\frac{T_1}{\sin BCE} = \frac{T_2}{\sin ACE} = \frac{W}{\sin ACB} \Rightarrow \frac{T_1}{\sin(90^0 + B)} = \frac{T_2}{\sin(90^0 + A)} = \frac{W}{\sin C}$$

$$\frac{T_1}{\cos B}=\frac{T_2}{\sin A}=\frac{W}{\sin C}\Rightarrow T_1=\frac{\cos B}{\sin C}W\ldots\ldots(i) \text{ এবং } T_2=\frac{\cos A}{\sin C}W$$

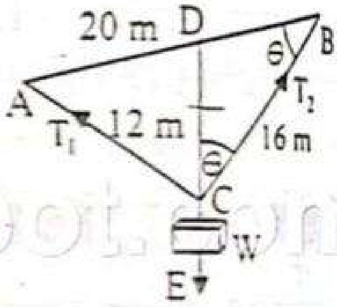
এখন, $\cos A=\frac{4^2+2^2-3^2}{2\times4\times2}=\frac{11}{16}$, $\cos B=\frac{4^2+3^2-2^2}{2\times4\times3}=\frac{7}{8}$, $\cos C=\frac{3^2+2^2-4^2}{2\times3\times2}=\frac{-1}{4}$

$\therefore\ \sin C=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore$ তার দুইটির টান, $T_1=\frac{7/8}{\sqrt{15}/4}\times8$ অর্থাৎ $\frac{28}{\sqrt{15}}$ কেজি-ওজন এবং $T_2=\frac{11/16}{\sqrt{15}/4}\times8$ অর্থাৎ $\frac{22}{\sqrt{15}}$ কেজি-ওজন

4 (e) 12 মি. ও 16 মি. দৈর্ঘ্যের দুইটি রশির সাহায্যে 30 কেজি-ওজনের একটি বস্তুকে ঝুলান হলো। রশি দুইটির অপর প্রান্ত 20 মি. দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ডের দুই প্রান্তে বাঁধা আছে। দণ্ডটি এরূপভাবে স্থাপন করা হলো যেন বস্তুটি এর মধ্যবিন্দু ঠিক খাড়া নিচে থাকে। রশিদ্বয়ের টান নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, AC = 12 মি. ও BC = 16 মি. দৈর্ঘ্যের দুইটি রশির সাহায্যে W = 30 কেজি-ওজনের বস্তুটিকে C বিন্দুতে ঝুলান হলো, যেখানে C বিন্দু AB = 20 মি. দৈর্ঘ্যের দণ্ডটির মধ্যবিন্দু D এর ঠিক খাড়া নিচে থাকে।



যেহেতু $AC^2+BC^2=12^2+16^2=20^2=AB^2$, তাই $\angle ACB=90°$

আবার, AB অতিভুজের মধ্যবিন্দু D বলে, DC = BD.

$\therefore\ \angle DBC=\angle DCB=\theta$ (ধরি)

CE বরাবর বস্তুর ওজন এবং CA ও CB বরাবর রশির টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 এ কণাতে C তে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{T_1}{\sin BCE}=\frac{T_2}{\sin ACE}=\frac{W}{\sin ACB}\Rightarrow\frac{T_1}{\sin(180^0-\theta)}=\frac{T_2}{\sin(90^0-\theta)}=\frac{W}{\sin 90^0}$$

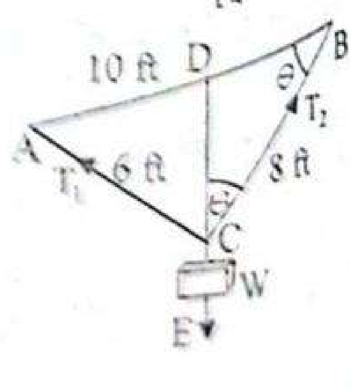
$$\Rightarrow\ \frac{T_1}{\sin\theta}=\frac{T_2}{\cos\theta}=\frac{W}{1}\Rightarrow\frac{T_1}{12/20}=\frac{T_2}{16/20}=W$$

$\therefore$ রশির টান, $T_1=\frac{12}{20}\times30$ অর্থাৎ 18 কেজি-ওজন এবং $T_2=\frac{16}{20}\times30$ অর্থাৎ 24 কেজি-ওজন

4(f) 6 ft ও 8 ft দৈর্ঘ্যের দুইটি রশির সাহায্যে 20 পাউন্ড-ওজনের একটি বস্তুকে ঝুলান হলো। রশি দুইটির অপর প্রান্ত 10 ft. দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ডের দুই প্রান্তে বাঁধা আছে। দণ্ডটি এরূপভাবে স্থাপন করা হলো যেন বস্তুটি এর মধ্যবিন্দুর ঠিক খাড়া নিচে থাকে। রশিদ্বয়ের টান নির্ণয় কর।

[বুয়েট'০৮-০৯]

সমাধান : মনে করি, AC = 6 ft ও BC = 8 ft দৈর্ঘ্যের দুইটি রশির সাহায্যে W = 20 পাউন্ড-ওজনের বস্তুটিকে C বিন্দুতে ঝুলান হলো, যেখানে C বিন্দু AB = 10 ft. দৈর্ঘ্যের দণ্ডটির মধ্যবিন্দু D এর ঠিক খাড়া নিচে থাকে।



যেহেতু $AC^2+BC^2=6^2+8^2=10^2=AB^2$, তাই $\angle ACB=90°$

এবং AB অতিভুজের মধ্যবিন্দু D . $\therefore\ \angle DBC=\angle DCB=\theta$ (ধরি)

CE বরাবর বস্তুর ওজন এবং CA ও CB বরাবর রশির টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 এ বলত্রয় C তে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

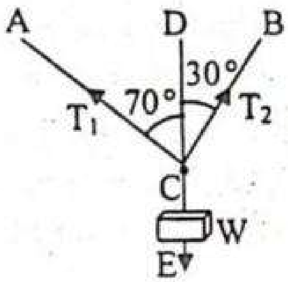
$$\frac{T_1}{\sin BCE}=\frac{T_2}{\sin ACE}=\frac{W}{\sin ACB}\Rightarrow\frac{T_1}{\sin(180^0-\theta)}=\frac{T_2}{\sin(90^0-\theta)}=\frac{W}{\sin 90^0}$$

$$\Rightarrow\frac{T_1}{\sin\theta}=\frac{T_2}{\cos\theta}=\frac{W}{1}\Rightarrow\frac{T_1}{6/10}=\frac{T_2}{8/10}=W$$

$\therefore$ রশির টান, $T_1=\frac{6}{10}\times 20$ অর্থাৎ 12 lb-wt এবং $T_2=\frac{8}{10}\times 20$ অর্থাৎ 16 lb-wt

4(g) 60 কেজি-ওজনের একটি বস্তুকে দুইখন্ড তার দিয়ে দুইজন ব্যক্তি বহন করে। তার দুইটি উল্লম্বের সাথে 70° ও 30° কোণ উৎপন্ন করলে তার দুইটির টান নির্ণয় কর। [চুয়েট'০৫-০৬]

সমাধান ঃ মনে করি, W = 60 কেজি-ওজনের বস্তুটিকে AC ও BC তার দিয়ে দুইজন ব্যক্তি বহন করে। CA ও CB রশি CD উল্লম্ব রেখার সাথে যথাক্রমে 70° ও 30° কোণ উৎপন্ন করে এবং বস্তুর ওজন CE বরাবর ক্রিয়ারত।



ধরি, CA ও CB রশির টান যথাক্রমে T_1 ও T_2। তাহলে C বিন্দুতে T_1, T_2 ও W ভারসাম্য সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{T_1}{\sin BCE}=\frac{T_2}{\sin ACE}=\frac{W}{\sin ACB}$$

$$\Rightarrow\frac{T_1}{\sin(180^0-30^0)}=\frac{T_2}{\sin(180^0-70^0)}=\frac{W}{\sin 100^0}\Rightarrow\frac{T_1}{\sin 30^0}=\frac{T_2}{\sin 70^0}=\frac{W}{\sin 100^0}$$

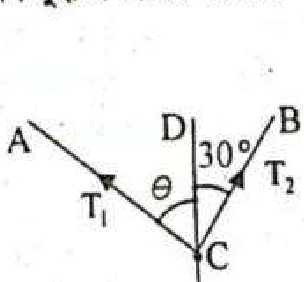
$\therefore\ T_1=\frac{\sin 30^0}{\sin 100^0}W=\frac{0.5}{0.985}\times 60$ অর্থাৎ 30.46 kg-wt (প্রায়)

এবং $T_2=\frac{\sin 70^0}{\sin 100^0}W=\frac{0.94}{.985}\times 60$ অর্থাৎ 57.26 kg-wt (প্রায়)

$\therefore$ রশিতে টানের পরিমাণ 30.46 কেজি-ওজন (প্রায়) ও 57.26 কেজি-ওজন (প্রায়)।

4(h) W ওজন দুইটি রশি দ্বারা ঝুলানো হল। একটি রশি উল্লম্ব রেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। অপর রশিটি উল্লম্ব রেখার সাথে কত কোণ উৎপন্ন করলে এতে টানের পরিমাণ ক্ষুদ্রতম হবে। এক্ষেত্রে রশি দুইটির টানের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, AC ও BC রশি দুইটি দ্বারা W ওজনের বস্তুকে ঝুলানো হলো। CA ও CB রশি CD উল- ম্ব রেখার সাথে যথাক্রমে θ ও 30° কোণ উৎপন্ন করে। CA ও CB রশি CD উল- ম্ব রেখার সাথে যথাক্রমে T_1 ও T_2 এবং বস্দুটির ওজন CE বরাবর ক্রিয়ারত ধরি, CA ও CB রশির টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 এবং বস্তুটির ওজন CE বরাবর ক্রিয়ারত। তাহলে C বিন্দুতে T_1, T_2 ও W ভারসাম্য সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,



$$\frac{T_1}{\sin BCE}=\frac{T_2}{\sin ACE}=\frac{W}{\sin ACB}=\frac{T_1}{\sin(180^0-30^0)}=\frac{T_2}{\sin(180^0-\theta)}=\frac{W}{\sin(\theta+30^0)}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{\sin 30^\circ} = \frac{T_2}{\sin\theta} = \frac{W}{\sin(\theta + 30^\circ)} \quad \therefore T_1 = \frac{W\sin 30^\circ}{\sin(\theta + 30^\circ)} \cdots (i),\ T_2 = \frac{W\sin\theta}{\sin(\theta + 30^\circ)} \cdots (ii)$$

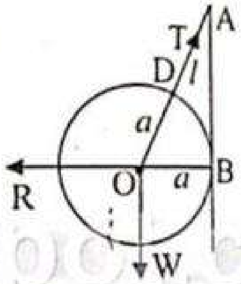
এখন, T_2 এর মান ক্ষুদ্রতম হবে, যখন $\sin(\theta + 30^\circ)$ এর মান বৃহত্তম হবে।

অর্থাৎ যখন $\sin(\theta + 30^\circ) = 1 = \sin 90^\circ \Rightarrow \theta + 30^\circ = 90^\circ \Rightarrow \theta = 60^\circ$ হবে।

এক্ষেত্রে রশি দুইটির টানের পরিমাণ $T_1 = \frac{W}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{W}{2}$ এবং $T_2 = \frac{W\sin 60^\circ}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}W$

4(i) *l* **দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সুতার এক প্রান্ত একটি উলম্ব দেয়ালের আটকানো আছে এবং অন্য প্রান্ত** *a* **ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের উপরস্থ কোন বিন্দুতে যুক্ত আছে। গোলকটির ওজন W হলে দেখাও যে, রশির টান** $T = \frac{W(l + a)}{\sqrt{2al + l^2}}$ [য.'০৬; দি.'০৯; য.'১৩; বুয়েট'০৪-০৫]

প্রমাণঃ মনে করি, সুতার এক প্রান্ত একটি উলম্ব দেয়ালের A বিন্দুতে আটকানো আছে এবং অপর প্রান্ত গোলকটির D বিন্দুতে যুক্ত করে ঝুলিয়ে দিলে তা উল্লম্ব দেয়ালের B বিন্দুতে স্পর্শ করে। ধরি, সুতার টান T এবং বৃত্তের কেন্দ্র O।



তাহলে গোলকের ওজন W খাড়া নিচের দিকে, BO বরাবর দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R এবং ডউস বরাবর সুতার টান T - এ বল তিনটি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল থেকে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

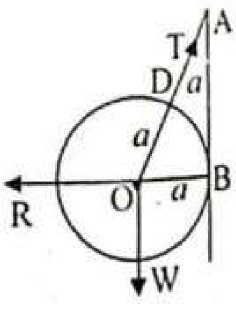
$$\frac{T}{\sin(R \wedge W)} = \frac{W}{\sin(R \wedge T)} = \frac{R}{\sin(T \wedge W)}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\sin 90^\circ} = \frac{W}{\sin(180^\circ - \angle AOB)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{W}{\sin AOB} = \frac{W}{AB/AO} = \frac{AO}{\sqrt{AO^2 - OB^2}}W = \frac{l + a}{\sqrt{(l + a)^2 - a^2}}W = \frac{W(l + a)}{\sqrt{2al + l^2}}$$

4(j) *a* **দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সুতার একপ্রান্ত একটি উল্লম্ব দেয়ালের আটকানো এবং অন্য প্রান্ত** *a* **ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের সাথে যুক্ত আছে। গোলকটির ওজন W হলে দেখাও যে, সুতার টান** $T = \frac{2}{\sqrt{3}}W$. [বুয়েট'০৪-০৫]

প্রমাণঃ মনে করি, সুতার এক প্রান্ত একটি উল্লম্ব দেয়ালের A বিন্দুতে আটকানো আছে এবং অপর প্রান্ত গোলকটির D বিন্দুতে যুক্ত করে ঝুলিয়ে দিলে তা উল্লম্ব দেয়ালের B বিন্দুতে স্পর্শ করে। ধরি বৃত্তের কেন্দ্র O। তাহলে গোলকের ওজন W খাড়া নিচের দিকে, BO বরাবর দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R এবং ODA বরাবর সুতার টান T- এ বল তিনটি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল থেকে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

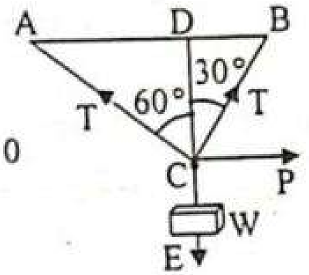


$$\frac{T}{\sin(R \wedge W)} = \frac{W}{\sin(R \wedge T)} = \frac{R}{\sin(T \wedge W)} \Rightarrow \frac{T}{\sin 90^\circ} = \frac{W}{\sin(180^\circ - \angle AOB)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{W}{\sin AOB} = \frac{W}{AB/AO} = \frac{AO}{\sqrt{AO^2 - OB^2}}W = \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 - a^2}}W = \frac{2a}{\sqrt{3}a}W \quad \therefore T = \frac{2}{\sqrt{3}}W.$$

5(a) একই অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে একটি রশির দুইপ্রান্ত বাঁধা আছে। W ওজনের একটি মসৃণ আংটা রশির উপর দিয়ে অবাধে চলাচল করতে পারে। এর উপর একটি অনুভূমিক বল P কার্যরত হলে স্থিরাবস্থায় রশির অংশদ্বয় উল্লম্ব রেখার সাথে 30° ও 60° কোণ সৃষ্টি করে। দেখাও যে, $P = W(2-\sqrt{3})$ এবং রশির টান $T = W(\sqrt{3}-1)$.

প্রমাণ: মনে করি, একই অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত A ও B বিন্দুতে রশিটির প্রান্তদ্বয় বাঁধা আছে এবং অনুভূমিক P বল কার্যরত থাকায় আংটাটি C বিন্দুতে স্থির আছে। ধরি, CB ও CA রশির অংশদ্বয় CD উল্লম্ব রেখার সাথে যথাক্রমে 30° ও 60° কোণ সৃষ্টি করে। যেহেতু আংটাটি রশির উপর দিয়ে অবাধে চলাচল করতে পারে, সুতরাং তারের টান T (ধরি) সর্বত্র সমান থাকবে।



শর্তানুসারে C বিন্দুতে ক্রিয়ারত T, T, W ও P বল চারটির লব্ধি শূন্য। সুতরাং P বলের দিক ও এর উপর লম্ব বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$P\cos 0^\circ + T\cos(90^\circ - 30^\circ) + T\cos(90^\circ + 60^\circ) + W\cos 270^\circ = 0$$

$$\Rightarrow P + T\sin 30^\circ - T\sin 60^\circ + 0 = 0 \Rightarrow P + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)T = 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{3}-1}{2}T \cdots \cdots (i)$$ এবং

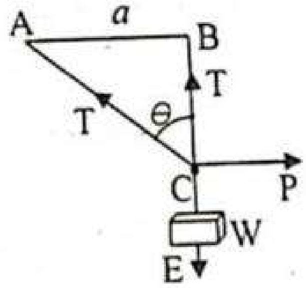
$$P\sin 0^\circ + T\sin(90^\circ - 30^\circ) + T\sin(90^\circ + 60^\circ) + W\sin 270^\circ = 0$$

$$\Rightarrow 0 + T\cos 30^\circ + T\cos 60^\circ - W = 0$$

$$\Rightarrow W = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)T \Rightarrow T = \frac{2}{\sqrt{3}+1}W = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}W$$

$\therefore\ T = W(\sqrt{3}-1)$ এবং (i) হতে পাই, $P = \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}W = \dfrac{W}{2}(3-2\sqrt{3}+1) = W(2-\sqrt{3})$

5(b) l দৈর্ঘ্যের একটি সূতার দুইপ্রান্ত একই অনুভূমিক রেখার a দূরত্বে অবস্থিত A ও B বিন্দুতে বাঁধা আছে। W ওজনের একটি মসৃণ আংটা রশির উপর দিয়ে অবাধে চলাচল করতে পারে। একটি অনুভূমিক বল P আংটাটিকে টেনে B বিন্দুর খাড়া নিচে স্থির রাখে। দেখাও যে, $P = \dfrac{aW}{l}$ এবং সূতার টান $T = \dfrac{W(a^2+l^2)}{2l^2}$.



প্রমাণ: মনে করি, একই অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত A ও B বিন্দুতে রশিটির প্রান্তদ্বয় বাঁধা আছে এবং অনুভূমিক বল P আংটাটিকে টেনে B বিন্দুর খাড়া নিচে C বিন্দুতে স্থির রাখে। যেহেতু আংটাটি রশির উপর দিয়ে অবাধে চলাচল করতে পারে, সুতরাং রশির টান সর্বত্র সমান থাকবে। ধরি, রশির টান T এবং $BC = x$। তাহলে $AC = l - x$

ABC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই, $a^2 + x^2 = (l-x)^2$

$$\Rightarrow a^2 + x^2 = l^2 - 2lx + x^2 \Rightarrow x = (l^2 - a^2)/2l = BC$$

$$\therefore\ AC = l - \frac{l^2 - a^2}{2l} = \frac{l^2 + a^2}{2l}$$

শর্তানুসারে C বিন্দুতে ক্রিয়ারত T, T, W ও P বল চারটির লব্ধি শূন্য। সুতরাং P বলের দিক ও এর উপর লম্ব বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$P\cos 0^\circ + T\cos 90^\circ + T\cos(90^\circ + \theta) + W\cos 270^\circ = 0$; যেখানে $\angle ACB = \theta$

$\Rightarrow P + 0 - T\sin\theta + 0 = 0 \Rightarrow P = T\sin\theta = T\dfrac{AB}{AC} = T\dfrac{a}{(l^2+a^2)/2l} = \dfrac{2alT}{l^2+a^2}\cdots$(i) এবং

$P\sin 0^\circ + T\sin 90^\circ + T\sin(90^\circ + \theta) + W\sin 270^\circ = 0.$

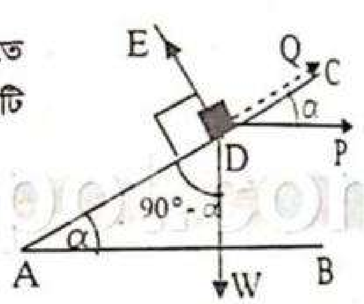
$\Rightarrow 0 + T + T\cos\theta - W = 0 \Rightarrow T\left(1 + \dfrac{BC}{AC}\right) = W \Rightarrow T\left\{1 + \dfrac{(l^2-a^2)/2l}{(l^2+a^2)/2l}\right\} = W$

$\Rightarrow T\dfrac{l^2+a^2+l^2-a^2}{l^2+a^2} = W \therefore T = \dfrac{W(a^2+l^2)}{2l^2}$ এবং $P = \dfrac{2al}{l^2+a^2} \times \dfrac{W(a^2+l^2)}{2l^2} = \dfrac{aW}{l}$

6. একটি হেলানো সমতলের ভূমি ও দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে ক্রিয়াশীল যথাক্রমে P ও Q বলদ্বয় প্রত্যেকে এককভাবে W ওজনের কোন বস্তুকে তলের উপর স্থির রাখতে পারে। প্রমাণ কর যে, $W = \dfrac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}}$; $P > Q$.

[রা.'০২; ঢা.'০৪; চ.'০১]

প্রমাণ: মনে করি, AB অনুভূমিকের সাথে α কোণে আনত AC হেলানো সমতল। ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়াশীল P বল W ওজনের বস্তুটিকে AC এর উপর D বিন্দুতে স্থির রাখলে, $DE \perp AC$ বরাবর ক্রিয়াশীল তলের প্রতিক্রিয়া, W ও P- এ তিনটি বল D বিন্দুতে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করবে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,



$$\frac{P}{\sin\{90^\circ + (90^\circ - \alpha)\}} = \frac{W}{\sin(90^\circ + \alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{W}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{W}{P} \cdots\cdots \text{(i)}$$

আবার, হেলানো সমতলের দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে ক্রিয়াশীল Q বল W ওজনের বস্তুটিকে AC এর উপর D বিন্দুতে স্থির রাখলে, $DE \perp AC$ বরাবর ক্রিয়াশীল তলের প্রতিক্রিয়া, W ও Q- এ তিনটি বল D বিন্দুতে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করবে।

সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই, $\dfrac{Q}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \dfrac{W}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{W}{1} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{W}{P} \cdots\cdots$(ii)

এখন $(ii)^2 - (i)^2 \Rightarrow \operatorname{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha = W^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - \dfrac{1}{P^2}\right) \Rightarrow 1 = W^2\left(\dfrac{P^2 - Q^2}{P^2Q^2}\right)$

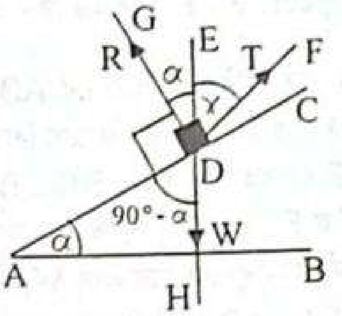
$$\Rightarrow W^2 = \frac{P^2Q^2}{P^2 - Q^2} \quad \therefore W = \frac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1(a) অনুভূমিকের সাথে α কোণে আনত একটি মসৃণ সমতলের উপর একটি বস্তু উল্লম্বের সাথে γ কোণে রত একটি রশি দ্বারা সুস্থিত আছে। তলের নতি β $(\beta > \alpha)$ হলে এবং γ অপরিবর্তিত থাকলে রশির টান দ্বিগুণ হয়। দেখাও যে, $\cot\alpha - 2\cot\beta = \cot\gamma$.

প্রমাণঃ মনে করি, AB অনুভূমিকের সাথে α কোণে আনত AC মসৃণ সমতলের উপর D বিন্দুতে W ওজনের একটি বস্তু DE উল্লম্বের সাথে γ কোণে রত DF রশি দ্বারা সুস্থিত আছে। ধরি, তলের উল্লম্ব প্রতিক্রিয়া R, W যথাক্রমে DG, DH বরাবর ক্রিয়ারত। তাহলে, $\angle GDH = 90° + 90° - \alpha = 180° - \alpha, \angle EDG = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$

১ম ক্ষেত্রে, D বিন্দুতে তলের উল্লম্ব প্রতিক্রিয়া R, সুতার টান T (ধরি) ও W সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই, $\frac{T}{\sin(180^0 - \alpha)} = \frac{W}{\sin(\alpha + \gamma)} \Rightarrow \frac{T}{\sin\alpha} = \frac{W}{\sin(\alpha+\gamma)} \cdots$(i)



২য় ক্ষেত্রে, তলের নতি β $(\beta > \alpha)$ হলে, সুতার টান 2T হয়।

সুতরাং অনুরূপভাবে পাই, $\frac{2T}{\sin\beta} = \frac{W}{\sin(\beta+\gamma)} \cdots\cdots$(ii)

$$\text{(i)} \div \text{(ii)} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{2\sin\alpha} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

$$\Rightarrow \sin\beta\,(\sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha) = 2\sin\alpha\,(\sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta)$$

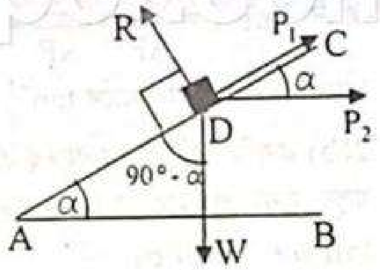
$$\Rightarrow \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + 2\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta$$

$$\Rightarrow \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - 2\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta = \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

$\therefore\ \cot\alpha - 2\cot\beta = \cot\gamma$ (Showed) [উভয় পক্ষকে $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ দ্বারা ভাগ করে।]

1(b) ভূমির সাথে α কোণে নত একটি মসৃণ সমতলের দৈর্ঘ্যে ও ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়াশীল যথাক্রমে P_1 ও P_2 বলদ্বয় একটি বস্তুকে তলের উপর সাম্যাবস্থায় রাখে। P_1, P_2 এবং α এর প্রত্যেকটির মান অর্ধেক হলেও বস্তুটি তলের উপর সাম্যাবস্থায় থাকে। প্রমাণ কর যে, $P_1 : P_2 = 2\cos^2\frac{\alpha}{4} : 1$

প্রমাণ: মনে করি, AB অনুভূমিকের সাথে α কোণে আনত AC সমতলের D বিন্দুতে W ওজনের বস্তুটিকে P_1 ও P_2 বলদ্বয় স্থির রাখে এবং এ বিন্দুতে তলের উল্লম্ব প্রতিক্রিয়া R। তাহলে D বিন্দুতে P_1, P_2, R, W এ চারটি বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে অর্থাৎ এদের লব্ধি শূন্য। সুতরাং AC বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,



$$P_1\cos0° + R\cos90° + W\cos(270° - \alpha) + P_2\cos(360° - \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow P_1 + 0 - W\sin\alpha + P_2\cos\alpha = 0 \Rightarrow P_1 + P_2\cos\alpha = W\sin\alpha \cdots\text{(i)}$$

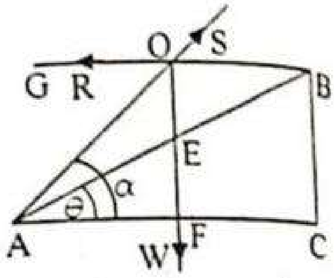
আবার, P_1, P_2 এবং α এর প্রত্যেকটির মান অর্ধেক হলেও বস্তুটি তলের উপর সাম্যাবস্থায় থাকে। সুতরাং অনুরূপভাবে পাই, $\frac{P_1}{2} + \frac{P_2}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = W\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(P_1 + P_2\cos\frac{\alpha}{2}) = W\sin\frac{\alpha}{2} \cdots\cdots$ (ii)

$$\text{(i)} \div \text{(ii)} \Rightarrow \frac{2(P_1 + P_2\cos\alpha)}{P_1 + P_2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow P_1 + P_2\cos\alpha = P_1\cos\frac{\alpha}{2} + P_2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow P_1(1 - \cos\frac{\alpha}{2}) = P_2(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha) = P_2(\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 1) = P_2(1 - \cos^2\frac{\alpha}{2})$$

$$\Rightarrow P_1 = P_2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right) = P_2\left(2\cos^2\frac{\alpha}{4}\right) \therefore P_1 : P_2 = 2\cos^2\frac{\alpha}{4} : 1$$

2(a) W ওজনের একটি সুষম দন্ড একটি কব্জার চতুর্দিকে অবাধে ঘুরতে সক্ষম। এর এক প্রান্ত একটি মসৃণ দেওয়ালে ঠেস দিয়ে আছে। দন্ডটি যদি অনুভূমির সাথে θ কোণ করে, তাহলে প্রমাণ কর যে, কব্জার প্রতিক্রিয়া $W\sqrt{\frac{1}{4}\cot^2\theta+1}$ এবং এর ক্রিয়ারেখা অনুভূমির সাথে $\tan^{-1}(2\tan\theta)$ কোণ উৎপন্ন করে।



প্রমাণ: মনে করি, W ওজনের AB দন্ডটির A প্রান্ত কব্জার সাথে আটকানো এবং B প্রান্ত BC দেওয়ালে ঠেস দিয়ে আছে। দন্ডের ওজন W এর মধ্যবিন্দু E তে EF বরাবর ক্রিয়াশীল। $BG \perp BC$ বরাবর ক্রিয়াশীল দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R বর্ধিত FE কে O বিন্দুতে ছেদ করে। ভারসাম্যের জন্য কব্জার প্রতিক্রিয়া S অবশ্যই O বিন্দুগামী হবে এবং W, R, S বলত্রয়কে OAF ত্রিভুজের যথাক্রমে OF, FA, AO বাহুত্রয় দ্বারা মানে ও দিকে একইক্রমে সূচিত করা যাবে। সুতরাং বলের ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত সূত্র হতে পাই,

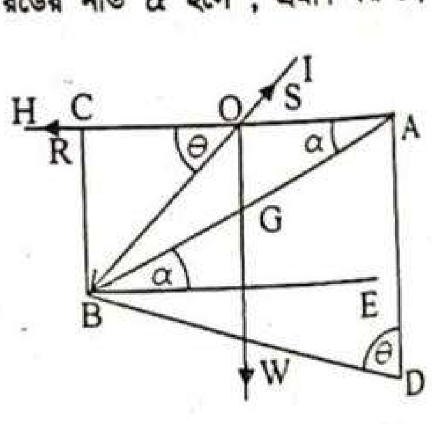
$$\frac{W}{OF}=\frac{S}{AO}\Rightarrow S = W\times\frac{AO}{OF} = W\sqrt{\frac{OF^2+AF^2}{OF^2}} = W\sqrt{1+\left(\frac{AF}{OF}\right)^2} = W\sqrt{1+\left(\frac{AF}{2EF}\right)^2}$$

[$\because$ ΔABC–এ, $BC \parallel EF$ এবং AB এর মধ্যবিন্দু E , $OF = BC = 2EF$.]

$$\Rightarrow S = W\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{AF}{EF}\right)^2} = W\sqrt{1+\frac{1}{4}\cot^2\theta}$$, যখন $\angle BAC = \theta$ এবং $\angle OAF = \alpha$

এখন, $\tan\alpha = \frac{OF}{AF} = \frac{2EF}{AF} = 2\tan\theta \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(2\tan\theta)$ $\therefore$ কব্জার প্রতিক্রিয়া $W\sqrt{\frac{1}{4}\cot^2\theta+1}$ এর ক্রিয়ারেখা অনুভূমির সাথে $\tan^{-1}(2\tan\theta)$ কোণ উৎপন্ন করে।

2(b) একটি ভারী সুষম রডের একপ্রান্ত একটি মসৃণ দেওয়ালে এবং অপর প্রান্ত দেওয়ালের সাথে θ কোণে নত একটি মসৃণ সমতলে রাখা আছে। রডটি সাম্যাবস্থায় থাকলে এবং ভূমির সাথে রডের নতি α হলে , প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = 2\tan\alpha$.



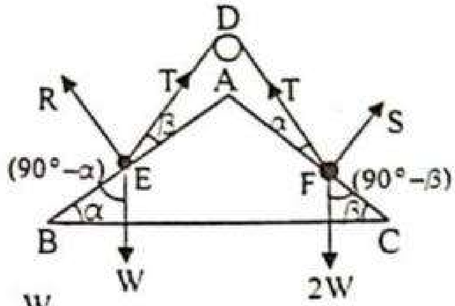
প্রমাণ: মনে করি, AB রডের A প্রান্ত AD দেওয়ালে এবং B প্রান্ত BD সমতলে রাখা আছে। $BG \perp BC$ বরাবর দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R, $BI \perp BD$ বরাবর সমতলের প্রতিক্রিয়া S এবং রডের ওজন W এর মধ্যবিন্দু G তে খাড়া নিম্নদিকে ক্রিয়া করে। যেহেতু রডটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং R, S ও W এর ক্রিয়ারেখাত্রয় পারস্পর একবিন্দু (ধরি) O তে ছেদ করে। B থেকে R এর ক্রিয়ারেখার উপর অঙ্কিত লম্ব C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\angle ADB = \theta$, $\angle ABE = \angle BAC = \alpha$, যখন BE অনুভূমিক।

ADBO চতুর্ভুজে, $\angle DAO = \angle OBD = 90°$. $\therefore$ $\angle ADB = \pi - \angle AOB = \angle BOC = \theta$

আবার, ΔABC এ $BC \parallel GO$ এবং G, AB এর মধ্যবিন্দু । সুতরাং O, AC এর মধ্যবিন্দু ।

এখন OBC সমকোণী ত্রিভুজে, $\tan\theta = \dfrac{BC}{OC} = \dfrac{BC}{AC/2} = 2\,\dfrac{BC}{AC}$ $\therefore\ \tan\theta = 2\tan\alpha$ (Showed)

2(c) AB ও AC মসৃণ তলদ্বয় ভূমিতলের সাথে যথাক্রমে α ও β কোণে হেলানো আছে। A বিন্দুর খাড়া উপরে স্থাপিত মসৃণ কপিকলের উপর দিয়ে একটি সুতার দুইপ্রান্তে সংযুক্ত W ও 2W ওজনের দুইটি বস্তু যথাক্রমে AB ও AC তলের উপর বসানো আছে। সুতার অংশদ্বয় AB ও AC এর সাথে যথাক্রমে β ও α কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $\sin 2\alpha = 2\sin 2\beta$.



প্রমাণঃ মনে করি, মসৃণ কপিকলটি D বিন্দুতে স্থাপিত এবং W ও 2W ওজনের বস্তু দুইটি AB ও AC তলের উপর যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে বসানো আছে। ধরি, E ও F বিন্দুতে তলের উল্লম্ব প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R ও S। কপিকলটি মসৃণ বলে সুতার টান T (ধরি) সর্বত্র সমান।

এখন E বিন্দুতে W, R, T সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

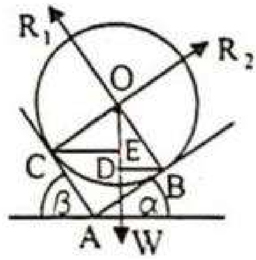
$\therefore$ লামির সূত্র হতে পাই, $\dfrac{T}{\sin(180^0-\alpha)} = \dfrac{W}{\sin(90^0-\beta)} \Rightarrow \dfrac{T}{\sin\alpha} = \dfrac{W}{\cos\beta}$ ....(i)

আবার F বিন্দুতে 2W, S, T সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

$\therefore$ লামির সূত্র হতে পাই, $\dfrac{T}{\sin(180^0-\beta)} = \dfrac{2W}{\sin(90^0-\alpha)} \Rightarrow \dfrac{T}{\sin\beta} = \dfrac{2W}{\cos\alpha}$ ...(ii)

$$\text{(i)} \div \text{(ii)} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2\cos\beta} \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha = 2(2\sin\beta\cos\beta)\quad \therefore \sin 2\alpha = 2\sin 2\beta$$

2(d) ভূমির সাথে α, β কোণে নত দুইটি মসৃণ সমতল ভূতলের একটি রেখায় ছেদ করে। W ওজনের একটি গোলক এদের মধ্যে স্থাপিত হলে, তলদ্বয়ের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ মনে করি, সমতল দুইটি ভূতলের একটি রেখাকে A বিন্দুতে ছেদ করে। স্পর্শবিন্দু B ও C তে তল দুইটির প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R_1 ও R_2 এবং গোলকের ওজন W এর কেন্দ্র O তে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। B ও C থেকে অঙ্কিত লম্ব W এর ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে,

$\alpha = \angle ABD = 90° - \angle OBD = \angle BOD$.

অনুরূপ, $\beta = \angle COD$. লামির সূত্র থেকে পাই,

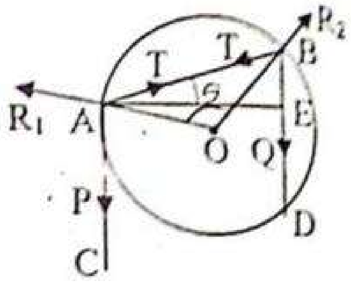
$$\frac{R_1}{\sin(W \wedge R_2)} = \frac{R_2}{\sin(R_1 \wedge W)} = \frac{W}{\sin(R_1 \wedge R_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{\sin(180^0 - \angle COD)} = \frac{R_2}{\sin(180^0 - \angle BOD)} = \frac{W}{\sin BOC} \Rightarrow \frac{R_1}{\sin COD} = \frac{R_2}{\sin BOD} = \frac{W}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$\Rightarrow \dfrac{R_1}{\sin\beta} = \dfrac{R_2}{\sin\alpha} = \dfrac{W}{\sin(\alpha+\beta)}$ $\therefore$ তলদ্বয়ের প্রতিক্রিয়া $R_1 = \dfrac{W\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ এবং $R_2 = \dfrac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

2(e) P ও Q (P > Q) ওজনের দুইটি আংটি একটি খাড়া মসৃণ বৃত্তাকার তারের উপরের অংশে ওজনহীন একটি সুতার দুই প্রান্ত বাঁধা আছে। সুতার টান অবস্থায় এর দৈর্ঘ্য কেন্দ্রে 2φ কোণ তৈরী করে। অনুভূমিকের সাথে সুতা θ কোণ তৈরী করলে, দেখাও যে, $\tan\theta = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\varphi$.

প্রমাণ ঃ মনে করি, P ও Q ওজনের আংটি দুইটি O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তাকার তারের উপরের অংশে যথাক্রমে AB সুতার A ও B প্রান্তে বাঁধা আছে। ধরি, A ও B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া R_1 ও R_2, যাদের কার্যরেখা O গামী এবং P ও Q খাড়া নিম্নদিকে যথাক্রমে AC ও BD বরাবর ক্রিয়া করে। AE অনুভূমিক রেখা BD কে E বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\angle AOB = 2\varphi, \angle BAE = \theta$



এখন, A বিন্দুতে R_1, P এবং তারের টান T (ধরি) সাম্যবস্থা সৃষ্টি করে।

সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই, $\frac{P}{\sin(180^0 - \angle OAB)} = \frac{T}{\sin(180^0 - \angle OAC)}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin OAB} = \frac{T}{\sin OAC} \ldots\ldots(i)$$

আবার, B বিন্দুতে R_2, Q এবং T সাম্যবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{Q}{\sin(180^0 - \angle ABO)} = \frac{T}{\sin(180^0 - \angle OBD)} \Rightarrow \frac{Q}{\sin ABO} = \frac{T}{\sin OBD} \ldots\ldots(ii)$$

ΔOAB –এ, OA = OB

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180° - \angle AOB) = \frac{1}{2}(180° - 2\varphi) = 90° - \varphi.$$

$$\angle ABD = 90° - \theta,\ \angle OBD = \angle ABD - \angle OBA = 90° - \theta - (90° - \varphi) = \varphi - \theta.$$

$$\angle BAC = 90° + \theta,\ \angle OAE = \angle OAB - \angle BAE = 90° - \varphi - \theta$$

$$\therefore \angle OAC = 90° - \angle OAE = 90° - 90° + \varphi + \theta = \varphi + \theta$$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $\frac{P}{\sin(90^0 - \varphi)} = \frac{T}{\sin(\theta + \varphi)} \Rightarrow \frac{P}{\cos\varphi} = \frac{T}{\sin(\theta + \varphi)} \cdots\cdots(iii)$

$$\frac{Q}{\sin(90^0 - \varphi)} = \frac{T}{\sin(\varphi - \theta)} \Rightarrow \frac{Q}{\cos\varphi} = \frac{T}{\sin(\varphi - \theta)} \cdots\cdots(iv)$$

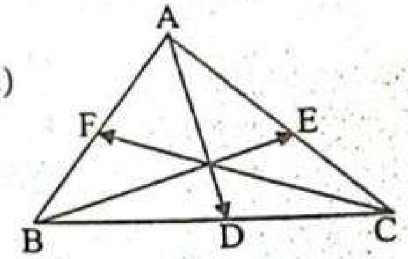
$$(iii) \div (v \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\sin(\varphi - \theta)} \Rightarrow \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{\sin(\varphi + \theta) + \sin(\varphi - \theta)}{\sin(\varphi + \theta) - \sin(\varphi - \theta)} = \frac{2\sin\varphi\cos\theta}{2\cos\varphi\sin\theta} = \frac{\tan\varphi}{\tan\theta}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\varphi$$

3(a) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F । প্রমাণ কর যে, AD, BE, CF মধ্যমা তিনটি দ্বারা সূচিত বলত্রয় কোন কণার উপর কার্যরত হলে তা সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করবে।

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজে AD মধ্যমা বলে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} \cdots$(i)

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BE} \cdots$(ii) এবং $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CF} \cdots$(ii)



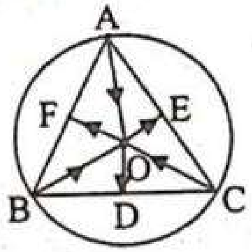
(i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$$2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB})$$
$$= \underline{0} + \underline{0} + \underline{0}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$. সুতরাং, বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকবে।

3(b) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং BC, CA , AB এর উপর যথাক্রমে OD, OE, OF লম্ব। প্রমাণ কর যে, AO, BO, CO, OD, OE, OF দ্বারা সূচিত বলগুলো সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করবে।

প্রমাণ: ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হতে BC, CA , AB এর উপর যথাক্রমে OD, OE, OF লম্ব। সুতরাং D, E, F বিন্দুত্রয় যথাক্রমে BC, CA , AB এর মধ্যবিন্দু।



$\therefore \Delta OBC$ এ, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD} \cdots$(i) . ΔOAC এ, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OE} \cdots$(ii)

ΔOAB এ, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OF} \cdots$(iii)

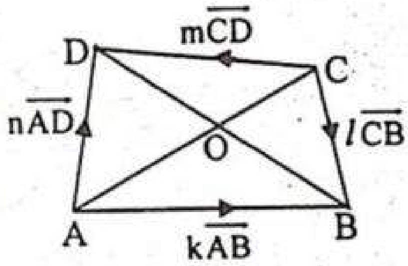
(i) + (ii) + (iii) $\Rightarrow 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$

$\Rightarrow -\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} \Rightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \underline{0}$

সুতরাং বলগুলো সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

3(c) ABCD চতুর্ভুজের AB, CB, CD, AD বরাবর কার্যরত যথাক্রমে k.AB, l.CB, m.CD, n.AD মানের চারটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, প্রমাণ কর যে, km = ln.

প্রমাণ: অনুপাত সূত্র হতে পাই, $k\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD} = (k+n)\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{R}$ (ধরি); যেখানে O, BD কে n : k অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে অর্থাৎ $k.BO = n.OD \cdots$(i)



যেহেতু প্রদত্ত বল চারটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং $l\overrightarrow{CB}$ ও $m\overrightarrow{CD}$ এর লব্ধি S (ধরি) R এর সমান ও একই রেখায় বিপরীতমুখী ক্রিয়াশীল হবে।

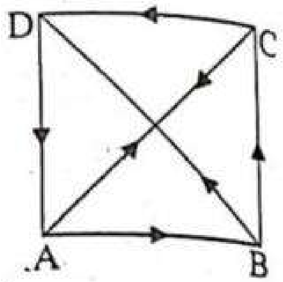
$\therefore$ S এর ক্রিয়ারেখা CO বরাবর হবে এবং $l\overrightarrow{CB} + m\overrightarrow{CD} = (l+m)\overrightarrow{CO}$, যেখানে $l.BO = m.OD \cdots$(ii)

(i) $\div$ (ii) $\Rightarrow \dfrac{k}{m} = \dfrac{l}{n} \therefore km = ln.$

3(d) ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। দেখাও যে, AB , 2BC, 3CD এবং 2DA দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত চারটি বলের লব্ধির মান ও দিক 2CA দ্বারা সূচিত হবে।

সমাধান ঃ ভেক্টরের সাহায্যে পাই,

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CD} + 4\overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + 2(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + 2\overrightarrow{DA}$$
$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{DA}$$



$= (\overline{AC} + \overline{CA}) + (\overline{BD} + \overline{DA}) + \overline{DA} + \overline{CA}$

$= \underline{0} + \overline{BA} + \overline{DA} + \overline{CA} = (\overline{CD} + \overline{DA}) + \overline{CA}$

$[\because AB = DC, BA \| CD]$

$= \overline{CA} + \overline{CA} = 2\overline{CA}$

$\therefore$ প্রদত্ত বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক 2CA দ্বারা সূচিত হবে।

4(a) $\sqrt{6}$ N, $(1 + \sqrt{3})$ N ও 2 N মানের তিনটি সমবিন্দুগামী বল যথাক্রমে $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ ও $\overline{F_3}$, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে অনুক্রমে 45°, 180° এবং – 60° কোণ তৈরি করে। (i) লব্ধির মান নির্ণয়ের মাধ্যমে, (ii) বল ত্রিভুজের সূত্রানুসারে, (iii) লামীর উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞানুসারে প্রমাণ কর যে, বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে।

প্রমাণ ঃ (i) ধরি, লব্ধি $\overline{R}$. $\therefore \overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$

$\therefore$ $\overline{R}$ এর x উপাংশ, $R_x = \overline{F_1}x + \overline{F_2}x + \overline{F_3}x = \sqrt{6}\cos 45° + (1 + \sqrt{3})\cos 180° + 2\cos(-60°)$

$$= \sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + (1 + \sqrt{3}) \times -1 + 2 \times \frac{1}{2} = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} + 1 = 0$$

$\overline{R}$ এর y উপাংশ, $R_y = \overline{F_1}y + \overline{F_2}y + \overline{F_3}y = \sqrt{6}\sin 45° + (1 + \sqrt{3})\sin 180° + 2\sin(-60°)$

$$= \sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + (1 + \sqrt{3}) \times 0 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$$

$\therefore$ $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{0+0} = 0$. অতএব, বলত্রয় সাম্যাবস্থায় রয়েছে।

(ii)

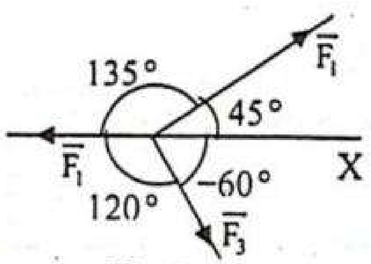


Fig-1

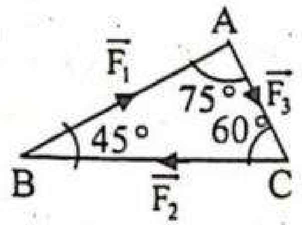


Fig-2

বলত্রয়ের সাথে সংশ্লিষ্ট ভেক্টরদ্বয় চিত্রে প্রদর্শিত হল।

এখন, $\dfrac{F_1}{AB} = \dfrac{\sqrt{6}}{k\sin 60^0} = \dfrac{\sqrt{6}}{k.\sqrt{3}/2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{k}$, $\dfrac{F_2}{BC} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{k\sin 75^0} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{k\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{k}$,

$\dfrac{F_3}{AC} = \dfrac{2}{k\sin 45^0} = \dfrac{2}{k.1/\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{k}$ $\therefore \dfrac{F_1}{AB} = \dfrac{F_2}{BC} = \dfrac{F_3}{AC}$.

$\therefore$ বলত্রিভুজের সূত্রানুসারে বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে।

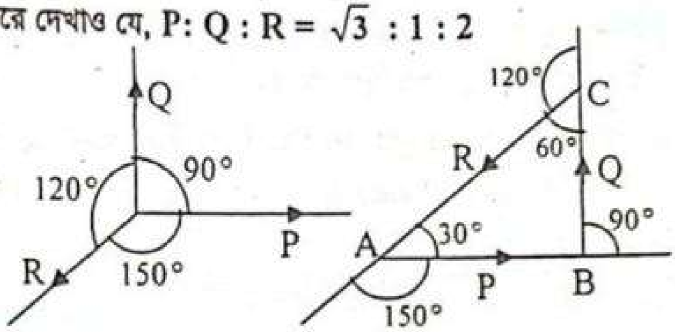
(iii) $\dfrac{F_1}{\sin(F_2 \wedge F_3)} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sin 120^0} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}/2} = 2\sqrt{2}$,

$\dfrac{F_2}{\sin(F_1 \wedge F_3)} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sin 105^0} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\cos 15^0} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})/2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$\dfrac{F_3}{\sin(F_1 \wedge F_2)} = \dfrac{2}{\sin 135^0} = \dfrac{2}{\cos 45^0} = \dfrac{2}{1/\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ ল্যামীর বিপরীত সুত্রানুসারে বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে।

4(b) তিনটি সমতলীয় বল P, Q, R একটি বস্তুকণায় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় রয়েছে, যেখানে $P \wedge Q = 90°$, $Q \wedge R = 120°$ । বলত্রিভুজের বিপরীত সূত্র প্রয়োগ করে দেখাও যে, $P : Q : R = \sqrt{3} : 1 : 2$



প্রমাণ ঃ একটি বস্তুকণার উপর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় ABC ত্রিভুজের যথাক্রমে AB, BC, CA বাহু দ্বারা মানে ও দিকে ক্রিয়ারত।

যেহেতু বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে, সেহেতু বলত্রিভুজের বিপরীত সূত্র হতে পাই, $\dfrac{P}{AB} = \dfrac{Q}{BC} = \dfrac{R}{CA}$

$\Rightarrow \dfrac{P}{2R\sin 60^0} = \dfrac{Q}{2R\sin 30^0} = \dfrac{R}{2R\sin 90^0}$, [ত্রিভুজের সাইন সূত্র $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{CA}{\sin B} = 2R$ হতে।]

$\Rightarrow \dfrac{P}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{Q}{1/2} = \dfrac{R}{1} \Rightarrow \dfrac{P}{\sqrt{3}} = \dfrac{Q}{1} = \dfrac{R}{2}$ $\therefore P : Q : R = \sqrt{3} : 1 : 2.$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. কোনো সমবাহু ত্রিভুজের এক কৌণিক বিন্দুতে দুই বাহু বরাবর P ও 2P মানের দুটি বল ক্রিয়া করে। বল দুটির লব্ধির মান কত? **[RU 06-07,07-08; HSTU 05-06]**

Sol^n ঃ $R = \sqrt{P^2 + (2P)^2 + 2.P.2P\cos 60^0} = \sqrt{7}\,P$

2. একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 2 একক ও 3 একক মানের দুইটি বলের লব্ধির মান 4 একক। বল দুইটি অন্তর্ভুক্ত কোণ কত? **[DU 02-03; KUET 05-06; KU 09-10]**

Sol^n ঃ $4^2 = 2^2 + 3^2 + 2.2.3\cos\alpha$

3. যদি দুইটি বল 12N ও 5N একটি কণার উপর কিয়া করে এবং বল দুইটি দ্বারা সৃষ্ট কোণ 60° হয়, তবে বল দুইটির লব্ধি প্রথম বলের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করবে? **[DU 00-01]**

Sol^n ঃ $\theta = \dfrac{5\sin 60^0}{12+\cos 60^0} \Rightarrow \theta = 16{\cdot}63°$

4. 20 কেজি ওজনের একটি বস্তুর সাথে দুইটি রশি বেঁধে দুজন লোক তা বহন করছে। রশিদ্বয় খাড়া রেখার সাথে সমান 45° কোণ উৎপন্ন করে। রশিদ্বয়ের টান হবে। [BUET 09-10]

Sol^n ঃ $20^2 = T^2 + T^2 + 2T.T\cos(45° + 45°) \Rightarrow 2T^2 = 20^2 \Rightarrow T = 10\sqrt{2}$

কৌশল ঃ α কোণে ক্রিয়ারত P, Q বলদ্বয়ের P কে m গুণ করায় লব্ধি m গুণ হলে, $\cos\alpha = -\frac{(m+1)Q}{2mP}$

5. 3P ও 2P বলদ্বয়ের লব্ধি R। প্রথম বলটিকে দ্বিগুণ করলে লব্ধির পরিমাণও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ কত? [DU 09-10, CU 06-07, HSTU 05-06]

Sol^n ঃ $\cos\alpha = -\frac{(2+1)\times 2P}{2\times 2\times 3P} = -\frac{1}{2}$ $\therefore \alpha = 120°$

কৌশল ঃ দুইটি বলের লব্ধির দিক বল দুইটির মান পরিবর্তন করার পরও অপরিবর্তিত থাকলে, প্রদত্ত বলদ্বয়ের অনুপাত পরিবর্তিত বলদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

6. P ও 2P মানের দুটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথম বলটি দ্বিগুণ এবং দ্বিতীয়টির মান 8 একক বৃদ্ধির ফলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকলে, P এর মান নির্ণয় কর। [KUET 08-09; KU 09-10; JUST 09-10; IU 04-05]

Sol^n ঃ $\frac{P}{2P} = \frac{2P}{2P+8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{P}{P+4} \Rightarrow P = 4$

কৌশল ঃ α কোণে ক্রিয়ারত P, Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, P বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করলে, $\cos\alpha = -\frac{Q}{P}$, $R^2 = Q^2 - P^2$.

7. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P নিউটন এবং 12 N দুইটি বলের লব্ধি $3\sqrt{7}$ N, যার ক্রিয়ারেখা P- এর দিকে 90° কোণ উৎপন্ন করে। P এর মান – [DU 08-09]

Sol^n ঃ $(3\sqrt{7})^2 = 12^2 - P^2 \Rightarrow P = 9$

8. কোন বিন্দুতে দুইটি বল 120° কোণে ক্রিয়ারত। বৃহত্তর বলটির মান 10N এবং তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করলে ক্ষুদ্রতর বলের মান নির্ণয় কর।

[DU 06-07, 03,04; NSTU 07-08; NU 08-09; Jt.U 06-07; RU 05-06; Textile 13-14]

Sol^n ঃ $\cos 120° = -\frac{Q}{10} \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{Q}{10} \Rightarrow Q = 5$ N

কৌশল ঃ P = Q হলে, $R = 2Q\cos\frac{\alpha}{2}$.

9. কোন বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে ভারসাম্যে রাখলে সমান বলদ্বয়ের প্রতিটির মান– [DU 08-09; HSTU 08-09]

Sol^n ঃ $9 = 2P\cos 30° = 2P \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P = 3\sqrt{3}$

10. সমমানের দুইটি বলের লব্ধির বর্গ বলদ্বয়ের গুণফলের তিনগুণ । এদের মধ্যবর্তী কোণ কত?

[BUET 10-11; RU 06-07; CU 07-08, 03-04; IU 04-05]

Sol^n : $R=2Q\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow R^2=4Q^2\cos^2\frac{\alpha}{2}=3Q^2 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos30^\circ \Rightarrow \alpha=2\times30^\circ=60^\circ$

11. 2α কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধি , 2β কোণে ক্রিয়ারত একই বল দুইটির লব্ধির দ্বিগুণ হলে α ও β এর সম্পর্ক কি হবে? **[CU 07-08]**

Sol^n : $2P\cos\alpha = 2\times 2P\cos\beta \Rightarrow \cos\alpha = 2\cos\beta.$

কৌশল : একবিন্দুতে ক্রিয়াশীল সমান্তর ধারা সৃষ্টিকারী তিনটি বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে অথবা একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা মানে ও দিকে একইক্রমে ক্রিয়াশীল হলে, তাদের লব্ধির মান = $\sqrt{3}$ × সমান্তর ধারার সাধারণ অন্তর।

12. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং 3P, 7P ও 5P মানের তিনটি বলের দিক যথাক্রমে AB, BC ও CA এর দিকে। বল তিনটির লব্ধির মান কত? **[DU 00-01; KUET 07-08; RU 06-07]**

Sol^n : বলগুলো সমান্তর ধারা গঠন করে যার সাধারণ অন্তর 2P । $\therefore$ লব্ধির মান $=\sqrt{3}\times 2P = 2\sqrt{3}P$

বিশেষ সম্পর্ক : $R_{max}^2+R_{min}^2=R_P^2$

13. একই বিন্দুতে পরিবর্তনশীল কোণে প্রযুক্ত দুইটি বলের লব্ধির বৃহত্তম মান 17N , বল দুইটি লম্বভাবে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধির মান হয় 13N । বল দুইটির লব্ধির ক্ষুদ্রতম মান কত হবে? **[DU 04-05; IU 06-07]**

Sol^n : $R_{max}^2+R_{min}^2=R_P^2 \Rightarrow 17^2+R_{min}^2=13^2 \Rightarrow R_{min}=7\,N$

14. কোনো বিন্দুতে 2P-এর P মানের দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথম বলটিকে দ্বিগুণ করে দ্বিতীয়টির মান 8 একক বৃদ্ধি করা হলে তাদের লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান- **[DU 13-14]**

A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

Sol^n : $\frac{2P}{P}=\frac{4P}{P+8} \Rightarrow 2=\frac{4P}{P+8} \Rightarrow 4P=2P+16 \Rightarrow 2P=16 \Rightarrow P=8$

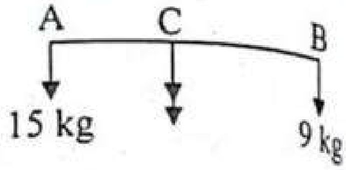
14. $2, \sqrt{3}$ এবং 3 মানের তিনটি বল কোন এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত। ইহারা পরস্পর ভারসাম্য সৃষ্টি করলে প্রথমোক্ত বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোন কত? **[Textile 13-14]**

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Sol^n : $3^2=2^2+(\sqrt{3})^2+2\times2\times\sqrt{3}\cos\alpha \Rightarrow 6\sqrt{3}\cos\alpha=9-4-5 \Rightarrow \cos\alpha=0 \Rightarrow \alpha=90^0$

প্রশ্নমালা VIII C

1(a) 32 cm ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে 15 kg ও 9 kg ওজনের দুইটি সমান্তরাল বল কার্যরত আছে। এদের লব্ধি ও তার প্রয়োগ বিন্দু নির্ণয় কর, যখন (i) বলদ্বয় সদৃশ (ii) বলদ্বয় বিসদৃশ।

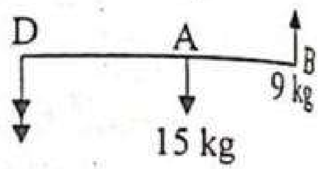


সমাধানঃ (i) ধরি, 32 cm ব্যবধানে A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 15 kg ও 9 kg ওজনের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে এবং এদের লব্ধি $R = (15 + 9)$ অর্থাৎ 24 kg-wt, যা AB এর C বিন্দুতে কার্যরত।

$\therefore\ 15 \times AC = 9 \times BC = 9(AB - AC) \Rightarrow (15 + 9) \times AC = 9 \times AB$

$\Rightarrow 24 \times AC = 9 \times AB\ \therefore\ AC = \dfrac{9}{24} \times 32 = 12$ cm.

$\therefore$ লব্ধি 24 kg-wt, যা বৃহত্তম বল থেকে 12 cm দূরে কার্যরত।



(ii) ধরি, 32 cm ব্যবধানে A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 15 kg ও 9 kg ওজনের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে এবং এদের লব্ধি $R = (15 - 9)$ অর্থাৎ 6 kg-wt, যা বর্ধিত BA এর D বিন্দুতে কার্যরত।

$\therefore\ 15 \times AD = 9 \times BD = 9 \times (AD + AB) \Rightarrow (15 - 9) \times AD = 9 \times AB$

$\Rightarrow 6 \times AD = 9 \times AB\ \therefore AD = \dfrac{9}{6} \times 32 = 48$ cm.

$\therefore$ লব্ধি 6 kg-wt, যা বৃহত্তম বল থেকে 48 cm দূরে কার্যরত।

1(b) AB হালকা দন্ডের দুই প্রান্তে ঝুলানো দুইটি সমান্তরাল বলের লব্ধি 16 N এবং লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB কে 5 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করে। বল দুইটি নির্ণয় কর, যখন (i) বলদ্বয় সদৃশ (ii) বলদ্বয় বিসদৃশ।

সমাধানঃ মনে করি, A ও B বিন্দুতে ঝুলানো যথাক্রমে P ও Q $(P < Q)$ নিউটন সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি 16 N, যা AB কে C বিন্দুতে 5 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করে।

তাহলে, $AC : BC = 5 : 3 \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{3}$ এবং $P \times AC = Q \times BC \Rightarrow \dfrac{Q}{P} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow Q = \dfrac{5}{3}P \cdots$(i)

(i) বলদ্বয় সদৃশ হলে, $P + Q = 16 \Rightarrow P + \dfrac{5}{3}P = 16 \Rightarrow \dfrac{8}{3}P = 16 \Rightarrow P = 6$ এবং $Q = 16 - 6 = 10$

$\therefore$ সদৃশ বলদ্বয় 10 N ও 6 N.

(ii) বলদ্বয় বিসদৃশ হলে, $Q - P = 16 \Rightarrow \dfrac{5}{3}P - P = 16 \Rightarrow \dfrac{2}{3}P = 16 \Rightarrow P = 24$ এবং

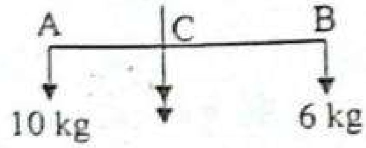
$Q = 16 + 24 = 40\ \therefore$ বিসদৃশ বলদ্বয় 40 N ও 24 N.

1(c) AB দন্ডের A ও B প্রান্তে যথাক্রমে 10 kg ও 6 kg ওজন স্থাপন করে C বিন্দুতে রশি বেঁধে ঝুলানো হলে দন্ডটি অনুভূমিকভাবে অবস্থান করে। যদি A প্রান্তে 75 kg ওজন রাখা হয় তবে B প্রান্তে কত ওজন দিলে দন্ডটি অনুভূমিকভাবে স্থির থাকবে?

সমাধানঃ যেহেতু দন্ডটি অনুভূমিকভাবে স্থির থাকে, সুতরাং C বিন্দুটি AB কে 10 kg ও 6 kg ওজনের ব্যস্ত অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$\therefore \frac{AC}{6}=\frac{BC}{10} \Rightarrow \frac{AC}{3}=\frac{BC}{5} \Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

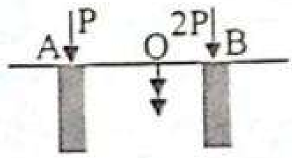
ধরি, B প্রান্তে w ওজন স্থাপন করলে দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে স্থির থাকবে।



$$\therefore \frac{AC}{BC}=\frac{w}{75\text{ kg}} \Rightarrow w = 75 \times \frac{3}{5}\text{ kg} = 45\text{ kg}.$$

1(d) একটি ভারি সুষম রড 24 cm ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে স্থাপিত। যদি খুঁটিদ্বয়ের উপর চাপের অনুপাত 1 : 2 হয়, তবে রডের মধ্যবিন্দু থেকে খুঁটির অবস্থান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, 24 cm ব্যবধানে A ও B বিন্দুতে স্থাপিত খুঁটি দুইটির উপর চাপ যথাক্রমে P ও 2P এবং রডের মধ্যবিন্দু O। তাহলে, P ও 2P এর লব্ধি রডের ওজনের সমান এবং O তে ক্রিয়ারত হবে।



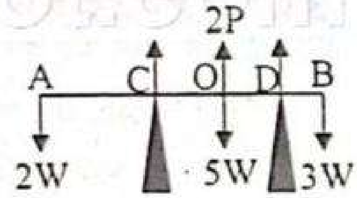
$$\therefore P \times AO = 2P \times BO \Rightarrow AO = 2\,BO \Rightarrow \frac{AO}{2}=\frac{BO}{1}=\frac{AO+BO}{2+1}=\frac{AB}{3}=\frac{1}{3}(24\text{ cm}) = 8\text{ cm}$$

$\Rightarrow AO = 2 \times 8\text{ cm} = 16\text{ cm}$ এবং $BO = 8\text{ cm}$

∴ রডের মধ্যবিন্দু থেকে খুঁটি 16 cm ও 8 cm দূরে অবস্থিত।

1(e) 20 cm দৈর্ঘ্য AB হালকা দণ্ডটি 10 cm ব্যবধানে দুইটি পেরেকের উপর অনুভূমিক ভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 2W ও 3W ওজন ঝুলানো হলে পেরেক দুইটির কোন্ অবস্থানের জন্য এদের উপর চাপ সমান হবে? [কু.'০৩]

সমাধানঃ ধরি, দণ্ডটি 10 cm ব্যবধানে C ও D বিন্দুতে অবস্থিত পেরেক দুইটির উপর সমান চাপদ্বয় P ও P। তাহলে এদের লব্ধি 2P, যা CD এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়া করবে। ∴ OC = OD = 5 cm.



সাম্যাবস্থার জন্য 2W ও 3W ওজনদ্বয়ের লব্ধি (2W + 3W) অর্থাৎ 5W, অবশ্যই O তে খাড়া নিম্নদিকে কার্যরত হবে।

$$\therefore 2W \times AO = 3W \times BO \Rightarrow \frac{AO}{3}=\frac{BO}{2}=\frac{AO+BO}{3+2}=\frac{AB}{5}=\frac{20}{5}\text{ cm} = 4\text{ cm}$$

$$\Rightarrow AO = 12\text{ cm} \text{ এবং } BO = 8\text{ cm}$$

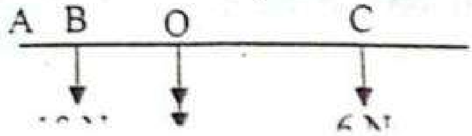
$\therefore AC = AO - CO = (12-5)\text{ cm} = 7\text{ cm}$ এবং $BD = BO - OD = (8-5)\text{ cm} = 3\text{ cm}.$

∴ পেরেক দুইটি A ও B বিন্দু থেকে যথাক্রমে 7 cm ও 3 cm দূরত্বে স্থাপন করতে হবে।

1(f) একটি দণ্ডের একপ্রান্ত হতে 2 cm ও 18 cm দূরত্বে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে যথাক্রমে 10 N ও 6 N সদৃশ সমান্তরাল বল দুইটি ক্রিয়া করছে। তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, একটি দণ্ডের A প্রান্ত হতে 2 cm ও 18 cm দূরত্বে B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে 10 N ও 6 N দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে এবং এদের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়ারত। তাহলে,

AB = 2 cm, AC = 18 cm.



$\therefore BC = AC - AB = (18-2)\text{ cm} = 16\text{ cm}.$

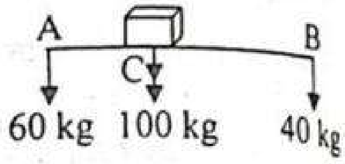
এখন, $10\times BO = 6\times OC \Rightarrow 10\times BO = 6\times(BC - BO)$

$\Rightarrow \quad (10+6)\times BO = 6\times BC$

$\Rightarrow 16\times BO = 6\times BC \;\therefore\; BO = \frac{6}{16}\times 16 = 6$ cm

$\therefore$ প্রদত্ত বলদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু বৃহত্তম বল হতে 6 cm দূরে অবস্থিত।

1(g) 2·5 m দীর্ঘ একটি হালকা তক্তার উপর 100 kg ওজনের একখন্ড পাথর রেখে দুইজন লোক তক্তার প্রান্তদ্বয় ধরে বহন করছে। পাথরখন্ডটি কোথায় রাখলে সবল লোকটি 60 kg ওজন বহন করবে?

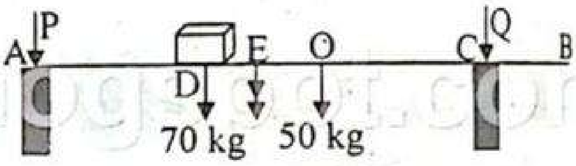


সমাধান ঃ মনে করি , AB = 2·5 m দীর্ঘ তক্তার C বিন্দুতে পাথর খন্ডটি রাখা হলে A প্রান্তে সবল লোকটি 60 কেজি ওজন বহন করবে। তাহলে, B প্রান্তে দূর্বল লোকটি (100 – 60) অর্থাৎ 40 কেজি ওজন বহন করবে।

$\therefore \quad 60\times AC = 40\times BC = 40\times(AB - AC) \Rightarrow (60+40)\times AC = 40\times AB$

$\Rightarrow AC = \frac{40}{100}\times 2{\cdot}5 = 1$m $\therefore$ সবল লোকটি থেকে 1m দূরে পাথরটি তক্তার উপর স্থাপন করতে হবে।

1(h) 10 m দীর্ঘ এবং 50 kg ওজনের AB একটি তক্তা দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে স্থাপিত। একটি খুঁটি A বিন্দুতে এবং অপরটি B থেকে 2 m ভিতরে। A থেকে 3 m দূরে 70 kg ওজনের একখন্ড পাথর তক্তাটির উপর স্থাপন করলে খুটিদ্বয়ের উপর চাপের পরিমাণ নির্ণয় কর।



সমাধানঃ মনে করি, AB = 10m তক্তাটি A ও C বিন্দুতে দুইটি খুঁটি উপর অনুভূমিকভাবে স্থাপন করে পাথর খন্ডটি D তে তক্তাটির উপর স্থাপন করা হলো।

তাহলে, AD = 3 m, BC = 2 m . $\therefore$ AC = 8 m.

তক্তাটির ওজন এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়াশীল এবং AO = BO = 5 m

$\therefore \quad DO = AO - AD = (5-3)$ m $= 2$ m.

D এবং O তে যথাক্রমে 70 kg ও 50 kg ওজনের লব্ধি 120 kg-wt , যা E (ধরি) বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore \quad 70\times DE = 50\times EO = 50\times(DO - DE) \Rightarrow (70+50)\times DE = 50\times DO$

$\Rightarrow 120\times DE = 50\times DO \Rightarrow DE = \frac{50}{120}\times 2 = \frac{5}{6}$m $\therefore AE = AD + DE = 3 + \frac{5}{6} = \frac{23}{6}$m.

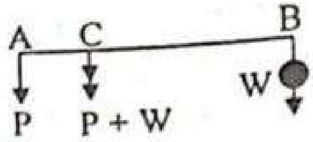
এখন, E তে ক্রিয়াশীল 120 kg ওজনের জন্য A ও C তে খুটিদ্বয়ের উপর চাপের পরিমাণ যথাক্রমে P kg-wt ও Q kg-wt হলে, P + Q = 120 এবং $P\times AE = Q\times(AC - AE) \Rightarrow (P+Q)\times AE = Q\times AC$

$\therefore \quad Q = \frac{AE}{AC}(P+Q) = \frac{23/6}{8}\times 120 = 57{\cdot}5$ এবং $P = 120 - Q = 120 - 57{\cdot}5 = 62{\cdot}5$

$\therefore$ খুটিদ্বয়ের উপর চাপের পরিমাণ 62·5 kg-wt এবং 57·5 kg-wt .

1(i) একজন লোক 3 m একটি লাঠি কাঁধের উপর অনুভূমিক ভাবে স্থাপন করে এর এক প্রান্তে হাত রেখে অপর প্রান্তে একটি বস্তু বহন করছে। লোকটির হাত ও কাঁধের দূরত্ব কত হলে কাঁধের উপর চাপ ন্যূনতম হবে?

সমাধানঃ ধরি, লোকটি $AB = 3$ m লাঠিটি C বিন্দুতে কাঁধের উপর অনুভূমিক ভাবে স্থাপন করে A প্রান্তে হাত রেখে B প্রান্তে W ওজনের একটি বস্তু বহন করছে।



ধরি, A প্রান্তে হাতের চাপ P এবং $AC = x$ মি. । তাহলে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বলদ্বয়ের লব্ধি $(P + W)$ এবং C বিন্দুতে কাঁধের উপর চাপ R (ধরি) সমান ও সমবিন্দু।

$$\therefore P \times AC = W \times BC = W \times (AB - AC) \Rightarrow (P + W) \times AC = W \times AB$$

$$\Rightarrow R \times x = W \times 3 \Rightarrow R = \frac{3W}{x}$$

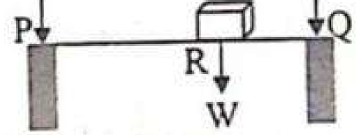
$\therefore$ চাপ R ন্যূনতম হবে যদি x বৃহত্তম হয় অর্থাৎ $x = 3$ মিটার হয়, কেননা x এর সর্বোচ্চ মান = লাঠির দৈর্ঘ্য।

1(j) ভূমিতলের সমান্তরাল একই রেখায় দু'টি মসৃণ পেরেক P ও Q এর উপর 8 মি. দীর্ঘ একটি বাঁশের প্রান্তদ্বয় অবস্থান করছে। বাঁশটির উপরস্থ R বিন্দুতে একটি ভারী বোঝা ঝুলানো হল, যদি $PR = 3RQ$ হয় এবং Q বিন্দুতে চাপ P বিন্দুতে চাপ অপেক্ষা 325 গ্রাম-ওজন বেশী হয় তবে বোঝাটির ওজন নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৯-১০]

সমাধান ঃ মনে করি, বোঝাটি w গ্রাম-ওজনের । এর জন্য P বিন্দুতে চাপ x গ্রাম-ওজন হলে, Q বিন্দুতে চাপ হবে $(x + 325)$ গ্রাম-ওজন ।

$\therefore x + x + 325 = w \Rightarrow 2x = w - 325$ এবং

$x \times PR = (x + 325) \times RQ$



$\Rightarrow x \times 3RQ = (x + 325) \times RQ$, $[\because PR = 3RQ]$

$\Rightarrow 3x = x + 325 \Rightarrow 2x = 325 \Rightarrow w - 325 = 325 \Rightarrow w = 650$

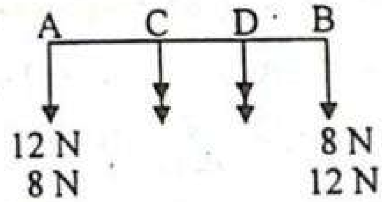
$\therefore$ বোঝাটির ওজন 650 গ্রাম-ওজন।

2(a) 12 N ও 8 N দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোন কঠিন বস্তুর উপর যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। বল দুইটির অবস্থান বিনিময় করলে এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর কত দূরে সরে যাবে? [সি.'০৩]

প্রমাণঃ A ও B বিন্দুতে কার্যরত যথাক্রমে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল 12 N ও 8 N এর লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C হলে,

$12 \times AC = 8 \times BC = 8 \times (AB - AC)$

$\Rightarrow (12 + 8) \times AC = 8 \times AB \Rightarrow 20 \times AC = 8 \times AB \Rightarrow AC = \frac{2}{5} AB$



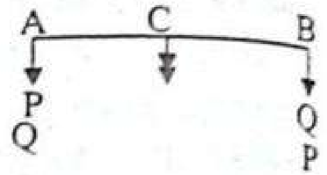
আবার, বল দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে যদি এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু D হয়, তবে $8 \times AD = 12 \times BD = 12 \times (AB - AD) \Rightarrow 20 \times AD = 12 \times AB$

$\Rightarrow 5 \times AD = 3 \times AB \Rightarrow AD = \frac{3}{5} AB$

এখন, $CD = AD - AC = (\frac{3}{5} - \frac{2}{5})AB = \frac{1}{5} AB$

$\therefore$ লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর $\frac{1}{5}$AB দূরত্ব সরে যাবে।

2(b) P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোন একটি বস্তুর উপর দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। এদের অবস্থান বিনিময় করলে যদি লব্ধির অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে, তাহলে প্রমাণ কর যে, $P = Q$.

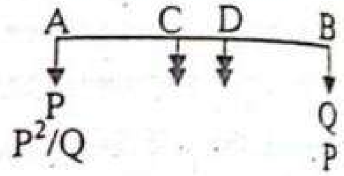


প্রমাণঃ ধরি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত যথাক্রমে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q এর লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C । $\therefore$ $P.AC = Q.BC \cdots\cdots$(i)

শর্তানুসারে, A বিন্দুতে Q ও B বিন্দুতে P কার্যরত হলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু পুনরায় C হয়। $\therefore Q\,.\,AC = P.\,BC \cdots\cdots$ (ii)

$$(i) \div (ii) \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{Q}{P} \Rightarrow P^2 = Q^2 \;\therefore P = Q \text{ (Proved).}$$

2(c) দেখাও যে, P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের Q কে $\frac{P^2}{Q}$ তে পরিবর্তন করে P এর সাথে স্থান পরিবর্তন করলে লব্ধির অবস্থান একই থাকে। [ঢা.'০২; চ.'০৫,'০৮; য.'১০]



প্রমাণঃ ধরি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত যথাক্রমে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q এর লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C । $\therefore P.AC = Q.BC = Q.\,(AB - AC)$

$$\Rightarrow (P+Q).\,AC = Q.AB \Rightarrow AC = \frac{Q}{P+Q}AB \ldots\ldots \text{(i)}$$

আবার, Q কে P^2/Q তে পরিবর্তন করে P এর সাথে স্থান পরিবর্তন করলে যদি লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু D হয়, তবে

$$\frac{P^2}{Q}.AD = P.\,BD = P\,(AB - AD) \Rightarrow \left(\frac{P^2}{Q} + P\right).AD = P.AB$$

$$\Rightarrow (P^2 + PQ).AD = PQ.AB \Rightarrow (P+Q).\,AD = Q.\,AB \Rightarrow AD = \frac{Q}{P+Q}AB = AC, \text{ [(i) হতে]}$$

$\therefore$ C ও D বিন্দুর অবস্থান একই। সুতরাং উভয় ক্ষেত্রে লব্ধির অবস্থান একই।

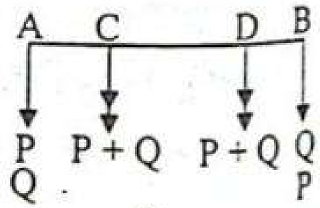
2(d) একটি বস্তুর উপর A ও B বিন্দুতে কার্যরত দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q (P >Q) পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর d দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ কর যে, $d = \frac{P-Q}{P+Q}AB$

[সি.'০২,'১১; রা.'০৩,'১৩; য.'০৩; কু.'১২]

প্রমাণ: ধরি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q এর লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C।

$$\therefore P \times AC = Q \times BC = Q \times (AB - AC) \Rightarrow (P+Q) \times AC = Q \times AB$$

$$\Rightarrow AC = \frac{Q}{P+Q}AB$$



আবার, বল দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে যদি এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু D হয়,

তবে $Q \times AD = P \times BD = P \times (AB - AD) \Rightarrow (P+Q) \times AD = P \times AB \Rightarrow AD = \frac{P}{P+Q}AB$

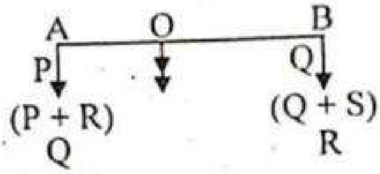
এখন, $d = CD = AD - AC = \left(\frac{P}{P+Q} - \frac{Q}{P+Q}\right)AB \;\therefore d = \frac{P-Q}{P+Q}AB$

2(e) P ও Q মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। P কে R পরিমাণে এবং Q কে S পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার P, Q এর পরিবর্তে যথাক্রমে Q, R ক্রিয়া করলেও লব্ধি O

বিন্দুতে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, $S = R - \dfrac{(Q-R)^2}{P-Q}$

[ব.'০১; সি.'০৪; ঢা.'০৬; রা.'০৩,'০৯; কু.'০৯,'১১; কুয়েট'০৩-০৪]

প্রমাণঃ মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। তাহলে,



১ম ক্ষেত্রে, $P.\,AO = Q.\,BO \cdots\cdots$ (i)

২য় ক্ষেত্রে, $(P+R).\,AO = (Q+S).BO \cdots\cdots$ (ii)

৩য় ক্ষেত্রে, $Q.\,AO = R.\,BO \cdots\cdots$ (iii)

এখন, $(ii)-(i) \Rightarrow R.AO = S.BO \cdots\cdots (iv)$, $(i)\div(iii) \Rightarrow \dfrac{P}{Q} = \dfrac{Q}{R} = \dfrac{P-Q}{Q-R} \cdots\cdots (v)$ এবং

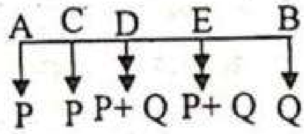
$(iii)\div(iv) \Rightarrow \dfrac{Q}{R} = \dfrac{R}{S} = \dfrac{Q-R}{R-S} \cdots\cdots (vi)$

(v) ও (vi) থেকে পাই, $\dfrac{P-Q}{Q-R} = \dfrac{Q-R}{R-S} \Rightarrow R-S = \dfrac{(Q-R)^2}{P-Q}$ $\therefore S = R - \dfrac{(Q-R)^2}{P-Q}$ (Proved)

2(f) P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল। P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়া বিন্দুকে x দূরত্বে সরালে, দেখাও যে, এদের লব্ধি $\dfrac{Px}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে।

[রা.০৩,'০৭; ব.'০৩,'০৮; চ.'০৩,'১১; সি.'০৫,'০৭,'০৯; কু.'০৭; ব.'০৮; দি. '১০; য.'১০,'১২; টেক্সটাইল' ০৫-০৬]

প্রমাণঃ মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু D।



$\therefore\ P.AD = Q.\,BD \Rightarrow P.(AB - BD) = Q.BD$

$\Rightarrow P.AB = (P+Q).BD \cdots\cdots$ (i)

ধরি, P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়া বিন্দুকে $AC = x$ দূরত্বে সরালে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু E হয়।

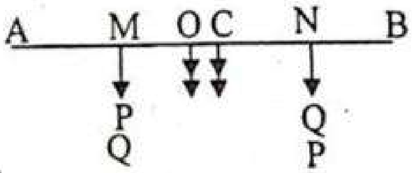
$\therefore\ P.CE = Q.\,BE \Rightarrow P.(BC - BE) = Q.BE \Rightarrow P.BC = (P+Q).BE \cdots$(ii)

$(i)-(ii) \Rightarrow P.(AB - BC) = (P+Q).(BD - BE) \Rightarrow P.AC = (P+Q).DE$

$\Rightarrow Px = (P+Q).DE$ $\therefore$ লব্ধি সরে যাবে, $DE = \dfrac{Px}{P+Q}$ দূরত্বে।

2(g) ACB একটি সরলরেখার AC ও BC অংশের মধ্যবিন্দুতে কার্যরত P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি C বিন্দুগামী। দেখাও যে, P ও Q বল দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধি AB এর মধ্যবিন্দুগামী হবে।

প্রমাণঃ মনে করি, AC ও BC অংশের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N .তাহলে,



$AM = MC = \dfrac{1}{2}AC$ এবং $CN = BN = \dfrac{1}{2}BC$.

M ও N বিন্দুতে কার্যরত P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C।

$\therefore\ P.MC = Q.CN = Q.(MN - MC) \Rightarrow (P+Q).MC = Q.MN \cdots \cdots (i)$

ধরি, বল দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু O ।

$\therefore\ Q.MO = P.NO = P.(MN - MO) \Rightarrow (P+Q).MO = P.MN \cdots \cdots (ii)$

$(i) + (ii) \Rightarrow (P+Q).(MC + MO) = (P+Q).MN \Rightarrow AM + MO = MN, [\because MC = AM]$

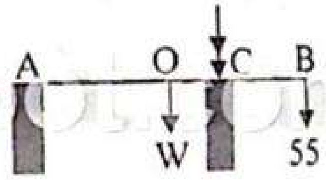
$\Rightarrow AO = MC + CN = \frac{1}{2}(AC + BC) \Rightarrow AO = \frac{1}{2}AB$

$\therefore$ লব্ধি AB এর মধ্যবিন্দুগামী হবে।

3(a) 12 m দীর্ঘ একটি ভারী সুষম বীম দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে সুস্থিত আছে। একটি খুঁটি একপ্রান্তে এবং অন্যটি ঐ প্রান্ত হতে 8 m দূরে অবস্থিত। বীমটিকে না উল্টিয়ে 55 kg ওজনের একটি লোক কোন রকমে অপর প্রান্ত পর্যন্ত যেতে পারে। বীমটির ওজন নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, AB = 12 m সুষম বীমটি A ও C বিন্দুতে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে সুস্থিত আছে এবং এর ওজন W কেজি, যা AB এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়া করে। তাহলে, AO = OB = 6 m, AC = 8 m.

বীমটিকে না উল্টিয়ে লোকটি B প্রান্তে কোন রকমে গেলে A প্রান্তে অবস্থিত খুঁটির সাথে বীমটির সংযোগ বিচ্ছিন্ন হয়ে যায় এবং একমাত্র C তে অবস্থিত খুঁটির উপর স্থির থাকে । সুতরাং O ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত ওজনদ্বয়ের লব্ধি C তে ক্রিয়া করবে।



$\therefore\ W \times OC = 55 \times BC \Rightarrow W \times (AC - AO) = 55 \times (AB - AC)$

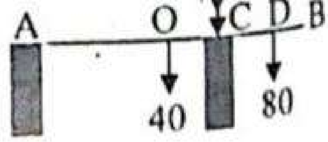
$\Rightarrow W \times (8-6) = 55 \times (12-8) \Rightarrow 2W = 55 \times 4 \Rightarrow W = 110$

$\therefore$ বীমটির ওজন 110 কেজি।

3(b) 6m দীর্ঘ এবং 40 kg ওজনের AB তক্তাটি দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে স্থাপিত। খুঁটি দুইটির একটি A প্রান্তে এবং অন্যটি B প্রান্ত থেকে 2m ভিতরে অবস্থিত। তক্তাটি না উল্টিয়ে 80 kg ওজনের একটি লোক B প্রান্তের দিকে কতদূর যেতে পারবে?

সমাধানঃ মনে করি, AB = 6 m সুষম তক্তা A ও C বিন্দুতে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে স্থাপিত এবং এর ওজন AB এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়া করে। তাহলে, AO = OB = 3 m, BC = 2 m, OC = 1 m.

ধরি, তক্তাটি না উল্টিয়ে লোকটি B প্রান্তের দিকে সর্বাধিক D বিন্দু পর্যন্ত যেতে পারে। D তে পৌঁছামাত্র A প্রান্তে অবস্থিত খুঁটির সাথে তক্তাটির সংযোগ বিচ্ছিন্ন হয়ে যায় এবং একমাত্র C তে অবস্থিত খুঁটির উপর স্থির থাকে । সুতরাং O ও D বিন্দুতে ক্রিয়ারত ওজনদ্বয়ের লব্ধি C তে ক্রিয়া করে ।



$\therefore\ 40 \times OC = 80 \times CD \Rightarrow CD = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2} \times 1\ m = 0{\cdot}5\ m$

$\therefore\ OD = OC + CD = (1 + 0{\cdot}5)\ m = 1{\cdot}5\ m$

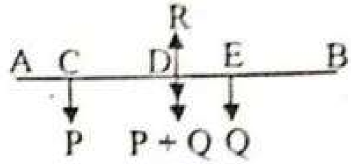
$\therefore$ তক্তাটি না উল্টিয়ে লোকটি তক্তার মধ্যবিন্দু থেকে 1·5 m যেতে পারবে।

3(c) একটি দন্ডের একপ্রান্ত হতে 2, 8, 6 মিটার দূরত্বে অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q ও R মানের তিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। দন্ডটি সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, P : Q : R = 1 : 2 : 3

[ঢা.'০২; য.'০৫,'০৯; সি.'০৬,'১১; ব.'০৭]

প্রমাণঃ মনে করি, AB দন্ডের C, D, E বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের বলত্রয় ক্রিয়া করে যেখানে $AC = 2$ m, $AD = 6$ m এবং $AE = 8$ m.

যেহেতু দন্ডটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং P, Q বল দুইটি সদৃশ ধরলে এদের লব্ধি $(P+Q)$ বলটি R এর সমান ও বিপরীতমুখী ক্রিয়াশীল হবে।



$\therefore\ R = P + Q \cdots\cdots$(i) এবং $P.CD = Q.DE$

$\Rightarrow \frac{P}{DE} = \frac{Q}{CD} = \frac{P+Q}{CD+DE} = \frac{R}{CE}$, [(i) দ্বারা]

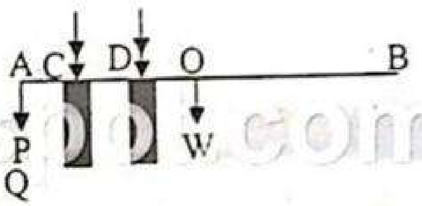
$\Rightarrow \frac{P}{AE-AD} = \frac{Q}{AD-AC} = \frac{R}{AE-AC} \Rightarrow \frac{P}{8-6} = \frac{Q}{6-2} = \frac{R}{8-2} \Rightarrow \frac{P}{2} = \frac{Q}{4} = \frac{R}{6}$

$\therefore\ P : Q : R = 1 : 2 : 3$

3(d) একটি ভারী সমরূপ দন্ডের একপ্রান্তে P ওজন স্থাপন করলে ঐ প্রান্ত হতে a দূরত্বে একটি অবলম্বনের উপর দন্ডটি অনুভূমিকভাবে সুস্থিত থাকে। একই বিন্দুতে Q ওজন স্থাপন করলে সুস্থিতির জন্য অবলম্বনকে b দূরত্বে স্থাপন করতে হয়। দেখাও যে, দন্ডের ওজন $= \frac{Pa-Qb}{b-a}$ এবং দন্ডের দৈর্ঘ্য $= \frac{2ab(P-Q)}{Pa-Qb}$.

প্রমাণঃ মনে করি, AB সমরূপ দন্ডের ওজন W, যা AB এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়া করে।

ধরি, A প্রান্তে P ওজন স্থাপন করলে ঐ প্রান্ত হতে $AC = a$ দূরত্বে একটি অবলম্বনের উপর দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে সুস্থিত থাকে। তাহলে, A ও O বিন্দুতে ক্রিয়ারত ওজনদ্বয়ের লব্ধি C তে ক্রিয়া করবে।



$\therefore\ P \times AC = W \times OC = W \times (AO - AC) \Rightarrow Pa = W(AO - a)$

$\Rightarrow Pa - Wa = W \times AO \cdots$(i)

আবার, A প্রান্তে Q ওজন স্থাপন করলে দন্ডটির সুস্থিতির জন্য, $AD = b$ দূরত্বে অবলম্বনটিকে স্থাপন করতে হয়। তাহলে, A ও O বিন্দুতে ক্রিয়ারত ওজনদ্বয়ের লব্ধি D তে ক্রিয়া করবে।

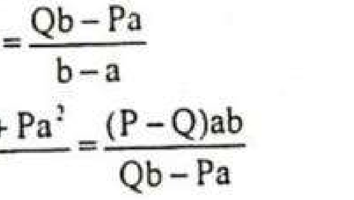
$\therefore\ P \times AD = W \times OD = W \times (AO - AD) \Rightarrow Qb = W(AO - b) \Rightarrow Qb - Wb = W \times AO \cdots$(ii)

(i) ও (ii) থেকে, $Pa - Wa = Qb - Wb \Rightarrow (b-a)W = Qb - Pa \Rightarrow W = \frac{Qb-Pa}{b-a}$

(i) থেকে পাই, $AO = \frac{Pa}{W} - a = Pa \times \frac{b-a}{Qb-Pa} - a = \frac{Pab - Pa^2 - Qab + Pa^2}{Qb-Pa} = \frac{(P-Q)ab}{Qb-Pa}$

$\therefore$ দন্ডটির দৈর্ঘ্য $= 2 \times AO = \frac{2ab(P-Q)}{Qb-Pa}$ এবং ওজন $= \frac{Qb-Pa}{b-a}$ (Proved)

4(a) P ও Q দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। একই বিন্দুতে যথাক্রমে $(P+R)$ ও $(Q+S)$ বল দুইটি ক্রিয়া করলে, লব্ধি একই বিন্দুগামী হয়। প্রমাণ কর যে, $PS = QR$.



প্রমাণঃ মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং $P > Q$।

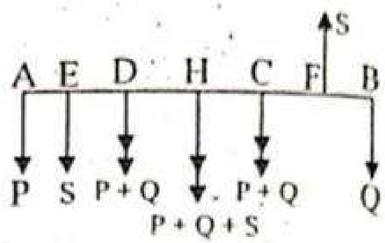
তাহলে, ১ম ক্ষেত্রে, $P.\ AO = Q.\ BO \cdots \cdots (i)$

২য় ক্ষেত্রে, $(P + R).\ AO = (Q + S).BO \cdots (ii)$

$(ii) - (i) \Rightarrow R.AO = S.BO \cdots \cdots (iii)$

$(i) \div (iii) \Rightarrow \dfrac{P}{R} = \dfrac{Q}{S}$ $\therefore PS = QR$ (Proved)

4(b) P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের সাথে একই সমতলে b দূরত্বে S মানের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল প্রয়োগ করা হল। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধি $\dfrac{bS}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। [চ.'০১; কু.'০৩; ঢা.'১১; রা.'১১]



প্রমাণঃ মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত যথাক্রমে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q এর লব্ধি (P + Q), যার ক্রিয়াবিন্দু C এবং E ও F বিন্দুতে S মানের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে, যেখানে EF = b.

C ও E তে কার্যরত সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি (P + Q + S) এর ক্রিয়াবিন্দু H হলে, $(P + Q) \times CH = S \times EH \cdots \cdots (i)$

আবার, H ও F তে কার্যরত বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি $(P + Q + S - S) = P + Q$ এর ক্রিয়াবিন্দু D হলে,

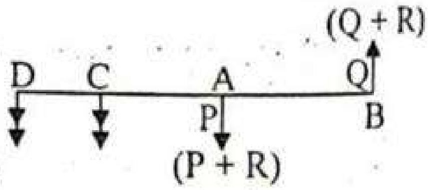
$(P + Q + S) \times HD = S \times DF \Rightarrow (P + Q) \times HD = (DF - HD) \times S = HF \times S \cdots \cdots (ii)$

$(i) + (ii) \Rightarrow (P + Q) \times (CH + DH) = (EH + HF) \times S \Rightarrow (P + Q) \times CD = EF \times S = bS$

$\therefore$ লব্ধি সরে যাবে $CD = \dfrac{bS}{P+Q}$ দূরত্ব।

4(c) P ও Q (P > Q) দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটি বিন্দুতে কার্যরত আছে। যদি এদেরকে একই পরিমাণে বৃদ্ধি করা হয়, তবে দেখাও যে, নতুন লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু P হতে আরও দূরে সরে যাবে।

[চ.'০২,'০৭,'১৩; রা.'০৪,'০৮; ঢা.'০৮; কু.'০৯,'১৩; ব.'১১,'১৩; সি.'১৩]



প্রমাণঃ মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত P ও Q বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং P ও Q কে R পরিমাণে বৃদ্ধি করা হলে (P + R) ও (Q + R) এর লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore\ P.AC = Q.BC = Q.(AC + AB) \Rightarrow (P - Q).AC = Q.AB \cdots (i)$

এবং $(P + R).AD = (Q + R).\ BD = (Q + R).(AD + AB)$

$\Rightarrow (P + R - Q - R).AD = (Q + R).AB \Rightarrow (P - Q).AD = (Q + R).AB \cdots \cdots (ii)$

$(ii) \div (i) \Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{Q+R}{Q} = (1 + \dfrac{R}{Q}) > 1,\ [\because Q > 0,\ R > 0]$

$\Rightarrow AD > AC$. $\therefore$ নতুন লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু P হতে আরও দূরে সরে যাবে।

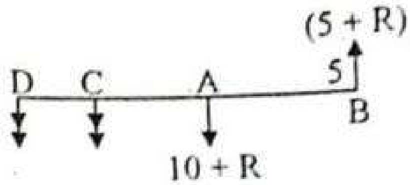
4(d) 20 cm ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে যথাক্রমে 10 ডাইন ও 5 ডাইন দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। এদের প্রত্যেকের সাথে সমপরিমাণ কত বল যোগ করলে লব্ধি 10 cm দূরে সরে যাবে?

প্রমাণঃ মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত 10 ডাইন ও 5 ডাইন বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে

যখন AB = 20 cm.

$\therefore$ $10.AC = 5.BC \Rightarrow 2\ AC = (AC + AB)$

$\Rightarrow AC = AB = 20$ cm



ধরি, উভয় বলের সাথে R ডাইন যোগ করলে (10 + R) ডাইন ও (5 + R) ডাইন বল দুইটির লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে যখন CD = 10 cm.

$\therefore$ $AD = AC + CD = (20 + 10)$ cm = 30 cm, $BD = AB + AD = (20 + 30)$ cm = 50 cm

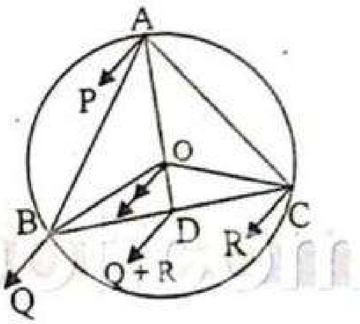
এবং $(10 + R).AD = (5 + R).\ BD \Rightarrow (10 + R).30 = (5 + R).\ 50 \Rightarrow 30 + 3R = 25 + 5R$

$\Rightarrow 2R = 5 \Rightarrow R = 2\cdot5$ $\therefore$ $2\cdot5$ ডাইন বল যোগ করতে হবে।

5(a) P, Q, R তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে Δ ABC এর কৌণিক বিন্দু A, B, C তে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা যদি ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র গামী হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে,

(i) **$P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$** [ঢা.'০১; ব.'১৩; য.'১৩]

(ii) **$P : Q : R = a \cos A : b \cos B : c \cos C$** [চ.'১০]



প্রমাণঃ মনে করি, Δ ABC এর পরিকেন্দ্র O এবং বর্ধিত AO, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। B ও C তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল Q ও R এর লব্ধি (Q + R) বলটি BC এর কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধি (P + Q + R) এর ক্রিয়াবিন্দু O এবং এর একটি অংশক বল P এর ক্রিয়াবিন্দু A বলে, অপর অংশক বল (Q + R) এর ক্রিয়াবিন্দু অবশ্যই BC ও AD এর ছেদবিন্দু D হবে।

$$\therefore\ Q\times BD = R\times CD \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} = \frac{CD/OD}{BD/OD} = \frac{\sin COD/\sin OCD}{\sin BOD/\sin OBD}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{\sin COD}{\sin BOD},\ [\because \Delta OBC \text{ এ}, OB = OC\ \therefore \angle OBD = \angle OCD\ ]$$

$$= \frac{\sin(\pi - \angle AOC)}{\sin(\pi - \angle AOB)} = \frac{\sin AOC}{\sin AOB} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C},\ [\because \text{কেন্দ্রঃস্থ কোণ বৃত্তঃস্থ কোণের দ্বিগুণ।}]$$

$\Rightarrow Q : R = \sin 2B : \sin 2C$. অনুরূপ, $P : Q = \sin 2A : \sin 2B$

$\therefore$ $P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$ (Proved)

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $\dfrac{Q}{R} = \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{\Delta ADC}{\Delta ADB} = \dfrac{\Delta ODC}{\Delta ODB} = \dfrac{\Delta ADC - \Delta ODC}{\Delta ADB - \Delta ODB} = \dfrac{\Delta AOC}{\Delta AOB}$

[$\because$ Δ ADC ও Δ ADB এর উচ্চতা এবং Δ ODC ও Δ ODB এর উচ্চতা সমান।]

$$\Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{(OA\times OC \sin AOC)/2}{(OA\times OB \sin AOB)/2} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C} \Rightarrow Q : R = \sin 2B : \sin 2C .$$

$\therefore$ $P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C \cdots$(i) (Proved)

অনুরূপ, $P : Q = \sin 2A : \sin 2B$

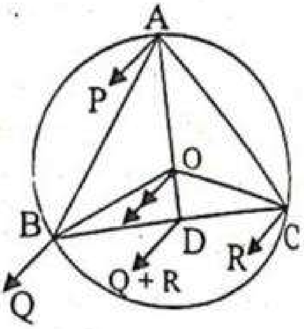
(i) $\Rightarrow$ $P : Q : R = 2 \sin A \cos A : 2 \sin B \cos B : 2 \sin C \cos C$

$\Rightarrow P : Q : R = \frac{a}{2r}\cos A : \frac{b}{2r}\cos B : \frac{c}{2r}\cos C$, যেখানে ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ r ।

$\therefore\ P : Q : R = a\cos A : b\cos B : c\cos C$ (Proved)

5(b) ΔABC এর পরিকেন্দ্র **O**। একটি বল **P, AO** বরাবর ক্রিয়ারত। দেখাও যে, **B** ও **C** বিন্দুতে **P** এর সমান্তরাল উপাংশদ্বয়ের অনুপাত **sin 2B : sin 2C.** [য.'০২,'০৪,'০৬; সি.'০৩; ঢা.'০৯; রা.'১২; ব.'১২; দি.'১২]

প্রমাণঃ মনে করি, বর্ধিত AO, ΔABC এর BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, P বলটি AD বরাবর ক্রিয়া করবে এবং D বিন্দুকে P বলটির ক্রিয়াবিন্দু বিবেচনা করা যেতে পারে।



ধরি, B ও C তে P এর সমান্তরাল উপাংশ যথাক্রমে Q ও R অর্থাৎ B ও C তে ক্রিয়ারত Q ও R এর লব্ধি P যা D তে ক্রিয়া করে।

$$\therefore\ Q\times BD = R\times CD \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} = \frac{CD/OD}{BD/OD} = \frac{\sin COD/\sin OCD}{\sin BOD/\sin OBD}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{\sin COD}{\sin BOD},\ [\because \Delta OBC \text{ এ}, OB = OC\ \therefore \angle OBD = \angle OCD]$$

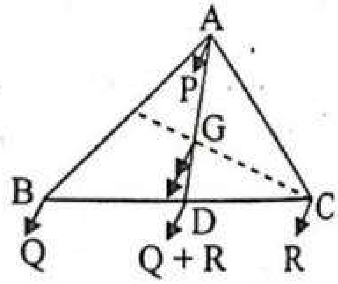
$$= \frac{\sin(\pi - \angle AOC)}{\sin(\pi - \angle AOB)} = \frac{\sin AOC}{\sin AOB} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C} \Rightarrow Q : R = \sin 2B : \sin 2C$$

$\therefore$ B ও C বিন্দুতে P এর সমান্তরাল উপাংশদ্বয়ের অনুপাত $\sin 2B : \sin 2C$

5(c) P, Q, R তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে Δ **ABC** এর কৌণিক বিন্দু **A, B, C** তে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা যদি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রে কার্যরত হলে, প্রমাণ কর যে, **P = Q = R**

[কু.'০৪,'১০; ব.'০৪,'১০; ঢা.'০৮; সি.'০৮]

প্রমাণঃ মনে করি, ΔABC এর ভরকেন্দ্রে G এবং বর্ধিত AG, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। B ও C তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল Q ও R এর লব্ধি (Q + R) বলটি BC এর কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধি (P + Q + R) এর ক্রিয়াবিন্দু G এবং এর একটি অংশক বল P এর ক্রিয়াবিন্দু A বলে, অপর অংশক বল (Q + R) এর ক্রিয়াবিন্দু অবশ্যই BC ও AD এর ছেদবিন্দু D হবে।



$\therefore\ Q\,.\,BD = R\,.\,CD \Rightarrow Q = R$, যেহেতু AD মধ্যমা অর্থাৎ BD = CD

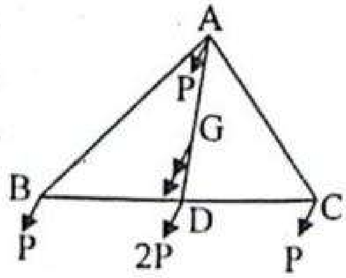
অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $P = R.\ \therefore P = Q = R$ (Proved)

5(d) দেখাও যে, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুতে তিনটি সমান সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি সর্বদা ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রগামী হবে।

প্রমাণঃ মনে করি, ΔABC এর শীর্ষবিন্দু A, B, C তে P মানের তিনটি সমান সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে। এখন B ও C তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল P ও P এর লব্ধি (P + P) = 2P বলটি BC বাহুস্থ D বিন্দুতে ক্রিয়া করলে,

$P.\,BD = P.\,CD \Rightarrow BD = CD.\ \therefore$ D, BC এর মধ্যবিন্দু।

আবার, A ও D তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল P ও 2P এর লব্ধি AD



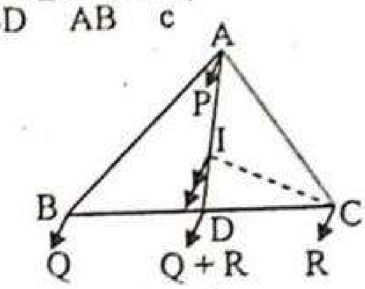
রেখাস্থ G বিন্দুতে ক্রিয়া করলে, $P.\,AG = 2P.GD \Rightarrow \dfrac{AG}{GD} = \dfrac{2}{1}$ অর্থাৎ G বিন্দুটি AD মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে। সুতরাং বলত্রয়ের লব্ধি G তে ক্রিয়া করে যা ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

5(e) P, Q, R সদৃশ সমান্তরাল বল তিনটি যথাক্রমে ΔABC এর কৌণিক বিন্দু A, B, C তে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা যদি ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রগামী হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $\dfrac{P}{a} = \dfrac{Q}{b} = \dfrac{R}{c}$ [রা.'০৭; সি.'০৮,'১২; য.'১১]

(ii) $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$ [রা.'০০; সি.'০৫; দি.'১৩]

প্রমাণঃ মনে করি, ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র I এবং বর্ধিত AI, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে $AB : AC$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। $\therefore \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{b}{c}$.



এখন B ও C তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল Q ও R এর লব্ধি $(Q + R)$ বলটি BC এর কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধি $(P + Q + R)$ এর ক্রিয়াবিন্দু I এবং এর একটি অংশক বল P এর ক্রিয়াবিন্দু A বলে, অপর অংশক বল $(Q + R)$ এর ক্রিয়াবিন্দু অবশ্যই BC ও AD এর ছেদবিন্দু D হবে।

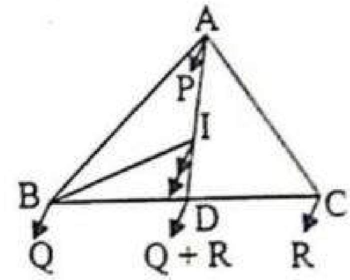
$\therefore\ Q.\,BD = R.\,CD \Rightarrow \dfrac{Q}{R} = \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{b}{c} \Rightarrow \dfrac{Q}{b} = \dfrac{R}{c}$. অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায়, $\dfrac{P}{a} = \dfrac{Q}{c}$

$\therefore \dfrac{P}{a} = \dfrac{Q}{b} = \dfrac{R}{c} \Rightarrow \dfrac{P}{2r\sin A} = \dfrac{Q}{2r\sin B} = \dfrac{R}{2r\sin C}$, যেখানে ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ r।

$\therefore\ P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$ (Showed)

5(f) P, Q, R সদৃশ সমান্তরাল বল তিনটি যথাক্রমে ΔABC এর শীর্ষ A, B, C তে ক্রিয়ারত এবং এদের মান a, b, c এর সমানুপাতিক। দেখাও যে, এদের লব্ধি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়া করবে। [ঢা.'০২]

প্রমাণঃ মনে করি, $P = ak$, $Q = bk$ ও $R = ck$ সদৃশ সমান্তরাল বলত্রয় যথাক্রমে ΔABC এর শীর্ষ A, B ও C তে ক্রিয়ারত। B ও C তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল Q ও R এর লব্ধি $(Q + R)$ বলটি BC বাহুস্থ D বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে,



$\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{R}{Q} = \dfrac{kc}{kb} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{AB}{AC} \dots$ (i). $\therefore$ AD রেখা A কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

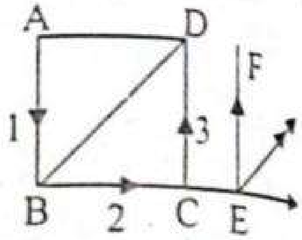
আবার, A ও D তে ক্রিয়ারত P ও $(Q + R)$ সদৃশ সমান্তরাল বল দুইটির লব্ধি $(P + Q + R)$ বল AD রেখাস্থ I বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে,

$\dfrac{AI}{DI} = \dfrac{Q+R}{P} = \dfrac{bk+ck}{ak} = \dfrac{b+c}{a} \dots\dots$ (ii)

(i) থেকে, $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AB+AC}{BD+CD} = \dfrac{c+b}{BC} = \dfrac{b+c}{a} \Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AI}{DI}$ [(ii)) দ্বারা]

$\therefore$ BI রেখা B কোণের সমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং I বিন্দুটি A ও B কোণের সমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু অর্থাৎ ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র। অতএব, বলত্রয়ের লব্ধি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়া করে।

6(a) ABCD বর্গের AB, BC, CD বরাবর কার্যরত যথাক্রমে 1, 2, 3 মানের তিনটি বলের লব্ধি নির্ণয় কর।

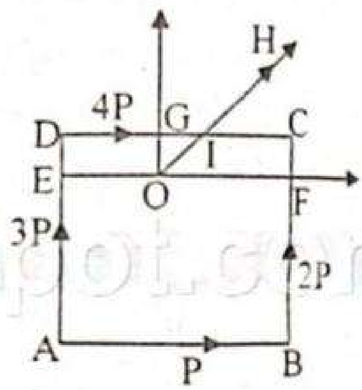


সমাধানঃ AB ও CD বরাবর দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি $(3-1) = 2$, যা EF || CD বরাবর ক্রিয়াশীল এবং তার ক্রিয়ারেখা বর্ধিত BC কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

বলের স্থানান্তরবিধি অনুসারে BC বরাবর ক্রিয়ারত 2 মানের বলটির ক্রিয়াবিন্দু E ধরা যায়। তাহলে E বিন্দুতে সমকোণে ক্রিয়ারত 2, 2 সমান বলের লব্ধির মান $\sqrt{(2)^2+(2)^2} = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধির মান $2\sqrt{2}$ ।

6(b) ABCD বর্গের AB, BC. AD ও DC বাহু বরাবর যথাক্রমে 1, 2, 3 ও 4 এর সমানুপাতিক বলগুলো কার্যরত আছে। এদের লব্ধির মান ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর, যখন বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য 2 সে.মি.।



সমাধানঃ ধরি, AB, BC. AD ও DC বরাবর ক্রিয়াশীল বলগুলোর মান যথাক্রমে P, 2P, 3P, 4P যেখানে AB = BC = AD = DC = 2 cm ।

AB ও DC বরাবর দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি $(P + 4P) = 5P$, যা EF || AB বরাবর ক্রিয়াশীল এবং তার ক্রিয়ারেখা AD কে E বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যে,

$P.AE = 4P.DE \Rightarrow AD - DE = 4DE \Rightarrow 5.DE = AD = 2$ cm

$\Rightarrow DE = \frac{2}{5}$ cm

আবার, BC ও AD বরাবর দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি $(2P + 3P) = 5P$, যা OG || AD বরাবর ক্রিয়াশীল এবং তার ক্রিয়ারেখা DC কে G বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যে,

$3P.\,DG = 2P.CG \Rightarrow 3.DG = 2(DC - DG) \Rightarrow 5.DG = 2 \times 2 \text{ cm} \Rightarrow DG = \frac{4}{5}$ cm

ধরি, EF ও OG রেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, OF ও OG বরাবর সমকোণে ক্রিয়ারত 5P, 5P মানের বলদ্বয়ের লব্ধির মান $\sqrt{(5P)^2+(5P)^2} = 5\sqrt{2}P$, যা $\angle GOF$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক OH বরাবর অর্থাৎ AC কর্ণের সমান্তরালে ক্রিয়া করবে। OH , DC কে I বিন্দুতে ছেদ করলে,

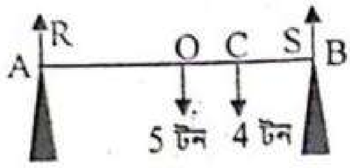
$DI = DG + GI = DG + OG = DG + DE = (\frac{4}{5}+\frac{2}{5})$ cm $= \frac{6}{5}$ cm , $CI = (2-\frac{6}{5})$ cm $= \frac{4}{5}$ cm

$\therefore \; DI : CI = \frac{6}{5} : \frac{4}{5} = 6 : 4 = 3 : 2$

$\therefore$ প্রদত্ত বলগুলোর লব্ধির মান $5\sqrt{2}$ এর সমানুপাতিক , যার ক্রিয়ারেখা AC এর সমান্তরাল এবং DC কে 3 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

1(a) 30 m দীর্ঘ এবং 5 টন ওজনের একটি সেতু দুই প্রান্তে দুইটি থামের উপর অবস্থিত। যদি 4 টন ওজনের একটি লরী সেতুটির একপ্রান্ত থেকে দুই তৃতীয়াংশ দূরত্বে এর উপর দাঁড়ায়, তবে থাম দুইটির উপর চাপ কত হবে?

সমাধান: মনে করি, AB = 30 m সেতুর মধ্যবিন্দু O তে এর ওজন ক্রিয়াশীল এবং 4 টন ওজনের লরীটি C বিন্দুতে সেতুর উপর দাঁড়ায়, যেখানে $AC = \frac{2}{3} \times 30\text{ m} = 20\text{ m}.\ \therefore BC = 10\text{ m}$



দুইটি থামের উপর চাপ তাদের প্রতিক্রিয়া বলের সমান ও বিপরীতমুখী। ধরি, A ও B প্রান্তের থামের প্রতিক্রিয়া বল যথাক্রমে R টন-ওজন ও S টন-ওজন।

A বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$R \times 0 - 5 \times AO - 4 \times AC + S \times AB = 0$ [∵ সেতুটি সাম্যাবস্থায় আছে।]

$= -5 \times 15 - 4 \times 20 + S \times 30 \Rightarrow S \times 30 = 75 + 80 = 155 \Rightarrow S = \frac{155}{30} = 5\frac{1}{6}$

আবার, B বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $R \times AB - 5 \times BO - 4 \times BC + S \times 0 = 0$

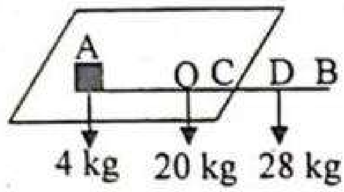
$\Rightarrow R \times 30 - 5 \times 15 - 4 \times 10 = 0 \Rightarrow R \times 30 = 75 + 40 = 115 \Rightarrow R = \frac{115}{30} = 3\frac{5}{6}$

∴ থাম দুইটির উপর চাপ $3\frac{5}{6}$ টন-ওজন ও $5\frac{1}{6}$ টন-ওজন।

1(b) 20 kg ওজনের 18 m লম্বা একখানা সুষম তক্তা একটি অনুভূমিক টেবিলের উপর স্থাপিত। টেবিলের বাইরে তক্তার অতিরেক 7 m। টেবিলের অপর প্রান্তে 4 kg ওজন স্থাপন করা আছে। 28 kg ওজনের একটি বালক টেবিলের কিনারা থেকে কতদূর পর্যন্ত নিরাপদে এর উপর দিয়ে হেঁটে যেতে পারবে?

সমাধান: মনে করি, AB = 18 m তক্তাটির ওজন 20 kg এর মধ্যবিন্দু O তে কার্যরত এবং টেবিলের বাইরে তক্তার অতিরেক BC = 7 m। তাহলে, $AO = BO = 9\text{ m}, OC = BO - BC = (9 - 7)\text{ m} = 2\text{ m}$.

টেবিলের A প্রান্তে 4 kg ওজন স্থাপন করে 28 kg ওজনের বালকটি টেবিলের কিনারা C থেকে D পর্যন্ত CD = x মি. নিরাপদে হেঁটে যেতে পারলে, ওজনগুলোর লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।



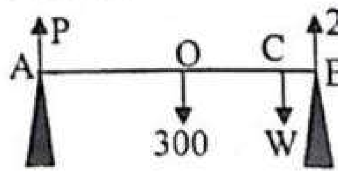
∴ C বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $4 \times AC + 20 \times CO - 28 \times CD = 0$

$\Rightarrow 28 \times CD = 4 \times 11 + 20 \times 2 = 44 + 40 \Rightarrow CD = \frac{88}{28} = 3$

∴ বালকটি টেবিলের কিনারা থেকে 3 মিটার পর্যন্ত নিরাপদে হেঁটে যেতে পারবে।

1(c) 12 m দীর্ঘ এবং 300 kg ওজনের AB সুষম তক্তার A ও B প্রান্তে দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে সুস্থিত রয়েছে। B প্রান্ত থেকে 1 m দূরে কত ওজন ঝুলালে খুঁটি দুইটির উপর চাপের অনুপাত 1 : 2 হবে?

সমাধান: মনে করি, তক্তার ওজন এর মধ্যবিন্দু O তে কার্যরত এবং B প্রান্ত থেকে BC = 1 m দূরে C বিন্দুতে W kg ওজন ঝুলালে, A ও B বিন্দুতে অবস্থিত খুঁটির উপর চাপ যথাক্রমে P kg-wt ও 2P kg-wt.



তাহলে, $AO = BO = 6\text{ m}$, $OC = (6-1)\text{ m} = 5\text{ m}$.

C বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $-P\times AC + 300\times CO + W\times 0 + 2P\times BC = 0$

$\Rightarrow -P\times 11 + 300\times 5 + 2P\times 1 = 0 \Rightarrow 9\times P = 300\times 5 \Rightarrow P = \dfrac{500}{3}$

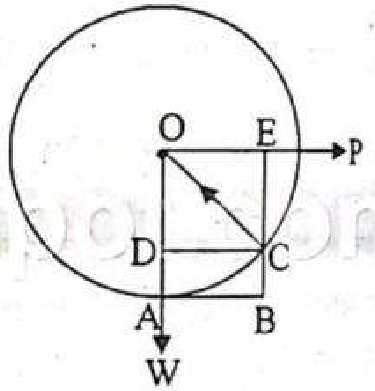
আবার, O বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $-P\times AO - W\times CO + 2P\times BO = 0$

$\Rightarrow -P\times 6 - W\times 5 + 2P\times 6 = 0 \Rightarrow 5\times W = 6\times P = 6\times \dfrac{500}{3} \Rightarrow W = 200$

$\therefore$ 200 kg ওজন ঝুলাতে হবে।

1(d) একটি যানবাহনের চাকার ওজন W এবং ব্যাসার্ধ 20 ইঞ্চি ; এর কেন্দ্রে অনুভূমিক ভাবে কমপক্ষে কি পরিমাণ বল প্রয়োগ করলে যানবাহনটি 10 ইঞ্চি উচ্চতা বিশিষ্ট একটি বাধা অতিক্রম করতে সক্ষম হবে? [বুয়েট'০৫-০৬]

সমাধানঃ মনে করি, প্রযুক্ত বলের পরিমাণ P এবং 20 ইঞ্চি ব্যাসার্ধ এবং O কেন্দ্র বিশিষ্ট চাকাটি A বিন্দুতে ভূমি এবং C বিন্দুতে $BC = 10$ ইঞ্চি বাধা স্পর্শ করে। C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত লম্ব চাকার ওজনের ক্রিয়ারেখা OA কে D বিন্দুতে এবং P বলের ক্রিয়ারেখাকে E বিন্দুতে ছেদ করে।



তাহলে, $OA = OC = 20$ ইঞ্চি, $CE = BE - BC = AO - BC$

$= (20-10)$ ইঞ্চি $= 10$ ইঞ্চি।

এবং $CD = \sqrt{CO^2 - DO^2} = \sqrt{20^2 - 10^2}$ ইঞ্চি $= 10\sqrt{3}$ ইঞ্চি

বাধা অতিক্রম করার জন্য C বিন্দুর সাপেক্ষে P এর মোমেন্ট W এর মোমেন্ট অপেক্ষা বৃহত্তর হবে (পরিমাণে)।

$\therefore P\times CE > W\times CD \Rightarrow P\times 10 > W\times 10\sqrt{3} \Rightarrow P > \sqrt{3}\,W$

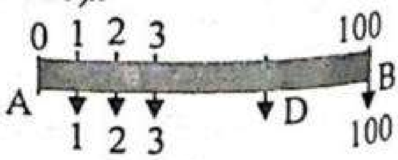
$\therefore$ কমপক্ষে $\sqrt{3}\,W$ বল প্রয়োগ করতে হবে।

1(e) একটি মিটার রূলের 1, 2, 3, ⋯ ⋯, 100 cm. মার্কে যথাক্রমে 1, 2, 3, ⋯ ⋯, 100 একক ওজন খাড়াভাবে ঝুলিয়ে দেয়া হয়েছে। মিটার রূলের ওজন অবজ্ঞা করা হলে কোন্ বিন্দুতে সেটা সুস্থিত থাকবে?

সমাধান ঃ ধরি, মিটার রুলটি AB এবং A প্রান্ত হতে x cm. দূরে D বিন্দুতে মিটার রুলটি সুস্থিত থাকে।

A বিন্দুর চারদিকে ওজন সমূহের মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$1\times 1 + 2\times 2 + 3\times 3 + \cdots\cdots + 100\times 100 = (1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + 100)x$



$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + 100^2 = \dfrac{100(100+1)}{2}x$

$\Rightarrow \dfrac{100(100+1)(2\times 100+1)}{6} = \dfrac{100(100+1)}{2}x \Rightarrow x = \dfrac{201}{3} = 67$

$\therefore$ A প্রান্ত অর্থাৎ ক্ষুদ্রতম ওজন ঝুলানো দিক হতে 67 cm. দূরে মিটার রুলটি সুস্থিত থাকে।

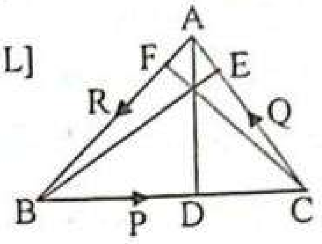
2(a) P , Q , R বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC , CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। যদি A, B, C বিন্দুগুলোর সাপেক্ষে বলগুলোর লব্ধির মোমেন্ট যথাক্রমে L, M, N হয় তবে দেখাও যে,

$P : Q : R = aL : bM : cN$ [চ.'০১,'১৩; রা.'০৪; সি.'০৮; য.'০৯,'১২; দি.'১১; কু.'১২; ব.'১৩]

প্রমাণ ঃ $AD \perp BC$, $BE \perp CA$ এবং $CF \perp AB$ অঙ্কন করি । ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ দ্বারা সূচিত করি।

তাহলে, $\Delta = \frac{1}{2} BC \times AD = \frac{1}{2} a \times AD \Rightarrow AD = \frac{2\Delta}{a}$. অনুরূপ, $BE = \frac{2\Delta}{b}$ এবং $CF = \frac{2\Delta}{c}$

A বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই,



$P \times AD + Q \times 0 + R \times 0 = L$, [$\because$ A বিন্দুর সাপেক্ষে বলগুলোর লব্ধির মোমেন্ট = L]

$\Rightarrow P \times \frac{2\Delta}{a} = L \Rightarrow P = \frac{aL}{2\Delta}$

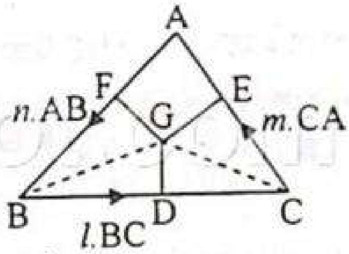
B ও C বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে অনুরূপভাবে পাই, $Q = \frac{bM}{2\Delta}$ এবং $R = \frac{cN}{2\Delta}$

$\therefore P : Q : R = \frac{aL}{2\Delta} : \frac{bM}{2\Delta} : \frac{cN}{2\Delta} = aL : bM : cL$ (Showed)

2(b) **ABC ত্রিভুজের BC , CA, AB বাহু বরাবর যথাক্রমে l.BC, m.CA, n. AB বল তিনটি ক্রিয়া করে। $l + m + n = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র দিয়ে যাবে।**

[সি.'০৪,'১১; রা.'০২; য.'০৩,'১৩; কু.'০৪; চ.'১১]

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রদত্ত বলগুলোর লব্ধি R এবং ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G ।
$GD \perp BC$, $GE \perp CA$ এবং $GF \perp AB$ অঙ্কন করি । ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ দ্বারা সূচিত করি। তাহলে,



$\Delta = 3 \Delta GBC = 3 \frac{1}{2} BC \times GD \Rightarrow GD = \frac{2\Delta}{3BC}$.

অনুরূপ, $GE = \frac{2\Delta}{3CA}$ এবং $GF = \frac{2\Delta}{3AB}$

ধরি, G বিন্দু থেকে লব্ধির ক্রিয়ারেখার দূরত্ব = d. তাহলে, G বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$l.BC \times GD + m.CA \times GE + n.AB \times GF = R \times d$

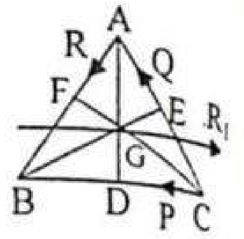
$\Rightarrow l.BC \times \frac{2\Delta}{3BC} + m.CA \times \frac{2\Delta}{3CA} + n.AB \times \frac{2\Delta}{3AB} = R \times d$

$\Rightarrow R \times d = \frac{2\Delta}{3}(l + m + n) = \frac{2\Delta}{3} \times 0 = 0$, [$\because l + m + n = 0$]

$\Rightarrow R \times d = 0$; কিন্তু বলগুলো ভারসাম্য সৃষ্টি করে না বলে $R \neq 0$ । $\therefore d = 0$ অর্থাৎ লব্ধি ভরকেন্দ্র দিয়ে যায়।

2(c) **ABC সমবাহু ত্রিভুজের CB, CA, AB বাহু বরাবর যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় ক্রিয়াশীল । এদের লব্ধি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রগামী এবং BC বাহুর সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{2}P = Q = R$** [ঢা.'০২; চ.'০৯]

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD, BE, CF মধ্যমা তিনটি G বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$ এবং $AD = BE = CF = h$ (ধরি)।



$\therefore\ GD = \frac{1}{3}AD = \frac{h}{3},\ AG = \frac{2}{3}AD = \frac{2h}{3}$

ধরি প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধি R_1, যা BC বাহুর সমান্তরাল।

এখন A বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $-P\times AD + Q\times 0 + R\times 0 = R_1\times AG$

$\Rightarrow -P\times h = R_1\times \frac{2h}{3} \Rightarrow \frac{P}{2} = -\frac{1}{3}R_1 \cdots\cdots$ (i)

B বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $P\times 0 + Q\times BE + R\times 0 = -R_1\times DG$

$\Rightarrow Q\times h = -R_1\times \frac{h}{3} \Rightarrow Q = -\frac{1}{3}R_1 \cdots\cdots$ (ii)

C বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $P\times 0 + Q\times 0 + R\times CF = -R_1\times DG$

$\Rightarrow R\times h = -R_1\times \frac{h}{3} \Rightarrow R = -\frac{1}{3}R_1 \cdots\cdots$ (iii)

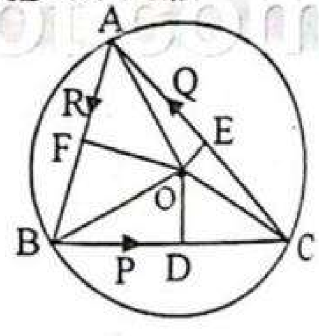
(i), (ii) ও (iii) হতে পাই, $\frac{P}{2} = Q = R$

2(d) P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র দিয়ে গেলে, প্রমাণ কর যে, $P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$

[ঢা.'০০,'১০; কু.'০০; রা.'০৫; ব.'১২]

প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O। $OD\perp BC$, $OE\perp AC$ এবং $OF\perp AB$ অঙ্কন করি।

তাহলে $BD = CD$ এবং $OA = OB = OC = r$ (পরিব্যাসার্ধ)



$\therefore\ \angle BOD = \angle COD = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(2A) = A$

$\therefore\ OD = OB\cos BOD = r\cos A$. তদ্রূপ, $OE = r\cos B$, $OF = r\cos C$

যেহেতু P, Q, R বলত্রয়ের লব্ধি পরিকেন্দ্রগামী, সুতরাং O এর সাপেক্ষে তাদের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি শূন্য।

$\therefore\ P\times OD + Q\times OE + R\times OF = 0$

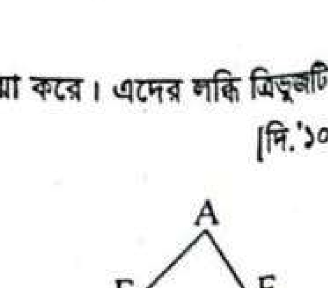
$\Rightarrow P\times r\cos A + Q\times r\cos B + R\times r\cos C = 0$

$\therefore\ P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$

2(e) P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র দিয়ে গেলে, দেখাও যে, $P + Q + R = 0$

[দি.'১০]

প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O. $OD\perp BC$, $OE\perp AC$ এবং $OF\perp AB$ অঙ্কন করি। তাহলে, $OD = OE = OF = r$ (অন্তঃব্যাসার্ধ)



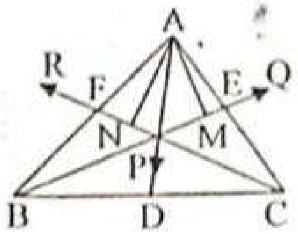
যেহেতু বলত্রয়ের লব্ধি অন্তঃকেন্দ্রগামী, সুতরাং O এর চতুর্দিকে মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি শূন্য।

$\therefore\ P\times OD + Q\times OE + R\times OF = 0 \Rightarrow P\times r + Q\times r + R\times r = 0$

$\Rightarrow r \times (P+Q+R) = 0$. কিন্তু $r \neq 0$, $\therefore P+Q+R=0$

3(a) কোনো ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয় থেকে অঙ্কিত মধ্যমা বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি বল সাম্যাবস্থা রক্ষা করলে প্রমাণ কর যে, বলগুলোর মান অনুসারী মধ্যমার দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক। [য.'০২]

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের AD, BE, CF মধ্যমা বরাবর ক্রিয়াশীল যথাক্রমে P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থা রক্ষা করে অর্থাৎ বলত্রয়ের লব্ধি শূন্য। $AM \perp BE$ এবং $AN \perp CF$ অঙ্কন করি।



A বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $P \times 0 + Q \times AM - R \times AN = 0$

$\Rightarrow Q \times AM = R \times AN \cdots$ (i)

যেহেতু প্রত্যেক মধ্যমা ত্রিভুজকে দুইটি সমান ত্রিভুজ-ক্ষেত্রে বিভক্ত করে,

$\therefore \ \Delta ABE = \frac{1}{2}\Delta ABC = \Delta ACF \Rightarrow \Delta ABE = \Delta ACF$

$\Rightarrow \frac{1}{2} BE \times AM = \frac{1}{2} CF \times AN \Rightarrow BE \times AM = CF \times AN \cdots$ (ii)

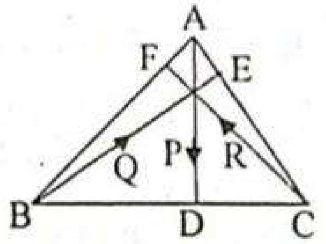
(i) ÷ (ii) $\Rightarrow \dfrac{Q}{BE} = \dfrac{R}{CF}$

B বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে অনুরূপভাবে পাই, $\dfrac{P}{AD} = \dfrac{R}{CF}$ $\therefore \dfrac{P}{AD} = \dfrac{Q}{BE} = \dfrac{R}{CF}$ অর্থাৎ বলগুলোর মান অনুসারী মধ্যমার দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক।

3(b) **ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দু হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে, প্রমাণ কর যে, P : Q : R = a : b : c** [ঢা.'০০; রা.'০১; ব.'০৮]

$$\mathbf{P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C}$$

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দু হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব AD, BE, CF বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। তাহলে বলগুলোর সমতলস্থ যেকোনো বিন্দুর চতুর্দিকে বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি শূন্য হবে।



এখন A বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$P \times 0 - Q \times AE + R \times AF = 0 \Rightarrow Q \times AE = R \times AF$

$\Rightarrow Q \times AB \cos A = R \times AC \cos A \Rightarrow Q \times c = R \times b \Rightarrow Q : R = b : c \cdots$ (i)

B বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে অনুরূপভাবে পাই, $P : R = a : c \cdots\cdots$ (ii)

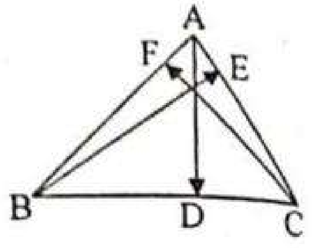
$\therefore$ (i) ও (ii) হতে পাই, $P : Q : R = a : b : c \cdots\cdots$(iii) (Proved)

(iii) হতে পাই, $P : Q : R = 2r \sin A : 2r \sin B : 2r \sin C$, যেখানে ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ r।

$\therefore P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$ (Proved)

3(c) তিনটি বল **ABC** ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব দ্বারা সূচিত এবং প্রত্যেক কৌণিক বিন্দুর চতুর্দিকে বলত্রয়ের মোমেন্টের সমষ্টি পৃথকভাবে শূন্য। দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমবাহু। [কু.'০১]

প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দু হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব AD, BE, CF দ্বারা সূচিত তিনটি বল। তাহলে A, B, C প্রত্যেক বিন্দুর সাপেক্ষে বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগাণিতীয় সমষ্টি পৃথকভাবে শূন্য।



$\therefore$ A বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$AD\times 0 - BE\times AE + CR\times AF = 0 \Rightarrow BE\times AE = CF\times AF$

$\Rightarrow AB\sin A\times AB\cos A = AC\sin A\times AC\cos A$

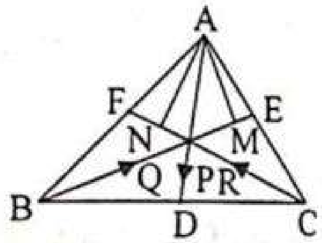
$\Rightarrow AB^2 = AC^2 \Rightarrow AB = AC$

B বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে অনুরূপভাবে পাই, $AB = BC$

$\therefore$ $AB = BC = CA$ অর্থাৎ ΔABC সমবাহু।

3(d) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোতে কোণের সমদ্বিখণ্ডক বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

প্রমাণ : মনে করি, A, B, C কোণের সমদ্বিখণ্ডক AD, BE, CF বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। তাহলে বলগুলোর সমতলস্থ যেকোন বিন্দুর সাপেক্ষে বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগাণিতীয় সমষ্টি শূন্য হবে। A বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই,



$P\times 0 + Q\times AM - R\times AN = 0$, যখন $AM\perp BE$, $AN\perp CF$.

$\Rightarrow Q\times AB\sin\frac{B}{2} = R\times AC\sin\frac{C}{2}$

$\Rightarrow Q\times 2r\sin C\sin\frac{B}{2} = R\times 2r\sin B\sin\frac{C}{2}$, যেখানে ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ r ।

$\Rightarrow Q\times 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2} = R\times 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

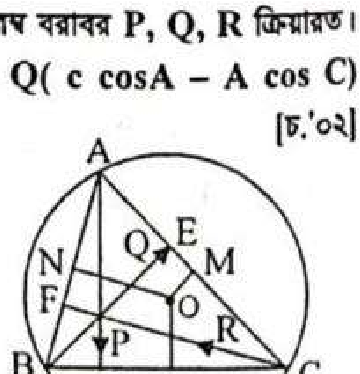
$\Rightarrow Q\cos\frac{C}{2} = R\cos\frac{B}{2} \Rightarrow Q : R = \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

অনুরূপ দেখানো যায়, $P : Q = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2}$ $\therefore P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

3(e) ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দু হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বরাবর P, Q, R ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রগামী হলে দেখাও যে, $P(b\cos C - c\cos B) + Q(c\cos A - A\cos C) + R(a\cos B - b\cos A) = 0$

[চ.'০২]

প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O। $AD\perp BC$, $BE\perp AC$, $CF\perp AB$, $OL\perp BC$, $OM\perp AC$, এবং $ON\perp AB$ অঙ্কন করি। তাহলে, P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে AD, BE, CF বরাবর ক্রিয়াশীল।



এখন $2DL = DL + DL = BL - BD + CD - CL$

$= CD - BD$, [এখানে, $BL = CL$]

$\Rightarrow 2DL = AC\cos C - AB\cos B = b\cos C - c\cos B$

অনুরূপ, $2ME = CE - AE = a\cos C - c\cos A$, $2\,FN = AF - BF = b\cos A - a\cos B$

যেহেতু বলত্রয়ের লব্ধি পরিকেন্দ্রগামী, সুতরাং O এর সাপেক্ষে তাদের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি শূন্য।

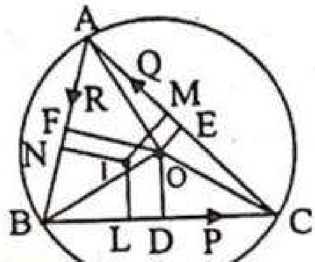
$\therefore\; P\times DL - Q\times ME - R\times FN = 0$

$\Rightarrow P\times\frac{1}{2}(b\cos C - c\cos B) - Q\times\frac{1}{2}(a\cos C - c\cos A) - R\times\frac{1}{2}(b\cos A - a\cos B) = 0$

$\Rightarrow P(b\cos C - c\cos B) + Q(c\cos A - A\cos C) + R(a\cos B - b\cos A) = 0$

4(a) **P , Q , R** বলত্রয় যথাক্রমে **ABC** ত্রিভুজের **BC , CA, AB** বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। যদি তাদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র দিয়ে যায়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{P}{\cos B - \cos C} = \frac{Q}{\cos C - \cos A} = \frac{P}{\cos A - \cos B}$$ [য.'০৯]



প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র যথাক্রমে I ও O. $IL\perp BC$, $IM\perp AC$, $IN\perp AB$, $OD\perp BC$, $OE\perp AC$ ও $OF\perp AB$ অঙ্কন করি। তাহলে, $IL = IM = IN = r_1$ (অন্তঃব্যাসার্ধ), $BD = CD$ এবং $OA = OB = OC = r$ (পরিব্যাসার্ধ)

$\therefore\; \angle BOD = \angle COD = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(2A) = A$

$\therefore\; OD = OB\cos BOD = r\cos A$. অনুরূপ, $OE = r\cos B$, $OF = r\cos C$

যেহেতু বলত্রয়ের লব্ধির ক্রিয়ারেখা অন্তঃকেন্দ্র দিয়ে যায়, সুতরাং I এর সাপেক্ষে বলগুলোর মোমেন্টের নিয়ে পাই,

$P\times OL + Q\times OM + R\times ON = 0 \Rightarrow P\times r_1 + Q\times r_1 + R\times r_1 = 0 \Rightarrow r_1\times(P+Q+R) = 0$.

কিন্তু $r_1 \neq 0$. $\therefore\; P + Q + R = 0 \cdots\cdots$ (i)

যেহেতু বলত্রয়ের লব্ধির ক্রিয়ারেখা পরিকেন্দ্র দিয়ে যায়, সুতরাং O এর সাপেক্ষে বলগুলোর মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$P\times OD + Q\times OE + R\times OF = 0 \Rightarrow P\times r\cos A + Q\times r\cos B + R\times r\cos C = 0$

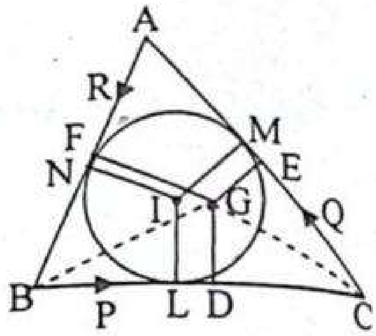
$\therefore\; P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0 \cdots\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) বজ্রগুণন করে পাই, $\frac{P}{\cos B - \cos C} = \frac{Q}{\cos C - \cos A} = \frac{R}{\cos A - \cos B}$ (Proved)

4(b) **P , Q , R** বলত্রয় যথাক্রমে **ABC** ত্রিভুজের **BC , CA, AB** বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র এবং অন্তঃকেন্দ্রগামী হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{a(b-c)}} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{b(c-a)}} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{c(a-b)}}$ [য.'০৪]

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র যথাক্রমে G ও I . $GD\perp BC$, $GE\perp AC$, $GF\perp AB$, $IL\perp BC$, $IM\perp AC$ ও $IN\perp AB$ অঙ্কন করি। তাহলে, $IL = IM = IN = r$ (অন্তঃব্যাসার্ধ)

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ দ্বারা সূচিত করলে,



$\Delta = 3\Delta GBC = 3\frac{1}{2}BC\times GD = \frac{3}{2}a\times GD \Rightarrow GD = \frac{2\Delta}{3a}$.

অনুরূপ, $GE = \frac{2\Delta}{3b}$ এবং $GF = \frac{2\Delta}{3c}$

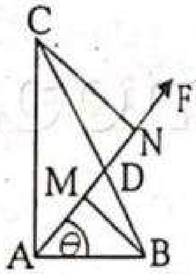
যেহেতু বলত্রয়ের লব্ধির ক্রিয়ারেখা ভরকেন্দ্র দিয়ে যায়, সুতরাং G বিন্দুর চতুর্দিকে বলগুলোর মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$$P\times GD + Q\times GE + R\times GF = 0 \Rightarrow P\times\frac{2\Delta}{3a} + Q\times\frac{2\Delta}{3b} + R\times\frac{2\Delta}{3c} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{P}{a}+\frac{Q}{b}+\frac{R}{c} = 0 \therefore bcP + caQ + abR = 0 \cdots (i)$$

আবার, যেহেতু বলত্রয়ের লব্ধির ক্রিয়ারেখা অন্তঃকেন্দ্র দিয়ে যায়, সুতরাং I এর সাপেক্ষে বলগুলোর মোমেন্টে নিয়ে পাই,
$P\times OL + Q\times OM + R\times ON = 0 \Rightarrow P\times r + Q\times r + R\times r = 0 \Rightarrow r\times(P+Q+R) = 0$.
কিন্তু $r \neq 0$. $\therefore P + Q + R = 0 \cdots\cdots (ii)$

5(a) ABC ত্রিভুজের BC , CA, AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13, 12, 5 একক। A, B, C বিন্দুর সাপেক্ষে F বলের মোমেন্ট যথাক্রমে 0, –25, 144 একক হলে, F বলের মান ও দিক নির্ণয় কর। [কু.'০০,'১৩;চ.'০৪]



সমাধানঃ দেওয়া আছে, AB = 5 একক, BC = 13 একক এবং AC = 12 একক।

যেহেতু, $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 = BC^2$ $\therefore \angle BAC = 90°$.

আবার, A বিন্দুর চতুর্দিকে অশূন্য F বলের মোমেন্ট 0 এবং B ও C বিন্দুর চতুর্দিকে বলটির মোমেন্ট বিপরীত চিহ্ন হওয়ায় F বলটি A বিন্দুগামী এবং তার ক্রিয়ারেখার বিপরীত দিকে B ও C বিন্দু থাকবে। ধরি, বলটির ক্রিয়ারেখা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে এবং $\angle BAD = \theta$

B ও C থেকে F বলের ক্রিয়ারেখার উপর BM ও CN লম্ব অঙ্কন করি।

তাহলে, $BM = AB\sin\theta = 5\sin\theta$ এবং $CN = AC\sin(90° - \theta) = 12\cos\theta$

এখন, B বিন্দুর চতুর্দিকে F বলের মোমেন্ট $= -F\times BM$ এবং C বিন্দুর চতুর্দিকে F বলের মোমেন্ট $= F\times CN$

প্রশ্নমতে, $-F\times BM = -25 \Rightarrow F\times 5\sin\theta = 25 \Rightarrow F\sin\theta = 5\cdots\cdots(i)$ এবং

$F\times CN = 144 \Rightarrow F\times 12\cos\theta = 144 \Rightarrow F\cos\theta = 12 \cdots\cdots (ii)$

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow F^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow F = 13$

$$(i) \div (ii) \Rightarrow \tan\theta = \frac{5}{12} = \frac{AB}{AC} = \tan ACB \Rightarrow \theta = \angle ACB = 90° - \angle ABC$$

$\Rightarrow \angle BAD + \angle ABD = 90°$ $\therefore \angle ADB = 90°$ অর্থাৎ $AD \perp BC$

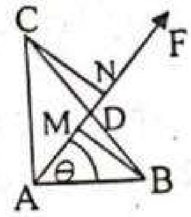
$\therefore$ F বলের মান 13 একক এবং তার ক্রিয়ারেখা BC এর উপর লম্ব।

5(b) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5, 4, 3 একক। A, B, C বিন্দুর চতুর্দিকে কোন একটি বল F এর মোমেন্ট যথাক্রমে 0, – 12, 16 একক হলে, F এর মান, দিক ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর। [রা.'০৩,'০৫]

সমাধানঃ দেওয়া আছে, AB = 3 একক, BC = 5 একক এবং AC = 4 একক।

যেহেতু , $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = BC^2$ $\therefore \angle BAC = 90°$.

আবার, A বিন্দুর চতুর্দিকে অশূন্য F বলের মোমেন্ট 0 এবং B ও C বিন্দুর চতুর্দিকে বলটির মোমেন্ট বিপরীত চিহ্ন হওয়ায় F বলটি A বিন্দুগামী এবং তার ক্রিয়ারেখার বিপরীত দিকে B ও C বিন্দু থাকবে। ধরি, বলটির ক্রিয়ারেখা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে এবং $\angle BAD = \theta$ B ও C থেকে F বলের ক্রিয়ারেখার উপর BM ও CN লম্ব অঙ্কন করি।



তাহলে, $BM = AB \sin\theta = 3\sin\theta$ এবং $CN = AC\sin(90° - \theta) = 4\cos\theta$

এখন, B বিন্দুর চতুর্দিকে F বলের মোমেন্ট $= -F \times BM$ এবং C বিন্দুর চতুর্দিকে F বলের মোমেন্ট $= F \times CN$

প্রশ্নমতে, $-F \times BM = -12 \Rightarrow F \times 3\sin\theta = 12 \Rightarrow F\sin\theta = 4 \cdots\cdots$(i) এবং

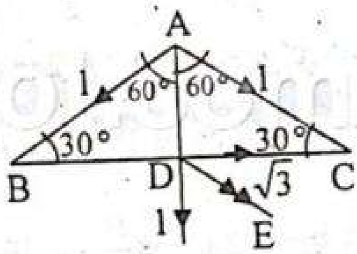
$F \times CN = 16 \Rightarrow F \times 4\cos\theta = 16 \Rightarrow F\cos\theta = 4 \cdots\cdots$ (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow F^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow F = 4\sqrt{2}$

$(i) \div (ii) \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{4}{4} = 1 = \tan 45° \Rightarrow \theta = 45°$

$\therefore$ F বলের মান $4\sqrt{2}$ একক এবং তার ক্রিয়ারেখা AB এর সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে।

6. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\angle A = 120°$ এবং AB, AC ও BC বরাবর 1, 1, $\sqrt{3}$ kg ওজনের বলত্রয় কার্যরত। দেখাও যে, এদের লব্ধি BC কে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং AC এর সমান্তরাল।



প্রমাণ ঃ A বিন্দুতে 120° কোণে AB ও AC বরাবর ক্রিয়াশীল 1 ও 1 কেজি ওজনের সমান বলদ্বয়ের লব্ধি $= \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \times 1 \times 1\cos 120^0} = \sqrt{1 + 1 - 1}$ $= 1$ kg-wt , যা $\angle A = 120°$ কোণেরসমদ্বিখণ্ডক AD বরাবর ক্রিয়াশীল।

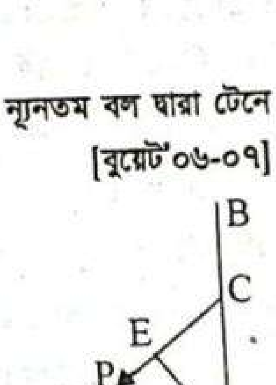
$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 60°$.

আবার, $\angle ABD = \angle ACD = 30°$. $\therefore \angle ADB = 90°$ অর্থাৎ $AD \perp BC$

এখন D বিন্দুতে সমকোণে AD ও DC বরাবর কার্যরত 1 ও $\sqrt{3}$ কেজি ওজনের বলদ্বয়ের লব্ধি BC এর সাথে θ কোণে DE বরাবর ক্রিয়াশীল হলে, $\tan\theta = \dfrac{1 \times \sin 90^0}{\sqrt{3} + 1 \times \cos 90^0} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30° \Rightarrow \angle CDE = \theta = 30°$.

$\therefore DE \,||\, AC$. সুতরাং বলত্রয়ের লব্ধি BC কে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং AC এর সমান্তরাল।

7(a) 40 m দীর্ঘ একটি রশির এক প্রান্ত একটি উল্লম্ব খুঁটির কোন্ স্থানে বাঁধলে অপর প্রান্তে ন্যূনতম বল দ্বারা টেনে খুঁটিকে সহজে উল্টে ফেলা যাবে। [বুয়েট'০৬-০৭]



সমাধানঃ ধরি, AB খুঁটির C বিন্দুতে রশি বেঁধে এর অপর প্রান্ত O বিন্দুতে একটি লোক P বল প্রয়োগ করে খুঁটি উল্টে ফেলার চেষ্টা করছে। ধরি, $\angle AOC = \theta$ এবং $AE \perp OC$। A বিন্দুর চতুর্দিকে P এর মোমেন্ট যত বেশি হবে খুঁটিও তত সহজে উল্টে পড়বে।

এখন A বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট $= P \times AE = P \times OA\sin\theta = P \times OC\cos\theta\sin\theta$

$= \dfrac{1}{2} P \times OC \sin 2\theta$ এর মান বেশি হবে যখন

$$\sin 2\theta = 1 = \sin 90^\circ \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

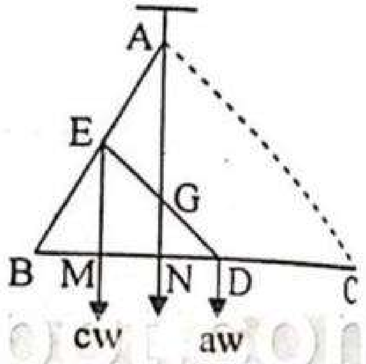
$\therefore\ AC = OC \sin 45^\circ = 40 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{ m} = 20\sqrt{2}\text{ m}$

$\therefore$ ভূমি থেকে $20\sqrt{2}$ m উপরে রশিটি বাঁধতে হবে।

7(b) একটি সুষম ধাতব দন্ড দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজের CA বাহুকে অপসারণ করে A বিন্দুতে ঝুলান হলে স্থিরাবস্থায় BC বাহু ভূ-সমান্তরাল থাকে। প্রমাণ কর যে, $\sin C = \sqrt{2}\sin\dfrac{B}{2}$ [কুয়েট'০৩-০৪]

প্রমাণ ঃ মনে করি, AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও D এবং $AN \perp BC$. AN ও DE পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে। দন্ডের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ওজন w হলে D ও E তে কার্যরত aw ও cw ওজনদ্বয়ের লব্ধি $(a + c)w$, যা G বিন্দুতে AN বরাবর ক্রিয়াশীল হবে।

এখন B বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই,



$$-cw \times BM - aw \times BD = -(a + c)w \times BN$$

$$\Rightarrow c \times BE\cos B + a \times \frac{a}{2} = (a + c) \times AB\cos B$$

$$\Rightarrow c \times \frac{c}{2}\cos B + \frac{a^2}{2} = (a + c) \times c\cos B$$

$$\Rightarrow c^2\cos B + a^2 = 2ac\cos B + 2c^2\cos B$$

$$\Rightarrow a^2 = 2ac\cos B + c^2\cos B = a^2 + c^2 - b^2 + c^2\cos B \Rightarrow b^2 = c^2(1 + \cos B) = c^2 \times 2\cos^2\frac{B}{2}$$

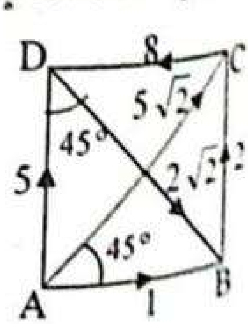
$\Rightarrow b = \sqrt{2}\, c\cos\dfrac{B}{2} \Rightarrow 2R\sin B = \sqrt{2} \times 2R\sin C\cos\dfrac{B}{2}$, যেখানে R , ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ।

$$\Rightarrow 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = \sqrt{2}\sin C\cos\frac{B}{2} \Rightarrow \sin C = \sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\ \text{(Proved)}$$

প্রশ্নমালা VIII E

1(a) ABCD বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 cm । 1, 2, 8, 5, $5\sqrt{2}$ এবং $2\sqrt{2}$ এককের বলগুলো যথাক্রমে AB, BC, CD, DA, AC এবং DB বরাবর ক্রিয়া করে। এ বলগুলো দ্বারা গঠিত যুগলের মোমেন্ট নির্ণয় কর। [রু.'০৮]

সমাধান ঃ AC বরাবর কার্যরত $5\sqrt{2}$ একক বলটির AB বরাবর লম্বাংশ $= 5\sqrt{2}\cos 45^\circ = 5$ একক এবং AD বরাবর লম্বাংশ $= 5\sqrt{2}\sin 45^\circ = 5$ একক।



তদ্রূপ, DB বরাবর কার্যরত $2\sqrt{2}$ একক বলটির DA বরাবর লম্বাংশ $= 2\sqrt{2}\cos 45^\circ = 2$ একক এবং DC বরাবর লম্বাংশ $= 2\sqrt{2}\sin 45^\circ = 2$ একক।

$\therefore$ AB বরাবর ক্রিয়ারত মোট বলের পরিমাণ $= (1 + 5) = 6$ একক।

DA বরাবর ক্রিয়ারত মোট বলের পরিমাণ $= (-5 + 5 + 2) = 2$ একক।

CD বরাবর ক্রিয়ারত মোট বলের পরিমাণ $= (8 - 2) = 6$ একক।

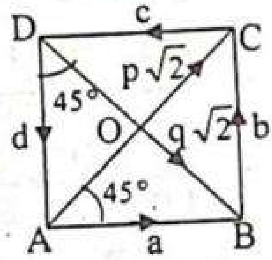
এখন AB ও CD বরাবর ক্রিয়ারত 6, 6 এককের বল দুইটি যুগল গঠন করে, যার মোমেন্ট $G_1 = 6 \times 10$ অর্থাৎ 60 একক। আবার, DA ও BC বরাবর ক্রিয়ারত 2, 2 এককের বল দুইটি যুগল গঠন করে, যার মোমেন্ট $G_2 = 2 \times 10$ অর্থাৎ 20 একক।

এ যুগল দুইটি একত্রে একটি লব্ধি যুগল গঠন করে, যার মোমেন্ট $= G_1 + G_2 = (60 + 20) = 80$ একক।

1(b) ABCD বর্গের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 2 একক। a, b, c, d বলগুলো একইক্রমে AB, BC, CD, DA বাহু বরাবর এবং $p\sqrt{2}$, $q\sqrt{2}$ বল দুইটি যথাক্রমে AC ও DB কর্ণ দুইটি বরাবর ক্রিয়া করছে। $p + q = c - a$ এবং $p - q = d - b$ হলে দেখাও যে, বলগুলো $(a + b + c + d)$ মোমেন্ট বিশিষ্ট যুগলের সমতুল্য। [সি.'০২; ঢা.'০৭]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $AB = BC = CD = DA = 2$ একক, $p + q = c - a$ এবং $p - q = d - b$

$\therefore\ 2p = c - a + d - b$ এবং $2q = c - a - d + b$



ধরি, কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে $AO = BO = CO = DO = AB \sin 45° = 2 \times 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ একক।

A বিন্দুর চতুর্দিকে বলগুলোর মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি

$$= a \times 0 + d \times 0 + p\sqrt{2} \times 0 + b \times AB + c \times AD - q\sqrt{2} \times AO$$
$$= 2b + 2c - 2q = 2b + 2c - c + a + d - b = a + b + c + d$$

B বিন্দুর চতুর্দিকে বলগুলোর মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি

$$= a \times 0 + b \times 0 + q\sqrt{2} \times 0 - p\sqrt{2} \times BO + c \times BC + d \times AB$$
$$= -2p + 2c + 2d = -c + a - d + b + 2c + 2d = a + b + c + d$$

অনুরূপ C বিন্দুর চতুর্দিকে বলগুলোর মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি

$$= b \times 0 + c \times 0 + p\sqrt{2} \times 0 + q\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 2a + 2d$$
$$= 2q + 2a + 2d = c - a - d + b + 2a + 2d = a + b + c + d$$

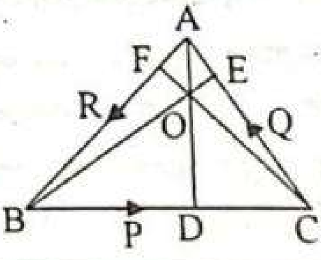
যেহেতু A, B, C তিনটি অসমরেখ বিন্দুর চতুর্দিকে বলগুলোর মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি সমান (ধ্রুবক), সুতরাং বলগুলো একটি যুগল গঠন করে। অতএব, বলগুলো $(a + b + c + d)$ মোমেন্ট বিশিষ্ট যুগলের সমতুল্য।

2(a) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু দ্বারা যথাক্রমে P, Q, R মানের বল ক্রিয়া করে। এরা একটি যুগলের সমতুল্য হলে, দেখাও যে, $P : Q : R = a : b : c$.

প্রমাণঃ $AD \perp BC$, $BE \perp CA$, $CF \perp AB$ অঙ্কন করি। ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ দ্বারা সূচিত করি। তাহলে,

$BC \times AD = CA \times BE = AB \times CF = 2\Delta$

এখন A বিন্দুর চতুর্দিকে বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= P \times AD + Q \times 0 + R \times 0 = P \times AD$



অনুরূপ, B এবং C বিন্দুর চতুর্দিকে বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি যথাক্রমে $Q \times BE$ এবং $R \times CF$.

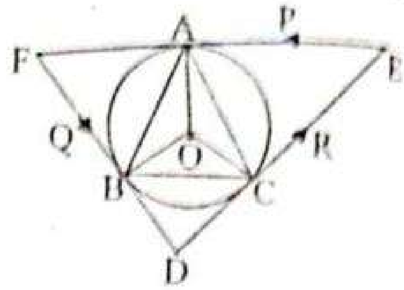
যেহেতু বলত্রয় একটি যুগলের সমতুল্য, সুতরাং বলগুলোর সমতলে যেকোনো বিন্দুর চতুর্দিকে এদের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি ধ্রুবক।

$\therefore\ P \times AD = Q \times BE = R \times CF$

$\Rightarrow P\times\frac{2\Delta}{BC}=Q\times\frac{2\Delta}{CA}=R\times\frac{2\Delta}{AB}\Rightarrow\frac{P}{a}=\frac{Q}{b}=\frac{R}{c}\quad\therefore P:Q:R=a:b:c.$

2(b) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ে ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের স্পর্শক বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বল তিনটি একটি যুগলের সমতুল্য হলে, দেখাও যে, P : Q : R = sin 2A: sin 2B : sin 2C. [য.'০১,'০৭; রা.'১১]

প্রমাণঃ মনে করি, ΔABC এর পরিকেন্দ্র O এবং P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে A, B, C শীর্ষবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক EF, FD, DE বরাবর ক্রিয়াশীল। তাহলে, $OA\perp EF, OB\perp FD, OC\perp DE$.



$\therefore\ \angle D=\pi-\angle BOC=\pi-2A$. তদ্রূপ, $\angle E=\pi-2B$ এবং $\angle F=\pi-2C$

যেহেতু ΔDEF এর বাহু বরাবর ক্রিয়ারত বলত্রয় একটি যুগলের সমতুল্য, সুতরাং বলত্রয় এর অনুসঙ্গী বাহুর দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক।

$\therefore\ \frac{P}{EF}=\frac{Q}{FD}=\frac{R}{DE}\Rightarrow\frac{P}{2r\sin D}=\frac{Q}{2r\sin E}=\frac{R}{2r\sin F}$, যেখানে r, ΔDEF এর পরিব্যাসার্ধ।

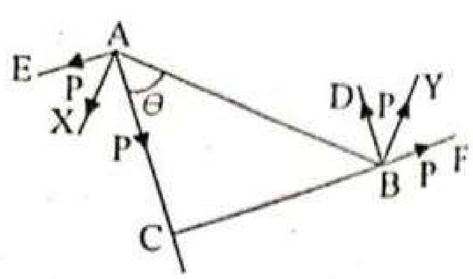
$\Rightarrow\frac{P}{\sin(\pi-2A)}=\frac{Q}{\sin(\pi-2B)}=\frac{R}{\sin(\pi-2C)}\Rightarrow\frac{P}{\sin 2A}=\frac{Q}{\sin 2B}=\frac{R}{\sin 2C}$

$\therefore\ P:Q:R=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C.$

3. G মোমেন্ট বিশিষ্ট একটি যুগল গঠনকারী বলদ্বয় A ও B বিন্দুতে ক্রিয়া করে। বলের ক্রিয়ারেখা দুইটিকে এক সমকোণে ঘুরালে H মোমেন্ট বিশিষ্ট একটি যুগল গঠন করে। প্রমাণ কর যে, বল দুইটি AB এর উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করলে তারা $\sqrt{G^2+H^2}$ মোমেন্ট বিশিষ্ট একটি যুগল গঠন করবে।

প্রমাণ : মনে করি, AC ও BD বরাবর ক্রিয়ারত যুগল গঠনকারী বলদ্বয় P ও P। $BC\perp AC$ অঙ্কন করি। ধরি, $\angle BAC=\theta$। তাহলে, যুগলের মোমেন্ট $G=P\times BC=P\times AB\sin\theta\cdots\cdots$ (i)

বলের ক্রিয়ারেখা দুইটি এক সমকোণে ঘুরে AE ও BF বরাবর ক্রিয়ারত হলে যুগলের মোমেন্ট $H=P\times AC=P\times AB\cos\theta\cdots$ (ii)



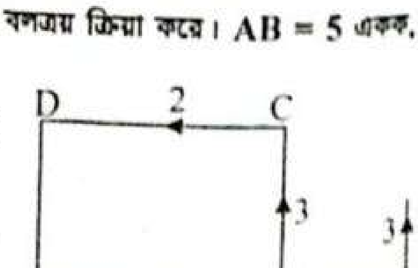
বল দুইটি AB এর উপর লম্ব AX ও BY বরাবর ক্রিয়া করলে যুগলের মোমেন্ট $=P\times AB$

$(i)^2+(ii)^2\Rightarrow G^2+H^2=P^2\times AB^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$\therefore\ \sqrt{G^2+H^2}=P\times AB$; যা AB এর উপর ক্রিয়াশীল বল দুইটি দ্বারা গঠিত যুগলের মোমেন্টের সমান।

4(a) ABCD আয়তক্ষেত্রের AB, BC, CD বাহু বরাবর 2, 3, 2 মানের বলত্রয় ক্রিয়া করে। AB = 5 একক, BC = 4 একক হলে এদের লব্ধির মান ও ক্রিয়া রেখা নির্ণয় কর।

সমাধান : ABCD আয়তক্ষেত্রের AB ও CD বরাবর ক্রিয়াশীল 2, 2 মানের বলদ্বয় (2, 4) যুগল গঠন করে।



B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল 3 মানের বল ও (2. 4) যুগল একত্রে একটি একক বলের সমতুল্য যা 3 মানের বলের সমান ও সমান্তরাল এবং B বিন্দু হতে BF

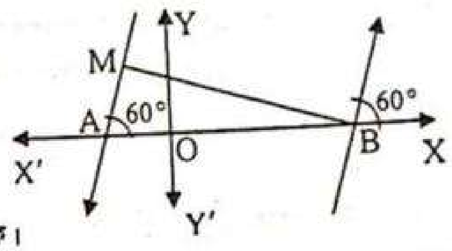
$= \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$ একক দূরত্বে F বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। তাহলে, $AF = AB + BF = (5 + \frac{8}{3})$ একক $= \frac{23}{3}$ একক

এবং $AF : BF = \frac{23}{3} : \frac{8}{3} = 23 : 8$

$\therefore$ প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধি 3 একক যা BC বাহুর সমান্তরাল বরাবর ক্রিয়াশীল এবং AB বাহুকে 23 : 8 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

4(b) $20\sqrt{3}$ একক মানের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল একটি অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত ঘূর্ণন সৃষ্টিকারী যুগল গঠন করে। xy-সমতলে অবস্থিত এবং x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণে আনত বল দুইটি যদি **A (–1, 0)** ও **B (3, 0)** বিন্দুতে কার্যরত হয়, তবে যুগলটির মোমেন্ট নির্ণয় কর।

সমাধান : B বিন্দু হতে A বিন্দুগামী বলের ক্রিয়ারেখার উপর BM লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে, $AB = |3 - (-1)| = 4$ একক,

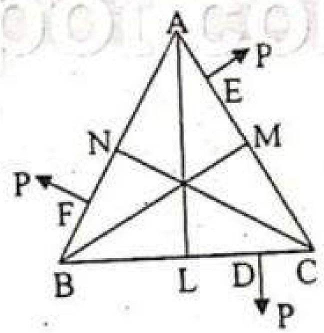


$BM = AB \sin 60° = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ একক।

$\therefore$ যুগলটির মোমেন্ট $= 20\sqrt{3} \times BM = 20\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 120$ একক।

5. ABC সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য **a** একক। **D, E, F** বিন্দু যথাক্রমে **BC, CA, AB** বাহুকে **5 : 1** অনুপাতে বিভক্ত করে। **P** এর সমান তিনটি বল **D, E, F** বিন্দুতে বাহুগুলোর উপর লম্বভাবে বহির্মুখে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, তারা **Pa** মোমেন্ট বিশিষ্ট একটি যুগল গঠন করে।

সমাধান : $AL \perp BC$, $BM \perp AC$ এবং $CN \perp AB$ অঙ্কন করি। ABC সমবাহু ত্রিভুজ বলে L, M, N যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু।



$\therefore BL = CL = CM = AM = AN = BN = a/2$

প্রশ্নমতে, $\frac{BD}{CD} = \frac{5}{1} \Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{CD}{1} = \frac{BD + CD}{5+1} = \frac{BC}{6} = \frac{a}{6}$

$\therefore BD = \frac{5a}{6}$, $CD = \frac{a}{6}$. তদ্রূপ, $CE = AF = \frac{5a}{6}$, $AE = BF = \frac{5a}{6}$.

এখন, $DL = ME = NE = CL - CD = \frac{a}{2} - \frac{a}{6} = \frac{a}{3}$

B বিন্দুর চতুর্দিকে প্রদত্ত বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= -P \times BD - P \times ME + P \times BF$

$$= -P\left(\frac{5a}{6} + \frac{a}{3} - \frac{a}{6}\right) = -Pa$$

C বিন্দুর চতুর্দিকে প্রদত্ত বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= P \times CD - P \times CE - P \times FN$

$$= P\left(\frac{a}{6} - \frac{5a}{6} - \frac{a}{3}\right) = -Pa$$

তদ্রূপ, A বিন্দুর চতুর্দিকে প্রদত্ত বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= -Pa$

∴ তিনটি অসমরেখ বিন্দুর চতুর্দিকে বলত্রয়ের মোমেন্ট ধ্রুবক। সুতরাং তারা একটি যুগলের সমতুল্য যার মোমেন্টের মান = Pa একক।

6 (a) 3P এবং 2P বলদ্বয়ের লব্ধি R, প্রথম বল দ্বিগুণ করলে লব্ধির পরিমানও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ হবে – [DU 12-13]

A. 110^0 B. 120^0 C. 135^0 D. 150^0

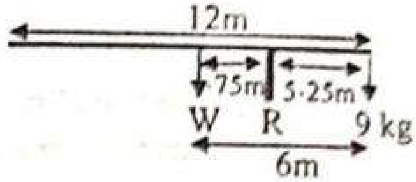
সমাধানঃ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α হলে, $R^2 = 9P^2 + 4P^2 + 2.3P.2P\cos\alpha = 13P^2 + 12P^2\cos\alpha$

এবং $4R^2 = 36P^2 + 4P^2 + 2.6P.2P\cos\alpha \Rightarrow 4R^2 = 40P^2 + 24P^2\cos\alpha \Rightarrow R = 10P^2 + 6P^2\cos\alpha$

$\therefore\ 10P^2 + 6P^2\cos\alpha = 13P^2 + 12P^2\cos\alpha \Rightarrow 6\cos\alpha = -3 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}\ \therefore\ \alpha = 120^0$

6(b) 12 m লম্বা একটি ভারী সুষম দন্ডের এক প্রান্তে 9 kg ওজন ঝুলানো আছে। উক্ত প্রান্ত থেকে 5·25 m দূরে যদি একটি খুঁটির উপর দন্ডটি ভূমির সমান্তরালে অবস্থান করে তবে দন্ডটির ওজন হবে – [BUET 12-13]

A. 47·25 kg B. 61 kg C. 63 kg D. 65 kg



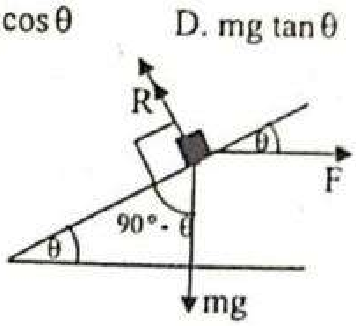
সমাধানঃ সমান্তরাল বলের সূত্র হতে, $0.75W = 9 \times 5.25$

$\Rightarrow\ W = \frac{9 \times 5.25}{0.75} = 63$ kg

6(c) অনুভূমিকের সাথে θ কোণে হেলানো একটি মসৃণ তলে অবস্থিত m ভরের একটি ছোট বস্তু P এর উপর F পরিমাণ আনুভূমিক বল প্রয়োগ করা হলে F বলটি P বস্তুকে কেবলমাত্র সাম্যাবস্থায় রাখতে সমর্থ হয়। তাহলে F এর মান হলো – [RUET 10-11]

A. $mg\cos^2\theta$ B. $mg\sin^2\theta$ C. $mg\cos\theta$ D. $mg\tan\theta$

সমাধানঃ লামির সূত্র হতে পাই,



$$\frac{F}{\sin(180^0 - \theta)} = \frac{mg}{\sin(90^0 + \theta)} \Rightarrow \frac{F}{\sin\theta} = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$\therefore\ F = mg\tan\theta$

7. P, Q , R তিনটি বল।

(a) P, Q এর ক্ষুদ্রতম লব্ধি R হলে, P, Q ও R এর মাধ্যে একটি সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর এবং P, Q এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

(b) একটি কণার উপর কার্যরত P, Q , R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে এবং Q , R এর মধ্যবর্তী কোণ 135^0 হলে P, Q ও R এর মাধ্যে একটি সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর।

(c) P, Q , R বল তিনটি সদৃশ সমান্তরাল যথাক্রমে ΔABC এর কৌণিক বিন্দু A, B, ,C তে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা যদি ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রগামী হয়, তবে দেখাও যে, P : Q: R = sinA : sinB : sinC

সমাধান: (a) মনে করি, P, Q এর মধ্যবর্তী কোণ α.

$\therefore\ R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha = (P-Q)^2 + 2PQ(1+\cos\alpha) = (P-Q)^2 + 4PQ\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$4PQ\cos^2\frac{\alpha}{2} = 0$ হলে, R ক্ষুদ্রতম হবে এবং সেক্ষেত্রে $R^2 = (P-Q)^2 \Rightarrow R = |P-Q|$; ইহাই নির্ণেয় সম্পর্ক।

এখন, $4PQ\cos^2\frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \pi$

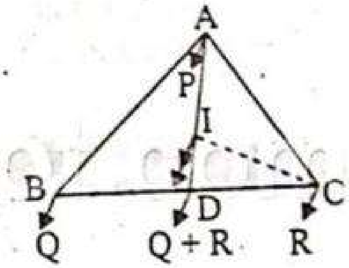
$\therefore$ R ক্ষুদ্রতম হলে প্রদত্ত বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ π.

(b) আমরা জানি, একটি বিন্দুতে কার্যরত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে এদের যেকোনো দুইটি বলের লব্ধির মান তৃতীয়টির সমান ও বিপরীতমুখী ক্রিয়াশীল হবে। সুতরাং, 135^0 কোণে কার্যরত Q ও R বলের লব্ধির মান P এর সমান হবে।

$\therefore\ P^2 = Q^2 + R^2 + 2QR\cos 135^0 = R^2 + 2QR\cos(180^0 - 45^0)$

$\Rightarrow P^2 = R^2 + 2QR(-\cos 45^0) = R^2 - 2QR(\frac{1}{\sqrt{2}})$

$\therefore\ P^2 = R^2 - \sqrt{2}\,QR$; ইহাই নির্ণেয় সম্পর্ক।



(c) প্রমাণঃ মনে করি, ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র I এবং বর্ধিত AI, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে AB : AC অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। $\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$.

এখন B ও C তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল Q ও R এর লব্ধি $(Q+R)$ বলটি BC এর কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধি $(P+Q+R)$ এর ক্রিয়াবিন্দু I এবং এর একটি অংশক বল P এর ক্রিয়াবিন্দু A বলে, অপর অংশক বল $(Q+R)$ এর ক্রিয়াবিন্দু অবশ্যই BC ও AD এর ছেদবিন্দু D হবে।

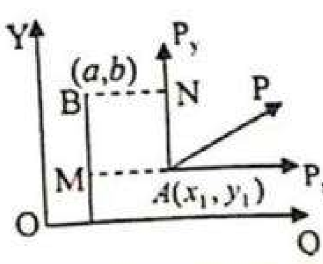
$\therefore\ Q.BD = R.CD \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$. অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায়, $\frac{P}{a} = \frac{Q}{c}$

$\therefore\ \frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c} \Rightarrow \frac{P}{2r\sin A} = \frac{Q}{2r\sin B} = \frac{R}{2r\sin C}$, যেখানে ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ r ।

$\therefore\ P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$ (Showed)

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

একটি বিন্দুর সাপেক্ষে একটি বলের মোমেন্টের বৈশ্লেষিক বর্ণনাঃ



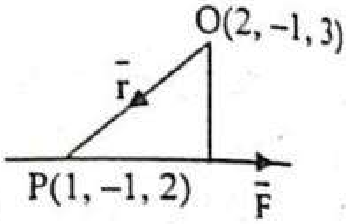
একটি বিন্দুর সাপেক্ষে একটি বলের মোমেন্টের বৈশ্লেষিক বর্ণনাঃ মনে করি, xy সমতলে P বলের ক্রিয়াবিন্দু $A(x_1, y_1)$ এবং উক্ত সমতলে যেকোনো একটি বিন্দু $B(a, b)$। ধরি, P এর x উপাংশ P_x এবং y উপাংশ P_y ।

B(a, b) বিন্দুর চতুর্দিকে A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P বলের মোমেন্ট

$= B$ এর সাপেক্ষে P_x এর মোমেন্ট $+ B$ এর সাপেক্ষে P_y এর মোমেন্ট

$= P_x \times BM + P_y \times BN = P_x(b - y_1) + P_y(x_1 - a) = (x_1 - a)P_y - (y_1 - b)P_x$

1. $\overline{F} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ বলটি (1, −1, 2) বিন্দুতে প্রযুক্ত হল। (2, − 1, 3) বিন্দুর চতুর্দিকে $\overline{F}$ বলের মোমেন্ট ভেক্টর ও তার মান নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $O(2, -1, 3)$ এবং $P(1, -1, 2)$ ।

$\therefore$ O এর সাপেক্ষে P এর অবস্থান ভেক্টর $\bar{r} = \overline{OP}$

$= (1-2)\hat{i} + (-1+1)\hat{j} + (2-3)\hat{k} = -\hat{i} - \hat{k}$

$\therefore$ O এর চতুর্দিকে $\overline{F}$ বলের মোমেন্ট ভেক্টর $\overline{M} = \bar{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

$= (0+2)\hat{i} - (4+3)\hat{j} + (-2-0)\hat{k}$

$= 2\hat{i} - 7\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore$ $\overline{F}$ বলের মোমেন্ট ভেক্টরের মান $= |\overline{M}| = \sqrt{4+49+4} = \sqrt{57}$

2. OX ও OY অক্ষদ্বয়ের সমতলে ক্রিয়াশীল একটি বলের মোমেন্ট (0, 0), (10,0) এবং (0,5) বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট যথাক্রমে 368, − 92 এবং 438 একক। অক্ষদ্বয় বরাবর বলটির উপাংশ এবং এর ক্রিয়ারেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, বলটি P এর ক্রিয়াবিন্দু $A(x_1, y_1)$ এবং P এর উপাংশদ্বয় P_x ও P_y ।

$\therefore$ $368 = (x_1 - 0)P_y - (y_1 - 0)P_x \Rightarrow x_1 P_y - y_1 P_x = 368 \cdots\cdots$ (i)

$-92 = (x_1 - 10)P_y - (y_1 - 0)P_x = x_1 P_y - y_1 P_x - 10P_y \cdots\cdots$(ii)

$\Rightarrow -92 = 368 - 10P_y$ [(i) হতে]

$\Rightarrow 10P_y = 460 \Rightarrow P_y = 46$

আবার, $438 = (x_1 - 0)P_y - (y_1 - 5)P_x = x_1 P_y - y_1 P_x + 5P_x \cdots\cdots$(iii)

$\Rightarrow 438 = 368 + 5P_x \Rightarrow 5P_x = 70 \Rightarrow P_x = 14$

$\therefore$ P এর উপাংশদ্বয় 14 ও 46 একক।

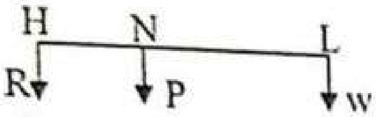
P_x এবং P_y এর মান বসালে প্রতিটি সমীকরণ $46x_1 - 14y_1 = 368$ অর্থাৎ $23x_1 - 7y_1 = 184$ রূপ ধারণ করে।

$\therefore$ $A(x_1, y_1)$ এর সঞ্চার পথের সমীকরণ অর্থাৎ P বলের ক্রিয়ারেখার সমীকরণ $23x - 7y = 184$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ ঃ

1. একজন লোক লাঠির একপ্রান্তে বাঁধা একটি বোঝা কাঁধে বহন করছে, বোঝাটির ওজন w এবং লোকটির কাঁধ হতে বোঝাটির ও লোকটির হাতের দূরত্ব যথাক্রমে 1 মি. ও 0·5 মি.। লোকটির কাঁধের উপর চাপ– [BUET 07-08]

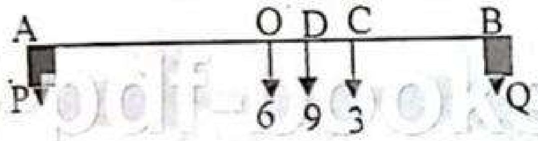
Sol^n :



$$\frac{R}{NL}=\frac{w}{HN}=\frac{P}{HL}\Rightarrow\frac{w}{0\cdot5}=\frac{P}{1\cdot5}\ \therefore P=3w$$

2. ভূমির উপর দণ্ডায়মান একটি টেলিগ্রাফ খামের সাথে 20 মি. দীর্ঘ একটি শক্ত দড়ির একপ্রান্ত বাঁধা আছে এবং অপর প্রান্ত ধরে একটি লোক নির্দিষ্ট বল প্রয়োগে টানছে। খামটির কোন স্থানে দড়ি বাঁধলে লোকটির পক্ষে তা উল্টিয়ে ফেলা সহজ হবে? [KUET 07-08]

Sol^n : দূরত্ব $=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (খামের দীর্ঘ) $=\frac{20}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}$



3. ভূমির সাথে সমান্তরাল একটি সেতুর দৈর্ঘ্য 42 মি. এবং ওজন 6 মেট্রিক টন। সেতুটি তার প্রান্তদ্বয়ে দুটি অনুরূপ খামের উপর অবস্থিত। যদি 3 মেট্রিক টন ওজনের একখানি গাড়ি সেতুটির একপ্রান্ত হতে 24 মি.দূরে অবস্থান করে ,খাম দুটির উপর কি পরিমাণ চাপ পড়বে? [SUST 08-09]

Sol^n : AO = OB = 21m , AC = 24 m, $OC=AC-AO=24-21=3$, $P+Q=9$

$$\frac{6}{DC}=\frac{3}{OD}=\frac{9}{OC}=\frac{9}{3}=3\ \therefore DC=2,\ OD=1$$

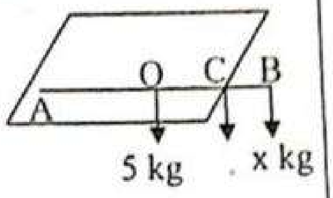
এখন, $\frac{P}{BD}=\frac{Q}{AD}=\frac{9}{AB}\Rightarrow\frac{P}{20}=\frac{Q}{22}=\frac{9}{42}=\frac{3}{14}$

$$\therefore\ P=20\times\frac{3}{14}=\frac{30}{7}MT,\ Q=\frac{33}{7}MT$$

4. 2 মি. দীর্ঘ ও 5 কেজি ওজনের একটি সুষম রডকে একটি টেবিলের উপর এমনভাবে রাখা হয়েছে যে, রডটির দীর্ঘের 16 সে.মি. ধারের বাইরে থাকে। রডটি পড়ে যাওয়ার পূর্বে ঐ প্রান্তে কত ওজন ঝুলানো যাবে? [BUET 10-11]

Sol^n : $BC=0\cdot16$ m, $OC=1-0\cdot16=0\cdot84$ m

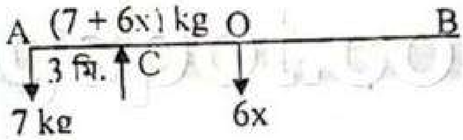
$$\therefore\ \frac{5}{BC}=\frac{x}{OC}$$



$$\Rightarrow\frac{5}{0\cdot16}=\frac{x}{0\cdot84}$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{0\cdot84\times5}{0\cdot16}=\frac{0\cdot84\times5}{0\cdot16}=26\cdot25\text{ kg.}$$

5. মিটার প্রতি 6 কেজি ওজনের একটি লৌহদণ্ডের একপ্রান্তে 7 কেজি ওজনের একটি বস্তু ঝুলালে তার উক্ত প্রান্ত হতে 3 মি. দূরে একটি বিন্দুতে ভারসাম্য হয়। দণ্ডটি কত লম্বা? [KU 09-10]



Sol^n :ধরি,দণ্ডটির দৈর্ঘ্য AB = x মি., AC = 3 মি.

$\therefore\ CO=(\frac{x}{2}-3)$ মি.

এখন, $\frac{7}{CO}=\frac{6x}{AC}\Rightarrow\frac{7}{(x-6)/2}=\frac{6x}{3}$

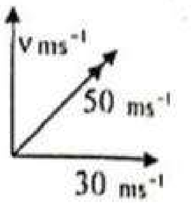
$$\Rightarrow 7=x^2-6x\Rightarrow x^2-6x-7=0$$

$\Rightarrow\ (x-7)(x+1)=0\ \therefore x=7$ মিটার।

সমতলে বস্তুকণার গতি — প্রশ্নমালা IX

প্রশ্নমালা IX A

1(a) একটি ক্রিকেট বল ভূমির সাথে সমান্তরাল রেখায় $30\ ms^{-1}$ সমবেগে চলছে। কিছুক্ষণ পর হঠাৎ ব্যাট দ্বারা পূর্ববেগের সাথে সমকোণে আঘাত করায় বলটি $50\ ms^{-1}$ বেগে চলতে লাগল। ব্যাটের আঘাতের ফলে ক্রিয়াশীল বেগের মান নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ মনে করি, আঘাতের ফলে ক্রিয়াশীল বেগের মান $v\ ms^{-1}$ ।

পরস্পর সমকোণে কার্যরত বলটির আদিবেগ $30\ ms^{-1}$ ও আঘাতজনিত বেগ $v\ ms^{-1}$ এর লব্ধি $50\ ms^{-1}$ বলে, $50^2 = 30^2 + v^2 \Rightarrow v^2 = 2500 - 900 = 1600 \Rightarrow v = 40$

$\therefore$ আঘাতের ফলে ক্রিয়াশীল বেগের মান $40\ ms^{-1}$ ।

1(b) একটি বস্তুর উপর $3\ ms^{-1}$, $7\ ms^{-1}$ এবং $8\ ms^{-1}$ বেগে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা রক্ষা করে। বৃহত্তর এবং ক্ষুদ্রতর বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ α. যেহেতু বেগত্রয় একটি বস্তুকণার উপর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে, সুতরাং $3\ ms^{-1}$ ও $8\ ms^{-1}$ বেগদ্বয়ের লব্ধির মান $7\ ms^{-1}$ ।

$\therefore\ 7^2 = 3^2 + 8^2 + 2 \times 3 \times 8 \cos\alpha \Rightarrow 49 = 9 + 64 + 48\cos\alpha \Rightarrow 48\cos\alpha = -24$

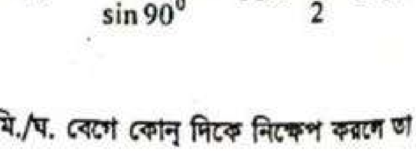
$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \alpha = 120°$ $\therefore$ বৃহত্তর এবং ক্ষুদ্রতর বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ $120°$

1(c) কোনো নির্দিষ্ট বেগের মান $10\ ms^{-1}$; তার দুই পার্শ্বে তার সাথে $30°$ ও $60°$ কোণে কার্যরত অংশকদ্বয় নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $u\ ms^{-1}$ এবং $v\ ms^{-1}$ অংশকদ্বয় $10\ ms^{-1}$ মানের বেগের সাথে যথাক্রমে $30°$ ও $60°$ কোণে কার্যরত। তাহলে, $u = \frac{10\sin 30^0}{\sin(30^0 + 60^0)} = \frac{10 \times \sin 30^0}{\sin 90^0} = 10 \times \frac{1}{2} = 5$ এবং $v = \frac{10\sin 60^0}{\sin 90^0} = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় অংশকদ্বয় $5\ ms^{-1}$ এবং $5\sqrt{3}\ ms^{-1}$.

1(d) 20 কি.মি./ঘ. বেগে চলন্ত একটি বাস থেকে একটি বস্তুকণা 40 কি.মি./ঘ. বেগে কোন্ দিকে নিক্ষেপ করলে তা বাসের সাথে লম্বভাবে চলবে?



সমাধানঃ মনে করি, বাসের সাথে θ কোণে নিক্ষেপ করলে বস্তুকণাটি বাসের সাথে w কি.মি./ ঘ. বেগে লম্বভাবে চলবে।

বাসের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$20\cos 0° + 40\cos\theta = w\cos 90° \Rightarrow 20 + 40\cos\theta = 0$

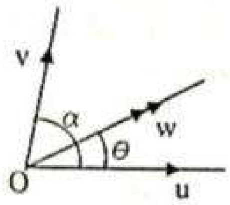
$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \theta = 120°$ $\therefore$ বস্তুকণাটিকে $120°$ কোণে নিক্ষেপ করতে হবে।

1(e) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত **u** ও **v** বেগদ্বয়ের লব্ধি **w**; এবং **u** এর দিক বরাবর **w** এর লম্বাংশের পরিমাণ v হলে প্রমাণ কর যে, বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ $\cos^{-1}\frac{v-u}{v}$ এবং $w = \sqrt{v^2 - u^2 + 2uv}$ [চ.'০৮; সি.'১০]

প্রমাণ : মনে করি, u বেগ লব্ধি w এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore$ u এর দিক বরাবর w এর লম্বাংশ = $w \cos \theta$.

প্রশ্নমতে, $w \cos \theta = v$ ... ... (i)



u এর দিক বরাবর u ও v বেগদ্বয় এবং এদের লব্ধি w এর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$u \cos 0^\circ + v \cos \alpha = w \cos \theta = v$ [(i) দ্বারা।]

$\Rightarrow u + v \cos \alpha = v \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{v-u}{v} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \dfrac{v-u}{v}$

$\therefore$ বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ $\cos^{-1} \dfrac{v-u}{v}$

এখন বেগের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই, $w^2 = u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha = u^2 + v^2 + 2u(v-u)$

$\Rightarrow w^2 = u^2 + v^2 + 2uv - 2u^2 \quad \therefore w = \sqrt{v^2 - u^2 + 2uv}$

1(f) দেখাও যে, দুইটি সমমানের সমবিন্দু বেগের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [য.'০২; সি.'০৩]

প্রমাণ : আমরা জানি, α কোণে কার্যরত u ও v সমবিন্দু বেগের লব্ধিবেগ v বেগের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan \theta = \dfrac{u \sin \alpha}{v + u \cos \alpha}$, যখন $v + u \cos \alpha \neq 0$.

বেগদ্বয় পরস্পর সমান হলে অর্থাৎ $v = u$ হলে, $\tan \theta = \dfrac{u \sin \alpha}{u + u \cos \alpha} = \dfrac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \dfrac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$

$\Rightarrow \tan \theta = \tan \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\alpha}{2}$

$\therefore$ দুইটি সমমানের সমবিন্দু বেগের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

1(g) কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুটি বেগের লব্ধি একটি বেগের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। সেই বেগটি দ্বিগুণ করলে উক্ত কোণ 30° হয়। বেগ দুটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, α কোণে ক্রিয়ারত u ও v বেগ দুইটির লব্ধি w, যা u বেগের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে, $\tan 60^\circ = \dfrac{v \sin \alpha}{u + v \cos \alpha}$ ... (i). আবার বেগদ্বয় 2u ও v হলে, $\tan 30^\circ = \dfrac{v \sin \alpha}{2u + v \cos \alpha}$ ... ... (ii)

$(i) \div (ii) \Rightarrow \dfrac{\tan 60^0}{\tan 30^0} = \dfrac{2u + v \cos \alpha}{u + v \cos \alpha} \Rightarrow \dfrac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{u + v \cos \alpha}{2u + v \cos \alpha}$

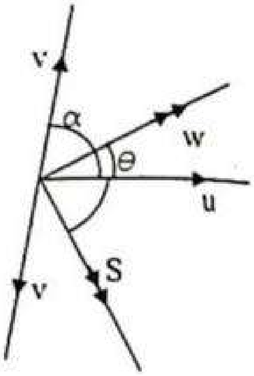
$\Rightarrow 2u + v \cos \alpha = 3u + 3v \cos \alpha \Rightarrow u = -2v \cos \alpha$

(i) হতে পাই, $\tan 60^\circ = \dfrac{v \sin \alpha}{-2v \cos \alpha + v \cos \alpha} = \dfrac{v \sin \alpha}{-v \cos \alpha} = -\tan \alpha$

$\Rightarrow \tan \alpha = -\tan 60^\circ = \tan (180^\circ - 60^\circ) = \tan 120^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

$\therefore$ বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ $= 120^\circ$

1(h) একটি বিন্দুতে কার্যরত দুইটি বেগের একটির দিক বিপরীত করলে নতুন লব্ধি পূর্বের লব্ধির সাথে $90°$ কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, বেগ দুইটির মান সমান।



সমাধানঃ মনে করি, α কোণে কার্যরত u ও v বেগের লব্ধি w, যা u এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। $\therefore \tan\theta = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha} \cdots\cdots(i)$

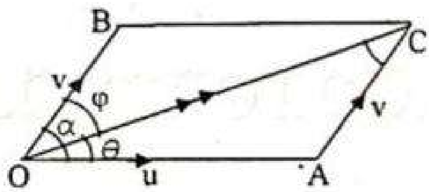
v কে বিপরীতমুখী করলে বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে $(180° - \alpha)$ এবং প্রশ্নমতে এদের লব্ধি S (ধরি) u এর সাথে $(90° - \theta)$ কোণ উৎপন্ন করবে।

$$\therefore \tan(90° - \theta) = \frac{v\sin(180^0 - \alpha)}{u + v\cos(180^0 - \alpha)} \Rightarrow \cot\theta = \frac{v\sin\alpha}{u - v\cos\alpha} \cdots(ii)$$

$$(i) \times (ii) \Rightarrow 1 = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha} \times \frac{v\sin\alpha}{u - v\cos\alpha} \Rightarrow u^2 - v^2\cos^2\alpha = v^2\sin^2\alpha$$

$\Rightarrow u^2 = v^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \Rightarrow u^2 = v^2 \Rightarrow u = v$ $\therefore$ বেগ দুইটির মান সমান।

1(i) দেখাও যে, কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি অসমান বেগের লব্ধি বৃহত্তর বেগের দিকে অধিকত হেলানো থাকবে।



মনে করি, পরস্পর α কোণে O বিন্দুতে একই সময়ে কার্যরত u ও v বেগ দুইটি যথাক্রমে OA ও OB দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত। OACB সামান্তরিকটি অঙ্কন করি এবং O, C যোগ করি। তাহলে OC কর্ণটি বেগদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক সূচিত করবে। ধরি, বেগদ্বয়ের লব্ধি OA এর সাথে θ কোণ এবং OB এর সাথে φ কোণ উৎপন্ন করে।

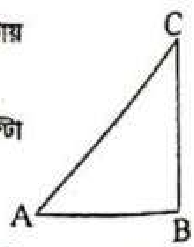
OB এর সমান ও সমান্তরাল বলে, AC একই বেগ v সূচিত করবে এবং $\angle OCA = \angle COB = \varphi$.

ধরি, $u > v$। তাহলে $OA > AC$.

এখন, OAC ত্রিভুজে, $OA > AC$.

$\therefore \angle OCA > \angle AOC \Rightarrow \varphi > \theta$ অর্থাৎ দুইটি অসমান বেগের লব্ধি বৃহত্তর বেগের দিকে অধিকত হেলানো থাকবে।

1(j) একজন সাইকেল চালক সোজাপথে 3 ঘণ্টায় 30 কি.মি. যাওয়ার পর প্রথম রাস্তার সাথে লম্বভাবে অপর একটি পথে 8 কি.মি. / ঘ. বেগে 5 ঘণ্টা চলল। তার গড়বেগ ও গড়দ্রুতি নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ মনে করি, সাইকেল চালক 3 ঘণ্টায় AB = 30 কি.মি. এবং পরবর্তী 5 ঘণ্টায় $BC = 8 \times 5$ অর্থাৎ 40 কি.মি. যায়।

$\therefore$ মোট দূরত্ব = (30 + 40) কি.মি. = 70 কি.মি. এবং মোট সময় = (3 + 5) ঘণ্টা = 8 ঘণ্টা

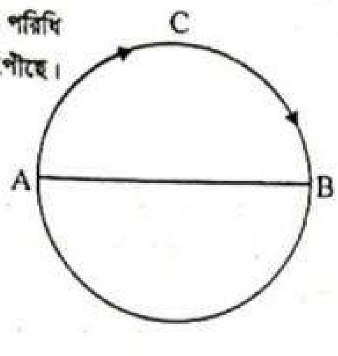
এবং গড়দ্রুতি $= \dfrac{70}{8}$ কি.মি./ঘ. $= 8\dfrac{3}{4}$ কি.মি./ঘ.

আবার নির্দিষ্ট দিকে সরলরেখা বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব $= AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ কি.মি.

গড়বেগ $= \dfrac{50}{8}$ কি.মি./ঘ. $= 6\dfrac{1}{4}$ কি.মি./ঘ.

1(k) একটি বস্তুকণা 35 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধি বরাবর 10 সেকেন্ডে একটি ব্যাসের এক প্রান্ত থেকে অপর প্রান্তে যায়। তার গড়বেগ ও গড়দ্রুতি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, একটি বস্তুকণা $r = 35$ সে.মি. ব্যাসার্ধের ABC বৃত্তের পরিধি বরাবর AB ব্যাসের A প্রান্ত হতে যাত্রা করে 10 সেকেন্ডে অপর প্রান্ত B তে পৌছে। তাহলে, $AB = 2r = 2 \times 35$ সে.মি. $= 70$ সে.মি. এবং



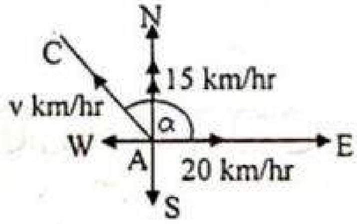
চাপ $ACB = \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi \times 35$ সে.মি. $= 109.96$ সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ গড়বেগ $= \frac{70}{10}$ সে.মি./ সে. $= 7$ সে.মি./ সে.।

গড়দ্রুতি $= \frac{109.96}{10}$ সে.মি./ সে.$=10.96$ সে.মি./ সে.$=11$ সে.মি./ সে. (প্রায়)

1(l) পূর্বদিকে 20 কি.মি./ঘ. বেগে চলমান একটি বস্তুকণায় কী বেগ সংযুক্ত হলে কণাটি 15 কি.মি./ঘ. বেগে উত্তর দিকে চলতে থাকবে?

সমাধান : মনে করি, v কি.মি./ঘ. বেগ সংযুক্ত করতে হবে, যা পূর্বদিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে। পূর্ব দিক ও উত্তর দিক বরাবর 20 কি.মি./ঘ. ও v কি.মি./ঘ. বেগদ্বয় এবং এদের লব্ধি 15 কি.মি./ঘ. এর লম্বাংশ নিয়ে পাই,



$20 \cos 0 + v \cos \alpha = 15 \cos 90° \Rightarrow 20 + v \cos \alpha = 0$

$\Rightarrow v \cos \alpha = -20 \quad \cdots$ (i) এবং

$20 \sin 0 + v \sin \alpha = 15 \sin 90° \Rightarrow v \sin \alpha = 15 \cdots$ (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow v^2 = 400 + 225 = 625 \Rightarrow v = 25$

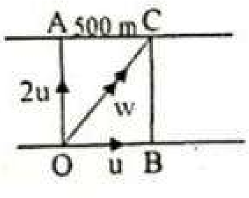
(i) হতে পাই, $25 \cos \alpha = -20 \Rightarrow \cos \alpha = -4/5$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(-4/5)$

$\therefore$ 25 কি.মি./ঘ. পরিমাণ বেগ সংযুক্ত করতে হবে, যা পূর্বদিকের সাথে $\cos^{-1}(-4/5)$ কোণ উৎপন্ন করে।

2.(a) এক ব্যক্তি নদীর স্রোতের সাথে সমকোণে যাত্রা করে অপর পাড়ে যাত্রাস্থানের বিপরীত বিন্দু হতে নদীর তীর বরাবর 500 মি. দূরে পৌছিল। সাঁতারুর বেগ স্রোতের বেগের দ্বিগুণ হলে, নদীর প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, নদীর প্রস্থ OA এবং স্রোতের বেগ u ও সাঁতারুর বেগ 2u। u ও 2u যথাক্রমে OB ও OA দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত হলে, এদের লব্ধি w (ধরি) AOBC সামান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত হবে,



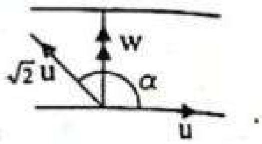
যেখানে $OB = AC = 500$ মি.। তাহলে, $\frac{OB}{u} = \frac{OA}{2u} = \frac{w}{OC}$.

$\therefore \quad \frac{OB}{u} = \frac{OA}{2u} \Rightarrow OB = \frac{OA}{2} \Rightarrow OA = 2 \times OB = 2 \times 500$ মি. $= 1000$ মি.

$\therefore$ নদীর প্রস্থ 1000 মিটার অর্থাৎ 1 কি.মি.।

2(b) একজন সাঁতারু স্রোতের বেগের $\sqrt{2}$ গুণ বেগে সাঁতরিয়ে একটি নদী সোজাসুজি পার হতে চাই। স্রোতের সাথে কোন্ দিকে সাঁতার দিলে সে সফল হতে পারবে?

সমাধান : মনে করি, স্রোতের গতিবেগ u এবং সাঁতারু স্রোতের সাথে α কোণে $\sqrt{2}$ u বেগে সাঁতার দিয়ে সোজাসোজি w বেগে নদী পার হতে পারে।

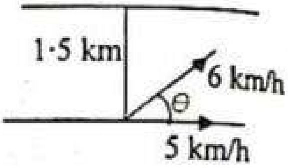


স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $u\cos 0° + \sqrt{2}\,u\cos\alpha = w\cos 90°$

$\Rightarrow u + \sqrt{2}\,u\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \alpha = 120°$

$\therefore$ স্রোতের সাথে $120°$ কোণে সাঁতার দিতে হবে।

2(c) 5 কি.মি./ঘ. বেগে 1·5 কি.মি. প্রশস্ত একটি নদী প্রবাহিত হচ্ছে। একজন সাঁতারু 6 কি.মি./ঘ. বেগে কোন্ দিকে সাঁতার দিলে সে স্বল্পতম সময়ে নদী পার হতে পারবে? স্বল্পতম সময় নির্ণয় কর।



সমাধান: মনে করি, সাঁতারু স্রোতের সাথে θ কোণে 6 কি.মি./ঘ. বেগে t ঘণ্টায় $d = 1·5$ কি.মি. প্রশস্ত নদী পার হয়।

নদীর প্রস্থ বরাবর স্রোতের বেগ এবং সাঁতারুর বেগের অংশকের সমষ্টি $= \{5\cos 90° + 6\cos(90° - \theta)\} = 6\sin\theta$ কি.মি./ঘ.

$\therefore\ t = \frac{d}{6\sin\theta}$. t ক্ষুদ্রতম হবে যদি $\sin\theta$ বৃহত্তম হয় অর্থাৎ $\sin\theta = 1 = \sin 90° \Rightarrow \theta = 90°$ হয়।

$\therefore\ t = \frac{d}{6} = \frac{1.5}{6}$ ঘণ্টা $=15$ মিনিট।

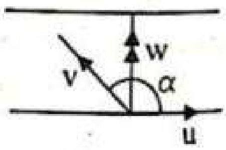
$\therefore$ স্বল্পতম সময়ে নদী পার হতে সাঁতারুকে স্রোতের সাথে $90°$ কোণে সাঁতার দিতে হবে এবং স্বল্পতম সময় 15 মিনিট।

2(d) স্রোত না থাকলে এক ব্যক্তি 100 মিটার চাওড়া একটি নদী সাঁতার দিয়ে ঠিক সোজাসোজিভাবে ৪ মিনিটে পার হয় এবং স্রোত থাকলে ঐ একই পথে সে নদীটি 5 মিনিটে পার হতে পারে। স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

[কু.'০০; ব.'০২; রা.'০৪; ঢা.'১০; য.'১২; সি.'১২]

সমাধান : মনে করি, স্রোতের গতিবেগ u মিটার/ মিনিট এবং লোকটি স্রোতের সাথে α কোণে v মিটার/মিনিট বেগে সাঁতার দিয়ে সোজাসোজি w মিটার/ মিনিট বেগে নদী পার হয়। তাহলে, $v = \frac{100}{4} = 25,\ w = \frac{100}{5} = 20$ এবং

$w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha \cdots\cdots$ (i)



স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $u\cos 0° + v\cos\alpha = w\cos 90°$

$\Rightarrow u + v\cos\alpha = 0 \Rightarrow v\cos\alpha = -u$

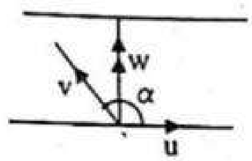
$\therefore$ (i) হতে পাই, $w^2 = u^2 + v^2 + 2u(-u) = u^2 + v^2 - 2u^2 = v^2 - u^2$

$\Rightarrow u^2 = v^2 - w^2 = 25^2 - 20^2 = 225 \Rightarrow u = 15$

$\therefore$ স্রোতের গতিবেগ 15 মিটার/ মিনিট।

2(e) S মিটার প্রশস্থ স্রোতহীন একটি নদী সাঁতার দিয়ে পার হতে একজন লোকের t মিনিট সময় লাগে। স্রোত থাকলে t_1 মিনিটে সে এটা সোজাসুজি পার হয়। প্রমাণ কর যে, স্রোতের গতিবেগ $S\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t_1^{\,2}}}$ মি./মিনিট। [বুয়েট '০০-০১]

প্রমাণ : মনে করি, স্রোতের গতিবেগ u মি./ মিনিট এবং লোকটি স্রোতের সাথে α কোণে v মি./মিনিট বেগে সাঁতার দিয়ে সোজাসোজি f মিটার/ মিনিট বেগে নদী পার হয়। তাহলে, $v = \frac{s}{t}$, $w = \frac{s}{t_1}$ এবং $w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha \cdots\cdots$ (i)



স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $u\cos 0° + v\cos\alpha = w\cos 90°$

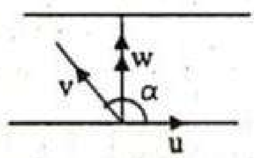
$\Rightarrow u + v\cos\alpha = 0 \Rightarrow v\cos\alpha = -u$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $w^2 = u^2 + v^2 + 2u(-u) = u^2 + v^2 - 2u^2 = v^2 - u^2$

$\Rightarrow u^2 = v^2 - w^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{S^2}{t^2} - \frac{S^2}{{t_1}^2}}$ $\therefore$ স্রোতের গতিবেগ $S\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{{t_1}^2}}$ মি./মিনিট ।

2(f) এক ব্যক্তি সোজাসুজি t_1 সময়ে একটি নদী পারাপার হতে পারে। তীর বরাবর নদীর প্রস্থের সমান দূরত্ব গিয়ে ফিরে আসতে তার t_2 সময় লাগে। সাঁতারুর বেগ u এবং স্রোতের বেগ v (u > v) হলে, প্রমাণ কর যে, $\sqrt{u^2 - v^2} : u = t_1 : t_2$

প্রমাণ : মনে করি, নদীর প্রস্থ d এবং সাঁতারু স্রোতের সাথে α কোণে সাঁতার দিয়ে সোজাসোজি w বেগে নদী পার হয়। তীর বরাবর স্রোতের অনুকূলে যেতে t সময় এবং স্রোতের প্রতিকূলে ফিরে আসতে t′ সময় লাগলে,



$d = (u+v)t \Rightarrow t = \frac{d}{u+v}$ এবং $d = (u-v)t' \Rightarrow t' = \frac{d}{u-v}$

[$\because$ স্রোতের অনুকূলে ও প্রতিকূলে সাঁতারুর বেগ যথাক্রমে $= u + v$ ও $= u - v$]

$\therefore\ t_2 = t + t' = \frac{d}{u+v} + \frac{d}{u-v} = \frac{2du}{u^2 - v^2} \Rightarrow 2du = (u^2 - v^2)t_2 \cdots\cdots$ (i)

আবার, w বেগে নদী পারাপার হতে তাকে t_1 সময়ে 2d দূরত্ব অতিক্রম করতে হয় । $\therefore\ 2d = wt_1 \cdots$(ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $uwt_1 = (u^2 - v^2)t_2 \Rightarrow t_1 : t_2 = (u^2 - v^2) : uw \cdots\cdots$ (iii)

এখন, স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $v\cos 0° + u\cos\alpha = w\cos 90°$

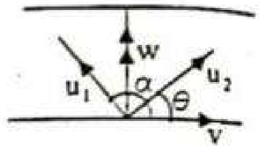
$\Rightarrow v + u\cos\alpha = 0 \Rightarrow u\cos\alpha = -u$

লব্ধি বেগ $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha} = \sqrt{u^2 + v^2 + 2v(-v)} = \sqrt{u^2 - v^2}$

(iii) হতে পাই, $t_1 : t_2 = (u^2 - v^2) : u\sqrt{u^2 - v^2}$ $\therefore \sqrt{u^2 - v^2} : u = t_1 : t_2$ (Proved)

2(g) দুইজন সাঁতারুর একজন u_1 গতিবেগে সাঁতরিয়ে ক্ষুদ্রতম পথে এবং অপরজন u_2 গতিবেগে সাঁতরিয়ে ক্ষুদ্রতম সময়ে v বেগে প্রবাহিত একটি নদী পার হওয়ার জন্য এক সঙ্গে যাত্রা করে এবং উভয়ে নদীর অপর তীরে একত্রে পৌছিল। প্রমাণ কর যে, ${u_1}^2 - {u_2}^2 = v^2$,যেখানে $u_1 > v$.

প্রমাণ : মনে করি, নদীর প্রস্থ d এবং ১ম সাঁতারু স্রোতের সাথে α কোণে সাঁতার দিয়ে ক্ষুদ্রতম পথে অর্থাৎ সোজাসুজি w বেগে t_1 সময়ে নদী পার হয়। তাহলে, $d = wt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{w}$



স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $v\cos 0^\circ + u_1\cos\alpha = w\cos 90^\circ$

$\Rightarrow v + u_1\cos\alpha = 0 \Rightarrow u_1\cos\alpha = -v$

$\therefore \ w = \sqrt{u_1^2 + v^2 + 2u_1 v\cos\alpha} = \sqrt{u_1^2 + v^2 + 2v(-v)} = \sqrt{u_1^2 - v^2}$

ধরি, ২য় সাঁতারু স্রোতের সাথে θ কোণে u_2 বেগে সাঁতার দিয়ে ক্ষুদ্রতম t_2 সময়ে নদী পার হয়। নদীর প্রস্থ বরাবর স্রোতের বেগ v এবং সাঁতারুর বেগ u_2 এর অংশকের সমষ্টি $= v\cos 90^\circ + u_2\cos(90^\circ - \theta) = u_2\sin\theta$

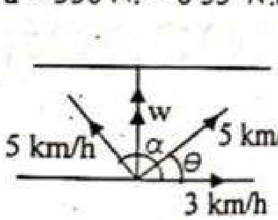
$\therefore \ t_2 = \frac{d}{u_2\sin\theta}$. t_2 ক্ষুদ্রতম হবে যদি $\sin\theta$ বৃহত্তম হয় অর্থাৎ $\sin\theta = 1$ হয়। $\therefore t_2 = \frac{d}{u_2}$

প্রশ্নমতে, $t_1 = t_2 \Rightarrow \frac{d}{w} = \frac{d}{u_2} \Rightarrow w = u_2 \Rightarrow \sqrt{u_1^2 - v^2} = u_2 \ \therefore \ u_1^2 - u_2^2 = v^2$

2(h) 550 m প্রশস্ত একটি নদীর স্রোত 3 km/hr বেগে প্রবাহিত। দুইটি নৌকার প্রত্যেকটি 5 km/ hr বেগে একটি নৌকা ক্ষুদ্রতম পথে এবং অপরটি ক্ষুদ্রতম সময়ে নদীটি অতিক্রম করতে চেষ্টা করছে। যদি তারা একই সময়ে যাত্রা শুরু করে তবে তাদের অপর পাড়ে পৌঁছাবার সময়ের পার্থক্য নির্ণয় কর। [চ.'০৪]

সমাধানঃ মনে করি, ১ম নৌকা স্রোতের সাথে α কোণে ক্ষুদ্রতম পথে অর্থাৎ সোজাসুজি $d = 550$ মি. $= 0{\cdot}55$ কি.মি. দূরত্ব w কি.মি./ঘ. বেগে t_1 ঘণ্টায় নদী পার হয়।

তাহলে, $d = wt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{w} \cdots\cdots$ (i)



স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $3\cos 0^\circ + 5\cos\alpha = w\cos 90^\circ$

$\Rightarrow 3 + 5\cos\alpha = 0 \Rightarrow 5\cos\alpha = -3$

$\therefore \ w = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2\times 3\times 5\cos\alpha} = \sqrt{9 + 25 + 6\times -3} = \sqrt{35 - 18} = 4 \ \therefore \ t_1 = \frac{d}{4}$

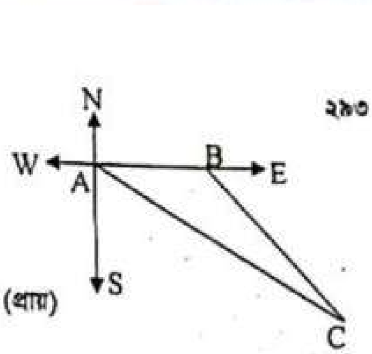
ধরি, ২য় নৌকা স্রোতের সাথে θ কোণে 5 কি.মি./ঘ. বেগে ক্ষুদ্রতম t_2 ঘণ্টায় নদী পার হয়। নদীর প্রস্থ বরাবর স্রোতের বেগ এবং নৌকার বেগের অংশকের সমষ্টি $= 3\cos 90^\circ + 5\cos(90^\circ - \theta) = 5\sin\theta$ কি.মি./ঘ.

$\therefore \ t_2 = \frac{d}{5\sin\theta}$. t_2 ক্ষুদ্রতম হবে যদি $\sin\theta$ বৃহত্তম হয় অর্থাৎ $\sin\theta = 1$ হয়। $\therefore t_2 = \frac{d}{5}$

$\therefore$ সময়ের পার্থক্য $= (t_1 - t_2)$ ঘণ্টা $= (\frac{d}{4} - \frac{d}{5})$ ঘণ্টা $= \frac{d}{20}$ ঘণ্টা $= \frac{60\times 0.55}{20}$ মিনিট $= 1{\cdot}65$ মিনিট।

3(a) কোন বস্তুকণা 2 সেকেন্ডে 3 মি./সে. বেগে পূর্ব দিকে A হতে B পর্যন্ত যায়। অতপর তা 3 সেকেন্ডে 4 মি./সে. বেগে B হতে C পর্যন্ত দক্ষিণ-পূর্ব দিকে যায়। A ও B এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমতে, $AB = 2\times 3$ মি. $= 6$ মি., $BC = 3\times 4$ মি. $= 12$ মি. এবং $\angle ABC = 90^\circ + 45^\circ$



$\triangle ABC$ এ কোসাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

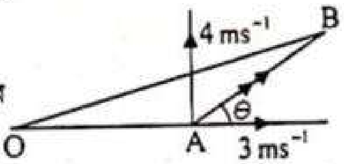
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC\cos(90^\circ + 45^\circ)$$
$$= 6^2 + 12^2 + 2\times 6\times 12\sin 45^\circ$$
$$= 36 + 144 + 144\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 281.82 \text{ (প্রায়)} \Rightarrow AC = 16.79 \text{ (প্রায়)}$$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= 16.79$ মি. (প্রায়)।

3(b) একটি কণা একটি সরলরেখা বরাবর 3 ms^{-1} গতিতে চলছে। 3 সে. পর কণাটির গতির সাথে লম্ব বরাবর 4 ms^{-1} গতি সংযোজন করা হল। এর 2 সেকেন্ড পর কণাটি যে বিন্দু হতে প্রথম যাত্রা শুরু করেছিল তা হতে কত দূরে থাকবে? [বু.'০২]

সমাধানঃ মনে করি, কণাটি O বিন্দু হতে যাত্রা করে 3 সে. পর $OA = 3\times 3\text{ m} = 9\text{ m}$ দূরত্বে A তে পৌছে।

ধরি, A বিন্দুতে কণাটির গতির সাথে OA এর উপর লম্ব বরাবর 4 ms^{-1} গতি সংযোজন করা হলে 2 সেকেন্ড পর তা B তে পৌছে।



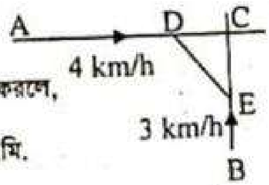
$\therefore$ তাদের লব্ধিবেগ $= \sqrt{3^2 + 4^2}\ ms^{-1} = 5\ ms^{-1}$, যা OA এর বর্ধিতাংশের সাথে $\theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$ কোণ উৎপন্ন করে এবং $AB = 5\times 2\text{ m} = 10\text{ m}$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $OB = \sqrt{OA^2 + AB^2 - 2.OA.AB\cos(\pi - \theta)} = \sqrt{9^2 + 10^2 + 2.9.10\cos\theta}$ m

$$= \sqrt{81 + 100 + 2.9.10\times\frac{3}{5}}\text{ m} \quad [\because \tan\theta = \frac{4}{3}, \therefore \cos\theta = \frac{2}{5}]$$
$$= \sqrt{81 + 100 + 2.9.10\times\frac{3}{5}}\text{ m} = \sqrt{289}\text{ m} = 17\text{ m}$$

3(c) লম্বভাবে মিলিত হয় এরূপ দুইটি সোজা রাস্তার একটি বরাবর 4 km/hr বেগে একটি ভ্যান গাড়ি চলছে। অন্য রাস্তা দিয়ে এক ব্যক্তি 3 km/hr বেগে হেঁটে ভ্যানে উঠার চেষ্টা করছে। যদি কোন এক সময় ভ্যান গাড়িটি চৌমাথা থেকে 750 মিটার পিছনে এবং লোকটি 500 মিটার দূরে থাকে, তাহলে দেখাও যে, ঐ ব্যক্তি কখনও ভ্যান গাড়ির 50 মিটারের অধিক নিকটে আসতে পারবে না।

সমাধান ঃ মনে করি, AC রাস্তা বরাবর ভ্যান গাড়ি এবং ও BC রাস্তা বরাবর ব্যক্তিটি চলছে।



ধরি, $AC = 750$ মি. $= \frac{3}{4}$ কি.মি., $BC = 500$ মি. $= \frac{1}{2}$ কি.মি.।

t ঘন্টা পর ভ্যান গাড়িটি $AD = 4t$ কি.মি. ও ঐ ব্যক্তি $BE = 3t$ কি.মি. পথ অতিক্রম করলে,

$DC = AC - AD = (\frac{3}{4} - 4t)$ কি.মি. এবং $CE = BC - BE = (\frac{1}{2} - 3t)$ কি.মি.

$\therefore$ DEC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$$DE^2 = DC^2 + EC^2 = (\frac{3}{4} - 4t)^2 + (\frac{1}{2} - 3t)^2 = \frac{9}{16} - 6t + 16t^2 + \frac{1}{4} - 3t + 9t^2$$

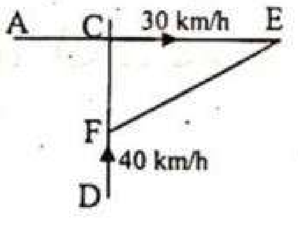
$$= 25t^2 - 9t + \frac{13}{16} = 25\{ t^2 - \frac{9}{25}t + \frac{13}{400}) = 25\{ (t - \frac{9}{50})^2 + \frac{13}{400} - \frac{81}{2500} \}$$

$$= 25\{ (t - \frac{9}{50})^2 + \frac{325-324}{10000} \} = 25\{ (t - \frac{9}{50})^2 + \frac{1}{10000} \}$$

$\therefore$ দূরত্ব DE ক্ষুদ্রতম হবে যখন $(t - \frac{9}{50})^2 = 0$ হবে এবং কাজেই ভ্যানগাড়ি ও ব্যক্তির দূরত্ব $DE = \frac{5}{100}$ কি.মি. $= 50$ মি. । সুতরাং, ঐ ব্যক্তি কখনও ভ্যান গাড়ির 50 মিটারের অধিক নিকটে আসতে পারবে না।

3(d) পরস্পর লম্বভাবে মিলিত দুইটি রেলপথের একটির উপর দিয়ে ঘন্টায় 30 কি.মি. বেগে চলমান একটি ট্রেন সকাল 10 টায় জংশন অতিক্রম করে। অন্য একটি ট্রেন দ্বিতীয় রেলপথে ঘন্টায় 40 কি.মি. বেগে চলে বিকেল 3 টায় জংশনে পৌছে। কখন এদের মধ্যে দূরত্ব ক্ষুদ্রতম ছিল। ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় কর। [কু.'০৪]

সমাধান : মনে করি, AC ও DC দুইটি রেলপথ এবং C তাদের লম্বভাবে মিলিত জংশন । 30 km/h বেগে চলমান ট্রেনটি সকাল 10 টায় C অতিক্রম করে এবং 40 km/h বেগে চলমান ট্রেনটি D তে অবস্থান করে। 10 টা বাজার t ঘণ্টা পরে এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব ক্ষুদ্রতম EF = d কি.মি. হয় যেখানে ১ম ট্রেনটি CE = 30t কি.মি. এবং ২য় ট্রেনটি DF = 40t কি.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে। আবার ২য় ট্রেনটি D হতে যাত্রা করে সকাল 10 টা হতে বিকেল 3 টা মোট 5 ঘণ্টায় $DC = 40 \times 5$ কি.মি. $= 200$ কি.মি. পথ অতিক্রম করে। সুতরাং $FC = DC - DF = (200 - 40t)$ কি.মি.



$$\therefore\ EF^2 = CE^2 + CF^2 \Rightarrow d^2 = (30t)^2 + (200 - 40t)^2$$

$$\Rightarrow d^2 = 900t^2 + 40000 - 16000t + 1600t^2$$

$$= 2500\,t^2 - 16000t + 40000 = 100\,(25t^2 - 160\,t + 400)$$

$$= 100\{(5t)^2 - 2.5t.16 + 16^2 + 144\} = 100\{(5t-16)^2 + 144\}$$

যেহেতু $\{(5t-16)^2$ এর মান সর্বদাই ধনাত্মক, সুতরাং d ক্ষুদ্রতম হবে যখন

$$(5t-16)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{16}{5}$$

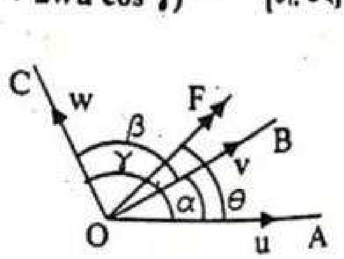
$\therefore$ সকাল 10 টার $\frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$ ঘণ্টা পরে অর্থাৎ বেলা 1 টা 12 মিনিটে এদের মধ্যে দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হবে এবং ক্ষুদ্রতম দূরত্ব $d = \sqrt{100 \times 144}$ কি.মি. $= 120$ কি.মি. ।

4(a) কোনো কণার উপর ক্রিয়াশীল u, v , w মানের তিনটি গতিবেগ পর্যায়ক্রমে পরস্পর α, β, γ কোণে আনত। দেখাও যে, এদের লব্ধির মান $= (u^2 + v^2 + w^2 + 2uv\cos\alpha + 2vw\cos\beta + 2wu\cos\gamma)^{1/2}$ [ঢা.'০২]

প্রমাণঃ মনে করি, O বিন্দুতে যথাক্রমে OA, OB, OC বরাবর u, v, w মানের তিনটি বেগ পরস্পর α, β, γ ক্রিয়া করে। অর্থাৎ $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$ এবং $\angle AOC = \gamma = \alpha + \beta \Rightarrow \gamma - \alpha = \beta$

ধরি, এদের লব্ধির মান F, যা OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

OA এবং এর উপর লম্ব রেখা বরাবর বেগগুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই,



$$F\cos\theta = u\cos 0^\circ + v\cos\alpha + w\cos\gamma = u + v\cos\alpha + w\cos\gamma \cdots\cdots \text{(i) এবং}$$

$$F\sin\theta = u\sin 0^\circ + v\sin\alpha + w\sin\gamma = v\sin\alpha + w\sin\gamma \cdots\cdots \text{(ii)}$$

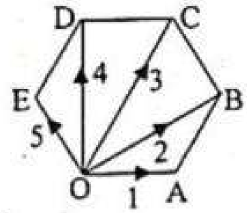
$\therefore$ (i)^2 + (ii)^2 $\Rightarrow F^2 = u^2 + v^2\cos^2\alpha + w^2\cos^2\gamma + 2uv\cos\alpha + 2\,vw\cos\alpha\cos\gamma$
$+ 2wu\cos\gamma + v^2\sin^2\alpha + w^2\sin^2\gamma + 2vw\sin\alpha\sin\gamma.$

$\Rightarrow F^2 = u^2 + v^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + w^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) + 2uv\cos\alpha + 2wu\cos\gamma +$
$2\,vw(\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma)$
$= u^2 + v^2 + w^2 + 2uv\cos\alpha + 2wu\cos\gamma + 2QR\cos(\gamma - \alpha)$

$\therefore$ লব্ধির মান $F = (u^2 + v^2 + w^2 + 2uv\cos\alpha + 2vw\cos\beta + 2\,wu\cos\gamma)^{1/2}$ (প্রমাণিত)

4(b) 1, 2, 3, 4, 5 মানের বেগগুলো কোন সুষম ষড়ভুজের একটি কৌণিক বিন্দু থেকে যথাক্রমে অপর কৌণিক বিন্দুগুলোর দিকে ক্রিয়ারত আছে। এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, OABCDE সুষম ষড়ভুজের OA, OB, OC, OD, OF বরাবর যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5 মানের বেগগুলো ক্রিয়াশীল এবং এদের লব্ধির মান w কেজি ওজন, যা OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



তাহলে, $\angle AOE = 180° - \frac{360^0}{6} = 120°$ এবং

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \frac{120^0}{4} = 30°$

এখন OA এবং OD বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$w\cos\theta = 1\cos 0° + 2\cos 30° + 3\cos 60° + 4\cos 90° + 5\cos 120°$

$= 1 + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\times\frac{1}{2} + 4\times 0 + 5\times -\frac{1}{2} = \sqrt{3}$ …… (i) এবং

$w\sin\theta = 1\sin 0° + 2\sin 30° + 3\sin 60° + 4\sin 90° + 5\sin 120°$

$= 1\times 0 + 2\times\frac{1}{2} + 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\times 1 + 5\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 5 + 4\sqrt{3}$ …… (ii)

(i)^2 + (ii)^2 $\Rightarrow w^2 = (\sqrt{3})^2 + (5 + 4\sqrt{3})^2 = 3 + 25 + 48 + 40\sqrt{3} = 76 + 40\sqrt{3}$

(ii) ÷ (i) $\Rightarrow \tan\theta = (5 + 4\sqrt{3})/\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(4 + 5/\sqrt{3})$

$\therefore$ বলগুলোর লব্ধির মান $= \sqrt{76 + 40\sqrt{3}} = 2\sqrt{19 + 10\sqrt{3}}$, যা 1 মানের বেগের ক্রিয়ারেখার সাথে $\tan^{-1}(4 + \frac{5}{\sqrt{3}})$ কোণ উৎপন্ন করে।

প্রশ্নমালা IX B

1(a) 200 মি. ও 300 মি. দৈর্ঘ্যের দুইটি ট্রেন একটি স্টেশন থেকে একই দিকে দুইটি সমান্তরাল রেলপথে যথাক্রমে **40 কি.মি./ ঘ. ও 30 কি.মি./ ঘ.** বেগে যাত্রা করে। কত সময়ে এরা পরস্পরকে অতিক্রম করবে?

সমাধান ঃ 30 কি.মি./ ঘ. বেগে চলমান ট্রেনের সাপেক্ষে 40 কি.মি./ ঘ. বেগে চলমান ট্রেনের আপেক্ষিক গতিবেগ
$w = (40 - 30)$ কি.মি./ ঘ. = 10 কি.মি./ ঘ.।

পরস্পরকে অতিক্রম করতে হলে 40 কি.মি./ ঘ. বেগে চলমান ট্রেনকে $(200 + 300) = 500$ মি. $= \frac{1}{2}$ কি.মি. অতিক্রম করতে হবে।

প্রয়োজনীয় সময় t হলে, $t = \frac{1/2}{10}$ ঘন্টা $= \frac{60}{20}$ মিনিট $= 3$ মিনিট।

1(b) 400 মি. ও 500 মি. দৈর্ঘ্যের দুইটি ট্রেন দুইটি সমান্তরাল রেলপথে পরস্পরকে বিপরীত দিক হতে অতিক্রম করে। যদি ১ম ট্রেনের বেগ ২য় ট্রেনের বেগের দ্বিগুণ হয় এবং 10 সেকেন্ডে পরস্পরকে অতিক্রম করে, তবে ১ম ট্রেনের গতিবেগ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, ১ম ট্রেনের গতিবেগ $V_1 = 2u$ মি./সে. এবং ২য় ট্রেনের গতিবেগ $V_2 = u$ মি./সে.।

$\therefore$ ২য় ট্রেনের সাপেক্ষে ১ম ট্রেনের আপেক্ষিক বেগ $V_{12} = (2u + u)$ মি./সে. $= 3u$ মি./সে.

$3u$ মি./সে. বেগে 10 সেকেন্ডে পরস্পরকে অতিক্রম করতে $(400 + 500)$ মি. $= 900$ মি. অতিক্রম করতে হয়।

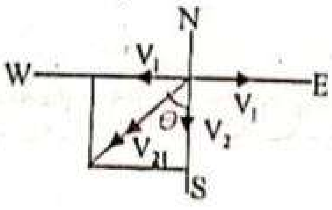
$\therefore 3u \times 10 = 900 \Rightarrow u = 30$ $\therefore$ ১ম ট্রেনের গতিবেগ $2u$ মি./সে. $= 60$ মি./সে.।

2(a) একটি নৌকা 15 কি.মি./মি. সমবেগে পূর্বদিকে চলছে এবং অপর একটি নৌকা 20 কি.মি./মি. সমবেগে দক্ষিণ দিকে চলছে। প্রথমটির সাপেক্ষে দ্বিতীয় নৌকার অপেক্ষিক বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রথম নৌকার বেগ $V_1 = 15$ কি.মি./মি.,

দ্বিতীয় নৌকার বেগ $V_2 = 20$ কি.মি./মি. এবং

বেগদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\alpha = 90^\circ$



প্রথম নৌকার সাপেক্ষে দ্বিতীয় নৌকার অপেক্ষিক বেগ V_{21} কি.মি./মি., যা V_2 এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

$$V_{21} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\alpha} = \sqrt{15^2 + 20^2 - 2\times15\times20\cos90^0} = \sqrt{15^2+20^2} = 25$$

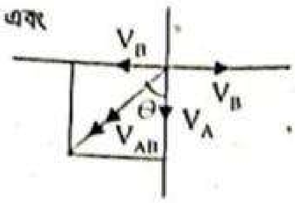
এবং $\tan\theta = \dfrac{V_1\sin90^0}{V_2 - V_1\cos90^0} = \dfrac{15}{20} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\dfrac{3}{4}$

$\therefore$ প্রথম নৌকার সাপেক্ষে দ্বিতীয় নৌকার অপেক্ষিক বেগ 25 কি.মি./ ঘ. , যা দ্বিতীয় নৌকার বেগের সাথে $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ কোণ উৎপন্ন কর।

2(b) A ও B দুইটি বাস পরস্পর সমকোণে আনত দুইটি রাস্তা বরাবর যথাক্রমে 40 কি.মি./ঘ. ও 30 কি.মি./ঘ. বেগে চলছে। B বাসের যাত্রীদের ধারণা অনুসারে A বাসের বেগ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ A বাসের বেগ $V_A = 40$ কি.মি./মি., B বাসের বেগ $V_B = 30$ কি.মি./মি. এবং

বেগদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\alpha = 90^\circ$



B বাসের যাত্রীদের সাপেক্ষে A বাসের অপেক্ষিক বেগ V_{AB} কি.মি./মি., যা V_A এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

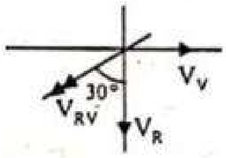
$V_{AB}=\sqrt{V_A^2+V_B^2-2V_AV_B\cos\alpha} = \sqrt{40^2+30^2-2\times40\times30\cos90^0} = \sqrt{40^2+30^2} = 50$

এবং $\tan\theta = \frac{V_B\sin90^0}{V_A-V_B\cos90^0} = \frac{30}{40} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

$\therefore$ B বাসের যাত্রীদের ধারণা অনুসারে A বাসের বেগ 50 কি.মি./ঘ., যা A বাসের বেগের সাথে $\tan^{-1}(3/4)$ কোণ উৎপন্ন করে।

3(a) একটি ভ্যান গাড়ি সোজা রাস্তায় 40 km/h বেগে চলে এবং বৃষ্টি উলম্বভাবে পড়ে। যদি বৃষ্টি ভ্যান গাড়িতে উলম্বের সাথে 30° কোণে আঘাত করে তবে বৃষ্টির বেগ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, ভ্যান গাড়ির বেগ V_V কি.মি./ঘ., বৃষ্টির বেগ V_R কি.মি./ঘ. এবং ভ্যান গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ V_{RV} কি.মি./ঘ.। তাহলে, $V_V = 40$, $V_V \wedge V_R = 90°$, $V_R \wedge V_{RV} = 30°$ এবং $V_V \wedge V_{RV} = (90°+30°)$.
বেগের সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

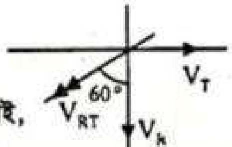


$$\frac{V_V}{\sin30^0} = \frac{V_R}{\sin(90^0+30^0)} = \frac{V_{RV}}{\sin90^0} \Rightarrow \frac{V_V}{\sin30^0} = \frac{V_R}{\cos30^0} \Rightarrow \frac{40}{1/2} = \frac{V_R}{\sqrt{3}/2}$$

$\Rightarrow V_R = 40\sqrt{3}$ $\therefore$ বৃষ্টির বেগ $40\sqrt{3}$ কি.মি./ঘ.

3(b) বৃষ্টি 30 মি./সে. বেগে খাড়াভাবে পড়ছে। একজন রেলগাড়ির যাত্রীর কাছে তা খাড়ারেখার সাথে 60° কোণে পড়ছে বলে মনে হয়। রেলগাড়ির বেগ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, রেলগাড়ির বেগ V_T মি./সে., বৃষ্টির বেগ V_R মি./সে. এবং রেলগাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ V_{RT}। তাহলে, $V_R = 30$, $V_T \wedge V_R = 90°$, $V_R \wedge V_{RT} = 60°$ এবং $V_T \wedge V_{RT} = (90°+60°)$. বেগের সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

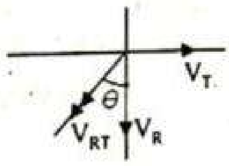


$$\therefore \frac{V_T}{\sin60^0} = \frac{V_R}{\sin(90^0+60^0)} = \frac{V_{RT}}{\sin90^0} \Rightarrow \frac{V_T}{\sin60^0} = \frac{V_R}{\cos60^0} \Rightarrow \frac{V_T}{\sqrt{3}/2} = \frac{30}{1/2}$$

$\Rightarrow V_T = 30\sqrt{3}$. $\therefore$ রেলগাড়ির বেগ $30\sqrt{3}$ মি./সে.।

3(c) 45 কি.মি./ঘ. বেগে চলমান একটি ট্রেনের যাত্রী দেখছে যে, খাড়ারেখায় পড়ন্ত বৃষ্টির ধারার আপেক্ষিক বেগের দিক উল্লম্ব রেখার সাথে $\tan^{-1}\frac{3}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃষ্টির আসল বেগ বের কর।

সমাধানঃ ধরি, ট্রেনের বেগ V_T কি.মি./ঘ., বৃষ্টির আসল বেগ V_R কি.মি./ঘ. এবং ট্রেনের সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ V_{RT}। তাহলে, $V_T = 45$, $V_T \wedge V_R = 90°$,



$V_R \wedge V_{RT} = \theta = \tan^{-1}\frac{3}{2}$ এবং $V_T \wedge V_{RT} = (90°+\theta)$.

বেগের সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

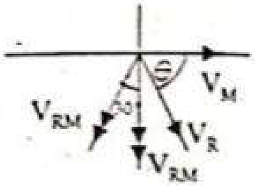
$$\frac{V_T}{\sin\theta}=\frac{V_R}{\sin(90^0+\theta)}=\frac{V_{RT}}{\sin 90^0}\Rightarrow\frac{V_T}{\sin\theta}=\frac{V_R}{\cos\theta}\Rightarrow 45=V_R\tan\theta=V_R\times\frac{3}{2}\Rightarrow V_R=30$$

$\therefore$ বৃষ্টির আসল বেগ 30 কি.মি./ঘ.।

4(a) বৃষ্টির দিনে একজন লোক 5 কি.মি./ঘ. বেগে হেঁটে দেখল বৃষ্টি খাড়াভাবে পড়ছে। তার বেগ দ্বিগুণ করে দেখল বৃষ্টি খাড়া রেখার সাথে $30°$ কোণে পড়ছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বৃষ্টির প্রকৃত বেগ V_R, যা লোকটির বেগ V_M এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

১ম ক্ষেত্রে, লোকটির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ V_{RM} (ধরি), যা $V_M = 5$ কি.মি./ঘ. বেগের সাথে $90°$ কোণ উৎপন্ন করে।



$$\therefore\ \frac{V_M}{\sin(90^0-\theta)}=\frac{V_R}{\sin 90^0}\Rightarrow\frac{5}{\cos\theta}=V_R\ \cdots\cdots(i)$$

২য় ক্ষেত্রে, লোকটির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ V_{RM} (ধরি), যা $V_M = 10$ কি.মি./ঘ. বেগের সাথে $(90°+30°)$ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore\ \frac{V_M}{\sin(90^0-\theta+30^0)}=\frac{V_R}{\sin(90^0+30^0)}\Rightarrow\frac{10}{\cos(30^0-\theta)}=\frac{V_R}{\cos 30^0}=\frac{2}{\sqrt{3}}V_R\ \cdots\cdots(ii)$$

$$(i)\div(ii)\Rightarrow\frac{5}{\cos\theta}\times\frac{\cos(30^0-\theta)}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\cos 30°\cos\theta+\sin 30°\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta\Rightarrow\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

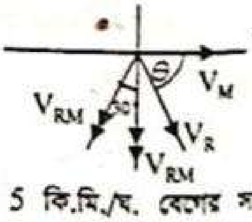
$\Rightarrow \tan\theta=\sqrt{3}=\tan 60°\Rightarrow\theta=60°$. (i) হতে পাই, $V_R=\dfrac{5}{\cos 60^0}=5\times 2=10$

$\therefore$ বৃষ্টির প্রকৃত বেগ 10 কি.মি./ঘ.।

4(b) 3 কি.মি./ঘ. বেগে ভ্রমণরত এক ব্যক্তিকে বৃষ্টির ধারা খাড়াভাবে আঘাত করে; তাঁর বেগ 5 কি.মি./ঘ. হলে বৃষ্টির ধারা তাঁকে লম্বের সাথে $30°$ কোণে আঘাত করে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বৃষ্টির প্রকৃত বেগ V_R কি.মি./ঘ., যা লোকটির বেগ V_M কি.মি./ঘ. এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

১ম ক্ষেত্রে, লোকটির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ V_{RM} (ধরি), যা $V_M = 3$ কি.মি./ঘ. বেগের সাথে $90°$ কোণ উৎপন্ন করে।



$$\therefore\ \frac{V_M}{\sin(90^0-\theta)}=\frac{V_R}{\sin 90^0}\Rightarrow\frac{3}{\cos\theta}=V_R\ \cdots\cdots(i)$$

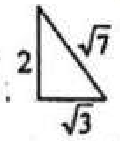
২য় ক্ষেত্রে, লোকটির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ V_{RM} (ধরি), যা $V_M = 5$ কি.মি./ঘ. বেগের সাথে $(90°+30°)$ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore\ \frac{V_M}{\sin(90^0-\theta+30^0)}=\frac{V_R}{\sin(90^0+30^0)}\Rightarrow\frac{5}{\cos(30^0-\theta)}=\frac{V_R}{\cos 30^0}=\frac{2}{\sqrt{3}}V_R\ \cdots\cdots(ii)$$

$(i) \div (ii) \Rightarrow \dfrac{3}{\cos\theta} \times \dfrac{\cos(30^\circ - \theta)}{5} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 6(\cos 30^\circ \cos\theta + \sin 30^\circ \sin\theta) = 5\sqrt{3}\cos\theta$

$\Rightarrow 6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + 6 \times \dfrac{1}{2}\sin\theta = 5\sqrt{3}\cos\theta \Rightarrow 3\sin\theta = 2\sqrt{3}\cos\theta$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \therefore \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, [পার্শ্বের ত্রিভুজ হতে।]



(i) হতে পাই, $V_R = 3 \times \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \sqrt{21}$

$\therefore$ বৃষ্টির প্রকৃত বেগ $\sqrt{21}$ কি.মি./ঘ., যা অনুভূমিকের সাথে অর্থাৎ ব্যক্তির বেগের সাথে $\tan^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ কোণ উৎপন্ন করে।

প্রশ্নমালা IX C

1(a) একটি বিমান 50 কি.মি./ঘ. বেগে সরল রাণওয়ে স্পর্শ করে এবং 300 মি. দূরত্ব অতিক্রম করে থামে। মন্দন সুষম হলে বিমানটি থামতে প্রয়োজনীয় সময় নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ বিমানের আদিবেগ $u = 50$ কি.মি./ঘ. $= 50 \times \dfrac{1000}{3600}$ মি./ সে. $= \dfrac{125}{9}$ মি./ সে., দূরত্ব $s = 300$ মি.

এবং শেষবেগ $v = 0$ । বিমানটি থামতে প্রয়োজনীয় সময় t সেকেন্ড এবং মন্দন f মি./ সে.^{2} হলে,

$v^2 = u^2 - 2fs$ সূত্র হতে পাই, $0 = (\dfrac{125}{9})^2 - 2f \times 300 \Rightarrow f = \dfrac{125 \times 125}{9 \times 9 \times 600} = \dfrac{5 \times 125}{81 \times 24}$

এবং $v = u - ft$ সূত্র হতে পাই, $0 = \dfrac{125}{9} - \dfrac{5 \times 125}{81 \times 24}t \Rightarrow t = \dfrac{125}{9} \times \dfrac{81 \times 24}{5 \times 125} = \dfrac{216}{5} = 43.2$

$\therefore$ নির্ণেয় সময় 43.2 সেকেন্ড।

1(b) একটি কণা নির্দিষ্ট বেগে যাত্রা করে সমত্বরণে চলে 3 সেকেন্ডে 81 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করার সাথে সাথে ত্বরণ নিষ্ক্রিয় হয় এবং কণাটি পরবর্তী 3 সেকেন্ডে 72 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে কণাটির আদিবেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। [য.'০৪]

সমাধান ঃ ধরি, কণাটির u ফুট/ সে. আদিবেগে এবং f ফুট/ সে.^{2} সমত্বরণে যাত্রা করে 3 সেকেন্ডে ৮১ ফুট অতিক্রম করে v ফুট/ সে. বেগ প্রাপ্ত হয় । তাহলে,

$v = u + ft$ সূত্র হতে পাই, $v = u + 3f \cdots\cdots(i)$ এবং

$s = ut + \dfrac{1}{2}ft^2$ সূত্র হতে পাই, $81 = 3u + \dfrac{1}{2}f \times 9 \Rightarrow 27 = u + \dfrac{3}{2}f \cdots\cdots(ii)$

ত্বরণ নিষ্ক্রিয় হলে কণাটি পরবর্তী 3 সেকেন্ডে v সমবেগে 72 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore$ $s = vt$ সূত্র হতে পাই, $72 = 3v \Rightarrow v = 24$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $24 = u + 3f \cdots\cdots(iii)$

$(ii) - (iii) \Rightarrow 3 = (\frac{3}{2} - 3)f = -\frac{3}{2}f \Rightarrow f = -2$

$\therefore$ (iii) হতে পাই, $24 = u - 6 \Rightarrow u = 30$

$\therefore$ কণাটির আদিবেগ 30 ফুট/ সে. এবং ত্বরণ -2 ফুট/ সে.^{2} ।

1(c) 450 মিটার সরলপথ অতিক্রম করতে একটি ট্রেনের গতিবেগ হ্রাস পেয়ে ঘণ্টায় 40 কি.মি. হতে 10 কি.মি. দাঁড়ায়। মন্দন সুষম হলে, ট্রেনটি থামার আগে আর কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

সমাধান : ট্রেনের আদিবেগ $u = 40$ কি.মি./ ঘ. $= 50 \times \frac{1000}{3600}$ মি./ সে. $= \frac{100}{9}$ মি./ সে. ,

$s = 450$ মিটার অতিক্রম করে বেগ $v = 10$ কি.মি./ ঘ. $= 10 \times \frac{1000}{3600}$ মি./ সে. $= \frac{25}{9}$ মি./ সে. ।

সুষম মন্দন f মি./সে.^{2} হলে, $v^2 = u^2 - 2fs$ সূত্র হতে পাই, $(\frac{25}{9})^2 = (\frac{100}{9})^2 - 2f \times 450$

$\Rightarrow 900f = \frac{10000 - 625}{81} = \frac{9375}{81} = \frac{3125}{27} \Rightarrow f = \frac{3125}{27} \times \frac{1}{900} = \frac{125}{972}$

এখন ট্রেনটি থামার আগে d মিটার অতিক্রম করলে,

$0^2 = (\frac{25}{9})^2 - 2 \times \frac{125}{972}d \Rightarrow d = \frac{25 \times 25}{81} \times \frac{972}{250} = 30$ $\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব 30 মিটার।

1(d) একটি বুলেট একটি তক্তা ভেদ করতে এর বেগের $\frac{1}{10}$ অংশ হারায়। মন্দন সুষম হলে, বুলেটি থামার পূর্বে পরপর স্থাপিত অনুরূপ কতগুলো তক্তা ভেদ করবে? [বুয়েট.'০৯]

সমাধান : মনে করি, বুলেটের আদিবেগ u , ত্বরণ f এবং একটি তক্তার বেধ d ।

তাহলে, d দূরত্ব অতিক্রম করার পর এর গতিবেগ হয় $(u - \frac{u}{10}) = \frac{9u}{10}$.

$v^2 = u^2 - 2fs$ সূত্র হতে পাই, $(\frac{9u}{10})^2 = u^2 - 2f \times d \Rightarrow 2df = u^2 - \frac{81}{100}u^2 = \frac{19}{100}u^2$

ধরি, বুলেটটি অনুরূপ n সংখ্যক তক্তা ভেদ করতে পারে অর্থাৎ nd দূরত্ব অতিক্রম করে বেগ শূন্য হয়।

$\therefore$ $0^2 = u^2 - 2f \times nd \Rightarrow u^2 = \frac{19}{100}u^2 n \Rightarrow n = \frac{100}{19} = 5\frac{5}{19}$ $\therefore$ $5\frac{5}{19}$ গুলো তক্তা ভেদ করবে।

1(e) u আদিবেগে এবং f ত্বরণে সরলরেখায় চলমান কোন বস্তু t সময় অন্তে s দূরত্ব অতিক্রম করে। এর অন্তবেগ v হলে, দেখাও যে, $\frac{v+u}{v-u} = \frac{2s}{ft^2}$

প্রমাণ : আমরা পাই, $v = u + ft \Rightarrow v - u = ft \cdots\cdots$ (i) এবং

$v^2 = u^2 + 2fs \Rightarrow v^2 - u^2 = 2fs \Rightarrow (v+u)(v-u) = 2fs \Rightarrow ft\,(v+u) = 2fs$, [(i) হতে]

$\Rightarrow v + u = \frac{2s}{t} \cdots\cdots$ (ii)

এবং, (ii) ÷ (i) $\Rightarrow \dfrac{v+u}{v-u} = \dfrac{2s/t}{ft}$ $\therefore \dfrac{v+u}{v-u} = \dfrac{2s}{ft^2}$ (Showed)

1(f) একটি কণা f সুষম ত্বরণে চলে ধারাবাহিক t ও t′ সময়ে সমান দূরত্ব d অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, $f = 2d(t - t')/tt'(t + t')$

প্রমাণ : মনে করি, f সুষম ত্বরণে চলন্ত কণাটি কোন এক বিন্দুতে u বেগ অর্জন করে এবং এ বিন্দু থেকে ধারাবাহিক t ও t′ সময়ে সমান দূরত্ব d অতিক্রম করে। তাহলে, কণাটি t ও (t + t′) সময়ে যথাক্রমে d; ও 2d দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore d = ut + \dfrac{1}{2}ft^2 \Rightarrow 2ut = 2d - ft^2 \ldots\ldots$ (i) এবং

$2d = u\times(t+t') + \dfrac{1}{2}f\times(t+t')^2 \Rightarrow 2u(t+t') = 4d - f(t^2 + 2tt' + t'^2) \ldots\ldots$ (ii)

(i) ÷ (ii) $\Rightarrow \dfrac{t}{t+t'} = \dfrac{2d - ft^2}{4d - f(t^2 + 2tt' + t'^2)}$

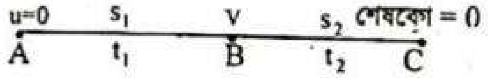
$\Rightarrow 2dt + 2dt' - ft^3 - ft^2t' = 4dt - ft^3 - 2ft^2t' - ftt'^2 \Rightarrow ft^2t' + ftt'^2 = 2dt - 2dt'$

$\Rightarrow ftt'(t+t') = 2d(t - t')$ $\therefore f = 2d(t-t')/tt'(t+t')$

2(a) একটি ট্রেন সরল রেলপথে 4 কি.মি. ব্যবধানে দুইটি স্টেশনে থামে। এক স্টেশন থেকে অন্য স্টেশনে পৌঁছাতে সময় লাগে 8 মিনিট । ট্রেনটি এর গতিপথের প্রথম অংশে x সমত্বরণে এবং দ্বিতীয় অংশে y সমমন্দনে চলে। প্রমাণ কর যে, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 8$

প্রমাণঃ মনে করি, ট্রেনটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে x সমত্বরণে t_1 মিনিটে s_1 কি.মি. অতিক্রম করে B তে v বেগ প্রাপ্ত হয় । অতপর B হতে v আদিবেগে y সমমন্দনে t_2 মিনিটে s_2 কি.মি. অতিক্রম করে C স্টেশনে থামে।

প্রশ্নমতে, $s_1 + s_2 = 4,\ t_1 + t_2 = 8.$



AB অংশে : $v = 0 + xt_1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{v}{x} \ldots\ldots$ (i) এবং

$s_1 = \dfrac{0+v}{2}\times t_1 = \dfrac{vt_1}{2} \ldots\ldots$ (ii)

BC অংশে : $0 = v - yt_2 \Rightarrow t_2 = \dfrac{v}{y} \ldots\ldots$ (iii) এবং $s_2 = \dfrac{v+0}{2}\times t_2 = \dfrac{vt_2}{2} \ldots\ldots$ (iv)

(ii) + (iv) $\Rightarrow s_1 + s_2 = \dfrac{v}{2}(t_1 + t_2) \Rightarrow 4 = \dfrac{v}{2}\times 8 \Rightarrow v = 1,$ $[\because s_1 + s_2 = 4,\ t_1 + t_2 = 8]$

(i) + (iii) $\Rightarrow t_1 + t_2 = v(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}) \Rightarrow 8 = 1\times(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})$ $\therefore \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 8$ (Proved)

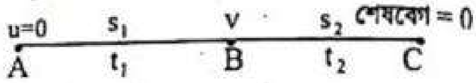
2(b) একটি বস্তুকণা স্থিরাবস্থা থেকে একটি সরলরেখা বরাবর যাত্রা করে প্রথমে f_1 সুষম ত্বরণে এবং পরে f_2 সুষম মন্দনে চলে। যদি তা t সময়ে যাত্রা বিন্দু থেকে s দূরত্বে গিয়ে থামে, তবে প্রমাণ কর যে,

(i) $t=\sqrt{\dfrac{2s(f_1+f_2)}{f_1f_2}}$ [য.'০২; চ.'০৫] (ii) $\dfrac{t^2}{2s}=\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}$ [সি.'০২,'১১; দি.'০৯; ঢা.'১১; চ.'১১]

প্রমাণঃ মনে করি, বস্তুকণাটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে f_1 সুষম ত্বরণে t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে B তে v বেগ প্রাপ্ত হয় । অতপর B হতে v আদিবেগে f_2 সুষম মন্দনে t_2 সময়ে s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে C বিন্দুতে থামে।

প্রশ্নমতে, $s_1+s_2=s$, মোট সময় $t=t_1+t_2$

AB অংশে : $v=0+f_1t_1 \Rightarrow t_1=\dfrac{v}{f_1}$ …… (i) এবং



$s_1=\dfrac{0+v}{2}\times t_1=\dfrac{vt_1}{2}$ …… (ii)

BC অংশে : $0=v-f_2t_2 \Rightarrow t_2=\dfrac{v}{f_2}$ …… (iii) এবং $s_2=\dfrac{v+0}{2}\times t_2=\dfrac{vt_2}{2}$ …… (iv)

(ii) + (iv) $\Rightarrow s_1+s_2=\dfrac{v}{2}(t_1+t_2)\Rightarrow s=\dfrac{v}{2}\times t\Rightarrow v=\dfrac{2s}{t}$, [$\because s_1+s_2=s,\ t_1+t_2=t$]

(i) + (iii) $\Rightarrow t_1+t_2=v\left(\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}\right)\Rightarrow t=\dfrac{2s}{t}\left(\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}\right)$ …… (v)

(v) হতে পাই, $t^2=\dfrac{2s(f_1+f_2)}{f_1f_2}$ $\therefore t=\sqrt{\dfrac{2s(f_1+f_2)}{f_1f_2}}$ (Proved)

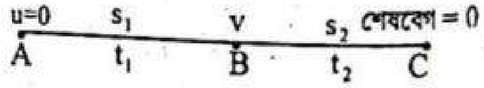
আবার, (v) হতে পাই, $t^2=2s\left(\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}\right)$ $\therefore \dfrac{t^2}{2s}=\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}$ (Proved)

2(c) একটি রেলগাড়ি এক স্টেশন থেকে যাত্রা করে একই সরলরেখায় d দূরত্বে অবস্থিত অপর এক স্টেশনে থামে। গাড়িটির গতিপথের প্রথম অংশে a সমত্বরণে এবং শেষ অংশে b সমমন্দনে চলে। দেখাও যে, সমগ্র দূরত্ব অতিক্রম করতে $\sqrt{\dfrac{2d(a+b)}{ab}}$ সময় লাগে। [কু.'০০; য.'০৫]

প্রমাণঃ মনে করি, ট্রেনটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে a সমত্বরণে t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে B তে v বেগ প্রাপ্ত হয় । অতপর B হতে v আদিবেগে b সমমন্দনে t_2 সময়ে s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে C স্টেশনে থামে।

প্রশ্নমতে, $s_1+s_2=d$, মোট সময় $t=t_1+t_2$

AB অংশে : $v=0+at_1 \Rightarrow t_1=\dfrac{v}{a}$ …… (i)



এবং $s_1=\dfrac{0+v}{2}\times t_1=\dfrac{vt_1}{2}$ …… (ii)

BC অংশে : $0=v-bt_2 \Rightarrow t_2=\dfrac{v}{b}$ …… (iii) এবং $s_2=\dfrac{v+0}{2}\times t_2=\dfrac{vt_2}{2}$ …… (iv)

(ii) + (iv) $\Rightarrow s_1+s_2=\dfrac{v}{2}(t_1+t_2)\Rightarrow d=\dfrac{v}{2}\times t\Rightarrow v=\dfrac{2d}{t}$, [$\because s_1+s_2=d,\ t_1+t_2=t$]

$(i)+(iii) \Rightarrow t_1+t_2 = v(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \Rightarrow t=\frac{2s}{t}\times\frac{a+b}{ab} \Rightarrow t^2=\frac{2s(a+b)}{ab} \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2s(a+b)}{ab}}$

$\therefore$ সমগ্র দূরত্ব অতিক্রম করতে $\sqrt{\frac{2d(a+b)}{ab}}$ সময় লাগে। (প্রমাণিত)

2(d) একটি রেলগাড়ি স্টেশন A থেকে সরল রেলপথে যাত্রা করে এটি 10 মিনিট পরে স্টেশন B তে থামে। স্টেশন দুইটির মধ্যবর্তী কোন C বিন্দুতে সর্বোচ্চ বেগ 60 কি.মি./ঘ. হয়। গাড়িটি যদি A থেকে C পর্যন্ত সমত্বরণে এবং C থেকে B পর্যন্ত সমমন্দনে গমন করে, তাহলে, A হতে B এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, রেলগাড়িটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে সমত্বরণে t_1 মিনিটে C তে সর্বোচ্চ বেগ v হয়। অতপর B হতে v আদিবেগে সমমন্দনে t_2 মিনিটে C স্টেশনে থামে।

প্রশ্নমতে, v = 60 কি.মি./ঘ. =1 কি.মি./মিনিট, $t_1+t_2=10$

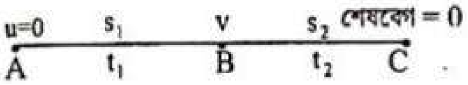
এখন $AC=\frac{0+v}{2}\times t_1=\frac{vt_1}{2}$ …… (i), $CB=\frac{v+0}{2}\times t_2=\frac{vt_2}{2}$ …… (ii)

$\therefore$ $AB=AC+CB=\frac{v}{2}(t_1+t_2)=\frac{1}{2}\times 10=5$ $\therefore$ A ও B এর দূরত্ব 5 কি.মি.।

2(e) একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে যাত্রা করে সরলপথে চলে 192 মিটার পথ যায়। যাত্রাপথের প্রথম অংশে 25 ms^{-2} সমত্বরণে এবং শেষ অংশে 5 ms^{-2} সমমন্দনে চলে কোনরকমে সম্পূর্ণ পথ অতিক্রম করে। কণাটির সর্বোচ্চ গতিবেগ নির্ণয় কর। [বুয়েট.'০২]

প্রমাণঃ মনে করি, কণাটি A থেকে যাত্রা করে 25 ms^{-2} সমত্বরণে s_1 মিটার অতিক্রম করে B তে v ms^{-1} বেগ হয়। অতপর B হতে v ms^{-1} আদিবেগে 5 ms^{-2} সমমন্দনে s_2 মিটার অতিক্রম করে C তে থামে।

প্রশ্নমতে, $s_1+s_2=192$



AB অংশে ঃ $v^2=0^2+2\times 25s_1 \Rightarrow s_1=\frac{v^2}{50}$ … (i)

BC অংশে ঃ $0^2=v^2-2\times 5s_2 \Rightarrow s_2=\frac{v^2}{10}$ … …(ii)

$(i)+(ii) \Rightarrow s_1+s_2=(\frac{1}{50}+\frac{1}{10})v^2 \Rightarrow 192=\frac{6}{50}v^2 \Rightarrow v^2=1600 \Rightarrow v=40$

$\therefore$ কণাটির সর্বোচ্চ গতিবেগ 40 ms^{-1} ।

2(f) একটি বস্তুকণা u আদিবেগে সরলরেখায় যাত্রা করে একটি নির্দিষ্ট দূরত্বের দুই অর্ধাংশে যথাক্রমে f_1 এবং f_2 ত্বরণে অতিক্রম করে। দেখাও যে, বস্তুটির অন্তবেগ একই হবে যদি একই আদিবেগে এবং $\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ সমত্বরণে কণাটি [চ.'০১; ব.'০৫]

সম্পূর্ণ পথ অতিক্রম করে।

প্রমাণঃ মনে করি, সম্পূর্ণ পথের দূরত্ব = s.

u আদিবেগে এবং f_1 ত্বরণে যাত্রা করে প্রথম অর্ধাংশ অর্থাৎ $\frac{s}{2}$ দূরত্ব অতিক্রম করে কণাটির বেগ v হলে,

$v^2 = u^2 + 2f_1 \times \frac{s}{2} \Rightarrow v^2 = u^2 + f_1 s$

v আদিবেগে এবং f_2 ত্বরণে শেষ অর্ধাংশ অর্থাৎ $\frac{s}{2}$ দূরত্ব অতিক্রম করে কণাটির অন্তবেগ V_1 হলে,

$V_1^2 = v^2 + 2f_2 \times \frac{s}{2} = u^2 + f_1 s + f_2 s \Rightarrow V_1^2 = u^2 + (f_1 + f_2)s \cdots\cdots$ (i)

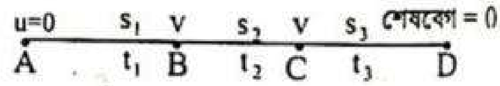
আবার, u আদিবেগে এবং $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ ত্বরণে s দূরত্ব অতিক্রম করে কণাটির অন্তবেগ V_2 হলে,

$V_2^2 = u^2 + 2 \times \frac{1}{2}(f_1 + f_2)s = u^2 + (f_1 + f_2)s \cdots\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $V_1^2 = V_2^2 \Rightarrow V_1 = V_2$ অর্থাৎ উভয় ক্ষেত্রে অন্তবেগ সমান হবে।

3(a) একটি ট্রেন একটি স্টেশন হতে সরলপথে যাত্রা করে f_1 সমত্বরণে চলে v বেগ প্রাপ্ত হয় এবং কিছুক্ষণ v সমবেগে চলে। অতঃপর f_2 সমমন্দনে চলে অন্য একটি স্টেশনে থামে। মোট দূরত্ব x এবং ভ্রমণকাল t হলে, প্রমাণ কর যে, $2x = v[2t - v(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2})]$

প্রমাণঃ মনে করি, ট্রেনটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে f_1 সমত্বরণে t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে B তে v বেগ প্রাপ্ত হয়। v সমবেগে t_2 সময়ে B হতে s_2 দূরত্বে C তে যায়। অতপর C হতে v আদিবেগে f_2 সমমন্দনে t_3 সময়ে s_3 দূরত্ব অতিক্রম করে D স্টেশনে থামে।



প্রশ্নমতে, $s_1 + s_2 + s_3 = x$, মোট সময় $t = t_1 + t_2 + t_3$

AB অংশে : $v = 0 + f_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v}{f_1} \cdots\cdots$ (i) এবং $s_1 = \frac{0+v}{2} \times t_1 = \frac{vt_1}{2} \cdots\cdots$ (ii)

BC অংশে : $s_2 = vt_2 \cdots\cdots$ (iii)

CD অংশে : $0 = v - f_2 t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{v}{f_2} \cdots\cdots$ (iv) এবং $s_3 = \frac{v+0}{2} \times t_3 = \frac{vt_3}{2} \cdots\cdots$ (v)

(i) + (iv) $\Rightarrow t_1 + t_3 = v(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}) \cdots$ (vi)

(ii) + (iii) + (v) $\Rightarrow s_1 + s_2 + s_3 = \frac{v}{2}(t_1 + 2t_2 + t_3) = \frac{v}{2}\{2(t_1 + t_2 + t_3) - (t_1 + t_3)\}$

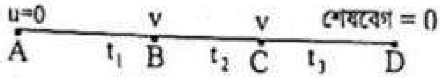
$\Rightarrow x = \frac{v}{2}\{2t - v(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2})\}$ [$\because s_1 + s_2 + s_3 = x,\ t_1 + t_2 + t_3 = t$ এবং $t_1 + t_3 = v(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2})$]

$\therefore\ 2x = v[2t - v(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2})]$ (Proved)

3(b) একটি রেলগাড়ি একটি স্টেশন থেকে সরল রেলপথে যাত্রা করে অপর স্টেশনে গিয়ে থামে। যদি এর ভ্রমণ পথের প্রথম চতুর্থাংশ সমত্বরণে, শেষ চতুর্থাংশ সমমন্দনে এবং বাকি অংশ সমবেগে যায়, তবে প্রমাণ কর যে, গাড়িখানার গড়বেগ এবং সর্বোচ্চ বেগের অনুপাত 2 : 3 হবে।

প্রমাণঃ মনে করি, স্টেশন দুইটি A ও D এবং AD = d । রেলগাড়িটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে সমত্বরণে t_1 সময়ে B তে v সর্বোচ্চ বেগ প্রাপ্ত হয় । B হতে v সমবেগে t_2 সময়ে C তে যায়। অতপর C হতে v আদিবেগে সমমন্দনে t_3 সময়ে D স্টেশনে থামে। তাহলে, মোট সময় $t = t_1 + t_2 + t_3$ এবং গড়বেগ w হলে, $w = \frac{d}{t}$

প্রশ্নমতে, $AB = \frac{d}{4}$, $CD = \frac{d}{4}$ এবং $BC = d - \frac{d}{4} - \frac{d}{4} = \frac{d}{2}$



এখন $AB = \frac{d}{4} = \frac{0+v}{2} \times t_1 \Rightarrow \frac{d}{2} = vt_1 \cdots \cdots$ (i),

$BC = \frac{d}{2} = vt_2 \cdots \cdots$ (ii) এবং $CD = \frac{d}{4} = \frac{v+0}{2} \times t_3 \Rightarrow \frac{d}{2} = vt_3 \cdots \cdots$ (v)

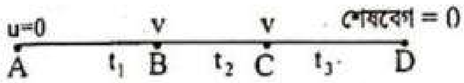
$(i) + (ii) + (iii) \Rightarrow 3 \times \frac{d}{2} = v(t_1 + t_2 + t_3) = v.t \Rightarrow 3\frac{d}{t} = 2v \Rightarrow 3w = 2v \Rightarrow w : v = 2 : 3$

$\therefore$ গাড়িখানার গড়বেগ এবং সর্বোচ্চ বেগের অনুপাত 2 : 3

3(c) একটি রেলগাড়ি একটি স্টেশন থেকে সরল রেলপথে যাত্রা করে অপর স্টেশনে গিয়ে থামে। গাড়িটি যদি মোট দূরত্বের প্রথম $\frac{1}{m}$ অংশ সমত্বরণে, শেষ $\frac{1}{n}$ অংশ সমমন্দনে এবং বাকি অংশ সমবেগে যায়, তবে প্রমাণ কর যে, এর সর্বোচ্চ বেগ এবং গড়বেগের অনুপাত $(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}) : 1.$ [চ.'০০; সি.'০৫]

প্রমাণঃ মনে করি, স্টেশন দুইটি A ও D এবং AD = d । রেলগাড়িটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে সমত্বরণে t_1 সময়ে B তে v সর্বোচ্চ বেগ প্রাপ্ত হয় । B হতে v সমবেগে t_2 সময়ে C তে যায়। অতপর C হতে v আদিবেগে সমমন্দনে t_3 সময়ে D স্টেশনে থামে। তাহলে, মোট সময় $t = t_1 + t_2 + t_3$ এবং গড়বেগ w হলে, $w = \frac{d}{t}$.

প্রশ্নমতে, $AB = \frac{d}{m}$, $CD = \frac{d}{n}$ এবং $BC = d - \frac{d}{m} - \frac{d}{n}$



এখন $AB = \frac{d}{m} = \frac{0+v}{2} \times t_1 \Rightarrow \frac{2d}{m} = vt_1 \cdots \cdots$ (i),

$BC = (1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n})d = vt_2 \cdots \cdots$ (ii) এবং $CD = \frac{d}{n} = \frac{v+0}{2} \times t_3 \Rightarrow \frac{2d}{n} = vt_3 \cdots \cdots$ (v)

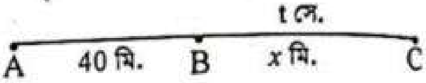
$(i) + (ii) + (iii) \Rightarrow (\frac{2}{m} + 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{2}{n})d = v(t_1 + t_2 + t_3) \Rightarrow (1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n})d = vt$

$\Rightarrow (1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}) \times \frac{d}{t} = v \Rightarrow (1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}) \times w = v \Rightarrow \frac{v}{w} = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

$\therefore$ গাড়িখানার গড়বেগ এবং সর্বোচ্চ বেগের অনুপাত $(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}):1$

4(a) একটি বাস স্থিরাবস্থা থেকে $6\,ms^{-2}$ সুষম ত্বরণে সরলপথে যাত্রা শুরু করার সাথে সাথে এর **40 m** পিছন থেকে $23\,ms^{-1}$ সমবেগে একজন সাইকেল চালক বাসটির দিকে চলতে শুরু করল। কখন এরা মিলিত হবে? দুইটি উত্তরের কারণ ব্যাখ্যা কর।

সমাধান ঃ মনে করি, B বিন্দু থেকে স্থিরাবস্থায় বাসটি সুষম ত্বরণে এবং A বিন্দু থেকে সাইকেল চালক সমবেগে একই সাথে যাত্রা করে t সে. পরে C বিন্দুতে মিলেত হয়, যেখানে AB = 40 মি. এবং BC = x মি. (ধরি)।



$\therefore$ t সে. বাসটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $BC = x = 0.t + \frac{1}{2}.6.t^2$

$$\Rightarrow x = 3t^2 \cdots\cdots(i)$$

t সে. সাইকেল চালকের অতিক্রান্ত দূরত্ব $AC = 40 + x = 23\times t$, [$s = vt$ সূত্র দ্বারা]

$\Rightarrow 40 + 3t^2 = 23t \Rightarrow 3t^2 - 23t + 40 = 0 \Rightarrow 3t^2 - 15t - 8t + 40 = 0$

$\Rightarrow (t-5)(3t-8) = 0 \Rightarrow t = \frac{8}{3}, 5$

$\therefore$ সাইকেল চালক $\frac{8}{3}$ ও 5 সেকেন্ডে বাসটির সাথে দুইবার মিলিত হবে। $\frac{8}{3}$ সে. পরে বাসের বেগ $= 0 + 6\times\frac{8}{3}$ অর্থাৎ $16\,ms^{-1}$, যা সাইকেল চালকের চেয়ে কম থাকায় সে বাসটিকে পিছনে ফেলবে।

দ্বিতীয়বার 5 সে. পরে বাসের বেগ $= 6\times 5$ অর্থাৎ $30\,ms^{-1}$, যা সাইকেল চালকের বেগ অপেক্ষা বেশি। সুতরাং বাসটি তাকে পিছনে ফেলে চলে যাবে।

4(b) একটি বাস স্থির অবস্থান হতে $1\,ms^{-2}$ ত্বরণে সরলপথে যাত্রা করল। দেখাও যে, **40·5** মিটারের অধিক পশ্চাত হতে কোনো যাত্রী $9\,ms^{-1}$ সমবেগে দৌড়ে বাসটি ধরতে পারবে না।

প্রমাণ ঃ মনে করি, B বিন্দু থেকে বাসটি ছাড়তে দেখে A বিন্দু থেকে একজন যাত্রী একে ধরার জন্য $9\ ms^{-1}$ সমবেগে দৌড় শুরু করল এবং t সে. পরে C বিন্দুতে ধরতে পারল। ধরি, AB = x মি.।

$\therefore$ t সে. বাসটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $BC = (0.t + \frac{1}{2}.1.t^2)$ মি. $= \frac{1}{2}t^2$ মি.

t সে. যাত্রীর অতিক্রান্ত দূরত্ব $AC = 9t$ মি., [$s = vt$ সূত্র দ্বারা]

এখন, $AC = AB + BC \Rightarrow 9t = x + \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow t^2 - 18t + 2x = 0$, যা t এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

$\therefore$ t এর বস্তব মানের জন্য বাসটি ধরা সম্ভব এবং t এর বাস্তব মান থাকবে যদি উক্ত সমীকরণের নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়।

অর্থাৎ $(-18)^2 - 4.1.2x \geq 0 \Rightarrow 324 - 8x \geq 0 \Rightarrow 8x \leq 324 \Rightarrow x \leq 40.5$

$\therefore$ যাত্রা মুহূর্তে বাস থেকে যাত্রীর দূরত্ব 40.5 মি. বা 40·5 মি. অপেক্ষা কম হলে বাসটি ধরতে পারবে। সুতরাং 40.5 মিটারের অধিক পশ্চাত হতে কোন যাত্রী $10\ ms^{-1}$ সমবেগে দৌড়ে বাসটি ধরতে পারবে না।

4(c) একটি সরলরেখায় দুইটি কণা **a** ও **b** সমত্বরণে চলছে। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে যখন এর **x** ও **y** দূরত্বে অবস্থান করে তখন এদের বেগ যথাক্রমে **u** ও **v** হয়। প্রমাণ কর যে, এরা দুইবারের বেশি মিলিত হতে পারে না এবং মিলিত

[ঢা.'০৩]

ধবার সময়ের ব্যবধান $= \dfrac{2}{a-b}\sqrt{(u-v)^2 - 2(x-y)(a-b)}$

প্রমাণঃ মনে করি, a ও b সমত্বরণে চলমান কণা দুইটি B ও C থেকে যথাক্রমে u ও v বেগে যাত্রা করার t সময় পর D তে মিলিত হয়, যেখানে নির্দিষ্ট বিন্দু A , AB = x এবং AC = y. তাহলে,

$BD = ut + \frac{1}{2}at^2 \;\therefore\; AD = AB + BD = x + ut + \frac{1}{2}at^2 \;\dots\dots\;(i)$

$CD = vt + \frac{1}{2}bt^2 \;\therefore\; AD = AC + CD = y + vt + \frac{1}{2}bt^2 \;\dots\dots\;(ii)$

$(i) - (ii) \Rightarrow 0 = (x-y) + (u-v)t + \frac{1}{2}(a-b)t^2$

$\Rightarrow (a-b)t^2 + 2(u-v)t + 2(x-y) = 0 \;\dots\dots\;(iii)$, যা t এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ বিধায় t এর দুইটির বেশী মান থাকতে পারে না। সুতরাং কণা দুইটিও দুই বারের বেশী মিলিত হতে পারে না।

ধরি, t এর মান দুইটি t_1 ও $t_2 \,(t_1 > t_2)$ ।

তাহলে, কণা দুইটি t_1 ও t_2 সময়ে মিলিত হয়, যেখানে $t_1 + t_2 = -\dfrac{2(u-v)}{a-b}$ এবং $t_1 t_2 = \dfrac{2(x-y)}{a-b}$

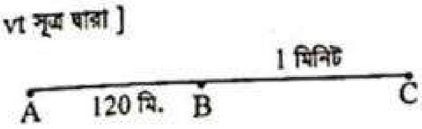
$\therefore$ তাদের মিলিত হবার সময়ের পার্থক্য $= t_1 - t_2 = \sqrt{(t_1+t_2)^2 - 4t_1t_2} = \sqrt{\dfrac{4(u-v)^2}{(a-b)^2} - 8\dfrac{x-y}{a-b}}$

$= \dfrac{2}{a-b}\sqrt{(u-v)^2 - 2(x-y)(a-b)}$ (Proved)

4(d) একজন যাত্রী তার 120 মিটার সামনে স্থির অবস্থান হতে সুষম ত্বরণে সরলপথে একটি বাসকে ছাড়তে দেখে একে ধরার জন্য সমবেগে দৌড় শুরু করল। যদি সে এক মিনিটে কোন রকমে বাসটি ধরতে সক্ষম হয়, তবে যাত্রীর বেগ ও বাসের ত্বরণ নির্ণয় কর। [সি.'০১]

সমাধান ঃ ধরি, B বিন্দু থেকে f মিটার/মি.^{2} সুষম ত্বরণে বাসটি ছাড়তে দেখে A বিন্দু থেকে একজন যাত্রী একে ধরবার জন্য u মিটার/ মি. সমবেগে দৌড় শুরু করল এবং ১ মি. পরে C বিন্দুতে কোন রকমে ধরে ফেলল, যেখানে AB = 120 মি.।

$\therefore$ 1 মিনিটে যাত্রীর অতিক্রান্ত দূরত্ব AC = u × 1 = u মিটার, [s = vt সূত্র দ্বারা]



বাসের অতিক্রান্ত দূরত্ব BC $= \{0\times 1 + \frac{1}{2}.f.(1)^2\}$মি. $= \frac{1}{2}f$ মি.

এবং C তে অর্জিত বেগ $v = (0 + f \times 1)$ মিটার/ মি. = f মিটার/ মি.

এখন, $AC = AB + BC \Rightarrow u = 120 + \frac{1}{2}f \Rightarrow f = 2u - 240 \;\dots\dots\;(i)$

যেহেতু 1 মিনিটে কোন রকমে বাসটি ধরতে সক্ষম , সুতরাং বাস ধরার মুহূর্তে বাসের অর্জিত বেগ যাত্রীর বেগের সমান হবে। $\therefore\ u = f$

(i) হতে পাই, $u = 2u - 240 \Rightarrow u = 240$ এবং $f = 240$

$\therefore$ যাত্রীর বেগ 240 মিটার/ মিনিট এবং বাসের ত্বরণ 240 মিটার/ মি.^{2} ।

4(e) একব্যক্তি তার **50 m** সামনে স্থিরাবস্থ হতে সুষম ত্বরণে সরলপথে একটি বাসকে ছাড়তে দেখে সমবেগে দৌড়াতে লাগল। সে এক মিনিটে বাসটি কোন রকরম ধরতে পারল। লোকটির বেগ ও বাসটির ত্বরণ নির্ণয় কর। [সি.'০৩]

সমাধান ঃ ধরি, যাত্রীর বেগ u মিটার/ মি. এবং বাসের ত্বরণ f মিটার/মি.^{2} ।

$\therefore$ 1 মিনিটে যাত্রীর অতিক্রান্ড দূরত্ব $= u \times 1$ মিটার $= u$ মিটার, [$s = vt$ সূত্র দ্বারা ।]

1 মিনিটে বাসের অতিক্রান্ড দূরত্ব $= \{0 \times 1 + \frac{1}{2}.f.(1)^2\} = \frac{1}{2}f$ মি., [$s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সূত্র দ্বারা ।]

এবং 1 মিনিট পর বাসের অর্জিত বেগ $v = (0 + f \times 1)$ মিটার/ মি. $= f$ মিটার/ মি., [$s = u + ft$ সূত্র দ্বারা ।]

তাহলে, 1 মিনিটে যাত্রীর অতিক্রান্ত দূরত্ব $-$ 1 মিনিটে বাসের অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 50$ মি.

$$\Rightarrow u - \frac{1}{2}f = 50 \Rightarrow 2u - f = 50 \Rightarrow f = 2u - 100 \cdots\cdots(i)$$

যেহেতু 1 মিনিটে কোন রকমে বাসটি ধরতে সক্ষম , সুতরাং বাস ধরার মুহূর্তে বাসের অর্জিত বেগ যাত্রীর বেগের সমান হবে। $\therefore\ u = f$

(i) হতে পাই, $u = 2u - 100 \Rightarrow u = 100$ এবং $f = 100$

$\therefore$ যাত্রীর বেগ 100 মিটার/ মিনিট এবং বাসের ত্বরণ 100 মিটার/ মি.^{2} ।

5(a) সুষম ত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলন্ত একটি বিন্দুকণা t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে সমান তিনটি ক্রমিক দূরত্ব অতিক্রম করলে, প্রমাণ কর , $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$

[কু.'০৩,'১০; ঢা.'০৪; য.'০৭,'১১; চ.'০৭,'১০,'১২; রা.'০৮; সি.'০৯; ব.'১০; দি.'১২]

প্রমাণঃ মনে করি, সমত্বরণে চলন্ত বিন্দুকণাটি A বিন্দু থেকে u বেগে যাত্রা করে t_1, t_2, t_3 সময় শেষে যথাক্রমে B, C, D তে পোঁছে এবং u_1 , u_2 , u_3 বেগ প্রাপ্ত হয়, যেখানে AB = BC = CD = s (ধরি)।

$$\therefore\ AB = s = \frac{u + u_1}{2} \times t_1 \Rightarrow \frac{s}{t_1} = \frac{1}{2}(u + u_1) \cdots\cdots (i), \ [\ s = \frac{u + v}{2} \times t \text{ সূত্র দ্বারা}\ ]$$

$$BC = s = \frac{u_1 + u_2}{2} \times t_2 \Rightarrow \frac{s}{t_2} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \cdots\cdots (ii)$$

$$CD = s = \frac{u_2 + u_3}{2} \times t_3 \Rightarrow \frac{s}{t_3} = \frac{1}{2}(u_2 + u_3) \cdots\cdots (ii)$$

এবং $AD = 3s = \frac{u + u_3}{2} \times (t_1 + t_2 + t_3) \Rightarrow \frac{3s}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{1}{2}(u + u_3) \cdots (iv)$

এখন , (i) – (ii) + (iii)$\Rightarrow (\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3})s = \frac{1}{2}(u + u_1 - u_1 - u_2 + u_2 + u_3) = \frac{1}{2}(u + u_3) \cdots (v)$

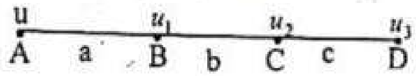
(iv) ও (v) হতে পাই, $\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)s=\frac{3s}{t_1+t_2+t_3}$ $\therefore \frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}=\frac{3}{t_1+t_2+t_3}$ (Proved)

5(b) সুষম ত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলন্ত একটি বিন্দুকণা সমান সময়ে তিনটি ক্রমিক দূরত্ব a, b, c অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, $b=\frac{c+a}{2}$.

প্রমাণঃ মনে করি, সমত্বরণে চলন্ত বিন্দুকণাটি A বিন্দু থেকে u বেগে যাত্রা করে সমান t সময় শেষে যথাক্রমে B, C, D তে পৌঁছে এবং u_1 , u_2 , u_3 বেগ প্রাপ্ত হয়, যেখানে AB = a, BC = b এবং CD = c ।

$\therefore\ AB = a = \frac{u+u_1}{2}\times t \Rightarrow \frac{a}{t}=\frac{1}{2}(u+u_1)\cdots\cdots$ (i) , [$s=\frac{u+v}{2}\times t$ সূত্র দ্বারা]

$BC = b = \frac{u_1+u_2}{2}\times t \Rightarrow \frac{b}{t}=\frac{1}{2}(u_1+u_2)\cdots\cdots$ (ii)



$CD = c = \frac{u_2+u_3}{2}\times t \Rightarrow \frac{c}{t}=\frac{1}{2}(u_2+u_3)\cdots\cdots$ (ii)

এবং $AD = a+b+c = \frac{u+u_3}{2}\times 3t \Rightarrow \frac{a+b+c}{3t}=\frac{1}{2}(u+u_3)\cdots$ (iv)

এখন , (i) – (ii) + (iii) $\Rightarrow \frac{a}{t}-\frac{b}{t}+\frac{c}{t}=\frac{1}{2}(u+u_1-u_1-u_2+u_2+u_3)=\frac{1}{2}(u+u_3)\cdots$(v)

(iv) ও (v) হতে পাই, $\frac{a}{t}-\frac{b}{t}+\frac{c}{t}=\frac{a+b+c}{3t}\Rightarrow 3a-3b+3c=a+b+c\Rightarrow 2(a+c)=4b$

$\therefore\ b=\frac{c+a}{2}$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে করি, f সুষম ত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলন্ত বিন্দুকণাটি u বেগে যাত্রা করে সমান t সময়ে তিনটি ক্রমিক দূরত্ব a,b, c অতিক্রম করে। তাহলে, বিন্দুকণাটি t, 2t ও 3t সময়ে যথাক্রমে a, (a + b) ও (a + b + c) দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore\ a = ut+\frac{1}{2}ft^2\cdots\cdots$ (i), $a+b=u\times(2t)+\frac{1}{2}f\times(2t)^2=2ut+2ft^2\cdots\cdots$ (ii) এবং

$a+b+c=u\times(3t)+\frac{1}{2}f\times(3t)^2=3ut+\frac{9}{2}ft^2\cdots\cdots$ (iii)

$4\times$(i) – (ii) $\Rightarrow 4a-a-b=4ut-2ut\Rightarrow 3a-b=2ut\cdots\cdots$ (iv)

$9\times$(i) – (iii) $\Rightarrow 9a-a-b-c=9ut-3ut\Rightarrow 8a-b-c=6ut\cdots\cdots$ (v)

(iv) ÷ (v) $\Rightarrow \frac{3a-b}{8a-b-c}=\frac{1}{3}\Rightarrow 9a-3b=8a-b-c\Rightarrow a+b=2b\ \therefore b=\frac{c+a}{2}$

5(c) একটি দৌড় প্রতিযোগিতায় একস্থান থেকে দুইজন সাইকেল আরোহী দুইটি সমান্তরাল সরলপথে যথাক্রমে u_1 ও u_2 বেগে চলে একই সময়ে গন্তব্য স্থলে পৌছিল। যদি এদের ত্বরণ যথাক্রমে f_1 ও f_2 হয় তবে দেখাও যে, তারা $2(u_1-u_2)(u_1f_2-u_2f_1)/(f_1-f_2)^2$ দূরত্ব অতিক্রম করেছে।

প্রমাণঃ মনে করি, সাইকেল আরোহী দুইজন t সময়ে s দূরত্বে গন্তব্য স্থলে পৌছে। তাহলে,

১ম জনের ক্ষেত্রে, $s = u_1 t + \frac{1}{2} f_1 t^2 \cdots\cdots$(i) এবং ২য় জনের ক্ষেত্রে, $s = u_2 t + \frac{1}{2} f_2 t^2 \cdots\cdots$ (ii)

$$(i)-(ii) \Rightarrow 0 = (u_1 - u_2)t + \frac{1}{2}(f_1 - f_2)t^2 \Rightarrow t = -\frac{2(u_1 - u_2)}{f_1 - f_2}$$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $s = -\frac{2u_1(u_1 - u_2)}{f_1 - f_2} + \frac{1}{2} f_1 \frac{4(u_1 - u_2)^2}{(f_1 - f_2)^2} = \frac{2(u_1 - u_2)}{(f_1 - f_2)^2}\{-u_1(f_1 - f_2) + f_1(u_1 - u_2)\}$

$\therefore$ তারা $s = 2(u_1 - u_2)(u_1 f_2 - u_2 f_1)/(f_1 - f_2)^2$ দূরত্ব অতিক্রম করেছে।

6(a) একটি কণা স্থিরাবস্থা থেকে সমত্বরণে সরলপথে চলে নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করল। যদি এটা প্রথম সেকেন্ডে 16 মিটার এবং শেষ সেকেন্ডে মোট দূরত্বের $\frac{9}{25}$ অংশ অতিক্রম করে, তাহলে ত্বরণ, মোট দূরত্ব এবং ভ্রমণকাল নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, কণাটি স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা করে f মি./সে.^{2} সমত্বরণে t সেকেন্ডে s মি. দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore \quad s = 0 \times t + \frac{1}{2} f t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} f t^2 \cdots\cdots$ (i)

প্রশ্নমতে, ১ম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s_1 = 0 + \frac{1}{2} f(2.1-1) = 16 \Rightarrow f = 32$

শেষ সেকেন্ডে অর্থাৎ t-তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s_t = 0 + \frac{1}{2} f(2t-1) = \frac{9s}{25} = \frac{9}{25} \times \frac{1}{2} f t^2$, [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow \quad 50t - 25 = 9t^2 \Rightarrow 9t^2 - 50t + 25 = 0 \Rightarrow 9t^2 - 45t - 5t + 25 = 0$

$\Rightarrow (t-5)(9t-5) = 0 \Rightarrow t = 5, 5/9.$

যেহেতু কণাটি প্রথম সেকেন্ডে 16 মিটার যায়, সুতরাং $t > 1$ । অতএব, $t = 5$

(i) হতে পাই, $s = \frac{1}{2} \times 32 \times (5)^2 = 400.$

$\therefore$ ত্বরণ 32 মি./সে.^{2}, ভ্রমণকাল 5 সেকেন্ড এবং মোট দূরত্ব 400 মিটার।

6(b) কোনো সরলরেখা বরাবর চলমান একটি বস্তুকণা ৫ সেকেন্ড পরের অর্ধ সেকেন্ড সময়ে $16\frac{1}{2}$ মিটার দূরত্ব এবং 10 তম সেকেন্ডে 50 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করলে বস্তুকণাটির আদিবেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বস্তুকণাটির আদিবেগ u মি./সে. এবং ত্বরণ f মি./সে.^{2} ।

$\therefore$ 5 সেকেন্ড পরে কণাটির গতিবেগ (ধরি) $v = u + 5f$

শর্তানুসারে কণাটি v গতিবেগে $\frac{1}{2}$ সেকেন্ডে $16\frac{1}{2}$ অর্থাৎ $\frac{33}{2}$ মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore \quad \frac{33}{2} = v \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow 33 = u + 5f + \frac{1}{4} f \Rightarrow u + \frac{21}{4} f = 33 \cdots\cdots$ (i)

আবার, 10 তম সেকেন্ডে কণাটি 50 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore \quad u + \frac{1}{2} f(2 \times 10 - 1) = 50 \Rightarrow u + \frac{19}{2} f = 50 \cdots\cdots$ (ii)

$(ii) - (i) \Rightarrow (\frac{19}{2} - \frac{21}{4}) f = 17 \Rightarrow \frac{38-21}{4} f = 17 \Rightarrow f = 17 \times \frac{4}{17} = 4$

(ii) হতে পাই, $u = 50 - \frac{19}{2} \times 4 = 50 - 38 = 12$

$\therefore$ কণাটির আদি বেগ 12 মি./সে. এবং ত্বরণ 4 মি.সে.^{2} ।

6(c) একটি কণা একটি সরলরেখা বরাবর সমমন্দনে চলে পঞ্চম সেকেন্ডে 7 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে এবং কিছুক্ষণ পরে থেমে যায়। কণাটি এর ভ্রমণকালের শেষতম সেকেন্ডে মোট অতিক্রান্ত পথের $\frac{1}{64}$ অংশ যায়। এর ভ্রমণকাল ও আদিবেগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, কণাটির ভ্রমণকাল t সেকেন্ড, আদিবেগ u মি./সে., সমমন্দন f মি./সে.^{2} এবং মোট দূরত্ব s মি.।

প্রশ্নমতে, $7 = u - \frac{1}{2} f(2 \times 5 - 1) \Rightarrow 2u - 9f = 14 \cdots\cdots (i)$

t সে. শেষে বেগ শূন্য। $\therefore\ 0 = u - ft \Rightarrow u = ft \cdots (ii)$ এবং $s = ut - \frac{1}{2} ft^2 = ft^2 - \frac{1}{2} ft^2 = \frac{1}{2} ft^2$

আবার, $\frac{s}{64} = u - \frac{1}{2} f(2t-1) = ft - ft + \frac{1}{2} f = \frac{1}{2} f \Rightarrow s = 32f \Rightarrow \frac{1}{2} ft^2 = 32f \Rightarrow t^2 = 64 \Rightarrow t = 8$

(ii) হতে পাই, $u = 8f \Rightarrow f = \frac{u}{8}$ $\therefore$ (i) হতে পাই, $2u - \frac{9}{8} u = 14 \Rightarrow \frac{7}{8} u = 14 \Rightarrow u = 16$

$\therefore$ কণাটির ভ্রমণকাল ৮ সেকেন্ড ও আদিবেগ 16 মি./সে.।

6(d) একটি কণা সুষম ত্বরণে সরলরেখায় চলছে। কণাটি একাদশ ও পঞ্চদশ সেকেন্ডে যথাক্রমে 720 সে.মি. ও 960 সে.মি. পথ অতিক্রম করে। তাহলে কণাটি 20 সেকেন্ডে কত পথ অতিক্রম করবে?

সমাধান ঃ মনে করি, বিন্দুটির আদিবেগ u সে.মি./সে. এবং ত্বরণ f সে.মি./সে.^{2} ।

বিন্দুটি একাদশ ও পঞ্চদশ সেকেন্ডে যথাক্রমে 720 সে.মি. ও 960 সে.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore\ u + \frac{1}{2} f(2 \times 11 - 1) = 720 \Rightarrow 2u + 21f = 1440 \cdots\cdots (i)$ এবং

$u + \frac{1}{2} f(2 \times 15 - 1) = 960 \Rightarrow 2u + 29f = 1920 \cdots\cdots (ii)$

$(ii) - (i) \Rightarrow 8f = 480 \Rightarrow f = 60$ এবং (i) হতে, $2u + 21 \times 60 = 1440 \Rightarrow 2u = 180 \Rightarrow u = 90$

$\therefore$ 20 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \{90 \times 20 + \frac{1}{2} \times 60 \times (20)^2\} = 13800$ সে.মি.।

6(e) সরলরেখায় ধ্রুব ত্বরণে চলমান একটি কণা পরপর দুই সেকেন্ডে যথাক্রমে 10 মিটার ও 15 মিটার পথ অতিক্রম করে। কণাটির ত্বরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, u মি./সে. আদিবেগে এবং f মি./সে.^{2} ধ্রুব ত্বরণে চলমান কণাটি t ও (t + 1) তম সেকেন্ডে যথাক্রমে 10 মিটার ও 15 মিটার পথ অতিক্রম করে।

$\therefore\ 10 = u + \frac{1}{2} f(2t-1) \cdots\cdots (i)$ এবং $15 = u + \frac{1}{2} f\{2(t+1) - 1\} = u + \frac{1}{2} f(2t+1) \cdots\cdots (ii)$

এখন, (ii) – (i) $\Rightarrow 5 = \frac{1}{2} f(2t + 1 - 2t + 1) \Rightarrow f = 5$ $\therefore$ কণাটির ত্বরণ 5 মি./সে.^{2} ।

6(f) **f** সমত্বরণে সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণা **t** তম এবং **(t + n)** তম সেকেন্ডে যথাক্রমে **x** এবং **y** মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, $f = \frac{y - x}{n}$ মি./সে.^{2} ।

প্রমাণঃ মনে করি, কণাটির আদিবেগ u মি./সে. ।

প্রশ্নমতে, $x = u + \frac{1}{2} f(2t - 1) \cdots \cdots$ (i) এবং $y = u + \frac{1}{2} f\{2(t + n) - 1\} \cdots \cdots$ (ii)

এখন, (ii) – (i) $\Rightarrow y - x = \frac{1}{2} f(2t + 2n - 1 - 2t + 1) = nf$ $\therefore$ ত্বরণ $f = \frac{y - x}{n}$ মি./সে.^{2} ।

6(g) একটি বস্তুকণা স্থিরাবস্থা হতে যাত্রা করে সরলপথে সুষম ত্বরণে চলে চতুর্থ সেকেন্ডে **14 cm** দূরত্ব অতিক্রম করে। অষ্টম সেকেন্ডে কণাটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুকণাটির স্থিরাবস্থা হতে f সে.মি./সে.^{2} ত্বরণে যাত্রা করে।

প্রশ্নমতে, $14 = 0 + \frac{1}{2} f(2 \times 4 - 1) \Rightarrow 7f = 28 \Rightarrow f = 4$

$\therefore$ অষ্টম সেকেন্ডে কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \{0 + \frac{1}{2} f(2 \times 8 - 1)\}$ cm $= \frac{15}{2} \times 4$ m $= 30$ m

7. একটি রেলগাড়ী A থেকে B পর্যন্ত $\frac{1}{2}$ কি.মি. পথ 50 সেকেন্ডে এবং B থেকে C পর্যন্ত $\frac{3}{4}$ কি.মি. পথ একই সময়ে অতিক্রম করে। ত্বরণ সুষম হলে A এবং C বিন্দুতে গাড়ির বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, রেলগাড়ীটির ত্বরণ f কি.মি./ মি.^{2} এবং A ও C বিন্দুতে বেগ যথাক্রমে u ও v কি.মি./ মি. ।

50 সেকেন্ড $= \frac{50}{60}$ মি. $= \frac{5}{6}$ মি. $\therefore$ 100 সেকেন্ড $= 2 \times \frac{5}{6}$ মি. $= \frac{5}{3}$ মি.

$\therefore$ $AB = \frac{1}{2} = u \times \frac{5}{6} + \frac{1}{2} f \times (\frac{5}{6})^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{6} u + \frac{25}{72} f \Rightarrow 1 = \frac{5}{3} u + \frac{25}{36} f \cdots \cdots$ (i) এবং

$AC = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = u \times \frac{5}{3} + \frac{1}{2} f (\frac{5}{3})^2 \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{5}{3} u + \frac{25}{18} f \cdots \cdots$ (ii)

এখন, (ii) – (i) $\Rightarrow (\frac{25}{18} - \frac{25}{36}) f = \frac{5}{4} - 1 \Rightarrow \frac{25}{36} f = \frac{1}{4} \Rightarrow f = \frac{36}{25 \times 4} = \frac{9}{25}$

(i) হতে পাই, $1 = \frac{5}{3} u + \frac{25}{36} \times \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{5}{3} u = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow u = \frac{9}{20}$

আবার, $v = u + ft = \frac{9}{20} + \frac{9}{25} \times \frac{5}{3} = \frac{9}{20} + \frac{3}{5} = \frac{9 + 12}{20} = \frac{21}{20}$

$\therefore$ A এবং C বিন্দুতে গাড়ির বেগ যথাক্রমে $\frac{9}{20}$ কি.মি./ মি.= 27 কি.মি./ঘ. ও $\frac{21}{20}$ কি.মি./ মি.= 63 কি.মি./ঘ. ।

8(a) দুইটি রেলগাড়ি একই সরল রেলপথে u_1 ও u_2 গতিবেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব যখন x তখন পরস্পরকে দেখতে পায়। ব্রেক প্রয়োগ করে রেলগাড়ি দুইটি যদি যথাক্রমে সর্বোচ্চ f_1 এবং f_2 মন্দন সৃষ্টি করে, তবে প্রমাণ কর যে, (i) সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 \le 2f_1 f_2 x$ হয়।
(ii) কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 = 2f_1 f_2 x$ হয়। [রা.'০৩,'১৩; ব. '০৫; সি.'০৬]

প্রমাণঃ মনে করি, ব্রেক প্রয়োগ করে f_1 ও f_2 মন্দনে গাড়ী দুইটি যথাক্রমে x_1 ও x_2 দূরত্ব অতিক্রম করে থেমে যায়।

তাহলে, $0^2 = u_1^2 - 2f_1 x_1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{u_1^2}{2f_1}$ এবং $0^2 = u_2^2 - 2f_2 x_2 \Rightarrow x_2 = \dfrac{u_2^2}{2f_2}$

(i) সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $x_1 + x_2 \le x$ অর্থাৎ $\dfrac{u_1^2}{f_1} + \dfrac{u_2^2}{f_2} \le 2x$ অর্থাৎ $u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 \le 2f_1 f_2 x$ হয়।

(ii) কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $x_1 + x_2 = x$ বা, $\dfrac{u_1^2}{f_1} + \dfrac{u_2^2}{f_2} = 2x$ বা, $u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 = 2f_1 f_2 x$ হয়।

8(b) দুইটি রেলগাড়ি একই সরল রেলপথে u_1 ও u_2 $(u_1 > u_2)$ গতিবেগে একই দিকে অগ্রসর হচ্ছে। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব যখন x তখন এরা পরস্পরকে দেখতে পায়। রেলগাড়ি দুইটির সর্বোচ্চ মন্দন ও সর্বোচ্চ ত্বরণ যথাক্রমে f_1 এবং f_2 হলে দেখাও যে, কোন রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $(u_1 - u_2)^2 = 2(f_1 + f_2)x$ হয়। [ঢা.'০১; ব.'০২]

প্রমাণঃ মনে করি, u_1 ও u_2 বেগে গতিশীল রেলগাড়ি দুইটি t সময়ে যথাক্রমে x_1 ও x_2 দূরত্ব অতিক্রম করে এবং v_1 ও v_2 বেগ অর্জন করে।

কোন রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $v_1 = v_2$ ⋯ ⋯ (i) এবং $x_1 = x + x_2$ ⋯ ⋯ (ii) হয়।

(i) হতে পাই, $u_1 - f_1 t = u_2 + f_2 t \Rightarrow (f_1 + f_2)t = u_1 - u_2 \Rightarrow t = \dfrac{u_1 - u_2}{f_1 + f_2}$

(ii) হতে পাই, $u_1 t - \dfrac{1}{2} f_1 t^2 = u_2 t + \dfrac{1}{2} f_2 t^2 + x_2 \Rightarrow (u_1 - u_2)t = \dfrac{1}{2}(f_1 + f_2)t^2 + x$

$$\Rightarrow (u_1 - u_2) \times \frac{u_1 - u_2}{f_1 + f_2} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \times \frac{(u_1 - u_2)^2}{(f_1 + f_2)^2} + x \Rightarrow \frac{(u_1 - u_2)^2}{f_1 + f_2} = \frac{1}{2}\,\frac{(u_1 - u_2)^2}{f_1 + f_2} + x$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(u_1 - u_2)^2}{f_1 + f_2} = x$ ∴ কোন রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $(u_1 - u_2)^2 = 2(f_1 + f_2)x$ হয়।

9. একটি চলমান কণার উপর পরস্পর $90°$ কোণে নত সরলরেখা বরাবর $3\,ms^{-2}$ এবং $4\,ms^{-2}$ ত্বরণ কার্যরত আছে। 2 সেকেন্ডে এর ত্বরণ কত হবে?

সমাধান ঃ সমকোণে ক্রিয়াশীল $f_1 = 3\,\text{ms}^{-2}$ ও $f_2 = 4\,\text{ms}^{-2}$ ত্বরণ দুইটির লব্ধি ত্বরণ f হলে ত্বরণের সামান্তরিক সূত্র থেকে পাই,

$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}\ \text{ms}^{-2} = 5\ \text{ms}^{-2}$

∴ 2 সেকেন্ডে এর ত্বরণ $= 5 \times 2\ \text{ms}^{-2} = 10\ \text{ms}^{-2}$

10. কোনো সরলরেখায় একটি বিন্দু হতে একটি কণা **u** সমবেগে এবং অপর একটি কণা **f** সমত্বরণে একই সময়ে একই দিকে যাত্রা করল। দেখাও যে, মিলিত হওয়ার পূর্বে $\frac{u}{f}$ সময়ে তাদের বৃহত্তম দূরত্ব $\frac{u^2}{2f}$ হবে।

সমাধান : মনে করি, t সময় পরে তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব d. তাহলে,

t সময় পরে ১ম বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব $d_1 = ut$ এবং ২য় বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব $d_2 = 0\times t + \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2}ft^2$

$\therefore\ d_1 - d_2 = d \Rightarrow ut - \frac{1}{2}ft^2 = d \Rightarrow ft^2 - 2ut + 2d = 0$

t অবশ্যই বাস্তব হবে। $\therefore (-2u)^2 - 4\times f\times 2d \geq 0 \Rightarrow 4u^2 - 8fd \geq 0 \Rightarrow d \leq \frac{u^2}{2f}\ \therefore d_{max.} = \frac{u^2}{2f}$

এক্ষেত্রে, t এর মানদ্বয় সমান হবে। $\therefore\ 2t = -\frac{-2u}{f} \Rightarrow t = \frac{u}{f}$

$\therefore$ বস্তু দুটির মধ্যবর্তী সর্বাধিক দূরত্ব $\frac{u^2}{2f}$ এবং $\frac{u}{f}$ সময় পরে তারা পুনরায় মিলিত হবে।

11. সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণার ত্বরণ $f = 2t - 7$ দ্বারা প্রকাশিত। $u = 6$ যখন $s = 0$ এবং $t = 0$, v ও s এর মান t এর মাধ্যমে নির্ণয় কর। বস্তুকণাটি কখন থেমে যায়?

সমাধান : $\frac{dv}{dt} = f = 2t - 7 \Rightarrow dv = (2t-7)\,dt$

v এর 6 থেকে v এবং t এর 0 থেকে t সীমাসহ সমাকলন করে পাই, $[v]_6^v = [t^2 - 7t]_0^t$

$\Rightarrow v - 6 = t^2 - 7t - 0 \Rightarrow v = t^2 - 7t + 6$ (Ans.)

আবার, $\frac{ds}{dt} = v = t^2 - 7t + 6 \Rightarrow ds = (t^2 - 7t + 6)\,dt$

s এর 0 থেকে s এবং t এর 0 থেকে t সীমাসহ সমাকলন করে পাই, $[s]_0^s = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 6t\right]_0^t$

$\Rightarrow s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 6t$ (Ans.)

বস্তুকণাটি যখন থেমে যায়, তখন $v = 0$. $\therefore t^2 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-6) = 0 \Rightarrow t = 1, 6.$

$\therefore$ বস্তুকণাটি 1 ও 6 সে. পর থেমে যায়।

12. সরলরেখায় চলমান একটি বিন্দুর বেগ $v^2 = as^2 + 2bs + c$ দ্বারা প্রকাশিত। দেখাও যে এর ত্বরণ $f = a(s + b/a)$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $v^2 = as^2 + 2bs + c$.

$\therefore\ \frac{d}{ds}(v^2) = a\frac{d}{ds}(s^2) + 2b\frac{d}{ds}(s) + \frac{d}{ds}(c) \Rightarrow 2v\frac{dv}{ds} = 2as + 2b \Rightarrow v\frac{dv}{ds} = a(s + b/a)$

$\therefore$ ত্বরণ $f = \frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt}.\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{ds} = a(s + b/a)$

1.1. একটি বস্তুকণা $s = \frac{1}{2}vt$ নিয়মে একটি সরলরেখায় চলমান। দেখাও যে, এর ত্বরণ ধ্রুবক।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $s = \frac{1}{2}vt$ $\therefore v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(vt) = \frac{1}{2}(t\frac{dv}{dt} + v) = \frac{1}{2}t\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}v$

$\Rightarrow v = t\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dt}{t}$

সমাকলন করে পাই, $\ln v = \ln t + \ln k \Rightarrow \ln v = \ln(kt) \Rightarrow v = kt$

$\therefore$ ত্বরণ $f = \frac{dv}{dt} = k =$ ধ্রুবক (Showed)

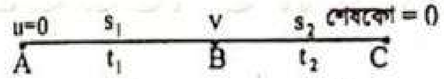
অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1(a) শহরতলীতে ট্রেনে যাতায়াতের জন্য প্রতি s দূরত্বে পর পর স্টেশন আছে। যাত্রীদের সুবিধার জন্য সর্বোচ্চ ত্বরণ a ও সর্বোচ্চ মন্দন r নির্ধারণ করা হল। দেখাও যে, সোজারেলপথে এক স্টেশন থেকে পরবর্তী স্টেশনে যাবার সময়, $t = \sqrt{\frac{2s(a+r)}{ar}}$.

প্রমাণঃ মনে করি, ট্রেনটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে a সমত্বরণে t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে B তে v বেগ প্রাপ্ত হয়। অতপর B হতে v আদিবেগে r সমমন্দনে t_2 সময়ে s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে C স্টেশনে থামে।

প্রশ্নমতে, $s_1 + s_2 = s$, মোট সময় $t = t_1 + t_2$

AB অংশে ঃ $v = 0 + at_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v}{a} \cdots\cdots$ (i)



এবং $s_1 = \frac{0+v}{2} \times t_1 = \frac{vt_1}{2} \cdots\cdots$ (ii)

BC অংশে ঃ $0 = v - rt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v}{r} \cdots\cdots$ (iii) এবং $s_2 = \frac{v+0}{2} \times t_2 = \frac{vt_2}{2} \cdots\cdots$ (iv)

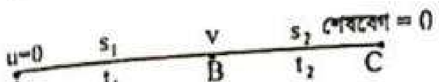
(ii) + (iv) $\Rightarrow s_1 + s_2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2) \Rightarrow s = \frac{v}{2} \times t \Rightarrow v = \frac{2s}{t}$. [$\because s_1 + s_2 = s,\ t_1 + t_2 = t$]

(i) + (iii) $\Rightarrow t_1 + t_2 = v(\frac{1}{a} + \frac{1}{r}) \Rightarrow t = \frac{2s}{t} \times \frac{a+r}{ar} \Rightarrow t^2 = \frac{2s(a+r)}{ar}$ $\therefore t = \sqrt{\frac{2s(a+r)}{ar}}$

1(b) ঢাকা থেকে সোজা রেলপথে ছেড়ে আন্তঃনগর ট্রেনটি নরসিংদীতে থামে এর বেগ সমত্বরণে ক্রমশ বেড়ে সর্বোচ্চ v হয় এবং পরে সমমন্দনে কমে যায়। স্টেশন দুইটির দূরত্ব x হলে, ঢাকা থেকে নরসিংদী যেতে ট্রেনটির কতক্ষণ লাগবে?

সমাধান ঃ মনে করি, ট্রেনটি ঢাকার A স্টেশন থেকে যাত্রা করে সমত্বরণে t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে B তে v বেগ প্রাপ্ত হয়। অতপর B হতে v আদিবেগে সমমন্দনে t_2 সময়ে s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে নরসিংদীর C স্টেশনে থামে।

প্রশ্নমতে, $s_1 + s_2 = x$, মোট সময় $t = t_1 + t_2$



এখন $AB = s_1 = \frac{0+v}{2} \times t_1 = \frac{vt_1}{2} \cdots\cdots$ (i).

$CB = s_2 = \frac{v+0}{2} \times t_2 = \frac{vt_2}{2}$ …… (ii)

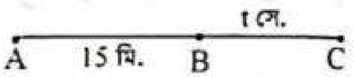
(i) + (ii) $\Rightarrow s_1 + s_2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2) \Rightarrow x = \frac{v}{2}t \Rightarrow t = \frac{2x}{v}$

$\therefore$ ঢাকা থেকে নরসিংদী যেতে ট্রেনটির $\frac{2x}{v}$ সময় লাগবে।

2(a) একটি বিড়াল এর সম্মুখে 15 মিটার দূরত্বে একটি ইঁদুর দেখতে পেয়ে তাকে ধরার জন্য $2\,ms^{-2}$ সমত্বরণে দৌড়াতে শুরু করল। ইঁদুরটি $14\,ms^{-1}$ সমবেগে সরলপথে চলতে থাকলে, কোথায় এবং কখন বিড়ালটি ইঁদুরটিকে ধরতে পারবে?.

সমাধান ঃ মনে করি, A বিন্দু থেকে স্থিরাবস্থায় বিড়ালটি সুষম ত্বরণে এবং B বিন্দু থেকে ইঁদুরটি সমবেগে একই সাথে দৌড়াতে লাগল এবং t সে. পরে C বিন্দুতে বিড়ালটি ইঁদুরটিকে ধরতে সক্ষম হয়, যেখানে AB = 15 মি.।

$\therefore$ t সে. বিড়ালের অতিক্রান্ত দূরত্ব $AC = (0.t + \frac{1}{2}.2.t^2) = t^2$ মি.



t সে. ইঁদুরের অতিক্রান্ত দূরত্ব $BC = 14t$ মি., [$s = vt$ সূত্র দ্বারা]

এখন, $AC = AB + BC \Rightarrow t^2 = 15 + 14t \Rightarrow t^2 - 14t - 15 = 0$

$\Rightarrow t^2 - 15t + t - 15 = 0 \Rightarrow (t-15)(t+1) = 0 \therefore t = 15$, যেহেতু সময় t ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ বিড়ালটি 15 সেকেন্ডে তার যাত্রাস্থান থেকে 15^2 অর্থাৎ 225 মিটার দূরে ইঁদুরটি ধরতে পারবে।

2(b) x দূরত্বে একজন চোর দেখে একজন কনস্টবল u বেগে এবং α সুষম ত্বরণে তাকে ধরার জন্য দৌড় শুরু করল। স্থির অবস্থা থেকে চোর β ত্বরণে দৌড় শুরু করলে দেখাও যে, কনস্টবল চোরকে ধরতে পারবে যদি $\alpha \geq \beta$ অথবা, $\alpha < \beta < \alpha + \frac{u^2}{2x}$ হয়।

প্রমাণ ঃ মনে করি, কনস্টবল ও চোর যথাক্রমে C ও T অবস্থান হতে দৌড় শুরু করল এবং t সময়ে কনস্টবল P বিন্দুতে ধরে ফেলল।

$\therefore\ CP = CT + TP \Rightarrow ut + \frac{1}{2}\alpha t^2 = x + \frac{1}{2}\beta t^2 \Rightarrow (\beta - \alpha)t^2 + 2ut + 2x = 0$

t এর বাস্তব মানের জন্য, $(2u)^2 - 4 \times (\beta - \alpha) \times 2x \geq 0 \Rightarrow u^2 - 2x(\beta - \alpha) \geq 0$; ইহা সত্য হবে যদি $\alpha \geq \beta$ হয় অথবা যদি $\alpha < \beta$ হয়। পরবর্তী ক্ষেত্রে, $\beta < \alpha + \frac{u^2}{2x}$.

সুতরাং কনস্টবল চোরকে ধরতে পারবে যদি $\alpha \geq \beta$ অথবা, $\alpha < \beta < \alpha + \frac{u^2}{2x}$ হয়।

3. একটি বস্তুকণা সুষম ত্বরণে যাত্রা করে t সময়ে 'a_t' দূরত্ব অতিক্রম করে এবং v_t বেগ অর্জন করে। প্রমাণ কর যে, $\frac{a_{t+1}}{t+1} - \frac{2a_t}{t} + \frac{a_{t-1}}{t-1} = v_{t+1} - 2v_t + v_{t-1}$.

প্রমাণ ঃ মনে করি, বস্তুকণাটির ত্বরণ f। তাহলে, $a_t = v_t t + \frac{1}{2}ft^2 \Rightarrow \frac{a_t}{t} = v_t + \frac{1}{2}ft$

$\therefore \ \dfrac{a_{t+1}}{t+1} = v_{t+1} + \dfrac{1}{2}f(t+1)$, $\dfrac{a_{t-1}}{t-1} = v_{t-1} + \dfrac{1}{2}f(t-1)$

L.H. S. $= \dfrac{a_{t+1}}{t+1} - \dfrac{2a_t}{t} + \dfrac{a_{t-1}}{t-1} = v_{t+1} + \dfrac{1}{2}f(t+1) - 2(v_t + \dfrac{1}{2}ft) + v_{t-1} + \dfrac{1}{2}f(t-1)$

$= v_{t+1} - 2v_t + v_{t-1} + \dfrac{1}{2}f(t+1-2t+t-1) = v_{t+1} - 2v_t + v_{t-1} =$ R.H.S.

4. 's' দূরত্ব সমান n ভাগে বিভক্ত এবং স্থির অবস্থা থেকে f ত্বরণে একটি চলমান বস্তুকণা যাত্রা করে প্রতি অংশ অতিক্রম শেষে ত্বরণ $\dfrac{f}{n}$ বৃদ্ধি পায়। দেখাও যে, মোট 's' দূরত্ব অতিক্রম শেষে বস্তুকণাটির বেগ $\sqrt{fs(3-\frac{1}{n})}$ হবে।

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রতি $\dfrac{s}{n}$ অংশ অতিক্রম শেষে চলমাণ বস্তুকণাটির বেগ যথাক্রমে $v_1, v_2 \cdots \cdots, v_n$.

$\therefore \ v_1^2 = 0 + 2f.\dfrac{s}{n}$, $v_2^2 = v_1^2 + 2(f+\dfrac{f}{n}).\dfrac{s}{n} = 2f.\dfrac{s}{n} + 2(f+\dfrac{f}{n}).\dfrac{s}{n} = 2f.\dfrac{s}{n}\{1+(1+\dfrac{1}{n})\}$,

$v_3^2 = v_2^2 + 2(f+\dfrac{2f}{n}).\dfrac{s}{n} = 2f.\dfrac{s}{n}\{1+(1+\dfrac{1}{n})\} + 2(f+\dfrac{2f}{n}).\dfrac{s}{n} = 2f.\dfrac{s}{n}\{1+(1+\dfrac{1}{n})+(1+\dfrac{2}{n})\}$

অনুরূপ, $v_n^2 = v_{n-1}^2 + 2\{f+\dfrac{(n-1)f}{n}\}.\dfrac{s}{n} = 2f.\dfrac{s}{n}\{1+(1+\dfrac{1}{n})+(1+\dfrac{2}{n})+\cdots+(1+\dfrac{n-1}{n})\}$

$\Rightarrow v_n^2 = 2f.\dfrac{s}{n}\{n+\dfrac{1}{n}(1+2+3+\cdots\cdots+(n-1))\} = 2f.\dfrac{s}{n}\{n+\dfrac{1}{n}\dfrac{(n-1)n}{2}\}$

$= 2f.\dfrac{s}{n}(n+\dfrac{n-1}{2}) = 2f.\dfrac{s}{n}.\dfrac{3n-1}{2} = fs(3-\dfrac{1}{n}) \ \therefore \ v_n = \sqrt{fs(3-\dfrac{1}{n})}$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ:

1. একটি গাড়ি ঘন্টায় 8 কি.মি. বেগে চলে। গাড়ি থেকে ঘন্টায় 16 কি.মি. বেগে একটি বস্তু কোণ দিকে নিক্ষেপ করলে বস্তুটি গাড়ির বেগের সাথে সমকোণে চলবে? **[KUET 06-07; RU 06-07]**

Sol^n : $\cos\alpha = -8/16 = -1/2 \Rightarrow \alpha = 120°$

2. 36 মি./সে. বেগে চলন্ত একটি ট্রেনের যাত্রীর নিকট মনে হয় যে বৃষ্টির ধারা উল্লম্বের সাথে $\sin^{-1}(3/\sqrt{13})$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃষ্টির গতিবেগ কত হবে? **[RU 09-10]**

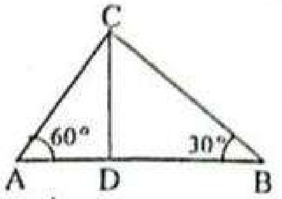
Sol^n : গাড়ির বেগ = বৃষ্টির বেগ $\times \tan\theta \Rightarrow 36 =$ বৃষ্টির বেগ $\times \tan\sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ $\therefore$ বৃষ্টির বেগ = 24 মি./সে.।

3. AB সরলরেখার সাথে 60° কোণে A বিন্দু হতে একটি কণা যাত্রা করে। BA সরলরেখার সাথে 30° কোণে B বিন্দু হতে একই সময়ে অপর একটি কণা ঘন্টায় 10 কি.মি. সমবেগে যাত্রা করে এবং কছুক্ষণ পর প্রথম কণার সাথে মিলিত হয়। প্রথম কণার বেগ নির্ণয় কর? **[BUET 10-11]**

Sol^n : ধরি, প্রথম কণার বেগ x কি.মি./ঘ. এবং t ঘন্টা পর তারা C বিন্দুতে মিলিত হয়।

$\therefore$ AC = xt , BC = 10t

এখন, $CD = AC \sin 60^\circ = BC \sin 30^\circ$



$\Rightarrow xt \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10t \times \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3}}$

কৌশল : নৌকার বেগ u , স্রোতের বেগ v , নদীর প্রস্থ s হলে,

(a) সর্বনিম্ন সময়ে নদী পারাপারের ক্ষেত্রে, লব্ধি বেগ, $w = u \sin \alpha$, সময় $t = \frac{s}{u \sin \alpha}$

(b) সর্বনিম্ন দূরত্বে/ সোজাসুজি নদী পারাপারের ক্ষেত্রে,লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 - v^2}$, $t = s/\sqrt{u^2 - v^2}$ এবং w, v এর সাথে লম্ব হলে, $\cos \alpha = -v/u$

4. স্রোতহীন অবস্থায় 100 মি. প্রশস্ত একটি নদী সাঁতরাইয়া একজন লোক 4 মিনিটে সোজাসুজি একে অতিক্রম করতে পারে। কিন্তু স্রোত থাকলে সে একই পথে 5 মিনিটে একে অতিক্রম করে। স্রোতের গতিবেগ কত?

[BUET 09-10, 05-06; Kuet 08-09,06-07; HSTU 08-09]

Sol^n : সাঁতারুর বেগ, $u = 100/4 = 25$ মি./সে., সোজাসুজি নদী পারাপারের ক্ষেত্রে, $\sqrt{u^2 - v^2} = 100/5 = 20$

$\therefore\ 25^2 - v^2 = 20^2 \Rightarrow v^2 = 225 \Rightarrow v = 15$ মি./সে.

5. স্রোতের দ্বিগুণ গতিতে নৌকা চালিয়ে নদীর ঠিক অপর পাড়ে পৌছাতে হলে স্রোতের গতির দিকে কত কোণে চালাতে হবে? **[BAU 06-07]**

Sol^n : সোজাসুজি নদী পারারের ক্ষেত্রে, $\cos \alpha = -v/u = -v/2v = -1/2 \Rightarrow \cos \alpha = 120^\circ$

কৌশল : কোন গুলি তার লক্ষ্যস্থলের s দূরত্ব অতিক্রম করতে বেগের $\frac{1}{n}$ অংশ হারালে থেমে যাবার পূর্বে এটি আর যে দূরত্ব অতিক্রম করবে তার মান , $x = \frac{s(n-1)^2}{2n-1}$

6. একটি বুলেট লক্ষ্য বস্তুর 2 ইঞ্চি ভিতরে প্রবেশ করতে তার অর্ধেক বেগ হারায়। লক্ষ্য বস্তুর প্রতিরোধ সুষম হলে আর কত দূর এটি প্রবেশ করবে? **[DU 09-10; BUET 09-10; RUET 10-11, 06-07; RU 09-10]**

Sol^n : দূরত্ব $= \frac{2(2-1)^2}{2.2-1} = \frac{2}{3}$ ইঞ্চি।

7. একটি গাড়ি সমত্বরণে 30 কি.মি./ঘ. আদিবেগে 100 কি.মি. পথ অতিক্রম করে 50 কি.মি./ঘ. চূড়ান্ত বেগ প্রাপ্ত হয়। গাড়িটির ত্বরণ কত? **[DU 10-11]**

Sol^n : $v^2 = u^2 + 2fs \Rightarrow 50^2 = 30^2 + 2f.100 \Rightarrow f = 8$ কি.মি./ঘ.।

8. একটি গাড়ি স্থিতাবস্থা হতে সমত্বরণে চলা শুরু করে 5 সেকেন্ডে 180 মি./সে. গতিবেগ প্রাপ্ত হল। গাড়িটির ত্বরণ কত? **[DU 04-05, 06-07;HSTU 05-06]**

Sol^n : ত্বরণ $f = \frac{v-u}{t} = \frac{180-0}{5} = 36$ মি./সে.^{2}

কৌশল : কোন ব্যক্তির কোন স্থানে গমনের বেগ u, ফিরে আসার বেগ v হলে ঐ ব্যক্তির গড় বেগ = $\frac{2uv}{u+v}$

9. একজন ব্যক্তি কোন স্থানে যাওয়ার সময় ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে যায় এবং আসার সময় ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে ফেরত আসে। তার গড় গতিবেগ কত?

Sol^n : গড় বেগ $= \frac{2uv}{u+v} = \frac{2\times4\times5}{4+5} = \frac{40}{9}$ [RU 09-10; KU 09-10]

10. একটি কণা সরলরেখা বরাবর চলে কোন এক সেকেন্ডে 10 মি. পথ অতিক্রম করে এবং পরবর্তী 4 সেকেন্ডে 60 মি. পথ অতিক্রম করে। কণাটির সমত্বরণ কত?

[KUET 07-08; KU 08-09]

Sol^n : $S_t = u + \frac{1}{2}f(2t-1) \Rightarrow u + ft - \frac{1}{2}f = 10$ এবং $v = u + ft = 10 + \frac{1}{2}f$

এখন, $60 = v.4 + \frac{1}{2}f.4^2 \Rightarrow 15 = 10 + \frac{1}{2}f + 2f \Rightarrow \frac{5}{2}f = 5 \therefore f = 2$

11. একটি বস্তু স্থির অবস্থা হতে যাত্রা আরম্ভ করে ১ম সেকেন্ডে 1 মি. দূরত্ব অতিক্রম করে পরবর্তী 1 মি. দূরত্ব অতিক্রম করতে বস্তুটির কত সময় লাগবে?

[RU 06-07]

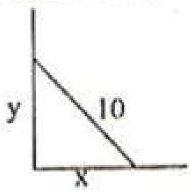
Sol^n : $S_1 = 1 = \frac{1}{2}f\times1^2 \Rightarrow f = 2$ মি./সে.^{2} । $\therefore S_2 = 1+1 = 0 + \frac{1}{2}f(t+1)^2 = \frac{1}{2}.2(t+1)^2$

$\Rightarrow (t+1)^2 = 2 \Rightarrow t = \sqrt{2} - 1 = 0{\cdot}414$ সে.।

12. 10 ফুট দৈর্ঘ্যের একটি মই একটি খাড়া দেয়ালের (y বরাবর) সাথে হেলানো আছে। যদি মইটির মেঝে সংলগ্ন প্রান্ত v বেগে দেয়ালের x বরাবর দূরে সরতে থাকে তবে দেয়াল সংলগ্ন প্রান্তের বেগ কত? [BUET 09-10]

Sol^n : $x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow xv + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{xv}{y}$



প্রশ্নমালা IX D

1. (a) মাধ্যাকর্ষণের প্রভাবে 500 মিটার উচ্চ স্থান হতে পড়ন্ত কোন বস্তু-

(i) যে বেগ প্রাপ্ত হয় তা নির্ণয় কর।(ii) 4 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। (iii) ভূমিতে পতনকাল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ এখানে, পড়ন্ত বস্তুটির আদিবেগ $u = 0$, উচ্চতা $h = 500$ m.

(i) 4 সেকেন্ডে প্রাপ্ত বেগ $= u + gt = 0 + 9{\cdot}8 \times 4 = 39{\cdot}2$ ms^{-1}.

(ii) 4 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= ut + \frac{1}{2}gt^2 = 0 + \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times 4^2 = 78{\cdot}4$ m.

(iii) ধরি, t সেকেন্ড পরে বস্তুটি ভূমিতে পতিত হয়।

তাহলে, $h = ut + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 500 = 0 + \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{1000}{9{\cdot}8} \Rightarrow t = 10{\cdot}1015$ (প্রায়)

$\therefore$ বস্তুটির ভূমিতে পতনকাল 10·1015 সেকেন্ড (প্রায়)।

1(b) একটি ব্রীজের উপর থেকে একটি পাথরের টুকরা 12·4 ms^{-1} বেগে খাড়া নিম্নদিকে নিক্ষেপ করলে তা 2 সেকেন্ডে পানিতে আঘাত করে। পানিতে আঘাতের সময় পাথরের বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ পাথরের টুকরাটি $u = 12{\cdot}4$ ms^{-1} বেগে খাড়া নিম্নদিকে নিক্ষেপ করে $t = 2$ সে. v ms^{-1} বেগে পানিতে আঘাত করলে, $v = u + gt = 12{\cdot}4 + 9{\cdot}8 \times 2 = 32$. $\therefore$ পানিতে আঘাতের সময় পাথরের বেগ 32 ms^{-1}.

(c) ভূ-পৃষ্ঠের উর্ধ্বে h_1, h_2, h_3 উচ্চতা থেকে তিনটি বস্তু খাড়া নিচের দিকে যথাক্রমে v_1, v_2, v_3 বেগে ছোড়া হল। এরা একই সাথে ভূ-পৃষ্ঠে পড়লে প্রমাণ কর যে, $h_1 - h_2 : h_2 - h_3 : h_3 - h_1 = v_1 - v_2 : v_2 - v_3 : v_3 - v_1$

প্রমাণ ঃ মনে করি, বস্তু তিনটি t সময়ে ভূ-পৃষ্ঠে পড়ে। তাহলে, $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ সূত্রের সাহায্যে পাই,

$h_1 = v_1 t + \frac{1}{2}gt^2 \cdots\cdots$(i), $h_2 = v_2 t + \frac{1}{2}gt^2 \cdots\cdots$ (ii), $h_3 = v_3 t + \frac{1}{2}gt^2 \cdots\cdots$ (iii)

(i) – (ii) $\Rightarrow h_1 - h_2 = t(v_1 - v_2) \Rightarrow t = \frac{h_1 - h_2}{v_1 - v_2}$

অনুরূপ, (ii) – (iii) $\Rightarrow t = \frac{h_2 - h_3}{v_2 - v_3}$ এবং (iii) – (i) $\Rightarrow t = \frac{h_3 - h_1}{v_3 - v_1}$

$\therefore \frac{h_1 - h_2}{v_1 - v_2} = \frac{h_2 - h_3}{v_2 - v_3} = \frac{h_3 - h_1}{v_3 - v_1}$ অর্থাৎ $h_1 - h_2 : h_2 - h_3 : h_3 - h_1 = v_1 - v_2 : v_2 - v_3 : v_3 - v_1$

2(a) ভূমি হতে 19·6 মি./সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে কোন বস্তু নিক্ষিপ্ত হল।

(i) বস্তুটি কত উপরে উঠবে? (ii) তার উত্থানকাল কত? (iii) কতক্ষণ পরে 14 মিটার উপরে উঠবে? (iv) কতক্ষণ পরে ভূমিতে পতিত হবে? (v) 3 সেকেন্ড পরে কোথায় থাকবে এবং তখন তার বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে বস্তুটির আদিবেগ $u = 19{\cdot}6$ মি./সে.।

(i) বৃহত্তম উচ্চতা $= \frac{u^2}{2g} = \frac{(19{\cdot}6)^2}{2 \times 9{\cdot}8} = 19{\cdot}8$ মিটার।

(ii) উত্থানকাল $= \frac{u}{g} = \frac{19\cdot6}{9\cdot8} = 2$ সেকেন্ড।

(iii) মনে করি, বস্তুটি t সেকেন্ড পরে h = 14 মিটার উপরে উঠবে। তাহলে, $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 14 = 19\cdot6\,t - \frac{1}{2} \times 9\cdot8\,t^2 \Rightarrow 4\cdot9\,t^2 - 19\cdot6\,t + 14 = 0 \Rightarrow 0\cdot7\,t^2 - 2\cdot8\,t + 2 = 0$

$\Rightarrow 7t^2 - 28t + 20 = 0 \Rightarrow t = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4\times7\times20}}{2\times7} = \frac{28 \pm \sqrt{784-560}}{14}$

$= 3\cdot069$ বা, $0\cdot9309$ (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $0\cdot9309$ সেকেন্ড প্রায় এবং $3\cdot069$ সেকেন্ড প্রায়।

(iv) বিচরণকাল $= 2\times$ উত্থানকাল $= 2\times2 = 4$ সেকেন্ড। $\therefore$ বস্তুটি 4 সেকেন্ড পরে ভূমিতে পতিত হবে ।

(v) বস্তুর উত্থানকাল $= \frac{u}{g} = \frac{19\cdot6}{9\cdot8} = 2$ সেকেন্ড। সুতরাং বস্তুটি 2 সে. পরে বৃহত্তম উচ্চতা হতে নিম্নদিকে গতিশীল হবে । বৃহত্তম উচ্চতা হতে 1 সেকেন্ডে বস্তুটির পতিত দূরত্ব $= \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\times9\cdot8\times1 = 4\cdot9$ মিটার এবং বৃহত্তম উচ্চতা $= \frac{u^2}{2g} = \frac{(19\cdot6)^2}{2\times9\cdot8} = 19\cdot8$ মিটার।

$\therefore$ বস্তুটি প্রক্ষেপের 3 সেকেন্ড পরে ভূমি হতে $(19\cdot8 - 4\cdot9) = 14\cdot7$ মিটার উপরে থাকবে এবং তখন তার বেগ $= 0 + 9\cdot8\times1 = 9\cdot8$ মি./সে. ও গতি নিম্নমুখী।

2(b) একটি বল **u** বেগে খাড়া উপরেরর দিকে নিক্ষেপ করলে তা t_1 ও t_2 সেকেন্ডে **h** উচ্চতায় অবস্থান করে। প্রমাণ কর যে, **(i)** $\mathbf{h = \frac{1}{2}gt_1t_2}$ [রা.'০৬,'১০; ঢা.'১১,'১৩; ব.'১১] **(ii)** $\mathbf{u = \frac{1}{2}g(t_1 + t_2)}$

প্রমাণ : মনে করি, বলটি u বেগে খাড়া উপরেরর দিকে নিক্ষেপ করলে তা t সেকেন্ডে h উচ্চতায় উঠে।

$\therefore h = ut - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 2h = 2ut - gt^2 \Rightarrow gt^2 - 2ut + 2h = 0\cdots$ (i) ; যা t এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

ধরি, t এর মান দুইটি t_1 ও t_2 $(t_2 > t_1)$ । তাহলে, h উচ্চতায় উত্থান $= t_1$ এবং পতনকাল $= t_2$.

(i) এর মূলদ্বয়ের গুণফল, $t_1t_2 = \frac{2h}{g}$ $\therefore h = \frac{1}{2}gt_1t_2$

(i) এর মূলদ্বয়ের যোগফল, $t_1 + t_2 = -\frac{-2u}{g}$ $\therefore u = \frac{1}{2}g(t_1 + t_2)$

2(c) একটি কণা ভূমি থেকে **u** বেগে উল্লম্বভাবে উপরে নিক্ষিপ্ত হল। যদি $\mathbf{u^2 > 2gh}$ হয়, তবে দেখাও যে, কণাটি $\frac{2}{g}\sqrt{\mathbf{u^2 - 2gh}}$ সময়ের ব্যবধানে দুইবার **h** উচ্চতায় থাকবে।

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, $h = ut - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow gt^2 - 2ut + 2h = 0$

$$\therefore \quad t = \frac{2u \pm \sqrt{4u^2 - 8gh}}{2g} = \frac{u}{g} \pm \frac{\sqrt{u^2 - 2gh}}{g}$$

যেহেতু $u^2 > 2gh$ অর্থাৎ $u^2 - 2gh > 0$, সুতরাং t এর মান দুইটি বস্তব ও অসমান।

∴ খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তু তার গতিপথের যেকোন বিন্দু দুইটি ভিন্ন সময়ে দুই বার অতিক্রম করে।

∴ নির্দিষ্ট h উচ্চতা অতিক্রম করার সময়ের পার্থক্য $= \left(\frac{u}{g} + \frac{\sqrt{u^2 - 2gh}}{g}\right) - \left(\frac{u}{g} - \frac{\sqrt{u^2 - 2gh}}{g}\right)$

$$= \frac{2}{g}\sqrt{u^2 - 2gh}$$

3(a) $10\ ms^{-1}$ বেগে উর্ধ্বগামী একটি বেলুন থেকে একখন্ড পাথর ফেলে দেয়া হল। পাথরখন্ডটি 10 সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হলে কত উঁচু থেকে পাথরখন্ডটি ফেলা হয়েছিল? [ব.'০৩]

সমাধান্ ঃ এখানে, পাথরখন্ডটির আদিবেগ u = বেলুনের বেগ = 10 মি./সে., বিচরণকাল t = 10 সে.।

ধরি, পাথরখন্ডটি h মি. উঁচু হতে ফেলা হয়েছিল। তাহলে, $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$

$h = -10 \times 10 + \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times 10^2 = -100 + 490 = 390.$ ∴ নির্ণেয় উচ্চতা = 390 মিটার।

3(b) একটি মিনারের শীর্ষ হতে $14\cdot5\ ms^{-1}$ বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু 5 সেকেন্ড পরে মিনারের পাদদেশে পতিত হয়। মিনারের উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে, বস্তুটির আদিবেগ u = 14·5 মি./সে., বিচরণকাল t = 5 সে.।

∴ মিনারের উচ্চতা $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2 = -14{\cdot}5 \times 5 + \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times 5^2 = -72{\cdot}5 + 122{\cdot}5 = 50$ মিটার।

3(c) সমবেগে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি বেলুন যখন ভূমি হতে 420 মিটার উপরে তখন বেলুন হতে একটি পাথরের টুকরা ছেড়ে দেওয়া হল। পাথরের টুকরাটি যদি 10 সে. পরে মাটিতে পড়ে তবে ছেড়ে দেওয়ার ঠিক পরেই তা কত উচ্চতায় উঠবে নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, পাথরটি ছাড়ার সময়ে বেলুন ও পাথরের উর্ধ্বমূখী বেগ u মি./সে.। তাহলে, $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$ সূত্র হতে পাই, $420 = -u \times 10 + \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times 10^2 \Rightarrow 10u = 490 - 420 \Rightarrow u = 7$

∴ পাথরটি ছেড়ে দেওয়ার ঠিক পরেই তা $\frac{u^2}{2g} = \frac{7^2}{2 \times 9{\cdot}8} = 2{\cdot}5$ মিটার উপরে উঠবে।

3(d) 4·5 সেকেন্ড সমবেগে খাড়া উপরের দিকে উঠার পর একটি বেলুন হতে একটি ভারী বস্তু পড়ে গেল। যদি বস্তুটি 7 সেকেন্ডে ভূমিতে পড়ে তবে বেলুনের গতিবেগ এবং কত উঁচু হতে বস্তুটি পড়েছিল তা নির্ণয় কর। [সি.'০১; দি.'১১]

সমাধান : ধরি, বেলুনটির গতিবেগ u মি./সে. এবং তা h মি. উচ্চতায় উঠার পর বস্তুটি পড়ে গেল।

তাহলে, $h = 4 \cdot 5\,u$ ... ... (i) এবং $h = -u \times 7 + \frac{1}{2} \times 9 \cdot 8 \times 7^2$, [$h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$ সূত্র দ্বারা ।]

$\Rightarrow 4 \cdot 5\,u = -7u + 240 \cdot 1 \Rightarrow 11 \cdot 5u = 240 \cdot 1 \Rightarrow u = 20 \cdot 88$ (প্রায়)

(i) হতে পাই, $h = 4 \cdot 5 \times 20 \cdot 88 = 93 \cdot 96$ (প্রায়)

$\therefore$ বেলুনটির গতিবেগ $20 \cdot 88$ মি./সে. (প্রায়) এবং $93 \cdot 96$ মিটার (প্রায়) উচ্চতায় উঠার পর বস্তুটি পড়ে গেল।

4(a) একটি কূপের মধ্যে একখন্ড পাথর ফেলার 3·5 সেকেন্ড পরে এর তলদেশে পাথরের পতন শব্দ শোনা গেল। শব্দের বেগ $327\ ms^{-1}$ হলে, কূপের গভীরতা নির্ণয় কর। $[g = 9.81\ ms^{-2}]$

সমাধান : মনে করি, কূপের গভীরতা h মি. এবং পাথর খন্ডটি কূপের তলদেশে পৌছে t সেকেন্ডে।

তাহলে, তলদেশে সৃষ্ট পতন শব্দ $(3 \cdot 5 - t)$ সেকেন্ডে কূপের উপরে আসে।

পাথর পতনের ক্ষেত্রে, $h = 0 + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9 \cdot 81t^2 = \frac{981}{200}t^2$, [$\because$ পাথরের আদিবেগ $u = 0$]

শব্দের ক্ষেত্রে, $h = 327\,(3 \cdot 5 - t) \Rightarrow \frac{981}{200}t^2 = 327\,(3 \cdot 5 - t) \Rightarrow 3t^2 = 200(3 \cdot 5 - t)$

$$\Rightarrow 3t^2 + 200\,t - 700 = 0 \Rightarrow 3t^2 + 210t - 10t - 700 = 0$$

$$\Rightarrow 3t(t + 70) - 10\,(t + 70) = 0 \Rightarrow (t + 70)(3t - 10) = 0 \therefore t = \frac{10}{3}, [\because t > 0]$$

$\therefore$ কূপের গভীরতা $h = \frac{981}{200} \times \frac{100}{9} = \frac{109}{2} = 54 \cdot 5$ মিটার।

4(b) একটি শূন্য কুয়ার মধ্যে অবাধে পড়ন্ত একখন্ড পাথর $19 \cdot 6\ ms^{-1}$ গতিবেগে এর তলদেশে পতিত হল। পাথর ফেলার $2\frac{2}{35}$ সেকেন্ড পর এর পতন শব্দ শোনা গেলে শব্দের গতিবেগ নির্ণয় কর। [রা.'০৪; য.'০৯]

সমাধান : মনে করি, কূপের গভীরতা h মি. এবং পাথর খন্ডটি কূপের তলদেশে পৌছে t সেকেন্ডে।

তাহলে, তলদেশে সৃষ্ট পতন শব্দ $(2\frac{2}{35} - t) = (\frac{72}{35} - t)$ সেকেন্ডে কূপের উপরে আসে।

পাথর পতনের ক্ষেত্রে : $v^2 = u^2 + 2gh$ সূত্র হতে পাই, $(19 \cdot 6)^2 = 0 + 2 \times 9 \cdot 8h \Rightarrow h = 19 \cdot 6$

$v = u + gt$ সূত্র হতে পাই, $19 \cdot 6 = 0 + 9 \cdot 8t \Rightarrow t = 2$

শব্দের বেগ V মি./সে. হলে, $h = V(\frac{72}{35} - t) \Rightarrow 19 \cdot 6 = V(\frac{72}{35} - 2) = \frac{2}{35}V \Rightarrow V = 343$

$\therefore$ শব্দের বেগ 343 মি./সে.।

5(a) নির্দিষ্ট বেগে উল্লম্বভাবে ভূমি থেকে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তুকণা t সেকেন্ড সময়ে h উচ্চতায় উঠে এবং আরও t' সেকেন্ড সময় পরে এটা ভূমিতে ফিরে আসে। প্রমাণ কর যে, (i) কণার আদিবেগ $= \frac{1}{2}g(t + t')$

(ii) $h = \frac{1}{2} g t t'$. [ব.'০৩,'০৬,'০৯; সি.'০৪,'০৯; ঢা.'০৪,'০৯; চ.'০৫; কু.'০৮,'১৩; য.'১০]

(iii) বৃহত্তম উচ্চতা $= \frac{1}{8} g(t + t')^2$

প্রমাণ ঃ এখানে বস্তুকণাটির বিচরণকাল $= (t + t')$ সেকেন্ড।

মনে করি, u নির্দিষ্ট বেগে উল্লম্বভাবে ভূমি থেকে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণাটি t সেকেন্ড সময়ে h উচ্চতায় উঠে।

$\therefore\ h = ut - \frac{1}{2} g t^2 \cdots\cdots (1)$ এবং কণার বিচরণকাল $= t + t' = \frac{2u}{g}$ $\therefore$ কণার আদিবেগ $u = \frac{1}{2} g(t + t')$

সমীকরণ (1) এ u এর মান বসিয়ে পাই, $h = \frac{1}{2} g(t+t')t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g t (t+t'-t)$ $\therefore h = \frac{1}{2} g t t'$

বৃহত্তম উচ্চতা $= \frac{u^2}{2g} = \frac{1}{2g} \{\frac{1}{2} g(t + t')\}^2 = \frac{1}{8} g (t + t')^2$

5(b) একটি বস্তু ভূমি থেকে উল্লম্ব ভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে, তা 6 সেকেন্ড পুনরায় ভূমিতে পতিত হয়। বস্তুটির নিক্ষেপণ বেগ, সর্বাধিক উচ্চতা এবং উত্থান কাল নির্ণয় কর। $g = 9.8\ ms^{-2}$.

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুটির নিক্ষেপণ বেগ u মি.সে.।

প্রশ্নমতে, বিচরণকাল $\frac{2u}{g} = 6 \Rightarrow u = 3g = 3 \times 9{\cdot}8 = 29{\cdot}4$ $\therefore$ বস্তুটির নিক্ষেপণ বেগ 29·4 মি.সে.।

সর্বাধিক উচ্চতা $= \frac{u^2}{2g} = \frac{(29 \cdot 4)^2}{2 \times 9 \cdot 8} = 44{\cdot}1$ মিটার এবং উত্থান কাল $= \frac{1}{2}$(বিচরণকাল) $= \frac{6}{2} = 3$ সেকেন্ড।

6(a) 100 মিটার উঁচুতে অবস্থিত কোন বিন্দু হতে একটি বস্তু নিচে ছেড়ে দেয়া হল। একই সময়ে ভূমি থেকে অন্য একটি বস্তুকে $25\ ms^{-1}$ বেগে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হলে, কোথায় তারা মিলিত হবে?

সমাধান ঃ মনে করি, নিক্ষিপ্ত হবার t সেকেন্ড পরে h মিটার উচ্চতায় তারা মিলিত হবে।

$\therefore$ খাড়া উপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে, $h = 25t - \frac{1}{2} g t^2 \cdots\cdots (i)$

নিচে ছেড়ে দেয়া বস্তুর ক্ষেত্রে, $100 - h = \frac{1}{2} g t^2 \cdots\cdots (ii)$

$(i) + (ii) \Rightarrow 100 = 25t \Rightarrow t = 4$

$\therefore\ h = 25 \times 4 - \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times 4^2 = 100 - 78{\cdot}4 = 21{\cdot}6$ মিটার উচ্চতায় বস্তু দুইটি মিলিত হবে।

6(b) h মিটার উচু একটি মিনারের চূড়া থেকে এটি পাথর নিচে ছেড়ে দেয়ার মুহূর্তে এর পাদদেশ থেকে অপর একটি পাথর এরূপ বেগে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হল যেন তা কোন রকমে মিনারের চূড়ায় পৌছতে পারে। কত উঁচুতে এরা পরস্পরকে অতিক্রম করবে?

সমাধান ঃ মনে করি, মিনারের পাদদেশ থেকে u মি./ সে.^{2} বেগে নিক্ষিপ্ত হবার t সেকেন্ড পরে ভূমি থেকে x মিটার উচ্চতায় পাথর দুইটি পরসপারকে অতিক্রম করবে।

$\therefore$ খাড়া উপরে নিক্ষিপ্ত পাথরের ক্ষেত্রে, $h = \frac{u^2}{2g} \Rightarrow u = \sqrt{2gh}$ এবং $x = ut - \frac{1}{2}gt^2 = \sqrt{2gh}\,t - \frac{1}{2}gt^2 \cdots$(i)

নিচে ছেড়ে দেয়া পাথরের ক্ষেত্রে, $h - x = \frac{1}{2}gt^2 \cdots$(ii)

$$(i) + (ii) \Rightarrow h = \sqrt{2gh}\,t \Rightarrow t = \sqrt{\frac{h}{2g}}$$

$\therefore\ x = \sqrt{2gh} \times \sqrt{\frac{h}{2g}} - \frac{1}{2} \times g \times \frac{h}{2g} = h - \frac{h}{4} = \frac{3h}{4}$ মিটার উচ্চতায় বস্তু দুইটি মিলিত হবে।

(c) 288 ft উচ্চ মিনারের চূড়া হতে একটি পাথর ছেড়ে দেওয়া হল। একই সময়ে অপর একটি পাথর মিনারের পাদদেশ হতে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হল। এরা একই সাথে ভূমিতে পতিত হলে দ্বিতীয় পাথরের নিক্ষেপ বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, দ্বিতীয় পাথরের নিক্ষেপ বেগ u ফুট/ সে.। t সেকেন্ড পরে পাথর দুটি ভূমিতে পতিত হলে,নিচে ছেড়ে দেয়া পাথরের ক্ষেত্রে, $288 = 0 + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 576 = 32 \times t^2 \Rightarrow t^2 = 18 \Rightarrow t = 3\sqrt{2}$

খাড়া উপরে নিক্ষিপ্ত পাথরের ক্ষেত্রে, বিচরণকাল $2t = \frac{2u}{g} \Rightarrow u = 32 \times 3\sqrt{2} = 96\sqrt{2}$ ফুট/ সেকেন্ড।

7(a) 176·4 m উঁচু হতে অবাধে পড়ন্ত একটি বস্তু 19·6 m নিচে পড়ার মুহূর্তে অপর একটি বস্তুকে 78·4 ম উঁচু হতে নিচে ফেলে দেয়া হল। প্রমাণ কর যে, তারা একই সাথে ভূমিতে পতিত হবে।

প্রমাণ ঃ মনে করি, 176·4 m উঁচু হতে অবাধে পড়ন্ত ১ম বস্তুটি t_1 সেকেন্ডে 19·6 m নিচে এবং t_2 সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হয়। তাহলে,

$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ সূত্র দ্বারা পাই, $19{\cdot}6 = \frac{1}{2} \times 9.8t_1^2 \Rightarrow t_1^2 = 4 \Rightarrow t_1 = 2$

এবং $176{\cdot}4 = 0 + \frac{1}{2} \times 9.8t_2^2 \Rightarrow t_2^2 = 36 \Rightarrow t_2 = 6.$

$\therefore$ ১ম বস্তুটি পরবর্তী $(176{\cdot}4 - 19{\cdot}6) = 156{\cdot}8$ মি. নিচে নামে $(6-2) = 4$ সেকেন্ডে।

আবার, 78·4 m উঁচু হতে অবাধে পড়ন্ত ২য় বস্তুটি t সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হলে,

$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ সূত্র দ্বারা পাই, $78{\cdot}4 = 0 + \frac{1}{2} \times 9.8t^2 \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = 4$

$\therefore$ বস্তু দুইটি একই সাথে ভূমিতে পতিত হবে।

7(b) ভূমি থেকে 122·5 মিটার উচুতে অবস্থিত কোন বিন্দু হতে P বস্তুকে নিচে ছেড়ে দেয়া হল। P বস্তুটি 44·1 মিটার নিচে নামার মুহূর্তে একই বিন্দু হতে Q বস্তুকে নিচে u বেগে নিক্ষেপ করা হল। এরা একই সঙ্গে ভূমিতে পতিত হয়। u এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, 122·5 m উঁচু হতে অবাধে পড়ন্ত P বস্তুটি t_1 সেকেন্ডে 44·1 m নিচে এবং t_2 সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হয়। তাহলে,

$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ সূত্র দ্বারা পাই, $44{\cdot}1 = 0 + \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow 44{\cdot}1 = \frac{1}{2} \times 9.8t_1^2 \Rightarrow t_1^2 = 9 \Rightarrow t_1 = 3$

$$\text{এবং } 122\cdot5 = 0 + \frac{1}{2}\times9.8t_2^2 \Rightarrow t_2^2 = 25 \Rightarrow t_2 = 5.$$

প্রশ্নমতে, $122\cdot5$ m উঁচু হতে u বেগে নিচে নিক্ষিপ্ত Q বস্তুটি $(5-3)=2$ সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হয়।

$\therefore\ h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ সূত্র দ্বারা পাই, $122\cdot5 = u\times2 + \frac{1}{2}\times9.8\times2^2 \Rightarrow 122\cdot5 = 2u + 19\cdot6 \Rightarrow 2u = 102\cdot9$

$$\therefore\ u = 51\cdot45 \text{ মি./সে.।}$$

8(a) 49 ms^{-1} বেগে একটি বলকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল এবং 2 সে. পরে একই বিন্দু হতে একই বেগে অপর একটি বল একই দিকে নিক্ষেপ করা হল। কোথায় এবং কখন তারা মিলিত হবে? [ব.'০৫,'০৮]

সমাধান : মনে করি, ২য় বস্তুটি নিক্ষিপ্ত হবার t সেকেন্ড পরে নিক্ষেপণ বিন্দু হতে h মিটার উচ্চতায় এরা মিলিত হয়। তাহলে, ১ম বস্তুটি $(t+2)$ সেকেন্ডে h মিটার উচ্চতায় উঠে।

১ম বস্তুর ক্ষেত্রে, $h = 49(t+2) - \frac{1}{2}g(t+2)^2 = 49t + 98 - \frac{1}{2}g(t^2+4t+4)\ \dots\ \dots$ (i)

২য় বস্তুর ক্ষেত্রে, $h = 49t - \frac{1}{2}gt^2\ \dots\ \dots$ (ii)

$(i)-(ii) \Rightarrow 0 = 98 - \frac{1}{2}g(4t+4) \Rightarrow 9.8(4t+4) = 196 \Rightarrow 4t+4 = 20 \Rightarrow t = 4$

(ii) হতে পাই, $h = 49\times4 - \frac{1}{2}\times9.8\times16 = 196 - 78.4 = 117\cdot6$

$\therefore$ ২য় বস্তুটি নিক্ষিপ্ত হবার 4 সেকেন্ড পরে নিক্ষেপণ বিন্দু হতে $117\cdot6$ মিটার উচ্চতায় বস্তু দুটি মিলিত হয়।

8(b) ভূমি থেকে একটি কণা u ms^{-1} বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করার t সেকেন্ড পরে একই স্থান হতে একই বেগে অপর একটি কণা একই দিকে ছোড়া হলে, প্রমাণ কর যে, তারা $\frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ মিটার উঁচুতে মিলিত হবে।

[রা.'০৩; কু.'১০]

প্রমাণ : মনে করি, ২য় বস্তুটি নিক্ষিপ্ত হবার t_1 সেকেন্ড পরে নিক্ষেপণ বিন্দু হতে h মিটার উচ্চতায় বস্তু দুটি মিলিত হয়। তাহলে, ১ম বস্তুটি $(t_1 + t)$ সেকেন্ডে h মিটার উচ্চতায় উঠে।

১ম বস্তুর ক্ষেত্রে, $h = u(t_1 + t) - \frac{1}{2}g(t_1+t)^2 = ut_1 + ut - \frac{1}{2}g(t_1^2 + 2t_1t + t^2)\ \dots\ \dots$ (i)

২য় বস্তুর ক্ষেত্রে, $h = ut_1 - \frac{1}{2}gt_1^2\ \dots\ \dots$ (ii)

$(i)-(ii) \Rightarrow 0 = ut - \frac{1}{2}g(2t_1t + t^2) \Rightarrow 2u = g(2t_1 + t) \Rightarrow 2t_1 = \frac{2u}{g} - t \Rightarrow t_1 = \frac{2u-gt}{2g}$

(ii) হতে পাই, $h = u\left(\frac{2u-gt}{2g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{2u-gt}{2g}\right)^2 = u\left(\frac{2u-gt}{2g}\right) - \frac{4u^2 - 4ugt + g^2t^2}{8g}$

$$= \frac{8u^2 - 4ugt - 4u^2 + 4ugt - g^2t^2}{8g} = \frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$$

$\therefore$ $\frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ মিটার উচ্চতায় বস্তু দুটি মিলিত হয়। (প্রমাণিত)

8(c) একটি বস্তু $196\ ms^{-1}$ বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত করা হল। অপর একটি বস্তু এর 6 সেকেন্ড পরে একই স্থান থেকে একই দিকে নিক্ষেপ করলে এরা পরস্পর প্রথম বস্তুটির বৃহত্তম উচ্চতায় মিলিত হয়। দ্বিতীয় বস্তুটির নিক্ষেপ বেগ নির্ণয় কর। [বুয়েট '০৭]

সমাধান ঃ এখানে, ১ম বস্তুটির নিক্ষেপ বেগ $u = 196\ ms^{-1}$

$\therefore$ ১ম বস্তুটির বৃহত্তম উচ্চতায় উত্থানকাল $t = \frac{u}{g} = \frac{196}{9.8} = 20$ সেকেন্ড এবং

বৃহত্তম উচ্চতা $H = \frac{u^2}{2g} = \frac{(196)^2}{2\times 9.8} = 1960$ মিটার।

প্রশ্নমতে, ২য় বস্তুটি $(20-6) = 14$ সেকেন্ডে 1960 মিটার উচ্চতায় উঠে।

২য় বস্তুটির নিক্ষেপ বেগ u মি./সে. হলে $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ সূত্র দ্বারা পাই,

$$1960 = u\times 14 - \frac{1}{2}\times 9.8\times 14^2 \Rightarrow 14u = 1960 + 960{\cdot}4 = 2920{\cdot}4 \Rightarrow u = 208{\cdot}6$$

$\therefore$ দ্বিতীয় বস্তুটির নিক্ষেপ বেগ 208·6 মি./সে.।

8(d) একটি কণা u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। এর n সে. পরে অপর একটি কণাকে একই স্থান হতে v বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। যদি তারা প্রথম কণাটির বৃহত্তম উচ্চতায় মিলিত হয় তবে দেখাও যে, $v - u = g^2n^2/2(u - ng)$.

প্রমাণ ঃ ১ম বস্তুটির বৃহত্তম উচ্চতায় উত্থানকাল $t = \frac{u}{g}$ সেকেন্ড এবং বৃহত্তম উচ্চতা $H = \frac{u^2}{2g}$ মিটার।

প্রশ্নমতে, ২য় বস্তুটি $(\frac{u}{g} - n) = \frac{u - ng}{g}$ সেকেন্ডে $\frac{u^2}{2g}$ মিটার উচ্চতায় উঠে।

$\therefore$ $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ সূত্র দ্বারা পাই, $\frac{u^2}{2g} = v\times(\frac{u-ng}{g}) - \frac{1}{2}g\times(\frac{u-ng}{g})^2$

$\Rightarrow u^2 = 2v(u - ng) - (u^2 - 2ung + n^2g^2) \Rightarrow u^2 = 2uv - 2vng - u^2 + 2ung - n^2g^2$

$\Rightarrow 2u^2 - 2uv + 2vng - 2ung = n^2g^2 \Rightarrow 2\{-u(v-u) + (v-u)ng\} = n^2g^2$

$\Rightarrow 2(v-u)(ng-u) = n^2g^2 \quad \therefore v - u = g^2n^2/2(u-ng)$.

8(e) 160ft উচ্চ একটি মিনারের শীর্ষ ও পাদদেশ থেকে দুটি বস্তু একই সময়ে যথাক্রমে 20 ft/s এবং 100 ft/s বেগে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হল। তারা কোথায় কখন মিলিত হবে? মিলিত হবার সময় এদের গতির দিক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, মিনারের শীর্ষ হতে নিক্ষিপ্ত বস্তুটি t সেকেন্ডে h ফুট উচ্চতায় উঠে এবং পাদদেশ থেকে নিক্ষিপ্ত বস্তুটি একই t সেকেন্ডে k ফুট উচ্চতায় উঠে ।

বস্তু দুটি t সেকেন্ডে মিলিত হলে, $k = h + 160 \Rightarrow 100t - \frac{1}{2}gt^2 = 20t - \frac{1}{2}gt^2 + 160$

$\Rightarrow 100t - 20t = 160 \Rightarrow t = 2$ এবং $k = 100 \times 2 - \frac{1}{2} \times 32 \times 4 = 200 - 64 = 136$

$\therefore$ নিক্ষিপ্ত হবার 2 সেকেন্ড পর ভূমি হতে 136 ফুট উচ্চতায় বস্তু দুটি মিলিত হয়।

এখন, $v = u - gt$ সূত্র দ্বারা পাই,

2 সেকেন্ড পর শীর্ষ হতে নিক্ষিপ্ত বস্তুটির বেগ $= 20 - 32 \times 2 = -44$ ফুট/সে. < 0, যা নিম্নমুখী।

2 সেকেন্ড পর পাদদেশ হতে নিক্ষিপ্ত বস্তুটির বেগ $= 100 - 32 \times 2 = 36$ ফুট/সে. > 0, যা ঊর্ধ্বমুখী।

8(f) একই স্থান থেকে দুটি পাথর খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হল। এদের একটি অপরটি অপেক্ষা 48 মিটার উপরে উঠে এবং নিক্ষেপণ বিন্দুতে 3 সেকেন্ড পর প্রত্যাবর্তন করে। পাথর দুইটির নিক্ষেপণ বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, পাথর দুইটির নিক্ষেপণ বেগ যথাক্রমে u_1 ও u_2 মি./সে. $(u_1 > u_2)$, বিচরণকাল T_1 ও T_2 সেকেন্ড এবং সর্বাধিক উচ্চতা H_1 ও H_2 মিটার।

প্রশ্নমতে, $T_1 - T_2 = 3 \Rightarrow \frac{2u_1}{g} - \frac{2u_2}{g} = 3 \Rightarrow u_1 - u_2 = \frac{3}{2} \times 9.8 = 14 \cdot 7$ …… (i)

এবং $H_1 - H_2 = 48 \Rightarrow \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} = 48 \Rightarrow (u_1 + u_2)(u_1 - u_2) = 96 \times 9.8$

$\Rightarrow (u_1 + u_2) \times 14.7 = 940.8 \Rightarrow u_1 + u_2 = 64$ … … ((ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2u_1 = 78 \cdot 7 \therefore u_1 = 39 \cdot 35$ এবং $u_2 = 64 - 39 \cdot 35 = 24 \cdot 65$

$\therefore$ পাথর দুইটির নিক্ষেপণ বেগ যথাক্রমে $39 \cdot 35$ ও $24 \cdot 65$ মি./সে.।

9(a) নির্দিষ্ট উচ্চতায় কোনো বিন্দু হতে দুইটি বস্তুর একটি খাড়া উপরে এবং অন্যটি নিম্নদিকে একই সময়ে একই বেগে নিক্ষেপ করা হল। প্রথমটি t_1 সময়ে এবং দ্বিতীয় t_2 সময়ে ভূমিতে পতিত হল। উক্ত বিন্দু হতে এদের যে কোনোটি অবাধে নিচে পড়লে দেখাও যে, $\sqrt{t_1 t_2}$ সময়ে তা ভূমিতে পৌঁছিবে।

প্রমাণ : মনে করি, h উচ্চতায় কোনো বিন্দু হতে u বেগে বস্তু দুটি নিক্ষেপ করা হল। তাহলে,

উপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে, $h = -ut_1 + \frac{1}{2}gt_1^2$ … … (i) এবং

নিম্নদিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে, $h = ut_2 + \frac{1}{2}gt_2^2$ … … (ii)

(ii) − (i) $\Rightarrow 0 = u(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2) \Rightarrow u = \frac{1}{2}g(t_1 - t_2)$

(ii) হতে পাই, $h = \frac{1}{2}g(t_1 - t_2) \times t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2 = \frac{1}{2}g(t_1t_2 - t_2^2 + t_2^2) = \frac{1}{2}gt_1t_2$

আবার, উক্ত বিন্দু হতে এদের যে কোনটি অবাধে নিচে পড়লে তা T সময়ে ভূমিতে পতিত হয়।

$h = 0 + \frac{1}{2}gT^2 \Rightarrow \frac{1}{2}gt_1t_2 = \frac{1}{2}gT^2 \Rightarrow T^2 = t_1t_2 \;\therefore T = \sqrt{t_1t_2}$ সময়ে তা ভূমিতে পৌছিবে।

9(b) একখন্ড পাথর একটি টাওয়ারের চূড়া থেকে $23.1\ ms^{-1}$ বেগে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হল। এর 3 সেকেন্ড পরে একই স্থান থেকে অপর একখন্ড পাথর নিচে ফেলা হল। এরা একই সাথে ভূমিতে পতিত হলে টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, টাওয়ারের চূড়া থেকে নিক্ষিপ্ত পাথরটি t সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হয়। টাওয়ারের উচ্চতা h মিটার হলে, $h = -23{\cdot}1\, t + \frac{1}{2}gt^2 \ldots\ldots$ (i)

টাওয়ারের চূড়া থেকে পড়ন্ত অপর পাথরটি $(t-3)$ সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হয়।

$\therefore\ h = \frac{1}{2}g(t-3)^2 = \frac{1}{2}g(t^2 - 6t + 9) \ldots\ldots$ (ii)

(ii) − (i) $\Rightarrow 0 = 23{\cdot}1\, t + \frac{1}{2}g(-6t+9) \Rightarrow 23{\cdot}1\, t + \frac{1}{2}\times 9{\cdot}8\times(-6t+9) = 0$

$\Rightarrow 23{\cdot}1\, t - 29{\cdot}4t + 44{\cdot}1 = 0 \Rightarrow 6{\cdot}3\, t = 44{\cdot}1 \Rightarrow t = 7$

$\therefore$ টাওয়ারের উচ্চতা $h = -23{\cdot}1 \times 7 + \frac{1}{2}\times 9.8\times 49 = -161{\cdot}7 + 240{\cdot}1 = 78{\cdot}4$ মিটার।

10(a) $f\ ms^{-2}$ সুষম ত্বরণে উঠন্ত একটি লিফ্‌টের উপর থেকে লিফ্‌টের সাপেক্ষে $v\ ms^{-1}$ আপেক্ষিক বেগে খাড়া উর্ধ্বে একটি বল নিক্ষেপ করা হল। t সেকেন্ড পরে বলটি পুনরায় লিফ্‌টে ফিরে আসলে প্রমাণ কর যে, $f + g = 2v/t$

সমাধান : মনে করি, বলটি নিক্ষেপের সময় লিফ্‌টের বেগ ছিল u মি./সে.। যেহেতু লিফ্‌টের সাপেক্ষে বলটির আপেক্ষিক বেগে v মি./সে., সেহেতু বলটির খাড়া উপরের দিকে প্রকৃত বেগ = (u + v) মি./সে.।

বলটি নিক্ষিপ্ত হবার t সেকেন্ড পরে পুনরায় তা লিফ্‌টে ফিরে আসে বিধায় লিফ্‌ট ও বল উভয়ে t সেকেন্ডে একই উচ্চতা h মিটার (ধরি) অতিক্রম করে।

$\therefore$ বলটির ক্ষেত্রে, $h = (u+v)t - \frac{1}{2}gt^2 \ldots\ldots$ (i) এবং লিফ্‌টের ক্ষেত্রে, $h = ut + \frac{1}{2}ft^2 \ldots\ldots$ (ii)

(i) − (ii) $\Rightarrow 0 = vt - \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}ft^2 \Rightarrow v = \frac{1}{2}(g+f)t \;\therefore f + g = 2v/t$ (Proved)

10(b) স্থিতাবস্থায় ভূপৃষ্ঠ হতে 4 ফুট/সে.^{2} সমত্বরণে উর্ধ্বগামী একটি লিফ্‌ট 8 সেকেন্ড উঠার মুহূর্তে একটি বস্তু নিচে ফেলা হলে কত সময়ে তা ভূপৃষ্ঠে পড়বে?

সমাধান : এখানে, ত্বরণ f = 4 ফুট/সে.^{2}, সময় t = 8 সেকেন্ড। ধরি, লিফ্‌টি 8 সেকেন্ডে h ফুট উঠে v ফুট/সে. গতিবেগ প্রাপ্ত হয়।

$\therefore\ v = u + ft = 0 + 4\times 8 = 32$ এবং $h = ut + \frac{1}{2}ft^2 = 0 + \frac{1}{2}\times 4\times 8^2 = 128$

বস্তুটি ফেলার t সেকেন্ড পর ভূমিতে পতিত হলে, $128 = -32t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 128 = -32t + \frac{1}{2}\times 32\times t^2$

$\Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow (t-4)(t+2) = 0 \Rightarrow t = 4, [\because t>0]$

$\therefore$ বস্তুটি ফেলার 4 সেকেন্ড পর তা ভূমিতে পতিত হয়।

11(a) একটি খাড়া টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু থেকে একটি কণা নিচে ছেড়ে দেয়া হল। কণাটি এর শেষতম সেকেন্ডে টাওয়ারের উচ্চতার $\frac{8}{9}$ অংশ অতিক্রম করে। টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। [য.'০৫]

সমাধান : মনে করি, টাওয়ারের উচ্চতা h মিটার এবং কণাটি t সেকেন্ডে h মিটার অতিক্রম করে।

$\therefore h = 0 + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$ ...... (i).

প্রশ্নমতে, শেষতম অর্থাৎ t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $\frac{8}{9}h = 0 + \frac{1}{2}g(2t-1)$

$\Rightarrow \frac{8}{9} \times \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(2t-1) \Rightarrow \frac{8}{9}t^2 = 2t - 1 \Rightarrow 8t^2 - 18t + 9 = 0 \Rightarrow 8t^2 - 12t - 6t + 9 = 0$

$\Rightarrow 4t(2t-3) - 3(2t-3) = 0 \Rightarrow (2t-3)(4t-3) = 0 \therefore t = \frac{3}{2}, [\because t > 1, \therefore 4t - 3 \neq 0]$

$\therefore$ টাওয়ারের উচ্চতা $h = \frac{1}{2} \times 9.8 \times (\frac{3}{2})^2 = 11.025$ মিটার।

11(b) অবাধে পতনশীল একটি বস্তুর পতনকালের শেষতম সেকেন্ডে 93.1 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করল। কত উঁচু থেকে বস্তুটি পড়েছিল? বস্তুটির পতনকাল নির্ণয় কর। ($g = 9.81\ ms^{-2}$)

সমাধান : মনে করি, বস্তুটি h মিটার উঁচু থেকে পড়েছিল এবং পতনকাল t সেকেন্ড। $\therefore h = \frac{1}{2}gt^2$ ......(i)

এখন, শেষতম অর্থাৎ t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 0 + \frac{1}{2}g(2t-1) = 93.1 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 9.8 \times (2t-1) = 93.1$

$\Rightarrow 2t - 1 = 19 \Rightarrow 2t = 20 \Rightarrow t = 10$

$\therefore$ বস্তুটির পতনকাল t = 10 সেকেন্ড এবং নির্ণেয় উচ্চতা $h = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 10^2 = 490$ মিটার।

11(c) একখন্ড পাথর কোন নির্দিষ্ট উচ্চতা হতে ফেলে দেয়া হলে তা শেষ t সেকেন্ডে h মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। দেখাও যে, পতনের মোট সময় $(\frac{h}{gt} + \frac{t}{2})$ সেকেন্ড।

প্রমাণ : মনে করি, পাথরটি H মিটার উঁচু থেকে পড়েছিল এবং পতনকাল T সেকেন্ড। $\therefore H = \frac{1}{2}gT^2$ ... ...(i)

প্রথম (T − t) সেকেন্ডে পাথরটির অতিক্রান্ত দূরত্ব H_1 মিটার হলে, $H_1 = \frac{1}{2}g(T-t)^2$ ... ... (ii)

$\therefore$ শেষ t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $h = H - H_1 = \frac{1}{2}gT^2 - \frac{1}{2}g(T-t)^2 = \frac{1}{2}g(T^2 - T^2 + 2Tt - t^2)$

$\Rightarrow \frac{2h}{g} = 2Tt - t^2 \Rightarrow 2Tt = \frac{2h}{g} + t^2 \Rightarrow T = \frac{h}{gt} + \frac{t}{2}$ $\therefore$ পতনের মোট সময় $(\frac{h}{gt} + \frac{t}{2})$ সেকেন্ড।

11(d) একটি বস্তু কণা খাড়াভাবে উপরে নিক্ষিপ্ত হল। প্রমাণ কর যে, তা যে যে সময়ে সর্বোচ্চ উচ্চতার $\frac{3}{4}$ অংশে অবস্থান করে তাদের অনুপাত 1 : 3.

প্রমাণ ঃ মনে করি, কণাটির নিক্ষেপণ বেগ u এবং সর্বাধিক উচ্চতা H. তাহলে, $H = \frac{u^2}{2g} \ldots \ldots (i)$

কণাটি t সময়ে $\frac{3}{4}$ H উচ্চতায় অবস্থান করলে, $\therefore \frac{3}{4}H = ut - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{3}{4} \times \frac{u^2}{2g} = ut - \frac{1}{2}gt^2$, [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow 3u^2 = 8gut - 4g^2t^2 \Rightarrow 4g^2t^2 - 8gut + 3u^2 = 0$, যা t এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। কাজেই t এর দুইটি মান থাকবে। ধরি , t এর মান দুইটি t_1, t_2 $(t_1 > t_2)$, যখন কণাটির $\frac{3}{4}$H উচ্চতায় উত্থানকাল t_2 এবং পতনকাল t_1 ।

$\therefore \quad t_1 + t_2 = -\frac{-8gu}{4g^2} = \frac{2u}{g} \ldots \ldots (ii)$ এবং $t_1 t_2 = \frac{3u^2}{4g^2}$.

এখন, $t_1 - t_2 = \sqrt{(t_1+t_2)^2 - 4t_1t_2} = \sqrt{\frac{4u^2}{g^2} - 4 \times \frac{3u^2}{4g^2}} = \sqrt{\frac{u^2}{g^2}} = \frac{u}{g} \ldots \ldots (iii)$

(ii) + (iii) $\Rightarrow 2t_1 = \frac{3u}{g} \Rightarrow t_1 = \frac{3u}{2g}$ এবং (ii) − (iii) $\Rightarrow 2t_2 = \frac{u}{g} \Rightarrow t_2 = \frac{u}{2g}$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $= t_2 : t_1 = \frac{u}{2g} : \frac{3u}{2g} = 1 : 3$ (Proved)

11(e) তিনটি বল h_1, h_2, h_3 উচ্চতা থেকে যথাক্রমে u_1, u_2, u_3 বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। এরা একই সাথে ভূমিতে পতিত হলে প্রমাণ কর যে, $h_1(u_2 - u_3) + h_2(u_3 - u_1) + h_3(u_1 - u_2) = 0$

প্রমাণ ঃ মনে করি, খাড়া উপরে নিক্ষেপ করার t সময় পরে বল তিনটি ভূমিতে পতিত হয়।

$\therefore \quad h_1 = -u_1t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h_1(u_2 - u_3) = -u_1(u_2 - u_3)t + (u_2 - u_3) \times \frac{1}{2}gt^2 \ldots \ldots (i)$

$h_2 = -u_2t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h_2(u_3 - u_1) = -u_2(u_3 - u_1)t + (u_3 - u_1) \times \frac{1}{2}gt^2 \ldots \ldots (ii)$

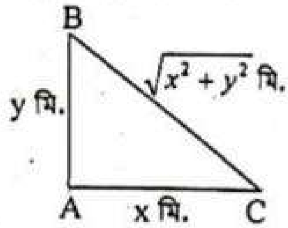
$h_3 = -u_3t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h_3(u_1 - u_2) = -u_3(u_1 - u_2)t + (u_1 - u_2) \times \frac{1}{2}gt^2 \ldots \ldots (iii)$

(i) + (ii) + (iii) $\Rightarrow h_1(u_2 - u_3) + h_2(u_3 - u_1) + h_3(u_1 - u_2) = 0$

12(a) $\sqrt{2gy}$ ms^{-1} বেগে খাড়া উপরের দিকে উঠন্ত একটি রকেট এর বৃহত্তম উচ্চতায় ফেটে গেল। এর শব্দ $\frac{1}{n}$ সেকেন্ডের ব্যবধানে রকেটের যাত্রাস্থান ও এ থেকে x মিটার অনুভূমিক দূরত্বে দুই স্থানে শোনা গেল। প্রমাণ কর যে ,

শব্দের বেগ $v = n(\sqrt{x^2+y^2} - y)\ ms^{-1}$ [চ.'১০; দি.'১০]

প্রমাণ : মনে করি, A বিন্দু হতে $u = \sqrt{2gy}$ মি./সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে উঠন্ত রকেটটি B বিন্দুতে ফেটে যায় এবং A থেকে x মিটার অনুভূমিক দূরত্বের বিন্দুটি C। তাহলে, $AB = \frac{u^2}{2g} = \frac{2gy}{2g} = y$, $AC = x$ মিটার এবং $BC = \sqrt{x^2+y^2}$ মিটার।



ধরি, B তে সৃষ্ট শব্দ A ও C তে আসতে যথাক্রমে t_1 ও t_2 সেকেন্ড সময় লাগে $(t_2 > t_1)$। দেওয়া আছে, শব্দের বেগ v মি./সে.।

$\therefore\ BA = y = vt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{y}{v}$ এবং $BC = \sqrt{x^2+y^2} = vt_2$

$\Rightarrow t_2 = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{v}$

প্রশ্নমতে, $t_2 - t_1 = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{v} - \frac{y}{v} = \frac{1}{n}$ $\therefore$ শব্দের বেগ $v = n(\sqrt{x^2+y^2} - y)$ মিটার / সেকেন্ড।

12(b) অবাধে পতনশীল একটি বস্তু 49 ms^{-1} বেগে কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অতিক্রম করে। এর পূর্ববর্তী ও পরবর্তী 3 সেকেন্ডে বস্তুটির অবস্থান নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, পতনশীল বস্তুটি $v = 49$ মি./সে. বেগে নির্দিষ্ট বিন্দু অতিক্রম করার 3 সেকেন্ড পূর্বে এর বেগ ছিল u মি./সে.। তাহলে, $v = u + gt$ সূত্র হতে পাই, $49 = u + 9{\cdot}8 \times 3 \Rightarrow u = 49 - 29{\cdot}4 = 19{\cdot}6$

$\therefore\ h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ সূত্র হতে পাই,

নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে পূর্ববর্তী 3 সেকেন্ডে বস্তুটির অবস্থান $19{\cdot}6 \times 3 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 9 = 102{\cdot}9$ মিটার উপরে।

এবং নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে পরবর্তী 3 সেকেন্ডে বস্তুটির অবস্থান $49 \times 3 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 9 = 191{\cdot}1$ মিটার নিচে।

বিকল্প পদ্ধতি : মনে করি, বস্তুটি t সেকেন্ড আবাধে পতনের পর $v = 49$ মি./সে. বেগে নির্দিষ্ট বিন্দু অতিক্রম করে। তাহলে, $v = 0 + gt \Rightarrow 49 = 9{\cdot}8t \Rightarrow t = 5.$

$\therefore$ পতনশীল বিন্দু হতে নির্দিষ্ট বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{1}{2} \times 9.8 \times 5^2 = 122{\cdot}5$ মিটার।

পতনশীল বিন্দু হতে বস্তুটি $(5 - 3) = 2$ সেকেন্ডে $\frac{1}{2} \times 9.8 \times 2^2 = 19{\cdot}6$ মিটার এবং $(5 + 3) = 8$ সেকেন্ডে $\frac{1}{2} \times 9.8 \times 8^2 = 313{\cdot}6$ মিটার অতিক্রম করে।

নির্দিষ্ট বিন্দুর হতে পূর্ববর্তী 3 সেকেন্ডে বস্তুটির অবস্থান $(122{\cdot}5 - 19{\cdot}6) = 102{\cdot}9$ মিটার উপরে এবং পরবর্তী 3 সেকেন্ডে এর অবস্থান $(313{\cdot}6 - 122{\cdot}5) = 191{\cdot}1$ মিটার নিচে।

12(c) একটি পতনশীল কণা কিছুক্ষণ অবাধে পতনের পর দেখা গেল পরবর্তী 4 সেকেন্ডে 93·2 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। পরবর্তী 4 সেকেন্ডে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

সমাধান ঃ মনে করি, কণাটি t সেকেন্ড অবাধে পতনের পর পরবর্তী 4 সেকেন্ডে 93·2 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। তাহলে, t সেকেন্ড পরে বেগ = gt = 9·8t মি./সে.।

আবার, $93{\cdot}2 = 9{\cdot}8t \times 4 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 16 \Rightarrow 39{\cdot}2\,t = 93{\cdot}2 - 78{\cdot}4 \Rightarrow t = \frac{14.8}{39.2}$,

পরবর্তী 4 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব d মিটার হলে, $93{\cdot}2 + d = 9{\cdot}8t \times 8 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 8^2$

$\Rightarrow d = 9{\cdot}8 \times \frac{14.8}{39.2} \times 8 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 8^2 - 93{\cdot}2 = 29{\cdot}6 + 313{\cdot}6 - 93{\cdot}2 = 250$ মিটার।

13. f সমত্বরণে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি এরোপ্লেন থেকে একটি বল ফেলে দেয়া হল। 4 সে. পর ইহা থেকে অপর একটি বল ফেলে দেয়া হল। দেখাও যে, ২য় বল ফেলার 2 সে. পর বল দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব হবে 16(g + f)।

প্রমাণ ঃ মনে করি, A বিন্দু হতে ১ম বলটি ফেলে দেয়া হল যখন এরোপ্লেন এর বেগ u। 4 সে. পর ইহা B বিন্দুতে পৌছা মাত্র ২য় বলটি ফেলে দেয়া হল। তাহলে, ২য় বলটির নিক্ষেপণ বেগ = (u + 4f).

6 সেকেন্ড পর ১ম বলটির অবস্থান P এবং 2 সেকেন্ড পর ২য় বলটির অবস্থান Q হলে,

$-AP = u \times 6 - \frac{1}{2} g \times 6^2 = 6u - 18g$ এবং $-BQ = (u + 4f) \times 2 - \frac{1}{2} \times g \times 2^2 = 2u + 8f - 2g$

4 সেকেন্ডে এরোপ্লেন এর অতিক্রান্ত দূরত্ব $AB = u \times 4 + \frac{1}{2} \times f \times 4^2 = 4u + 8f$

$\therefore\ PQ = AP + AB - BQ = -6u + 18g + 4u + 8f + 2u + 8f - 2g = 16g + 16f = 16(g + f)$

14. একটি ক্রিকেট বল খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হল। সর্বাধিক উচ্চতায় পৌছার শেষ অর্ধ সেকেন্ডে বলটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

সমাধান ঃ সর্বাধিক উচ্চতায় পৌছার শেষ অর্ধ সেকেন্ডে বলটির উত্থানে অতিক্রান্ত দূরত্ব

= সর্বাধিক উচ্চতা থেকে প্রথম অর্ধ সেকেন্ডে বলটির পতনে অতিক্রান্ত দূরত্ব, [∵ উত্থানকাল = পতনকাল]

$= 0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times g \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{8} \times 32$ ফুট = 4 ফুট।

প্রশ্নমালা IX E

1(a) একটি বস্তু 98 ms^{-1} বেগে অনুভূমিক তলের সাথে 60° কোণে প্রক্ষিপ্ত হল। 320 m উচ্চতায় তার বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, বস্তুটির নিক্ষেপণ বেগ u = 98 মি./সে., নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = 60°$।

ধরি, 320 মি. উচ্চতায় বস্তুটির বেগ v মি./সে. এবং তা অনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে,

$v^2 \sin^2\theta = (u \sin\alpha)^2 - 2gh = (98 \times \sin 60°)^2 - 2 \times 9{\cdot}8 \times 320 = 7203 - 6272 = 931$

$v \cos\theta = u \cos\alpha = 98 \times \cos 60° = 49 \Rightarrow v^2 \cos^2\theta = 49^2$

$\therefore$ $v = \sqrt{49^2 + 931} = 57{\cdot}72$ এবং $\theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{931}{49^2}} = 31{\cdot}9°$

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ $57{\cdot}72$ মিটার/ সেকেন্ড তা অনুভূমিকের সাথে $31{\cdot}9°$ কোণ উৎপন্ন করে।

1(b) ভূমি হতে $\sin^{-1}\frac{3}{5}$ কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা **120** মি. হলে, নিক্ষেপণ বেগের মান এবং এর বিচরণ পথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে বস্তুর বেগ ও গমনকাল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, বস্তুটির নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = \sin^{-1}\frac{3}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

নিক্ষেপণ বেগ u মি./সে. হলে, অনুভূমিক পাল্লা $\frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = 120 \Rightarrow u^2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = 60\times 9{\cdot}8$

$$\Rightarrow u^2 = 5\times 25\times 9{\cdot}8 = 49\times 25 \Rightarrow u = 35$$

$\therefore$ নিক্ষেপণ বেগ $u = 35$ মি./সে., সর্বোচ্চ বিন্দুতে বস্তুর বেগ = বস্তুর অনুভূমিক বেগ $u\cos\alpha = 35\times\frac{4}{5} = 28$

মি./সে. এবং সর্বোচ্চ বিন্দুতে গমনকাল $t = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{35\times\frac{3}{5}}{9{\cdot}8} = 2{\cdot}14$ সেকেন্ড (প্রায়)।

1(c) কোনো পাহাড়ের চূড়া হতে ভূমির সমান্তরালে **98** ms^{-1} বেগে নিক্ষিপ্ত একটি পাথর পাহাড়ের পাদদেশ হতে **245** মি. দূরে ভূমিতে পতিত হয়। পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, পাহাড়ের উচ্চতা h মিটার এবং পাথরটি t সেকেন্ডে 245 মিটার দূরে ভূমিতে পতিত হয়।

$\therefore$ বস্তুটির অতিক্রান্ত অনুভূমিক সরণ $= 98\cos 0°\times t = 245 \Rightarrow t = 2{\cdot}5$

এবং অতিক্রান্ত উল্লম্ব সরণ $= h = 98\sin 0°\times t + \frac{1}{2}gt^2 = 0 + \frac{1}{2}\times 9.8\times(2.5)^2 = 30{\cdot}625$

$\therefore$ পাহাড়ের উচ্চতা $h = 30{\cdot}625$ মিটার।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে করি, পাহাড়ের উচ্চতা h মিটার। পাহাড়ের চূড়াকে মূলবিন্দু ধরলে পাথরটি (245, h) বিন্দুগামী হবে। তাহলে, $y = \frac{gx^2}{2u^2}$ সূত্র দ্বারা পাই, $h = \frac{9.8\times 245^2}{2\times 98^2} = 30{\cdot}625$ $\therefore$ পাহাড়ের উচ্চতা $30{\cdot}625$ মিটার।

2. একটি বালক একটি ফুটবল খাড়া উপরের দিকে **80** মি. উঁচুতে নিক্ষেপ করতে পারে। সে বলটি সর্বাধিক কত অনুভূমিক দূরত্বে নিক্ষেপ করতে পারবে এবং এ ক্ষেত্রে বিচরণকাল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, বলটির নিক্ষেপণ বেগ u মি./ সে.। শর্তানুসারে, $80 = \frac{u^2}{2g} \Rightarrow u^2 = 2\times 9{\cdot}8\times 80$ $\therefore$ $u = 39{\cdot}6$

সে বলটি সর্বাধিক অনুভূমিক দূরত্বে নিক্ষেপ করতে পারবে $R_{max} = \frac{u^2}{g} = \frac{(39\cdot 6)^2}{9\cdot 8} = 160$ মিটার।

এবং এ ক্ষেত্রে বিচরণকাল $T = \frac{2u\sin 45^0}{g} = \frac{2\times 39\cdot 6\times 1/\sqrt{2}}{9\cdot 8} = 5{\cdot}71$ সেকেন্ড।

3. একটি বুলেট 50 গজ দূরবর্তী এবং 75 ফুট উচ্চ একটি খাড়া দেওয়াল কোন রকমে ভূমির সমান্তরালে অতিক্রম করে। বুলেটটির প্রক্ষেপ বেগ ও দিক নির্ণয় কর। ($g = 32$ ft./ sec^2.) [চ.'০৩; বুয়েট.'০২-০৩]

সমাধান ঃ মনে করি, বুলেটটির প্রক্ষেপ বেগ u মি./সে. এবং প্রক্ষেপ কোণ α.

যেহেতু বুলেটটি 50 গজ অর্থাৎ 3×50 ফুট দূরে অবস্থিত 75 ফুট উচ্চ একটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে অনুভূমিকভাবে চলে যায়, সেহেতু বৃহত্তম উচ্চতা $H = 75$ এবং অর্ধ অনুভূমিক পাল্লা $\frac{R}{2} = 3 \times 50 \Rightarrow R = 300.$

H এবং R এর সম্পর্ক হতে পাই, $\tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{4\times 75}{300} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

এখন, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow 75 = \frac{u^2\sin^2 45^0}{2g} = \frac{u^2(1/\sqrt{2})^2}{2\times 32} = \frac{u^2}{128} \Rightarrow u^2 = 9600 \Rightarrow u = 40\sqrt{6}$

$\therefore$ বুলেটটির প্রক্ষেপ বেগের মান $40\sqrt{6}$ ফুট / সে. এবং প্রক্ষেপ কোণ 45° ।

4(a) ভূমি থেকে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপক 4 সেকেন্ড পরে নিক্ষেপণ বিন্দু হতে 78·4 মি. দূরে ভূমিতে আঘাত করে। নিক্ষেপণ বেগের মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, প্রক্ষেপকটির নিক্ষেপণ বেগ u মি./সে. এবং নিক্ষেপণ কোণ α. তাহলে,

বিচরণকাল $\frac{2u\sin\alpha}{g} = 4 \Rightarrow u\sin\alpha = 2\times 9{\cdot}8 = 19{\cdot}6 \ldots\ldots$ (i) এবং

প্রক্ষেপক দ্বারা 4 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্ব $= u\cos\alpha\times 4 = 78{\cdot}4 \Rightarrow u\cos\alpha = 19{\cdot}6 \ldots\ldots$(ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow u^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 384{\cdot}16 + 384{\cdot}16 \Rightarrow u^2 = 768{\cdot}32 \Rightarrow u = 27{\cdot}72$ (প্রায়)

4(b) একটি ক্রিকেট বলকে ভূমি থেকে নিক্ষেপ করা হলে এটি 100 গজ দূরে ভূমিতে ফিরে আসে । এর বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা $56\frac{1}{4}$ ফুট হলে এর বিচরণকাল ও প্রক্ষেপণ কোণের মান নির্ণয় কর। [কু.'০৭; চ.'১০; য.'১১]

সমাধান ঃ মনে করি, ক্রিকেট বলের প্রক্ষেপণ বেগ u ফুট/সে. এবং প্রক্ষেপণ কোণ α. তাহলে,

অনুভূমিক পাল্লা $R = 3\times 100$ ফুট এবং সর্বাধিক উচ্চতা $H = 56\frac{1}{4} = \frac{225}{4}$ ফুট।

H এবং R এর সম্পর্ক হতে পাই, $\tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{4\times(225/4)}{3\times 100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5}$

এখন, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow \frac{225}{4} = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{u^2\times(9/25)}{2\times 32} \Rightarrow u^2 = 10000 \Rightarrow u = 100$

$\therefore$ বিচরণকাল $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} = 2\times\frac{100}{32}\times\frac{3}{5} = 3{\cdot}75$ সেকেন্ড এবং প্রক্ষেপণ কোণ $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ ।

4(c) একটি রাইফেলের পাল্লা 1000 মিটার। চন্দ্রের মাধ্যাকর্ষণ শক্তি পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণ শক্তির $\frac{1}{6}$ গুণ হলে একইরূপ অবস্থায় চন্দ্রপৃষ্ঠে রাইফেলের পাল্লা কত হবে? [কু.'০২]

সমাধান : মনে করি, প্রক্ষেপণ বেগ u , প্রক্ষেপণ কোণ α এবং পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণ শক্তি g । তাহলে, চন্দ্রের মাধ্যাকর্ষণ শক্তি $\frac{g}{6}$ ।

$\therefore$ পৃথিবীপৃষ্ঠে রাইফেলের অনুভূমিক পাল্লা $R = 1000 = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

$\therefore$ চন্দ্রপৃষ্ঠে রাইফেলের অনুভূমিক পাল্লা $R_1 = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g/6} = 6 \times \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = 6 \times 1000 = 6000$ মিটার।

4(d) প্রমাণ কর যে, নিক্ষেপণ কোণ $\frac{\pi}{4}$ হলে অনুভূমিক পাল-র মান বৃহত্তম হবে এবং এক্ষেত্রে পাল্লা R = 4H, যেখানে বৃহত্তম উচ্চতা = H

প্রমাণ : u গতিবেগে এবং α কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত কোন বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$, এখানে u ও g ধ্রুবক। সুতরাং R এর মান $\sin 2\alpha$ এর উপর নির্ভর করে এবং $\sin 2\alpha = 1$ i.e., $2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ হলে R বৃহত্তম হবে । এক্ষেত্রে পাল্লা $R = \frac{u^2}{g}$ এবং $H = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{u^2 \sin^2(\pi/4)}{2g} = \frac{u^2(1/\sqrt{2})^2}{2g} = \frac{1}{4} \times \frac{u^2}{g} = \frac{1}{4}R$

$\therefore \quad R = 4H$

4(e) u গতিবেগে এবং α কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত কোন বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা ও বৃহত্তম পাল্লার মান যথাক্রমে R ও D হলে, প্রমাণ কর যে, $R = D \sin 2\alpha$, এবং দুইটি বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা h_1 ও h_2 হলে, দেখাও যে, $D = 2(h_1 + h_2)$ [য.'০২]

প্রমাণ : u গতিবেগে এবং α কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত কোনো বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$ এবং বৃহত্তম পাল্লার মান $D = \frac{u^2}{g}$. $\therefore R = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha = D \sin 2\alpha$

আমরা জানি, একটি প্রক্ষেপকের নির্দিষ্ট পাল্লা R এর জন্য দুইটি নিক্ষেপণ কোণ থাকে। এদের একটি α হলে অপরটি $(90° - \alpha)$ হবে। ধরি, নিক্ষেপণ বেগ u এবং নিক্ষেপণ কোণ α এর জন্য বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা = h_1 ও নিক্ষেপণ কোণ $(90° - \alpha)$ এর জন্য বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা = h_2 । তাহলে,

$h_1 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ এবং $h_2 = \frac{u^2 \sin^2(90^0 - \alpha)}{2g} = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$

$\therefore \quad h_1 + h_2 = \frac{u^2}{2g}(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{2} D.1 \Rightarrow D = 2(h_1 + h_2)$

4(f) t সময় অন্তে একটি প্রক্ষেপক এর বিচরণ পথের P বিন্দুতে পৌছে। আরও t' সময় শেষে তা P বিন্দু হতে

নিক্ষেপণ বিন্দুর অনুভূমিক সমতলে ফিরে আসে। দেখাও যে, P বিন্দুর উচ্চতা $h = \frac{1}{2}gtt'$. [চ. '০৫; ঢা.'০৪,'০৯]

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রক্ষেপকটির প্রক্ষেপ বেগ u এবং প্রক্ষেপ কোণ α. তাহলে, বিচরণকাল $T = t + t' = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

$\Rightarrow u\sin\alpha = Tg/2.$

এখন, P বিন্দুর উচ্চতা $h = u\sin\alpha \times t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gT \times t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(t+t') \times t - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}gt\,t' - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt\,t'$ (Showed)

4(g) একটি বস্তু u বেগে এবং অনুভূমির সাথে α কোণে নিক্ষেপ করা হল। অনুভূমিক পাল্লা R, সর্বাধিক উচ্চতা H এবং বিচরণকাল T হলে, দেখাও যে, (i) $16gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$ [য.'০৩; ঢা.'১০]

(ii) $g^2T^4 - 4T^2u^2 + 4R^2 = 0$

প্রমাণ ঃ (i) আমরা জানি, নিক্ষেপণ বেগ u এবং নিক্ষেপণ কোণ α হলে, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{2gH}{u^2}$ ...(1)

এবং $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{2u^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow R^2 = \frac{4u^4}{g^2}\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{4u^4}{g^2}\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$

$\Rightarrow R^2 = \frac{4u^4}{g^2} \times \frac{2gH}{u^2}(1 - \frac{2gH}{u^2})$, [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow R^2 = \frac{8u^2H}{g}(\frac{u^2 - 2gH}{u^2}) = \frac{8H}{g}(u^2 - 2gH) \Rightarrow gR^2 = 8Hu^2 - 16gH^2$

$\therefore\ 16gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$ (Showed)

(ii) আমরা জানি, নিক্ষেপণ বেগ u এবং নিক্ষেপণ কোণ α হলে, $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{gT}{2u}$ ......(2) এবং

$R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{2u^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow R^2 = \frac{4u^4}{g^2}\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{4u^4}{g^2}\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$

$\Rightarrow R^2 = \frac{4u^4}{g^2} \times \frac{g^2T^2}{4u^2}(1 - \frac{g^2T^2}{4u^2})$, [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow R^2 = T^2u^2(\frac{4u^2 - g^2T^2}{4u^2}) = T^2(\frac{4u^2 - g^2T^2}{4}) \Rightarrow 4R^2 = 4u^2T^2 - g^2T^4$

$\therefore\ g^2T^4 - 4T^2u^2 + 4R^2 = 0$ (Showed)

4(h) একটি কণা *v* বেগে নিক্ষিপ্ত হলে যদি তার অনুভূমিক পাল্লা লব্ধ বৃহত্তম উচ্চতার দ্বিগুণ হয়, তবে দেখাও যে, তার অনুভূমিক পাল্লা $\frac{4v^2}{5g}$.

প্রমাণ:ধরি, নিক্ষেপণ কোণ α, তাহলে, অনুভূমিক পাল্লা $R=\frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$ এবং বৃহত্তম উচ্চতা $H=\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$

প্রশ্নমতে, $R=2H \Rightarrow \frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=2\times\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow 2\cos\alpha=\sin\alpha \Rightarrow \tan\alpha=2$

$\therefore \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ অনুভূমিক পাল্লা $R=\frac{2v^2}{g}\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4v^2}{5g}$

4(i) u ও v আদিবেগে এবং α, β ($\alpha > \beta$) কোণে দুইটি বস্তু নিক্ষিপ্ত হল। এরা যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে একই অনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রম করলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{t_1^2-t_2^2}{t_1^2+t_2^2}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

প্রমাণ : ধরি, বস্তু দুটি একই অনুভূমিক দূরত্ব d অতিক্রম করে। তাহলে, $d=u\cos\alpha\times t_1=v\cos\beta\times t_2$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{t_2}=\frac{v\cos\beta}{u\cos\alpha} \quad \ldots\ldots \text{(i)}$$

আবার, বিচরণকাল $t_1=\frac{2u\sin\alpha}{g}$, $t_2=\frac{2v\sin\beta}{g}$ এবং $\frac{t_1}{t_2}=\frac{u\sin\alpha}{v\sin\beta} \ldots\ldots$ (ii)

$$\text{(i)}\times\text{(ii)} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2}\times\frac{t_1}{t_2}=\frac{v\cos\beta}{u\cos\alpha}\times\frac{u\sin\alpha}{v\sin\beta} \Rightarrow \frac{t_1^2}{t_2^2}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1^2-t_2^2}{t_1^2+t_2^2}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha} \quad \therefore \frac{t_1^2-t_2^2}{t_1^2+t_2^2}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

4(j) কোনো নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা বৃহত্তম পাল্লার অর্ধেক হলে নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, নিক্ষেপণ বেগ u এবং নিক্ষেপণ কোণ α হলে, অনুভূমিক পাল্লা $R=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$ এবং

বৃহত্তম অনুভূমিক পাল্লার $R_{max}=\frac{u^2}{g}$. প্রশ্নমতে, $R=\frac{1}{2}R_{max} \Rightarrow \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{1}{2}\times\frac{u^2}{g}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ \Rightarrow 2\alpha=30^\circ \Rightarrow \alpha=15^\circ$

আমরা জানি, একটি প্রক্ষেপকের নির্দিষ্ট পাল্লার জন্য দুইটি নিক্ষেপণ কোণ থাকে। এদের একটি α হলে অপরটি $(90^\circ-\alpha)$ হবে।

$\therefore$ নিক্ষেপণ কোণ $=15^\circ$ অথবা, $(90^\circ-15^\circ)=75^\circ$

5(a) একজন খেলোয়াড় 2 মি. উচ্চতায় ভূমির সাথে 30° কোণে 20 মি./সে. বেগে একটি ক্রিকেট বল ছুঁড়ে মারলে অপর একজন খেলোয়াড় 1 মি. উঁচুতে একে ধরে ফেলে। খেলোয়াড় দুইজন কত দূরে ছিল? [কু.'০৪]

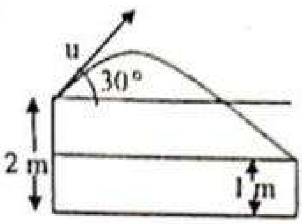
সমাধান : এখানে বলটির প্রক্ষেপ বেগ $u = 20\ ms^{-1}$, প্রক্ষেপ কোণ $\alpha = 30°$ এবং উল্লম্ব সরণ $h = 2 - 1 = 1$ মি.। বলটি ধরার সময় t সেকেন্ড হলে,

$h = -u \sin 30° \times t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 1 = -20 \times \frac{1}{2} \times t + \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times t^2$

$\Rightarrow 4{\cdot}9 t^2 - 10t - 1 = 0$

$\Rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 4{\cdot}9 \times -1}}{2 \times 4{\cdot}9} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 19{\cdot}6}}{9{\cdot}8}$

$\Rightarrow t = \frac{10 + \sqrt{119{\cdot}6}}{98}$, $[\because t > 0]$



$\therefore$ বলটি ধরার সময় $t = 2{\cdot}14$ সে. (প্রায়)

$\therefore$ খেলোয়াড়দ্বয়ের দূরত্ব = t সেকেন্ডে বলটির অনুভূমিক সরণ $= u \cos 30° \times t = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2{\cdot}14 = 37$ মি.

5(b) $196\ ms^{-1}$ বেগে ভূ-সমান্তরাল চলমান একটি বেলুন হতে একখণ্ড পাথর নিচে ফেলা হলে তা 5 সেকেন্ড পরে ভূমিতে পড়ে। বেলুনের উচ্চতা এবং পাথরটি যে বেগে ভূমিতে পড়ে তা নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, বেলুনের উচ্চতা h মিটার। প্রশ্নমতে, প্রক্ষেপ কোণ $\alpha = 0°$। এখানে $u = 196$ মি./সে., $t = 5$ সে.।

$\therefore\ h = -u \sin 0° \times t - \frac{1}{2} gt^2 = 0 + \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times 25 = 122{\cdot}5$ মিটার।

পাথরটি v মি./সে. বেগে ভূমির সাথে θ কোণে ভূমিতে পড়লে, $v \cos \theta = u \cos 0° = 196$

এবং $v \sin \theta = u \sin 0° + gt = 0 + 9{\cdot}8 \times 5 = 49$

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ $v = \sqrt{196^2 + 49^2} = 202$ মি. / সে. (প্রায়)।

5(c) 750 মি. উঁচু একটি টাওয়ারের শীর্ষদেশ হতে একটি বস্তু কি গতিবেগে অনুভূমিকভাবে নিক্ষেপ করলে তা টাওয়ারের পাদদেশ থেকে 250 মি. দূরে ভূ-পৃষ্ঠে পড়বে?

সমাধান : এখানে, টাওয়ারের উচ্চতা $h = 750$ মিটার, বস্তুটির অতিক্রান্ত অনুভূমিক সরণ $d = 250$ মি. এবং নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = 0°$। ধরি, বস্তুটির নিক্ষেপণ বেগ u মি./সে.। বস্তুটি t সেকেন্ডে ভূ-পৃষ্ঠে পড়লে,

$\therefore\ h = u \sin 0° \times t + \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow 750 = \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8\ t^2 = 4{\cdot}9\ t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{750}{4{\cdot}9} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{7500}{49}} = \frac{50\sqrt{3}}{7}$

এবং $d = u \cos 0° \times t \Rightarrow 250 = u \times \frac{50\sqrt{3}}{7}$. $\therefore$ নির্ণেয় বেগ $u = \frac{35}{\sqrt{3}} = 20{\cdot}21$ মি./সে. (প্রায়)।

বিকল্প পদ্ধতি : মনে করি, বস্তুটির নিক্ষেপণ বেগ u মি./সে.। টাওয়ারের শীর্ষদেশকে মূলবিন্দু ধরলে বস্তুটি (250, 750) বিন্দুগামী হবে। তাহলে, $y = \frac{gx^2}{2u^2}$ সূত্র দ্বারা পাই, $750 = \frac{9.8 \times 250^2}{2 \times u^2} \Rightarrow u^2 = \frac{9.8 \times 250^2}{2 \times 750}$

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ $u = 20{\cdot}21$ মি./সে. (প্রায়)।

5(d) একজন বৈমানিক 5000 মি. উপর দিয়ে 250 কি.মি./ঘ. বেগে উড়ে যাওয়ার সময় একটি বোমা ফেলে দিল। সে যে স্থানে আঘাত করতে চায় সেই স্থান হতে তার অনুভূমিক দূরত্ব কত হওয়া প্রয়োজন? [ঢা.'০২]

সমাধান : এখানে, বিমানের উচ্চতা h = 5000 মিটার, বিমানের বেগ তথা বোমার নিক্ষেপণ বেগ u = 250 কি.মি./ঘ. $= 250 \times \frac{1000}{60\times 60} = \frac{625}{9}$ মি./সে.। ধরি, বোমাটি d মিটার অনুভূমিক দূরত্ব হতে ফেলতে হবে। বোমার নিক্ষেপণ বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরলে বোমাটি (d, 5000) বিন্দুগামী হবে। তাহলে, $y = \frac{gx^2}{2u^2}$ সূত্র দ্বারা পাই,

$$5000 = \frac{9.8\times d^2}{2\times(625/9)^2} \Rightarrow d^2 = \frac{5000\times 2\times 625^2}{9\cdot 8\times 9^2}$$ ∴ নির্ণেয় দূরত্ব d = 2218·32 মিটার (প্রায়)।

5(e) কোনো পাহাড়ের শীর্ষদেশ হতে ভূমির সমান্তরালে 50 ms^{-1} বেগে নিক্ষিপ্ত একটি পাথর এর পাদদেশ হতে 350 m দূরে ভূমিতে পতিত হয়। পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, পাথরের নিক্ষেপণ বেগ u = 50 মি./সে.। ধরি, পাহাড়ের উচ্চতা h মিটার। পাহাড়ের শীর্ষদেশকে মূলবিন্দু ধরলে পাথরটি (350, h) বিন্দুগামী হবে। তাহলে,

$y = \frac{gx^2}{2u^2}$ সূত্র দ্বারা পাই, $h = \frac{9.8\times 350^2}{2\times 50^2} = 240\cdot 1$ ∴ পাহাড়ের উচ্চতা h = 240·1 মিটার।

5(f) 60 m উঁচু একটি মিনারের চূড়া হতে একখণ্ড পাথর 40 ms^{-1} বেগে এবং অনুভূমিক তলের সাথে 30° কোণে নিক্ষিপ্ত হল। এটি পাহাড়ের পাদদেশ হতে কত দূরত্বে ভূমিতে পড়বে? [সি.'০১]

সমাধান : এখানে, মিনারের উচ্চতা h = 60 মিটার, নিক্ষেপণ বেগ u = 40 মি./সে. এবং নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = 30°$। ধরি, পাথরটি পাহাড়ের পাদদেশ হতে t সেকেন্ডে d মিটার দূরে ভূমিতে পড়বে।

$$\therefore\ h = -u\sin 30°\times t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 60 = -40\times\frac{1}{2}\times t + \frac{1}{2}\times 9\cdot 8\times t^2 = -20t + 4\cdot 9\,t^2$$

$$\Rightarrow 4\cdot 9t^2 - 20t - 60 = 0 \Rightarrow t = \frac{20\pm\sqrt{400-4\times 4\cdot 9\times -60}}{2\times 4\cdot 9} = \frac{20\pm\sqrt{400+1176}}{9\cdot 8} = \frac{20\pm 39\cdot 69}{9\cdot 8}$$

যেহেতু $t > 0$, কাজেই $t = \frac{20+39\cdot 69}{9\cdot 8} = 6\cdot 09$ (প্রায়)।

$$\therefore\ \text{নির্ণেয় দূরত্ব } d = u\cos 30°\times t = 40\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6\cdot 09 = 210\cdot 96 \text{ মিটার (প্রায়)।}$$

5(g) 80 m উঁচু একটি মিনারের চূড়া হতে একখণ্ড পাথর 128 ms^{-1} বেগে এবং অনুভূমিক তলের সাথে 30° কোণে নিক্ষিপ্ত করা হল। উহা মিনারের পাদদেশ হতে কত দূরে ভূমিতে পড়বে? [ঢা.'০৬; কু.'০৮]

সমাধান : এখানে, মিনারের উচ্চতা h = 80 মিটার, নিক্ষেপণ বেগ u = 128 মি./সে. এবং নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = 30°$। ধরি, পাথরটি পাহাড়ের পাদদেশ হতে t সেকেন্ডে d মিটার দূরে ভূমিতে পড়বে।

$$\therefore\ h = -u\sin 30°\times t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 80 = -128\times\frac{1}{2}\times t + \frac{1}{2}\times 9\cdot 8\times t^2 = -64t + 4\cdot 9\,t^2$$

$\Rightarrow 4\cdot9\,t^2 - 64t - 40 = 0$

$\Rightarrow t = \dfrac{64 \pm \sqrt{4096 - 4\times4\cdot9\times-80}}{2\times4\cdot9} = \dfrac{64 \pm \sqrt{4096+1568}}{9\cdot8} = \dfrac{64 \pm 75\cdot26}{9\cdot8}$

যেহেতু $t > 0$, কাজেই $t = \dfrac{64 + 75\cdot26}{9\cdot8} = 14\cdot21$ (প্রায়)।

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $d = u\cos 30^\circ \times t = 124 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 14\cdot21 = 1575\cdot2$ মিটার (প্রায়)।

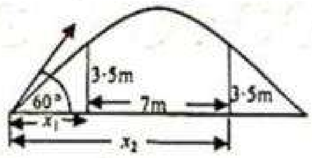
5(h) h একক উচ্চতা বিশিষ্ট একটি পাহাড়ের চূড়া হতে ভূমির সমান্তরালে v বেগে নিক্ষিপ্ত একটি গুলি এর পাদদেশ হতে R একক দূরে ভূমিকে আঘাত করে। দেখাও যে, $R = v\sqrt{2h/g}$

প্রমাণ ঃ এখানে, পাহাড়ের উচ্চতা h একক, গুলির অতিক্রান্ত অনুভূমিক সরণ R একক, নিক্ষেপণ বেগ v এবং নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = 0^\circ$। গুলিটি t সেকেন্ডে ভূমিকে আঘাত করলে,

$\therefore\ h = v\sin 0^\circ \times t + \dfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \dfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ এবং $R = v\cos 0^\circ \times t\ \ \therefore R = v\sqrt{2h/g}$

6(a) একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে এমনভাবে প্রক্ষেপ করা হল যেন তা 7 m ব্যবধানে অবস্থিত 3·5 m উঁচু দুইটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে চলে যায়। বস্তুটির অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। [ঢা.'০১; য.'০৫]

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুটির অনুভূমিক পাল্লা = R মিটার। তাহলে,



$3\cdot5 = x\tan 60^\circ\,(1 - \dfrac{x}{R})$ [$y = x\tan\alpha\,(1 - \dfrac{x}{R})$ দ্বারা]

$\Rightarrow 3\cdot5 = \sqrt{3}\,x\,(1 - \dfrac{x}{R}) = \sqrt{3}\,x - \dfrac{\sqrt{3}}{R}x^2$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{R}x^2 - \sqrt{3}\,x + 3\cdot5 = 0$, যা x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। ধরি, এর মূলদ্বয় x_1, x_2 [$x_2 > x_1$].

$\therefore\ x_1 + x_2 = -\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}/R} = R$ এবং $x_1 x_2 = \dfrac{3\cdot5}{\sqrt{3}/R} = \dfrac{7R}{2\sqrt{3}}$

শর্তানুসারে, $x_2 - x_1 = 7 \Rightarrow (x_2 - x_1)^2 = 49 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 49$

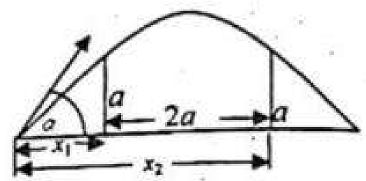
$\Rightarrow R^2 - 4\times\dfrac{7R}{2\sqrt{3}} = 49 \Rightarrow \sqrt{3}R^2 - 14R - 49\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}R^2 - 21R + 7R - 49\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3}R(R - 7\sqrt{3}) + 7(R - 7\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow (R - 7\sqrt{3})(\sqrt{3}R + 7) = 0$

$\therefore$ অনুভূমিক পাল্লা $R = 7\sqrt{3}$ মিটার, [$\because R > 0$]

6(b) একটি বস্তুকে ভূমি থেকে α কোণে এমনভাবে নিক্ষেপ করা হল যেন তা $2a$ ব্যবধানে অবস্থিত a পরিমাণ উঁচু দুইটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে অতিক্রম করে। প্রমাণ কর বস্তুটির পাল্লা $2a\cot\dfrac{\alpha}{2}$ [সি.'০৩]

প্রমাণ : মনে করি, বস্তুটির অনুভূমিক পাল্লা R। তাহলে,



$a = x\tan\alpha\,(1-\frac{x}{R})$, [$y = x\tan\alpha\,(1-\frac{x}{R})$ দ্বারা]

$\Rightarrow a\cot\alpha = x(1-\frac{x}{R}) = x - \frac{1}{R}x^2$

$\Rightarrow \frac{1}{R}x^2 - x + a\cot\alpha = 0$, যা x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। ধরি, এর মূলদ্বয় x_1, x_2 [$x_2 > x_1$].

$\therefore\ x_1+x_2 = -\frac{-1}{1/R} = R$ এবং $x_1x_2 = \frac{a\cot\alpha}{1/R} = aR\cot\alpha$

শর্তানুসারে, $x_2 - x_1 = 2a \Rightarrow (x_2-x_1)^2 = 4a^2 \Rightarrow (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4a^2$

$\Rightarrow R^2 - 4aR\cot\alpha - 4a^2 = 0$

$$\therefore\ R = \frac{4a\cot\alpha \pm \sqrt{16a^2\cot^2\alpha - 4\times1\times-4a^2}}{2\times1} = \frac{4a\cot\alpha \pm \sqrt{16a^2(\cot^2\alpha+1)}}{2}$$

$$= 2a(\cot\alpha \pm \operatorname{cosec}\alpha)$$

'+' নিয়ে পাই, $R = 2a(\cot\alpha + \operatorname{cosec}\alpha) = 2a(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}) = 2a(\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha})$

$$\Rightarrow R = 2a\left(\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right) = 2a\cot\frac{\alpha}{2}$$

6(c) কোনো প্রক্ষিপ্ত বস্তু এমন দুটি বিন্দু দিয়ে যায় যারা প্রক্ষেপ বিন্দুগামী অনুভূমিক ও উল্লম্ব তল হতে যথাক্রমে 10 মি. ও 20 মি. দূরত্বে এবং 3 মি. ও 4 মি. খাড়া দূরত্বে অবস্থিত। প্রক্ষেপ বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, প্রক্ষিপ্ত বস্তুর প্রক্ষেপণ কোণ α এবং প্রক্ষেপণ বেগ u মি./সে.। নিক্ষেপণ বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরলে বস্তুটি (10, 3) এবং (20, 4) বিন্দুগামী হবে। তাহলে, $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ সূত্র দ্বারা পাই,

$3 = 10\tan\alpha - \frac{100g}{2u^2\cos^2\alpha}\ \cdots\cdots$(i), $4 = 20\tan\alpha - \frac{400g}{2u^2\cos^2\alpha}\ \cdots\cdots$(ii)

$4\times$(i) $-$ (ii) $\Rightarrow 12 - 4 = 40\tan\alpha - 20\tan\alpha \Rightarrow 20\tan\alpha = 8 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{2}{5}\ \therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{2}{5}$.

এখন, $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{2^2+5^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

(i) হতে পাই, $3 = 10\times\frac{2}{5} - \frac{50\times9\cdot8\times29}{u^2\times25} \Rightarrow \frac{522}{u^2} = 4 - 1 \Rightarrow u^2 = 522$

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ $u = 22\cdot85$ মিটার (প্রায়)।

7. একটি ক্রিকেটবলকে 28 ms^{-1} বেগে আঘাত করলে তা 35 m দূরে 19·6 m উঁচু একটি দেয়াল স্পর্শ করে যায়। নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান **:** মনে করি, ক্রিকেটবলটির নিক্ষেপণ কোণ α. তাহলে, $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ সূত্র দ্বারা পাই,

$$19{\cdot}6 = 35\tan\alpha - \frac{9{\cdot}8\times 35^2}{2\times 28^2}\sec^2\alpha \Rightarrow 19{\cdot}6 = 35\tan\alpha - 4{\cdot}9\times\frac{25}{16}\sec^2\alpha$$

$$\Rightarrow 16\times 2{\cdot}8 = 16\times 5\tan\alpha - 0{\cdot}7\times 25\,(1+\tan\alpha) \Rightarrow 44{\cdot}8 = 80\tan\alpha - 17{\cdot}5 - 17{\cdot}5\tan^2\alpha$$

$$\Rightarrow 17{\cdot}5\tan^2\alpha - 80\tan\alpha + 62{\cdot}3 = 0$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{80\pm\sqrt{6400-4\times 17{\cdot}5\times 62{\cdot}3}}{2\times 17{\cdot}5} = \frac{80\pm 45{\cdot}15}{35}$$

'+' নিয়ে, $\tan\alpha = 3{\cdot}575 \Rightarrow \alpha = 74{\cdot}37°$ (প্রায়)

'–' নিয়ে, $\tan\alpha = 0{\cdot}995 \Rightarrow \alpha = 44{\cdot}88°$ (প্রায়)

8. একই বেগে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপকের নির্দিষ্ট পাল্লা R এর জন্য বিচরণকাল t_1, t_2 হলে, প্রমাণ কর যে, $R = \frac{1}{2}g t_1 t_2$. [য.'০০; ঢা.'০৭]

প্রমাণ **:** আমরা জানি, একটি প্রক্ষেপকের নির্দিষ্ট পাল্লা R এর জন্য দুইটি নিক্ষেপণ কোণ থাকে। এদের একটি α হলে অপরটি $(90° - \alpha)$ হবে। ধরি, নিক্ষেপণ বেগ u এবং নিক্ষেপণ কোণ α এর জন্য বিচরণকাল $= t_1$ ও নিক্ষেপণ কোণ $(90° - \alpha)$ এর জন্য বিচরণকাল $= t_2$। তাহলে, $t_1 = \frac{2u\sin\alpha}{g}$ এবং $t_2 = \frac{2u\sin(90^0-\alpha)}{g} = \frac{2u\cos\alpha}{g}$

এখন, $t_1\times t_2 = \frac{2u\sin\alpha}{g}\times\frac{2u\cos\alpha}{g} = \frac{2}{g}\times\frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{2}{g}R \quad \therefore R = \frac{1}{2}g t_1 t_2$ (Proved).

9(a) কোনো প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের যেকোনো বিন্দুতে তার বেগ u এবং অনুভূমিক তলের সাথে নতি α হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{u}{g\sin\alpha}$ সময় পরে বস্তুটি পর্বোক্ত দিকের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করবে।

প্রমাণ **:** মনে করি, প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের যেকোন বিন্দু A হতে t সময় পরে B বিন্দুতে ইহা পূর্বোক্ত দিকের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করে।

$\therefore$ A বিন্দুতে বস্তুটির দিকের ঢাল $m_1 = \frac{\text{আদি অবস্থায় খাড়া বেগ}}{\text{আদি অবস্থায় অনুভূমিক বেগ}} = \frac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

B বিন্দুতে বস্তুটির দিকের ঢাল $m_2 = \frac{\text{t সময়ে খাড়া বেগ}}{\text{t সময়ে অনুভূমিক বেগ}} = \frac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha}$

প্রশ্নমতে, $m_1\times m_2 = -1 \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha} = -1 \Rightarrow u\sin^2\alpha - gt\sin\alpha = u\cos^2\alpha$

$\Rightarrow gt\sin\alpha = u(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = u \quad \therefore t = \dfrac{u}{g\sin\alpha}$

বিকল্প পদ্ধতি : মনে করি, প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের যেকোন বিন্দু A হতে t সময় পরে B বিন্দুতে ইহা পূর্বোক্ত দিকের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করে।

আমরা জানি, $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} = bx + ax^2$, যেখানে $b = \tan\alpha$, $a = -\dfrac{g}{2u^2\cos^2\alpha}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = b + 2ax$

আদি অবস্থায় বস্তুটির অনুভূমিক সরণ $x = 0$ এবং t সময়ে বস্তুটির অনুভূমিক সরণ $x = u\cos\alpha \times t$

A বিন্দুতে বস্তুটির দিকের ঢাল $m_1 = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0} = b + 2a\times 0 = b$

B বিন্দুতে বস্তুটির দিকের ঢাল $m_2 = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=u\cos\alpha.t} = b + 2a\times u\cos\alpha\times t$

প্রশ্নমতে, $m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow b\times(b + 2a\times u\cos\alpha\times t) = -1$

$\Rightarrow b + 2a\times u\cos\alpha\times t = -\dfrac{1}{b} \Rightarrow 2a\times u\cos\alpha\times t = -\dfrac{1}{b} - b = -\dfrac{b^2+1}{b}$

$\Rightarrow 2\times\left(-\dfrac{g}{2u^2\cos^2\alpha}\right)\times u\cos\alpha\times t = -\dfrac{\tan^2\alpha+1}{\tan\alpha} \Rightarrow \dfrac{g}{u\cos\alpha}t = \dfrac{\sec^2\alpha}{\tan\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\times\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\Rightarrow t = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\times\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\times\dfrac{u\cos\alpha}{g} = \dfrac{u}{g\sin\alpha}$

9(b) একটি বস্তু $39\cdot2\ ms^{-1}$ বেগে ভূমির সাথে $30°$ কোণে নিক্ষিপ্ত হল। কত সময় পরে বস্তুটি নিক্ষেপ দিকের সাথে লম্বভাবে চলবে?

[চ.'০৭]

সমাধান : দেওয়া আছে, নিক্ষেপণ বেগ $u = 39\cdot2$ মি./সে., নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = 30°$ । ধরি, t সময় পরে প্রক্ষিপ্ত বস্তুটি পূর্বোক্ত দিকের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করে।

$\therefore$ নিক্ষেপণ বিন্দুতে বস্তুটির দিকের ঢাল $m_1 = \dfrac{\text{আদি অবস্থায় খাড়া বেগ}}{\text{আদি অবস্থায় অনুভূমিক বেগ}} = \dfrac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha} = \tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

t সময় পরে বস্তুটির দিকের ঢাল $m_2 = \dfrac{\text{t সময়ে খাড়া বেগ}}{\text{t সময়ে অনুভূমিক বেগ}} = \dfrac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha} = \dfrac{39\cdot2\times\sin30^0 - 9\cdot8t}{39\cdot2\times\cos30^0}$

$= \dfrac{19\cdot6 - 9\cdot8t}{19\cdot6\sqrt{3}}$

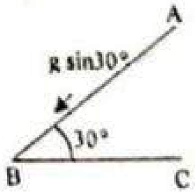
প্রশ্নমতে, $m_1\times m_2 = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\dfrac{19\cdot6-9\cdot8t}{19\cdot6\sqrt{3}} = -1 \Rightarrow 19\cdot6 - 9\cdot8t = -58\cdot8 \Rightarrow 9\cdot8t = 78\cdot4$

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $t = 8$ সেকেন্ড।

10. ভূমির সাথে $30°$ কোণে আনত একটি মসৃণ সমতলের ওপর দিয়ে একটি বল গড়িয়ে নীচে পড়া শুরু করল। পঞ্চম সেকেন্ডে বলটি তল বরাবর কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

সমাধান : ধরি, BC ভূমির সাথে $30°$ কোণে আনত AB মসৃণ সমতলের A বিন্দু হতে বলটি পড়া শুরু করল।

$\therefore$ AB সমতল বরাবর বলটির ত্বরণ $f = g \sin 30° = 9{\cdot}8 \times \frac{1}{2} = 4{\cdot}9 \text{ ms}^{-2}$.



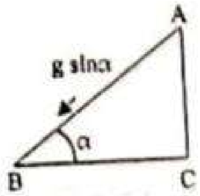
$\therefore$ পঞ্চম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 0 + \frac{1}{2}f(2t-1) = \frac{1}{2} \times 4{\cdot}9\,(10-1)$

$= \frac{9}{2} \times 4{\cdot}9 = 22{\cdot}05$ মিটার।

11. প্রশস্ত ভূমি বিশিষ্ট একটি নত সমতলের শীর্ষ হতে একটি বস্তুকণা নীচে পড়া শুরু করল। দেখাও যে, পতনকাল সর্বনিম্ন হবে যদি সমতলটি ভূমির সাথে $45°$ কোণে আনত হয়।

প্রমাণ : মনে করি, $BC = a$ ভূমির সাথে α কোণে আনত AB মসৃণ সমতলের A বিন্দু হতে বস্তুকণা নীচে পড়া শুরু করল এবং B বিন্দুতে তার পতনকাল t ।

$\therefore$ AB সমতল বরাবর বলটির ত্বরণ $f = g \sin\alpha$



$\therefore$ $AB = 0 + \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2} g \sin\alpha \times t^2$

$\Rightarrow t^2 = \frac{2AB}{g\sin\alpha} = \frac{2 \times BC/\cos\alpha}{g\sin\alpha}$, $[\because \cos\alpha = \frac{BC}{AB}]$

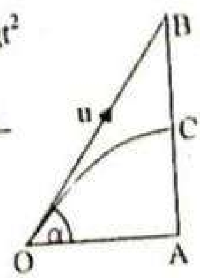
$\Rightarrow t^2 = \frac{2a}{g\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{4a}{g\sin 2\alpha}$

$\therefore$ t সর্বনিম্ন হবে যদি $\sin 2\alpha$ এর মান সর্বাধিক হয় অর্থাৎ $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90°$

$\Rightarrow 2\alpha = 90° \;\therefore\; \alpha = 45°$ হয়।

12. একটি টাওয়ারের শীর্ষ লক্ষ্য করে বন্দুক হতে নিক্ষিপ্ত একটি গুলি টাওয়ারের মধ্যবিন্দুতে আঘাত করলে, দেখাও যে টাওয়ারকে আঘাত করার সময় গুলিটি অনুভূমিকে চলে। [রা.'০১]

প্রমাণ : মনে করি, O বিন্দু হতে AB টাওয়ারের শীর্ষ B লক্ষ্য করে u বেগে ও ভূমির সাথে α কোণে নিক্ষিপ্ত বন্দুকের গুলি t সময়ে AB এর মধ্যবিন্দু C তে আঘাত করে। তাহলে,



$OA = u\cos\alpha\,.\,t$ এবং $AC = \frac{AB}{2} = u\sin\alpha.\,t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow AB = 2u\sin\alpha\,.\,t - gt^2$

OAB ত্রিভুজ হতে পাই, $\tan\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{2u\sin\alpha.t - gt^2}{u\cos\alpha.t} = \frac{u\sin\alpha.t}{u\cos\alpha.t} + \frac{u\sin\alpha.t - gt}{u\cos\alpha.t}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \tan\alpha + \frac{u\sin\alpha.t - gt^2}{u\cos\alpha.t} \Rightarrow u\sin\alpha.t - gt^2 = 0 \Rightarrow u\sin\alpha - gt = 0,$

অর্থাৎ t সময় পরে গুলির খাড়া বেগ শূন্য।

$\therefore$ টাওয়ারকে আঘাত করার সময় গুলিটি অনুভূমিকে চলে।

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1(a) 50 ft উঁচু একটি গাছের শীর্ষবিন্দুতে একটি পাখি বসে আছে। গাছের পাদদেশ হতে 200 ft দূর হতে কত বেগে একজন শিকারি অনুভূমিক তলের সাথে $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ কোণে একটি গুলি নিক্ষেপ করে পাখিটিকে আঘাত করতে পারবে?

সমাধান : এখানে, নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{4}$. ধরি, u মি./ সে. বেগে গুলি নিক্ষেপ করে শিকারি t সেকেন্ডে পাখিটিকে আঘাত করে।

$\therefore\ 200 = u\cos\alpha\,.t = ut \times \frac{4}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5}ut \Rightarrow ut = 250 \ldots\ldots$ (i) এবং

$50 = u\sin\alpha\,.t - \frac{1}{2}gt^2 = ut\times\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\times 32\times t^2 = 250\times\frac{3}{5} - 16t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{150-50}{16} = \frac{25}{4} \Rightarrow t = \frac{5}{2}$

(i) হতে পাই, $u\times\frac{5}{2} = 250 \Rightarrow u = 100$ $\therefore$ নির্ণেয় বেগ = 100 ফুট / সেকেন্ড।

বিকল্প পদ্ধতি :

এখানে, নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{4}$. $\therefore \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$

মনে করি, নিক্ষেপণ বেগ u ফুট/ সে.। নিক্ষেপ বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরলে গুলিটি (200, 50) বিন্দুগামী হবে।

তাহলে, $y = x\tan\alpha\,(1 - \frac{gx}{2u^2\sin\alpha\cos\alpha})$ সূত্র দ্বারা পাই,

$50 = 200\times\frac{3}{4}\ \{1 - \frac{32\times 200}{2\times u^2\times(3/5)\times(4/5)}\} \Rightarrow \frac{1}{3} = 1 - \frac{32\times 625}{3u^2} \Rightarrow \frac{32\times 625}{3u^2} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow u^2 = 16\times 625 \Rightarrow u = 100$ $\therefore$ নির্ণেয় বেগ = 100 ফুট / সেকেন্ড।

1 (b) একটি বালক একটি ফুটবলকে খাড়া উপরের দিকে H মি. উঁচুতে নিক্ষেপ করতে পারে। দেখাও যে, সে বলটিকে d মি. অনুভূমিক দূরত্বে অবস্থিত h মি. উঁচু একটি গোল পোস্ট পার করতে সক্ষম হবে যদি $2H \geq h + \sqrt{h^2+d^2}$ হয়।

প্রমাণ : মনে করি, বলটির নিক্ষেপণ বেগ u মি./ সে.। শর্তানুসারে, $H = \frac{u^2}{2g} \Rightarrow u^2 = 2gH \ldots\ldots$ (i)

ধরি, বলটির নিক্ষেপণ কোণ α এবং t সময়ে বলটি গোল পোস্ট অতিক্রম করে ।

$\therefore\ d = u\cos\alpha\times t \Rightarrow t = \frac{d}{u\cos\alpha} = \frac{d}{u}\sec\alpha$ এবং

$h = u\sin\alpha\times t - \frac{1}{2}gt^2 = u\sin\alpha\times\frac{d}{u\cos\alpha} - \frac{1}{2}g(\frac{d}{u}\sec\alpha)^2 = d\tan\alpha - \frac{gd^2}{2u^2}(1+\tan^2\alpha)$

$\Rightarrow h = d\tan\alpha - \frac{1}{2}gd^2\times\frac{1}{2gH}(1+\tan^2\alpha) \Rightarrow 4hH = 4dH\tan\alpha - d^2 - d^2\tan^2\alpha$

$\Rightarrow d^2\tan^2\alpha - 4dH\tan\alpha + (4hH + d^2) = 0$, যা $\tan\alpha$ এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। $\tan\alpha$ এর বাস্তব মানের জন্য সে বলটিকে গোল পোস্ট পার করতে সক্ষম হবে। কাজেই,

$(-4dH)^2 - 4d^2(4hH + d^2) \geq 0 \Rightarrow \Rightarrow 4H^2 - 4hH - d^2 \geq 0$, $[\because d > 0]$

$\Rightarrow (2H)^2 - 2.\,2H.h + h^2 \geq h^2 + d^2 \Rightarrow (2H - h)^2 \geq h^2 + d^2$

$\Rightarrow 2H - h \geq \sqrt{h^2 + d^2}$ $\therefore 2H \geq h + \sqrt{h^2 + d^2}$ (Showed)

2(a) ভূমি থেকে শূন্যে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু 100 মি. দূরে ভূমিতে ফিরে আসে এবং এর বিচরণপথের সর্বাধিক উচ্চতা $18\frac{3}{4}$ মি. হলে, এর বিচরণকাল এবং নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, প্রক্ষেপকটির প্রক্ষেপ বেগ u মি./সে. এবং প্রক্ষেপ কোণ α. তাহলে,

অনুভূমিক পাল্লা $R = 100$ মি. এবং সর্বাধিক উচ্চতা $H = 18\frac{3}{4} = \frac{75}{4}$ মি.।

H এবং R এর সম্পর্ক হতে পাই, $\tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{4\times75}{100\times4} = \frac{3}{4}$ $\therefore \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}$

এখন, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow \frac{75}{4} = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{u^2\times9}{2\times9\cdot8\times25} \Rightarrow u^2 = 1020\cdot83 \Rightarrow u = 31\cdot95$ (প্রায়)

$\therefore$ বিচরণকাল $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} = 2\times\frac{31.95}{9.8}\times\frac{3}{5} = 3\cdot9$ সেকেন্ড (প্রায়) এবং নিক্ষেপন কোণ $\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4}$।

2(b) একটি রাইফেলের বৃহত্তম পাল্লা 1000 মি.। একই প্রক্ষেপ কোণে ঘণ্টায় 24·5 কি.মি. বেগে চলন্ত কোন বাস হতে ঐ রাইফেল দ্বারা একই বেগে গুলি করা হলে দেখাও যে তার পাল্লা আরও $97\frac{2}{9}$ মি. বৃদ্ধি পাবে।

প্রমাণ : ধরি, গুলির প্রক্ষেপ বেগ u মি./সে. প্রক্ষেপ কোণ α। $\therefore$ বৃহত্তম পাল্লা $R_{max} = \frac{u^2}{g} = 1000$

$\Rightarrow u^2 = 9\cdot8\times1000 = 9800$ $\therefore$ গুলির প্রক্ষেপ বেগ $u = 70\sqrt{2}$ মি./সে. এবং বৃহত্তম পাল্লার জন্য $\alpha = 45°$.

বাসের বেগ $= 24\cdot5$ কি.মি./ঘ. $= 24\cdot5\times\frac{1000}{60\times60}$ মি./সে. $= \frac{245}{36}$ মি./সে.।

$\frac{245}{36}$ মি./সে. বেগে গতিশীল বাস থেকে ঐ রাইফেল দ্বারা একই বেগে গুলি করা হলে,

গুলির অনুভূমিক বেগ $= 70\sqrt{2}\cos45° + \frac{245}{36} = \frac{2765}{36}$ মি./সে. এবং

গুলির খাড়া বেগ $= 70\sqrt{2}\sin45° = 70$ মি./সে.।

$\therefore$ রাইফেলের পাল্লা $= \frac{2}{g}\times$ অনুভূমিক বেগ $\times$ খাড়া বেগ $= \frac{2}{9.8}\times\frac{2765}{36}\times70 = 1097\frac{2}{9}$ মি.।

$\therefore$ পাল্লা বৃদ্ধির পরিমাণ $= 1097\frac{2}{9} - 1000 = 97\frac{2}{9}$ মিটার। (প্রমাণিত)

3. একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে এমনভাবে প্রক্ষেপ করা হল যেন তা 20 m ব্যবধানে অবস্থিত 10 m উঁচু দুইটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে চলে যায়। বস্তুটির অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বস্তুটি প্রক্ষেপণ বিন্দু হতে d ও (d − 20) মিটার দূরবর্তী 10 মিটার উঁচু দেওয়াল দুইটির ঠিক উপর দিয়ে চলে যায় এবং উহার অনুভূমিক পাল্লা R মিটার। নিক্ষেপণ বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরলে বস্তুটি (d, 10) এবং (d − 20, 10) বিন্দুগামী হবে। $y = x\tan\alpha\,(1 - \frac{x}{R})$ সূত্র হতে পাই,

$10 = d\tan 60^\circ\,(1 - \frac{d}{R}) \Rightarrow 10R = \sqrt{3}\,d(R - d)$ ... ... (i) এবং

$10 = (d + 20)\tan 60^\circ\,(1 - \frac{d+20}{R}) \Rightarrow 10R = \sqrt{3}\,(d + 20)\{R - (d + 20)\}$ ... ...(ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $\sqrt{3}\,(dR - d^2) = \sqrt{3}\,(dR + 20R - d^2 - 40d - 400)$

$\Rightarrow dR - d^2 = dR + 20R - d^2 - 40d - 400 \Rightarrow 20R - 40d - 400 = 0$

$\Rightarrow R - 2d - 20 = 0 \Rightarrow d = \frac{R-20}{2}$

(i) হতে পাই, $10R = \sqrt{3}\,\frac{R-20}{2}\,(R - \frac{R-20}{2}) = \sqrt{3}\,\frac{R-20}{2} \times \frac{R+20}{2}$

$\Rightarrow 40R = \sqrt{3}\,(R^2 - 400) \Rightarrow \sqrt{3}\,R^2 - 40R - 400\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3}\,R^2 - 60R + 20R - 400\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\,R(R - 20\sqrt{3}) + 20(R - 20\sqrt{3})$

$\Rightarrow (R - 20\sqrt{3})(\sqrt{3}\,R + 20) = 0 \quad \therefore R = 20\sqrt{3}$ মিটার, $[\because R > 0]$

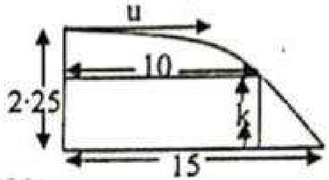
4(a) ভূমিতে পতিত হবার একটি বোমা ফেটে এর কণাগুলো u বেগে চতুর্দিকে ছুটতে থাকে। ভূমির যে অংশে ছুটে কণাগুলো ছড়িয়ে পড়ে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি বৃহত্তম অনুভূমিক পাল্লা $R_{max} = \frac{u^2}{g}$ এবং এক্ষেত্রে প্রক্ষেপণ কোণ $\alpha = 45^\circ$.

বোমা ফেটে গেলে এর কণাগুলো বিভিন্ন কোণে চতুর্দিকে নিক্ষিপ্ত হয় এবং যথাক্রমে হতে বৃহত্তম অনুভূমিক R_{max} দূরত্ব পর্যন্ত ভূমির অংশে ছুটে কণাগুলো ছড়িয়ে পড়ে। ফলে বোমার কণাগুলো একটি বৃত্ত গঠন করে যার কেন্দ্র বিস্ফোরণ বিন্দু এবং ব্যাসার্ধ R_{max}।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \pi R_{max}^2 = \pi(\frac{u^2}{g})^2 = \frac{u^4}{g^2}\pi$ বর্গ একক।

4(b) 2·25 m উচ্চতা হতে একজন খেলোয়াড় একটি টেনিস বল অনুভূমিকে নিক্ষেপ করে এবং তা খেলোয়াড় হতে 15 m দূরে ভূমিকে আঘাত করে। বলটি যদি খেলোয়াড় হতে 10 m দূরে একটি জালকে স্পর্শ করে যায়, তাহলে জালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।



সমাধান : এখানে, ভূমি হতে নিক্ষেপণ বিন্দুর উচ্চতা h = 2·25 মিটার। ধরি, টেনিস বলের নিক্ষেপণ বেগ u মি./সে. এবং জালটির উচ্চতা k মিটার। বলটির 15 মি. অনুভূমিক সরণে 2·25 মি. উল্লম্ব সরণ হয়।

$\therefore\ y=\dfrac{gx^2}{2u^2}$ সূত্র দ্বারা পাই, $2\cdot25=\dfrac{9.8\times15^2}{2\times u^2}\Rightarrow u^2=\dfrac{9\cdot8\times225}{2\times2\cdot25}=490$

আবার, 10 মি. অনুভূমিক সরণে $(2\cdot25-k)$ মি. উল্লম্ব সরণ হয়।

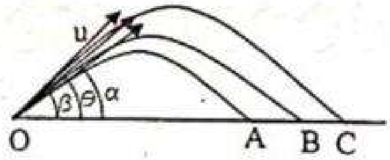
$\therefore\ 2\cdot25-k=\dfrac{9.8\times10^2}{2\times490}=1\Rightarrow k=2\cdot25-1=1\cdot25$ $\therefore$ জালটির উচ্চতা $k=1\cdot25$ মিটার।

4(c) ভূমি থেকে α ও β কোণে নিক্ষিপ্ত একটি গোলা সমতলের উপরস্থ লক্ষ্য বস্তুর যথাক্রমে a একক আগে ও b একক দূরে পড়ে। একই বেগে এবং θ কোণে নিক্ষেপ করলে যদি গোলা লক্ষ্যবস্তুর উপর পড়ে, তবে দেখাও যে, $\theta=\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{a\sin2\beta+b\sin2\alpha}{a+b}\right)$

প্রমাণ : মনে করি, গোলার নিক্ষেপণ বেগ u একক এবং নিক্ষেপণ বিন্দু O হতে এর লক্ষ্যবস্তুর দূরত্ব OB = x একক।

তাহলে, $x=\dfrac{u^2\sin2\theta}{g}$ …… (i), $OA=OB-AB=x-a=\dfrac{u^2\sin2\alpha}{g}$ …… (ii)

এবং $OC=OB+BC=x+b=\dfrac{u^2\sin2\beta}{g}$ …… (iii)



$(i)\times b+(ii)\times a\Rightarrow(b+a)x=\dfrac{bu^2\sin2\alpha}{g}+\dfrac{au^2\sin2\beta}{g}$

$\Rightarrow(a+b)\times\dfrac{u^2\sin2\theta}{g}=\dfrac{bu^2\sin2\alpha}{g}+\dfrac{au^2\sin2\beta}{g}$, [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow(a+b)\sin2\theta=b\sin2\alpha+a\sin2\beta\Rightarrow\sin2\theta=\dfrac{b\sin2\alpha+a\sin2\beta}{a+b}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{a\sin2\beta+b\sin2\alpha}{a+b}\right)$

4(d) একটি বস্তুকণা d মি. দূরে h মি. উঁচু একটি দেওয়ালের উপর দিয়ে কোন রকমে চলে গিয়ে 2d মি. দূরে h মি. উঁচু নির্দিষ্ট স্থানে আঘাত করল। দেখাও যে, প্রক্ষেপ বেগ u নিম্ন সমীকরণ হতে পাওয়া যায়, $\dfrac{4u^2}{g}=\dfrac{4d^2+9h^2}{h}$.

প্রমাণ : মনে করি, বস্তুকণাটির প্রক্ষেপণ কোণ α। নিক্ষেপণ বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরলে বস্তুকণাটি (d, h) এবং (2d, h) বিন্দুগামী হবে। $y=x\tan\alpha-\dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ সূত্র দ্বারা পাই,

$h=d\tan\alpha-\dfrac{gd^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ …… (i) এবং $h=2d\tan\alpha-\dfrac{g\times4d^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ …… (ii)

$4\times(i)-(ii) \Rightarrow (4h-h)=(4d-2d)\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{3h}{2d}$

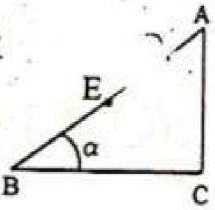
$\therefore$ (i) হতে পাই, $h = d\tan\alpha-\dfrac{gd^2}{2u^2}\sec^2\alpha = d\tan\alpha-\dfrac{gd^2}{2u^2}(1+\tan^2\alpha)$

$\Rightarrow h = d\times\dfrac{3h}{2d}-\dfrac{gd^2}{2u^2}(1+\dfrac{9h^2}{4d^2}) \Rightarrow h=\dfrac{3}{2}h-\dfrac{gd^2}{2u^2}(\dfrac{4d^2+9h^2}{4d^2}) \Rightarrow \dfrac{g(4d^2+9h^2)}{8u^2}=\dfrac{3}{2}h-h$

$\Rightarrow \dfrac{g(4d^2+9h^2)}{8u^2}=\dfrac{h}{2}\quad \therefore \dfrac{4u^2}{g}=\dfrac{4d^2+9h^2}{h}$ (Showed)

5. 288 ft দৈর্ঘ্যের AB আনত মসৃণ সমতলের শীর্ষবিন্দু A এর উচ্চতা 64 ft । AB কে D ও E বিন্দুতে এমন তিন অংশে বিভক্ত কর যেন একটি বস্তুকণা শীর্ষ A হতে প্রতিটি অংশে সমান সময়ে অতিক্রম করে।

সমাধান : মনে করি, A এর উচ্চতা AC = 64 ফুট, $\angle ABC=\alpha$ এবং বস্তুকণাটি AD, DE ও EB প্রতিটি অংশে সমান t সেকেন্ডে অতিক্রম করতে পারে।



$\therefore \sin\alpha=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{64}{288}=\dfrac{2}{9}$, AB বরাবর বস্তুটির ত্বরণ $f=g\sin\alpha=32\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{64}{9}$

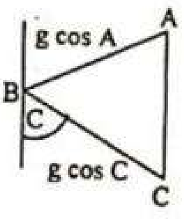
এখন, $AB=0+\dfrac{1}{2}f(3t)^2 \Rightarrow 288=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{64}{9}\times9t^2 \Rightarrow t^2=\dfrac{288}{32}=9 \therefore t=3$

$\therefore AD=\dfrac{1}{2}ft^2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{64}{9}\times9=32$ ফুট, $AE=\dfrac{1}{2}f(2t)^2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{64}{9}\times4\times9=128$ ফুট,

$DE=AE-AD=128-32=96$ ফুট, $EB=AB-AE=288-128=160$ ফুট।

6. ত্রিভুজের এক বাহু উল্লম্ব বরাবর অবস্থিত। যদি অপর বাহু দুইটি বরাবর পতনশীল কোন বস্তুর পতনকাল সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী।

প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের AC বাহু উল্লম্ব বরাবর অবস্থিত এবং বস্তুটি AB ও BC প্রতিটি দূরত্ব সমান t সময়ে অতিক্রম করে।



AB বরাবর বস্তুটির ত্বরণ = g cos A এবং BC বরাবর বস্তুটির ত্বরণ = g cos C.

$\therefore AB=0+\dfrac{1}{2}g\cos A\times t^2,\ BC=0+\dfrac{1}{2}g\cos C\times t^2$

$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\cos A}{\cos C}$ ...... (i). আবার ABC ত্রিভুজ হতে পাই, $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sin C}{\sin A}$ ...... (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $\dfrac{\cos A}{\cos C}=\dfrac{\sin C}{\sin A} \Rightarrow \sin A\cos A=\sin C\cos C \Rightarrow \sin 2A-\sin 2C=0$

$\Rightarrow 2\cos(A+C)\sin(A-C)=0$

$\therefore$ হয় $\cos(A+C)=0=\cos 90^\circ \Rightarrow A+C=90^\circ$

অথবা, $\sin(A-C)=0=\sin 0 \Rightarrow A-C=0 \Rightarrow A=C$

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী।

7. ধরা যাক একটি বস্তু একটি গভীর কূপে পড়ল। x মি. নীচে বস্তুটির বেগ $\frac{d}{dx}(\frac{v^2}{2})=\frac{g(k-x)}{k}$ সমীকরণ হতে পাওয়া যায়; যেখানে g ও k ধ্রুবক। 1000 মি. গভীর কূপটির তলদেশে বস্তুটি কত বেগে আঘাত করবে?

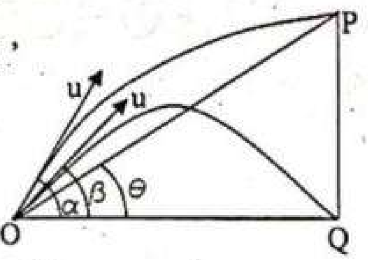
সমাধান : আমাদের আছে, $\frac{d}{dx}(\frac{v^2}{2})=\frac{g(k-x)}{k} \Rightarrow \frac{v^2}{2}=g\int(1-\frac{x}{k})dx = g(x-\frac{x^2}{2k})+c \ldots\ldots$(i)

$v=0$ যখন $x=0$, সুতরাং আমরা পাই, $c=0$ $\therefore$ $\frac{v^2}{2}=g(x-\frac{x^2}{2k}) \Rightarrow v=\sqrt{2gx(1-\frac{x}{2k})}$

$x=1000$ মি. গভীর কূপটির তলদেশে বস্তুটি বেগ $v=\sqrt{2g\times1000(1-\frac{1000}{2k})}=20\sqrt{5g(1-\frac{500}{k})}$

8. একটি খাড়া দন্ড PQ তার পাদবিন্দুগামী অনুভূমিক তলে অবস্থিত O বিন্দুতে θ কোণ ধারণ করে। O বিন্দু হতে দুটি কণা একই সময়ে একই বেগে অনুভূমিক তলের সাথে α ও β কোণে নিক্ষিপ্ত হল যেন একই সময়ে প্রথমটি দন্ডের শীর্ষ এবং দ্বিতীয়টি দন্ডের পাদদেশে আঘাত করে। প্রমাণ কর যে, $\tan\alpha-\tan\beta=\tan\theta$.

প্রমাণ : মনে করি, u বেগে নিক্ষিপ্ত কণা দুটি t সময়ে খাড়া দন্ডকে আঘাত করে।



$\therefore$ α কোণে নিক্ষিপ্ত কণার ক্ষেত্রে, $OQ=u\cos\alpha\,.\,t \Rightarrow ut=\frac{OQ}{\cos\alpha}$,

$PQ=u\sin\alpha\,.\,t-\frac{1}{2}gt^2=\sin\alpha\times\frac{OQ}{\cos\alpha}-\frac{1}{2}gt^2$

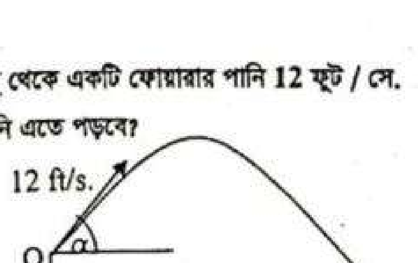
$\Rightarrow PQ=OQ\tan\alpha-\frac{1}{2}gt^2 \ldots\ldots$ (i)

অনুরূপভাবে, β কোণে নিক্ষিপ্ত কণার ক্ষেত্রে, $0=OQ\tan\beta-\frac{1}{2}gt^2 \ldots\ldots$ (ii)

(i) − (ii) $\Rightarrow PQ=OQ(\tan\alpha-\tan\beta) \Rightarrow \frac{PQ}{OQ}=\tan\alpha-\tan\beta$

$\therefore$ $\tan\theta=\tan\alpha-\tan\beta$

9. একটি গোলাকার গহ্বরের কেন্দ্রের 4 ফুট উপরে অবস্থিত একটি বিন্দু থেকে একটি ফোয়ারার পানি 12 ফুট / সে. বেগে সকল দিকে প্রক্ষিপ্ত হল। গহ্বরটির ব্যাস কত হলে ফোয়ারার সব পানি এতে পড়বে?



সমাধান : মনে করি, গোলাকার গহ্বরের কেন্দ্র B হতে 4 ফুট উপরে অবস্থিত O বিন্দু থেকে 12 ফুট / সে. বেগে ও ভূমির সাথে α কোণে ফোয়ারার পানি সকল দিকে প্রক্ষিপ্ত হয় এবং পানির একটি কণা t সেকেন্ডে সর্বাধিক গহ্বরের ব্যাসার্ধ BC = x ফুট দূরত্ব পর্যন্ত পড়ে।

$\therefore$ $x = u\cos\alpha\,.\,t = 12\cos\alpha\,.t \Rightarrow t = \dfrac{x}{12\cos\alpha}$ এবং

$BO = 4 = -u\sin\alpha\,.t + \dfrac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 4 = -12\times\sin\alpha\times\dfrac{x}{12\cos\alpha} + \dfrac{1}{2}\times 32\times\dfrac{x^2}{144\cos^2\alpha}$

$\Rightarrow 4 = -x\tan\alpha + \dfrac{1}{9}x^2\sec^2\alpha = -x\tan\alpha + \dfrac{1}{9}x^2(1+\tan^2\alpha)$

$\Rightarrow x^2\tan^2\alpha - 9x\tan\alpha + (x^2 - 36) = 0$

$\tan\alpha$ এর বাস্তব মানের জন্য, $(-9x)^2 - 4.x^2(x^2-36) \geq 0 \Rightarrow 81 - 4.x^2 + 144 \geq 0$

$\Rightarrow 4.x^2 \leq 225 \Rightarrow x \leq \dfrac{15}{2}$

$\therefore$ ফোয়ারার সব পানি গোলাকার গহ্বরের পড়বে যদি এর ব্যাসার্ধ $= 2\times\dfrac{15}{2} = 15$ ফুট হয়।

10. একটি প্রক্ষেপকের অনুভূমিক পাল্লা r এবং বৃহত্তম উচ্চতা h হলে দেখাও যে, $\dfrac{u^2}{2g} = h + \dfrac{r^2}{16h}$ সমীকরণ দ্বারা এর প্রক্ষেপ বেগ u পাওয়া যায়।

প্রমাণ : ধরি, প্রক্ষেপকটির প্রক্ষেপণ কোণ α । তাহলে, $r = \dfrac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\cdots$(i), $h = \dfrac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\cdots$ (ii)

(ii) $\div$ (i) $\Rightarrow \dfrac{h}{r} = \dfrac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\times\dfrac{g}{2u^2\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{\tan\alpha}{4} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{4h}{r}$

$\therefore$ $\sin^2\alpha = \dfrac{(4h)^2}{(4h)^2 + r^2} = \dfrac{16h^2}{16h^2 + r^2}$

(ii) হতে পাই, $h = \dfrac{u^2}{2g}\times\dfrac{16h^2}{16h^2+r^2} \Rightarrow \dfrac{u^2}{2g} = \dfrac{16h^2+r^2}{16h}$ $\therefore$ $\dfrac{u^2}{2g} = h + \dfrac{r^2}{16h}$

11. একটি গোলা ভূমিতে ফেটে গেল এবং এর অংশগুলো বিভিন্ন দিকে 80 ফুট/সে. গতিবেগ পর্যন্ত ছুটতে লাগল। দেখাও যে, 100 ফুট দূরের একজন লোক $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ সেকেন্ড ধরে বিপদে থাকবে।

প্রমাণ : মনে করি, 100 ফুট অনুভূমিক পাল্লার জন্য গোলার দুইটি অংশের প্রক্ষেপণ কোণ α ও $(90° - \alpha)$ এবং তাদের বিচরণকাল যথাক্রমে t_1 ও t_2 সেকেন্ডে।

$\therefore$ $100 = \dfrac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \dfrac{(80)^2}{32}\sin 2\alpha = 200\sin 2\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = \dfrac{1}{2}$,

$t_1 = \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2\times 80}{32}\sin\alpha = 5\sin\alpha$, $t_2 = \frac{2u\sin(90^0-\alpha)}{g} = \frac{2\times 80}{32}\cos\alpha = 5\cos\alpha$

এখন, $(t_1 \sim t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = (5\sin\alpha + 5\cos\alpha)^2 - 4\times 5\sin\alpha \times 5\cos\alpha$

$= 25(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha) - 50\times 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= 25(1 + \sin 2\alpha - 2\sin 2\alpha) = 25(1 - \sin 2\alpha) = 25(1 - \frac{1}{2}) = \frac{25}{2}$

$\Rightarrow t_1 \sim t_2 = \frac{5}{\sqrt{2}}$ অর্থাৎ একজন লোক $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ সেকেন্ড ধরে বিপদে থাকবে।

12. দুইটি কণা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হতে একই সময়ে একই বেগে α ও β উন্নতি কোণে একই খাড়া তলে প্রক্ষিপ্ত হল এবং পরে তারা মিলিত হল। দেখাও যে, $\alpha + \beta =$ ধ্রুবক।

প্রমাণ : মনে করি , u বেগে প্রক্ষিপ্ত কণা দুইটি t সময় পরে মিলিত হয়।

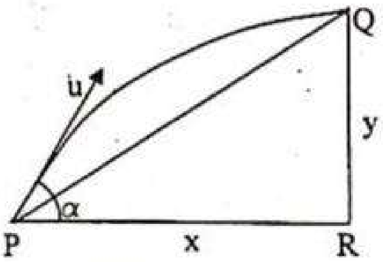
$\therefore\ u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2 = u\sin\beta.t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta = \sin(\pi - \beta) \Rightarrow \alpha = \pi - \beta$

$\therefore\ \alpha + \beta = \pi =$ ধ্রুবক।

13. দেখাও যে, একটি নির্দিষ্ট বেগে P হতে নিক্ষিপ্ত কোন কণার Q বিন্দুতে উত্থানের দুইটি সময়ের গুণফল $\frac{2PQ}{g}$.

প্রমাণ : মনে করি, কণাটির নিক্ষেপণ কোণ α, নিক্ষেপণ বেগ u এবং ইহা t সময়ে Q(x, y) বিন্দুতে পৌছে।

$\therefore$ কণাটির t সময়ে অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্ব $PR = x = u\cos\alpha\,.\,t \ldots\ldots$(i) এবং



খাড়া দূরত্ব $QR = y = u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow u\sin\alpha.t = y + \frac{1}{2}gt^2 \ldots$(ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow u^2t^2 = x^2 + y^2 + y\,gt^2 + \frac{1}{4}g^2t^4$

$\Rightarrow \frac{1}{4}g^2t^4 - (u^2 - yg)t^2 + x^2 + y^2 = 0$, যা t^2 এর দ্বিঘাত সমীকরণ।

ধরি, মূলদ্বয় t_1^2 এবং t_2^2 .

$\therefore\ t_1^2\,t_2^2 = \frac{x^2+y^2}{g^2/4} = \frac{4(PR^2 + RQ^2)}{g^2} = \frac{4(PQ^2)}{g^2}\ \therefore t_1\,t_2 = \frac{2PQ}{g}$ (Showed)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ:

1. 20 মি./সে. বেগে উর্ধ্বগামী কোন বেলুন থেকে পতিত এক টুকরা পাথর 20 সে. পরে মাটিতে পড়ল। পাথরের টুকরা বেলুন থেকে পতিত হওয়ার সময় বেলুনের উচ্চতা কত? [DU 10-11]

Sol^n : বেলুনের উচ্চতা $= -ut + \frac{1}{2}gt^2 = -20\times 20 + \frac{1}{2}\times 9\cdot 8\times 20^2 = 1560$ মিটার।

2. সমবেগে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি উড়োজাহাজ হতে একটি বোমা ছেড়ে দেওয়ার 5 সে. পরে তা মাটিতে আঘাত করল, বোমাটি যখন মাটিতে আঘাত করল তখন উড়োজহাজের উচ্চতা কত ছিল? [NSTU 08- 09]

Sol^n : উচ্চতা $= \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\times 9\cdot 8\times 5^2 = 122\cdot 5$ মি.

3. কোন স্তম্ভের শীর্ষ হতে 19·5 মি./সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে প্রক্ষিপ্ত কোন কণা 5 সে. পরে স্তম্ভের পাদদেশে পতিত হলে স্তম্ভের উচ্চতা কত হবে? [DU 07-08, 05-06; BUET 08-09; Jt.U 06-07]

Sol^n : স্তম্ভের উচ্চতা $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2 = -19\cdot 5\times 5 + \frac{1}{2}\times 9\cdot 8\times 5^2 = 25$ মিটার।

4. একটি পক্ষেপককে কত আদিবেগে নিক্ষেপ করা হলে সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা 90 মি. হবে, যেখানে $g = 10$ মি./সে.^{2} [KU 09-10; NSTU 08-09]

Sol^n : $R_{max} = \frac{u^2}{g} = 90 \Rightarrow u^2 = 90\times 10 \therefore u = 30$

5. একটি খাড়া দেয়ালের পাদদেশ থেকে ভূমি বরাবর 147 মি. দূরত্বে কোন বিন্দু থেকে একটি বস্তু 49 মি./সে. বেগে অনুভূমিকের সাথে α কোণে ছোড়া হলো। $\alpha = 60°$ হলে বস্তুটি দেয়ালের যে বিন্দুতে আঘাত করবে তার উচ্চতা নির্ণয় কর। ($g = 9\cdot 81\ ms^{-2}$) [BUET 10-11]

Sol^n : $y = x\tan\alpha\,(1 - \frac{gx}{u^2\sin 2\alpha}) = 147\times\tan 60°\,(1 - \frac{9\cdot 81\times 147}{49^2\sin 2.60°})$

$$= 147\times\sqrt{3}\,\{1 - \frac{9\cdot 81\times 147}{2401\times(\sqrt{3}/2)}\} = 78\cdot 03$$

6. ভূমির সাথে 60° কোণে আনত একটি সমতলের উপর দিয়ে একটি বস্তু u বেগে গড়িয়ে পড়ে। বেগের উলম্ব উপাংশ কত? [KUET 05-06]

Sol^n : উলম্ব উপাংশ $= u\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}u$

7. একটি কণা u বেগে নিক্ষিপ্ত হলে যদি তার অনুভূমিক পাল্লা বৃহত্তম উচ্চতার দ্বিগুণ হয় তবে তার অনুভূমিক পাল্লা কত? [KUET 05-06]

Sol^n : $\tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{4H}{2H} = 2 \therefore \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{4}{5}$ এবং $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{4u^2}{5g}$

8. প্রক্ষেপকের উড্ডয়নকাল t এবং সর্বোচ্চ উচ্চতা H হলে $\frac{H}{t^2}$ কত? [DU01-02; SAU 05-06; Jt.U 07-08]

Sol^n : $\frac{H}{t^2} = \dfrac{\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}}{\frac{4u^2\sin^2\alpha}{g^2}} = \frac{g}{2}$

9. একটি খাড়া দেয়ালের পাদদেশ হতে ভূমি বরাবর 10 সে.মি. দূরত্বে কোনো বিন্দু হতে 45° কোণে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হল। বস্তুটি ঠিক দেয়ালের উপর দিয়ে গেল এবং দেয়ালের অপর পাশে 10 সে.মি. দূরত্বে গিয়ে মাটিতে পড়ল। দেয়ালটির উচ্চতা কত? [SUST 06-07]

Sol^n : $y = x\tan\alpha\left(1-\dfrac{x}{R}\right) = 10\tan 45°\left(1-\dfrac{10}{2\times10}\right) = 5$ cm

10. একটি বস্তু 39·2 মি./সে. বেগে ভূমির সাথে 30° কোণে নিক্ষিপ্ত হলে কত সময় পড়ে বস্তুটি নিক্ষেপের দিকের সাথে লম্বভাবে চলবে? [RU 09-10]

Sol^n : $t = \dfrac{u}{g\sin\alpha} = \dfrac{39\cdot2}{9\cdot8\times\sin30^0} = 8$ সে.।

11. একটি উঁচু টাওয়ারের শীর্ষ হতে একটি পাথরকে 20 মি./সে. বেগে অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত হল। পাথরটি টাওয়ারের পাদদেশ হতে 100 মি. দূরত্বে ভূমিতে আঘাত করে, টাওয়ারের উচ্চতা কত? [RU 08-09]

Sol^n : $y = \dfrac{gx^2}{2u^2} = \dfrac{9\cdot8\times100^2}{2\times20^2} = 122\cdot5$ মি.।

12. একটি বস্তু উপর থেকে মুক্তভাবে 4 সেকেন্ডে পড়ল। এটি শেষের 2 সেকেন্ডে কত ফুট পড়েছিল? [NU 02-03]

Sol^n : $h = \frac{1}{2}g\times4^2 - \frac{1}{2}g\times2^2 = 16\times(16-4) = 192$ ফুট।

কৌশলঃ খাড়া উপরে নিক্ষিপ্ত বস্তু সর্বোচ্চ বিন্দুতে পৌঁছার শেষ t সময়ে $\frac{1}{2}gt^2$ দূরত্ব অতিক্রম করে।

13. 32 ft/sec আদিবেগে এবং ভূমির সাথে 30° কোণে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলো। ইহার আনুভূমিক পাল্লা- [DU 13-14]
A. 16 ft B. $32\sqrt{3}$ ft C. 32 ft D. $16\sqrt{3}$ ft

Sol^n : আনুভূমিক পাল্লা $R = \dfrac{u^2\sin2\alpha}{g} = \dfrac{32^2\sin60^0}{32} = 32\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$ ft.

1. a , −a সংখ্যা দুইটির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর, যখন a<0

সমাধানঃ ধরি, $x_1 = a$, $x_2 = -a$.

∴ প্রদত্ত সংখ্যা দুইটির গড় , $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a + (-a)}{2} = \frac{a - a}{2} = \frac{0}{2} = 0$

∴ প্রদত্ত সংখ্যা দুইটির পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2}{2}} = \sqrt{\frac{(a-0)^2 + (-a-0)^2}{2}}$

$= \sqrt{\frac{a^2 + a^2}{2}} = \sqrt{\frac{2a^2}{2}} = \sqrt{a^2} = |a| = -a$, যেহেতু a<0

2. $-2a, -a, 0, a, 2a$ সংখ্যাগুলির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, $x_i = -2a, -a, 0, a, 2a$

∴ সংখ্যা 5টির গড়, $\bar{x} = \frac{-2a - a + 0 + a + 2a}{5} = 0$

∴ পরিমিত ব্যবধান $= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{5}}$

$= \sqrt{\frac{(-2a-0)^2 + (-a-0)^2 + (0-0)^2 + (a-0)^2 + (2a-0)^2}{5}}$

$= \sqrt{\frac{4a^2 + a^2 + 0 + a^2 + 4a^2}{5}} = \sqrt{\frac{10a^2}{5}} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,|a|$

3. নিচের নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

সংখ্যা x_i	4	8	12	16	20	24	28	32	36
গণসংখ্যা f_i	4	16	20	25	45	52	41	36	15

সমাধান : পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের সারণি নিম্নরূপ :

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
4	4	16	64
8	16	128	1024
12	20	240	2880

16	25	400	6400
20	45	900	18000
24	52	1248	29952
28	41	1148	32144
32	36	1152	36864
36	15	540	19440
	$N=\sum f_i=254$	$\sum f_i u_i=5772$	$\sum f_i u_i^2=146768$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান $=\sqrt{\frac{146768}{254}-\left(\frac{5772}{254}\right)^2}=\sqrt{577.83-516.39}=7\cdot84$ (প্রায়)

4. নিচের তথ্যাদির গণসংখ্যা নিবেষণ সারণি থেকে ভেদাংক নির্ণয় কর।

সংখ্যা x_i	10	13	25	30	37	42	45
গণসংখ্যা f_i	3	7	8	15	10	5	2

সমাধান : ভেদাংক নির্ণয়ের সারণি নিম্নরূপ ঃ

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
10	3	30	300
13	7	91	1183
25	8	200	5000
30	15	450	13500
37	10	370	13690
42	5	210	8820
45	2	90	4050
	$N=\sum f_i=50$	$\sum f_i x_i=1441$	$\sum f_i x_i^2=46543$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান $=\frac{\sum fx_i^2}{N}-\left(\frac{\sum fx_i}{N}\right)^2=\frac{46543}{50}-\left(\frac{1441}{50}\right)^2$

$=\sqrt{930\cdot86-830\cdot59}=100\cdot27$ (প্রায়)

5. নিচের গণসংখ্যা নিবেশনের ভেদাংক নির্ণয় কর।

শ্রেণি	5000–10000	10000–15000	15000–20000	20000–25000	25000–30000

ব্যাপ্তি					
গণসংখ্যা	25	40	70	35	30

সমাধান : ধরি, শ্রেণির মধ্যবিন্দু $=x_i\ (i=1,\ 2,\cdots 5)$, গণসংখ্যা $=f_i$, $a=17500$, $c=5000$ এবং $u_i=\dfrac{x_i-a}{c}$ । ভেদাংক নির্ণয়ের সারণি হবে নিম্নরূপ :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	f_i	x_i	$u_i=\dfrac{x_i-17500}{5000}$	f_iu_i	$f_iu_i^2$
5000−10000	25	7500	−2	−50	100
10000−15000	40	12500	−1	−40	40
15000−20000	70	17500 = a	0	0	0
20000−25000	35	22500	1	35	35
25000−30000	30	27500	2	60	120
	$N=\sum f_i$ $=200$			$\sum f_iu_i$ $=5$	$\sum f_iu_i^2$ $=295$

$\therefore$ ভেদাংক $\sigma_x^2=c^2\left\{\dfrac{\sum f_iu_i^2}{N}-\left(\dfrac{\sum f_iu_i}{N}\right)^2\right\}=5000^2\left\{\dfrac{295}{200}-\left(\dfrac{5}{200}\right)^2\right\}$

$=25000000(1{\cdot}475-0{\cdot}000625)=36859375$ (প্রায়)

6. দুইটি সংখ্যার গড় 7 ও পরিমিত ব্যবধান 1 হলে সংখ্যা দুইটি কত?

সমাধান: মনে করি, সংখ্যা দুইটি x_1 ও x_2 . তাহলে,

গড়, $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2}{2}=7\Rightarrow x_1+x_2=14\Rightarrow x_1=14-x_2$ ……… (i) এবং

পরিমিত ব্যবধান $=\sqrt{\dfrac{\sum x^2}{n}-(\bar{x})^2}=1\Rightarrow\sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}-7^2}=1\Rightarrow\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}-49=1$

$\Rightarrow\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}=50\Rightarrow x_1^2+x_2^2=100\Rightarrow(14-x_2)^2+x_2^2=100$, [(i) হতে]

$\Rightarrow 196-28x_2+x_2^2+x_2^2=100\Rightarrow 2x_2^2-28x_2+96=0\Rightarrow x_2^2-14x_2+48=0$

$\Rightarrow(x_2-8)(x_2-6)=0\Rightarrow x_2=8,6$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $x_1=14-8=6$, যখন $x_2=8$ এবং $x_1=14-6=8$ যখন $x_2=6$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি 6 ও 8.

7. 4001, 4002, 4003, ⋯ ⋯,4030 সংখ্যাগুলির ভেদাংক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, $x_i = 4001, 4002, \cdots\cdots, 4030$ এবং $u_i = x_i - 4000$.

$\therefore \quad u_i = 1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\cdots, 30.$

আমরা জানি, ভেদাংক মূল হতে স্বাধীন এবং প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার ভেদাংক $= \dfrac{n^2-1}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভেদাংক $= \dfrac{30^2-1}{12} = \dfrac{900-1}{12} = 74{\cdot}92$ (প্রায়)

৪. প্রথম n সংখ্যক জোড় স্বাভাবিক সংখ্যার ভেদাংক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, x_i চলক দ্বারা প্রথম n সংখ্যক জোড় স্বাভাবিক সংখ্যা নির্দেশিত।

$\therefore \quad x_i$ চলকের মানসমূহের সেট $= \{2, 4, 6, \cdots\cdots\cdots, 2n\}$

ধরি, $u_i = \dfrac{x_i}{2}$. তাহলে, u_i চলকের মানসমূহের সেট $= \{1, 2, 3, \cdots\cdots, n\}$

$\therefore \quad u_i$ হচ্ছে প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার সেট যার ভেদাংক $= \dfrac{n^2-1}{12}$.

আমরা জানি, ভেদাংক মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

$\therefore$ নির্ণেয় ভেদাংক $= 2^2 \times \dfrac{n^2-1}{12} = \dfrac{n^2-1}{3}$

9. প্রথম n সংখ্যক বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার ভেদাংক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, x_i চলক দ্বারা প্রথম n সংখ্যক বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা নির্দেশিত।

$\therefore \quad x_i$ চলকের মানসমূহের সেট $= \{1, 3, 5, \cdots\cdots\cdots, 2n-1\}$

ধরি, $u_i = \dfrac{x_i+1}{2}$. তাহলে, u_i চলকের মানসমূহের সেট $= \{1, 2, 3, \cdots\cdots, n\}$

[নোট : n তম পদে n এর পরিবর্তে x_i লিখে পাই, $2x_i - 1$ এবং $2x_i - 1 = u_i$ ধরলে, $u_i = \dfrac{x_i+1}{2}$ পাওয়া যায়]

$\therefore \quad u_i$ হচ্ছে প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার সেট যার ভেদাংক $= \dfrac{n^2-1}{12}$.

আমরা জানি, ভেদাংক মূল হতে স্বাধীন কিন্তু মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

$\therefore$ নির্ণেয় ভেদাংক $= 2^2 \times \dfrac{n^2-1}{12} = \dfrac{n^2-1}{3}$

10. প্রথম n সংখ্যক বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার ভেদাংক 85 হলে n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, x_i চলক দ্বারা প্রথম n সংখ্যক বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা নির্দেশিত যার ভেদাংক 85।

∴ x_i চলকের মানসমূহের সেট = $\{1, 3, 5, \cdots\cdots\cdots, 2n-1\}$

ধরি, $u_i = \frac{x_i + 1}{2}$. তাহলে, u_i চলকের মানসমূহের সেট = $\{1, 2, 3, \cdots\cdots, n\}$

∴ u_i হচ্ছে প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার সেট যার ভেদাংক = $\frac{n^2-1}{12}$.

আমরা জানি, ভেদাংক মূল হতে স্বাধীন কিন্তু মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

∴ x_i চলকের ভেদাংক = $2^2 \times \frac{n^2-1}{12} = \frac{n^2-1}{3}$

প্রশ্নমতে, $\frac{n^2-1}{3} = 85 \Rightarrow n^2 - 1 = 255 \Rightarrow n^2 = 256 = 16^2$

∴ $n = 16$

11. 11, 13, 15, ……, 25 সংখ্যাগুলির ভেদাংক নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, x_i চলকের সংখ্যাগুলি সেট = $\{11, 13, 15, \cdots\cdots, 25\}$ এবং $u_i = \frac{x_i - 9}{2}$.

[নোটঃ এখানে, প্রদত্ত সংখ্যাগুলি দ্বারা গঠিত সমান্তরাল ধারার nতম পদ = $11 + (n-1)\times 2 = 2n + 9$]

তাহলে, u_i চলকের মানসমূহের সেট = $\{1, 2, 3, \cdots\cdots, 8\}$

∴ u_i হচ্ছে প্রথম 8টি স্বাভাবিক সংখ্যার সেট যার ভেদাংক = $\frac{8^2-1}{12} = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}$, [$\frac{n^2-1}{12}$ সূত্র দ্বারা]

আমরা জানি, ভেদাংক মূল হতে স্বাধীন কিন্তু মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

∴ x_i চলকের অর্থাৎ প্রদত্ত সংখ্যাগুলির ভেদাংক = $2^2 \times \frac{21}{4} = 21$

12. 20, 25, 30, ……, 110 সংখ্যাগুলির ভেদাংক নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, x_i চলকের সংখ্যাগুলির সেট = $\{20, 25, 30, \cdots\cdots, 110\}$ এবং $u_i = \frac{x_i - 15}{5}$.

[নোটঃ এখানে, প্রদত্ত সংখ্যাগুলি দ্বারা গঠিত সমান্তরাল ধারার nতম পদ = $20 + (n-1)\times 5 = 5n + 15$]

তাহলে, u_i চলকের মানসমূহের সেট = $\{1, 2, 3, \cdots\cdots, 19\}$

∴ u_i হচ্ছে প্রথম 8টি স্বাভাবিক সংখ্যার সেট যার ভেদাংক = $\frac{19^2-1}{12} = \frac{360}{12} = 30$, [$\frac{n^2-1}{12}$ সূত্র দ্বারা]

আমরা জানি, ভেদাংক মূল হতে স্বাধীন কিন্তু মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

∴ x_i চলকের অর্থাৎ প্রদত্ত সংখ্যাগুলির ভেদাংক = $5^2 \times 30 = 750$

13. যদি চলক x প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার মান গ্রহণ করে তবে (2x − 1) এর ভেদাংক নির্ণয় কর।

সমাধান: চলক x এর মানগুলির প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার গড়, $\bar{x} = \frac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n}$

$= \frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}$

ভেদাংক, $V(x) = \frac{n^2-1}{12}$

ধরি, $y = 2x - 1$. তাহলে, $\bar{y} = 2\bar{x} - 1$ এবং

ভেদাংক, $V(y) = \sum(y-\bar{y})^2 = \sum(2x-1-2\bar{x}+1)^2 = 2^2\sum(x-\bar{x})^2$

$\Rightarrow \quad V(2x-1) = 4V(x) = 4 \times \frac{n^2-1}{12}$

$\therefore \quad (2x-1)$ এর ভেদাংক $= \frac{n^2-1}{3}$

14. কোন চলক প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার মান গ্রহণ করে এবং উহার গণসংখ্যা নিজ নিজ মানের সমান হলে ভেদাংক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, চলক x এর মানগুলি প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যা এবং গণসংখ্যা f. তাহলে,

x : 1, 2, 3, 4, ……… , n

f : 1, 2, 3, 4, ……… , n

$\therefore$ গড়, $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{1.1+2.2+3.3+\cdots\cdots+n.n}{1+2+3+\cdots\cdots+n}$

$= \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{3}$

ভেদাংক, $\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2 = \frac{1.1^2+2.2^2+3.3^2+\cdots\cdots+n.n^2}{1+2+3+\cdots\cdots+n} - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2$

$= \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3}{n(n+1)/2} - \frac{4n^2+4n+1}{9} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \times \frac{2}{n(n+1)} - \frac{4n^2+4n+1}{9}$

$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{4n^2+4n+1}{9} = \frac{9n^2+9n-8n^2-8n-2}{18} = \frac{n^2+n-2}{18}$

15. কোন শ্রেণির 15 জন ছাত্রের বয়সের গড় ও পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে 10 ও 2, ঐ শ্রেণিতে 20 বছর বয়সী একজন নুতন ছাত্র ভর্তি হলে তাদের বয়সের গড় ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, x চলক 15 জন ছাত্রের বয়স গ্রহণ করে এবং তদের বয়সের গড় $\bar{x}$.

$\therefore$ গড়, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} = 10 \Rightarrow \sum_{i=1}^{15} x_i = 15 \times 10 = 150$

পরিমিত ব্যবধান $= 2 = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15} - (\bar{x})^2} \Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15} - (10)^2 = 4$

$\Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15} = 104 \Rightarrow \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 1560$

$\therefore$ 20 বছর বয়সী একজন নুতন ছাত্র ভর্তি হলে তাদের বয়সের সমষ্টি $= \sum_{i=1}^{16} x_i = \sum_{i=1}^{15} x_i + x_{16} = 150 + 20$

$= 170$, বয়সের বর্গের সমষ্টি $= \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = \sum_{i=1}^{15} x_i^2 + x_{16}^2 = 1560 + 20^2 = 1960$ এবং ছাত্রসংখ্যা $= 15 + 1$

$= 16$

$\therefore$ তাদের বয়সের গড় $= \dfrac{170}{16} = 10 \cdot 625$ বছর এবং পরিমিত ব্যবধান $= \sqrt{\dfrac{1960}{16} - (10 \cdot 625)^2} = \sqrt{9 \cdot 61}$

$= 3 \cdot 1$ বছর ।

16. কোন তথ্যসারির 10টি সংখ্যার গড় ও ভেদাংক যথাক্রমে 20 ও 153·8 ; ঐ তথ্য সারিতে 15 ও 25 সংখ্যা দুইটি অন্তর্ভূক্ত করা হলে নতুন গড় ও ভেদাংক কত হবে?

সমাধানঃ ধরি, তথ্যসারির x চলকের $n = 10$ টি সংখ্যার গড় $= \bar{x}$ এবং তাদের সমষ্টি $= \sum_{i=1}^{10} x_i$

$\therefore$ গড়, $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 20 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i = 20 \times 10 = 200$

ভেদাংক $= \dfrac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - (\bar{x})^2 = 153 \cdot 8 \Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - (20)^2 = 153 \cdot 8$

$\Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - 400 = 153 \cdot 8 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 5538$

$\therefore$ ঐ তথ্য সারিতে 15 ও 25 সংখ্যা দুইটি অন্তর্ভূক্ত করা হলে তাদের সমষ্টি $= \sum_{i=1}^{12} x_i = \sum_{i=1}^{10} x_i + x_{11} + x_{12}$

$= 200 + 15 + 25 = 240$

তাদের বর্গের সমষ্টি $= \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 + x_{11}^2 + x_{12}^2 = 5538 + 15^2 + 25^2 = 6388$ এবং

সংখ্যাগুলির সংখ্যা $= 10 + 2 = 12$

$\therefore$ নতুন গড় $= \dfrac{240}{12} = 20$ বছর এবং নতুন ভেদাংক $= \dfrac{6388}{12} - (20)^2 = 132{\cdot}33$ বছর।

17. 50টি সংখ্যার গড় 2 ও ভেদাংক 9। ঐ তথ্যসারিতে আরও দুইটি সংখ্যা যোগ করা হলে সম্মিলিত গড় 2 এবং ভেদাংক $\dfrac{113}{13}$ হয়। নতুন সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান: 50টি সংখ্যার সমষ্টি $= 50 \times$ তাদের গড় $= 50 \times 2 = 100$ এবং

50টি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি $= 50 \times$ (তাদের গড় + তাদের ভেদাংক) $= 50(2+9) = 550$

আবার $(50+2)$ অর্থাৎ 52টি সংখ্যার সমষ্টি $= 52 \times$ তাদের গড় $= 52 \times 2 = 104$ এবং

52টি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি $= 52 \times$ (তাদের গড় + তাদের ভেদাংক) $= 52\left(2 + \dfrac{113}{13}\right) = 556$

ধরি সংখ্যা দুইটি x ও y.

$\therefore\ x + y = 104 - 100 \Rightarrow x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x \cdots\cdots$ (i) এবং

$x^2 + y^2 = 556 - 550 \Rightarrow x^2 + y^2 = 6 \Rightarrow x^2 + (4-x)^2 = 6 \Rightarrow x^2 + 16 - 8x + x^2 = 6$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $y = 4 - 1 = 3$, যখন $x = 1$ এবং $x_1 = 4 - 3 = 1$ যখন $x = 3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি 1 ও 3.

প্রশ্নমালা XB

2. (a) 52 টি তাসের প্যাকেট হতে তিনটি তাস বের করা হলে তাস তিনটি রাজা হবার সম্ভাব্যতা কত? [চ.'০৩]

সমাধান : ধরি, তাস 3টি যেকোন প্রকারের হওয়ার ঘটনা S ও রাজা হওয়ার ঘটনা K। তাহলে,

$n(S) = {}^{52}C_3 = 22{,}100$, $n(K) = {}^4C_3 = 4$

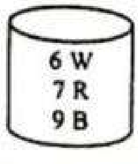
$\therefore$ তাস তিনটি রাজা হবার সম্ভাব্যতা $P(K) = \dfrac{n(K)}{n(S)} = \dfrac{4}{22100} = \dfrac{1}{5525}$

2(b) 52 খানা এক প্যাকেট তাস হতে হরতনের রাজা সরিয়ে রাখা হল। অবশিষ্ট তাসগুলো ভাল করে তাসানো হল। নিরপেক্ষভাবে একটি তাস টানলে সেটা হরতন হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [রা.'০১]

সমাধান : হরতনের রাজা সরিয়ে রাখা হলে অবশিষ্ট তাসের সংখ্যা $n(S) = 51$ এবং হরতনের সংখ্যা $n(H) = 12$

$\therefore$ তাসটি হরতন হওয়ার সম্ভাব্যতা $P(H) = \dfrac{n(H)}{n(S)} = \dfrac{12}{51} = \dfrac{4}{17}$ (Ans.)

3. (a) একটি বাক্সে বিভিন্ন আকারের 6টি সাদা বল, 7 টি লাল বল এবং 9 টি কালো বল আছে। এলোমেলোভাবে একটি বল তুলে নেওয়া হল। বলটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? [চ.'০৩;সি.'০৫,'০৭; ব.'০৮; য.'১১]



সমাধান ঃ বাক্সে মোট বলের সংখ্যা $= (6 + 7 + 9) = 22$ টি।

ধরি, বলটি যেকোন রঙের, লাল ও সাদা হওয়ার ঘটনা যথাক্রমে S, R ও W। তাহলে,

$n(S) = 22$, $n(R) = 7$ এবং $n(W) = 6$

∴ বলটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা

$P(R\cup W)=P(R)+P(W)$, [∵ R ও W ঘটনা দুইটি বর্জনশীল ।]

$$=\frac{n(R)}{n(S)}+\frac{n(W)}{n(S)}=\frac{7}{22}+\frac{6}{22}=\frac{13}{22}$$

3. (b) $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$ এবং $P(A)=\frac{1}{2}$ হলে, $P(B)$ এবং $P(B^c)$ এর মান নির্ণয় কর।

[রা.'০১; ঢা.'০৪,'০৬; ব.'১০]

সমাধান : দেওয়া আছে, $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$ এবং $P(A)=\frac{1}{2}$.

আমরা জানি, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{3}$

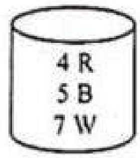
$$\Rightarrow P(B)=\frac{5}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5+2-3}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\text{(Ans.)}$$

$$\therefore\ P(B^c)=1-P(B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\quad\text{(Ans.)}$$

3(c) একটি বাক্সে 4টি লাল, 5টি নীল এবং 7টি সাদা রং এর বল আছে। দৈবচয়নে একটি বলের লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

[ব.'০৩]

সমাধান : বাক্সে মোট বলের সংখ্যা = (4 + 5 + 7) = 16 টি।



ধরি, বলটি যেকোন রঙের, লাল ও সাদা হওয়ার ঘটনা যথাক্রমে S , R ও W। তাহলে,

$n(S)=16$, $n(R)=4$ এবং $n(W)=7$

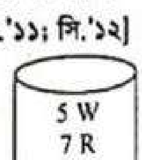
∴ বলটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা, $P(R\cup W)=P(R)+P(W)$, [∵ R ও W ঘটনা দুইটি বর্জনশীল ।]

$$=\frac{n(R)}{n(S)}+\frac{n(W)}{n(S)}=\frac{4}{16}+\frac{7}{16}=\frac{11}{16}$$

3(d) একটি ব্যাগে 5টি সাদা 7টি লাল এবং 8টি কালো বল আছে। যদি বিনিময় না করে একটি একটি করে পর পর 4টি বল তুলে নেয়া হয় তবে, সবগুলি বল সাদা হবার সম্ভাব্যতা কত?

[ব.'০১; কু.'১১; সি.'১২]

সমাধান : 5টি সাদা সহ ব্যাগে মোট বলের সংখ্যা = (5 + 7 + 8) = 20টি



∴ পর পর উত্তোলিত বল চারটির সবগুলি সাদা হবার সম্ভাব্যতা $=\frac{{}^5C_1}{{}^{20}C_1}\times\frac{{}^4C_1}{{}^{19}C_1}\times\frac{{}^3C_1}{{}^{18}C_1}\times\frac{{}^2C_1}{{}^{17}C_1}$

$$=\frac{5}{20}\times\frac{4}{19}\times\frac{3}{18}\times\frac{2}{17}=\frac{1}{969}$$

3. (e) একটি ব্যাগে 7টি লাল এবং 5টি সাদা বল আছে। 4টি বল তুলে নেয়া হল। বল চারটির 2টি লাল এবং 2টি সাদা হবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

[সি.'০৯; ব.'১২,'১৩]

সমাধান : ব্যাগে মোট বলের সংখ্যা = (7 + 5) = 12 টি।

এই 12টি বল হতে 4টিকে $^{12}C_4 = 495$ উপায়ে, 7টি লাল বল হতে 2টিকে $^7C_2 = 21$ উপায়ে এবং 5টি সাদা বল হতে 2টিকে $^5C_2 = 10$ উপায়ে উঠানো যায়।

$\therefore$ বল চারটির 2টি লাল এবং 2টি সাদা হবার সম্ভাব্যতা $= \dfrac{21 \times 10}{495} = \dfrac{14}{33}$

3(f) একটি বাক্সে 6টি সাদা ও 5টি লাল বল আছে। বাক্স হতে পুনঃস্থাপন করে দুটি বল নেয়া হল। বল দুটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? [বুয়েট'০৪-০৫]

সমাধান : 6টি সাদাসহ বাক্সে মোট বলের সংখ্যা $= (6 + 5) = 11$টি

$\therefore$ ১ম বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \dfrac{^6C_1}{^{11}C_1} = \dfrac{6}{11}$

আবার, ২য় বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \dfrac{^6C_1}{^{11}C_1} = \dfrac{6}{11}$

$\therefore$ বল দুটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \dfrac{6}{11} \times \dfrac{6}{11} = \dfrac{36}{121}$

3(g) একটি বাক্সে 6টি লাল ও 4টি হলুদ বল আছে। ঐ বাক্স থেকে দৈবভাবে পরপর 2টি বল নেওয়া হয়। প্রথম বলটি নেয়ার পর তা বাক্সে ফেরত রাখা হলনা। যদি প্রথম বারে নেওয়া বলটি লাল হয়, তবে দ্বিতীয় বলটি লাল হওয়ার শর্তাধীন সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [টেক্সটাইল'০৮-০৯]

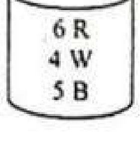
সমাধান : 6টি লালসহ বাক্সে মোট বলের সংখ্যা $= (6 + 4) = 10$টি

প্রথম বার একটি লাল বল নেওয়ার পর $(6 - 1) = 5$টি লালসহ বাক্সে মোট বলের সংখ্যা $= (9 - 1) = 9$টি

$\therefore$ প্রথম বারে নেওয়া বলটি লাল হওয়ার সাপেক্ষে দ্বিতীয় বলটি লাল হওয়ার শর্তাধীন সম্ভাবনা $= \dfrac{5}{9}$.

3(h) একটি বাক্সে 6টি লাল বল, 4টি সাদা বল এবং 5টি নীল বল আছে। দৈবচয়ন পদ্ধতিতে ক্রমাগতভাবে তিনটি বল বাক্স থেকে বের করলে লাল, সাদা, নীল অথবা নীল, সাদা, লাল বল ক্রমানুসারে পাওয়ার সম্ভাব্যতা বের কর যখন প্রতিটি বল বাক্সে পুনরায় রাখা না হয়। [বুয়েট'০৬-০৭]

সমাধান : বাক্সে মোট বলের সংখ্যা $= (6 + 4 + 5) = 15$ টি।



বল তিনটি ক্রমানুসারে লাল, সাদা, নীল পাওয়ার সম্ভাব্যতা $= \dfrac{^6C_1}{^{15}C_1} \times \dfrac{^4C_1}{^{14}C_1} \times \dfrac{^5C_1}{^{13}C_1}$

$$= \frac{6}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{5}{13} = \frac{4}{91}$$

আবার বল তিনটি ক্রমানুসারে নীল, সাদা, লাল পাওয়ার সম্ভাব্যতা $= \dfrac{^5C_1}{^{15}C_1} \times \dfrac{^4C_1}{^{14}C_1} \times \dfrac{^6C_1}{^{13}C_1} = \dfrac{5}{15} \times \dfrac{4}{14} \times \dfrac{6}{13} = \dfrac{4}{91}$

$\therefore$ বল তিনটি ক্রমানুসারে লাল, সাদা, নীল অথবা নীল, সাদা, লাল পাওয়ার সম্ভাব্যতা $= \dfrac{4}{91} + \dfrac{4}{91} = \dfrac{8}{91}$

$\frac{35\ 25}{50} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

4. (a) 50 জন ছাত্রের 35 জন ফুটবল, 25 জন ক্রিকেট খেলে। প্রত্যেক ছাত্র অন্তত একটি খেলায় অংশ নেয়। একজন ছাত্র দৈবভাবে নেয়া হলে, তার উভয় খেলায় অংশ নেয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [রা.'০১]

সমাধান : ধরি, ছাত্রটির ফুটবল ও ক্রিকেট খেলার ঘটনা যথাক্রমে F ও C। তাহলে, $n(F) = 35$, $n(C) = 25$ এবং মোট ছাত্রের সংখ্যা $n(S) = 50 = n(F \cup C)$

আমরা পাই, $n(F \cup C) = n(F) + n(C) - n(F \cap C) \Rightarrow 50 = 35 + 25 - n(F \cap C) \Rightarrow n(F \cap C) = 10$

$\therefore$ ছাত্রটির উভয় খেলায় অংশ নেয়ার সম্ভাব্যতা $P(F \cap C) = \dfrac{n(F \cap C)}{n(S)} = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$

4(b) একজন ছাত্রের বাংলায় পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{2}{3}$, বাংলা ও অঙ্ক দুইটি বিষয়ে পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{14}{45}$ এবং দুইটির যেকোনো একটিতে পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{4}{5}$ হলে, তার অঙ্কে পাসের সম্ভাব্যতা কত? [য.'০১; ব.'০৫; সি.'১১]

সমাধান : ধরি, ছাত্রটির বাংলায় ও অঙ্কে পাসের ঘটনা যথাক্রমে B ও M। তাহলে,

$P(B) = \dfrac{2}{3}$, $P(B \cap M) = \dfrac{14}{45}$ ও $P(B \cup M) = \dfrac{4}{5}$

আমরা পাই, $P(B \cup M) = P(B) + P(M) - P(B \cap M)$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{2}{3} + P(M) - \frac{14}{45} \Rightarrow P(M) = \frac{4}{5} + \frac{14}{45} - \frac{2}{3} = \frac{36+14-30}{45} = \frac{20}{45}$$

$\therefore$ তার অঙ্কে পাসের সম্ভাব্যতা $P(M) = \dfrac{4}{9}$

5. (a) 10 থেকে 30 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো হতে যেকোনো একটিকে ইচ্ছামত নিলে সেই সংখ্যাটি মৌলিক, অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [চ.'০২,'০৭; রা.'০৫; ব.'১১; কুয়েট'০৮-০৯]

সমাধান : ধরি, সংখ্যাটি যেকোনো সংখ্যা, মৌলিক ও 5 এর গুণিতক হওয়ার ঘটনা যথাক্রমে S, A ও B। তাহলে,

$A = \{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$, $B = \{10, 15, 20, 25, 30\}$

$\therefore$ $n(A) = 6$, $n(B) = 5$ এবং $n(S) = (30 - 10) + 1 = 21$

$\therefore$ সংখ্যাটি মৌলিক, অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা $= P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

[$\because$ A ও B ঘটনা দুইটি বর্জনশীল।]

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{21} + \frac{5}{21} = \frac{11}{21} \text{ (Ans.)}$$

5(b) 20 খানা একই রকম টিকেটে 1 থেকে 20 পর্যন্ত লিখে একটি পাত্রে রেখে উত্তমরূপে মিশানোর পর আলগোছে ও নিরপেক্ষভাবে একটি টিকেট টানা হলে টিকেট খানি 3 অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [বুয়েট'০২-০৩]

সমাধান : মনে করি, 3 ও 5 এর গুণিতক এরূপ ঘটনা যথাক্রমে A ও B. তাহলে,

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $B = \{5, 10, 15, 20\}$ এবং $A \cap B = \{15\}$

$\therefore$ $n(A) = 6$, $n(B) = 4$ এবং $n(A \cap B) = 1$.

$\therefore$ টিকেট খানি 3 অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা $= P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$$= \frac{6}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20} \text{ (Ans.)}$$

5(c) 1 থেকে 1000 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো হতে যেকোনো একটিকে ইচ্ছামত নিলে সেই সংখ্যাটি 3 অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, সংখ্যাটি যেকোনো সংখ্যা, 3 এর গুণিতক ও 5 এর গুণিতক হওয়ার ঘটনা যথাক্রমে S, A ও B। তাহলে, $n(S) = 1000$

$1000 \div 3 = 333\frac{1}{3} \quad \therefore n(A) = 333, \; 1000 \div 5 = 200 \quad \therefore n(B) = 200$

3 ও 5 এর ল.সা.গু. = 15 এবং $1000 \div 15 = 66\frac{2}{3} \quad \therefore n(A\cap B) = 66$

এখন, $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B) = 333 + 200 - 66 = 467$

$\therefore$ সংখ্যাটি 3 অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা $= P(A\cup B) = \frac{n(A\cup B)}{n(S)} = \frac{467}{1000}$

5(d) 1 থেকে 1011 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো হতে যেকোনো একটিকে ইচ্ছামত নিলে সেই সংখ্যাটি বর্গসংখ্যা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, সংখ্যাটি যেকোনো সংখ্যা ও বর্গসংখ্যা হওয়ার ঘটনা যথাক্রমে S ও A। তাহলে, $n(S) = 1011$

এখন, $1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, \ldots (31)^2 = 961 < 1011$; কিন্তু $(32)^2 = 1024 > 1011$.

$\therefore n(A) = 31$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{31}{1011} \text{ (Ans.)}$$

5(e) 1 থেকে 350 পর্যন্ত সংখ্যাগুলি হতে দৈব চয়নের মাধ্যমে একটি সংখ্যা নেওয়া হলো। সংখ্যাটি ঘনসংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা কত? [টেক্সটাইল' ০৬-০৭]

সমাধান : ধরি, সংখ্যাটি যেকোনো সংখ্যা ও ঘনসংখ্যা হওয়ার ঘটনা যথাক্রমে S ও A। তাহলে, $n(S) = 350$

এখন, $1^3 = 1, 2^3 = 8, 3^3 = 27, \cdots\cdots, 7^3 = 343 < 350$; কিন্তু $8^3 = 512 > 350 \; \therefore n(A) = 7$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{350} = \frac{1}{50} \text{ (Ans.)}$$

5(f) 1 থেকে 100 এর মধ্যে তিনটি পৃথক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণফল জোড়সংখ্যা হবার সম্ভাবনা কত? [রুয়েট' ০৬-০৭]

সমাধান : 1 থেকে 100 পর্যন্ত 50 টি জোড় ও 50টি বিজোড় সংখ্যা বিদ্যমান। তিনটি জোড় সংখ্যার গুণফল অথবা দুইটি বিজোড় ও একটি জোড় সংখ্যার গুণফল অথবা একটি বিজোড় ও দুইটি জোড় সংখ্যার গুণফল একটি জোড় সংখ্যা।

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা = P(তিনটি জোড় সংখ্যা) + P(একটি জোড় ও দুইটি বিজোড়) + P(একটি বিজোড় ও দুইটি জোড়)

$$= \frac{^{50}C_3}{^{100}C_3} + \frac{^{50}C_1 \times ^{50}C_2}{^{100}C_3} + \frac{^{50}C_2 \times ^{50}C_1}{^{100}C_3} = \frac{19600}{161700} + \frac{50 \times 1225}{161700} + \frac{1225 \times 50}{161700}$$

$$= \frac{142100}{161700} = 0 \cdot 8787 \text{ (প্রায়)}$$

6. (a) যদি $P(A \cap B) = 0 \cdot 48$ এবং $P(A) = 0 \cdot 6$ হয়, তবে $P(B)$ এর মান কত হলে A ও B স্বাধীন হবে?

সমাধান : আমরা জানি, A ও B স্বাধীন হলে, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$\Rightarrow 0 \cdot 48 = 0 \cdot 6 \times P(B) \Rightarrow P(B) = 0 \cdot 8$ (Ans.)

6(b) $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$. A ও B স্বাধীন হলে $P(A \cap B)$ এবং $P(A \cup B)$ নির্ণয় কর।

[ব.'০২,'০৭; সি.'০৮,'১০; ঢ.'০৩,'০৮,'১০; চ.'০৪,'১২; রা.'০৫; কু.'১২; দি.'১২; টেক্সটাইল'১০-১১]

সমাধান : দেওয়া আছে, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$.

আমরা জানি, A ও B স্বাধীন হলে, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

এখন, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4+9-3}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

6(c) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ এবং $P(A/B) = \frac{3}{8}$ হলে, $P(A \cap B)$, $P(B/A)$ এবং $P(A \cup B)$ এর মান নির্ণয় কর।

[চ.'১০; বুয়েট'০৬-০৭]

সমাধান : দেওয়া আছে, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ এবং $P(A/B) = \frac{3}{8}$

$\therefore \quad P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{40}$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3/40}{1/2} = \frac{3}{40} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{20}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{3}{40} = \frac{20+8-3}{40} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

6(d) একটি শ্রেণীতে 30 জন ছাত্র ও 20 জন ছাত্রী আছে। বার্ষিক পরীক্ষায় একজন ছাত্রের প্রথম ও একজন ছাত্রীর দ্বিতীয় হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান : শ্রেণীতে মোট ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা = 50

$\therefore$ 30 জন ছাত্রের একজন প্রথম হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{^{30}C_1}{^{50}C_1} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

এখন অবশিষ্ট ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা $= 50 - 1 = 49$

$\therefore$ 20 জন ছাত্রীর একজন দ্বিতীয় হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \dfrac{^{20}C_1}{^{49}C_1} = \dfrac{20}{49}$

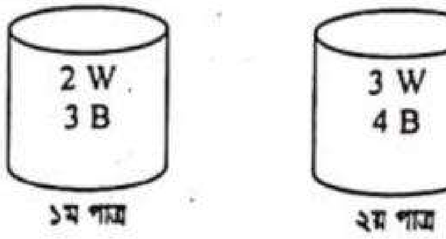
$\therefore$ একজন ছাত্রের প্রথম ও একজন ছাত্রীর দ্বিতীয় হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \dfrac{3}{5} \times \dfrac{20}{49} = \dfrac{12}{49}$

6. (e) একটি বাক্সে 9টি কার্ডে 1 থেকে 9 পর্যন্ত লেখা আছে। উহা হতে পরপর তিনটি কার্ড উঠানো হলো। উঠানো সংখ্যাগুলি জোড়-বিজোড়- জোড় ক্রমের হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান : 1 থেকে 9 পর্যন্ত সংখ্যার মোট সংখ্যা $n(S) = 9$, জোড় সংখ্যা $n(E) = 4$ ও বিজোড় সংখ্যা $n(O) = 5$.

$\therefore$ উঠানো সংখ্যাগুলো জোড়-বিজোড়-জোড় ক্রমের হওয়ার সম্ভাবনা $= \dfrac{4}{9} \times \dfrac{5}{9-1} \times \dfrac{4-1}{9-2} = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{5}{8} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{5}{42}$

7. (a) একটি পাত্রে 2টি সাদা ও 3টি কালো বল এবং অপর পাত্রে 3টি সাদা ও 4টি কালো বল আছে। প্রাত্র দুইটি হতে একটি করে বল উঠানো হলে (i) বলগুলি একই রঙের (ii) ভিন্ন রঙের হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?



সমাধান : ১ম পাত্রে মোট বল $= (2 + 3) = 5$ টি এবং

২য় পাত্রে মোট বল $= (3 + 4) = 7$ টি।

ধরি, ১ম পাত্র হতে উঠানো বলটি সাদা হবার ঘটনা W_1 ও কালো হবার ঘটনা যথাক্রমে B_1 এবং ২য় পাত্র হতে উঠানো বলটি সাদা হবার ঘটনা W_2 ও কালো হবার ঘটনা যথাক্রমে B_2.

$\therefore$ $P(W_1) = \dfrac{2}{5}$, $P(B_1) = \dfrac{3}{5}$, $P(W_2) = \dfrac{3}{7}$ এবং $P(B_2) = \dfrac{4}{7}$

(i) বলগুলো একই রঙের হওয়ার সম্ভাব্যতা $= P(W_1 \cap W_2) + P(B_1 \cap B_2)$

$$= P(W_1) \times P(W_2) + P(B_1) \times P(B_2)$$
$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{6+12}{35} = \frac{18}{35}$$

(ii) বলগুলো ভিন্ন রঙের হওয়ার সম্ভাব্যতা $= P(W_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap W_2)$

$$= P(W_1) \times P(B_2) + P(B_1) \times P(W_2)$$
$$= \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{8+9}{35} = \frac{17}{35}$$

7. (b) একটি বাক্সে 5টি লাল ও 4টি সাদা বল আছে এবং অপর একটি বাক্সে 3টি লাল এবং 6টি সাদা বল আছে। নিরপেক্ষভাবে প্রত্যেক থলি হতে একটি করে বল তোলা হল। দুইটি বলের মধ্যে অন্তত একটি লাল হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [ঢা.'০২,'১২; কু.'০৮]

সমাধান : ১ম বাক্সে মোট বল $= (5 + 4) = 9$ টি এবং ২য় বাক্সে মোট বল $= (3 + 6) = 9$ টি।

ধরি, ১ম বাক্স হতে উঠানো বলটি লাল হবার ঘটনা R_1 ও সাদা হবার ঘটনা W_1 এবং ২য় বাক্স হতে উঠানো বলটি লাল হবার ঘটনা R_2 ও সাদা হবার ঘটনা W_2.

$\therefore\ P(R_1)=\frac{5}{9}, P(W_1)=\frac{4}{9}, P(R_2)=\frac{3}{9}$ এবং $P(W_2)=\frac{6}{9}$

দুইটি বলের মধ্যে অন্তত একটি লাল হওয়ার সম্ভাব্যতা $= P(R_1 \cap W_2) + P(W_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2)$

$= P(R_1)\times P(W_2) + P(W_1)\times P(R_2) + P(R_1)\times P(R_2)$

$= \frac{5}{9}\times\frac{6}{9} + \frac{4}{9}\times\frac{3}{9} + \frac{5}{9}\times\frac{3}{9} = \frac{30+12+15}{81} = \frac{19}{27}$

বিকল্প পদ্ধতি : ১ম বাক্সে মোট বল = (5 + 4) = 9 টি যার 4টি সাদা এবং ২য় বাক্সে মোট বল = (3 + 6) = 9 টি যার 6টি সাদা ।

$\therefore$ ১ম বাক্স হতে একটি সাদা বল উঠার সম্ভাব্যতা $=\frac{4}{9}$ এবং ২য় বাক্স হতে একটি সাদা বল উঠার সম্ভাব্যতা $=\frac{6}{9}$

$\therefore$ উভয় থলি হতে একটি করে দুইটি সাদা বল উঠার সম্ভাব্যতা $=\frac{4}{9}\times\frac{6}{9}=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$

$\therefore$ দুইটি বলের মধ্যে অন্তত একটি লাল হওয়ার সম্ভাব্যতা = বল দুইটির কোনটি সাদা না হওয়ার সম্ভাব্যতা

$$=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

8. (a) দুইটি থলির একটিতে 5টি লাল ও 3টি কালো বল এবং অপর থলিতে 4টি লাল ও 5টি কালো বল আছে। সমসম্ভব উপায়ে একটি থলি নির্বাচন করা হল এবং তা থেকে দুইটি বল তোলা হলে একটি লাল ও একটি কালো হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [য.'০০; রা.'১১]

সমাধান : ১ম থলিতে মোট বল = (5 + 3) = 8 টি এবং ২য় পাত্রে মোট বল = (4 + 5) = 9 টি।

মনে করি, ১ম থলি ও ২য় থলি নির্বাচিত হওয়ার ঘটনা যথাক্রমে A ও B এবং বল দুইটির একটি লাল ও একটি কালো হওয়ার ঘটনা C । তাহলে, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= P(A\cap C) + P(B\cap C) = P(A)\times P(C/A) + P(B)\times P(C/B)$

$= \frac{1}{2}\frac{{}^5C_1\times{}^3C_1}{{}^8C_2} + \frac{1}{2}\frac{{}^4C_1\times{}^5C_1}{{}^9C_2} = \frac{1}{2}(\frac{5\times3}{28}+\frac{4\times5}{36}) = \frac{1}{2}(\frac{15}{28}+\frac{5}{9})$

$= \frac{1}{2}(\frac{135+140}{252}) = \frac{275}{504}$

8(b) প্রথম ব্যাগে 1টি টাকা ও 3টি পয়সা , দ্বিতীয় ব্যাগে 2টি টাকা ও 4টি পয়সা এবং তৃতীয় ব্যাগে 3টি টাকা ও 1টি পয়সা আছে। লটারির মাধ্যমে একটি ব্যাগ বাছাই করে একটি মুদ্রা উত্তোলন করলে সেটি টাকা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [য.'০৩]

সমাধান : ১ম ব্যাগে মোট মুদ্রা = (1 + 3) = 4টি, ২য় ব্যাগে মোট মুদ্রা = (2 + 4) = 6 টি এবং ৩য় ব্যাগে মোট মুদ্রা = (3 + 1) = 4 টি ।

ধরি, ১ম ব্যাগ , ২য় ব্যাগ ও ৩য় ব্যাগ নির্বাচিত হওয়ার ঘটনা যথাক্রমে A, B ও C এবং মুদ্রাটি টাকা হওয়ার ঘটনা T ।

তাহলে, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T)$

$= P(A) \times P(T/A) + P(B) \times P(T/B) + P(C) \times P(T/C)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3}(\frac{3+4+9}{12}) = \frac{1}{3} \times \frac{16}{12} = \frac{4}{9}$

8(c) তিনটি দল **I, II** এবং **III** এ বিভক্ত শিশুদের দলে যথাক্রমে **3** জন বালিকা ও **1** জন বালক, **2** জন বালিকা ও **2** জন বালক এবং **1** জন বালিকা ও **3** জন বালক বিদ্যমান আছে। প্রতিটি দল হতে নিরপেক্ষভাবে একজন করে নির্বাচিত করা হলে তিন জনের একটি বাছাইয়ে **1** জন বালিকা ও **2** জন বালক থাকা সম্ভবনা কত? [বুয়েট'০৭-০৮]

সমাধান : দল I, II ও III থেকে নির্বাচিত শিশুটি বালক হবার ঘটনা যথাক্রমে A, B ও C , এবং বালিকা হবার ঘটনা যথাক্রমে A', B' ও C'.

$\therefore P(A) = \frac{1}{4}, P(A') = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(B') = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{3}{4}$ ও $P(C') = \frac{1}{4}$.

$\therefore$ 1 জন বালিকা ও 2 জন বালক থাকা সম্ভবনা $= P((A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C))$

$= P(A \cap B \cap C') + P(A \cap B' \cap C) + P(A' \cap B \cap C)$

$= P(A)P(B)P(C') + P(A)P(B')P(C) + P(A')P(B)P(C)$

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1+3+9}{32} = \frac{13}{32}$

9. (a) একটি ব্যাগে **8**টি লাল, **4**টি কালো ও **3**টি সাদা বল আছে। **3**টি বল দৈবভাবে নেয়া হল ঃ **(i) 2**টি লাল বল **(ii)** কমপক্ষে **2**টি লাল হবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান : ব্যাগে মোট বল = (8 + 4 + 3) = 15টি।

মনে করি, উঠানো বল 3টির 2টি লাল ও 1টি কালো, 2টি লাল ও 1টি সাদা এবং 3টি লাল বল হওয়ার ঘটনা যথাক্রমে A, B ও C ।

(i) $P($2টি লাল বল$) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, [$\because$ A ও B ঘটনা দুইটি বর্জনশীল ।]

$= \frac{^8C_2 \times {^4C_1}}{^{15}C_3} + \frac{^8C_2 \times {^3C_1}}{^{15}C_3} = \frac{28 \times 4}{455} + \frac{28 \times 3}{455} = \frac{28 \times 7}{455} = \frac{28}{65}$

(ii) $P($কমপক্ষে 2টি লাল বল$) = P(A \cup B \cup C)$

$= P(A) + P(B) + P(C)$, [$\because$ A ,B ও C ঘটনা তিনটি বর্জনশীল ।]

$= \frac{^8C_2 \times {^4C_1}}{^{15}C_3} + \frac{^8C_2 \times {^3C_1}}{^{15}C_3} + \frac{^8C_3}{^{15}C_3} = \frac{28 \times 4}{455} + \frac{28 \times 3}{455} + \frac{28 \times 2}{455} = \frac{28 \times 9}{455} = \frac{36}{65}$

9(b) একটি বাক্সে **5**টি লাল ও **10**টি সাদা বল আছে। একটি বালক যেমন খুশি টানলে প্রতিবারে **(i)** দুইটি ভিন্ন রঙের বল **(ii)** দুইটি একই রঙের বল পাবার সম্ভাব্যতা কত? [ঢ.'০১; য.'০৮; কু.'১৩]

সমাধান : ব্যাগে মোট বল = (5 + 10) = 15টি।

(i) P(দুইটি ভিন্ন রঙের বল) = P(1টি লাল বল ও 1টি সাদা বল) $= \frac{{}^{5}C_1 \times {}^{10}C_1}{{}^{15}C_2} = \frac{5\times 10}{105} = \frac{10}{21}$

(ii) P(দুইটি একই রঙের বল) = P(2টি লাল বল অথবা 2টি সাদা বল)

= P(2টি লাল বল) + P (2টি সাদা বল), [∵ ঘটনা দুইটি বর্জনশীল ।]

$= \frac{{}^{5}C_2}{{}^{15}C_2} + \frac{{}^{10}C_2}{{}^{15}C_2} = \frac{10}{105} + \frac{45}{105} = \frac{55}{105} = \frac{11}{21}$

9. (c) একটি বাক্সে 5টি কালো ও 4টি সাদা বল আছে। দৈবভাবে 3টি বল তুলে নেওয়া হল। বলগুলো কালো হবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [ঢা.'০৫]

সমাধান : বাক্সে মোট বল = (5 + 4) = 9 টি।

ধরি, বল তিনটি যেকোনো রঙের হওয়ার ঘটনা S এবং কালো হওয়ার ঘটনা B । তাহলে,

$n(S) = {}^{9}C_3 = 84,\ n(B) = {}^{5}C_3 = 10$

∴ বলগুলি কালো হবার সম্ভাব্যতা $= P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$

9(d) একটি ব্যাগে 3টি কালো ও 4টি সাদা বল আছে। দৈবভাবে একটি করে 2টি বল তুলে নেওয়া হল। দ্বিতীয় বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর,যখন প্রথমটি উঠানোর পর তা (i) ব্যাগে রাখা হয় (ii) ব্যাগে রাখা না হয়। [য.'০১]

সমাধান : ব্যাগে মোট বল = (3 + 4) = 7

(i) প্রথমটি উঠানোর পর তা ব্যাগে রাখা হলে, দ্বিতীয় বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা

= P(প্রথম বলটি কালো ও ২য় বলটি সাদা) + P(প্রথম বলটি সাদা ও ২য় বলটি সাদা)

$= \frac{{}^{3}C_1}{{}^{7}C_1} \times \frac{{}^{4}C_1}{{}^{7}C_1} + \frac{{}^{4}C_1}{{}^{7}C_1} \times \frac{{}^{4}C_1}{{}^{7}C_1} = \frac{3}{7}\times\frac{4}{7} + \frac{4}{7}\times\frac{4}{7} = \frac{12+16}{49} = \frac{28}{49} = \frac{4}{7}$

(ii) প্রথমটি উঠানোর পর তা ব্যাগে রাখা না হলে, দ্বিতীয় বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা

= P(প্রথম বলটি কালো ও ২য় বলটি সাদা) + P(প্রথম বলটি সাদা ও ২য় বলটি সাদা)

$= \frac{{}^{3}C_1 \times {}^{4}C_1}{{}^{7}C_2} + \frac{{}^{4}C_2}{{}^{7}C_2} = \frac{3\times 4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12+6}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$

9. (e) একটি পাত্রে 6টি লাল, 5টি সবুজ ও 4টি সাদা বল আছে। 3টি বল দৈবভাবে নেয়া হল। (i) বলগুলি ভিন্ন রঙের (ii) বলগুলি একই রঙের (iii) 2টি লাল বল [টেক্সটাইল'০০-০১] (iv) 3টি সবুজ বল (v) অন্তত 2টি লাল বল [কুয়েট'০৩-০৪] (vi) সর্বাধিক 2টি সাদা বল হবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান : পাত্রে মোট বল = (6 + 5 + 4) = 15টি

(i) বলগুলো ভিন্ন রঙের হবার সম্ভাব্যতা = P(1টি লাল বল, 1টি সবুজ বল ও 1টি সাদা বল)

$$= \frac{^6C_1 \times {^5C_1} \times {^4C_1}}{^{15}C_3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{455} = \frac{24}{91}$$

(ii) বলগুলো একই রঙের হবার সম্ভাব্যতা = P(বল তিনটি লাল অথবা সবুজ অথবা সাদা)

= P(বল তিনটি লাল) + P(বল তিনটি সবুজ) + P(বল তিনটি সাদা)

$$= \frac{^6C_3}{^{15}C_3} + \frac{^5C_3}{^{15}C_3} + \frac{^4C_3}{^{15}C_3} = \frac{20+10+4}{455} = \frac{34}{455}$$

(iii) 2টি লাল বল হবার সম্ভাব্যতা = P(2টি লাল বল ও 1টি সবুজ বল) + P(2টি লাল বল ও 1টি সাদা বল)

$$= \frac{^6C_2 \times {^5C_1}}{^{15}C_3} + \frac{^6C_2 \times {^4C_1}}{^{15}C_3} = \frac{15 \times 5}{455} + \frac{15 \times 4}{455} = \frac{15 \times 9}{455} = \frac{27}{91}$$

(iv) 3টি সবুজ বল হবার সম্ভাব্যতা $= \frac{^5C_3}{^{15}C_3} = \frac{5}{455} = \frac{1}{91}$

(v) অন্তত 2টি লাল বল হবার সম্ভাব্যতা

= P(2টি লাল বল ও 1টি সবুজ বল) + P(2টি লাল বল ও 1টি সাদা বল) + P(বল তিনটি লাল)

$$= \frac{^6C_2 \times {^5C_1}}{^{15}C_3} + \frac{^6C_2 \times {^4C_1}}{^{15}C_3} + \frac{^6C_3}{^{15}C_3} = \frac{15 \times 5}{455} + \frac{15 \times 4}{455} + \frac{20}{455} = \frac{75+60+20}{455} = \frac{155}{455} = \frac{31}{91}$$

(vi) সর্বাধিক 2টি সাদা বল হবার সম্ভাব্যতা = 1 − P(3টি সাদা বল) $= 1 - \frac{^4C_3}{^{15}C_3} = 1 - \frac{4}{455} = \frac{451}{455}$

9. (f) একটি বাক্সে 15টি সাদা ও 10টি কালো রঙের মার্বেল আছে। একটি বালক যেমন খুশি টানলে প্রতিবারে 2টি (i) ভিন্ন রঙের (ii) একই রঙের মার্বেল হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? [কু.'০০; ঢা.'০৮]

সমাধান : ব্যাগে মোট মার্বেল = (15 + 10) = 25টি।

(i) প্রতিবারে 2টি ভিন্ন রঙের মার্বেল হওয়ার সম্ভাব্যতা = P(1টি সাদা মার্বেল ও 1টি কালো মার্বেল)

$$= \frac{^{15}C_1 \times {^{10}C_1}}{^{25}C_2} = \frac{15 \times 10}{300} = \frac{1}{2}$$

(ii) P(দুইটি একই রঙের মার্বেল) = P(2টি সাদা মার্বেল অথবা 2টি কালো মার্বেল)

= P(2টি সাদা মার্বেল) + P (2টি কালো মার্বেল), [∵ ঘটনা দুইটি বর্জনশীল।]

$$= \frac{^{15}C_2}{^{25}C_2} + \frac{^{10}C_2}{^{25}C_2} = \frac{105}{300} + \frac{45}{300} = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}$$

9(g) একই আকারের 7টি সাদা, 3টি কালো বল একটি সারিতে সাজানো হল, দুইটি কালো বল পাশাপাশি না বসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [রুয়েট' 11-12]

সমাধান : মোট বল = 7 + 3 = 10টি। একই আকারের 7টি সাদা ও 3টি কালো বল একটি সারিতে $\frac{10!}{7! \times 3!} = 120$

উপায়ে সাজানো যায়। 7টি সাদা বল এক সারিতে বসালে তাদের মাঝে 6টি এবং দুই পাশে দুইটি সহ মোট 8টি স্থানে 3টি কালো বল $\frac{^8P_3}{3!} = \frac{8\times7\times6}{6} = 56$ উপায়ে সাজানো যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$

10. (a) 52 খানা তাসের প্যাকেটে 4টি টেক্কা আছে। নিরপেক্ষভাবে যেকোনো একখানা তাস টেনে টেক্কা না পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত? [চ.'০১]

সমাধান ঃ এখানে, মোট তাসের সংখ্যা $n(S) = 52$, টেক্কার সংখ্যা $n(A) = 4$.

$\therefore$ তাসটি টেক্কা হওয়ার সম্ভাব্যতা, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$\therefore$ তাসটি টেক্কা না হওয়ার সম্ভাব্যতা $= 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

10(b) একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হল। নমুনাক্ষেত্রটি লিখ। (i) 2টি হেড ও জোড় সংখ্যা (ii) ছক্কার 4 পাবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [রা.'০৩; কু.'০৫; ব.'০৭; ঢা.'১২]

সমাধান ঃ দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে তার নমুনা ক্ষেত্র = {HH, HT, TH, TT} ও একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে তার নমুনা ক্ষেত্র = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

$\therefore$ একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে তার নমুনা ক্ষেত্রটি S = {HH1, HH2, HH3, HH4, HH5, HH6, HT1, HT2, HT3, HT4, HT5, HT6, TH1, TH2, TH3, TH4, TH5, TH6, TT1, TT2, TT3, TT4, TT5, TT6}

নমুনা ক্ষেত্রে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $n(S) = 24$.

2টি হেড ও জোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা A এবং ছক্কায় 4 পাবার ঘটনা B হলে, A = {HH2, HH4, HH6} এবং B = {HT4, HH4, TH4, TT4}

$\therefore$ $n(A) = 3, n(B) = 4$.

$\therefore$ $P(A) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}, P(B) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

10(c) 52 খানা তাসের প্যাকেট হতে পুনঃস্থাপনপূর্বক 2টি তাস দৈবভাবে উঠানো হল। তাস 2টি (i) একই রঙের রাজা পাবার (ii) একই রঙের রাজা না পাবার (iii) রাজা না পাবার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান ঃ ধরি, পুনঃস্থাপনপূর্বক উঠানো তাস 2টি যেকোন প্রকারের হওয়ার ঘটনা S, কালো রঙের রাজা হওয়ার ঘটনা B এবং লাল রঙের রাজা হওয়ার ঘটনা R।

তাহলে, $n(S) = {^{52}C_1} \times {^{52}C_1} = 2704$, $n(B) = {^2C_1} \times {^2C_1} = 4$, $n(R) = {^2C_1} \times {^2C_1} = 4$.

(i) তাস 2টি একই রঙের রাজা পাবার ঘটনা $= P(B \cup R) = P(B) + P(R)$, [$\because$ ঘটনা দুইটি বর্জনশীল।]

$$= \frac{n(B)}{n(S)} + \frac{n(R)}{n(S)} = \frac{4}{2704} + \frac{4}{2704} = \frac{1}{338}$$

(ii) একই রঙের রাজা না পাবার ঘটনা $= 1 - P(B \cup R) = 1 - \frac{1}{338} = \frac{337}{338}$

(iii) যেকোনো প্রকারের রাজা হওয়ার ঘটনা A হলে, $n(A) = {}^4C_1 \times {}^4C_1 = 16$

$\therefore$ রাজা পাবার সম্ভাব্যতা $= P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{16}{2704} = \frac{1}{169}$

$\therefore$ রাজা না পাবার সম্ভাব্যতা $= P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{169} = \frac{168}{169}$

11.(a) একটি সুষম মুদ্রা পরপর তিন বার টস করা হল। প্রতিটি টসেই প্রথম হেড পাওয়ার শর্তে দুই বা ততোধিক হেড পাওয়ার সম্ভাবনা কত? কোনো শর্ত আরোপ করা না হলে দুই বা ততোধিক হেড পাওয়ার সম্ভাবনা কত? [য.'০২]

সমাধান ঃ একটি মুদ্রা একবার টস করা হলে নমুনা ক্ষেত্র = {H, T} এবং পরপর দুইবার টস করা হলে নমুনা ক্ষেত্র 2^3
= {H, T} × {H, T}={HH, HT, TH, TT}

$\therefore$ তা পরপর তিনবার টস করা হলে নমুনা ক্ষেত্রটি

S = {H, T} × {HH, HT, TH, TT} = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

$\therefore n(S) = 8.$

প্রথমে হেড পাওয়ার শর্তে দুই বা ততোধিক হেড পাওয়ার ঘটনা A এবং কোনো শর্ত আরোপ করা না হলে দুই বা ততোধিক হেড পাওয়ার ঘটনা B হলে,

A = { HHT, HHT, HTH} $\therefore n(A) = 3$

B ={HHT, HHT, HTH, THH} $\therefore n(B) = 4$

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}, P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

11(b) দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে তাদের নমুনাক্ষেত্র তৈরি কর। দুটি ছয় উঠার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

[ব.'০১; য.'০৩; কু.'০৩,'১৩; সি.'০৪,'১৩; রা.'০৭; চ.'০৮,'১১] 6^2

সমাধান ঃ দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে নমুনা ক্ষেত্রটি S ={1, 2, 3, 4, 5, 6} × {1, 2, 3, 4, 5, 6}

= {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

$\therefore n(S) = 36$। দুটি ছয় উঠার ঘটনা A হলে,

A = {(6, 6)} $\therefore n(A) = 1$

$\therefore$ দুটি ছয় উঠার সম্ভাব্যতা $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{36}$

11(c) একটি মুদ্রা তিন বার টস করা হল। পর্যায়ক্রমে মুদ্রাটির হেড এবং টেইল পাবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। 2^3

[চ.'০০; বুয়েট'১১-১২]

সমাধান : একটি মুদ্রা একবার টস করা হলে নমুনা ক্ষেত্র = $\{H, T\}$ এবং পরপর দুইবার টস করা হলে নমুনা ক্ষেত্র $= \{H, T\} \times \{H, T\} = \{HH, HT, TH, TT\}$

$\therefore$ তা পরপর তিনবার টস করা হলে নমুনা ক্ষেত্রটি

$S = \{H, T\} \times \{HH, HT, TH, TT\} = \{HHT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

$\therefore n(S) = 8.$

পর্যায়ক্রমে মুদ্রাটির হেড এবং টেইল পাবার ঘটনা A হলে, $A = \{HTH\}$ $\therefore n(A) = 1$

$\therefore$ পর্যায়ক্রমে মুদ্রাটির হেড এবং টেইল পাবার সম্ভাব্যতা $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{1}{8}$

11(d) একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে তাদের নমুনাক্ষেত্র তৈরি কর। ছক্কার 4 উঠার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [দি.'১৩]

সমাধান : দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে তাদের নমুনাক্ষেত্র $= \{H, T\} \times \{H, T\} = \{HH, HT, TH, TT\}$

$\therefore$ একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে তাদের নমুনাক্ষেত্র,

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{HH, HT, TH, TT\}$ $2^2 \times 6$

$= \{1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2HH, 2HT, 2TH, 2TT, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4HH, 4HT, 4TH, 4TT, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6HH, 6HT, 6TH, 6TT\}$

$\therefore n(S) = 24$

ছক্কার 4 উঠার ঘটনা A হলে, $A = \{4HH, 4HT, 4TH, 4TT\}$. $\therefore n(A) = 4$.

$\therefore$ ছক্কার 4 উঠার সম্ভাব্যতা $= \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$

12(a) একটি পরীক্ষায় **30%** ছাত্র গণিতে, **20%** ছাত্র রসায়নে এবং **10%** ছাত্র উভয় বিষয়ে ফেল করে। দৈবভাবে একজন ছাত্র নির্বাচন করা হল। (i) যদি ছাত্রটি রসায়নে ফেল করে থাকে তবে তার গণিতে ফেল করার সম্ভাব্যতা কত? (ii) ছাত্রটি একটি মাত্র বিষয়ে ফেল করার সম্ভাব্যতা কত? (iii) ছাত্রটির গণিতে ফেল এবং রসায়নে পাস করার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান : ধরি, ছাত্রটি গণিতে ও রসায়নে ফেল করার ঘটনা M ও C। তাহলে, $P(M) = 30\% = \dfrac{30}{100} = 0{\cdot}3$

$P(C) = 20\% = 0{\cdot}2$ ও $P(M \cap C) = 10\% = 0{\cdot}1$

(i) ছাত্রটি রসায়নে ফেল করে থাকে তবে তার গণিতে ফেল করার সম্ভাব্যতা $P(M/C) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{\cdot}1}{0{\cdot}2} = \dfrac{1}{2}$

(ii) ছাত্রটি একটি মাত্র বিষয়ে ফেল করার সম্ভাব্যতা = P(গণিতে ফেল) + P(রসায়নে ফেল) − P(উভয় বিষয়ে ফেল)

$= P(M) + P(C) - P(M \cap C) = 0{\cdot}3 + 0{\cdot}2 - 0{\cdot}1 = 0{\cdot}4 = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

(iii) ছাত্রটির গণিতে ফেল এবং রসায়নে পাস করার সম্ভাব্যতা $= P(M \cap C') = P(M) - P(M \cap C)$

$= 0{\cdot}3 - 0{\cdot}1 = 0{\cdot}2 = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

12 (b) গণিত ও পরিসংখ্যান বিষয়ে 200 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 20 জন পরিসংখ্যানে এবং 40 জন গণিতে ফেল করে। উভয় বিষয়ে 10 জন ফেল করেছে। নিরপেক্ষভাবে একজন ছাত্রকে বাছাই করলে তার পরিসংখ্যানে পাস ও গণিতে ফেল হওয়ার সম্ভাবনা কত? [কু.'০১,'১২; চ.'০১,'০৮; রা.'০৪,'১২; য.'০৪; ঢা.'০৫; টেক্সটাইল'০৩-০৪]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা $n(E) = 200$ । ধরি, ছাত্রটির গণিতে ও পরিসংখ্যানে ফেল করার ঘটনা যথাক্রমে M ও S এবং ছাত্রটির গণিতে ও পরিসংখ্যানে পাস করার ঘটনা M' ও S'. তাহলে, $n(M) = 40$, $n(S) = 20$, $n(M \cap S) = 10$

$\therefore$ ছাত্রটির পরিসংখ্যানে পাস ও গণিতে ফেল হওয়ার সম্ভাবনা $= P(M \cap S') = P(M) - P(M \cap S)$

$$= \frac{n(M)}{n(E)} - \frac{n(M \cap S)}{n(E)} = \frac{40}{200} - \frac{10}{200} = \frac{30}{200} = \frac{3}{20}$$

বিকল্প পদ্ধতি : দেওয়া আছে, মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা = 200 জন , গণিতে ফেল করা ছাত্রের সংখ্যা = 40 জন, পরিসংখ্যানে ফেল কার ছাত্রের সংখ্যা = 20 জন এবং উভয় বিষয়ে ফেল করা ছাত্রের সংখ্যা = 10 জন।

$\therefore$ গণিতে ফেল এবং পরিসংখ্যানে পাস করা ছাত্রের সংখ্যা = 40 − 10 = 30 জন।

$\therefore$ ছাত্রটির পরিসংখ্যানে পাস ও গণিতে ফেল হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{30}{200} = \frac{3}{20}$

12(c) আলমের বাংলা পরীক্ষায় ফেল করার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{5}$, বাংলা ও ইংরেজি দুটিতেই পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{3}{4}$ এবং দুইটির যেকোন একটিতে পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{7}{8}$ হলে, তার কেবল ইংরেজিতে পাসের সম্ভাব্যতা কত?

[ঢা.'০১,'০৮; য.'০৯; দি.'১৩]

সমাধান ঃ আলমের বাংলায় ফেল করার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{5}$

$\therefore$ তার বাংলায় পাস করার সম্ভাব্যতা $= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

ধরি, তার বংলায় পাস করার ঘটনা B এবং ইংরেজিতে পাস করার ঘটনা E । তাহলে, $P(B) = \frac{4}{5}$, $P(B \cap E) = \frac{3}{4}$ এবং $P(B \cup E) = \frac{7}{8}$

এখন, $P(B \cup E) = P(B) + P(E) - P(B \cap E)$

$$\Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{4}{5} + P(E) - \frac{3}{4} \Rightarrow P(E) = \frac{7}{8} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} \Rightarrow P(E) = \frac{35+30-32}{40} = \frac{33}{40},$$

$\therefore$ তার কেবল ইংরেজিতে পাসের সম্ভাব্যতা $= P(E) - P(B \cap E) = \frac{33}{40} - \frac{3}{4} = \frac{33-30}{40} = \frac{3}{40}$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ ধরি, আলমের বংলায় পাস করার ঘটনা B এবং ইংরেজিতে পাস করার ঘটনা E ।

প্রশ্নমতে, $P(B \cap E) = \frac{3}{4}$, $P(B \cup E) = \frac{7}{8}$ এবং $P(B') = \frac{1}{5}$

$\therefore \; P(B \cup E)' = 1 - P(B \cup E) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow P(B' \cap E') = \frac{1}{8}$,[দ্যা'মরগানের বিধি অনুযায়ী]

এখন, $P(B' \cap E) = P(B') - P(B' \cap E') = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40}$

$\therefore$ আলমের কেবল ইংরেজিতে পাসের সম্ভাব্যতা $= \frac{3}{40}$

13(a) একজন প্রার্থী একটি শিল্প প্রতিষ্ঠানের তিনটি পদে আবেদন করে। প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদে প্রার্থীর সংখ্যা যথাক্রমে 3, 4 এবং 2। ঐ প্রার্থীর কমপক্ষে একটি পদে চাকুরি পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত? [কু.'০২]

সমাধান ঃ ধরি, ১ম , ২য় ও ৩য় পদে চাকরি পাওয়ার ঘটনা যথাক্রমে A, B ও C ।

$\therefore \; P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$ এবং $P(C) = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ ১ম পদে চাকরি না পাওয়ার সম্ভাব্যতা $= P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

অনুরূপ, $P(B') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ এবং $P(C') = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ঐ প্রার্থীর কোন পদে চাকুরি না পাওয়ার সম্ভাব্যতা $= P(A' \cap B' \cap C') = P(A') \times P(B') \times P(C')$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ ঐ প্রার্থীর কমপক্ষে একটি পদে চাকুরি পাওয়ার সম্ভাব্যতা $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

13 (b) 500 জন লোকের 50 জন ইত্তেফাক পড়েনা, 25 জন জনকণ্ঠ পড়েনা এবং 10 জন এ দুটোর কোনটাই পড়েনা। এদের একজন লোক নির্বাচন করা হলে তার জনকণ্ঠ পড়া ও ইত্তেফাক না পড়ার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, মোট লোকের সংখ্যা $n(S) = 500$ । ধরি, লোকটির ইত্তেফাক না পড়ার ঘটনা E ও জনকণ্ঠ না পড়ার ঘটনা J । তাহলে,

$n(E) = 50, n(J) = 25$ এবং $n(E \cap J) = 10$.

$\frac{(50-10)}{500} = \frac{40}{500}$

জনকণ্ঠ পড়ার ঘটনা J' হলে, ঐ ব্যক্তির জনকণ্ঠ পড়া ও ইত্তেফাক না পড়ার সম্ভাব্যতা

$$= P(E \cap J') = P(E) - P(E \cap J) = \frac{n(E)}{n(S)} - \frac{n(E \cap J)}{n(S)} = \frac{50}{500} - \frac{10}{500} = \frac{40}{500} = \frac{2}{25} \quad \text{(Ans.)}$$

13 (c) কোনো নির্বাচনে চারজন প্রার্থী A, B, C, D এর জয়ের সম্ভাব্যতা যথাক্রমে 0·4, 0·3, 0·2, 0·1; নির্বাচনের পূর্বমুহূর্তে C তার প্রার্থিতা প্রত্যাহার করল। এখন অবশিষ্ট তিন জন প্রার্থীর জয়ের সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ C এর পরাজয়ের সম্ভাব্যতা ছিল $1 - 0{\cdot}2 = 0{\cdot}8$

$\therefore$ অবশিষ্ট প্রত্যেক প্রার্থীর জয়ের সম্ভাব্যতা $\frac{1}{0{\cdot}8} = 1{\cdot}25$ গুণ বৃদ্ধি পাবে।

$\therefore$ A এর জয়ের সম্ভাব্যতা $= 0{\cdot}4 \times 1{\cdot}25 = 0{\cdot}5$, B এর জয়ের সম্ভাব্যতা $= 0{\cdot}3 \times 1{\cdot}25 = 0{\cdot}375$ এবং

D এর জয়ের সম্ভাব্যতা $= 0\cdot1 \times 1\cdot25 = 0\cdot125$

13(d) একজন বিক্রেতা প্রত্যেক খরিদ্দারের নিকট শতকরা 70 ভাগ সুযোগে দ্রব্য বিক্রি করে। পর্যায়ক্রমিক খরিদ্দারদের আচরণ পারস্পারিক প্রভাবমুক্ত। যদি A এবং B দুইজন খরিদ্দার দোকানে প্রবেশ করে, তাহলে A অথবা B এর নিকট বিক্রেতার দ্রব্য বিক্রয়ের সম্ভবনা কত? উ: 0·91 [বুয়েট' ১২-১৩]

সমাধান ঃ মনে করি, A ও B এর নিকট দ্রব্য বিক্রয়ের ঘটনা যথাক্রমে C ও D.

$\therefore\ P(C) = P(D) = \frac{70}{100} = 0\cdot7$. এখানে, ঘটনা দুইটি স্বাধীন।

$\therefore$ A অথবা B এর নিকট বিক্রেতার দ্রব্য বিক্রয়ের সম্ভবনা $= P(C\cup D) = P(C) + P(D) - P(C\cap D)$

$= P(C) + P(D) - P(C)\cdot P(D)$

$= 0\cdot7 + 0\cdot7 - 0\cdot7\times0\cdot7 = 0\cdot91$

14. একটি অধিবর্ষে 53টি শুক্রবার থাকার সম্ভাব্যতা কত? [টেক্সটাইল'১১-১২,১২-১৩]

সমাধান ঃ আমরা জানি, 1 অধিবর্ষ = 366 দিন অর্থাৎ 52 সপ্তাহ 2 দিন। 52 সপ্তাহে 52টি শুক্রবার এবং অবশিষ্ট 2 দিন পরপর বৃহসপতি ও শুক্র বা, শুক্র ও শনি বা, শনি ও রবি বা, রবি ও সোম বা, সোম ও মঙ্গল বা, মঙ্গল ও বুধ বা, বুধ ও বৃহস্পতি - এই সাত প্রকারের যেকোনো এক প্রকারের হতে পারে। এদের মধ্যে শুক্রবারের অনুকূল ঘটনা 2টি ।

$\therefore$ অধিবর্ষে 53টি শুক্রবার থাকার সম্ভাব্যতা $= \frac{2}{7}$

15. একটি ঘটনার অনুকূলে সুযোগ 4 : 3, অন্য একটি স্বাধীন ঘটনার প্রতিকূলে সুযোগ 2 : 3 । ঘটনাদ্বয়ের কমপক্ষে একটি ঘটার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান ঃ ধরি, ১ম ও ২য় ঘটনার অনুকূলে সুযোগ যথাক্রমে A ও B । তাহলে,

$P(A) = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}$ এবং $P(B) = \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$.

$\therefore$ ঘটনাদ্বয়ের কমপক্ষে একটি ঘটার সম্ভাব্যতা $= P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A)\times P(B)$, [$\because$ ঘটনা দুটি স্বাধীন]

$= \frac{4}{7} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7}\times\frac{3}{5} = \frac{20+21-12}{35} = \frac{29}{35}$

16. (a) কোনো পরিবারে 3 জন শিশু আছে এবং এদের মধ্যে কমপক্ষে 1 জন বালক। পরিবারটিতে 2 জন বালক থাকার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ 3 জন শিশুর মধ্যে কমপক্ষে 1 জন বালক থাকতে পারে $(2^3-1) = 7$ উপায়ে এবং 3 জন শিশুর মধ্যে 2 জন বালক থাকাতে পারে $^3C_2 = 3$ উপায়ে।

$\therefore$ পরিবারটিতে 2 জন বালক থাকার সম্ভাব্যতা $= \frac{3}{7}$

(b) 5 জন ছাত্র হতে কমপক্ষে একজন, 3 জন ছাত্রী হতে কমপক্ষে একজন ও 2 জন শিক্ষক হতে কমপক্ষে একজন নিয়ে একটি দল গঠন করা হল। দলটিতে কমপক্ষে 4 জন ছাত্র, সর্বাধিক 2 জন ছাত্রী ও 2 জন শিক্ষক থাকার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান : 5 জন ছাত্র হতে কমপক্ষে একজন, 3 জন ছাত্রী হতে কমপক্ষে একজন ও 2 জন শিক্ষক হতে কমপক্ষে একজন নিয়ে একটি দল গঠন করা যায় $(2^5-1)(2^3-1)(2^2-1)=651$ উপায়ে। আবার, দলটিতে কমপক্ষে 4 জন ছাত্র, সর্বাধিক 2 জন ছাত্রী ও 2 জন শিক্ষক থাকতে পারে $({}^5C_4+{}^5C_5)({}^3C_2+{}^3C_1)\times{}^2C_2=36$ উপায়ে।

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $=\frac{36}{651}=\frac{12}{217}$

17. দুটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হল। নমুনাক্ষেত্রটি লিখ। ১ম ছক্কার পাঠ = x এবং ২য় ছক্কার পাঠ = y হলে নিম্নের সম্ভাবনাগুলো নির্ণয় কর: (i) $P(x=y)$, (ii) $P(x=2y)$, (iii) $P(x+y\geq 7)$, (iv) $P(x+y=7)$

সমাধান : দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে নমুনা ক্ষেত্রটি $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\times\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$\therefore\ n(S)=36$ ।

(i) এখানে, $n(x=y)=6$ $\therefore P(x=y)=\frac{n(x=y)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(ii) এখানে, $n(x=2y)=3$ $\therefore P(x=2y)=\frac{n(x=2y)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(iii) এখানে, $n(x+y\geq 7)=21$ $\therefore P(x+y\geq 7)=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$

(iv) এখানে, $n(x+y=7)=6$ $\therefore P(x+y=7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

18. আবহাওয়া পূর্বাভাস P(আজ বৃষ্টি হবে) = 40%, P(কাল বৃষ্টি হবে) = 50%, P(আজ ও কাল বৃষ্টি হবে) = 30%. আজ বৃষ্টি হয়েছে এই শর্তে আগামীকাল বৃষ্টি হবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। $P\left(\frac{TKB}{TB}\right)=\frac{30\%}{40\%}$

সমাধান : ধরি, আজ বৃষ্টি হবার ঘটনা A এবং কাল বৃষ্টি হবার ঘটনা B । তাহলে, $P(A)=40\%=\frac{40}{100}=0{\cdot}4$, $P(B)=50\%=0{\cdot}5$ এবং $P(A\cap B)=0{\cdot}3$

$\therefore$ আজ বৃষ্টি হয়েছে এই শর্তে আগামীকাল বৃষ্টি হবার সম্ভাব্যতা $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0{\cdot}3}{0{\cdot}4}=\frac{3}{4}$

19. কোনো কারখানার 100 জন শ্রমিকের মধ্যে 40 জন পুরুষ ও 20 জন মহিলা বিবাহিত, এবং 10 জন পুরুষ ও 30 জন মহিলা অবিবাহিত। নির্বিচারে বাছাইকৃত একজন শ্রমিক (i) বিবাহিত পুরুষ (ii) অবিবাহিত মহিলা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান : (i) মনে করি, বাছাইকৃত শ্রমিকটি বিবাহিত হওয়ার ঘটনা A এবং পুরুষ হওয়ার ঘটনা B.

বিবাহিত পুরুষ হওয়ার সম্ভাব্যতা $=P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{40}{40+20}=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$

(ii) মনে করি, বাছাইকৃত শ্রমিকটি অবিবাহিত হওয়ার ঘটনা C এবং মহিলা হওয়ার ঘটনা D.

অবিবাহিত মহিলা হওয়ার সম্ভাব্যতা $= P(D/C) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{n(C \cap D)}{n(C)} = \frac{30}{10+30} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

20 (a) পুনরাবৃত্তি না ঘটিয়ে 2, 4, 7, 9, 3, 8 অঙ্কগুলি ব্যবহার করে দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা বানানো হবে। সংখ্যাটি জোড় হওয়ার সম্ভাবনা কত? [বুয়েট' ১০-১১]

সমাধান : পুনরাবৃত্তি না ঘটিয়ে 2, 4, 7, 9, 3, 8 অঙ্কগুলি ব্যবহার করে দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা $= {}^6P_2 = 30$ এবং

জোড় সংখ্যা $= {}^3P_1 \times {}^5P_1 = 15$.

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

20(b) একটি ছক্কার গুটির সাথে এমনভাবে তার বেঁধে দেয়া হলো যে, একটি জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা একটি বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনার দ্বিগুণ হয়ে গেল। ছক্কা একবার নিক্ষেপে 4 এর কম ফোঁটা আসার ঘটনা A দ্বারা নির্দেশিত হলে P(A) নির্ণয় কর। উ: 4/9 [টেক্সটাইল' ০১-০২]

সমাধান : ছক্কার গুটিতে জোড় ফোঁটা তিনটি 2, 4, 6 এবং বিজোড় ফোঁটা তিনটি 1, 3, 5. একটি বিজোড় ফোঁটা আসার

সম্ভাবনা x হলে, $3x + 2 \times 3x = 1 \Rightarrow 3x + 6x = 1 \Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$.

$\therefore$ 1, 3, 5 এর প্রতিটি আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{9}$ এবং 2, 4, 6 এর প্রতিটি আসার সম্ভাবনা $\frac{2}{9}$.

$\therefore$ 4 এর কম ফোঁটা আসার সম্ভাবনা $= P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

20(c) একটি ছক্কা দুইবার চাল দেওয়া হলো। প্রথম চালে 4, 5 অথবা 6 এবং দ্বিতীয় চালে 1, 2, 3 অথবা 4 ওঠার সম্ভাবনা বের কর। উ: 1/3 [রুয়েট' ০৯-১০]

সমাধান : মনে করি, প্রথম চালে 4, 5 অথবা 6 ওঠার ঘটনা A এবং দ্বিতীয় চালে 1, 2, 3 অথবা 4 ওঠার ঘটনা B.

তাহলে, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ এবং $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

$\therefore$ প্রথম চালে 4, 5 অথবা 6 এবং দ্বিতীয় চালে 1, 2, 3 অথবা 4 ওঠার সম্ভাবনা $= P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

21. কোনো বিদ্যালয় হতে জুনিয়ার বৃত্তি পরীক্ষায় 10 জন অংশগ্রহণ করে। সকলেরই বৃত্তি পাওয়ার বা না পাওয়ার সম্ভাবনা সমান। ঐ বিদ্যালয় হতে কেবলমাত্র তিন জনের বৃত্তি পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান ঃ প্রত্যেকের বৃত্তি পাওয়া বা না পাওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{1}{2}$. আবার 10 থেকে 3 জনকে বাছাই করা যায় ${}^{10}C_3 = 120$ উপায়ে।

এ 3 জনের বৃত্তি পাওয়ার সম্ভাব্যতা $= (\frac{1}{2})^3$ এবং অন্য 7 জনের বৃত্তি না পাওয়ার সম্ভাব্যতা $= (\frac{1}{2})^7$

$\therefore$ কেবলমাত্র তিন জনের বৃত্তি পাওয়ার সম্ভাব্যতা $=120\times(\frac{1}{2})^3\times(\frac{1}{2})^7=\frac{120}{2^{10}}=\frac{120}{1024}=\frac{15}{128}$

22. (a) দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যাগুলি হতে দৈবচয়ন প্রক্রিয়ায় একটি সংখ্যা তাহলে 5 দ্বারা বিভাজ্য জোড়সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা – [SUST 12-13]

A. 1/2 B. 1/5 C. 1/9 D. 1/10

সমাধানঃ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = 99 – 9 = 90 এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য দুই অঙ্ক বিশিষ্ট জোড় সংখ্যা 9টি (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90). $\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$

(b) 16 জন বালক ও 12 জন বালিকা একটি প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করলে, একটি বালক প্রথম ও একটি বালিকা দ্বিতীয় হওয়ার সম্ভাবতা হল :

A. 6/7 B. 1/7 C. 5/63 D. 16/63

সমাধানঃ সম্ভাব্যতা $=\frac{16}{28}\times\frac{12}{27}=\frac{16}{63}$

(c) ভিন্ন এককে প্রকাশিত দুইটি তথ্যসারির তুলনা করতে উপযুক্ত পরিমাপ হলো –

A. ভেদাঙ্ক B. পরিসর C. বিভেদাঙ্ক D. পরিমিত ব্যবধান

23. 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলি যেকোনো সংখ্যকবার ব্যবহার করে চার অঙ্কের একটি সংখ্যা গঠন করা হল।

(a) সংখ্যাটির অঙ্কগুলি ভিন্ন ভিন্ন হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

(b) সংখ্যাটির অঙ্কগুলি অভিন্ন হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

(c) সংখ্যাটির অঙ্কগুলি জোড় হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রতিটি স্থান (একক বা দশক বা শতক বা হাজার) 4টি অঙ্ক দ্বারা 4 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $4\times4\times4\times4=4^4=256$ উপায়ে। যাদের ${}^4P_4=24$ টি সংখ্যার অঙ্কগুলি ভিন্ন ভিন্ন এবং 1111, 2222, 3333 ও 4444 সংখ্যা 4টির অঙ্কগুলি অভিন্ন। আবার $256\div2=128$ টি সংখ্যা জোড়।

$\therefore$ (a) সংখ্যাটির অঙ্কগুলি ভিন্ন ভিন্ন হওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{24}{256}=\frac{3}{32}$,

(b) অভিন্ন হওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{4}{256}=\frac{1}{64}$

(c) জোড় সংখ্যা হওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{128}{256}=\frac{1}{2}$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. "PROBABILITY" শব্দটির বর্ণগুলি একত্রে নিয়ে সাজালে প্রথমে ও শেষে B থাকার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ "PROBABILITY" শব্দটিতে মোট 11টি বর্ণ আছে যাদের 2টি B ও 2টি I।

$\therefore$ এ শব্দটির বর্ণগুলি একত্রে নিয়ে মোট সাজানো যায় $\frac{11!}{2!\times 2!} = 9979200$ উপায়ে এবং প্রথমে ও শেষে B রেখে সাজানো যায় $\frac{9!}{2!} = 181440$ উপায়ে।

$\therefore$ প্রথমে ও শেষে B থাকার সম্ভাব্যতা $= \frac{181440}{9979200} = \frac{1}{55}$

2. "TECHNOLOGY" শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজালে স্বরর্ণগুলো পাশাপাশি থাকার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান : 'TECHNOLOGY' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 2টি O সহ 3টি স্বরবর্ণ।

$\therefore$ এ শব্দটির বর্ণগুলি একত্রে নিয়ে মোট সাজানো যায় $\frac{10!}{2!} = 1814400$ উপায়ে এবং স্বরর্ণগুলি পাশাপাশি রেখে সাজানো যায় $8!\times\frac{3!}{2!} = 120960$ উপায়ে।

$\therefore$ স্বরর্ণগুলো পাশাপাশি থাকার সম্ভাব্যতা $= \frac{120960}{1814400} = \frac{1}{15}$

3. " EVENT " বর্ণগুলো থেকে তিনটি বর্ণ নিয়ে একটি শব্দ গঠন করা হল। সংখ্যাটিতে কমপক্ষে 1টি E থাকার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান : " EVENT " শব্দটিতে মোট 5টি বর্ণ আছে যাদের 2টি E ও অন্য তিনটি ভিন্ন ।

3টি ভিন্ন বর্ণ V, N ও T দ্বারা শব্দ গঠন করা যায় $3! = 6$টি ; 3টি ভিন্ন বর্ণ V, N , T হতে যেকোনো 2টি ও 1টি E নিয়ে শব্দ গঠন করা যায় ${}^3C_2\times 3! = 18$ টি এবং 3টি ভিন্ন বর্ণ V, N , T হতে যেকোনো 1টি ও 2টি E নিয়ে শব্দ গঠন করা যায় ${}^3C_1\times\frac{3!}{2!} = 9$ টি।

$\therefore$ সংখ্যাটিতে কমপক্ষে 1টি E থাকার সম্ভাব্যতা $= \frac{18+9}{6+18+9} = \frac{27}{33} = \frac{9}{11}$

4. 6 জন বিজ্ঞান ও 4 জন কলা বিভাগের ছাত্র থেকে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করা হল। কমিটিতে বিজ্ঞানের ছাত্রদের সংখ্যা গরিষ্ঠিতা থাকার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান : 6 জন বিজ্ঞান ও 4 জন কলা বিভাগের ছাত্র থেকে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করা $({}^6C_6\times{}^4C_0 + {}^6C_5\times{}^4C_1 + {}^6C_4\times{}^4C_2 + {}^6C_3\times{}^4C_3 + {}^6C_2\times{}^4C_4)$

$= (1 + 6\times 4 + 15\times 6 + 20\times 4 + 15\times 1) = (1 + 24 + 90 + 80 + 15) = 210$ উপায়ে যাদের $({}^6C_6\times{}^4C_0 + {}^6C_5\times{}^4C_1 + {}^6C_4\times{}^4C_2) = 115$ টি কমিটিতে বিজ্ঞানের ছাত্রদের সংখ্যা গরিষ্ঠিতা থাকে।

$\therefore$ কমিটিতে বিজ্ঞানের ছাত্রদের সংখ্যা গরিষ্ঠিতা থাকার সম্ভাব্যতা $= \frac{115}{210} = \frac{23}{42}$

5. 11 ডিজিট বিশিষ্ট একটি মোবাইল নম্বরে শেষের ডিজিট শূন্য হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান : 0 হতে 9 পর্যন্ত মোট 10টি অঙ্ক (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9) আছে ।

প্রত্যেকটি ডিজিট 10টি অঙ্ক দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

∴ 11 ডিজিট বিশিষ্ট মোবাইল নম্বরের সংখ্যা = 10^{11} এবং শেষের ডিজিট শূন্য এরূপ মোবাইল নম্বরের সংখ্যা = 10^{10}

∴ 11 ডিজিট বিশিষ্ট একটি মোবাইল নম্বরে শেষের ডিজিট শূন্য হওয়ার সম্ভাব্যতা = $\dfrac{10^{10}}{10^{11}} = \dfrac{1}{10}$

6. 22 জন খেলোয়াড়ের মধ্যে দুইজন উইকেট রক্ষক। 11 সদস্যের দুইটি ক্রিকেট দল গঠন করা হল। উইকেট রক্ষক দুইজন ভিন্ন দলে থাকার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান : 22 জন হতে 11 জনের দুইটি ক্রিকেট দল গঠন করা যায় $\dfrac{22!}{2!(11!)^2}$ উপায়ে ।

আবার, দুইজন ইউকেট রক্ষককে দুইটি টিমে নিদিষ্ট করে 20 জনকে দুইটি সমান ভাগে সেই নির্দিষ্ট টিমে বিভক্ত করা যায় $\dfrac{20!}{(10!)^2}$ উপায়ে ।

∴ উইকেট রক্ষক দুইজন ভিন্ন দলে রেখে দুইটি ক্রিকেট দল গঠন করা যায় $\dfrac{20!}{(10!)^2}$ উপায়ে ।

∴ উইকেট রক্ষক দুইজন ভিন্ন দলে থাকার সম্ভাব্যতা $= \dfrac{20!}{(10!)^2} \times \dfrac{2!(11!)^2}{22!} = \dfrac{2\times(11)^2}{22\times 21} = \dfrac{11}{21}$

7. 1 হতে 50 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যার একটি দৈবভাবে তুলে নেয়া হল। সংখ্যাটি 3 অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, সংখ্যাটি যেকোনো সংখ্যা, 3 এর গুণিতক ও 5 এর গুণিতক হওয়ার ঘটনা যথাক্রমে S, A ও B ।
তাহলে, $n(S) = 50$

$50 \div 3 = 16\dfrac{2}{3} \quad \therefore n(A) = 16,\ 50 \div 5 = 10 \ \therefore n(B) = 10$

3 ও 5 এর ল.সা.গু. = 15 এবং $50 \div 15 = 3\dfrac{1}{3} \ \therefore n(A \cap B) = 3$

এখন, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 16 + 10 - 3 = 23$

∴ সংখ্যাটি 3 অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা $= P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(S)} = \dfrac{23}{50}$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ:

1. 1 থেকে 520 পর্যন্ত সংখ্যাগুলি থেকে দৈবচয়ন পদ্ধতিতে একটি সংখ্যা চয়ন করা হলে সংখ্যাটি অযুগ্ম ঘনসংখ্যা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? **[DU 10-11]**

Sol^n: $1^3, 3^3, 5^3, 7^3 < 520$; কিন্তু $9^3 > 520$ ∴ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা = 4/520 = 1/130.

2. 1 থেকে 99 পর্যন্ত সংখ্যাগুলি থেকে দৈবচয়ন পদ্ধতিতে একটি সংখ্যা নেয়া হল। সংখ্যাটি বর্গ সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা কত?