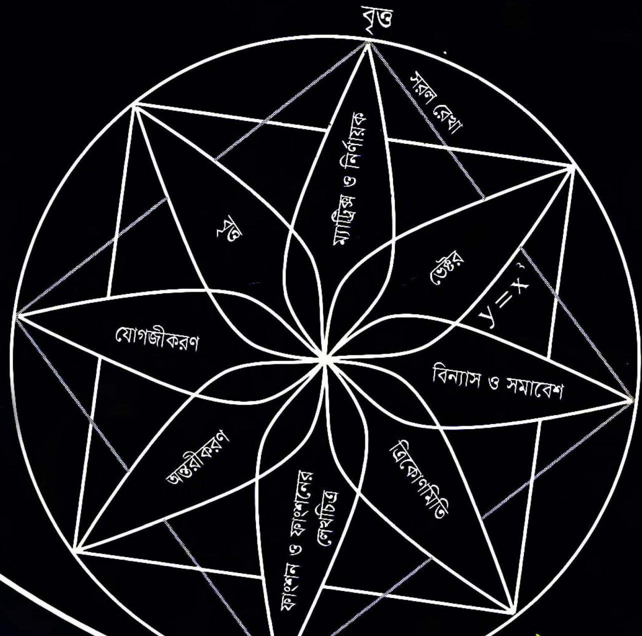
উচ্চতর গণিত

প্রথম পত্র

সমাধান

একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণি



মোঃ কেতাব উদ্দীন

A_R

উচ্চতর গণিত
প্রথম পত্র সমাধান

(লিখিত ও MCQ ভর্তি পরীক্ষার কৌশল সমৃদ্ধ ।)

মোঃ কেতাব উদ্দীন
বি.এসসি.(সম্মান) প্রথম শ্রেণি, এম.এসসি.(ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়)
সহকারী অধ্যাপক, রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর।
প্রাক্তন সহকারী অধ্যাপক, ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী।
প্রাক্তন প্রভাষক, মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ , মির্জাপুর।
রংপুর ক্যাডেট কলেজ , রংপুর ।

প্রকাশনায় ঃ

তারীফ-নাজিম, ঢাকা ।

মোবাইল : ০১৯১২৫৮৩৩৭৬

প্রথম প্রকাশ : জুন, ২০১৩

প্রথম সংস্করণ: ২০১৪

দ্বিতীয় সংস্করণ: মে, ২০১৫

মূল্য ঃ ২৬০.০০ টাকা মাত্র।

কম্পিউটার কম্পোজ ও কভার ডিজাইন :

লেখক, মোঃ কেতাব উদ্দীন ।

মোবাইল : ০১৫৫৮৩৬৬৬১০ , ০১৬২০২১৩০২৫

মুদ্রণে : সাজু প্রিন্টিং প্রেস , ২৭ , সিরিশ দাস লেন, বাংলাবাজার , ঢাকা-১১০০

প্রাপ্তিস্থান : সাজু প্রিন্টিং প্রেস ও পাবলিকেশন

পরিচালনায় মোঃ কেতাব উদ্দীন

৩৮, বাংলাবাজার (৩য় তলা), ঢাকা-১১০০।

মোবাইল : ০১৭১৮৮১৪০৪৮, ০১৬৮৯১৯৩৬৪৩


BOIGHAR.COM
Please Give Us Some Credit When You Share Our Books!
Don't Remove This Page!
EXCLUSIVE
বই
SCAN
EDIT
ঘর
Visit Us at boighar.com
If You Don't Give Us Any Credits, Soon There ll Nothing Left To Be Shared!

বিস্‌মিল্লাহির রাহ্‌মানির রাহিম

লেখকের কথা

" উচ্চতর গণিত ১ম পত্রের সমাধান পুস্তকখানি মোঃ নজরুল ইসলাম ও মোঃ কেতাব উদ্দীন রচিত " উচ্চতর গণিত ১ম পত্র পুস্তকখানির সম্পূর্ণ সমাধান। সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি ও ক্যালকুলেটর ব্যবহারের অপূর্ব সমন্বয়ে অতি দ্রুত প্রশ্ন সমাধানের কৌশলসহ পুস্তকখানির প্রতিটি অধ্যায়ে বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ে ভর্তি পরীক্ষার গণিত MCQ সংযোজন করা হয়েছে। এর মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা এইচ.এস.সি. পরীক্ষার প্রস্তুতির সাথে সাথে ভর্তি পরীক্ষার পূর্ব-প্রস্তুতি নেওয়ার সুযোগ পাবে। পুস্তকখানি সকল ইঞ্জিনিয়ারিং বিশ্ববিদ্যালয় এবং ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ অন্যান্য বিশ্ববিদ্যালয়ে ভর্তি হতে ইচ্ছুক ছাত্র-ছাত্রীদের স্বপ্ন পূরণে সহায়ক ভূমিকা পালন করবে বলে আমার দৃঢ় বিশ্বাস।

এ বইয়ে একই ধরনের সমস্যা বিভিন্ন নিয়মে সমাধান করেছি যেন পুস্তকখানি একজন শিক্ষার্থীকে বিশ্ববিদ্যালয়ে ভর্তি পর্যন্ত যথাযথভাবে সাহায্য করতে পারে।

যাঁরা প্রত্যক্ষ ও পরোক্ষভাবে এ পুস্তকখানি প্রণয়নে সহযোগিতা করেছেন তাঁদের সকলের প্রতি কৃতজ্ঞতা প্রকাশ করছি। পরিশেষে যাদের প্রয়োজনের দিকে নজর রেখে মূলত এ পুস্তকখানি প্রণয়নে ব্রতী হয়েছি, পুস্তকখানি তাদের নিকট আদৃত হলেই আমার শ্রম সার্থক বলে মনে করব

নিবেদক

মোঃ কেতাব উদ্দীন।

উচ্চতর গণিত সমাধান

১ম পত্র

মো. কেতাব উদ্দিন

সূচিপত্র

1. (a) $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্স দুইটির সমষ্টি ও অন্তর নির্ণয় কর। [কু.'০৫;দি.'১১]

$$A + B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-4 & 4+6 & -1+2 \\ 0+1 & 1+3 & 3+7 \\ 5+5 & 4+4 & 8+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8+4 & 4-6 & -1-2 \\ 0-1 & 1-3 & 3-7 \\ 5-5 & 4-4 & 8-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

1(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

হলে, $7A - 5B$ নির্ণয় কর। [কু.'০২]

সমাধান ঃ $7A - 5B =$

$$7\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 7 & -7 \\ 14 & 21 & 28 \\ -28 & 35 & 42 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -20 & 30 \\ 10 & 0 & -35 \\ 15 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21-5 & 7+20 & -7-30 \\ 14-10 & 21-0 & 28+35 \\ -28-15 & 35-25 & 42-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 27 & -37 \\ 4 & 21 & 63 \\ -43 & 10 & 42 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

2(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **হলে,**

AB ও BA নির্ণয় কর। [য.'০৯]

সমাধান $AB = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4+12 & 0-6 \\ -12+10 & 0-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+0 & 24+0 \\ 2+3 & 12-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

2(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ হলে

দেখাও যে, $AB = BA = I_3$

[কু.'০৮; সি.'০৫, '১০; য.'০৮; ঢা.'১০; চ.'১২; মা.'১১]

প্রমাণ ঃ $AB = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3-8+6 & 6-20+14 & -6+16-10 \\ -2+2+0 & -4+5+0 & 4-4+0 \\ -1-2+3 & -2-5+7 & 2+4-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-4+2 & -4+2+2 & 2+0-2 \\ 6-10+4 & -8+5+4 & 4+0-4 \\ 9-14+5 & -12+7+5 & 6+0-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$\therefore AB = BA = I_3$ (Showed)

2(c) $A=\begin{bmatrix}2&0&-1\\5&1&0\\0&1&3\end{bmatrix}$ **এবং** $B=\begin{bmatrix}3&-1&1\\-15&6&-5\\5&-2&2\end{bmatrix}$ **হলে দেখাও যে, AB = BA** [ঢা.'০৫; চ.'০৮]

প্রমাণ : $AB=\begin{bmatrix}2&0&-1\\5&1&0\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1&1\\-15&6&-5\\5&-2&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}6-0-5&-2+0+2&2+0-2\\15-15+0&-5+6+0&5-5+0\\0-15+15&0+6-6&0-5+6\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}3&-1&1\\-15&6&-5\\5&-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&-1\\5&1&0\\0&1&3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}6-5+0&0-1+1&-3+0+3\\-30+30+0&0+6-5&15+0-15\\10-10+0&0-2+2&-5+0+6\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=BA$ (Showed)

3(a) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ **এবং** $B=\begin{bmatrix}0&2\\1&2\\0&-1\end{bmatrix}$ **হলে,**

(i) AB ও BA নির্ণয় কর।

[রা.'০৮ ; সি.'১২,'১৪; চ.'১০; ব.'১২;দি.'১৩; মা.'১২]

(ii) দেখাও যে, AB ≠ BA

[য.'০৭; ব.'০৭; ঢা.'০৮; সি.'১২]

(i) সমাধান : $AB=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\1&2\\0&-1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0+2+0&2+4-3\\0+5+0&8+10-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\5&12\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}0&2\\1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0+8&0+10&0+12\\1+8&2+10&3+12\\0-4&0-5&0-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&10&12\\9&12&15\\-4&-5&-6\end{bmatrix}$

3(b) $A=\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}$ **এবং** $B=\begin{bmatrix}1&-2&0\\4&5&-3\end{bmatrix}$ **হলে, AB নির্ণয় কর।** [ব.'০৩]

সমাধান : $AB=\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&0\\4&5&-3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2+4&-4+5&0-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&1&-3\end{bmatrix}$

(Ans.)

3(c) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$ **এবং** $C=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$ **হলে,**

(i) AB এবং BC নির্ণয় কর। [ব. মা.'০৯;ব.'১৩]

(ii) দেখাও যে, (AB)C = A(BC) [য.'০৪]

(i) সমাধান : $AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4+4&3+2\\12+8&9+4\\0+2&0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&5\\20&13\\2&1\end{bmatrix}$ (Ans.)

$BC=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4+6&8+9\\2+2&4+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&17\\4&7\end{bmatrix}$ (Ans.)

(ii) প্রমাণ : $AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4+4&3+2\\12+8&9+4\\0+2&0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&5\\20&13\\2&1\end{bmatrix}$

$BC=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4+6&8+9\\2+2&4+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&17\\4&7\end{bmatrix}$

এখন $(AB)C=\begin{bmatrix}8&5\\20&13\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 8+10 & 16+15 \\ 20+26 & 40+39 \\ 2+2 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 31 \\ 46 & 79 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+8 & 17+14 \\ 30+16 & 51+28 \\ 0+4 & 0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 31 \\ 46 & 79 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$\therefore (AB)C = A(BC)$ (Showed)

4(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **এবং** $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ **হলে দেখাও যে, (AB)C = A(BC)** **[ঢা.'০২; য.'০৬]**

প্রমাণ ঃ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+2 & 3+0 & 0+1 \\ 0+4 & 0+0 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9+0 \\ 4+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

এখন, $(AB)C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6+9+1 \\ 8+0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11+5 \\ 0+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$(AB)C = A(BC)$ (Showed)

4(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ও $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

হলে, (i) AB এবং AC নির্ণয় কর।

(ii) দেখাও যে, AB + AC = A (B + C).

(i) সমাধান ঃ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4-3 \\ 0+5+0 & 8+10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+0+9 & 2+8+18 \\ -4+0+18 & 8+20+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$$

(ii) প্রমাণ ঃ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4-3 \\ 0+5+0 & 8+10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+0+9 & 2+8+18 \\ -4+0+18 & 8+20+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$$

$$B + C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0-1 & 2+2 \\ 1+0 & 2+4 \\ 0+3 & -1+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

এখন, $AB + AC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+8 & 3+28 \\ 5+14 & 12+64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 31 \\ 19 & 76 \end{bmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+2+9 & 4+12+15 \\ -4+5+18 & 16+30+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 31 \\ 19 & 76 \end{bmatrix}$$

$AB + AC = A(B + C)$ (Showed)

4. (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **হলে,**

(i) AB এবং BA নির্ণয় কর। **[সি.'০৭]**

(ii) দেখাও যে, AB ≠ BA **[য.'০৭; ব.'১১; দি.'১৩]**

(i) সমাধান ঃ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4-3 \\ 0+5+0 & 8+10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$ Ans

$BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+8 & 0+10 & 0+12 \\ 1+8 & 2+10 & 3+12 \\ 0-4 & 0-5 & 0-6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

(ii) প্রমাণ ঃ $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$ এবং

$BA = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

$AB \neq BA$ (Showed)

4(d) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ ও $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ হলে, (i) দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$ [কু.'১২]
(ii) $(AB)C$ নির্ণয় কর।
[রা.'১১,'১৩; ব.,য.'১০; ঢা.'১১,'১৩; দি.'১২]

(i) প্রমাণ ঃ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+12-3 \\ 16+30-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}$

$BC = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 8 & -20 & 24 \\ 6 & 12 & -30 & 36 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

$(AB)C = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$

$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 8 & -20 & 24 \\ 6 & 12 & -30 & 36 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+12-3 & 8+24-6 & -20-60+15 & 24+72-18 \\ 16+30-6 & 32+60-12 & -80-150+30 & 96+180-36 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB)C = A(BC)$ (Showed)

(ii) সমাধান ঃ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+12-3 \\ 16+30-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}$

$(AB)C = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$ (Ans.)

4(e) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ হলে, দেখাও যে, $AB \neq BA$. [দি.'১০]

সমাধান ঃ $AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2-3 & -4-4 & -10+0 \\ 1+0 & -2+0 & -5+0 \\ -3+12 & 6+16 & 15+0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2-2+15 & -1+0-20 \\ 6+4+0 & -3+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$

$AB \neq BA$ (Showed)

5.(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ **হলে A^2 এবং A^3 নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $A^2 + 2A - 11I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [ব.'০৮ রা.'০৭,'১২; ঢা.'০৯; চ.'০৯; দি.'০৯,'১৪; মা.'১৩]**

সমাধান ঃ $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+8 & 2-6 \\ 4-12 & 8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$

$A^3 = A.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9-16 & -4+34 \\ 36+24 & -16-51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$

এখন, $A^2 + 2A - 11I$

$= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 11\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9+2-11 & -4+4+0 \\ -8+8+0 & 17-6-11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

অতএব $A^2 + 2A - 11I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ **হলে, $A^2 - 5A + 6I$ নির্ণয় কর ; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [ঢা.'০৭; সি. '০৯; ব.'১২]**

সমাধান ঃ $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9+10 & 6-2 \\ 15-5 & 10+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$

এখন, $A^2 - 5A + 6I$

$= \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 19-15+6 & 4-10+0 \\ 10-25+0 & 11+5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -15 & 22 \end{bmatrix}$

(Ans.)

5(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **হলে, $A^2 - 4A - 5I$ নির্ণয় কর ; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$**

[কু.'০৭,'১৩; সি.'১১; চ.'১৩; যা.'১৪; [illegible] '০৫-০৬]

সমাধান ঃ $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

এখন $A^2 - 4A - 5I$

$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -8 & -8 \\ -8 & -4 & -8 \\ -8 & -8 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9-4-5 & 8-8+0 & 8-8+0 \\ 8-8+0 & 9-4-5 & 8-8+0 \\ 8-8+0 & 8 & 9-4-5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (Ans.)

5(d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

হলে, $A^2 - B^2$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $A^2 = A.A$

$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1+3-5 & & 1+5-5 \\ -3-9+25 & 3+9-25 & -3-15+25 \\ -5-15+25 & 5+15-25 & -5-25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 13 & -13 & 7 \\ 5 & -5 & - \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+4-3 & 0-12+12 & 0-12+12 \\ 0-3+3 & 4+9-12 & 3+9-12 \\ 0+4-4 & -4-12+16 & -3-12+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^2 - B^2$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 13 & -13 & 7 \\ 5 & -5 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 13 & -14 & 7 \\ 5 & -5 & -6 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

6. (a) সমাধান : মনে করি, P ও Q যথাক্রমে বইয়ের সংখ্যার ম্যাট্রিক্স ও লাভ ম্যাট্রিক্স। তাহলে,

$P = [100 \;\; 125 \;\; 110]$,

$$Q = \begin{bmatrix} 70.00-60.00 \\ 102.00-90.00 \\ 96.00-85.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.00 \\ 12.00 \\ 11.00 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ মোট লাভ $= P \times Q$

$$= [100 \;\; 125 \;\; 110] \times \begin{bmatrix} 10.00 \\ 12.00 \\ 11.00 \end{bmatrix}$$

$= [1000.00 + 1500.00 + 1210.00]$

$\therefore$ মোট লাভ $= 3710.00$ টাকা

6(b) সমাধান : মনে করি, P ও Q যথাক্রমে বিক্রীত কলমের সংখ্যার ম্যাট্রিক্স ও লাভ ম্যাট্রিক্স। তাহলে,

$$P = \begin{bmatrix} 140 & 155 & 132 \\ 130 & 100 & 148 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1.50 \\ 2.00 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

মোট লাভ $= P \times Q$

$$\begin{bmatrix} 140 & 155 & 132 \\ 130 & 100 & 148 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.50 \\ 2.00 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 210.00 + 310.00 + 165.00 \\ 195.00 + 200.00 + 185.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 685.00 \\ 580.00 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ মোট লাভ $= (685.00 + 580.00)$ টাকা

$= 1265.00$ টাকা

নির্ণায়ক

প্রশ্নমালা -IB

1(a) প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি কর্ণ, স্কেলার ও অভেদক ম্যাট্রিক্স।

(b) B ম্যাট্রিক্সটির ক্রম 2×3 $\therefore$ Ans. B

(c) $3B = \begin{bmatrix} 3\times1 & 3\times3 & 3\times0 \\ 3\times2 & 3\times0 & 3\times1 \end{bmatrix}$ Ans. B

(d) $A - 2C = \begin{bmatrix} 1-2 & -1-0 \\ 0-0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) A এর ক্রম = A এর সারি সংখ্যা $\times$ B এর কলাম সংখ্যা $= 2\times3$ Ans. B

(f) $A^{-1} = \dfrac{1}{2-0}\begin{vmatrix} 2 & -(-1) \\ -0 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & z \\ y & -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & z \\ y & -3 \end{bmatrix}$

$(x, y, z) = (3, 4, 3)$; Ans. B

(h) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের ৩য় সারি ২য় সারির তিনগুণ বলে নির্ণায়কের মান শূন্য। $\therefore$ Ans. C.

(i) (i) $A^{-1} = \dfrac{1}{5+6}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(ii) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} a-4 & 8 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বলে

$\begin{vmatrix} a-4 & 8 \\ 2 & a+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 8 - 8 = 0$

$\Rightarrow a^2 - 2a - 16 = 0 \Rightarrow a \neq -4, -6$

$a = -4, -6$

Ans. A

1.(i) প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = \mathbf{p\,(p-1)^2\,(p^2-1)}$

[ঢা.'০৭,'১২; রা.'১১; কু.', য.'০৯; চ.'১২; রুয়েট'০৭-০৮]

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**= $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p & p^4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-p & p(1-p) & p^2 \\ 1-p^2 & p^2(1-p^2) & p^4 \end{vmatrix}$

$[c_1 - c$ এবং $c_2 - c_3]$

$= 1\{(1-p)p^2(1-p^2) - p(1-p)(1-p^2)\}$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে]

$= (1-p)(1-p^2)(p^2 - p)$

$= (1-p)(1-p^2)\,p\,(p-1)$

$= p(p-1)^2(p^2-1) =$ R.H.S. (Proved)

1(i)(b) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{(a-b)^3}$ [ঢা.'০১; সি.'০৩]

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**= $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a(a-b) & b(a-b) & b^2 \\ a-b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$[c_1 - c_2$ এবং $c_2 - c_3]$

$= 1\{a(a-b)(a-b) - b(a-b)(a-b)\}$

[শেষ সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$= (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3 =$ R.H.S.

(Proved)

1(i)(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

[য.'০৩;চুয়েট'০৫-০৬]

L.H.S.= $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2+ca-bc & b^2-c^2+ab-ca & c^2-ab \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2$ এবং $c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1\{(a-b)(b^2-c^2+ab-ca)$

$- (b-c)(a^2-b^2+ca-bc)\}$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$= (a-b)\{(b-c)(b+c) + a(b-c)\}$

$- (b-c)\{(a-b)(a+b) + c(a-b)\}$

$= (a-b)(b-c)(a+b+c) - (a-b)(b-c)$

$(a+b+c) = 0 =$ R.H.S. (Proved)

1(i)(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = \boldsymbol{xy}$ [ব.'০১]

প্রমাণঃ**L.H.S.**= $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -x & x & 1 \\ 0 & -y & 1+y \end{vmatrix}$

$[c_1 - c_2, c_2 - c_3]$

$= 1\{xy - 0\} = xy =$ R.H.S. (Proved)

1(i) (e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

$(a+b+c)$ [চ.'০৫; ব.'১০]

প্রমাণ ঃ L.H.S.= $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & \end{vmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{bmatrix}$$

$[c_1 - c_2$ এবং $c_2 - c_3]$

$= 1\{(a-b)(b^3-c^3) - (b-c)(a^3-b^3)\}$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$= (a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2)$

$\quad (b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$(a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2-a^2-ab-b^2)$

$= (a-b)(b-c)\{b(c-a)+(c-a)(c+a)\}$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) =$ R.H.S.

(Proved)

1(i)(f) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ **[চ.'১০]**

L.H.S.$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

$[r_1 - r_2, r_2 - r_3]$

$= 1\{(a-b)(b^2-c^2) - (a^2-b^2)(b-c)\}$

[১ম কলাম বরাবর বিস্তার করে ।]

$= (a-b)(b-c)(b+c) - (a-b)(a+b)(b-c)$

$= (a-b)(b-c)(b+c-a-b)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)$

1(i)(g) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

প্রমাণ : L.H.S. $= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & & 1 \\ (c & b^2 & 1 \\ (& & \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 - c_2]$

$= \begin{vmatrix} (b+c+a)(b+c-a) & a^2 & 1 \\ (c+a+b)(c+a-b) & b^2 & 1 \\ (a+b+c)(a+b-c) & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} b+c-a & a^2 & 1 \\ c+a-b & b^2 & 1 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} -2(a-b) & a^2-b^2 & 0 \\ -2(b-c) & b^2-c^2 & 0 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)$

$\begin{vmatrix} -2 & a+b & 0 \\ -2 & b+c & 0 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)\{1.(-2b-2c$
$+2a+2b)$

$= -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

$=$ R.H.S. (Proved)

1(i)(h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$

$= (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

প্রমাণ : L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & & \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \\ x^3-y^3 & y^3-z^3 & z^3 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2$ এবং $]$

$= 1\{(x-y)(x+y)(y-z)(y^2+yz+$
$-(y-z)(y+z)(x-y)(x^2+xy+y$

$= (x-y)(y-z)(xy^2+xyz+xz^2+$
$y^2z+yz^2-x^2y-xy^2-y^3-zx^2-xy$
$-y^2z)$

$= (x-y)(y-z)(xz^2+yz^2 \quad x^2 \quad)$

$= (x-y)(y$

$= (x \quad)(y$

= R.H.S. (Proved)

2. বিস্তার না করে প্রমাণ কর ঃ

(a) $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$

[ঢা.'০৯; য.'১৩; কুয়েট'০৯-১০]

প্রমাণ ঃ L.H.S. = $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & abc & abc(b+c) \\ b & abc & abc(c+a) \\ c & abc & abc(a+b) \end{vmatrix}$

$= \frac{abc.abc}{abc}\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$=$ abc $\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$ = M.H.S.

এখন, abc $\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$=$ abc $\begin{vmatrix} a & 1 & a+b+c \\ b & 1 & a+b+c \\ c & 1 & a+b+c \end{vmatrix}$ $[c_3' = c_3 + c_1]$

$=$ abc$(a+b+c)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$=$ abc $(a+b+c).0 = 0$ = R.H.S.

[দুইটি কলাম একই ।]

2(b) $\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

প্রমাণ ঃ L.H.S. = $\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y-b \\ 1 & x_1 & y_1-b \\ 1 & x_2 & y_2-b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & y-b \\ 1 & a & y_1-b \\ 1 & a & y_2-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & b \\ 1 & x_1 & b \\ 1 & x_2 & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & y-b \\ 1 & 1 & y_1-b \\ 1 & 1 & y_2-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \text{b}\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} - \text{a}.0$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \text{b}.0 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ = R.H.S.

(Proved)

2(c) $\begin{vmatrix} 1 & x_1+a & y_1+b \\ 1 & x_2+a & y_2+b \\ 1 & x_3+a & y_3+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

[সি.'০৭;চ.'১১]

প্রমাণ ঃ L.H.S. = $\begin{vmatrix} 1 & x_1+a & y_1+b \\ 1 & x_2+a & y_2+b \\ 1 & x_3+a & y_3+b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1+b \\ 1 & x_2 & y_2+b \\ 1 & x_3 & y_3+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & y_1+b \\ 1 & a & y_2+b \\ 1 & a & y_3+b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & b \\ 1 & x_2 & b \\ 1 & x_3 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1+b \\ 1 & 1 & y_2+b \\ 1 & 1 & y_3+b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \text{b}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 \\ 1 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + \text{a}.0$

$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \text{b}.0 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ = R.H.S.

2(d) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

প্রমাণ ঃ L.H.S.= $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b & c & a+b \\ q & r & p+q \\ y & z & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a+b \\ q & p & p+q \\ y & x & x+y \end{vmatrix}$

$+ \begin{vmatrix} c & c & a+b \\ r & r & p+q \\ z & z & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & b \\ q & r & q \\ y & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a \\ q & p & p \\ y & x & x \end{vmatrix}$

$+ \begin{vmatrix} b & a & b \\ q & p & q \\ y & x & y \end{vmatrix} + 0 + \begin{vmatrix} c & a & a \\ r & p & p \\ z & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$

$= - \begin{vmatrix} b & a & c \\ q & p & r \\ y & x & z \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0$

$+ (-) \begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix}$

$= (-)(-) \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + (-)(-) \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$= 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ = R.H.S.(Proved)

3. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

[চ.'০০; ব.'০৬; য.'০৭; দি.'০৯.'১১]

L.H.S.

$= \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_3)]$

$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & a+b+c & -(a+b+c) \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= 2(a+b+c) \cdot 1\{-(a+b+c) \times -(a+b+c)\}$

$= 2(a+b+c)^3$ = R.H.S.

3(b) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + x_3$

প্রমাণ ঃ L.H.S.= $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3 \\ 1+x_1+x_2+x_3 & 1+x_2 & x_3 \\ 1+x_1+x_2+x_3 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_3)]$

$= (1+x_1+x_2+x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1+x_2 & x_3 \\ 1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$

$= (1+x_1+x_2+x_3) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= (1+x_1+x_2+x_3).1(1-0)$

$= 1 + x_1 + x_2 + x_3$

3(c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\,(a-b)(b-c)(c-a)$

[সি.'০৮; মা.বো.'০৯; ব.'১২]

$$\text{L.H.S.}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \text{bc}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \text{abc}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$= \text{abc}.1\{(a-b)(b^2-c^2) - (b-c)(a^2-b^2)\}$

$= \text{abc}\{(a-b)(b-c)(b+c) - (a-b)(b-c)(a+b)\}$

$= \text{abc}\,(a-b)(b-c)(b+c-a-b)$

$= \text{abc}\,(a-b)(b-c)(c-a)$

= R.H.S. (Proved)

3(d) $\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$ [ঢা.'০১; রুয়েট'১০-১১]

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.}=\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a-b & b-c & c+x \\ a-b & b-c & c+y \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_3)]$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c+x \\ 1 & 1 & c+y \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & x-y \\ 1 & 1 & c+y \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2]$

$= (a-b)(b-c)(x-y)(b+c-a-b)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$

= R.H.S. (Proved)

3.(e) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} = a^2(a-1)^2(a^2-1)$

[চ.'০৩ ; রা .'০৫]

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.}=\begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} = \text{a}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix}$

$$= \text{a}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-a & a(1-a) & a^2 \\ (1-a)(1+a) & a^2(1-a)(1+a) & a^4 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$$= a^2(1-a)^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1+a & a(1+a) & a^4 \end{vmatrix}$$

$= a^2(1-a)^2\{a(1+a)-(1+a)\}$

$= a^2(1-a)^2(a+a^2-1-a)$

$= a^2(1-a)^2(a^2-1)$ = R.H.S. (Proved)

3(f) $\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ [য.'০০]

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.}=\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & a+b+c & c+a \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix} \quad [c_2' = c_2 + c_3]$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$= 2(a+b+c).\,0 = 0$ = R.H.S.

[∴ দুইটি কলাম একই ।]

3(g) $\begin{vmatrix} 3 & a & b+c \\ 3 & b & c+a \\ 3 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ [কু.'০৫]

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.}=\begin{vmatrix} 3 & a & b+c \\ 3 & b & c+a \\ 3 & c & a+b \end{vmatrix}$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & a+b+c & c+a \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix} \quad [c_2' = c_2 + c_3]$$

$$= 3(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$= 3(a + b + c).\ 0 = 0 = $ R.H.S.

[∴ দুইটি কলাম একই ।]

3(h) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ $= (a+b+c)^3$ **[রা.'০৪; বুয়েট'১১-১২]**

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 + (r_2 + r_3)]$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ (a+b+c) & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & (a+b+c) & c-a-b \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= (a + b + c).1(a + b + c)^2$

$= (a + b + c)^3 = $ R.H.S. (Proved)

4.(a) $\begin{vmatrix} \log x & \log y & \lg z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix} = 0$

[ব.'১৩; কুয়েট'০৭-০৮; বুয়েট'০৯-১০; রুয়েট'১১-১২]

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} \log x & \log y & \lg z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \log x - \log y & \log y - \log z & \lg z \\ \log 2x - \log 2y & \log 2y - \log 2z & \log 2z \\ \log 3x - \log 3y & \log 3y - \log 3z & \log 3z \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$$= \begin{vmatrix} \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \lg z \\ \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \log 2z \\ \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \log 3z \end{vmatrix}$$

$$= \log\frac{x}{y}\log\frac{y}{z}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lg z \\ 1 & 1 & \log 2z \\ 1 & 1 & \log 3z \end{vmatrix}$$

$$= \log\frac{x}{y}\log\frac{y}{z} \times 0 = 0 = \text{R.H.S.}$$

4(b) $\begin{vmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos 2\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = 2(\sin\alpha - \sin\beta)$ $(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$ **[ব.'০৩]**

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos 2\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos 2\alpha - \cos 2\beta & \sin\alpha - \sin\beta \\ 0 & \cos 2\beta - \cos 2\gamma & \sin\beta - \sin\gamma \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= 1\{(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)(\sin\beta - \sin\gamma) -$
$(\sin\alpha - \sin\beta)(\cos 2\beta - \cos 2\gamma)$

$= (1 - 2\sin^2\alpha - 1 + 2\sin^2\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$-(\sin\alpha - \sin\beta)(1 - 2\sin^2\beta - 1 + 2\sin^2\gamma)$

$= -2(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$+ 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin^2\beta - \sin^2\gamma)$

$= -2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$+ 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\beta + \sin\gamma)$

$= 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$(-\sin\alpha - \sin\beta + \sin\beta + \sin\gamma)$

$= 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$

$= $ R.H.S. (Proved)

5. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

[চ.'০২,'০৪; সি.'০৬,'০৯; রা.'০৮]

প্রমাণ ঃ L.H.S.= $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$

$= abc\begin{vmatrix} -a & a & a \\ b & -b & b \\ c & c & -c \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 0 & 2a & a \\ 0 & 0 & b \\ 2c & 0 & -c \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= abc\{2c(2ab - 0)\} = abc.4abc$
$= 4a^2b^2c^2 = $ R.H.S. (Proved)

5(b) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

[কু.'০৪,'১২]

প্রমাণ ঃ L.H.S. = $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a+b^2 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} ab^2+ac^2 & ab^2 & c^2a \\ a^2b & bc^2+a^2b & bc^2 \\ ca^2 & b^2c & ca^2+b^2c \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc} abc\begin{vmatrix} b^2+c^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & c^2+a^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & b^2 & c^2 \\ -2c^2 & c^2+a^2 & c^2 \\ -2b^2 & b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - (c_2 + c_3)]$

$= 2c^2(a^2b^2 + b^4 - b^2c^2) -$
$2b^2(b^2c^2 - c^4 - c^2a^2)$
$= 2b^2c^2(a^2 + b^2 - c^2) - b^2c^2(b^2 - c^2 - a^2)$
$= 2b^2c^2(a^2 + b^2 - c^2 - b^2 + c^2 + a^2\}$
$= 2b^2c^2.2a^2 = 4a^2b^2c^2 = $ R,H.S. (Proved)

5.(c) $\begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$

[য.'০৪,'০৮; রা.'১৩]

প্রমাণ ঃ L.H.S.= $\begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix}$

$= xyz\begin{vmatrix} x & z & x+z \\ x+y & y & x \\ y & y+z & z \end{vmatrix}$

$= xyz\begin{vmatrix} -2z & z & x+z \\ 0 & y & x \\ -2z & y+z & z \end{vmatrix}$

$= xyz\begin{vmatrix} 0 & -y & x \\ 0 & y & x \\ -2z & y+z & z \end{vmatrix}$ $[r_1' = r_1 - r_3]$

$= xyz(-2z)(-xy - xy) = -2xyz^2(-2xy)$
$= 4x^2y^2z^2 = $ R.H.S. (Proved)

5(d) $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$=(1+a^2+b^2)^3$

[রা.'০৯; য.'০২; সি.'১০,'১৩; কুয়েট'০৩-০৪, ১১-১২]

L.H.S.= $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2+2b^2 & 2ab-2ab & -2b \\ 2ab-2ab & 1-a^2+b^2+2a^2 & 2a \\ 2b-b+a^2b+b^3 & -2a+a-a^3-ab^2 & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - bc_3, c_2' = c_2 + ac_3.$

$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -2b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & 2a \\ b(1+a^2+b^2) & -a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= (1+a^2+b^2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & 2a \\ b & -a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= (1+a^2+b^2)^2\{1(1-a^2-b^2+2a^2)+b(0+2b\}$
$= (1+a^2+b^2)^2(1+a^2-b^2+2b^2)$
$= (1+a^2+b^2)^3 =$ R.H.S. (Proved)

5(e) $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = (b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2)$

[য.,ঢা.'১০; দি., য., রা.,সি.'১২;চ.'১৩]

প্রমাণ : L.H.S. $= \begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{xy}\begin{vmatrix} ax & bx & ax^2+bxy \\ by & cy & bxy+cy^2 \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{xy}\begin{vmatrix} 0 & 0 & ax^2+2bxy+cy^2 \\ by & cy & bxy+cy^2 \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 + (r_2 - r_3)]$

$= \frac{1}{xy}(ax^2+2bxy+cy^2)$
$(b^2xy + bcy^2 - acxy - bcy^2)$

$= \frac{1}{xy}(ax^2+2bxy+cy^2)(b^2-ac)xy$

$= (b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2) =$ R.H.S.

5(f) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$ [চ.'০৬]

প্রমাণ : L.H.S.$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2-b^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2-c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 - c_2]$

$= \begin{vmatrix} (a+b+c)(b+c-a) & a^2 & bc \\ (a+b+c)(c+a-b) & b^2 & ca \\ (a+b+c)(a+b-c) & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} b+c-a & a^2 & bc \\ c+a-b & b^2 & ca \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -2(a-b) & (a-b)(a+b) & -c(a-b) \\ -2(b-c) & (b-c)(b+c) & -a(b-c) \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)$
$\begin{vmatrix} 0 & -(c-a) & -(c-a) \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2]$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)$
$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & a+b+c & -a \\ a+b-c & c^2-ab & ab \end{vmatrix}$

$[c_2' = c_2 - c_3]$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).(-1)$
$[-2c^2+2ab-\{(a+b)^2-c^2\}]$
$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)(-1)$
$(-2c^2+2ab-a^2-b^2-2ab+c^2)$
$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$
$(-1)(-1)(a^2+b^2+c^2)$
$= (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$
$=$ R.H.S. (Proved)

6.(a) $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$ [ব.'১১]
$= 4(a+b)(b+c)(c+a)$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $=\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$

$= -2a\{4bc-(b+c)^2\}-(a+b)\{-2c(b+a)$
$-(b+c)(c+a)\}+(a+c)\{(a+b)(b+c)+$
$2b(c+a)\}$
$= -8abc+2a(b+c)^2+2c(a+b)^2+$
$2(a+b)(b+c)(c+a)+2b(c+a)^2$
$= -8abc+2a(b^2+2bc+c^2)+$
$2c(a^2+2ab+b^2)+2b(c^2+2ca+a^2)+$
$2(a+b)(b+c)(c+a)$
$= -8abc+2ab^2+4abc+2ac^2+2ca^2+$
$4abc+2b^2c+2bc^2+4abc+2a^2b+$
$2(a+b)(b+c)(c+a)$
$=2\{ab^2+2abc+ac^2+ca^2+a^2b+b^2c$
$+bc^2\}+2(a+b)(b+c)(c+a)$
$=2\{a(b+c)^2+a^2(b+c)+bc(b+c)\}+$
$2(a+b)(b+c)(c+a)$
$=2(b+c)(ab+ca+a^2+bc)+$
$2(a+b)(b+c)(c+a)$
$=2(b+c)\{a(c+a)+b(c+a)\}+$
$2(a+b)(b+c)(c+a)$
$=2(b+c)(c+a)(a+b)+2(a+b)(b+c)(c+a)$
$=4(a+b)(b+c)(c+a)=$ R.H.S.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে করি ,

$D=\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$

$a+b=0$ i.e. $b=-a$ বসিয়ে আমরা পাই ,

$D=\begin{vmatrix} -2a & 0 & a+c \\ 0 & 2a & -a+c \\ c+a & c-a & -2c \end{vmatrix}$

$= -2a(-4ac-(c-a)^2\}+(c+a)\{0-2a(c+a)\}$
$=2a(c+a)^2-2a(c+a)^2=0$
$\therefore (a+b)$, D এর একটি উৎপাদক ।

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $(b+c)$ এবং $(c+a)$ নির্ণায়ক D এর উৎপাদক ।

যেহেতু D একটি তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক এবং $(a+b)(b+c)(c+a)$ একটি তৃতীয় ক্রমের উৎপাদক , সুতরাং D এর অপর একটি উৎপাদক k থাকতে পারে যা ধ্রুবক ।

$\therefore \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}=k(a+b)(b+c)(c+a)$

এখন, উভয় পক্ষে $a=b=c=1$ বসিয়ে আমরা পাই ,

$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}=k.2.2.2$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}=8k \Rightarrow 32=k=4$

$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}=4(a+b)(b+c)(c+a)$

6(b) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}=abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

প্রমাণ ঃ L.H.S.$=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} a(\frac{1}{a}+1) & b.\frac{1}{b} & c.\frac{1}{c} \\ a.\frac{1}{a} & b(\frac{1}{b}+1) & c.\frac{1}{c} \\ a.\frac{1}{a} & b.\frac{1}{b} & c(\frac{1}{c}+1) \end{vmatrix}$

$=abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$

$=abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c} \\ 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$

$[c_1'=c_1+(c_2+c_3)]$

$$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ 1(1-0)$

$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) =$ R.H.S. (Proved)

7. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ **নির্ণায়কে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক যথাক্রমে A_1, B_1, C_1 হলে, প্রমাণ কর যে, $a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1 = 0$.** [য.'০১; কু.'০৮,'০৯]

সমাধান ঃ $A_1 = a_1$ এর সহগুণক $= b_2c_3 - b_3c_2$

$B_1 = b_1$ এর সহগুণক $= -(a_2c_3 - a_3c_2)$

$C_1 = c_1$ এর সহগুণক $= a_2b_3 - a_3b_2$

L.H.S. $= a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1$

$= a_2(b_2c_3 - b_3c_2) + b_2\{-(a_2c_3 - a_3c_2)\} + c_2(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2 - a_2b_2c_3 + a_3b_2c_2 + a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

8. মান নির্ণয় কর ঃ

(a) সমাধান ঃ $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ [য.'০৫]

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -2z & x+z & z \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 - (c_2 + c_2)]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & -y \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix} \quad [r_1' = r_1 - r_2]$$

$= -2z(-xy - xy) = -2z(-2xy) = 4xyz$

8(b) সমাধান ঃ $\begin{vmatrix} b+c & b-c & c-b \\ a-c & c+a & c-a \\ a-b & b-a & a+b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2b & 0 & c-b \\ 2a & 2c & c-a \\ 0 & 2b & a+b \end{vmatrix} [c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$$

$$= 2.2 \begin{vmatrix} b & 0 & c-b \\ a & c & c-a \\ 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

$= 4\{b(ca + bc - bc + ab) + (c-b)(ab - 0)\}$

$= 4\{abc + ab^2 + abc - ab^2\}$

$= 4.2abc = 8abc$ (Ans.)

9. সমাধান কর :

(a) $\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$ [কু.'০৭; চ.'০৭]

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+9 & 4 & 2 \\ x+9 & 2+x & 3 \\ x+9 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_2)]$

$$\Rightarrow (x+9) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x+9) \begin{vmatrix} 0 & 2-x & -1 \\ 0 & x-1 & -(x+1) \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$\Rightarrow (x+9)\ 1.\{-(2-x)(x+1) + x - 1\} = 0$

$\Rightarrow (x+9)\ \{(x-2)(x+1) + x - 1\} = 0$

$\Rightarrow (x+9)\ (x^2 - x - 2 + x - 1) = 0$

$\Rightarrow (x+9)(x^2 - 3) = 0$

$\therefore x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

or, $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = -9, \pm\sqrt{3}$

9(b) $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ 1 & x-5 & 1 \\ -1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$ [কুয়েট'০৪-০৫]

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ x-3 & x-5 & 1 \\ x-3 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_3)]$

$\Rightarrow (x-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & x-5 & 1 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x-3)\begin{vmatrix} 0 & -x+6 & -2 \\ 0 & x-6 & -x+4 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$\Rightarrow (x-3)\{+(x-6)(x-4) + 2(x-6)\} = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x^2 - 10x + 24 + 2x - 12) = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x^2 - 8x + 12) = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x^2 - 6x - 2x + 8) = 0$

$\Rightarrow (x-3)\{x(x-6) - 2(x-6)\} = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-2)(x-6) = 0$

$x = 2, 3, 6$ (Ans.)

9(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$ [প্র.ভ.প.'০৪]

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-a & a-b & b \\ x^2-a^2 & a^2-b^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x-a)(a-b)(a+b) - (x-a)(x+a)(a-b) = 0$

$\Rightarrow (x-a)(a-b)(a+b-x-a) = 0$

$\Rightarrow (x-a)(x-b) = 0$ [এখানে $a - b \neq 0$]

$x = a, b$ (Ans.)

10. যদি x, y, z অসমান এবং $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ হয়, তাহলে দেখাও যে $xyz + 1 = 0$ [প্র.ভ.প.'৯০]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-y & (x-y)(x+y) & (x-y)(x^2+xy+y^2) \\ y-z & (y-z)(y+z) & (y-z)(y^2+yz+z^2) \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ $[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$\Rightarrow (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x+y & x^2+xy+y^2 \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & x-z & x^2-z^2+xy-yz \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

$[r_1'' = r_1' - r_2']$

$\Rightarrow (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & x-z & (x-z)(x+y+z) \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x-y)(y-z)(x-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y+z \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y+z \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

[x,y , z অসমান বলে $(x-y), (y-z), (x-z)$ এর কোনটি শূন্য হতে পারেনা ।]

$\Rightarrow -\{1 + z^3 - z^2(x+y+z)\} + z\{y^2 + yz + z^2 - (y+z)(x+y+z)\}$

$\Rightarrow -\{1 + z^3 - z^2x - yz^2 - z^3\} + z\{y^2 + yz + z^2 - xy - zx - y^2 - 2yz - z^2\} = 0$

$\Rightarrow -1 + z^2x + yz^2 + z(-xy - zx - yz) = 0$

$\Rightarrow -1 + z^2x + yz^2 - xyz - z^2x - yz^2 = 0$

$\Rightarrow -1 - xyz = 0$

$\therefore xyz + 1 = 0$ (Showed)

11(a) $\begin{bmatrix} a+3 & 6 \\ 5 & a-4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $\begin{bmatrix} a+3 & 6 \\ 5 & a-4 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী বলে,

$\begin{vmatrix} a+3 & 6 \\ 5 & a-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a+3)(a-4) - 30 = 0$

$\Rightarrow a^2 - a - 12 - 30 = 0 \Rightarrow a^2 - a - 42 = 0$

$\Rightarrow (a-7)(a+6) = 0 \Rightarrow a = -6, 7$

(b) $\begin{bmatrix} a-2 & 6 \\ 2 & a-3 \end{bmatrix}$ ম্যাটিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $\begin{bmatrix} a-2 & 6 \\ 2 & a-3 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী বলে,

$\begin{vmatrix} a-2 & 6 \\ 2 & a-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-2)(a-3) - 12 = 0$

$\Rightarrow a^2 - 5a + 6 - 12 \Rightarrow a^2 - 5a - 6 = 0$

$\Rightarrow (a-6)(a+1) = 0 \Rightarrow a = -1, 6$

12. বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর ঃ

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ **(d)** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

12.(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক

$|A| = 4 - 6 = -2$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = 4$, $A_{12} = -3$

$A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj }(A) = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (Ans.)

12(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক

$|A| = 6 - 5 = 1$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$

$A_{21} = -5$, $A_{22} = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj }(A) = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (Ans.)

12(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

$|A| = 3(0-15) - 4(-4-6) - 1(5-0)$
$= -45 + 40 - 5 = -10$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -15$,

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 10, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 11,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -10,$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -7,\ A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12,$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10, A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj }(A)$

$= \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -15 & 10 & 5 \\ 11 & -10 & -7 \\ 12 & -10 & -4 \end{bmatrix}^T$

$= \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -15 & 11 & 12 \\ 10 & -10 & -10 \\ 5 & -7 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3/2 & -11/10 & -6/5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 7/10 & 2/5 \end{bmatrix}$

[ক্যালকুলেটরের সাহায্যে উত্তর যাচাই করা যায়।]

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$|A| = 2(-4+1) + 1(2-1) - 1(-1+2)$

$= -6 + 1 - 1 = -6$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/6 & -5/6 & 1/2 \\ -1/6 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

13. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর :

সমাধান ঃ (a) দেওয়া আছে, $2x + 3y = 4$ **[চ.'০১]**

$x - y = 7$

ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5,$

$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 21 = -25,$

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 4 = 10$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-5} = 5,\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{10}{-5} = -2$

13(b) দেওয়া আছে, $x + y + z = 1$

$x + 2y + z = 2$

$x + y + 2z = 0$

ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(1 - 0) = 1$

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(0 + 1) = 1$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(2 - 1) = 1$

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(-1 - 0) = -1$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{1} = 1,\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{1} = 1,$

$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-1}{1} = -1$

13(c) দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x + 2y - z \\ 3x - y + 3z \\ 2x + 3y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$

$x + 2y - z = 5$

$3x - y + 3z = 7$

$2x + 3y + z = 11$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(-1 - 9) - 2(3 - 6) - 1(9 + 2)$

$= -10 + 6 - 11 = -15$

$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= 5(-1 - 9) - 2(7 - 33) - 1(21 + 11)$

$= -50 + 52 - 32 = -30$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(7 - 33) - 5(3 - 6) - 1(33 - 14)$

$= -26 + 15 - 19 = -30$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix}$$

$= \ 1(-11-21) - 2(33-14) + 5(9+2)$
$= -32 - 38 + 55 = -15$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-30}{-15} = 2, \ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-30}{-15} = 2,$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-15}{-15} = 1$$

14. সমাধান ঃ (a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11$

যেহেতু $|A|$ অশূন্য, সুতরাং A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

(b) প্রশ্নমালা IA এর 5(a) নং প্রশ্ন।

(c) A^{-1} নির্ণয় কর।

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = -3$, $A_{12} = -4$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj }(A) = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

15(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14+20+24 \\ 14+30+40 \\ 14+50+96 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 58 \\ 84 \\ 160 \end{bmatrix}$$

মোট লাভ = (58 + 84+160) = 302 টাকা।

(b) $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+2+3 & 2+6+15 & 3+10+36 \\ 1+3+5 & 2+9+25 & 3+15+60 \\ 1+5+12 & 2+15+60 & 3+25+144 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 23 & 49 \\ 9 & 36 & 78 \\ 18 & 77 & 172 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

(c) A ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক

$|A| = 1(36-25) - 2(12-5) + 3(5-3)$
$= 11 - 14 + 6 = 3$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 11,$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = -7, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = -9, \ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 9,$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3 \ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1,$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj }(A)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

16. সমাধান (a) A বর্গ ম্যাট্রিক্স এর নির্ণায়ক $|A|$ অশূন্য হলে A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} বিদ্যমান থাকবে।

আবার, A ম্যাট্রিক্স এর সারি সংখ্যা = 3. সুতরাং, B ম্যাট্রিক্স এর কলাম সংখ্যা 3 হলে AB বিদ্যমান থাকবে।

(b) প্রশ্নমালা IB এর 1(a) নং প্রশ্ন।

(c) p = 2 হলে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 2^2 & 2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$

$$A \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+y+z \\ x+2y+4z \\ x+4y+16z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x+y+z = 5, \ x+2y+4z = 7$
$x+4y+16z = 11$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -3 & -12 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= 12 - 6 = 6$$

$$D_x = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 4 \\ 11 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= 5(32-16) - 1(112-44) + 1(28-22)$$

$$= 80 - 68 + 6 = 18$$

$$D_y = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ 1 & 11 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -12 \\ 1 & 11 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= 24 - 12 = 12$$

$$D_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= 4 - 4 = 0$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{18}{6} = 3, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{12}{6} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{0}{6} = 0$$

নির্ণেয় সমাধান $x = 3, y = 2, z = 0$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

বিস্তার না করে প্রমাণ কর :

1(a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

প্রমাণ ঃ L.H.S.= $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ abc & abc & abc \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (-)(-)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

1(b) $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a}+b & \frac{1}{b}+c & \frac{1}{c}+a \end{vmatrix} = 0$ **[প্র.ভ.প.'১৪]**

প্রমাণ ঃ L.H.S.= $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a}+b & \frac{1}{b}+c & \frac{1}{c}+a \end{vmatrix}$

$$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a}+b & \frac{1}{b}+c & \frac{1}{c}+a \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & abc & abc \\ a.\frac{1}{a} & b.\frac{1}{b} & c.\frac{1}{c} \\ a(\frac{1}{a}+b) & b(\frac{1}{b}+c) & c(\frac{1}{c}+a) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+ab & 1+bc & 1+ca \end{vmatrix}$$

$= 0 =$ R.H.S. [দুইটি সারি একই।]

2(a) $\begin{vmatrix} x+a & a & a \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix} = x^2(x+a+b+c)$

প্রমাণ ঃ L.H.S.= $\begin{vmatrix} x+a & a & a \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 + (r_2 + r_3)]$

$$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -x & x & b \\ 0 & -x & x+c \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$=(x+a+b+c)(x^2-0)$

$=x^2(x+a+b+c) =$ R.H.S. (Proved)

2(b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = (a^3-1)^2$

প্রমাণ ঃ L.H.S.$=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1+a+a^2 & a & a^2 \\ 1+a+a^2 & 1 & a \\ 1+a+a^2 & a^2 & 1 \end{vmatrix} [c_1' = c_1 + (c_2 + c_3)]$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(a^2+a+1)\begin{vmatrix} 0 & a-1 & a(a-1) \\ 0 & 1-a^2 & a-1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= (a^2 + a + 1)1\{(a-1)^2 - a(a-1)(1-a)(1+a)\}$

$= (a^2 + a + 1)(a-1)^2(1 + a + a^2)$

$= (a^2 + a + 1)^2(a-1)^2 = (a^3 - 1)^2 =$ R.H.S.

(Proved)

3. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin A & \sin B & \sin C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix}$

$= \sin(A-B)+\sin(B-C)+\sin(C-A)$

$= -4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin A & \sin B & \sin c \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin A - \sin B & \sin B - \sin C & \sin C \\ \cos A - \cos B & \cos B - \cos C & \cos C \end{bmatrix}$$

$[c_1 - c_2, c_2 - c_3]$

$= (\sin A - \sin B)(\cos B - \cos C) -$
$(\sin B - \sin C)(\cos A - \cos B)$

$= \sin A \cos B - \sin A \cos C - \sin B \cos B$
$+ \sin B \cos C - \sin B \cos A + \sin B \cos B$
$+ \sin C \cos A - \sin C \cos B$

$= (\sin A \cos B - \cos A \sin B) + (\sin B \cos C$
$- \sin C \cos B) + (\sin C \cos A - \sin A \cos C)$

$= \sin(A-B) + \sin(B-C) + \sin(C-B)$

= M.H.S.

আবার, $(\sin A - \sin B)(\cos B - \cos C) -$
$(\sin B - \sin C)(\cos A - \cos B)$

$= 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\ 2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C-B}{2}$

$- 2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\ 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$

$= -4\sin\frac{A-B}{2}\ \sin\frac{B-C}{2}[\cos\frac{A+B}{2}\ \sin\frac{B+C}{2}$

$- \cos\frac{B+C}{2}\ \sin\frac{A+B}{2}]$

$= -4\sin\frac{A-B}{2}\ \sin\frac{B-C}{2}\ \cos(\frac{B+C}{2} - \frac{A+B}{2})$

$= -4\sin\frac{A-B}{2}\ \sin\frac{B-C}{2}\ \sin\frac{C-A}{2} =$ R.H.S.

L.H.S. = M.H.S. = R.H.S. (Proved)

4. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix} = 0$

প্রমাণ ঃ L.H.S.= $\begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ a-b & b-c & c-b \\ a-b & b-c & 0 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-a \\ 1 & 1 & c-b \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c) \times 0$ [$\because$ দুইটি কলাম একই ।]

$= 0 =$ R.H.S. (Proved)

4(b) $\begin{vmatrix} -bc & bc+b^2 & bc+c^2 \\ ca+a^2 & -ca & ca+c^2 \\ ab+a^2 & ab+b^2 & -ab \end{vmatrix} = (bc+ca+ab)^3$

প্রমাণ ঃ L.H.S.= $\begin{vmatrix} -bc & bc+b^2 & bc+c^2 \\ ca+a^2 & -ca & ca+c^2 \\ ab+a^2 & ab+b^2 & -ab \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} -abc & abc+ab^2 & abc+ac^2 \\ abc+a^2b & -abc & abc+bc^2 \\ abc+a^2c & abc+b^2c & -abc \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc} abc \begin{vmatrix} -bc & ca+ab & ab+ac \\ bc+ab & -ca & ab+bc \\ bc+ca & ca+bc & -ab \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ab+bc+ca & ab+bc+ca & ab+bc+ca \\ bc+ab & -ca & ab+bc \\ bc+ca & ca+bc & -ab \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 + (r_2 + r_2)]$

$= (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc+ab & -ca & ab+bc \\ bc+ca & ca+bc & -ab \end{vmatrix}$

$= (ab+bc+ca)$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ bc+ab+ca & -(ca+ab+ca) & ab+bc \\ 0 & ca+bc+ab & -ab \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2,\ c_2' = c_2 - c_3]$

$= (ab+bc+ca).1\{(ab+bc+ca)(ab+bc+ca) - 0\}$

$= (ab+bc+ca)^3 = 0 =$ R.H.S.

4(c) $\begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2$

L.H.S.= $\begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & b^2-ca & c^2-ab \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & a^2-bc & b^2-ca \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\begin{vmatrix} 1 & b^2-ca & c^2-ab \\ 1 & a^2-bc & b^2-ca \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$ (i)

এখন, $\begin{vmatrix} 1 & b^2-ca & c^2-ab \\ 1 & a^2-bc & b^2-ca \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

$=$

$\begin{vmatrix} 0 & -(a-b)(a+b+c) & -(b-c)(a+b+c) \\ 0 & -(c-a)(c+a+b) & -(a-b)(a+b+c) \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= \begin{vmatrix} 0 & -(a-b)(a+b+c) & -(b-c)(a+b+c) \\ 0 & -(c-a)(a+b+c) & -(a-b)(a+b+c) \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^3 \begin{vmatrix} 0 & -(a-b) & -(b-c) \\ 0 & -(c-a) & -(a-b) \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^2\, 1.\{(a-b)^2 - (b-c)(c-a)\}$

$= (a+b+c)^2(a^2+b^2-2ab-bc+c^2+ab-ca)$

$= (a+b+c)^2\,(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(i) হতে আমরা পাই ,

$\begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2$
$= \{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\}^2$
$= (a^3+b^3+c^3-3abc)^2$ = R.H.S. (Proved)

4(d) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix}$
$= abc\,(a+b+c)^3$

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} c(a+b)^2 & c^2a & bc^2 \\ ca^2 & a(b+c)^2 & a^2b \\ b^2c & ab^2 & b(c+a)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

অতপর , উদাহরণ ৪ দ্রষ্টব্য ।

4 (e) $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$
$= 2\,(b+c)\,(c+a)(a+b)$

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b & -(b+c) & -b \\ a+b & b+c & -a \\ -(a+b) & b+c & a+b+c \end{vmatrix}$$
$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$$= (a+b)(b+c)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -b \\ 1 & 1 & -a \\ -1 & 1 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(b+c)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -b \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & a+b+c \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 - c_2]$$

$= (a+b)(b+c)\{-2(-a-b-c+b)\}$
$= (a+b)(b+c)(-2)(-1)(c+a)$
$= 2(a+b)(b+c)(c+a)$ = R.H.S.

4(f) $\begin{vmatrix} -1 & b & c \\ a & -1 & c \\ a & b & -1 \end{vmatrix} = (a+1)(b+1)(c+1)$
$\left(\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}-1\right)$

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} -1 & b & c \\ a & -1 & c \\ a & b & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & b & c \\ a+1 & -(b+1) & 0 \\ a+1 & 0 & -(c+1) \end{vmatrix}$$
$[r_2' = r_2 - r_1, r_3' = r_3 - r_1]$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)\begin{vmatrix} -\frac{1}{a+1} & \frac{b}{b+1} & \frac{c}{c+1} \\ \frac{a+1}{a+1} & \frac{-(b+1)}{b+1} & \frac{0}{c+1} \\ \frac{a+1}{a+1} & \frac{0}{b+1} & \frac{-(c+1)}{c+1} \end{vmatrix}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)\begin{vmatrix} -\frac{1}{a+1} & \frac{b}{b+1} & \frac{c}{c+1} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$= (a+1)(b+1)(c+1)$
$\left\{-\frac{1}{a+1}(1-0) - \frac{b}{b+1}(-1-0) + \frac{c}{c+1}(0+1)\right\}$

$= (a+1)(b+1)(c+1)\left\{-\frac{1}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\right\}$

$= (a+1)(b+1)(c+1)\left\{-\frac{a+1-a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\right\}$

$= (a+1)(b+1)(c+1)$
$\left\{-\frac{a+1}{a+1}+\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\right\}$

$= (a+1)(b+1)(c+1)\left\{\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}-1\right\}$

= R.H.S. (Proved)

4(g) মান নির্ণয় কর: $\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$ **[রুয়েট'১২-১৩]**

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a+a^2 & -a & a^2 \\ 1-a+a^2 & 1 & -a \\ 1-a+a^2 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2)\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2)\begin{vmatrix} 0 & -a-1 & a^2+a \\ 0 & 1-a^2 & -a-1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2)\begin{vmatrix} 0 & -(a+1) & a(a+1) \\ 0 & (1+a)(1-a) & -(a+1) \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2)(a+1)^2\begin{vmatrix} 0 & -1 & a \\ 0 & 1-a & -1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2)(a+1)^2(1-a+a^2)$$

$$= (1-a+a^2)^2(a+1)^2$$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **হলে দেখাও যে, $A^3 = I$. এ থেকে A^{-1} নির্ণয় কর।**

সমাধান :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$A^2A = I$ হতে সিদ্ধান্ত হয় যে, A^{-1} বিদ্যমান এবং এর মান $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **হলে এমন একটি ম্যাট্রিক্স B নির্ণয় কর যেন $AB = BA = I$ হয়।**

সমাধান : $AB = BA = I$ বলে, $B = A^{-1}$

এখানে, $|A| = 1(-1-30) - 3(3+6) + 4(15-1)$

$= -31 - 27 + 56 = -2$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -31 & -9 & 14 \\ 17 & 5 & -8 \\ 22 & 6 & -10 \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -31 & 17 & 22 \\ -9 & 5 & 6 \\ 14 & -8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 31/2 & -17/2 & -11 \\ 9/2 & -5/2 & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

7. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ও $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ হলে B ম্যাট্রিক্সের উপাদানসমূহ নির্ণয় কর। **[রুয়েট' ০৯-১০]**

সমাধান: এখানে, $A^{-1} = \dfrac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

এখন, $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = (I)B = B$

$$\Rightarrow B = A^{-1}(AB) = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5+6 & -\frac{17}{2}+\frac{21}{2}\\ 10-8 & 17-14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

8. $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}B = I$ হলে, B ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর; যেখানে $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ একটি অভেদ ম্যাটিক্স ।

সমাধান: ধরি, $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

তাহলে, $A^{-1}=\dfrac{1}{4-6}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$

$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2 & 3/2\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

এখন, যেহেতু $AB = I$, সুতরাং, $B = A^{-1}$

$$B=\begin{bmatrix}-1/2 & 3/2\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ ঃ

ম্যাট্রিক্স ঃ

1. যদি $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ হয়, তবে AB এর সমান – **[DU 05-06; Jt.U 08-09, 09-10; JU.09-10; R.U.08-09]**

Sol^n.: $AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ -15 & -3\end{bmatrix}$

[বি.দ্র.: ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও ম্যাট্রিক্সের সমাধান করা যায়।]

2. $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ হলে, A^2 সমান– **[DU 04-05; RU,'07-08; JU.09-10]**

Sol^n.: $A^2=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}4-9 & -6-6\\ 6+6 & -9+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -12\\ 12 & -5\end{bmatrix}$$

3. $A=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ হলে AB কত? **[CU 07-08]**

a. $\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix}5\\ 7\\ 9\end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 8 & 10 & 12\\ 12 & 15 & 18\end{bmatrix}$

Sol^n.: AB এর মাত্রা হবে $(3\times1).(1\times3) = 3\times3$

4. $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2i\\ 0 & 2i & 0\\ 2i & 0 & 0\end{bmatrix}$ হলে, A^2+4I সমান– **[CU 06-07]**

Sol^n.: $A^2+4I=\begin{bmatrix}(2i)^2 & 0 & 0\\ 0 & (2i)^2 & 0\\ 0 & 0 & (2i)^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

5. $M=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ হলে $M^2=?$ **[CU 02-03]**

Sol^n.: $M^2=\begin{bmatrix}2^2 & 0\\ 0 & 2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix}x-y & 1\\ 7 & x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 1\\ 7 & 2\end{bmatrix}$ হলে $(x,y)=?$ **[DU 02-03]**

Sol^n.: $x-y=8,\ x+y=2\ \therefore (x,y)=(5,-3)$

7. $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 7\end{bmatrix}$ হলে $(x,y)=?$ **[CU 05-06]**

Sol^n.: $3x+2y=5,\ x-2y=7$

$\therefore (x, y) = (3, -2)$

8. $\begin{bmatrix}p-4 & 8\\ 2 & p+2\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতীক্রমী হবে p যদি এর মান – **[DU 09-10, 07-08]**

Sol^n.: $(p-4)(p+2)-16=0$

$\Rightarrow p^2-2p-8-16=0 \Rightarrow p^2-2p-24=0$

$p=-6, 4$

9. $\begin{bmatrix} \alpha+3 & 6 \\ 5 & \alpha-4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতীক্রমী হবে যদি α এর মান – **[Jt.U 07-08]**

Sol^n.: $(\alpha+3)(\alpha-4)-30=0$

$\Rightarrow \alpha^2-\alpha-42=0 \quad \alpha=7,-6$

কৌশল ঃ 2×2 অব্যতীক্রমী ম্যাট্রিক্স $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

10. যদি $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ হয় তবে $A^{-1}=?$ **[DU 06-07; Jt.U 06-07]**

Sol^n.: $A^{-1}=\frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

11. যদি $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ হয় তবে $A^{-1}=?$ **[Jt.U 07-08]**

Sol^n.: $A^{-1}=\frac{1}{5+6}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

12. $A=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে AB কত? **[BUET 08-09; NU 09-10;CU 07-08]**

a. $\begin{bmatrix} 4 & -29 \end{bmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$

Sol^n.: AB ম্যাট্রিক্সের মাত্রা = A এর সারি $\times$ B এর কলাম = 3×3 $\therefore$ Ans. b.

13. যদি $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $X=\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$ হয়, তবে XA^2 হবে– **[BUET 11-12]**

A. $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ D. কোনটি নয়।

Sol^n.: XA^2 নির্ণয় যোগ্য নয়।

14. A, B, C ম্যাট্রিক্সগুলির মাত্রা যথাক্রমে 4×5, 5×4, 4×2 হলে $(A^T+B)C$ এর মাত্রা হবে- **[BUET 10-11]**

Sol^n.: A^T এর মাত্রা = 5×4, (A^T+B) এর মাত্রা = 5×4, $(A^T+B)C=5\times2$

ম্যাট্রিক্সে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার

$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ হলে, **AB** ও A^{-1} নির্ণয় কর।

Declaring Matrix A:

MODE 3 times [2] (MAT) SHIFT [4] [1] [1] (A)

[3] [=] [3] [=] [1] [=] [1] [=] [1] [=] [2]

[=] [–] [3] [=] [4] [=] [3] [=] [–] [2] [=]

[3] SHIFT STO RCL

এভাবে Matrix B Declare করি।

এভাবে Matrix B Declare করি।

SHIFT [MAT] [4] [3] (MAT) [1] (A) [×]

SHIFT [MAT] [4] [3] (MAT) [2] (B) [=]

ধারাবাহিকভাবে (◄ ►) এর ডান দিক চাপতে হবে।

[AC] SHIFT [MAT] [4] [3] (MAT) [1] [x^{-1}] [=]

ধারাবাহিকভাবে (◄ ►) এর ডান দিক চাপতে হবে।

নির্ণায়ক ঃ

1. নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ এর মান–

[DU 08-09, 05-06, Jt.U06-07; RU 05-06; KUET 10-11, 08-09; BAU 08-09]

A. 4xyz B. 3xyz C. 2xyz D. xyz

Sol^n.: x = 1 , y = 2 , z = 3 হলে

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 24$ (ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)

Option গুলোতে x =1, y = 2, z = 3 বসালে A = 24 হয়। ∴ **Ans. A.**

MODE 3 times 2 (MAT) SHIFT 4 1 1 (A)

3 = 3 = 3 = 1 = 2 = 4

= 3 = 2 = 3 = 5 = SHIFT 4

এর ডান দিক চাপতে হবে। 1 (Det) SHIFT 4

3 1 (A) = 24

2. নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ এর মান কত? [RU 07-08]

A. $(a-b)(b-c)(c-a)$ **B.** $(a^2-b^2)(b-c)(c-a)$

C. $(a-b)(b^2-c^2)(c-a)$ **D.** $(a-b)(b-c)(c^2-a^2)$

Sol^n.: a = 1 , b = 2 , c = 3 হলে, $\Delta = 2$

Option গুলোতে a = 1, b = 2, c = 3 বসালে A = 2 হয়। **Ans. A.**

অন্যভাবে বলা যায়– নির্ণায়কে a , b, c এর উপস্থিতি সমভাবে বলে নির্ণায়কের মানেও a , b, c এর উপস্থিতি সমভাবে হবে।

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$ হলে x = ?

[DU 03-04; CU 02-03]

Sol^n.: x = a হলে $C_1 = C_2$ হয় . ∴ $\Delta = 0$

x = b হলে $C_1 = C_3$ হয় . $\Delta = 0$

x = a or b

4. $\begin{vmatrix} 50 & 60 & 70 \\ 10 & 20 & 30 \\ 30 & 60 & 90 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান – [Jt.U 08-09]

Sol^n.: এখানে $r_3 = 3r_2$ ∴ $\Delta = 0$

5. x এর মান কত হলে $\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$ হবে–

Sol^n.: $x = 0$ হলে $\Delta = 0$ হয় । **[BUET 05-06]**

$x = 2$ হলে $\Delta = 2(4-4) = 0$ হয় ।

6. $\begin{vmatrix} a-3 & -1 \\ -8 & a+4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান শূন্য হলে a এর মান কত হবে? **[DU 07-08]**

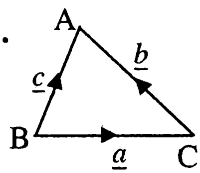
Sol^n.: $a^2 + a - 12 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 20 = 0$

a = – 5 or 4

প্রশ্নমালা – II A

1. (a) ABC একটি ত্রিভুজ। $\overrightarrow{BC} = \underline{a}$, $\overrightarrow{CA} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{BA} = \underline{c}$ হলে, দেখাও যে, $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, ΔABC এ,



$\overrightarrow{BC} = \underline{a}$, $\overrightarrow{CA} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{BA} = \underline{c}$.

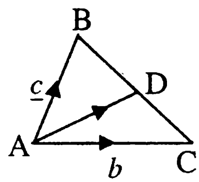
ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$

$\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ (Showed)

1. (b) ABC একটি ত্রিভুজ; D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু । $\overrightarrow{AB} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{AC} = \underline{b}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})$ [ব.'১১]

প্রমাণ ঃ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$



$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

[$\because$ D, BC এর মধ্যবিন্দু ।]

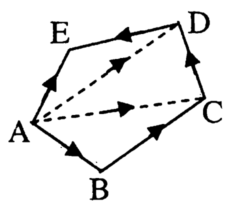
$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \underline{c} + \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{c}) = \frac{1}{2}(2\underline{c} + \underline{b} - \underline{c})$

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$ (Showed)

1. (c) ABCDE একটি পঞ্চভুজ; $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{DE} = \underline{d}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AE} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}$ [কু.'০১]

প্রমাণ ঃ ABC, ACD ও ADE ত্রিভুজে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \underline{a} + \underline{b} \cdots (1)$

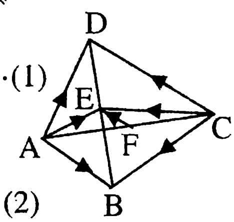
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

$= \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ [(1) দ্বারা]

এবং $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}$

1. (d) E ও F বিন্দু দুইটি ABCD চতুর্ভুজের BD ও AC কর্ণ দুইটির মধ্যবিন্দু। দেখাও যে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{FE}$

প্রমাণ ঃ Δ ABD এ BD বাহুর মধ্যবিন্দু E .



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE} \cdots (1)$

Δ BCD এ BD বাহুর মধ্যবিন্দু E .

$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CE} \cdots (2)$

আবার, Δ AEC এ AC বাহুর মধ্যবিন্দু F

$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{EF}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{FE} \cdots (3)$

(1) ও (2) যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2(2\overrightarrow{FE})$

 [(3) দ্বারা]

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{FE}$ (Showed)

1. (e) A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ হলে, AB এর উপরিস্থিত C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর যেন $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ হয়।

সমাধান ঃ মনে করি C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c}$.

দেওয়া আছে, $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} \Rightarrow \underline{c} - \underline{a} = 3(\underline{b} - \underline{a})$

$\Rightarrow \underline{c} = 3\underline{b} - 3\underline{a} + \underline{a} = 3\underline{b} - 2\underline{a}$

C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $3\underline{b} - 2\underline{a}$ (Ans.)

1. (f) PQR ত্রিভুজের QR, RP ও PQ বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L, M ও N । প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN} = \underline{0}$ [সি.'০৭,'০৯,'১২; য.'০১; দি.'০৯,'১৩; রা.'০৯,'১১,'১৩; ব.'১২,'১৪]

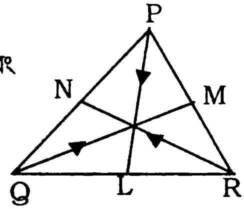
প্রমাণ ঃ QR এর মধ্যবিন্দু L বলে,

$\overrightarrow{PL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR})$

অনুরূপভাবে,

$\overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR})$ এবং

$\overrightarrow{RN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ})$



L.H.S.= $\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ})$

$= \frac{1}{2}\{(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}) + (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QR}) + (\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PR})\}$

$= \frac{1}{2}(\underline{0} + \underline{0} + \underline{0}) = \underline{0}$ = R.H.S. (Proved)

2. (a) ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F হলে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টর দুইটিকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টর দুইটির যোগাশ্রয়ী সমাবেশে প্রকাশ কর।

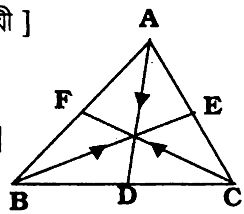
সমাধান ঃ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$

[ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী]

$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

[E, AC এর মধ্যবিন্দু ।]

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী]

$\Rightarrow \overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

[$\because$ E, AC এর মধ্যবিন্দু ।]

$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

2. (b)OAC ত্রিভুজে AC বাহুর মধ্যবিন্দু B ; যদি $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ হয়, তবে $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টরকে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ঢা.'০৯,'১৩; দি.'১২]

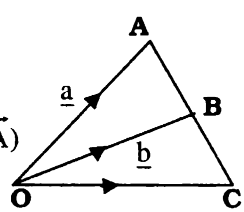
সমাধান ঃ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB}$

[$\because$ B , AC এর মধ্যবিন্দু]

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= \underline{a} + 2(\underline{b} - \underline{a})$



[$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$]

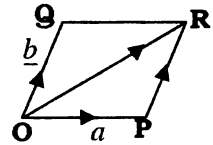
$\overrightarrow{OC} = 2\underline{b} - \underline{a}$ (Ans.)

2. (c) $\overrightarrow{OP} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \underline{b}$ হলে OPRQ কি ধরনের চতুর্ভুজ তা নির্ধারন কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$\overrightarrow{OP} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \underline{b}$ এবং

$\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \underline{b}$



এখন, $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \underline{a} + \underline{b} = \overrightarrow{OR}$

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$; যা ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রের শর্ত। অতএব, OPRQ একটি সামান্তরিক ।

3. যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক ভেক্টর এবং $(x + 1)\underline{a} + (y - 2)\underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$ হয় তবে x ও y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক ভেক্টর এবং

$(x + 1)\underline{a} + (y - 2)\underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$

$x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1, y - 2 = 1 \Rightarrow y = 3$

প্রশ্নমালা – II B

1. (a) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $2\vec{A} + \vec{B}$ ও $6\vec{A} - 3\vec{B}$ এর মান নির্ণয় কর।

[কু.'০৭; চ.'০৪]

সমাধান ঃ $2\overline{A} + \overline{B} = 2(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 2\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k} + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 6\hat{i} + 4\hat{j}$ (Ans.)

$6\overline{A} - 3\overline{B} = 6(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) - 3(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 6\hat{i} + 18\hat{j} - 12\hat{k} - 12\hat{i} + 6\hat{j} - 12\hat{k}$

$= -6\hat{i} + 24\hat{j} - 24\hat{k}$ (Ans.)

1. (b) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $|3\overline{A} + 2\overline{B}|$ এর মান নির্ণয় কর।

[কু.'০৭;রুয়েট.১১-১২]

সমাধান : $3\overline{A}+2\overline{B} = 3(\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})$

$+ 2(4\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})$

$= 3\hat{i}+9\hat{j}-6\hat{k}+8\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k}$

$= 11\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}$

$|3\overline{A}+2\overline{B}| = \sqrt{11^2+5^2+2^2}$

$= \sqrt{121+25+4} = \sqrt{150}$

1. (c) $\vec{A} = 3\hat{i}+2\hat{j}$, $\vec{B} = -\hat{i}+5\hat{j}$, $\vec{C} = 8\hat{i}-3\hat{j}$ হলে $\overline{A}-3\overline{B}$ এবং $3\overline{A}-7\overline{C}$ নির্ণয় কর। [চ.'০১]

সমাধান : $\overline{A}-3\overline{B} = 3\hat{i}+2\hat{j}-3(-\hat{i}+5\hat{j})$

$= 3\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{i}-15\hat{j} = 6\hat{i}-13\hat{j}$ (Ans.)

$3\overline{A}-7\overline{C} = 3(3\hat{i}+2\hat{j})-7(8\hat{i}-3\hat{j})$

$= 9\hat{i}+6\hat{j}-56\hat{i}+21\hat{j} = -47\hat{i}+27\hat{j}$ (Ans.)

2. (a) $\vec{A} = \hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ হলে $(2\vec{A}-\vec{B}).(6\vec{A}+3\vec{B})$ এর মান নির্ণয় কর। [য.'০৩]

সমাধান : $2\overline{A}-\overline{B}$

$= 2(\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})-(4\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})$

$= 2\hat{i}+6\hat{j}-4\hat{k}-4\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$

$= -2\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k}$

$6\overline{A}+3\overline{B} = 6(\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})+3(4\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})$

$= 6\hat{i}+18\hat{j}-12\hat{k}+12\hat{i}-6\hat{j}+12\hat{k}$

$= 18\hat{i}+12\hat{j}$

$(2\overline{A}-\overline{B}).(6\overline{A}+3\overline{B})$

$= (-2\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k}).(18\hat{i}+12\hat{j})$

$= -36+96 = 60$

2. (b) $\underline{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\underline{c} = \hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ হলে $(\underline{a}\cdot\underline{b})+(\underline{b}\cdot\underline{c})+(\underline{c}\cdot\underline{a})$ এর মান নির্ণয় কর। [রা.'০৩; য.'০৯]

সমাধান : $(\underline{a}\cdot\underline{b})+(\underline{b}\cdot\underline{c})+(\underline{c}\cdot\underline{a})$

$= (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})+$

$(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}+j-\hat{k})+$

$(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$

$= 1-1+1+1-1-1+1+1-1 = 1$

2. (c) (2, 3,1) এবং (3,1, – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০২]

সমাধান : (2, 3 1) ও (3 1 , – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ ও $3\hat{i}+j-2\hat{k}$

এ ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল

$= (2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}).(3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$

$= 6+3-2 = 7$ (Ans.)

2. (d) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ হলে $|\overrightarrow{AB}|$ এর মান নির্ণয় কর। [রা.'১২; ব.'১০; য.'১২,'১৪; চ.'১২; দি.'০৯,'১১,'১৪;ঢা.'১৩; মা.'০৯, '১৩]

সমাধান : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= 4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}-(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k})$

$= 4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}-2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$

$= 2\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}$

$|\overrightarrow{AB}| = |2\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}| = \sqrt{2^2+6^2+6^2}$

$= \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ (Ans.)

3. প্রতি জোড়া ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর :

(a) $\vec{A} = 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ও $\vec{B} = 2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$ [য.'০৩; রা.'০৬]

সমাধান : $|\overline{A}| = |2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}|$

$= \sqrt{2^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\overline{B}| = |2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}| = \sqrt{2^2+10^2+11^2}$

$= \sqrt{4+100+121} = \sqrt{225} = 15$ এবং

$\overline{A}\ \overline{B} = (2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\cdot(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})$

$= 2.2+2.10+1.(-11)$

$= 4+20-11 = 13$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$\cos \quad \dfrac{\overline{A}\ \overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \dfrac{13}{3\times15} = \dfrac{13}{45}$

$\theta = \cos^{-1}\dfrac{13}{45}$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\dfrac{13}{45}$

(b) $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$
[ঢা. '০৩; রা. '০৪,'১১; য. '০৭,'১৩; সি. '০৮,'১৪; ব.'১১]

সমাধান ঃ $|\overline{A}| = |2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}|$

$= \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$|\overline{B}| = |\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}| = \sqrt{1^2+4^2+3^2}$

$= \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$ এবং

$\overline{A}\ \ \overline{B} = (2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})\cdot(\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})$

$= 2 - 12 - 3 = -13$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{-13}{\sqrt{14}\times\sqrt{26}}$$

$$= \frac{-13}{2\sqrt{7}\sqrt{13}} = \frac{-\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}(-\dfrac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}})$

3. (c) $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$
[য.'০১; চ.'০৪,'০৮; ব.'০৫]

সমাধান ঃ $|\overline{A}| = |2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}|$

$= \sqrt{2^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\overline{B}| = |\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}| = \sqrt{1^2+3^2+5^2}$

$= \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$ এবং

$\overline{A}\ \ \overline{B} = (2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})\cdot(\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})$

$= 2 - 6 - 5 = -9$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{-9}{3\times\sqrt{35}} = \frac{-3}{\sqrt{35}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{35}}$$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\dfrac{-3}{\sqrt{35}}$

3. (d) $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। **[কু.'০৫,'১৩]**

সমাধান ঃ $|\overline{A}| = |\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}|$

$= \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$|\overline{B}| = |2\hat{i}+j-\hat{k}| = \sqrt{2^2+1^2+1^2}$

$= \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ এবং

$\overline{A}\ \ \overline{B} = (\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k})\cdot(2\hat{i}+j-\hat{k})$

$= 2 - 2 + 3 = 3$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{3}{\sqrt{14}\times\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{2\sqrt{21}}\right)$$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{2\sqrt{21}}\right)$

3. (e) $2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ **ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।** **[কু.'০৬]**

সমাধান ঃ ধরি, $\overline{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\overline{B} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\therefore |\overline{A}| = |2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2}$

$= \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$|\overline{B}| = |\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

$\overline{A}\ \ \overline{B} = (2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})\cdot(\hat{i}-j+\hat{k})$

$= 2 + 3 + 1 = 6$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{6}{\sqrt{14}\times\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{7}\times\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{6}{7}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{6}{7}}$$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\sqrt{\frac{6}{7}}$

4. $\underline{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\underline{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $2\underline{a} + \underline{b}$ ও $\underline{a} + 2\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [য.'০৪; ব.'০৪; ব.'০৬]

সমাধান :

$$2\underline{a} + \underline{b} = 2(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$
$$= 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k} + 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$
$$= 5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$$
$$\underline{a} + 2\underline{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 2(3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$
$$= i + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 6\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} = 7\hat{i} + \hat{k}$$
$$|2\underline{a} + \underline{b}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50}$$

$|\underline{a} + 2\underline{b}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$ এবং

$$(2\underline{a} + \underline{b})\cdot(\underline{a} + 2\underline{b})$$
$$= (5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})\cdot(7\hat{i} + \hat{k}) = 35 - 4 = 31$$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ Θ হলে,

$$\cos\Theta = \frac{(2\underline{a} + \underline{b}).(\underline{a} + 2\underline{b})}{|2\underline{a} + \underline{b}||\underline{a} + 2\underline{b}|} = \frac{31}{\sqrt{50} \times \sqrt{50}}$$
$$\Theta = \cos^{-1}\frac{31}{50}$$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\frac{31}{50}$

5. **নিচের ভেক্টরগুলি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করে :**

(a) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

[ঢা., চ.'১১; দি.,রা.,কু.,য'১০; রা.,দি.,সি.,চ.'১৩]

সমাধান : ধরি, x y ও z-অক্ষ প্রদত্ত ভেক্টর $2\hat{i} - j + 2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\cos\alpha = \frac{i\cdot(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$
$$\alpha = \cos^{-1}(2/3)$$
$$\cos\beta = \frac{\hat{j}\cdot(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{-1}{3}$$

$\beta = \cos^{-1}(-1/3)$ এবং

$$\cos\gamma = \frac{\hat{k}\cdot(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}$$
$$\gamma = \cos^{-1}(2/3)$$

প্রদত্ত ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে $\cos^{-1}(2/3)$, $\cos^{-1}(-1/3)$ ও $\cos^{-1}(2/3)$ কোণ উৎপন্ন করে।

5. (b) $\hat{j} + 2\hat{k}$ **[রা.'০৮]**

সমাধান : ধরি, x , y ও z-অক্ষ প্রদত্ত ভেক্টর $\hat{j} + 2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α , β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\cos\alpha = \frac{\hat{i}\cdot(\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$$
$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$
$$\cos\beta = \frac{\hat{j}\cdot(\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\beta = \cos^{-1}(1/\sqrt{5})$ এবং

$$\cos\gamma = \frac{\hat{k}\cdot(\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\gamma = \cos^{-1}(2/\sqrt{5})$$

প্রদত্ত ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে $\frac{\pi}{2}$, $\cos^{-1}(1/\sqrt{5})$ ও $\cos^{-1}(2/\sqrt{5})$ কোণ উৎপন্ন করে।

5. (c) $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ **[য.'০৮]**

সমাধান : ধরি, x y ও z-অক্ষ প্রদত্ত ভেক্টর $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α , β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\cos\alpha = \frac{\hat{i}\cdot(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}$$
$$\alpha = \cos^{-1}(3/7)$$
$$\cos\beta = \frac{\hat{j}\cdot(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{-6}{\sqrt{49}} = -\frac{6}{}$$

$\beta = \cos^{-1}(-6/7)$ এবং

$$\cos\gamma = \frac{\hat{k}\cdot(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{49}} = \frac{2}{7}$$

$\gamma = \cos^{-1}(2/7)$

প্রদত্ত ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে $\cos^{-1}(3/7)$ $\cos^{-1}(-6/7)$ ও $\cos^{-1}(2/7)$ কোণ উৎপন্ন করে।

6. (a) $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।
[কু.'০৮,'১১; রা.'০৪,'১৩; চ.'০৫; য.'১২; সি.'১২ কুয়েট'০৫-০৬]

সমাধান ঃ $\vec{B}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})}{|6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}|}$$

$$= \frac{6\times2+(-3\times2)+2\times1}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{12-6+2}{\sqrt{36+9+4}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{49}} = \frac{8}{7} \text{ (Ans.)}$$

6. (b) $\underline{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\underline{b} = \sqrt{3}\,\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$; $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

[চ.'১২; কু.'১২; ব.'০৭; দি.'১১]

সমাধান ঃ $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|} = \frac{(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\cdot(\sqrt{3}\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})}{|\sqrt{3}\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}|}$$

$$= \frac{1\times\sqrt{3}+(1\times3)+1\times-2}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2+2^2}} = \frac{\sqrt{3}+3-2}{\sqrt{3+9+4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \text{ (Ans.)}$$

6. (c) $\vec{P} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

[কু.'০৪; ঢা.'০৭]

সমাধান ঃ $\vec{P}$ ভেক্টরের উপর $\vec{Q}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|\vec{P}|} = \frac{(5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})\cdot(2\hat{i}+j-2\hat{k})}{|5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}|}$$

$$= \frac{5\times2+(-3\times1)+2\times-2}{\sqrt{5^2+3^2+2^2}}$$

$$= \frac{10-3-4}{\sqrt{25+9+4}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \text{ (Ans.)}$$

6. (d) $\underline{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

[য.'০৮]

সমাধান ঃ $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|} = \frac{(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})}{|\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}|}$$

$$= \frac{2\times1+3\times2+2\times1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}$$

$$= \frac{2+6+2}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{10}{\sqrt{6}} \text{ (Ans.)}$$

6. (e) A(2 , 3, –1) ও B (– 2, –4, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর $4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ A(2, 3, –1) ও B (– 2, –4, 3) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ ও $-2\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-2\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}) - (2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$$
$$= -4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}$$

$-4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ এর অভিক্ষেপ $= \dfrac{(-4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k})\cdot(4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})}{|-4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}|}$

$$= \frac{-16+21+4}{\sqrt{16+49+16}} = \frac{9}{9} = 1 \text{ (Ans.)}$$

7. (a) $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

[ব.'০১,'০৯; রা.'০৫; সি.'০৭,'১১; কু.,দি.'১০]

সমাধান ঃ $|\vec{B}| = |2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}|$

$= \sqrt{2^2+10^2+11^2} = \sqrt{4+100+121}$
$= \sqrt{225} = 15$

$\vec{B}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \dfrac{2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}}{15} = \hat{n}$ (ধরি)

$\vec{B}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A}$ ভেক্টরের উপাংশ
$= (\hat{n}.\vec{A})\hat{n}$
$= \{\frac{1}{15}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\}\hat{n}$
$= \dfrac{4+20-11}{15} \cdot \dfrac{2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}}{15}$
$= \dfrac{13}{225}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})$ (Ans.)

7. (b) $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। $\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ এবং অভিক্ষেপ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এদের সাংখ্যিক মান সমান। [য.'০৭;ঢা.'০৯; চ.'১০]

সমাধান ঃ $|\vec{A}| = |\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}|$
$= \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$
$|\vec{B}| = |6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}| = \sqrt{36+9+4} = 7$
$\vec{A}\ \vec{B} = (\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})\cdot(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$
$= 6-6-4 = -4$

প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \dfrac{-4}{3\times 7}$ $\therefore \theta = \cos^{-1}(-\dfrac{4}{2\text{i}})$

$\vec{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$
$= \dfrac{1}{3}(\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}) = \hat{a}$ (ধরি)

$\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $= \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|}\hat{a}$

$= \dfrac{-4}{3}\{\dfrac{1}{3}(\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})\}$

$= \dfrac{-4}{9}\hat{i} + \dfrac{8}{9}\hat{j} + \dfrac{8}{9}\hat{k}$ (Ans.)

$\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশের মান

$= |\dfrac{-4}{9}\hat{i} + \dfrac{8}{9}\hat{j} + \dfrac{8}{9}\hat{k}| = \sqrt{\dfrac{16}{91}+\dfrac{64}{91}+\dfrac{64}{91}}$

$= \sqrt{\dfrac{16+64+64}{91}} = \sqrt{\dfrac{144}{91}} = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$

$\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|} = \dfrac{-4}{3}$

$\therefore$ $\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ এবং উপাংশের সাংখ্যিক মান সমান।

8. (a) $2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$ ভেক্টরটির সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [সি.'০৫,' ০৯]

সমাধান ঃ ধরি, $\vec{A} = 2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$

$|\vec{A}| = \sqrt{2^2+10^2+11^2}$
$= \sqrt{4+100+121} = \sqrt{225} = 15$

$\vec{A}$ ভেক্টরের সমান্তরালে একক ভেক্টর $= \pm\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$= \pm\dfrac{1}{15}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})$ (Ans.)

8. (b) $\vec{A} = 2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ হলে ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [চ.'১০; সি.'১১]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি ভেক্টর $= \vec{A} + \vec{B}$
$= 2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k} + i+2\hat{j}+3\hat{k}$
$= 3\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k}$
$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{9+36+64} = \sqrt{109}$

নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm\dfrac{\vec{A}+\vec{B}}{|\vec{A}+\vec{B}|}$

$= \pm\dfrac{1}{\sqrt{109}}(3\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k})$

8. (c) $\vec{A} = 4\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i}-5\hat{j}-\hat{k}$ হলে, (i) ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [ব.'০৪]

(ii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির দিক বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(iii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির বিসদৃশ সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি ভেক্টর $= \vec{A} + \vec{B}$

$$= 4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k} + (-i - 5\hat{j} - \hat{k})$$

$$= 3\hat{i} - 4\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

(i) ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর

$$= \pm \frac{\vec{A}+\vec{B}}{|\vec{A}+\vec{B}|} = \pm \frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$$

(ii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির দিক বরাবর একক ভেক্টর

$$= \frac{\vec{A}+\vec{B}}{|\vec{A}+\vec{B}|} = \frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$$

(iii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির বিসদৃশ সমান্তরাল একক ভেক্টর $= -\frac{\vec{A}+\vec{B}}{|\vec{A}+\vec{B}|} = -\frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$

(d) (i) $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[ব.'০১; চ.'০৫,'১০; ঢা.,কু.'১১;রুয়েট'১১-১২]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব ভেক্টর,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+2)\hat{i} - (2-1)\hat{j} + (-4-1)\hat{k}$$

$$= 3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$$

(i) প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর

$$= \pm \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{35}}(3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k})$$

(ii) প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব 5 একক মান বিশিষ্ট ভেক্টর $= \pm 5 \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$

$$= \pm \frac{5}{\sqrt{35}}(3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

8. (e) $\underline{a} = \hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ হলে, এমন একটি একক ভেক্টর $\underline{c}$ নির্ণয় কর, যা $\underline{a}$ এবং $\underline{b}$ এর সাথে সমতলীয় হবে এবং $\underline{a}$ এর লম্ব হবে।

সমাধান ঃ ধরি, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর সাথে সমতলীয় যেকোন ভেক্টর $\lambda(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}) + \mu(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ অর্থাৎ $(\lambda+\mu)\hat{i} + (\lambda-\mu)\hat{j} + (-\lambda+\mu)\hat{k}$.

এ ভেক্টর $\underline{a}$-এর উপর লম্ব হলে,

$$(\lambda+\mu)(1) + (\lambda-\mu)(1) + (-\lambda+\mu)(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda + \mu + \lambda - \mu + \lambda - \mu = 0$$

$$\Rightarrow 3\lambda = \mu$$

$\underline{a}$-এর উপর লম্ব ভেক্টরটি হচ্ছে,

$$4\lambda\, i - 2\lambda\,\hat{j} + 2\lambda\,\hat{k}$$

$$\underline{c} = \pm \frac{4\lambda\hat{i} - 2\lambda\hat{j} + 2\lambda\hat{k}}{\sqrt{16\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2}}$$

$$= \pm \frac{2\lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{24\lambda^2}} = \pm \frac{2\lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})}{2\lambda\sqrt{6}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

8. (f) $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [রা.'০৮; কু. '০৮; য.'১০]

সমাধান ঃ ধরি, $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = i + 2\hat{j} - \hat{k}$

প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব ভেক্টর,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-2)\hat{i} - (-1-1)\hat{j} + (2+1)\hat{k}$$

$$= -i - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর

$$= \pm \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}(-\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

9. (a) P(1 , 1, 1) এবং Q(3, 2, – 1) শূন্যে অবস্থিত দুইটি বিন্দু । $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর নির্ণয় কর এবং এর সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[য.'০৯; বুয়েট'০৩-০৪]

সমাধান ঃ P(1 , 1, 1) ও Q(3, 2, – 1) বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $i + \hat{j} + \hat{k}$, ও $3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$$\overrightarrow{PQ} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$
$$= 2\hat{i} + j - 2\hat{k} \text{ (Ans.)}$$
$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর

$$= \pm \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \pm \frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$$

$\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর

$\frac{1}{3}(2\hat{i} + j - 2\hat{k})$ বা, $-\frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

9. (b) মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P(2 , –1, 7) এবং Q(–4, 5, 0) হলে । $\overrightarrow{PQ}$ । নির্ণয় কর । [সি.'০৯]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{OP} = 2\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}, \overrightarrow{OQ} = -4\hat{i} + 5\hat{j}$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$
$$= -4\hat{i} + 5\hat{j} - (2\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k})$$
$$= -6\hat{i} + 6\hat{j} - 7\hat{k}$$
$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{36 + 36 + 49} = \sqrt{121} = 11$$

10. (a) দেখাও যে, $\underline{a} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\underline{b} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

[ব.'০৮; রুয়েট'০৭-০৮]

প্রমাণ ঃ $\underline{a} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ ও $\underline{b} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে এদের স্কেলার গুণফল শূন্য হবে।

এখন, $\vec{a} \cdot \vec{b} = (9\hat{i} + j - 6\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k})$

$$= 36 - 6 - 30 = 36 - 36 = 0$$

প্রদত্ত ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব ।

10 (b) দেখাও যে, $\vec{A} = 8\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

[রা.'০৭; '০৭; য.'১২; বুয়েট' ০৫-০৬; ১০-১১]

প্রমাণ ঃ $\underline{a} = 8\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ ও $\underline{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য হবে।

এখন, $\vec{a} \cdot \vec{b} = (8\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k})$

$$= 36 - 6 - 30 = 36 - 36 = 0$$

প্রদত্ত ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব ।

10(c) $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - j + 2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $\vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{A} - \vec{B}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [রা.'০৬; ঢা.'০৮; য.'০৭; চ.'১২,'১৪; মা.বো.'০৮; দি.'১০; ব.'১০,'১২; মা.'১৪; বুয়েট'১১-১২]

প্রমাণ ঃ $\vec{A} + \vec{B} = (1+3)\hat{i} + (2-1)\hat{j} + (-3+2)\hat{k}$

$$= 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (1-3)\hat{i} + (2+1)\hat{j} + (-3-2)\hat{k}$$
$$= -2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

এখন, $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B})$

$$= (4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \cdot (-2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$$
$$= -8 + 3 + 5 = 0$$

ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণন শূন্য বলে তারা পরস্পর লম্ব।

10 (d) দেখাও যে, $\underline{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\underline{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব । এ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[ঢা.'০২; কু.'০৫]

প্রমাণ ঃ $\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$

$$= 12 - 6 - 6 = 12 - 12 = 0$$

ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণন শূন্য বলে তারা পরস্পর লম্ব।

২য় অংশ ঃ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব ভেক্টর,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -6 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (2-18)\hat{i} - (3+24)\hat{j} + (-9-8)\hat{k}$

$= -16\hat{i} - 27\hat{j} - 17\hat{k}$

$|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{256+729+289} = \sqrt{1274}$

প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর

$= \pm \dfrac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1274}}(-16\hat{i} - 27\hat{j} - 17\hat{k})$

10 (e) A ও B বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k})$ ও $(4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ হলে $\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য এবং $\overrightarrow{AB}$ বরাবর একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৬-০৭]

সমাধানঃ $\overrightarrow{AB} = 4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k} - (2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k})$

$= 2\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}$

$\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য $= |\overrightarrow{AB}| = |2\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}|$

$= \sqrt{4+36+36} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ এবং

$\overrightarrow{AB}$ বরাবর একটি একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

$= \dfrac{2\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}}{2\sqrt{19}} = \dfrac{1}{\sqrt{19}}i - \dfrac{3}{\sqrt{19}}\hat{j} + \dfrac{3}{\sqrt{19}}\hat{k}$

11. (a) $a\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2a\hat{i}-a\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর। [রা.'০৯, '১২; য.'০৫,'০৯,'১৩; ঢা.'০৬,'১০; সি.'০৮,'১২; চ.'০৯; কু.'১৩; দি.'১৪]

সমাধানঃ $a\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2a\hat{i}-a\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব বলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য।

$(a\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})\cdot(2a\hat{i}-a\hat{j}-4\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 2a^2+2a-4=0 \Rightarrow a^2+a-2=0$

$\Rightarrow (a+2)(a-1)=0 \quad a = 1, -2$

11(b) $2\hat{i}+a\hat{j}+\hat{k}$ এবং $4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর। [ঢা.'০২; ব.'০৪]

সমাধানঃ $2\hat{i}+a\hat{j}+\hat{k}$ এবং $4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব বলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য।

$(2\hat{i}+a\hat{j}+\hat{k})\cdot(4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 8-2a-2=0 \Rightarrow 2a=6 \therefore a=3$

11 (c) $\underline{a} = 2\hat{i}+y\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\underline{b} = 4\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে y এর মান নির্ণয় কর। [চ.'০২; রা.'০৫; কু.'০৫]

সমাধানঃ $\underline{a} = 2\hat{i}+y\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\underline{b} = 4\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব বলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য।

$(2\hat{i}+y\hat{j}+\hat{k})\cdot(4\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 8-2y-1=0 \Rightarrow 2y=7 \quad a=\dfrac{7}{2}$

12. (a) দেখাও যে, $\underline{a} = 3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ ও $\underline{c} = 2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয়। [ঢা.'০৬]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে যদি এদের যেকোন দুইটির ক্রস গুণনের সাথে অপরটির ডট গুণন শূন্য হয়।

এখন, $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

$= 3(12-5)+2(-4-10)+1(1+6)$

$= 21-28+7 = 28-28 = 0$

প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি সমতলীয়।

12. (b) $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, 2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}, \lambda\hat{i}-\hat{j}+\lambda\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হলে λ এর মান নির্ণয় কর। [য.'০৮]

সমাধান ঃ $i-\hat{j}+\hat{k}, 2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}, \lambda\hat{i}-\hat{j}+\lambda\hat{k}$

ভেক্টর তিনটি সমতলীয় বলে, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ \lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 1(2\lambda-1)+1(2\lambda+\lambda)+1(-2-2\lambda) = 0$

$\Rightarrow 2\lambda-1+3\lambda-2-2\lambda = 0$

$\Rightarrow 3\lambda = 3 \quad \lambda = 1$ (Ans.)

13. (a) দেখাও যে, $\underline{a} = 3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ এবং $\underline{c} = 2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

[ব.'০৩,'১২; ঢা.'০৪,'১৪; রা.'০৭,'১৪; বুয়েট'০৩-০৪]

প্রমাণ : $|\underline{a}| = |3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$|\underline{b}| = |\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$

$|\underline{c}| = |2\hat{i} + j - 4\hat{k}| = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$

$\sqrt{14}$, $\sqrt{35}$ ও $\sqrt{21}$ এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $|\underline{a}|^2 + |\underline{c}|^2 = 14 + 21 = 35 = |\underline{b}|^2$

প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

13. (b) **তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$, $-\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}}$ এবং $-4\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$; দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।**

[ঢা.'০৫,'১৩; সি.,চ.'১০,'১৩; কু.'১৪]

প্রমাণ ঃ ধরি , A, B ও C বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$.

$\overrightarrow{AB} = -i - \hat{j} + 8\hat{k} - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= -2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$

$\overrightarrow{BC} = -4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k} - (-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k})$

$= -3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9+25+4} = \sqrt{38}$

$\overrightarrow{CA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} - (-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})$

$= 5\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38}$

$|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ ও $|\overrightarrow{CA}|$ এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{38}$

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

13. (c) **ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, A (1,–1, –1) , B (3 , 3 , 1) এবং C(– 1, 4 , 4) বিন্দু তিনটি একটি গোলকের উপর অবস্থিত যার কেন্দ্র P(0,1,2)**

প্রমাণ ঃ $\overrightarrow{PA} = (1-0)\hat{i} + (-1-1)\hat{j} + (-1-2)\hat{k}$

$= i - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{PB} = (3-0)\hat{i} + (3-1)\hat{j} + (1-2)\hat{k}$

$= 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{PC} = (-1-0)\hat{i} + (4-1)\hat{j} + (4-2)\hat{k}$

$= -\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$|\overrightarrow{PC}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{14}$

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি P(0,1,2) কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি গোলকের উপর অবস্থিত ।

13.(d) A(0, 1 , 2) , B (–1,3 , 0) , C(1, –1, 1) বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর এবং । $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ । এবং । $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ । নির্ণয় কর **[ঢা.'০৩]**

সমাধানঃ A(0,1,2) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \hat{j} + 2\hat{k}$

B (–1,3 , 0) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= -i + 3\hat{j}$,

C(1, –1, 1) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = (-1-0)\hat{i} + (3-1)\hat{j} + (0-2)\hat{k}$

$= -\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

এবং $\overrightarrow{AC} = (1-0)\hat{i} + (-1-1)\hat{j} + (1-2)\hat{k}$

$= i - 2\hat{j} - \hat{k}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

14. (a) $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ এবং $\vec{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ হলে, $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ হতে তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। **[কু.'০৪]**

সমাধান ঃ $|\vec{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$|\vec{B}| = |\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (4-3)\hat{i} - (4-1)\hat{j} + (6-2)\hat{k}$

$= \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$\sin\theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{14}} \therefore \theta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{13}}{3\sqrt{7}}$

14(b) $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ হলে, $|\vec{A} \times \vec{B}|$ নির্ণয় কর। **[বুয়েট'০০-০১]**

সমাধানঃ $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-2+6)\hat{i} - (-1-9)\hat{j} + (-2-6)\hat{k}$

$= 4\hat{i} + 10\hat{j} - 8\hat{k}$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{16+100+64} = \sqrt{180}$

$= 6\sqrt{5}$

14(c) $(a\hat{i} + b\hat{j} + \hat{k}) \times (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} - \hat{j}$ হলে, a ও b এর মান নির্ণয় কর। **[বুয়েট'০১-০২]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$(a\hat{i} + b\hat{j} + \hat{k}) \times (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} - \hat{j}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j}$

$\Rightarrow (3b-2)\hat{i} - (3a-2)\hat{j} + (2a-2b)\hat{k} = \hat{i} - \hat{j}$

$3b - 2 = 1 \Rightarrow 3b = 3 \quad b = 1$

$3a - 2 = 1 \Rightarrow 3a = 3 \quad a = 1$

14(d) $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে, $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$= (2-3)\hat{i} - (-4-1)\hat{j} + (6+1)\hat{k}$

$= -\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

$= (7+10)\hat{i} - (21-2)\hat{j} + (15+1)\hat{k}$

$= 17\hat{i} - 19\hat{j} + 16\hat{k}$ (Ans.)

14(e) $\underline{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\underline{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}$ হলে $5\underline{a} \times \underline{b}$ এবং $\frac{\underline{b}}{|\underline{a}|}$ নির্ণয় কর। **[চ.'০২]**

সমাধান ঃ $5\underline{a} \times \underline{b} = 5\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$

$= 5\{(21-10)\hat{i} - (-14+5)\hat{j} + (4-3)\hat{k}\}$

$= 5\{11\hat{i} + 9\hat{j} + \hat{k}\} = 55\hat{i} + 45\hat{j} + 5\hat{k}$

$\frac{\underline{b}}{|\underline{a}|} = \frac{-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}}{|2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}|} = \frac{-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{4+9+25}}$

$= \frac{1}{\sqrt{38}}(-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k})$

14(f) যেকোন দুইটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর জন্য প্রমাণ কর যে, $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ এবং $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. **[চ.'০২]**

প্রমাণ ঃ মনে করি, $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$,

$\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$\therefore \vec{A}\cdot\vec{B} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$= b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$

$= (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})\cdot(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$

$= \vec{B}\cdot\vec{A}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

আবার, $\times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$$= - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = - \vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = - \vec{B} \times \vec{A}$$

14(g) প্রমাণ কর যে, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

যেখানে $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$,

$\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ [ঢা.'০১; ব.'০২]

প্রমাণঃ L.H.S. = $\times \vec{B}$

$= (a_1 i + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}) \times (b_1 i + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k})$

$= a_1 b_1 (\hat{i} \times \hat{i}) + a_1 b_2 (\hat{i} \times \hat{j}) + a_1 b_3 (\hat{i} \times \hat{k})$

$+ a_2 b_1 (\hat{j} \times \hat{i}) + a_2 b_2 (\hat{j} \times \hat{j}) + a_2 b_3 (\hat{j} \times \hat{k})$

$+ a_3 b_1 (\hat{k} \times \hat{i}) + a_3 b_2 (\hat{k} \times \hat{j}) + \quad b_3 (\hat{k} \times \hat{k})$

$= a_1 b_1 (\underline{0}) + a_1 b_2 (\hat{k}) + a_1 b_3 (-\hat{j})$

$+ a_2 b_1 (-\hat{k}) + a_2 b_2 (\underline{0}) + a_2 b_3 (\hat{i})$

$+ a_3 b_1 (\hat{j}) + a_3 b_2 (-\hat{i}) + a_3 b_3 (\underline{0})$

$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) j$

$+ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{k}$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ R.H.S. (Proved)

14(h) দুইটি ভেক্টর $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ এর স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, $j = 0$, $\hat{i} . i = 1$; যেখানে ও j যথাক্রমে ও অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর। [চ '১১]

স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা ঃ $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ θ $(0 \le \theta \le \pi)$ ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণনকে $\underline{a} . \underline{b}$ দ্বারা সূচিত করা

$\underline{a} . \underline{b} = |\underline{a}|$ $|\cos\theta$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন একটি স্কেলার রাশি

এখন, $i . \hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos 90^0 = 1 \times 1 \times 0 = 0$

$\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}|\cos 0^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

15. (a) ভেক্টরের সাহায্যে A(1,3,2), B(2,-1, 1) ও C(- 1, 2 , 3) শীর্ষ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৪-০৫]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{AB} = (1-2) + (3 \quad 1)\hat{j} + (2 - 1)k$

$= -\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{AC} \quad (1+1)\hat{} \qquad + (2-3)\hat{k}$

$= 2\hat{i} \qquad \hat{k}$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-4-1)i - (1-2)\hat{j} + (-1-8)\hat{k}$

$= \quad 5\hat{i}$

ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$= \frac{1}{2}|-5\hat{i} + j - 9\hat{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + 1^2 + 9^2}$

$\frac{1}{2}\sqrt{25 \quad 1 + 81} = \frac{1}{2}\sqrt{107}$ বর্গ একক।

15 (b) $\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - k$ একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৬-০৭]

সমাধান ঃ $\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & \\ 4 & & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$= (4-2)i - (-4-2)j \qquad 8 \quad 8)k$

$6\hat{i}$

সামান্তরিকের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $\vec{P} \times$

$= \sqrt{36 + 36}$ বর্গ একক

15(c) একটি ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটির অবস্থান ভেক্টর $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ ও $2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষ তিনটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ ও $2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$.

$$\overrightarrow{AB} = 3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}-(i-2\hat{j}+3\hat{k})$$
$$= 2\hat{i}+7\hat{j}-4\hat{k}$$
$$\overrightarrow{AC} = 2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}-(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$$
$$= \hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$$
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 7 & -4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$
$$= (-49+20)\hat{i}-(-14+4)\hat{j}+(10-7)\hat{k}$$
$$= -29\hat{i}+10\hat{j}+3\hat{k}$$

ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$$= \frac{1}{2}|-29\hat{i}+10\hat{j}+3\hat{k}|$$
$= \frac{1}{2}\sqrt{29^2+10^2+3^2}$ বর্গ একক।

$= \frac{1}{2}\sqrt{841+100+9}$ বর্গ একক।

$= \frac{1}{2}\sqrt{950}$ বর্গ একক $= \frac{5}{2}\sqrt{38}$ বর্গ একক।

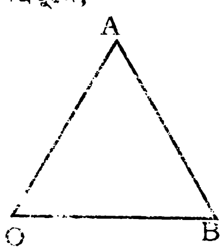
15 (d) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ হলে, OAB ত্রিভুজটির কোণ তিনটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, OAB ত্রিভুজে,

$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$

$\overrightarrow{AO}$ [illegible]

এবং $\overrightarrow{OB}$ [illegible]



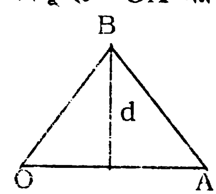
$\overrightarrow{AB} =$ [illegible]

$= -2\hat{i}$ [illegible] $\hat{j}$ $3\hat{k}$

$$= -\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k} \qquad \overrightarrow{BA} = \hat{i}-7\hat{j}-4\hat{k}$$

$$\cos AOB = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$
$$= \frac{(2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})\cdot(\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+16+9}}$$
$$= \frac{2-12-3}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = \frac{-13}{\sqrt{364}}$$
$$\angle AOB = \cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{364}}\right)$$
$$\cos OAB = \frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|}$$
$$= \frac{(-2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})\cdot(-\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+49+16}}$$
$$= \frac{2+21+4}{\sqrt{14}\sqrt{66}} = \frac{27}{\sqrt{924}}$$
$$\angle OAB = \cos^{-1}\left(\frac{27}{\sqrt{924}}\right)$$
$$\cos OBA = \frac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BO}||\overrightarrow{BA}|}$$
$$= \frac{(-i-4\hat{j}-3\hat{k})\cdot(\hat{i}-7\hat{j}-4\hat{k})}{\sqrt{1+16+9}\sqrt{1+49+16}}$$
$$= \frac{-1+28+12}{\sqrt{26}\sqrt{66}} = \frac{39}{\sqrt{1716}}$$
$$\angle OBA = \cos^{-1}\left(\frac{39}{\sqrt{1716}}\right)$$

15. (e) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$ হলে, B বিন্দু হতে OA এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ ধরি, OAB [illegible]

$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{i}$

$\overrightarrow{OB} = 6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$ এবং

B বিন্দু হতে OA এর লম্ব দূরত্ব d .

এখন, $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

$= (-4-3)\hat{i} - (-4+6)\hat{j} + (-6-12)\hat{k}$

$= -7\hat{i} - 2\hat{j} - 18\hat{k}$

$\Delta \text{OAB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}| \times d$

$\Rightarrow \sqrt{7^2+2^2+18^2} = \sqrt{2^2+2^2+1^2}\ d$

$\Rightarrow \text{d} = \frac{\sqrt{377}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{377}}{3}$ একক। (Ans.)

15(f) একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর ধারগুলো $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{C} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত। ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ আয়তাকার ঘনবস্তুটির আয়তন

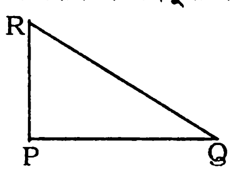
$= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2(4-1) + 3(2+3) + 2(-1-6)$

$= 6 + 15 - 14 = 7$ ঘন একক

15(g) একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু $\vec{A} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত। ত্রিভুজটির কোণগুলো নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, PQR ত্রিভুজে PQ ও PR বাহু দুইটি যথাক্রমে $\vec{A} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i} - j + 3\hat{k}$ দ্বারা নির্দেশিত।



$\overrightarrow{PQ} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{PR} = 4\hat{i} - j + 3\hat{k}$

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$

$= -3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k} + 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

$= \hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k}$

$\cos \text{QPR} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}$

$= \frac{(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{9+36+4}\ \sqrt{16+1+9}}$

$= \frac{12-6-6}{\sqrt{49}\ \sqrt{26}} = \frac{0}{7\sqrt{26}} = 0 = \cos 90^0$

$\angle QPR = 90^0$

$\cos \text{PQR} = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{QR}|}$

$= \frac{(-3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k})}{\sqrt{9+36+4}\ \sqrt{1+49+25}}$

$= \frac{-3+42+10}{\sqrt{49}\ \sqrt{75}} = \frac{49}{7 \times 5\sqrt{3}} = \frac{7}{5\sqrt{3}}$

$\angle PQR = \cos^{-1}(\frac{7}{5\sqrt{3}})$ এবং

$\cos \text{PRQ} = \frac{\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}}{|\overrightarrow{RP}||\overrightarrow{RQ}|}$

$= \frac{(-4\hat{i} + j - 3\hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 7\hat{j} - 5\hat{k})}{\sqrt{16+1+9}\ \sqrt{1+49+25}}$

$= \frac{4+7+15}{\sqrt{26}\ \sqrt{75}} = \frac{26}{\sqrt{26}\ 5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}}$

$\angle PQR = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}})$

ত্রিভুজটির কোণগুলো 90^0 , $\cos^{-1}(\frac{7}{5\sqrt{3}})$ এবং $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}})$

15(h) একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা সূচিত। দেখাও যে, সামান্তরিকটি একটি রম্বস এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

পমাণ ঃ $\vec{A} \cdot \vec{B} = (3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k})$

$= 6 - 12 + 6 = 0.$

সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব । অতএব, সামান্তরিকটি একটি রম্বস ।

এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A}||\vec{B}|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{3^2+4^2+1^2}\ \sqrt{2^2\ \ 3^2\ \ 4^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{9+16+1}\ \sqrt{4+9+36}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{1274} = 17.85$ বর্গ একক (প্রায়)

16.(a) $2\hat{i}+3\hat{j}\ \ 4\hat{k}$ **বিন্দুগামী এবং** $5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k}$ **ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান: ধরি, $\underline{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ এবং

$\underline{b} = 5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k}$

$\underline{a}$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\ \ = \underline{a} + t\underline{b}$ যেখানে একটি প্যারামিটার।

নির্ণেয় রেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$\underline{r} = 2\hat{i}\ \ 3\hat{j}-4\hat{k}\ \ \ t(5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k})$

(b) $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ **বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান: ধরি, $\underline{a} = \hat{i}$ ও $\underline{b} = \hat{j}$.

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b}-\underline{a})$, যেখানে t একটি প্যারামিটার।

নির্ণেয় রেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r} = \hat{i} + t(\hat{j}-\hat{i}) \Rightarrow \underline{r} = \ \ \ \ \ + t$

(c) দেখাও যে, **(2, −3, 4)** এবং (5 , −8) বিন্দুগামী **সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ** $\underline{r} =$ **(2 + 3t)** + **(−3 + 10t)** + **(4 − 12t)**$\hat{k}$ **যেখানে t একটি প্যারামিটার। এর সাহায্যে এর কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।**

প্রমাণ : মনে করি, (− 4) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$\underline{a} = 2\hat{i}-3\hat{j}+$ বিন্দুর অবস্থান

ভেক্টর $\underline{b}$ $5\hat{i}+$

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ বিন্দুগা করণ

$\underline{r} = \underline{a}$

$r =$

$+4\hat{k}$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}+t(3\hat{i}+10\hat{j}-12\hat{k})$

$\underline{r} = (2+3t)\ \hat{i} + (-3+10t)\ \hat{j} + (4-12t)\hat{k}$

দ্বিতীয় অংশ: কার্তেসীয় সমীকরণের ক্ষেত্রে,

$\underline{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+\ \ \hat{k}$

আমরা পাই,

$x\hat{i}+y\hat{j}+\ \ \hat{k} = (2+3t)\ \hat{i} + (-3+10t)\hat{j} + (4-12t)\hat{k}$

উভয় পক্ষ হতে $\hat{i}$ $\hat{j}$, $\hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

x = 2 + 3t, y = −3 +10t, z = 4 − 12t

$\Rightarrow \frac{x-2}{3} = t,\ \frac{y+3}{10} = t,\ \frac{z-4}{-12} = t$

নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ,

$\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{10} = \frac{z-4}{-12}$

প্রশ্নমালা II C

1. **(a)** সবগুলি তথ্য সত্য। ∴ Ans. D

(b) ভেক্টরের বিয়োগ অনুযায়ী $\overline{OA}-\overline{OB} = \overline{BA}$ Ans. B.

(c) *Sol*^{n}. সবগুলি তথ্য সত্য। Ans. D

(d) $2\overline{A}-\overline{B} = 4\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}-(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$

$= -2\hat{i}+7\hat{j}$

$|2\overline{A}-\overline{B}| = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$

(e) নির্ণেয় কোণ $= \cos^{-1}\frac{(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}).\hat{j}}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{1}} = \cos^{-1}\frac{2}{3}$

নির্ণেয় ভেক্টর $= \frac{6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{36+9+4}}\ \ \ \frac{\ \ \hat{j}+2\hat{k}}{7}$

(g) *Sol*^{n} z অক্ষের উপর $\overline{A}$ ভেক্টরটির অংশক $\hat{k}$

x অক্ষ বরাবর $\overline{B}$ ভেক্টরটির অভিক্ষেপ 6,

C. ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর

$\pm\frac{1}{7}(8\hat{i}\ \ \ \hat{j}+3\hat{k})$

(i) $|\overline{A}| = \sqrt{9+4+36}$

(i) $(2\hat{i}+a\hat{j}+\hat{k}).(\quad 2\hat{k})=0$

$\Rightarrow \quad +2a+2=0 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$

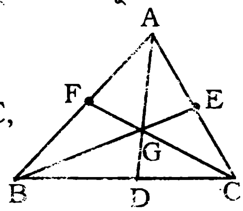
(j) $(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})=(\quad-\vec{B})\cdot(\vec{A}\quad\vec{B})$

$\Rightarrow \quad +B^2+2\vec{A}\ \vec{B}=A^2\quad B^2\quad 2\vec{A}\ \vec{B}$

$\Rightarrow\ 4\qquad =0 \Rightarrow \vec{A}\ \vec{B}=\qquad$ কোণ $=90°$

ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, ত্রিভুজের মধ্যমা **তিনটি** সমবিন্দু। [ঢা. '১১,'১৪; রা. '১২; ব. '১০,'১৪; চ.'০৭; য কু. '১০,'১২,'১৪; মা.বো.'০৯,'১২; দি.'১৪]

প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের B বিন্দুর সাপেক্ষে A ও C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এবং D, E, F বিন্দু তিনটি যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু।



D, E, F এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\frac{\underline{c}}{2}, \frac{\underline{c}+\underline{a}}{2}, \frac{\underline{a}}{2}$

ধরি, BE ও CF মধ্যমা দুইটি যথাক্রমে m 1 ও n 1 অনুপাতে পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

G এর অবস্থান ভেক্টর $\dfrac{m\frac{\underline{c}+\underline{a}}{2}}{m+1}=\dfrac{m\underline{c}+m\underline{a}}{2(m+1)}$

এবং $\dfrac{n\frac{\underline{a}}{2}+\underline{c}}{n+1}=\dfrac{n\underline{a}+2\underline{c}}{2(n+1)}$ অভিন্ন হবে।

$\dfrac{m}{2(m+1)}=\dfrac{n}{2(n+1)} \Rightarrow mn+m=mn+$

$\Rightarrow m=n$ এবং $\dfrac{m}{2(m+1)}=\dfrac{2}{2(n+1)}$

$\Rightarrow \dfrac{m}{m+1}=\dfrac{2}{m+1}\qquad m=2=n$

BE ও CF মধ্যমা দুইটি অনুপাতে পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, BE ও AD মধ্যমা দুইটি 2 1 অনুপাতে পরস্পরকে ছেদ করে। BE মধ্যমা একটি ও কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে 2 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হতে পারে। অতএব AD, BE ও CF মধ্যমা তিনটি 1 অনুপাতে পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

অতএব, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

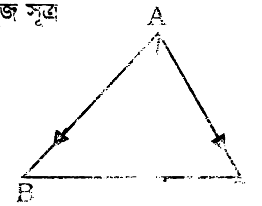
3. ABC ত্রিভুজে, D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু হলে দেখাও যে,

(a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$ [ব.'১১; সি.'১৩]

(b) $AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$.

[য.'০৯,'১৩; কু. '১০; ঢা. '১২; সি.'১০; চ.,দি.'১০; রা.'১১,'১৪; ব.'১৩]

প্রমাণ : (a) ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\qquad$ (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}\qquad+\overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{B}$

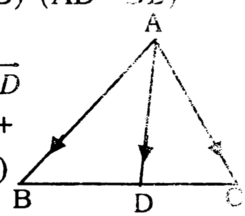
[∵ D বিন্দু এর মধ্যবিন্দু]

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}+$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$

(b) ABD ত্রিভুজে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AD}\quad\overrightarrow{DB})$



$\Rightarrow AB^2=AD^2+DB^2$
$\quad+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow AB^2=AD^2+BD^2+$
$\quad 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}\cdots(1)$

তদ্রূপ ACD ত্রিভুজে,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

$AC^2=AD^2+DC^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow AC^2=AD^2+BD^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}\qquad(2)$

(1) ও (2) যোগ করে পাই,

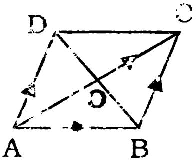
$AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$
$\quad+2\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$

$\therefore AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$

$[\quad\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\underline{0}]$

4. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হবে। [সি.'০৭; ব.'০৭; ঢা. দি '১১; য.'১১; রা.,কু.,সি '১৩]

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABCD রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$ এবং $\overrightarrow{AD}=\underline{b}$ হলে,



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\underline{a}+\underline{b}$

এবং $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$

$=-\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}-\underline{a}$

ধরি, $\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AC}=m(\underline{a}+\underline{b})$ এবং

$\overrightarrow{BO}=n\overrightarrow{BD}=n(\underline{b}-\underline{a})$

এখন, $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$

$\Rightarrow m(\underline{a}+\underline{b})=\underline{a}+n(\underline{b}-\underline{a})$

$\Rightarrow m\underline{a}+m\underline{b}=\underline{a}+n\underline{b}-n\underline{a}$

$\Rightarrow (m-n)\underline{b}+(m+n-1)\underline{a}=\underline{0}$

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমান্তরাল ভেক্টর বলে,

$m-n=0\Rightarrow m=n$ এবং

$m+n-1=0\Rightarrow m+m=1 \;\therefore m=\frac{1}{2}=n$

$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$ এবং $|\overrightarrow{BO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|$

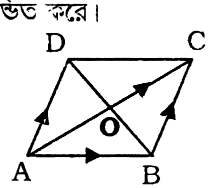
আবার, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{b}-\underline{a})$

$=|\underline{b}|^2-|\underline{a}|^2=0$, কারণ রম্বসের চারটি বাহু পরস্পর সমান।

অতএব, AC ও BD কর্ণ দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে সমদ্বিখন্ডিত করে।

5. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করে।



$\therefore \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ এবং $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$

এখন, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\cdots(1)$

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}$ [$\because \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ ও $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$]

$\Rightarrow \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\cdots(2)$

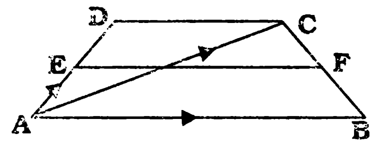
(1) ও (2) হতে পাই, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\therefore$ AB = DC এবং AB ∥ DC [$\because$ AB ও DC একই রেখা হতে পারে না।]

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

6. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

প্রমাণ ঃ



মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AD ও BC অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F এবং A বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে মনে করি, B ও D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অর্থাৎ $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{b}$.

AB ∥ DC বলে যেকোন স্কেলার রাশি m এর জন্য $\overrightarrow{DC}=m\overrightarrow{AB}=m\underline{a}$.

ΔABC এ, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\underline{b}+m\underline{a}$

$\therefore$ C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $=\underline{b}+m\underline{a}$

$\therefore$ AD এর মধ্যবিন্দু E এর অবস্থান ভেক্টর $=\frac{\underline{b}}{2}$

BC এর মধ্যবিন্দু F এর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b}+m\underline{a})$

$\therefore \overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b}+m\underline{a})-\frac{\underline{b}}{2}$

$=\frac{1}{2}(1+m)\underline{a}=\frac{1}{2}(1+m)\overrightarrow{AB}$

$\therefore$ *EF* বাহু AB এর সমান্তরাল। অতএব, *EF* DC এরও সমান্তরাল।

আবার, $|\overrightarrow{EF}|=\frac{1}{2}(1+m)|\overrightarrow{AB}|$

$=\frac{1}{2}\{|\overrightarrow{AB}|+|m\overrightarrow{AB}|\}$

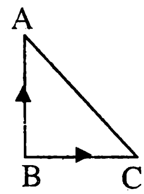
$=\frac{1}{2}\{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|\}$

$$EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

7. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের বর্গ অন্য দুই বাহুর বর্গের যোগফলের সমান।

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে, AC অতিভুজ এবং B বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A ও C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{c}$.



$\angle ABC = 90^0$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ বা, $\underline{a} \cdot \underline{c} = 0$

এখন, $\overrightarrow{CA} = \underline{a} - \underline{c}$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} = (\underline{a} - \underline{c}) \cdot (\underline{a} - \underline{c})$

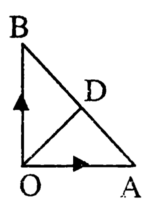
$\Rightarrow CA^2 = a^2 + c^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{c} = a^2 + c^2$

$CA^2 = AB^2 + BC^2$

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের বর্গ অন্য দুই বাহুর বর্গের যোগফলের সমান।

8. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলো হতে সমদূরবর্তী।

প্রমাণ ঃ মনে করি, OAB সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AB এর মধ্যবিন্দু D এবং O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$.



$\angle ABC = 90^0$

$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ বা, $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

AB এর মধ্যবিন্দু D এর অবস্থান

ভেক্টর$= \frac{a+b}{2} \therefore \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} + \underline{b})$$

$$\Rightarrow OD^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2\underline{a} \cdot \underline{b}) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

$$OD = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\overrightarrow{DA} = \underline{a} - \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b})$$

$$\overrightarrow{DB} = \underline{b} - \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$$

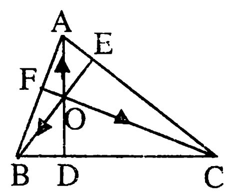
$$DA^2 = DB^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{b})$$

$$\Rightarrow DA^2 = DB^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

$$DA = DB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$\therefore$ একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলো হতে সমদূরবর্তী।

9. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।



প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A ও B হতে BC ও CA বাহুর উপর যথাক্রমে AD ও BE লম্ব দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে এবং O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A , B C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$. C,O এর সংযোগ রেখাংশের বর্ধিতাংশ AB কে F বিন্দুতে ছেদ করে।

$AD \perp BC \quad AO \perp BC$

$\underline{a} \cdot (\underline{c} - \underline{b}) = 0 \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdots (1)$

$BE \perp AC \quad BO \perp AC$

$\underline{b} \cdot (\underline{c} - \underline{a}) = 0 \Rightarrow \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdots (2)$

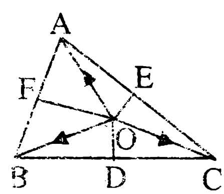
(1) ও (2) হতে পাই, $\underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c}$

$\Rightarrow \underline{c} \cdot (\underline{a} - \underline{b}) = 0$

$OC \perp AB$ অর্থাৎ $CF \perp AB$

শীর্ষবিন্দুগুলি থেকে বিপরীত বাহুর লম্বত্রয় সমবিন্দু।

10. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।



প্রমাণ মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষ D E F যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু এবং O বিন্দু BC ও CA এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু। O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A B C এর অবস্থান ভেক্টর ... a

D E ও F এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})$, $\frac{1}{2}(\underline{c}+\underline{a})$ ও $\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$.

$OD \perp BC$ এবং $OE \perp AC$ বলে,

$$\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})\cdot(\underline{c}-\underline{b})=0 \Rightarrow |\underline{c}|^2-|\underline{b}|^2=0\cdots(1)$$

$$\frac{1}{2}(\underline{c}+\underline{a})\cdot(\underline{a}-\underline{c})=0 \Rightarrow |\underline{a}|^2-|\underline{c}|^2=0\cdots(2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow |\underline{a}|^2-|\underline{b}|^2=0$$

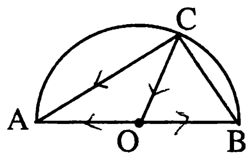
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{a}-\underline{b})=0$$

$OF \perp AB$ অতএব, OF AB বাহুর লম্ব সমদ্বিখন্ডক।

ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্ব সমদ্বিখন্ডকত্রয় সমবিন্দু।

11. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে,অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। [ঢা.,চ.'১৩; সি.'০৯,'১২; রা.'১০;ব.,কু'১১]

প্রমাণ ঃ মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AB ব্যাস এবং পরিধির উপর C একটি বিন্দু ।



OA = OB = OC = ব্যাসার্ধ

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})$$

$$= (\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{BO})$$

$$= (\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OA})$$

[কেন্দ্র O , AB ব্যাসের মধ্যবিন্দু ।]

$$= \overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}$$

$$= |\overrightarrow{CO}|^2+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA}-|\overrightarrow{OA}|^2$$

$$= CO^2-OA^2=0$$

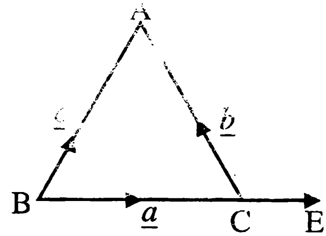
$AC \perp BC$ অর্থাৎ $\angle ACB$ = এক সমকোণ

অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

12. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজ ABC তে (a) $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ [ঢা '১০,'১৪; রা. '১০; য.'১০; সি '১০; কু '১, চ. ১৩]

প্রমাণ ঃ ধরি ABC ত্রিভুজে, $\overrightarrow{BC}=\underline{a}, \overrightarrow{CA}=\underline{b}$

BC ... বর্ধিত করা হলো



ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow \underline{c} = \underline{a}+\underline{b}$$

$$\underline{c}\cdot\underline{c} = (\underline{a}+\underline{b})\ (\underline{a}+\underline{b})$$

$$= \underline{a}\cdot\underline{a}+\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{b}\cdot\underline{b}$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2+b^2+2\,\underline{a}\cdot\underline{b}$$

[$\underline{a}\cdot\underline{a}=a^2$ এবং $\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a}$]

$$\Rightarrow c^2 = a^2+b^2+2|\underline{a}||\underline{b}|\cos ACE$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2+b^2+2ab\cos(\pi - C)$$

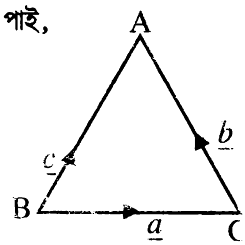
[$\angle ACE = \pi - \angle C$]

$$= a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

(b) $c = a\cos B + b\cos A$ [কু.'০৮,'১১; চ.'১১]

প্রমাণ ঃ ধরি ABC ত্রিভুজে, $\overrightarrow{BC}=\underline{a}, \overrightarrow{CA}=\underline{b}$, $\overrightarrow{BA}=\underline{c}$.



ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow \underline{c}=\underline{a}+\underline{b}$$

$$\underline{c}\cdot\underline{c}=\underline{c}\cdot(\underline{a}+\underline{b})$$

$$\Rightarrow c^2=\underline{c}\cdot\underline{a}+\underline{c}\cdot\underline{b}$$

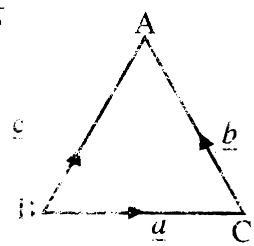
$$\Rightarrow c^2 = ca\cos B + cb\cos A$$

$$c = a\cos B + b\cos A$$

(c) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

প্রমাণ ঃ ধরি ABC ত্রিভুজে,

$\overrightarrow{BC}=\underline{a}$, $\overrightarrow{CA}=\underline{b}$, $\overrightarrow{BA}=\underline{c}$



$\Rightarrow \underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$

$\underline{c}\times\underline{c} = \underline{c}\times(\underline{a} + \underline{b})$

$\Rightarrow \underline{c}\times\underline{c} = \underline{c}\times\underline{a} + \underline{c}\times\underline{b}$

$\Rightarrow \underline{0} = -\underline{a}\times\underline{c} + \underline{c}\times\underline{b}$

$\underline{a}\times\underline{c} = \underline{c}\times\underline{b}\cdots\cdots(1)$

আবার, $\underline{a}\times\underline{c} = \underline{a}\times(\underline{a} + \underline{b})$

$\Rightarrow \underline{a}\times\underline{c} = \underline{a}\times\underline{a} + \underline{a}\times\underline{b}$

$\Rightarrow \underline{a}\times\underline{c} = \underline{a}\times\underline{b}\cdots(2)$ [$\underline{a}\times\underline{a} = \underline{0}$]

(1) ও (2) হতে পাই, $\underline{a}\times\underline{c} = \underline{c}\times\underline{b} = \underline{a}\times\underline{b}$

$\Rightarrow ac\sin B\ \hat{n} = cb\sin A\ \hat{n}$

$= ab\sin(\pi - C)\ \hat{n}$ যখন $\hat{n}$ হল ΔABC সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর।

$$\Rightarrow \frac{ac\sin B}{abc} = \frac{bc\sin A}{abc} = \frac{ab\sin C}{abc}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

13. $\overline{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ **এবং** $\overline{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$.

(a) $\overline{A}$ **ভেক্টর বরাবর** $\overline{B}$ **ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর।**

(b) দেখাও যে, $\overline{A} + \overline{B}$ **এবং** $\overline{A} - \overline{B}$ **ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [রা.'০৬; ঢা.'০৩,'০৪,'০৮; য.'০৭; চ.'০৭,'১২,'১৪; মা.বো.'০৮; দি.'১০; ব.'১০,'১২; মা.'১৪; বুয়েট'১১-১২]**

(c) দেখাও যে, $\overline{A}$, $\overline{A} - \overline{B}$ **এবং** $4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ **ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।**

সমাধান: (a) $|\overline{A}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\overline{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{\overline{A}}{|\overline{A}|}$

$$= \frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{14}} = \hat{A}$$

$\overline{A}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{B}$ ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর

$$= (\hat{A}.\overline{B})\hat{A} = \{\frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{14}}.(3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})\}\hat{A}$$

$$= \frac{3-2-6}{\sqrt{14}}\hat{A} = -\frac{5}{\sqrt{14}}\frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{14}}$$

$$= -\frac{5}{14}(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

(b) প্রশ্নমালা IIB এর 10(c).

(c) প্রমাণ ঃ $\overline{A} - \overline{B} =$

দেখাও যে, $\overline{A}$, $\overline{A} - \overline{B}$ **এবং** $4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ **ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।**

প্রমাণ ঃ $|\overline{A}| = |\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$|\overline{A} - \overline{B}| = |-2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$

$|4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}| = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24}$

$\sqrt{14}$, $\sqrt{38}$ ও $\sqrt{24}$ এর যেকোনো দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $(\sqrt{14})^2 + (\sqrt{24})^2 = 14 + 24 = 38 = (\sqrt{38})^2$

প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

14. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F ।

(a) প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$

[ঢা. '০৭; য. '০৬,'১১; চ.'০৬; রা.'১১'১৩; সি.'০৯, '১২ ; ব. '০৭,'১২; দি.'১৩]

(b) ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, AD, BE ও CF সমবিন্দু।

[ঢা. '১১,'১৪; রা. '১২; ব. '১০,'১৪; চ.'০৭; য.'১০; কু. '১০,'১২,'১৪; মা.বো.'০৯,'১২; দি.'১৪]

(c) B, C ও D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, –3, 0), (4, – 4, 1) ও (1, 2, – 6) হলে DE এর ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(a) প্রশ্নমালা IIA এর উদাহরণ 1(c)

(b) প্রশ্নমালা IIC এর 2 নং প্রশ্ন।

(c) প্রশ্নমালা IIB এর উদাহরণ 9

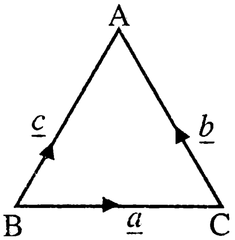
15. মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ **ও** $\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ **।**

(a) $\overrightarrow{OA}$ **ভেক্টরের উপর** $\overrightarrow{OB}$ **ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।**

(b) A বিন্দুগামী এবং $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(c) OAB ত্রিভুজটির কোণ তিনটি নির্ণয় কর।

সমাধান:



(a) $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরের উপর $\overrightarrow{OB}$ ভক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{(2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}).(\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})}{|2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}|}$$

$$= \frac{2-12-3}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{-13}{\sqrt{14}}$$

(b) $\overrightarrow{AB} = (\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}) - (2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})$

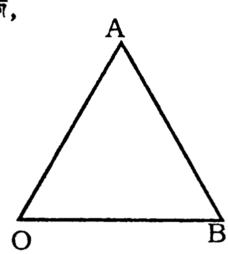
$= -\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k}$

$A(\underline{a})$ বিন্দুগামী এবং $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}+t(-\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k})$; যেখানে t একটি প্যারামিটার।

(c) দেওয়া আছে, OAB ত্রিভুজে,



$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$

$\overrightarrow{AO} = -2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

এবং $\overrightarrow{OB} = \hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$

$\overrightarrow{BO} = -i-4\hat{j}-3\hat{k}$

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$= -2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k} + \hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$

$= -i+7\hat{j}+4\hat{k} \qquad \overrightarrow{BA} = i-7\hat{j}-4\hat{k}$

$$\cos AOB = \frac{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$

$$= \frac{(2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})\cdot(\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+16+9}}$$

$$= \frac{2-12-3}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = \frac{-13}{\sqrt{364}}$$

$$\angle AOB = \cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{364}}\right)$$

$$\cos OAB = \frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|}$$

$$= \frac{(-2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})\cdot(-\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+49+16}}$$

$$= \frac{2+21+4}{\sqrt{14}\sqrt{66}} = \frac{27}{\sqrt{924}}$$

$$\angle OAB = \cos^{-1}\left(\frac{27}{\sqrt{924}}\right)$$

$$\cos OBA = \frac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BO}||\overrightarrow{BA}|}$$

$$= \frac{(-i-4\hat{j}-3\hat{k})\cdot(\hat{i}-7\hat{j}-4\hat{k})}{\sqrt{1+16+9}\sqrt{1+49+16}}$$

$$= \frac{-1+28+12}{\sqrt{26}\sqrt{66}} = \frac{39}{\sqrt{1716}}$$

*** একটি বস্তুর উপর $\bar{F}$ বলের ক্রিয়ার ফলে বস্তুটির সরণ $\bar{r}$ হলে, কাজ = $\bar{F}.\bar{r}$**

*** O এর সাপেক্ষে $\bar{F}$ বলের ক্রিয়ারেখার উপরস্থ কোন বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\bar{r}$ হলে, O এর চতুর্দিকে $\bar{F}$ বলের মোমেন্ট = $|\bar{r} \times \bar{F}|$**

***** $\bar{r} = 3\hat{i}+8\hat{j}-2\hat{k} + t(2\hat{i}-j+3\hat{k})$ ও $\bar{r} = 7\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k} + s(2\hat{i}+j+4\hat{k})$ **সরলরেখাদ্বয় ছেদ করে কিনা পরীক্ষা কর এবং যদি ছেদ করে তবে ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।**

সমাধান: $\bar{r} = (3+2t)\hat{i}+(8-t)\hat{j}+(-2+3t)\hat{k}$

এবং $\bar{r} = (7+2s)\hat{i} + (4+s)\hat{j} + (3+4s)\hat{k}$ রেখাদ্বয় ছেদ করলে, $3 + 2t = 7 + 2s \quad \cdots$ (i),

$8 - t = 4 + s \cdots$ (ii) এবং

$-2 + 3t = 3 + 4s \cdots \cdots$ (iii) সত্য হবে।

(i) + (ii) $\times 2 \Rightarrow 3 + 16 = 7 + 8 + 4s$

$\Rightarrow 4s = 4 \Rightarrow s = 1$

(ii) হতে পাই, $8 - t = 4 + 1 \Rightarrow t = 3$

$s = 1, t = 3$ এর জন্য (iii) এর

বামপক্ষ $= -2 + 3\times3 = 7$ এবং

ডানপক্ষ $= 3 + 4\times1 = 7$ সমান।

সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে।

ছেদবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= 9\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ও $\lambda\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ **ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে λ এর মান – [DU 02-03, 06-07; NU 08-09, 05-06; RU 12-13,09-10]**

$Sol^n.\ 4\lambda - 6 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

2. $\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ ও $m\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ **ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে m এর মান – [BUET 07-08]**

$Sol^n.\ m + 6 - 24 = 0 \Rightarrow m = 18$

3. $\overrightarrow{F_1} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ ও $\overrightarrow{F_2}$ **বল দুইটির লব্ধি** $\overrightarrow{F_3} = 5\hat{i} + 4\hat{j}$ **হলে** $\overrightarrow{F_2} = ?$ **[DU 06-07]**

$Sol^n.\ \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3} \Rightarrow \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3} - \overrightarrow{F_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{F_2} = (5\hat{i} + 4\hat{j}) - (2\hat{i} - 3\hat{j}) = 3\hat{i} + 7\hat{j}$

4. $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ **এবং** $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ **হলে** $\vec{A}\cdot\vec{B} = ?$ **[DU 01-02]**

$Sol^n.\ \vec{A}\cdot\vec{B} = 2 - 2 - 3 = -3$

5. $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ **ভেক্টর বরাবর** $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ **ভেক্টরের উপাংশের মান– [CU 07-08]**

$Sol^n.$ মান $= \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \dfrac{4 + 20 - 11}{\sqrt{4 + 100 + 121}} = \dfrac{13}{15}$

6. $\vec{Y} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ **ভেক্টরের উপর** $\vec{X} = -\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ **এর অভিক্ষেপ– [CU 07-08]**

$Sol^n.$ অভিক্ষেপ $= \dfrac{\vec{X}\ \vec{Y}}{|\vec{Y}|} = \dfrac{-2 - 3 - 20}{\sqrt{4 + 9 + 25}} = \dfrac{-25}{\sqrt{38}}$

7. $\vec{X} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ **এবং** $\vec{Y} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ **ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ– [CU 07-08]**

$Sol^n.\ \cos\theta = \dfrac{\vec{X}\cdot\vec{Y}}{|\vec{X}||\vec{Y}|}$

$= \dfrac{12 - 2 - 10}{\sqrt{16 + 4 + 25}\sqrt{9 + 1 + 4}} = 0 \therefore \theta = 90°$

8. $2\hat{i} - 3\hat{k}$ **এবং** $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ **ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ– [BUET 07-08]**

$Sol^n.\ \cos\theta = \dfrac{2 + 0 - 3}{\sqrt{4 + 9}\sqrt{1 + 1 + 1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{13}\sqrt{3}}$

$\theta = \cos^{-1}(\dfrac{-1}{\sqrt{39}})$

9. a **এর মান কত হলে,** $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ **এবং** $\vec{B} = 15\hat{i} + a\hat{j} + 9\hat{k}$ **ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে। [IU 07-08]**

$Sol^n.\ \vec{A}$ ও $\vec{B}$ সমান্তরাল বলে, $\dfrac{5}{15} = \dfrac{2}{a} = \dfrac{3}{9}$

$a = 6$

10. দুইটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ **এবং** $\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ **দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি একক লম্ব ভেক্টর – [SU 06-07]**

$Sol^n.\ \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$= (6 + 9)\hat{i} - (-2 + 12)\hat{j} + (6 + 24)\hat{k}$

$$\hat{\eta} = \pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \pm\frac{15\hat{i}-10\hat{j}+30\hat{k}}{\sqrt{225+100+900}}$$

$$= \pm\frac{1}{7}(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})$$

11. $|\vec{A}\times\vec{B}|^2+|\vec{A}\cdot\vec{B}|^2$ **এর মান–**

***Sol**^{n}*. $|\vec{A}\times\vec{B}|^2+|\vec{A}\cdot\vec{B}|^2$

$= (AB\sin\theta)^2+(AB\cos\theta)^2$

$= A^2B^2$

12. $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ **একক ভেক্টর হলে** $\hat{i}\cdot(\hat{j}\times\hat{k}) = ?$

***Sol**^{n}*. $i\cdot(\hat{j}\times\hat{k}) = \hat{i}\cdot\hat{i} = 1$

13. m ভরের একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত $\vec{F} = 5\vec{x}+4\vec{y}$ **বলের কারণে বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট দিকে গতিশীল বস্তুটি উপর যে বল প্রয়োগ করলে বস্তুটির গতিপথের সাথে 45°** কোণ তৈরী করবে সে বলের মান কত? **[RU 07-08]**

***Sol**^{n}*. $(5\vec{x}+4\vec{y})\cos 45°$

14. যদি বল $\vec{F} = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ **এর সরণ** $\vec{S} = \hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$ **হয় হবে কাজ W = ? [RU 06-07]**

***Sol**^{n}*. $W = \vec{F}\ \vec{S} = 2+6+5 = 13$

15. যদি প্রযুক্ত বল $\vec{F} = 5\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ **এর ঘূর্ণায়মান কণার অক্ষের সাপেক্ষে অবস্থান ভেক্টর** $\vec{r} = 2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ **হয় তবে বলের মোমেন্ট T এর মান কত? [RU 06-07]**

***Sol**^{n}*.: $\vec{T} = \vec{F}\times\vec{r} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}$

$= (6-1)\hat{i} - (9+2)\hat{j} + (-3-4)\hat{k}$

$= 5\hat{i}-11\hat{j}-7\hat{k}$

$T = |\vec{T}| = \sqrt{25+121+49} = \sqrt{195}$

16. XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ **ভেক্টরের সাথে লম্ব একক ভেক্টর হবে–**

***Sol**^{n}*.: XOZ তলের সমান্তরাল বলে $\hat{i}$ ও $\hat{k}$ উপাংশ থাকবে। XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব ভেক্টর $4\hat{i}-3\hat{k}$. **[BUET 10-11]**

নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \dfrac{4\hat{i}-3\hat{k}}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{4\hat{i}-3\hat{k}}{5}$

সরলরেখা

প্রশ্নমালা III A

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

1. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ হলে, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

2. (i) $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব x-অক্ষ হতে $= |y|$ এবং y-অক্ষ হতে $= |x|$

(ii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

(iii) $P(r_1, \theta_1)$ এবং $Q(r_2, \theta_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{{r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$

3. (i) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $R(x, y)$ বিন্দু $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে, $R \equiv \left(\dfrac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \dfrac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$, $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x_1-x}{x-x_2} = \dfrac{y_1-y}{y-y_2}$

বহির্বিভক্ত করলে, $R \equiv \left(\dfrac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \dfrac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$, $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x_1-x_2}{x_2-x} = \dfrac{y_1-y_2}{y_2-y}$

(ii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

(iii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{kx_2+x_1}{k+1}, \dfrac{ky_2+y_1}{k+1}\right)$

4. (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) শীর্ষ বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

5. ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ হলে, বিন্দুত্রয়ের নিশ্চায়ক,

$$\delta_{ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} = (x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)$$

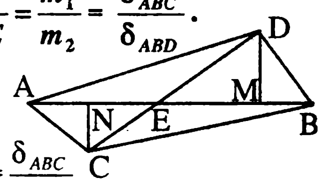
$= (x_1-x_2)(y_2-y_3)-(y_1-y_2)(x_2-x_3)$ এবং $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \mid \delta_{ABC} \mid = \dfrac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right|$ বর্গ একক

6. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) বিন্দুগুলি সমরেখ হলে, $(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(y_1-y_2)(x_2-x_3) = 0$.

7. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \mid (x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_4+y_4x_1) \mid$

8. C ও D বিন্দুদ্বয় AB রেখার একই পার্শ্বে হলে , $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} > 0$ এবং বিপরীত পার্শ্বে হলে, $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} < 0$

9. AB রেখাটি CD রেখাংশকে E বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপতে বিভক্ত করলে $\dfrac{CE}{DE} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}}$.



প্রমাণ ঃ AB এর উপর CN ও DM লম্ব হলে, ΔCNE ও ΔDME সদৃশ।

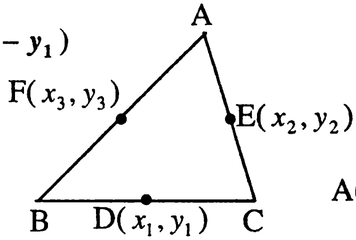
$$\frac{CN}{DM} = \frac{CE}{DE} = \frac{m_1}{m_2} \qquad \frac{\Delta ABC}{\Delta ABD} = \frac{\frac{1}{2}\delta_{ABC}}{\frac{1}{2}\delta_{ABD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times CN}{\frac{1}{2}AB \times DM} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}}$$

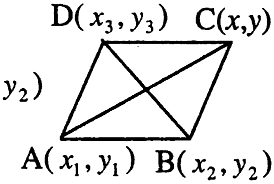
ক্রম ভিন্ন বলে অনুপাত ঋণাত্মক হবে। অতএব, অনুপাত (+) হলে বহির্বিভক্ত করবে এবং (–) হলে অন্তর্বিভক্ত করবে।

MCQ এর জন্য, 1. $A \equiv (x_2 + x_3 - x_1, y_2 + y_3 - y_1)$

$B \equiv (x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$

$C \equiv (x_1 + x_2 - x_3, y_1 + y_2 - y_3)$





2. ABCD সামান্তরিকের চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$(x, y) = (x_2 + x_3 - x_1, y_2 + y_3 - y_1)$

3. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \sqrt{3}(y_1 - y_2)}{2}, \frac{y_1 + y_2 - \sqrt{3}(x_1 - x_2)}{2}\right) \text{ বা, } \left(\frac{x_1 + x_2 - \sqrt{3}(y_1 - y_2)}{2}, \frac{y_1 + y_2 + \sqrt{3}(x_1 - x_2)}{2}\right)$$

প্রশ্নমালা III A

1. x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে এর দূরত্বের দ্বিগুণ। x- অক্ষ হতে এর দূরত্ব 4 একক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).

x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |\beta|$ এবং

y-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |\alpha|$

প্রশ্নমতে, $|\beta| = 4 \Rightarrow \beta = \pm 4$ এবং

$|\beta| = 2|\alpha| \Rightarrow 2|\alpha| = 4$

$\Rightarrow |\alpha| = 2 \Rightarrow \alpha = \pm 2$

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 4)$, $(2, -4)$, $(-2, 4)$ অথবা, $(-2, -4)$

2(i) কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর, যখন $r \geq 0$ এবং $\theta \in [0, 2\pi[$ অথবা, $\theta \in]-\pi, \pi]$

(a) $(-1, -\sqrt{3})$ (b) $(1, -\sqrt{3})$

সমাধান : (a) ধরি, $(-1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ এবং

$\theta \in [0, 2\pi[$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}$

$= \pi + \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$

$\theta \in]-\pi, \pi]$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}$

$= -\pi + \tan^{-1}\sqrt{3} = -\pi + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}$

$(-\sqrt{3}, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \dfrac{4\pi}{3})$ অথবা, $(2, -\dfrac{2\pi}{3})$.

(b) ধরি, $(1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ এবং

$\theta \in]-\pi, \pi]$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-\sqrt{3}}{1}$

$= -\tan^{-1}\sqrt{3} = -\dfrac{\pi}{3}$

$\theta \in]-\pi, \pi]$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-\sqrt{3}}{1}$

$= 2\pi - \tan^{-1}\sqrt{3} = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$

$(1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, -\dfrac{\pi}{3})$.বা, $(2, \dfrac{5\pi}{3})$

(ii) পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর :

(a) $(\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4})$ (b) $(-2, 120°)$ (c) $(\sqrt{2}, -\dfrac{\pi}{4})$

2(ii) সমাধান ঃ (a) $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$= (\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4}, \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4})$

$= (\sqrt{2}\cos(\pi+\frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(\pi+\frac{\pi}{4}))$

$= (\sqrt{2}\cos(\pi+\frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(\pi+\frac{\pi}{4}))$

$= (-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4})$

$= (-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}) = (-1, -1)$

(b) $(-2, 120°)$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$= (-2\cos 120^0, -2\sin 120^0)$

$= (-2\cos(90^0+30^0), -2\sin(90^0+30^0))$

$= (2\sin 30^0, -2\cos 30^0)$

$= (2\cdot\frac{1}{2}, -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}) = (1, -\sqrt{3})$

(c) $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$= (\sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4}))$

$= (\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4})$

$= (\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}) = (1, -1)$

3. পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে এবং কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর ঃ

(a) $y = x\cot\alpha$ **(b)** $r^2 = a^2\cos 2\theta$.

সমাধান : (a) $y = x\cot\alpha$

$\Rightarrow r\sin\theta = r\cos\theta\cot\alpha$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}-\alpha$ (Ans.)

(b) $r^2 = a^2\cos 2\theta$

$\Rightarrow r^2 = a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$\Rightarrow r^2 = a^2(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2})$

$[\because x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

$\Rightarrow (r^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ (Ans.)

4(a) দেখাও যে, $(2\sqrt{3}, 90°)$, $(2, 120°)$ এবং $(2, 60°)$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় $A(2\sqrt{3}\quad 90°)$, $B(2, 120°)$ ও $C(2, 60°)$

$\therefore AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2.2\sqrt{3}.2\cos(90^0-120^0)}$

$= \sqrt{12+4-8\sqrt{3}\cos 30^0} = \sqrt{16-8\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \sqrt{16-12} = 2$

$BC = \sqrt{4+4-8\cos 60^0} = \sqrt{8-8.\frac{1}{2}} = 2$

$CA = \sqrt{4+12-8\sqrt{3}\cos 30^0}$

$= \sqrt{16-8\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{16-12} = 2$

AB,BC,CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং AB = CA = CA = 2.

প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

4(b) P(4 , 0) এবং Q(0 , 4) বিন্দুদ্বয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $R(x, y)$. $\therefore PQ^2 = QR^2 = RP^2$

এখন, $QR^2 = RP^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow (0-x)^2 + (4-y)^2 = (x-4)^2 + (y-0)^2$

$\Rightarrow x^2 + 16 - 8y + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$

$\Rightarrow -8y = -8x \Rightarrow y = x \qquad (1)$

$PQ^2 = QR^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow 4^2 + 4^2 = x^2 + 16 - 8y + y$

$\Rightarrow 32 = x^2 + 16 - 8x + x^2 \quad [\quad y = x]$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 16 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 8 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16-(-32)}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

$y = 2 + 2\sqrt{3}$, যখন $x = 2 + 2\sqrt{3}$ এবং

$y = 2 - 2\sqrt{3}$, যখন $x = 2 - 2\sqrt{3}$

তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(2 + 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3})$ বা, $(2 - 2\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3})$

[বি.দ্র.: MCQ এর ক্ষেত্রে ,তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক =

$$\left(\frac{4+0+\sqrt{3}(0-4)}{2}, \frac{0+4-\sqrt{3}(4-0)}{2}\right) \text{ বা, }$$

$$\left(\frac{4+0-\sqrt{3}(0-4)}{2}, \frac{0+4+\sqrt{3}(4-0)}{2}\right) \text{ অর্থাৎ}$$

$(2-2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3})$ বা, $(2+2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3})$]

4(c) A ও B দুইটি স্থির বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 4) ও (3 , 6) । AB বাহুর উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর C বিন্দুটি AB রেখার সাপেক্ষে মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত হলে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $C(x, y)$. $\therefore \; AB^2 = BC^2 = CA^2$

এখন, $BC^2 = CA^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow (3-x)^2 + (6-y)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$

$\Rightarrow (6-y)^2 - (y-4)^2 = 0$

$\Rightarrow (6-y+y-4)(6-y-y+4) = 0$

$\Rightarrow 2(-2y+10) = 0 \Rightarrow y = 5 \cdots\cdots (1)$

$AB^2 = BC^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow |4-6|^2 = (3-x)^2 + (6-y)^2$

$\Rightarrow 4 = 9 - 6x + x^2 + (6-5)^2 \; [\because y = 5]$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36-24}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

A ও B বিন্দুর ভুজ 3 এবং C বিন্দুটি AB রেখার সাপেক্ষে মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত বলে, C এর ভুজ 3 অপেক্ষা বেশী হবে।

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3 + \sqrt{3}, 5)$

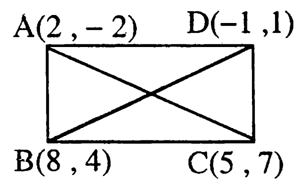
[বি. দ্র. MCQ এর ক্ষেত্রে , তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{3+3-\sqrt{3}(4-6)}{2}, \frac{4+6+\sqrt{3}(3-3)}{2}\right)$$

$= (3 + \sqrt{3}, 5)$]

5(a) দেখাও যে, (2 , – 2) , (8 , 4) , (5 , 7) এবং (– 1 , 1) বিন্দুগুলি একটি আয়তের কৌনিক বিন্দু।

প্রমাণ : ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(2 , – 2) , B(8, 4), C (5 , 7) , D(– 1, 1).



$$AB = \sqrt{(2-8)^2 + (4+2)^2}$$

$$= \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$$

$BC = \sqrt{(8-5)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{(5+1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$

$DA = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

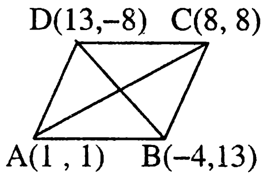
$AC = \sqrt{(2-5)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{9+81} = 3\sqrt{10}$

$BD = \sqrt{(8+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}$

ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান অর্থাৎ $AB = CD = 6\sqrt{2}$, $BC = DA = 3\sqrt{2}$ এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান অর্থাৎ $AC = BD = 3\sqrt{10}$

প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি আয়তের কৌনিক বিন্দু।

5(b)দেখাও যে, (1,1), (–4, 13), (8, 8) এবং (13, – 4) বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌনিক বিন্দু। [দি.'১১]



প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(1 , 1), B(–4, 13), C (8 , 8) ও D(13, – 4).

$\therefore AB = \sqrt{(1+4)^2+(1-13)^2}$

$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$BC = \sqrt{(-4-8)^2+(13-8)^2}$

$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

$CD = \sqrt{(8-13)^2+(8+4)^2}$

$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$DA = \sqrt{(13-1)^2+(-4-1)^2}$

$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

$AC = \sqrt{(1-8)^2+(1-8)^2} = \sqrt{2\times 49} = 7\sqrt{2}$

$BD = \sqrt{(-4-13)^2+(13+4)^2} = 17\sqrt{2}$

ABCD চতুর্ভুজের চারটি বাহু পারস্পর সমান অর্থাৎ AB = BC = CD = DA =13 এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর অসমান অর্থাৎ $AC \neq BD$

প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌনিক বিন্দু।

5(c) দেখাও যে, A (a,b), B (a + α , b + β), C (a+α + p,b + β + q) এবং D(a + p,b + q) বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। কি শর্তে ABCD (i) একটি আয়তক্ষেত্র (ii) একটি রম্বস তা নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ $AB = \sqrt{(a-a-\alpha)^2+(b-b-\beta)^2}$

$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$BC = \sqrt{(-p)^2+(-q)^2} = \sqrt{p^2+q^2}$

$CD = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$DA = \sqrt{p^2+q^2}$

$AC = \sqrt{(\alpha+p)^2+(\beta+q)^2}$

$BD = \sqrt{(\alpha-p)^2+(\beta-q)^2}$

ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান অর্থাৎ AB = CD এবং BC = DA .

বিন্দু চারটি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।

(i) ABCD একটি আয়তক্ষেত্র হলে, কর্ণ দুইটি পরস্পর সমান হবে। $AC = BD \Rightarrow AC^2 = BD^2$

$\Rightarrow (\alpha+p)^2+(\beta+q)^2 = (\alpha-p)^2+(\beta-q)^2$

$\Rightarrow (\alpha+p)^2-(\alpha-p)^2 = (\beta-q)^2-(\beta+q)^2$

$\Rightarrow 4\alpha p = -4\beta q \quad \alpha p + \beta q = 0$ ইহাই নির্ণেয় শর্ত ।

(ii) ABCD একটি রম্বস হলে, বাহু চারটি সমান হবে।

$AB = BC \Rightarrow AB^2 = BC^2$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = p^2+q^2$; ইহাই নির্ণেয় শর্ত ।

6(a) একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কোটি ভুজের দ্বিগুণ এবং তা (4 , 3) বিন্দু হতে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত।[রা.'০৭; মা.'০৮,'১২, '১৪; ঢা.'১১; দি.'১৩]

সমাধান ঃ ধরি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(\alpha, 2\alpha)$.

(4 , 3) বিন্দু হতে $(\alpha, 2\alpha)$ বিন্দুর দূরত্ব

$= \sqrt{(\alpha-4)^2+(2\alpha-3)^2}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(\alpha-4)^2+(2\alpha-3)^2} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 16 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 10$

$\Rightarrow 5\alpha^2 - 20\alpha + 15 = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Rightarrow (\alpha-3)(\alpha-1) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 1$ অথবা, $\alpha = 3$

বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (1, 2) বা, (3 , 6) (Ans.)

6(b) $(a + b , b - a)$ এবং $(a - b , a + b)$ বিন্দু থেকে (x , y) বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে, দেখাও যে, $bx - ay = 0$.

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি $A(x \quad y)$, $B(a+b , b-a)$, $C(a-b , a+b)$

প্রশ্নমতে, $AB = AC \Rightarrow AB^2 = AC^2$

$\Rightarrow (x-a-b)^2+(y-b+a)^2 =$

$(x-a+b)^2+(y-a-b)^2$

$\Rightarrow (x-a-b)^2-(x-a+b)^2$
$= (y-a-b)^2-(y-b+a)^2$
$\Rightarrow (x-a-b-x+a-b)(x-a-b+x-a+b)$
$= (y-a-b-y+b-a)(y-a-b+y-b+a)$
$\Rightarrow -2b.2(x-a) = -2a.2(y-b)$
$\Rightarrow bx-ab = ay-ab$
$bx-ay = 0$ (Showed)

6(c) কোন বিন্দুর কোটি 6 এবং (5, 6) হতে বিন্দুটির দূরত্ব 4 একক হলে, বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর। **[ব.'০৩; কু.'১১]**

সমাধান ঃ ধরি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(\alpha, 6)$.
(5, 6) হতে বিন্দুটির দূরত্ব $= |\alpha - 5|$
প্রশ্নমতে, $|\alpha - 5| = 4 \Rightarrow \alpha - 5 = \pm 4$
$\Rightarrow \alpha = 9$ অথবা, $\alpha = 1$
বিন্দুটির ভুজ 9 অথবা 1.

6(d) দেখাও যে, a এর যেকোন মানের জন্য $B(\sqrt{3}+1, 3\sqrt{3})$ এবং $C(3\sqrt{3}+1, \sqrt{3})$ বিন্দু থেকে $A(a+1, a)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান। ABC সমকোণী ত্রিভুজ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ $AB = \sqrt{(a-\sqrt{3})^2+(a-3\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{a^2-2\sqrt{3}a+3+a^2-2.a.3\sqrt{3}+27}$
$= \sqrt{2a^2-8\sqrt{3}a+30}$
এবং $AC = \sqrt{(a-3\sqrt{3})^2+(a-\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{2a^2-8\sqrt{3}a+30}$
a এর যেকোন মানের জন্য $AB = AC$.

২য় অংশ ঃ
$BC = \sqrt{(\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}-1)^2+(3\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{24}$
এখন ABC সমবাহু ত্রিভুজ হলে,
$\sqrt{2a^2-8\sqrt{3}a+30} = \sqrt{24}$
$\Rightarrow 2a^2-8\sqrt{3}a+30 = 24$
$\Rightarrow 2a^2-8\sqrt{3}a+6 = 0 \Rightarrow a^2-4\sqrt{3}a+3 = 0$
$\Rightarrow (a-2\sqrt{3})^2 = -3+12 = 3^2$
$\Rightarrow a-2\sqrt{3} = \pm 3 \therefore a = 2\sqrt{3} \pm 3$ (Ans.)

6(e) y-অক্ষ এবং (7 , 2) বিন্দু থেকে $(a, 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান নির্ণয় কর।
[রা.'১০; য.'০৬,'১০; কু.'০৭; চ.'১০; ঢা.'১৩]

সমাধান ঃ y-অক্ষ থেকে $(a, 5)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |a|$
এবং (7 , 2) বিন্দু থেকে $(a \quad 5)$ বিন্দুর দূরত
$= \sqrt{(a-7)^2+(5-2)^2}$
প্রশ্নমতে, $|a| = \sqrt{(a-7)^2+(5-2)^2}$
$\Rightarrow a^2 = a^2-14a+49+9$
$\Rightarrow 14a = 58 \Rightarrow a = \frac{58}{14} = \frac{29}{7}$ (Ans.)

6(f) x –অক্ষ এবং (–5 , –7) বিন্দু থেকে (4 , k) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর।
[কু.'০৯; মা.বো.'১৩]

সমাধান ঃ x–অক্ষ থেকে (4 , k) বিন্দুটির দূরত্ব $= |k|$
এবং (–5 , –7) বিন্দু থেকে (4 , k) বিন্দুটির দূরত্ব
$= \sqrt{(-5-4)^2+(-7-k)^2}$
$= \sqrt{81+49+14k+k^2} = \sqrt{130+14k+k^2}$
প্রশ্নমতে, $|k| = \sqrt{130+14k+k^2}$
$\Rightarrow k^2 = 130+14k+k^2 \therefore k = -\frac{130}{14} = -\frac{65}{7}$

7.(a) (5,7) , (–1, –1) ও (–2 , 6) বিন্দুত্রয় একটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত । এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বৃত্তের কেন্দ্র O(x , y) এবং এর পরিধিস্থ বিন্দু তিনটি A(5,7) , B(–1, –1) ও C(–2 , 6)।
OA = OB = OC, [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ।]
OA = OB অর্থাৎ $OA^2 = OB^2$ হতে পাই,
$(x-5)^2+(y-7)^2 = (x+1)^2+(y+1)^2$
$\Rightarrow x^2-10x+25+y^2-14y+49 =$
$x^2+2x+1+y^2+2y+1$
$\Rightarrow 12x+16y = 72 \Rightarrow 3x+4y-18 = 0 \cdots$(i)
OB = OC অর্থাৎ $OB^2 = OC^2$ হতে পাই,
$(x+1)^2+(y+1)^2 = (x+2)^2+(y-6)^2$

$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2+2y+1=$

$x^2+4x+4+y^2-12y+36$

$\Rightarrow\ 2x-14y+38=0 \Rightarrow x-7y+19=0 \cdots$(ii)

(i) $-$ 3$\times$(ii) $\Rightarrow$ 4y + 21y $-$ 18 $-$ 57 = 0

$\Rightarrow$ 25 y = 75 $\Rightarrow$ y = 3

(ii) হতে পাই, x = 21 $-$ 19 = 2

বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (2,3) ।

7(b) কোন বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (5, 2) ও (–3 , – 4) হলে, এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বৃত্তের ব্যাসটির প্রান্ত বিন্দুদ্বয় A(5,2) ও B(–3 , – 4) . তাহলে,

বৃত্তটির ব্যাস = AB = $\sqrt{(5+3)^2+(2+4)^2}$

= $\sqrt{64+36}$ = 10 একক।

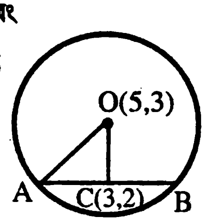
বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = $\dfrac{10}{2}$ = 5 একক।

7(c) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (5,3) ; এর যে জ্যা (3, 2) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু. '১০; চ.'১৩]

সমাধানঃ ধরি, O(5, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু C(3 , 2)। তাহলে,

OC$\perp$AB, ব্যাসার্ধ OA = 5 এবং

$OC^2=(5-3)^2+(3-2)^2=5$



OAC সমকোণী ত্রিভুজ হতে

পাই, $OA^2=AC^2+OC^2$

$\Rightarrow\ 5^2=AC^2+5$

$\Rightarrow\ AC^2=25-5\ =20 \Rightarrow$ AC = $2\sqrt{5}$

AB = 2$\times$AC = 2$\times$ $2\sqrt{5}$ = $4\sqrt{5}$

জ্যা এর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{5}$ একক।

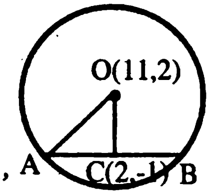
7(d) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (11, 2) ; এর যে জ্যা (2, –1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ব.'১১]

সমাধানঃ ধরি, O(11, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু C(2 , –1)। তাহলে, OC$\perp$AB,

ব্যাসার্ধ OA =10 এবং

$OC^2=(11-2)^2$

$+(2+1)^2\ =\ 81+9=90$



OAC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$OA^2=AC^2+OC^2$

$\Rightarrow\ 10^2=AC^2+90$

$\Rightarrow\ AC^2=100-90\ =10 \Rightarrow AC=\sqrt{10}$

AB = 2$\times$AC = 2$\times\sqrt{10}=2\sqrt{10}$

জ্যা এর দৈর্ঘ্য $2\sqrt{10}$ একক।

8. A(4 , 3), B(11, 2) ও C(2, –1) বিন্দুত্রয় ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

(a) মূলবিন্দু এবং অক্ষদ্বয় হতে C বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

(b) A বিন্দু হতে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কোটি ভুজের দ্বিগুণ।

[রা.'০৭; মা.'০৮,'১২, '১৪; ঢা.'১১; দি.'১৩]

(c) B কেন্দ্র ও 10 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের যে জ্যা C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ।[ব.'১১]

সমাধান: (a) মূলবিন্দু হতে C(2, –1) বিন্দুর দূরত্ব

$=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ একক ।

x-অক্ষ হতে C(2, –1) বিন্দুর দূরত্ব = $|-1|$ = 1 একক। এবং y-অক্ষ হতে C(2, –1) বিন্দুর দূরত্ব = $|2\ |$ = 2 একক ।

(b) 6(a) দ্রষ্টব্য।

(c) 7(d) দ্রষ্টব্য।

কাজ

1. P বিন্দুর কোটি – 6 । *x*- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব *y*-অক্ষ হতে এর দূরত্বের অর্ধেক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , – 6).

x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব = $|-6|$ = 6 এবং

y-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব = $|x|$

প্রশ্নমতে, $6=\dfrac{1}{2}|x| \Rightarrow |x|=12 \Rightarrow x=\pm 12$

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (12 , – 6) বা, (– 12, – 6)

2. (1, 1) ও $(-\sqrt{3}, 1)$ কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর, যখন $r \geq 0$ এবং $\theta \in [0, 2\pi[$ অথবা, $\theta \in]-\pi, \pi]$.

সমাধানঃ মনে করি , (1, 1) এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ এবং

$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

(1, 1) এর পোলার স্থানাঙ্ক $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

ধরি, $(-\sqrt{3}, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ এবং

$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{-\sqrt{3}} = \pi - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$(-\sqrt{3}, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \frac{5\pi}{6})$

3. $(4, \frac{\pi}{3})$ ও $(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$ কে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

$(4, \frac{\pi}{3})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $= (4\cos\frac{\pi}{3}, 4\sin\frac{\pi}{3})$

[∵ (r, θ) এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(r\cos\theta, r\sin\theta)$]

$= (4 \times \frac{1}{2}, 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = (2, 2\sqrt{3})$

এবং $(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$= (\sqrt{2}\cos(-\frac{3\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(-\frac{3\pi}{4}))$

$= (\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4})$

$= (\sqrt{2}\cos(\pi - \frac{\pi}{4}), -\sqrt{2}\sin(\pi - \frac{\pi}{4}))$

$= (-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4})$

$= (-\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) = (-1, -1)$

4. $x^2 - y^2 = a^2$ কে পোলার সমীকরণে এবং $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর ।

সমাধান ∴ $x^2 - y^2 = a^2$

$\Rightarrow (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = a^2$

[∵ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$]

$\Rightarrow r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2$

$\Rightarrow r^2 \cos 2\theta = a^2$ (Ans.)

এবং $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$

$\Rightarrow r^2 . 2\sin\theta\cos\theta = 2a^2$

$\Rightarrow 2(r\cos\theta)(r\sin\theta) = 2a^2$

$\Rightarrow 2xy = 2a^2$ $xy = a^2$ (Ans.)

5. দেখাও যে, (3, 8) , (8 , 3) এবং (– 2 , 3) বিন্দুগুলি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় A(3 8) B(8 , 3) ও C (– 2 , 3).

$AB = \sqrt{(3-8)^2 + (8-3)^2} = 5\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2} = 10$

$CA = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-8)^2} = 5\sqrt{2}$

AB , BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $AB = CA = 5\sqrt{2}$

প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

6. দেখাও যে, (4 , 4) , (5 , 2) এবং (1 , 0) বিন্দুগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় A(4 , 4) , B(5 , 2) ও C (1 , 0).

$AB = \sqrt{(4-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

$CA = \sqrt{(1-4)^2+(0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

AB,BC,CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর বলে বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজ গঠন করে।

আবার, $AB^2 + BC^2 = 5 + 20 = 25 = CA^2$

অতএব, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু যার $\angle B = 90^0$.

২য় অংশ ঃ

ত্রিভুটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AB \times BC)$ $[\because \angle B = 90^0]$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}) = 5$ বর্গ একক।

7. দেখাও যে, A (– 3 , 2) , B (– 7 , – 5) , C(5, 4) এবং D(9, 11) বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ ABCD চতুর্ভুজে,

$AB = \sqrt{(-3+7)^2+(2+5)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

$BC = \sqrt{(-7-5)^2+(-5-4)^2} = \sqrt{144+81}$

$= \sqrt{225} = 15$

$CD = \sqrt{(5-9)^2+(4-11)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

$DA = \sqrt{(9+3)^2+(11-2)^2} = \sqrt{144+81} = 15$

এখানে AB = CD এবং BC = DA অর্থাৎ ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান।

বিন্দু চারটি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

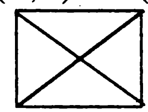
[**বি.দ্র.:** বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র ও রম্বস প্রত্যেকে সামান্তরিক । সুতরাং , সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান ও অসমান উভয়েই হতে পারে।]

8. দেখাও যে, (0 , 7), (4 , 9), (6, 5) এবং (2, 3) বিন্দুগুলি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(0 , 7) , B(4, 9), C (6 , 5) ও D(2, 3).

$AB = \sqrt{(0-4)^2+(7-9)^2}$

$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



$BC = \sqrt{(4-6)^2+(9-5)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$CD = \sqrt{(6-2)^2+(5-3)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

$DA = \sqrt{(2-0)^2+(3-7)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(0-6)^2+(7-5)^2} = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$

$BD = \sqrt{(4-2)^2+(9-3)^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$

ABCD চতুর্ভুজের চারটি বাহু পারস্পর সমান অর্থাৎ AB = BC = CD = DA $= 2\sqrt{5}$ এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান অর্থাৎ AC = BD = $2\sqrt{10}$.

প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি বর্গের কৌনিক বিন্দু।

9. x-অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দু থেকে (0 , 2) এবং (6, 4)এর দূরত্ব সমান। P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$.

P বিন্দু থেকে (0 , 2) এর দূরত্ব $= \sqrt{\alpha^2+4}$ এবং P বিন্দু থেকে (6, 4) এর দূরত্ব

$= \sqrt{(\alpha-6)^2+16}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{\alpha^2+4} = \sqrt{(\alpha-6)^2+16}$

$\Rightarrow \alpha^2 + 4 = \alpha^2 - 12\alpha + 36 + 16$

$\Rightarrow 12\alpha = 48 \Rightarrow \alpha = 4$

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 0). (Ans.)

প্রশ্নমালা III B

1.(a) দেখাও যে, (2 – 2) এবং (– 1 , 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত হয়।
[সি.'০৫,'১৩; ব.'০৭ ; মা'০৫]

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় A(2, – 2) ও B(– 1, 4) এবং x-অক্ষ AB রেখাংশকে P$(\alpha, 0)$ বিন্দুতে m 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$0=\frac{4m+1\times -2}{m+1}\Rightarrow 4m=2\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

অর্থাৎ x-অক্ষ AB রেখাংশকে 1 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

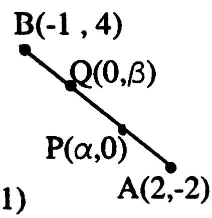
আবার, ধরি y-অক্ষ AB রেখাংশকে $Q(0, \beta)$ বিন্দুতে $n : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$0=\frac{n\times -1+1\times 2}{n+1}\Rightarrow n=2\Rightarrow n:1=2:1$$

অর্থাৎ y-অক্ষ AB রেখাংশকে 2 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ AB রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়।

বিকল্প পদ্ধতি ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(2, -2)$ ও $B(-1, 4)$ এবং x-অক্ষ ও y-অক্ষ AB রেখাংশকে যথাক্রমে $P(\alpha, 0)$ ও $Q(0, \beta)$ বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করে।



$$\frac{AP}{PB}=\frac{2-\alpha}{\alpha+1}=\frac{-2-0}{0-4}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 2AP = PB = PQ + QB$

$\Rightarrow PQ = 2AP - QB \cdots\cdots (1)$

আবার, $\frac{AQ}{QB}=\frac{2-0}{0+1}=\frac{-2-\beta}{\beta-4}\Rightarrow\frac{AQ}{QP}=\frac{2}{1}$

$\Rightarrow AQ = 2QB \Rightarrow AP + PQ = 2\,QB$

$\Rightarrow AP + 2AP - QB = 2\,QB$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow 3\,AP = 3\,QB \qquad AP = QB$

$(1) \Rightarrow PQ = 2AP - AP = AP$

$\therefore AP = PQ = QB$

$\therefore$ AB রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়।

1.(b) (7 , 5) ও (– 2 ,– 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের সমত্রিখন্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[ব.'০৫; রা.'০৯,'১১]

সমাধান ঃ

ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(7, 5)$ ও $B(-2, -1)$ এবং P ও Q সমত্রিখন্ডক বিন্দুদ্বয় AB রেখাংশকে যথাক্রমে 1 2 ও 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

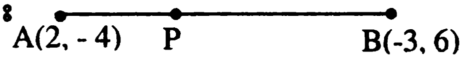
$$P\equiv\left(\frac{1\times -2+2\times 7}{1+2},\frac{1\times -1+2\times 5}{1+2}\right)=(4, 3)$$

$$Q\equiv\left(\frac{2\times -2+1\times 7}{2+1},\frac{2\times -1+1\times 5}{2+1}\right)=(1, 1)$$

সমত্রিখন্ডক বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (4, 3) ও (1, 1)

1.(c) (2,–4) ও (–3,6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ এবং y- অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। **[ঢা.'০৯; রা. '০৪, '০৮; য. '০২]**

সমাধান ঃ



ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(2, -4)$ ও $B(-3, 6)$ এবং AB রেখাংশকে P বিন্দু $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$P\equiv\left(\frac{k\times -3+1\times 2}{k+1},\frac{k\times 6+1\times -4}{k+1}\right)$$

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি

$$\frac{6k-4}{k+1}=0\Rightarrow 6k-4=0\Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 2 : 3$

আবার, এ বিন্দুটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর ভুজ

$$\frac{-3k+2}{k+1}=0\Rightarrow -3k+2=0\Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 2 : 3$

x ও y-অক্ষরেখা প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 2 : 3 এবং 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

1(d) (– 2 , 3) ও (4 , – 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ এবং y- অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। **[চ.'০৭; মা.'০৭]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত (– 2 , 3) ও (4 , – 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $=\left(\frac{k\times 4+1\times -2}{k+1},\frac{k\times -7+1\times 3}{k+1}\right)$

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি

$$\frac{-7k+3}{k+1}=0\Rightarrow -7k+4=0\Rightarrow k=\frac{3}{7}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 3 : 7$

আবার, এ বিন্দুটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর ভুজ

$$\frac{4k-2}{k+1}=0\Rightarrow 4k-2=0\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 1 : 2$

x ও y-অক্ষরেখা প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যথাক্রমে 3 : 7 এবং 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

1(e) (2 , – 5) ও (2 , 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর। [য.'০০]

সমাধান ঃ প্রদত্ত (2 , –5) ও (2 , 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $=(\dfrac{k\times2+1\times2}{k+1},\dfrac{k\times3+1\times-5}{k+1})$

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি $\dfrac{3k-5}{k+1}=0\Rightarrow 3k-5=0\Rightarrow k=\dfrac{5}{3}$

অর্থাৎ $k:1=5\ \ 3$

x-অক্ষরেখা প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 5 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং বিন্দুটির স্থানাঙ্ক

$$=(\frac{2.\frac{5}{3}+2}{\frac{5}{3}+1},0)=(\frac{10+6}{5+3},0)=(2,0)$$

[MCQ এর ক্ষেত্রে , বিন্দু দুইটির সাধারন ভুজ 2 বলে বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষরেখা (2, 0) বিন্দুতে এবং $\dfrac{-5-0}{0-3}=\dfrac{5}{3}$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।]

1.(f) দেখাও যে, মূলবিন্দু (– 3 ,– 2) এবং (6, 4) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের একটি সমত্রিখন্ডক বিন্দু । অপর সমত্রিখন্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[সি. '০২,'০৮; কু.'০৩; ঢা. '০৬; চ. '০৮; য. '০৯,'১৩]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি A(–3, – 2) ও B(6 , 4) এবং P ও Q সমত্রিখন্ডক বিন্দু দুইটি AB রেখাংশকে যথাক্রমে 1 2 ও 2 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$P\equiv(\frac{1\times6+2\times-3}{1+2},\frac{1\times4+2\times-2}{1+2})$$
$$=(\frac{6-6}{3},\frac{4-4}{3})=(0,0)$$

এবং $Q\equiv(\dfrac{2\times6+1\times-3}{2+1},\dfrac{2\times4+1\times-2}{2+1})$

$$=(\frac{12-3}{3},\frac{8-2}{3})=(3,2)$$

অতএব, মূলবিন্দু প্রদত্ত বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের একটি সমত্রিখন্ডক বিন্দু এবং অপর সমত্রিখন্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3 , 2) .

1(g) AB সরলরেখাটি P(3 , 3) এবং Q(8 , 5) বিন্দু দুটি দ্বারা সমত্রিখণ্ডিত করা হয়, A, B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব.'১১]

সমাধান ঃ

A(a, b) P(3,3) Q(8,5) C(c,d)

ধরি, A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (a,b) ও (c, d)

তাহলে, P, AQ এর মধ্যবিন্দু ।

$\dfrac{a+8}{2}=3\Rightarrow a=6-8=-2$ এবং

$\dfrac{b+5}{2}=3\Rightarrow b=6-5=1$

আবার, Q, PC এর মধ্যবিন্দু ।

$\dfrac{3+c}{2}=8\Rightarrow c=16-3=13$ এবং

$\dfrac{3+d}{2}=5\Rightarrow d=10-3=7$

A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (–2,1) ও (13, 7)

2.(a) A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (–2, 4) ও (4, – 5). AB রেখাংশকে C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন AB = 3BC হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[কু.'০৯; চ.'১১; দি'১২; সি.'১০; রা.'১৩; ঢা.'১৪]

সমাধান ঃ

A(–2, 4) B(4,–5) C (x,y)

ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x,y) .

দেওয়া আছে, $AB=3BC\Rightarrow\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3}{1}$

B বিন্দু AC রেখাংশকে 3 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে । B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\dfrac{3x-2}{3+1},\dfrac{3y+4}{3+1})$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{3x-2}{4}=4\Rightarrow 3x-2=16$

$\Rightarrow 3x=18\Rightarrow x=6$

এবং $\dfrac{3y+4}{4}=-5\Rightarrow 3y+4=-20$

$\Rightarrow 3y=-24\Rightarrow y=-8$

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (6 , –8) (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি :

দেওয়া আছে, AB = 3BC $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = 3$

ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

$$\frac{AB}{BC} = \frac{-2-4}{4-x} = \frac{4+5}{-5-y} = 3$$

$$\frac{-6}{4-x} = 3 \Rightarrow -6 = 12 - 3x \Rightarrow x = 6 \text{ এবং}$$

$$\frac{9}{-5-y} = 3 \Rightarrow 9 = -15 - 3y \Rightarrow y = -8$$

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (6 , –8) (Ans.)

2(b) A(8 , 10) ও B(18, 20) বিন্দুর সংযোগ রেখাংশকে Q ও R বিন্দুদ্বয় 2 : 3 অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে এবং P বিন্দু AB এর মধ্যবিন্দু। Q ও R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, $PQ \times PR = PB^2$ [রা.'০০]

সমাধান ঃ $P \equiv (\frac{8+18}{2}, \frac{10+20}{2}) = (13, 15)$

$$Q \equiv (\frac{36+24}{2+3}, \frac{40+30}{2+3}) = (\frac{60}{5}, \frac{70}{5}) = (12, 14)$$

$$R \equiv (\frac{36-24}{2-3}, \frac{40-30}{2-3}) = (-12, -10)$$

Q ও R বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (12, 14) ও (– 12 , – 10)

এখন, $PQ = \sqrt{(13-12)^2 + (15-14)^2} = \sqrt{2}$

$$PR = \sqrt{(13+12)^2 + (15+10)^2} = \sqrt{2 \times 25^2}$$
$$= 25\sqrt{2}$$

$$PB^2 = (13-18)^2 + (15-20)^2 = 50$$

$$PQ \times PR = \sqrt{2} \times 25\sqrt{2} = 50 = PB^2$$

3. (a) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু (2 , 7) ও (6 , 1) এবং এর ভরকেন্দ্র (6 , 4) ; তৃতীয় শীর্ষ নির্ণয় কর। [সি.'০৪,'১২; মা.বো.'০৭; ব.'১০,'১২; চ.'১২]

সমাধান ঃ ধরি, তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x, y).

$(2, 7)$, $(6, 1)$ ও (x, y) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $(\frac{2+6+x}{3}, \frac{7+1+y}{3})$.

প্রশ্নমতে, $\frac{2+6+x}{3} = 6 \Rightarrow x + 8 = 18 \Rightarrow x = 10$

এবং $\frac{7+1+y}{3} = 4 \Rightarrow y + 8 = 12 \Rightarrow y = 4$

তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (10 , 4).

3(b) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষ (3 , 5) ও (7 , – 1) এবং এর ভরকেন্দ্র (7 , 2) তৃতীয় শীর্ষ নির্ণয় কর। [ব.'০৬]

সমাধান ঃ ধরি, তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x, y).

$(3, 5)$, $(7, -1)$ ও (x, y) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $(\frac{3+7+x}{3}, \frac{5-1+y}{3})$.

প্রশ্নমতে, $\frac{3+7+x}{3} = 7 \Rightarrow x + 10 = 21 \Rightarrow x = 11$

এবং $\frac{5-1+y}{3} = 2 \Rightarrow y + 4 = 6 \Rightarrow y = 2$

তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (11, 2).

3(c) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_1^2, 2at_2)$ এবং $(at_3^2, 2at_3)$ যদি এর ভরকেন্দ্র x–অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, তাহলে দেখাও যে, $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ [সি.'০৫; কু.'০৬; য.'০৯; মা.'০৯]

সমাধান ঃ ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$$= (\frac{at_1^2 + at_2^2 + at_3^2}{3}, \frac{2a(t_1 + t_2 + t_3)}{3})$$

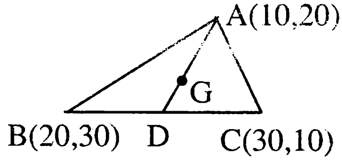
এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত বলে এর কোটি শূন্য।

$$\frac{2a(t_1 + t_2 + t_3)}{3} = 0$$

$\Rightarrow t_1 + t_2 + t_3 = 0$ (Showed)

3(d) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(10 20) , B(20 , 30) এবং C(30 , 10). ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G হলে GBC ত্রিভুজের GD মধ্যমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.(প্রকৌশল ভর্তি পরীক্ষা)'০৪]

সমাধান ঃ



ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G এর স্থানাঙ্ক

$=\left(\frac{10+20+30}{3},\frac{20+30+10}{3}\right)=(20, 20)$

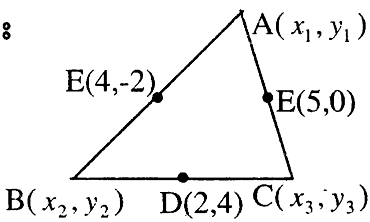
BC এর মধ্যবিন্দু $D(25, 20)$

$GD=\sqrt{(20-25)^2+(20-20)^2}$ একক

$= 5$ একক (Ans.)

3(e) ABC ত্রিভুজের BC, CA এবং AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে (2 , 4), (5 , 0) এবং (4 , – 2) হলে A , B এবং C শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ



মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ এবং BC, CA ও AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D(2, 4), E(5 , 0) ও F(4,– 2)

$\frac{x_1+x_2}{2}=4 \Rightarrow x_1+x_2=8$ (1)

$y_1+y_2=-4$ (2) , $x_2+x_3=4 \cdots(3)$

$y_2+y_3=8$ (4) , $x_3+x_1=10 \cdots (5)$

(6)

$(1)+(3)-(5) \Rightarrow 2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 =$

(1) হতে পাই, $x_1=7$ এবং (3) হতে পাই $x_3=3$

আবার, $(2)+(4)-(6) \Rightarrow 2y_2=4 \Rightarrow y_2=2$

$\therefore$ (2) হতে পাই, $= -6$ এবং (4) হতে পাই $y_3=6$

B(1 3

0 4)

= 4 −0

$C \equiv (2+5-4 \quad 4+0+2) = (3 , 6)]$

1. (a) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(– 3, – 2), B(– 3 , 9) এবং C(5 , – 8) ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে B হতে CA এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু.'০৪; য.'০৪,'১৩; চ.'০৮]

সমাধান : A(–3, – 2), B(– 3, 9) এবং C(5 , – 8) বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$\Delta ABC=\frac{1}{2}|\ (-3)9+(-3)(-8)+5(-2)-(-2)(-3)-9(5)-(-8)(-3)|$

$[\frac{1}{2}|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1$

$-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_4-y_4x_1$ সূত্র দ্বারা]

[A(– 3, –2), B(– 3, 9), C(5 , – 8)]

$=\frac{1}{2}|-27+24-10-6-45-24|$

$=\frac{1}{2}|-88|=44$ বর্গ একক।

বিকল্প পদ্ধতি:

$\Delta ABC=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-3 & -3 & 5 & 3\\ -2 & 9 & -8 & -2\end{vmatrix}\right|$

$=\frac{1}{2}|-27+24-10-(6+45+24)|$

$=\frac{1}{2}|-13-75|=\frac{1}{2}|-88|=44$

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল একক।

ঃ ধরি

দৈর্ঘ্য d একক।

$\Delta ABC=\frac{1}{2}\times CA\times d$

44

$$\Rightarrow 88 = \sqrt{64+36}\times d \Rightarrow d = \frac{88}{10} = 8\frac{4}{5}$$

B হতে CA এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য $8\frac{4}{5}$ একক।

1(b) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A(5, 6), B(–9, 1) এবং C(–3, – 1); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ঢা.'০৮; চ.'১০; য.'০৭; দি.০৯,'১০]

সমাধান ঃ $\Delta ABC = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 5 & -9 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}\right|$

$= \frac{1}{2}|5 + 9 - 18 - (-54 - 3 - 5)|$

$= \frac{1}{2}|-4 + 62| = \frac{1}{2}|-4 + 62| = \frac{1}{2}(58)$

$= 29$

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল = 29 বর্গ একক।

২য় অংশ ঃ ধরি, A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য d একক।

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\times BC\times d$$

$$\Rightarrow 29 = \frac{1}{2}\times\sqrt{(-9+3)^2+(1+1)^2}\times d$$

$$\Rightarrow 58 = \sqrt{36+4}\times d$$

$$\Rightarrow d = \frac{58}{2\sqrt{10}} = \frac{29\sqrt{10}}{10}$$

$\therefore$ A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{29\sqrt{10}}{10}$ একক।

1(c) দেখাও যে, (3, 5), (3, 8) এবং মূলবিন্দু একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।[কু.'০২]

সমাধান ঃ মনে করি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি A(3, 5) ও B(3, 8) এবং মূলবিন্দু O(0, 0).

$$OA = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$OB = \sqrt{3^2+8^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73}$$

$$AB = \sqrt{0^2+3^2} = \sqrt{9} = 3$$

এখানে, $OA + AB = \sqrt{34} + 3 > \sqrt{73} = OB$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু দুইটি এবং মূলবিন্দু একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়।

এখন, $\Delta ABO = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 0 & 5 \end{vmatrix}\right|$

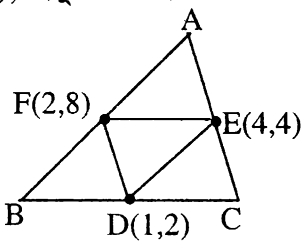
$= \frac{1}{2}|24 + 0 + 0 - (15 + 0 + 0)|$

$= \frac{1}{2}|24 - 15| = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $4\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

1(d) ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু (1,2), (4, 4) এবং (2, 8); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর[প্র.ভ.প.'০১]

সমাধান ঃ



ধরি, ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু D(1, 2), E(4, 4) এবং F(2, 8).

$\therefore \delta_{DEF} = (1 - 4)(4 - 8) - (2 - 4)(4 - 2)$

$= 12 + 4 = 16$

$\Delta DEF = \frac{1}{2}|16| = 8$

$\Delta ABC = 4\times \Delta DEF = 4\times 8 = 32$

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 32 বর্গ একক।

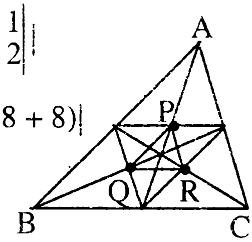
1(e) ABC ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির মধ্যবিন্দু (1, 2), (4, 4) এবং (2, 8); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, ABC ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির মধ্যবিন্দু P(1, 2), Q(4, 4) এবং R(2, 8).

$\Delta PQR = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}\right|$

$= \frac{1}{2}|4 + 32 + 4 - (8 + 8 + 8)|$

$= \frac{1}{2}|40 - 24|$



$= \frac{1}{2}|\,32\,| = 16$

$\Delta ABC = 16\times \Delta DEF = 16\times 8 = 128$

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 128 বর্গ একক।

2. (a) কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক (t + 1, 1), (2t + 1, 3), (2t + 2 , 2t) । ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, t = 2 অথবা t = –1/2 হলে, বিন্দুগুলো সমরেখ হবে। [কু. '১০; রা. '১০; ব.'১০]

সমাধান ঃ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} t+1 & 2t+1 & 2t+2 & t+1 \\ 1 & 3 & 2t & 1 \end{vmatrix}\right|$

$= \frac{1}{2}|\,3t + 3 + 4t^2 + 2t + 2t + 2 - (2t + 1 + 6t + 6 + 2t^2 + 2t)\,|$

$= \frac{1}{2}|\,4t^2 + 7t + 5 - 2t^2 - 10t - 7\,|$

$= \frac{1}{2}|\,2t^2 - 3t - 2\,|$ বর্গ একক।

$t = 2$ হলে,

$2t^2 - 3t - 2 = 8 - 6 - 2 = 8 - 8 = 0$

এবং $t = -\frac{1}{2}$ হলে,

$2t^2 - 3t - 2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 = \frac{1+3-4}{2} = 0$

$t = 2$ বা $-\frac{1}{2}$ হলে বিন্দুগুলো সমরেখ হবে।

2(b) (a , b) , (b , a) এবং $(\frac{1}{a},\frac{1}{b})$ ভিন্ন বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, দেখাও যে, $a + b = 0$. [চ.'০২]

সমাধান ঃ যেহেতু বিন্দুগুলি সমরেখ,

$\begin{vmatrix} a & b & 1/a & a \\ b & a & 1/b & b \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow a^2 + 1 + \frac{b}{a} - (b^2 + 1 + \frac{a}{b}) = 0$

$\Rightarrow a^2 - b^2 + \frac{b}{a} - \frac{a}{b} = 0$

$\Rightarrow a^2 - b^2 + \frac{b^2 - a^2}{ab} = 0$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)(1 - \frac{1}{ab}) = 0$

$\Rightarrow (a-b)(a+b)(ab-1) = 0$

এখানে $a - b = 0$ অর্থাৎ $a = b$ হলে অথবা $ab = 1$ হলে বিন্দু তিনটি ভিন্ন হয় না।

$a + b = 0$ (Showed).

2(c) কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক (2, –1) , $(a + 1 , a - 3)$, $(a + 2 , a)$ হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং a এর মান কত হলে বিন্দুগুলি সমরেখ হবে ? [রা.'১২; য.'১২;দি.'১৪]

সমাধান ঃ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & a+1 & a+2 & 2 \\ -1 & a-3 & a & -1 \end{vmatrix}\right|$

$= \frac{1}{2}|2a - 6 + a^2 + a - a - 2 - (-a - 1 + a^2 - a - 6 + 2a)|$

$= \frac{1}{2}|a^2 + 2a - 8 - a^2 - 7|$

$= \frac{1}{2}|2a - 1|$ বর্গ একক। (Ans.)

এখন বিন্দুগুলো সমরেখ হলে, $2a - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

3(a) যদি A(3 , 4) , B(2t , 5) এবং C(6 , t) বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $19\frac{1}{2}$ বর্গ একক হয়, তবে t এর মান নির্ণয় কর। 15/2

[য.'০৩,'১৪; ঢা.'০৪; সি.'০৪; ব.'১৩; মা.'১৪]

সমাধানঃ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 2t & 6 & 3 \\ 4 & 5 & t & 4 \end{vmatrix}\right| = 19\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}|15 + 2t^2 + 24 - (8t + 30 + 3t)| = \frac{39}{2}$

$\Rightarrow |2t^2 - 11t + 9| = 39$

$\Rightarrow 2t^2 - 11t + 9 = \pm 39$

'+' চিহ্ন নিয়ে পাই, $2t^2 - 11t + 9 - 39 = 0$

$\Rightarrow 2t^2 - 11t - 30 = 0$

$\Rightarrow 2t^2 - 15t + 4t - 30 = 0$

$\Rightarrow t(2t-15)+2(2t-15)=0$

$\Rightarrow (t+2)(2t-15)=0$

$t=-2$ অথবা, $t=15/2$

'–' চিহ্ন নিয়ে পাই, $2t^2-11t+48=0$

$(-11)^2-4.2.48<0$ বলে, t এর কোন বাস্তব মানের জন্য সমীকরণটি সিদ্ধ হবেনা।

t এর মান -2 বা, $15/2$.

3(b) দেখাও যে, $(p, p-2)$, $(p+3, p)$ এবং $(p+2, p+2)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত হবে। [কু.'০৮; মা.বো.'০৪]

প্রমাণ : প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$=\frac{1}{2}|(p-p-3)(p-p-2)-(p-2-p)(p+3-p-2)|$

$=\frac{1}{2}|(-3)(-2)-(-2).1|$

$=\frac{1}{2}|6+2|=4$ বর্গ একক; যা p বর্জিত।

বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত ।

3(c) OPQ ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $(0, 0)$, $(A\cos\beta, -A\sin\beta)$ এবং $(A\sin\alpha, A\cos\alpha)$; দেখাও যে, $\alpha=\beta$ হলে, ত্রিভুজটি ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবে। বৃহত্তম মানটি নির্ণয় কর। [ব.'০৪; চ.'১২]

প্রমাণ প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ A\cos\beta & -A\sin\beta & 1\\ A\sin\alpha & A\cos\alpha & 1\end{vmatrix}$$

$=\frac{1}{2}(A^2\cos\alpha\cos\beta+A^2\sin\alpha\sin\beta)$

$=\frac{1}{2}A^2\cos(\alpha-\beta)$; ইহা বৃহত্তম হবে যদি $\cos(\alpha-\beta)$ বৃহত্তম হয় অর্থাৎ,

$\cos(\alpha-\beta)=1$ হয়।

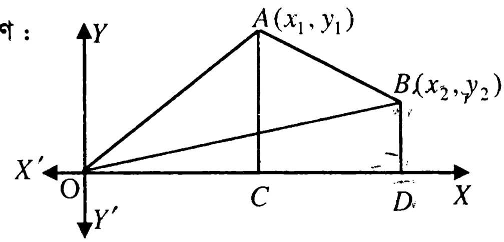
$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta)=\cos 0 \Rightarrow \alpha-\beta=0$

$\alpha=\beta$ (Showed)

বৃহত্তম মানটি $=\frac{1}{2}A^2$ বর্গ একক

3 (d) দুটি অক্ষরেখা পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে। A এবং B এর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)। মূল নিয়মে প্রমাণ কর যে, OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ বর্গ একক। [য.'০৫ ;ঢা.'০৯; দি.'১২]

প্রমাণ :



A ও B বিন্দু হতে x- অক্ষের উপর যথাক্রমে AC ও BD লম্ব আঁকি। তাহলে, $OC=x_1$, $OD=x_2$, $AC=y_1$, $BD=y_2$ এবং $CD=x_2-x_1$, যখন $x_2>x_1$

OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ΔOAB হলে,

ΔOAB = OAC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল + ট্রাপিজিয়াম ACDB এর ক্ষেত্রফল – OBD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}(OC\times AC)+\frac{1}{2}(AC+BD)\times CD-\frac{1}{2}(OD\times BD)$

$=\frac{1}{2}\{x_1y_1+(y_1+y_2)(x_2-x_1)-x_2y_2\}$

$=\frac{1}{2}(x_1y_1+x_2y_1+x_2y_2-x_1y_1-x_1y_2-x_2y_2)$

$\Delta OAB=\frac{1}{2}(x_2y_1-x_1y_2)$

এখন, ΔOAB ধনাত্মক হবে যখন $x_2y_1>x_1y_2$ এবং ঋণাত্মক হবে যখন $x_2y_1<x_1y_2$. কিন্তু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হতে পারে না ।

OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}|x_2y_1-x_1y_2|$ বর্গ একক।

4. (a) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x, y)$, $B(2, 4)$ এবং $C(-3, 3)$ এবং এর ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে,

দেখাও যে, $x - 5y = 0$ অথবা, $x - 5y + 36 = 0$. [রা.'১৩]

প্রমাণ: ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|(x-2)(4-3)-(y-4)(2+3)|$

$= \frac{1}{2}|x - 2 - 5y + 20|$

$= \frac{1}{2}|x - y + 18|$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}|x - 5y + 18| = 9$

$\Rightarrow x - 5y + 18 = \pm 18$

$x - 5y = 0$ অথবা, $x - 5y + 36 = 0$ (Showed)

4(b) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x, y)$, $B(2, -4)$ ও $C(-3, 3)$ এবং এর ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $7x + 5y + 24 \;\; 0$ অথবা, $7x + 5y - 12 = 0$. [ব.'০৬]

প্রমাণ: ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|(x-2)(-4-3)-(y+4)(2+3)|$

$= \frac{1}{2}|-7x + 14 - 5y - 20|$

$= \frac{1}{2}|-7x - 5y - 6|$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}|-7x - 5y - 6| = 9$

$\Rightarrow 7x + 5y + 6 = \pm 18$

$7x + 5y + 24 = 0$ অথবা, $7x + 5y - 12 = 0$

5.(a) ΔABC এর A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 5)$, $(-3, 3)$, $(-1, -1)$ এবং BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু D, E, F হলে, ত্রিভুজ ABC এবং DEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, $\Delta ABC = 4.\Delta DEF$. [ব.'০৫]

সমাধান: ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|(3+3)(3+1)-(5-3)(-3+1)|$

$= \frac{1}{2}|24 + 4| = \frac{1}{2}(28) = 14$ বর্গ একক।

BC এর মধ্যবিন্দু $D \equiv (\frac{-3-1}{2}, \frac{3-1}{2}) = (-2, 1)$

CA এর মধ্যবিন্দু $E \equiv (\frac{-1+3}{2}, \frac{-1+5}{2}) = (1, 2)$

AB এর মধ্যবিন্দু $F \equiv (\frac{3-3}{2}, \frac{5+3}{2}) = (0, 4)$

ΔDEF এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|(-2-1)(2-4)-(1-2)(1-0)|$

$= \frac{1}{2}|6 + 1| = \frac{7}{2}$ বর্গ একক।

$\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{14}{7/2} = 4.$

$\Delta ABC = 4.\Delta DEF$

5(b) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4, -3)$, $(13, 0)$, $(-2, 9)$ এবং D, E, F বিন্দু তিনটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর উপর এমনভাবে অবস্থিত যেন, $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 2$. ABC এবং DEF ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এদের আনুপাত 3 : 1. [রা.'০২]

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিন্দু $A(4, -3)$, $B(13, 0)$ এবং $C(-2, 9)$ এর নিশ্চায়ক,

$\delta_{ABC} = (4-13)(0-9)-(-3-0)(13+2)$

$= 81 + 45 = 126$

$\Delta ABC = \frac{1}{2}|126|$ বর্গ একক $= 63$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{1} \Rightarrow BD:DC = 2:1$

তদ্রূপ $CE : EA = 2:1$, $AF : FB = 2:1$

$D \equiv (\frac{2\times -2 + 1\times 13}{2+1}, \frac{2\times 9 + 1\times 0}{2+1})$

$= (\frac{-4+13}{3}, \frac{18}{3}) = (3, 6)$

$E \equiv (\frac{2\times 4 + 1\times -2}{2+1}, \frac{2\times -3 + 1\times 9}{2+1})$

$= (\frac{8-2}{3}, \frac{-6+9}{3}) = (2, 1)$

$F \equiv \left(\frac{2\times13+1\times4}{2+1}, \frac{2\times0+1\times-3}{2+1}\right)$

$= \left(\frac{26+4}{3}, \frac{-3}{3}\right) = (10\ , -1\ )$

$\delta_{DEF} = (3-2)(1+1) - (6-1)(2-10)$

$= 2+40 = 42$

$\Delta\, DEF = \frac{1}{2}\ |42|$ বর্গ একক $= 21$ বর্গ একক

দ্বিতীয় অংশ ঃ $\Delta\, ABC : \Delta\, DEF = 63 \quad 21 = 3 \quad 1$

5(c) ABC ত্রিভুজে A, B, C শীর্ষ তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (– 1 , 2) , (2 , 3) ও (3, – 4) ; P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (*x* , *y*) হলে, দেখাও যে, $\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{|x-3y+7|}{22}$ [কু.'০৭]

প্রমাণ: $\delta_{PAB} = (x+1)(2-3) - (y-2)(-1-2)$

$= -x-1+3y-6 = -x+3y-7$

$\Delta\, PAB = \frac{1}{2}\ |-x+3y-7|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\ |x-3y+7|$ বর্গ একক

$\delta_{ABC} = (-1-2)(3+4) - (2-3)(2-3)$

$= -21-1 = -22$

$\Delta\, PAB = \frac{1}{2}|-22|$ বর্গ একক $= 11$ বর্গ একক

$\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{|x-3y+7|}{22}$

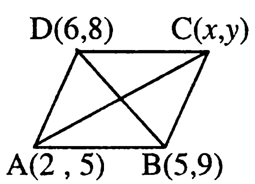
6.(a) ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(2 , 5) , B(5 , 9) এবং D(6 , 8).

I. ABD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

II. চতুর্থ শীর্ষ C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর । রম্বসটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর । **[ঢা.'০৫,' ১০; সি.'০৯; ব.'০৯]**

III. প্রমাণ কর যে, রম্বসটির বহু চারটি সমান ।

সমাধান : I.



ABD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|(2-5)(9-8) - (5-9)(5-6)| = \frac{1}{2}\{(-3)(1) - (-4)(-1)\}$

$= \frac{1}{2}|-3-4| = \frac{1}{2}|-7| = \frac{7}{2}$ বর্গ একক ।

II. ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y). ABCD একটি রম্বস বলে AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+5}{2}\right)$ এবং BD কর্ণের মধ্যবিন্দু $\left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right)$ অভিন্ন।

$\frac{x+2}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow x+2 = 11 \Rightarrow x = 9$

এবং $\frac{y+5}{2} = \frac{17}{2} \Rightarrow y+5 = 17 \Rightarrow y = 12$

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (9 , 12).

২য় অংশ : $AC = \sqrt{(2-9)^2 + (5-12)^2} = 7\sqrt{2}$

$BD = \sqrt{(5-6)^2 + (9-8)^2} = \sqrt{2}$

রম্বসটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AC\times BD)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(7\sqrt{2} \times \sqrt{2})$ বর্গ একক $= 7$ বর্গ একক।

[বি.দ্র. : $C \equiv (6+5-2, 9+8-5) = (9,12)$]

III. $AB = \sqrt{(2-5)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$BC = \sqrt{(5-9)^2 + (9-12)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

$CD = \sqrt{(9-6)^2 + (12-8)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$DA = \sqrt{(6-2)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

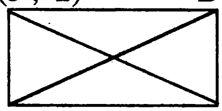
রম্বসটির বহু চারটি সমান ।

6(b) ABCD আয়তের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(3 , 2), B(2 , – 1), C(8, – 3) হলে, চতুর্থ শীর্ষ D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। আয়তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[ব.'০২; ঢা.'০৩; চ.'০৬]

সমাধান ধরি, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y). ABCD একটি আয়তক্ষেত্র বলে BD কর্ণের মধ্যবিন্দু

$(\frac{x+2}{2}, \frac{y-1}{2})$ এবং AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{11}{2}, -\frac{1}{2})$ অভিন্ন।



$$\frac{x+2}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow x + 2 = 11 \Rightarrow x = 9$$

এবং $\frac{y-1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 1 = -1 \Rightarrow y = 0$

D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (9 , 0) (Ans.)

২য় অংশ : $AB = \sqrt{(3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}$

$BC = \sqrt{(2-8)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

আয়তটির ক্ষেত্রফল = $AB \times BC$ বর্গ একক

$= \sqrt{10} \times 2\sqrt{10}$ বর্গ একক $= 20$ বর্গ একক।

[বি.দ্র. : $D \equiv (8 + 3 - 2, -3 + 2 + 1) = (9,0)$]

6(c) A, B, C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, –1), (15, 2), (–1, 2) এবং (4, – 5)।

I. AB : CD নির্ণয় কর।

II. ত্রিভুজ ABC ও ABD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

III. প্রমাণ কর যে, CD কে AB রেখাটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। [ব.'০৭; কু.'১১; দি.'১৩]

I. সমাধান : $AB = \sqrt{(0-15)^2 + (-1-2)^2}$

$= \sqrt{225+9} = 3\sqrt{26}$

$CD = \sqrt{(-1-4)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$

$AB : CD = 3\sqrt{26} \quad \sqrt{74} = 3\sqrt{13} : \sqrt{37}$

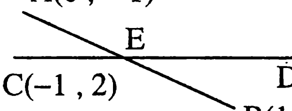
II. ত্রিভুজ ABC এর ত্রেফল $= \frac{1}{2}|(0 + 30 + 1)$
$- (-15 - 2 - 0)|$

$= \frac{1}{2}|31 + 17| = 24$ বর্গ একক

ত্রিভুজ ABD এর ত্রেফল $= \frac{1}{2}|(0 - 75 - 4)$
$- (-15 + 8 + 0)|$

$= \frac{1}{2}|- 79 + 7| = 36$ বর্গ একক।

III. প্রমাণ:



ধরি, CD রেখাংশকে AB রেখাটি k 1 অনুপাতে E বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করে।

E বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{4k-1}{k+1}, \frac{-5k+2}{k+1})$

এখন A, E, B বিন্দু তিনটি সমরেখ বলে তাদের নিশ্চায়ক, $\delta_{AEB} = 0$

$\therefore 0 \times \frac{-5k+2}{k+1} + \frac{4k-1}{k+1} \times 2 + 15 \times -1 -$

$(-1 \times \frac{4k-1}{k+1} + \frac{-5k+2}{k+1} \times 15 + 2 \times 0) = 0$

$\Rightarrow \frac{8k-2}{k+1} - 15 - \frac{-4k+1-75k+30}{k+1} = 0$

$\Rightarrow 8k - 2 - 15k - 15 + 79k - 31 = 0$

$\Rightarrow 72k - 48 = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$ অর্থাৎ $k : 1 = 2 : 3$

CD রেখাংশকে AB রেখাটি 2 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

বিকল্প পদ্ধতি :

$\delta_{ABC} = (0 - 15)(2 - 2) - (- 1 - 2)(15 + 1)$

$= 0 + 48 = 48$

$\delta_{ABD} = (0 - 15)(2 + 5) - (-1 - 2)(15 - 4)$

$= - 105 + 33 = - 72$

$\frac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABd}} = \frac{48}{-72} = -\frac{2}{3} < 0$

C ও D , AB এর বিপরীত পাশে অবস্থিত। অতএব CD কে AB রেখাটি 2 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

6(d) A , B , C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 1) , (1,0) , (5, 1) এবং (– 10, –4) CD সরলরেখা AB রেখাংশকে বহিঃস্থভাবে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [চ.'০২]

সমাধান ঃ

$\delta_{CDA} = (5 + 10)(- 4 -1) - (1+ 4)(-10 - 3)$
$= - 75 + 65 = - 10$

$\delta_{CDB} = (5 + 10)(- 4 -0) - (1+ 4)(-10 - 1)$
$= - 60 + 55 = - 5$

$\frac{\delta_{CDA}}{\delta_{CDB}} = \frac{-10}{-5} = \frac{2}{1} > 0$

C ও D , AB এর একই পাশে অবস্থিত এবং AB কে CD রেখাটি 2 1 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

6(e) ABCD চতুর্ভুজের A , B , C , D শীর্ষ চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1 , 2) , (– 5 , 6) , (7 , – 4) এবং (k , – 2); এর ক্ষেত্রফল শূন্য হলে k এর মান নির্ণয় কর। [য.'০২; সি.'০৮]

সমাধান ঃ ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 7 & k & 1 \\ 2 & 6 & -4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|(6 + 20 - 14 + 2k) - (-10 + 42 - 4k - 2)|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}| 12 + 2k \quad 30 + 4k|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}| 6k - 18|$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}| 6k - 18| = 0 \Rightarrow 6k - 18 = 0$

$k = 3$ (Ans.)

প্রশ্নমালা III D

1. (a) A(2, 3) এবং B(–1, 4) দুইটি স্থির বিন্দু । A এবং B বিন্দু হতে একটি সেটের যেকোন বিন্দুর দুরত্বের অনুপাত 2 : 3 হলে সঞ্চার পথটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
[চ.'১১; রা.'০৭; দি.'১১; ব.'১২; ঢা.', কু.,য.'১৪]

সমাধান ঃ মনে করি, P(x y) বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি বিন্দু ।

$PA = \sqrt{(x-2)^2 + (\quad 3)^2}$

$PB = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2}$

প্রশ্নমতে, $PA : PB = 2 \quad 3 \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 9 PA^2 = 4 PB^2$

$\Rightarrow 9\{ (x-2)^2 + (y-3)^2 \}$
$= 4 \ (x+1)^2 + (y-4)^2 \}$

$\Rightarrow 9(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9)$
$= 4 (x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16)$

$\Rightarrow 9x^2 - 36x + 9y^2 - 54y + 117$
$= 4x^2 + 4y^2 + 8x - 32y + 68$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 44x - 22y + 49 = 0$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।

1(b) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(x , y), B(– 6, – 3) এবং C(6 , 3). A বিন্দুটি একটি সেটের সদস্য যে সেটটির যেকোন বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5 একক। দেখাও যে, A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 25$ [চ.'০২]

সমাধান ঃ BC এর মধ্যবিন্দু D (ধরি) এর স্থানাঙ্ক = $(\frac{-6+6}{2}, \frac{-3+3}{2}) = (0, 0)$

AD মধ্যমার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x^2 + y^2}$ একক

প্রশ্নমতে, AD মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5 একক।

$\sqrt{x^2 + y^2} = 5$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 25$ (Showed)

1(c) A(0 , 4) ও B(0 , 6) দুইটি স্থির বিন্দু কার্তেসীয় সমত... -সেটের যেকোন উপাদানের সাথে AB রেখাংশ এক সমকোণ উৎপন্ন করে। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৩ ; ঢা.'১০;রা.'১৪]

সমাধান ঃ মনে করি, P(x y) বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি বিন্দু ।

$PA^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2$
$= x \quad\quad - 8y \quad 16$

$PB \quad\quad x - 0)$
$= x^2 + y^2 - 12y + 36$

$AB^2 = (0-0)^2 + (4-6)^2 = 4$

প্রশ্নমতে, P এর সাথে AB রেখাংশ এক সমকোণ উৎপন্ন করে।

$PA^2 + PB^2 = AB^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8y + 16 + x^2 + y^2 - 12y + 36 = 4$

$\Rightarrow 2(x^2 + y^2) - 20y + 48 = 0$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 10y + 24 = 0$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।

1(d) A(a , b) ও B(0 , b) বিন্দু দুইটির সাথে একটি বিন্দু-সেটের যেকোন উপাদান একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৪,'১০; রা.'১২]

সমাধান ঃ মনে করি, $P(x, y)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি বিন্দু

$PA^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$

$= x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2$

$PB^2 = (x-0)^2 + (y-b)^2$

$= x^2 + y^2 - 2b + b^2$

$AB^2 = |a-0|^2 = a^2$

প্রশ্নমতে, P এর সাথে AB রেখাংশ এক সমকোণ উৎপন্ন করে। $PA^2 + PB^2 = AB^2$

$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + x^2 + y^2 - 2by + b^2 = a^2$

$\Rightarrow 2(x^2 + y^2) - 2ax - 4by + 2b^2 = 0$

$x^2 + y^2 - ax - 2by + b^2 = 0$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।

1(e) একটি বিন্দু-সেটের যেকোন উপাদান (2 , – 1) বিন্দু থেকে সর্বদা 4 একক দূরত্বে অবস্থান করে। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।[কু.'১২]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুটি $A(2, -1)$ এবং $P(x, y)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি বিন্দু।

$PA = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = |4|$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ

2. (a) y-অক্ষ হতে একটি বিন্দু-সেটের যেকোন উপাদানের দূরত্ব মূলবিন্দু হতে তার দূরত্বের অর্ধেক। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৪; কু.'১২]

সমাধান ঃ মনে করি, $P(x, y)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি বিন্দু ।

y-অক্ষ হতে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |x|$ একক এবং মূলবিন্দু $(0,0)$ হতে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{x^2 + y^2}$ একক

প্রশ্নমতে, $|x| = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow 4|x|^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow 4x^2 = x^2 + y^2 \quad y^2 = 3x$ ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ

2(b) (2 , 0) বিন্দু হতে একটি বিন্দু-সেটের যেকোন উপাদানের দূরত্ব $x = 0$ রেখা হতে তার দূরত্বের তিনগুণ। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা '০৯]

সমাধান ঃ মনে করি, $P(x, y)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি বিন্দু ।

$x = 0$ রেখা অর্থাৎ y-অক্ষ হতে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |x|$ একক এবং $(2,0)$ বিন্দু হতে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ একক

প্রশ্নমতে, $3|x| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

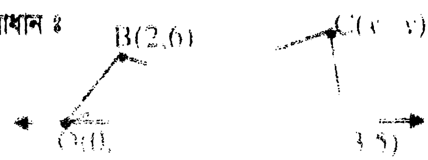
$\Rightarrow 9|x|^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$

$\Rightarrow 9x^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$

$y^2 - 8x^2 - 4x + 4 = 0$ ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।

2 (c) B(2 , 6) ও C(x , y) বিন্দু দুইটি O(0 , 0) ও A(3 , 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত। C(x , y) বিন্দুটি এমন একটি বিন্দু-সেটের সদস্য যার প্রতিটি বিন্দুর জন্য $\Delta OAC = 2\Delta OAB$. ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ



$\delta_{OAB} = (0-3)(5-6)-(0-5)(3-2)$
$= 3+5 = 8$
$\delta_{OAC} = (0-3)(5-y)-(0-5)(3-x)$
$= -15+3y+15-5x = 3y-5x$
প্রশ্নমতে, $\Delta\, OAC = 2\Delta\, OAB$

$\Rightarrow \frac{1}{2}|\delta_{OAC}| = 2.\frac{1}{2}|\delta_{OAB}|$

$\Rightarrow |\delta_{OAC}| = 2.|\delta_{OAB}|$

B ও C বিন্দু দুইটি O ও A বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত বলে δ_{OAB} ও δ_{OAC} একই চিহ্নযুক্ত হবে।

$\delta_{OAC} = 2.\delta_{OAB} \Rightarrow 3y-5x = 2\times 8$
$\therefore\ 5x-3y+16 = 0$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।

2(d) C(2 , – 1) ও D(x , y) বিন্দু দুইটি A(1 , 1) ও B(4 , – 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। D(x , y) বিন্দুটি এমন একটি বিন্দু-সেটের সদস্য যার প্রতিটি বিন্দুর জন্য Δ ABD = 3.Δ ABC. ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\delta_{ABC} = (1-4)(-2+1)-(1+2)(4-2)$
$= 3-6 = -3$
$\delta_{ABD} = (1-4)(-2-y)-(1+2)(4-x)$
$= 6+3y-12+3x = 3x+3y-6$
প্রশ্নমতে, $\Delta\, ABD = 3.\Delta\, ABC$

$\Rightarrow \frac{1}{2}|\delta_{ABD}| = 3.\frac{1}{2}|\delta_{ABC}|$

$\Rightarrow |\delta_{ABD}| = 3.|\delta_{ABC}|$

C ও D বিন্দু দুইটি A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত বলে δ_{ABD} ও δ_{ABC} বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

$\delta_{ABD} = -3.\delta_{ABC}$
$\Rightarrow 3x+3y-6 = -3(-3) = 9$
$\Rightarrow 3x+3y = 15$
$x+y = 5$ ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।

3(a) k এর যেকোন মানের জন্য P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2ak , ak^2) . P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x , y).

$2ak = x \Rightarrow k = \frac{x}{2a}$ এবং

$ak^2 = y \Rightarrow a(\frac{x}{2a})^2 = y\ [\quad k = \frac{x}{2a}]$

$\Rightarrow a\frac{x^2}{4a^2} = y$

$x^2 = 4ay$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

3(b) θ পরিবর্তনশীল হলে, P(1 + 2 cos θ , – 2 + 2 sin θ) বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y).

$1+2\cos\theta = x \Rightarrow 2\cos\theta = x-1$ এবং
$-2+2\sin\theta = y \Rightarrow 2\sin\theta = y+2$
$(x-1)^2+(y+2)^2 = 4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$
$\Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2 = 4$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. দেখাও যে, (a , a) (– a , – a) এবং (– $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{3}$) বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় A(a a) B($-a$, $-a$) এবং C($-a\sqrt{3}$, $a\sqrt{3}$)

$AB = \sqrt{(a\quad a)^2+(a+a)^2} = \sqrt{8a^2}$

$BC = \sqrt{(-a+a\sqrt{3})^2+(-a-a\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{2\{(-a)^2+(a\sqrt{3})^2\}}$

$= \sqrt{2(a^2+3a^2)} = \sqrt{8a^2}$

$CA = \sqrt{(-a\sqrt{3}-a)^2+(\sqrt{3}a-a)^2}$

$= \sqrt{2\{(-a)^2+(a\sqrt{3})^2\}}$

$= \sqrt{2(a^2+3a^2)} = \sqrt{8a^2}$

AB,BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং AB = CA = CA = $\sqrt{8a^2}$

প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

2. A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (– 5 , 4) ও (3 , – 2). AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন 3AB = 2BC হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ A(−5, 4) B(3,−2) C (x,y)

দেওয়া আছে, $3AB = 2BC \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}$

ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , y).

$$\frac{AB}{BC}=\frac{-5-3}{3-x}=\frac{4+2}{-2-y}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{-8}{3-x}=\frac{2}{3}\Rightarrow -24 = 6-2x$$

$\Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15$ এবং

$$\frac{6}{-2-y}=\frac{2}{3}\Rightarrow 18=-4-2y$$

$\Rightarrow 2y = -22 \Rightarrow y = -11$

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (15 , −11) (Ans.)

3. যদি A(– 4, 6) , B(−1, −2) এবং C(a ,– 2) বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 16 বর্গ একক হয়, তবে 'a' এর মান এবং A হতে BC এর লম্ব দুরত্ব নির্ণয় কর । [প্র.ভ.প.'৯৫]

সমাধান ঃ $\delta_{ABC} = (-4+1)(-2+2) - (6+2)(-1-a) = 8(a+1)$

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}|\delta_{ABC}|$ বর্গ একক

$=\frac{1}{2}|8(a+1)|$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে $\frac{1}{2}|8(a+1)| = 16 \Rightarrow |a+1| = 4$

$\Rightarrow a+1 = \pm 4 \Rightarrow a = 3$ অথবা, $a = -5$

a এর মান 3 বা, – 5

২য় অংশ: A হতে BC এর লম্ব দূরত্ব d একক হলে

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(BC\times d) = 16$

$\Rightarrow |-1-a|\times d = 32$

$\Rightarrow 4d = 32$ [a = 3 বা, – 5 বসিয়ে]

A হতে BC এর লম্ব দূরত্ব 8 একক ।

4(a) দেখাও যে, (3 , 90°) ও (3 , 30°) বিন্দু দুইটি মূলবিন্দুর সাথে একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (3, 90°) ও (3 30°) এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3\cos 90°, 3\sin 90°) = (0,3)$ ও $(3\cos 30°, 3\sin 30°) = (\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$.

ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি A(0,1) ও B$(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$ এবং মূলবিন্দু O(0,0).

$$OA = \sqrt{0+3^2} = 3,$$

$$OB = \sqrt{(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{27+9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$

$$AB = \sqrt{(0-\frac{3\sqrt{3}}{2})^2+(3-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$

OA, OB AB এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং OA = OB = AB = 3.

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু দুইটি মূলবিন্দুর সাথে একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

এখন, সমবাহু ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}(3)^2$

$=\frac{9\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক

4(b) দেখাও যে, C(– 2 , –1) এবং D(5 , – 4) বিন্দু দুইটি A(– 3 , 1) এবং B(1 , – 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত। AB রেখার কোন পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত ?

সমাধান ঃ $\delta_{ABC} = (-3-1)(-1+1)-(1+1)(1+2)$

$= -6$

$\delta_{ABD} = (-3-1)(-1+4)-(1+1)(1-5)$

$= -12+8 = -4$

এখন, $\delta_{ABC}\times\delta_{ABD} = -6\times -4 > 0$ বলে C এবং D বিন্দুদ্বয় AB এর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

দ্বিতীয় অংশ ঃ O(0 , 0) মূলবিন্দু হলে,

$\delta_{AB0} = (-3-1)(-1-0)-(1+1)(1-0)$
$= 4-2 = 2$

$\delta_{AB0} \times \delta_{ABC} = -6\times 2 < 0$ বলে AB রেখার যে পার্শ্বে C ও D অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত।

5. (–2, 3) , (–3 , – 4) , (5 , –1) ও (2, 2) বিন্দু চারটি ক্রমান্বয়ে নিয়ে যে চতুর্ভুজ গঠিত হয় তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিন্দু চারটি ক্রমান্বয়ে নিয়ে যে চতুর্ভুজ গঠিত হয় তার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}\right|$

$= \frac{1}{2}|8+3+10+6-(-9-20-2-4|$

$= \frac{1}{2}|27+35| = 31$ বর্গ একক (Ans.)

6(a) t এর মান কত হলে (2t + 1, t + 2), (2 – t , 2 – 5t) এবং (5 t , 7t) বিন্দুত্রয় ধনাত্মক ক্রমে অবস্থান করে একটি ত্রিভুজ গঠন করবে ?

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের নিশ্চায়ক $= (2t+1-2+t)$
$(2-5t-7t)-(t+2-2+5t)(2-t-5t)$
$= (3t-1)(2-12t)+6t(2-6t)$
$= (3t-1)(2-12t+12t) = 2(3t-1)$

প্রদত্ত বিন্দুত্রয় ধনাত্মক ক্রমে অবস্থান করে একটি ত্রিভুজ গঠন করলে, $2(3t-1)>0 \Rightarrow t > \frac{1}{3}$

6(b) দেখাও যে, (t , 3t – 2), (1– 2t , 2 – 3t) এবং (– t , – t) বিন্দুত্রয় ঋণাত্মক ক্রমে থাকবে, যদি t>1 হয়।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের নিশ্চায়ক $= (t-1+2t)$
$(2-3t+t)-(3t-2-2+3t)(1-2t+t)$
$= (3t-1)(2-2t)-(6t-4)(1-t)$
$= (1-t)(6t-2-6t+4) = 2(1-t)$

প্রদত্ত বিন্দুত্রয় ঋণাত্মক ক্রমে অবস্থান করে একটি ত্রিভুজ গঠন করলে, $2(1-t)< 0$

$t>1$ (Showed)

7. t পরিবর্তনশীল হলে দেখাও যে, P(t + 2 , 3t) বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $3x - y = 6$.

প্রমাণ ঃ ধরি, P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y).

$t+2 = x \Rightarrow t = x-2$ এবং

$3t = y \Rightarrow 3(x-2) = y \quad [\because t = x-2]$

$3x - y = 6$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

8. একটি ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলি A(x, y), B(1, 3) ও C(3,1) হলে এবং x + y = 1 হলে ত্রিভুজটির ত্রেফল নির্ণয় কর। [KUET 07-08]

সমাধান : প্রদত্ত বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ত্রেফল

$= \frac{1}{2}|(x-1)(3-1)-(y-3)(1-3)|$

$= \frac{1}{2}|2x-2+2y-6| = \frac{1}{2}|2x+2y-8|$

$= |x+y-4| = |1-4| = 3$ বর্গ একক।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. কোন বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (–1, $\sqrt{3}$) হলে বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক– [JH,IU 07-08; CU 05-06; KU 03-04]

$Sol^n.: r = \sqrt{1+3} = 2, \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1}$

$= 180° - \tan^{-1}\sqrt{3} = 180° - 30° \therefore (2, 120°)$

2. (1, 4) এবং (9 , – 12) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাংশ অন্তঃস্থভাবে যে বিন্দুতে 5 : 3 অনুপাতে বিভক্ত হয় তার স্থানাংক– [DU, Jt.U 06-07, RU 07-08, 06-07; KUET 05-06]

$Sol^n.:$ স্থানাংক $=(\frac{3+45}{8}, \frac{12-60}{8}) = (6,-6)$

3. (2, –4) ,(–3,6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে y-অক্ষরেখা যে অনুপাতে বিভক্ত করে– [RU 07-08]

$Sol^n.:$ অনুপাত $= \frac{-4-0}{0-6} = \frac{2}{3}$

4. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2,2) , (3,4) ও (5,6) হলে উক্ত ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র – [RU 07-08]

$Sol^n.: G = (\frac{2+3+5}{3}, \frac{2+4+6}{3}) = (\frac{10}{3}, 4)$

5. (x,y) , (2,3) এবং (5,1) একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে– [DU 05-06]

$Sol^n.$ $(x-2)(3-1)-(y-3)(2-5)=0$

$\Rightarrow 2x-4+3y-9=0 \Rightarrow 2x+3y-13=0$

6. (2, 2–2x),(1,2) এবং (2,b–2x) বিন্দুগুলো সমরেখ হলে, এর মান – [DU 06-07]

$Sol^n.$: $(2-1)(2-b+2x)-(2-2x-2)(1-2)=0$

$\Rightarrow 2-b+2x-2x=0 \Rightarrow b=2$

7. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু সমূহ (–1, –2) , (2,5), (3,10) হলে, তার ক্ষেত্রফল– [DU 03-04]

Sol^n : $\frac{1}{2}|(-3)(-5)-(-7)(-1)|=\frac{1}{2}(8)=4$

8. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু সমূহ (–4, 3) , (–1, –2), (3,–2) হলে, তার ক্ষেত্রফল– [Jt.U 08-09]

$Sol^n.$: $\frac{1}{2}|(-3).0-5(-4)|=\frac{1}{2}.20=10$

9. ABCD সামান্তরিকের A, B, C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1,2), (3,4), (1,0) হলে সামান্ত রিকের ক্ষেত্রফল – [RU07-08]

$Sol^n.$: সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= 2.\frac{1}{2}|\{(-2).4-$

$(-2).2\,|=|-8+4|=4$ বর্গ একক।

10. A(2,4), B(2,8) এবং C বিন্দুদ্বয় সমবাহু ত্রিভুজ গঠন কর । AB এর যে পার্শ্বে মূলবিন্দু , C তার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হলে C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [RU 06-07]

$Sol^n.$: দুইটি শীর্ষের ভুজ সমান বলে C এর কোটি $=\frac{4+8}{2}=6$ এবং ভুজ $=2\pm\frac{\sqrt{3}}{2}|4-8|=2\pm2\sqrt{3}$

আবার, $2>0$ এবং বিন্দুটি মূলবিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে বিধায় C এর স্থানাঙ্ক $(2+\sqrt{3}, 6)$.

11. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমীকরণ 2x + y =12, x – 2y = 1 এবং 4x –3y = 4 . ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [RU 05-06; KU 03-04]

$Sol^n.$: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে শীর্ষত্রয় (5,2),(1,0), (4,4). $\therefore\ \Delta=\frac{1}{2}|\,4.(-4)-2.(-3)|=5$ বর্গ একক।

MODE 3 times 1 EQN 2 2 = 1 = 1

2 = 1 = − 2 = 1 = x =5 =

y =2

12. a এর কোন মানের জন্য (a^2 ,2) ,(a ,1) এবং (0,0) বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে? [BUET 05-06]

$Sol^n.$ $(a^2-a)(1-0)-(2-1)(a-0)=0$

$\Rightarrow a^2-2a=0 \Rightarrow a=0\,,2$

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

(a) ঢাল (m) ঃ **1.** একটি সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে তার ঢাল, $m = \tan\theta$

2. একটি সরলরেখা (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী হলে তার ঢাল, $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

3. একটি সরলরেখা মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে তার ঢাল, $m = \dfrac{y_1}{x_1}$.

(b) একটি রেখার সমীকরণ ঃ

1. y-অক্ষের , $x = 0$. **2.** x– অক্ষের , $y = 0$

3. y-অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ x- অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $x = a$.

4. x -অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ y-অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $y = b$.

5. m ঢাল বিশিষ্ট এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $y = mx$.

6. একটি সরলরেখার ঢাল m এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ c হলে তার সমীকরণ হবে $y = mx + c$

7. একটি রেখার ঢাল m এবং রেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে, রেখাটির সমীকরণ,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

8. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2}$

$$\Rightarrow (x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = 0.$$

$$\Rightarrow (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y = (y_1 - y_2)x_1 - (x_1 - x_2)y_1$$

9. x -অক্ষ এবং y -অক্ষ হতে যথাক্রমে a এবং b অংশ ছেদকারী রেখার সমীকরণ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

10. মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$$y = \frac{y_1}{x_1}x \Rightarrow xy_1 - yx_1 = 0$$

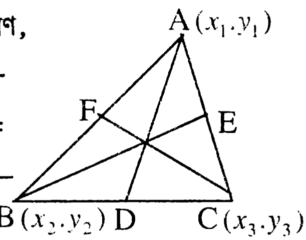
11. মূলবিন্দু হতে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে, রেখাটির সমীকরণ হবে $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$.

x –অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এমন সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r$, যেখানে (x, y) বিন্দু হতে (x_1, y_1) বিন্দুর দূরত্ব r.

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র ঃ

1. AD মধ্যমার সমীকরণ,

$$(2y_1 - y_2 - y_3)x - (2x_1 - x_2 - x_3)y = (2y_1 - y_2 - y_3)x_1 - (2x_1 - x_2 - x_3)y_1$$



2. $ax + by + c = 0$ দ্বারা x-অক্ষের ছেদাংশ $= -c/a$, y -অক্ষের ছেদাংশ $= -c/b$; অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $= \sqrt{(c/a)^2 + (c/b)^2}$; অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{c^2}{2|ab|}$.

3. একটি রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ (α, β) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হলে তার সমীকরণ,

$$\frac{x}{2\alpha} + \frac{y}{2\beta} = 1$$

4. মূলবিন্দু হতে কোন রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে তার সমীকরণ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, যেখানে $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$

5. $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \cdots(1)$,
$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \cdots(2)$ ও

$a_3x+b_3y+c_3=0\cdots$(3) রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল =

$$\frac{\{c_1(a_2b_3-a_3b_2)-c_2(a_1b_3-a_3b_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)\}^2}{2|(a_2b_3-a_3b_2)(a_1b_3-a_3b_1)(a_1b_2-a_2b_1)|}$$

6. (1) ও (2) রেখার ছেদবিন্দুগামী এবং (3) এর সমান্তরাল ও লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ যথাক্রমে $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=\frac{a_1b_3-a_3b_1}{a_2b_3-a_3b_2}$

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=\frac{a_1a_3+b_1b_3}{a_2a_3+b_2b_3}$$

প্রশ্নমালা – III E

1(i) (a) x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ নির্ণেয় ঢাল $=\tan 30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) (3, –4) ও (4, –5) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রমকারী সরললেখার ঢাল $=\frac{-4-(-5)}{3-4}=\frac{1}{-1}=-1$

(c) একটি সরলরেখার সমীকরকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং নিচে 4 একক দূরে অবস্থিত

সমাধানঃ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার নিচে 4 একক দূরে অবস্থিত এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $y=-4$

(d) একটি সরলরেখার সমীকরকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার ডানে 5 একক দূরে অবস্থিত।

সমাধানঃ y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার ডানে 5 একক দূরে অবস্থিত এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $x=5$

(e) x –অক্ষের সমান্তরাল (3, –4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর

সমাধানঃ ধরি, x –অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $y=k$ যেখানে k একটি ধ্রুবক

$y=k$ রেখাটি (3, –4) বিন্দুগামী।

$$-4=k\Rightarrow k=-4.$$

k এর মান বসিয়ে পাই, $y=-4$ (Ans.)

1(ii) নিম্নের দুইটি বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর ঃ

(a) (a, b) এবং $(-a, -b)$

(b) (a, b) এবং $(a+b, a-b)$

সমাধান ঃ (a) $(a\ \ b)$ এবং $(-a, -b)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\frac{x-a}{a+a}=\frac{y-b}{b+b}\Rightarrow\frac{x-a}{2a}=\frac{y-b}{2b}$

$\Rightarrow bx-ab=ay-ab\Rightarrow bx-ay=0$

(b) (a, b) এবং $(a+b\ \ a-b)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $(b-a+b)x-(a-a-b)y$
$=(b-a+b).a-(a-a-b)b$

[$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y=$
$(y_1-y_2)x_1-(x_1-x_2)y_1$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow (2b-a)x+by=2ab-a^2+b^2$

$(2b-a)x+by+a^2-2ab-b^2=0$

2. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\sin^{-1}(5/13)$ কোণ উৎপন্ন করে এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিকের ছেদাংশ 5 একক।

সমাধানঃ ধরি, $\theta=\sin^{-1}(5/13)\Rightarrow\sin\theta=\frac{5}{13}$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\quad\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$\Rightarrow\tan\theta=\frac{5/13}{\sqrt{1\quad 25/169}}=\frac{5}{13}\times\frac{13}{12}=\frac{5}{12}$$

নির্ণেয় রেখার ঢাল, $m=\frac{5}{12}$ এবং -অক্ষের ছেদক অংশ, $c=5$ একক

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y=mx+c$

$\Rightarrow y=\frac{}{12}x+5\Rightarrow 12y=5x+60.$ (Ans.)

3. (a) A(1, 1) , B(3, 4) এবং C(5, – 2) বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু.'০৬,'০৮;ঢা.'১১;কু.'১৪; মা.বো.'০৭; য.'০৯]

সমাধান ঃ ধরি, AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. তাহলে, $D \equiv (\frac{1+3}{2}, \frac{1+4}{2}) = (2, \frac{5}{2})$ এবং $E \equiv (\frac{1+5}{2}, \frac{1-2}{2}) = (3, -\frac{1}{2})$.

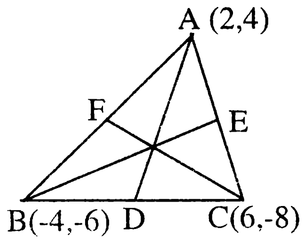
DE রেখার সমীকরণ, $\frac{x-2}{2-3} = \frac{y - \frac{5}{2}}{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{2y-5}{6} \Rightarrow 6x - 12 = -2y + 5$

$6x + 2y - 17 = 0$ (Ans.)

3(b) (2 , 4) , (– 4 , – 6) এবং (6 , – 8) বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু । ত্রিভুজটির মধ্যমাগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৭]

সমাধান ঃ



ধরি, ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(2, 4), B(–4, –6) ও C(6 – 8) এবং BC, CA AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F.

$D \equiv (\frac{-4+6}{2} \ \frac{-6-8}{2}) = (1, -7)$

$E \equiv (\frac{6+2}{2}, \frac{-8+4}{2}) = (4, -2)$

$F \equiv (\frac{2-4}{2}, \frac{4-6}{2}) = (-1, -1)$

AD মধ্যমার সমীকরণ, $\frac{x \quad 2}{2 \quad 1} = \frac{y-4}{4+7}$

$11x \quad 22 = \quad 4 \Rightarrow 11x - y - 18 = 0$

BE মধ্যমার সমীকরণ $\frac{x+4}{4 \quad 4} = \frac{y+6}{-6+2}$

$4x \quad 16 = \quad 8y \quad 48$

$\quad \quad 12 \quad 0 \Rightarrow x - 2y - 8 = 0$

CF মধ্যমার সমীকরণ, $\frac{x \quad 6}{6+1} = \frac{y+8}{8 \quad 1}$

$\Rightarrow -x + 6 = y + 8 \Rightarrow x + y + 2 = 0$

[MCQ এর জন্য, AD মধ্যমার সমীকরণ, $(8 + 6 + 8)x - (4 + 4 - 6)y = 22 \times 2 - 2 \times 4 = 36$
$\Rightarrow 11x - y - 18 = 0$]

3(c) A(h , k) বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার উপর এবং B(k , h) বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত। AB সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি.'০৯; ঢা.,চ.'১২,'১৪; ব.'১০; রা.,য.'১১; সি.,য.'১৪]

সমাধান ঃ A(h , k) বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার উপর অবস্থিত । $6h - k = 1$ (1)

আবার, B(k , h) বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত । $2k - 5h = 5$ (2)

$(1) \times 2 + (2) \Rightarrow 12h - 5h = 7 \Rightarrow h = 1$

(1) হতে আমরা পাই, $6.1 - k = 1 \Rightarrow k = 5$

$A \equiv (1, 5)$ এবং $B \equiv (5 \quad 1)$

AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-1}{1-5} = \frac{y-5}{5-1}$

$\Rightarrow 4x - 4 = -4y + 20 \Rightarrow 4x + 4y = 24$

$x + y - 6 = 0$ (Ans.)

3(d) যদি (a, b) , (a', b') , $(a - a', b - b')$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হয়, তবে দেখাও যে, তাদের সংযোগ রেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $ab' = a'b$. [কু.'০৯]

প্রমাণ: ধরি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় A(a, b) $B(a', b')$ $C(a - a', b - b')$. বিন্দু তিনটি সমরেখ বলে,

AB রেখার ঢাল = AC রেখার ঢাল

$\Rightarrow \frac{b-b'}{a-a'} = \frac{b-b+b'}{a-a+a'} \Rightarrow \frac{b-b'}{a-a'} = \frac{b'}{a'}$

$\Rightarrow a'b - a'b' = ab' - a'b' \quad a'b' = ab'$

এখন, A(a, b) , $B(a', b')$ বিন্দুগামী রেখার সমীকণ

$\frac{x-a}{a-a'} = \frac{y-b}{b-b'} \Rightarrow (b-b')x - ab + ab'$

$= (a-a')y - ab + a'b$

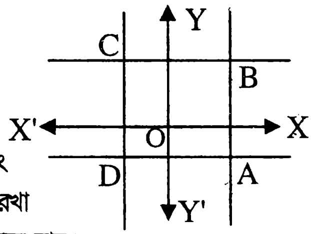
$(b \quad b')x \quad (a \quad a')y \quad 0 \quad [\because a'b' \quad ab']$

যেহেতু সমীকরণটি ধ্রুবপদ মুক্ত, সুতরাং বিন্দুত্রয়ের সংযোগ রেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে যায়।

3(i) (a) $x - 4 = 0$, $y - 5 \quad 0$ $x \quad 3 \quad 0$ এবং $y + 2 = 0$ রেখাগুলো দ্বারা বিন্দু

কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।[ঢা.'১২; চ.'০৫; কু.'০৯ ; ব.'১৪]

সমাধান :



ধরি, $AB \equiv x = 4$

$DC \equiv x = -3$

$BC \equiv y = 5$ এবং

$DA \equiv y = -2$ রেখা

চারটি ABCD চর্তুভুজের বাহু।

AB ও AD বাহুদ্বয় A(4 , – 2) বিন্দুতে , AB ও BC বাহুদ্বয় B(4,5) বিন্দুতে, BC ও CD বাহুদ্বয় C(–3,5) বিন্দুতে, CD ও DA বাহুদ্বয় D(–3, –2) বিন্দুতে ছেদ করে।

AC কর্ণের সমীকরণ, $\frac{x-4}{4+3} = \frac{y+2}{-2-5}$

$\Rightarrow -x + 4 = y + 2 \Rightarrow x + y - 2 = 0$

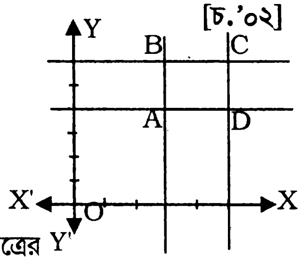
BD কর্ণের সমীকরণ, $\frac{x-4}{4+3} = \frac{y-5}{5+2}$

$\Rightarrow x - 4 = y - 5 \Rightarrow x - y + 1 = 0$

কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ, $x - y + 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$

3(i) (b) $x = 4$, $x = 8$, $y = 6$ এবং $y = 10$ রেখাগুলো দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০২]

সমাধান ধরি,



$AB \equiv x = 4$

$D \equiv x = 8$

$BC \equiv y = 10$ এবং

$AD \equiv y = 6$ রেখা

চারটি ABCD আয়তক্ষেত্রের বাহু।

AB ও AD বাহুদ্বয় A(4 6) বিন্দুতে , AB ও BC বাহুদ্বয় B(4,10) বিন্দুতে, BC ও CD বাহুদ্বয় C(8,10) বিন্দুতে, CD ও DA বাহুদ্বয় D(8, 6) বিন্দুতে ছেদ করে।

AC কর্ণের সমীকরণ $\frac{x-4}{4-8} = \frac{y-6}{6-10}$

$\Rightarrow x - 4 = y - 6 \Rightarrow x - y + 2 = 0$

BD কর্ণের সমীকরণ, $\frac{x-4}{4-8} = \frac{y-10}{10-6}$

$\Rightarrow x - 4 = -y + 10 \Rightarrow x + y - 14 = 0$

কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ, $x - y + 2 = 0$, $x + y - 14 = 0$

4. (a) $3x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ এবং $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৫]

সমাধান: দেওয়া আছে, $3x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ এবং $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করে।

$$\frac{\cos\alpha}{3} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{-p}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-3p}{2} \text{ এবং } \sin\alpha = \frac{-\sqrt{3}p}{2}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{-\sqrt{3}p}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3p}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{3p^2}{4} + \frac{9p^2}{4} \Rightarrow 12p^2 = 4$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{1}{3} \qquad p = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{(Ans.)}$$

(b) $3x - 4y = 12$ এবং $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এবং α এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প '০৪]

সমাধান: দেওয়া আছে, $3x - 4y = 12$ এবং $x \cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করে।

$$\frac{\cos\alpha}{3} = \frac{\sin\alpha}{-4} = \frac{p}{12}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{3p}{12} = \frac{p}{4} \text{ এবং } \sin\alpha = \frac{-p}{3}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{p}{4}\right)^2 + \left(\frac{-p}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{p^2}{16} + \frac{p^2}{9} \Rightarrow \frac{p^2(9+16)}{16.9} = 1$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{144}{25} \qquad p = \pm\frac{12}{5} \quad \text{(Ans.)}$$

আবার, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-p/3}{p/4} = -\frac{4}{3}$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) \quad \text{(Ans.)}$$

5. (a) একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হতে সমান সমান অংশ কর্তন করে এবং (α , β) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৪; দি.'১১]

সমাধানঃ ধরি, অক্ষদ্বয় হতে সমান সমান অংশ কর্তন করে এরূপ রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{\pm a}=1$

$\Rightarrow x \pm y = a \Rightarrow x + y = a$ অথবা, $x - y = a$

রেখাটি (α , β) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে,

$a = \alpha + \beta$ অথবা, $a = \alpha - \beta$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x + y = \alpha + \beta$

অথবা, $x - y = \alpha - \beta$

5(b) একটি সরলরেখা (2 , 6) বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিত অংশের সমষ্টি 15 তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৪,'০৮]

সমাধানঃ ধরি, (2 , 6) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$y - 6 = m(x - 2)$

$\Rightarrow mx - y = 2m - 6 \quad \cdots (1)$

$\Rightarrow \frac{x}{(2m-6)/m}+\frac{y}{-(2m-6)}=1$

প্রশ্নমতে, $\frac{2m-6}{m}+\{-(2m-6)\}=15$

$\Rightarrow 2m - 6 - 2m^2 + 6m = 15m$

$\Rightarrow 2m^2 + 7m + 6 = 0$

$\Rightarrow 2m^2 + 4m + 3m + 6 = 0$

$\Rightarrow 2m(m + 2) + 3(m + 2) = 0$

$\Rightarrow (m + 2)(2m + 3) = 0$

$m = -2$ অথবা, $m = -\frac{3}{2}$

(1) এ m এর মান বসিয়ে পাই,

$-2x - y = 2(-2) - 6 \Rightarrow 2x + y = 10$

অথবা, $-\frac{3}{2}x - y = 2.(-\frac{3}{2})-6$

$\Rightarrow 3x + 2y = 6 + 12 \Rightarrow 3x + 2y = 18$

উত্তর ঃ $2x + y = 10$ বা, $3x + 2y = 18$

5. (c) একটি সরলরেখা (1 , 4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে প্রথম চতুর্ভাগে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৬; চ.'১১; কু.'১২]

সমাধানঃ ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \cdots (1)$

(1) রেখাটি (1 , 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1 \Rightarrow \frac{1}{a}=1-\frac{4}{b}=\frac{b-4}{b}$

$\Rightarrow a = \frac{b}{b-4} \qquad (2)$

(1) রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ab$.

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}ab = 8 \Rightarrow \frac{b}{b-4}.b = 16$

$\Rightarrow b^2 = 16b - 64 \Rightarrow b^2 - 16b + 64 = 0$

$\Rightarrow (b - 8)^2 = 0 \Rightarrow b = 8$

(2) হতে পাই, $a = \frac{8}{8-4} = 2$

রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{2}+\frac{y}{8}=1 \Rightarrow 4x + y = 8$

5(d) একটি সরলরেখা (3 , 7) বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০১]

সমাধানঃ ধরি, অক্ষদ্বয় হতে বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে এরূপ রেখাটির সমীকরণ

$\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1 \Rightarrow x - y = a \qquad (1)$

(1) রেখাটির (3 , 7) বিন্দু দিয়ে যায়।

$3 - 7 = a \Rightarrow a = -4$

রেখাটির *সমীকরণ* $x-y = -4 \Rightarrow x - y + 4 = 0$

6. (a) $x + 2y + 7 = 0$ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উপরি উক্ত খন্ডিতাংশ কোন বর্গের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০৭; চ.'০৮; রা.'১০;ব. '০৫,'১২; য.'১৩; দি.'১০; সি.'১৪; মা.'১২]

সমাধানঃ প্রদত্ত সমীকরণ, $x + 2y + 7 = 0$

$\Rightarrow x + 2y = -7 \Rightarrow \frac{x}{-7}+\frac{y}{-7/2}=1$

রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (ধরি) A(−7, 0) এবং B(0 , −7/2) বিন্দুতে ছেদ করে।

AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{-7}{2}, \frac{-7/2}{2})$

$= (\frac{-7}{2}, \frac{-7}{4})$

এবং $AB^2 = (-7)^2 + (-7/2)^2 = 49 + \frac{49}{4} = 61\frac{1}{4}$

রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশ AB কোন বর্গের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফল $= 61\frac{1}{4}$ বর্গ একক।

6(b) যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ (6 , 2) বিন্দুতে 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৪,'০৭; রা.'০৮; দি.'১১]

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \cdots (1)$

(1) রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (ধরি) A(a, 0) এবং B(0 , b) বিন্দুতে ছেদ করে।

AB রেখাংশ (6 , 2) বিন্দুতে 2 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় ।

$\frac{2.0 + 3a}{2+3} = 6 \Rightarrow 3a = 30 \Rightarrow a = 10$ এবং

$\frac{2b + 3.0}{2+3} = 2 \Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow b = 5$

রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow x + 2y = 10$

6(c) যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ (– 4 , 3) বিন্দুতে 5 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৬; সি.'১১; ব.'১৩]

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \cdots (1)$

(1) রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (ধরি) A(a, 0) এবং B(0 , b) বিন্দুতে ছেদ করে।

AB রেখাংশ (–4 , 3) বিন্দুতে 5 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় ।

$\frac{5.0 + 3a}{5+3} = -4 \Rightarrow 3a = -32 \Rightarrow a = -\frac{32}{3}$

এবং $\frac{5b + 3.0}{5+3} = 3 \Rightarrow 5b = 24 \Rightarrow b = \frac{24}{5}$

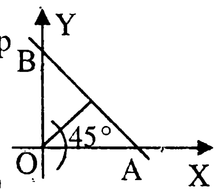
নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $\frac{x}{-32/3} + \frac{y}{24/5} = 1$

$\Rightarrow \frac{3x}{-32} + \frac{5y}{24} = 1 \Rightarrow \frac{-9x + 20y}{96} = 1$

$9x - 20y + 96 = 0$ (Ans.)

6(d) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 16 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু থেকে যার উপর অঙ্কিত লম্ব *x*-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। [সি.'০৫; য.'১০]

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ



$x \cos 45° + y \sin 45° = p$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = p$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}p} + \frac{y}{\sqrt{2}p} = 1 \cdots (1)$

(1) রেখাটির *x*-অক্ষকে $A(\sqrt{2}p, 0)$ এবং *y*-অক্ষকে $B(0, \sqrt{2}p)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রশ্নমতে, $\Delta OAB = \frac{1}{2}(OA \times OB) = 16$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{2}p \times \sqrt{2}p) = 16$

$\Rightarrow p^2 = 16 \Rightarrow p = \pm 4$

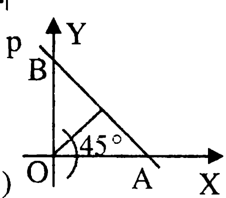
রেখাটির সমীকরণ, $x + y + 4\sqrt{2} = 0$

অথবা, $x + y - 4\sqrt{2} = 0$

[$\frac{a}{b} = \tan 45° \Rightarrow a = b \therefore a^2 = 32$]

6(e) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু থেকে যার উপর অঙ্কিত লম্ব *x*-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। [চ.'০৬,'১৩; দি.'১৩; রা.'কু.'১৪; য.'১০]

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ



$x \cos 45° + y \sin 45° = p$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = p$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}p} + \frac{y}{\sqrt{2}p} = 1 \cdots (1)$

(1) রেখাটির x-অক্ষকে $A(\sqrt{2}p,0)$ এবং y-অক্ষকে $B(0,\sqrt{2}p)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রশ্নমতে, $\Delta OAB=\frac{1}{2}(OA\times OB)=8$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{2}p\times\sqrt{2}p)=8$

$\Rightarrow p^2=8\Rightarrow p=\pm 2\sqrt{2}$

রেখাটির সমীকরণ, $x+y+4=0$

অথবা, $x+y-4=0$

7. (a) P ও Q বিন্দুদ্বয় x-অক্ষের উপর এবং R ও S বিন্দুদ্বয় y-অক্ষের উপর অবস্থিত। PR ও QS এর সমীকরণ যথাক্রমে $4x+3y+6=0$ ও $x+2y-1=0$ হলে, দেখাও যে, PQ = RS. [ঢা.'০৪]

প্রমাণ : PR রেখার সমীকরণ, $4x+3y+6=0$

$\Rightarrow 4x+3y=-6 \Rightarrow \frac{x}{-3/2}+\frac{y}{-2}=1$ এবং

QS রেখার সমীকরণ, $x+2y-1=0$

$\Rightarrow x+2y=1\Rightarrow \frac{x}{1}+\frac{y}{1/2}=1$

প্রশ্নমতে, $P\equiv(-3/2\quad 0)$, $R\equiv(0\quad 2)$

$Q\equiv(1,0)$, $S\equiv(0,1/2)$.

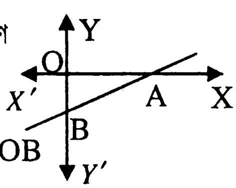
$$PQ=\sqrt{(-\frac{3}{2}-1)^2+(0-0)^2}=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2}$$

এবং $RS=\sqrt{(0-0)^2+(2-\frac{1}{2})^2}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$

$PQ=\frac{5}{2}=RS$ (Showed)

7.(b) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (– 2 , – 5) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন OA + 2.OB = 0 হয় , যখন O মূলবিন্দু। [ঢা. '০৬,'১৩; য.'০৬,'১১২; চ. '০৬; সি. '০৭; ব. '০৮,'১০]

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ



$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\cdots\cdots(1)$

এখানে, $a=OA$ এবং $b=OB$

প্রশ্নমতে, $OA+2.OB=0$

$\Rightarrow a+2b=0\Rightarrow a=-2b$

(1) রেখাটি $(-2,-5)$ বিন্দুগামী।

$\therefore \frac{-2}{a}+\frac{-5}{b}=1\Rightarrow\frac{-2}{-2b}+\frac{-5}{b}=1\ [\because a=-2b]$

$\Rightarrow \frac{1-5}{b}=1\Rightarrow b=-4$ এবং $a=-2\times-4=8$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $\frac{x}{8}+\frac{y}{-4}=1$

$\Rightarrow x-2y=8$ (Ans.)

(c) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (3 , 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন OA – OB = 2 হয় যখন O মূলবিন্দু। [কু.'০২; য.'০৪,'১২; ব.'০৫; ; রা., চ., দি.'১০]

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\cdots(1)$

এখানে, $a=OA$ এবং $b=OB$

প্রশ্নমতে, $OA-OB=2\Rightarrow a-b=2$

$\Rightarrow a=b+2\qquad(2)$

(1) রেখাটি $(3,2)$ বিন্দুগামী।

$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1\Rightarrow\frac{3}{b+2}+\frac{2}{b}=1\ [\because a=b+2]$

$\Rightarrow \frac{3b+2b+4}{(b+2)b}=1\Rightarrow b^2+2b=5b+4$

$\Rightarrow b^2-3b-4=0\Rightarrow(b-4)(b+1)=0$

$b=4$ অথবা, $b=-1$

$(2)\Rightarrow a=4+2=6$, যখন $b=4$

অথবা, $a=-1+2=1$, যখন $b=-1$

রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1\Rightarrow 2x+3y=12$

অথবা, $\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1\Rightarrow x-y=1$

7(d) $x+ay=a$ রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন OA = 3.OB হয়, যখন O মূলবিন্দু। P এর স্থানাঙ্ক (0 , – 9) হলে, AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $x+ay=a$

$\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{1}=1\qquad(1)$

(1) রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A(a, 0) এবং B (0 ,1) বিন্দুতে ছেদ করে এবং OA = a ও OB = 1.

প্রশ্নমতে, $OA = 3.OB \Rightarrow a = 3.1 = 3$

A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3 , 0)

AP এর সমীকরণ $\frac{x-3}{3-0} = \frac{y-0}{0+9}$

$\Rightarrow 9x - 27 = 3y \therefore 3x - y = 9$ (Ans.)

7(e) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ সরলরেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। α কে পরিবর্তনশীল ধরে দেখাও যে, AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $p^2(x^2+y^2) = 4x^2y^2$.
[য. '০২; ব. '০ ২; সি.'০৩; কু.'০৭; ঢা.'১১]

সমাধান: প্রদত্ত রেখার সমীকরণ,

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

$\Rightarrow \frac{x}{p/\cos\alpha} + \frac{y}{p/\sin\alpha} = 1 \quad \cdots (1)$

(1) রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A(p/cosα, 0) এবং B (0 , p/sinα) বিন্দুতে ছেদ করে।

AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{p}{2\cos\alpha}, \frac{p}{2\sin\alpha})$

ধরি AB এর মধ্যবিন্দুর সেটের যেকোন একটি উপাদান (x , y).

$x = \frac{p}{2\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{p}{2x}$ এবং

$y = \frac{p}{2\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{p}{2y}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = (\frac{p}{2x})^2 + (\frac{p}{2y})^2$

$\Rightarrow 1 = \frac{p^2}{4x^2} + \frac{p^2}{4y^2} \Rightarrow \frac{p^2(y^2+x^2)}{4x^2y^2} = 1$

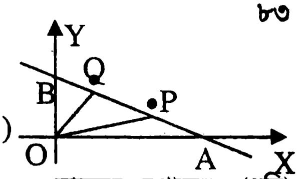
$p^2(x^2+y^2) = 4x^2y^2$ (Showed)

8. (a) $x + 3y - 12 = 0$ রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের ত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৩, '০৭; ব.'০৭; য.'০৮; রা.'১০]

সমাধান: প্রদত্ত রেখা $x + 3y - 12 = 0$

$\Rightarrow x + 3y = 12$

$\Rightarrow \frac{x}{12} + \frac{y}{4} = 1 \cdots (1)$



(1) রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে (ধরি) A(12 , 0) ও B(0 , 4) বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, AB রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক বিন্দু P ও Q এবং O মূলবিন্দু।

$P \equiv (\frac{1\times0+2\times12}{1+2}, \frac{1\times4+2\times0}{1+2}) = (8, \frac{4}{3})$

$Q \equiv (\frac{2\times0+1\times12}{2+1}, \frac{2\times4+1\times0}{2+1}) = (4, \frac{8}{3})$

OP রেখার সমীকরণ, $y = \frac{4/3}{8}x$

$\Rightarrow y = \frac{1}{6}x \Rightarrow x = 6y$ এবং

OQ রেখার সমীকরণ, $y = \frac{8/3}{4}x$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x \Rightarrow 2x = 3y$

নির্ণেয় রেখাদ্বয়ের সমীকরণ, $x = 6y$ ও $2x = 3y$

8 (b) $5x + 4y - 20 = 0$ রেখাটি x ও y–অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

I. AB এর দৈর্ঘ্য ও OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যেখানে O মূলবিন্দু।

II. P ও Q বিন্দুদ্বয় AB রেখাকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করলে OP ও OQ এর সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ঢা.'০৫; সি.'০৯; চ.'১৩]

III. দেখাও যে, OAP, OPQ ও OQB ত্রিভুজ তিনটির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

সমাধান: I. প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $5x + 4y - 20 = 0$

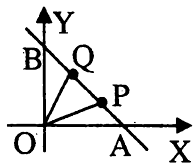
$\Rightarrow 5x + 4y = 20 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$, যা x ও y–অক্ষকে যথাক্রমে A (4, 0) ও B(0, 5) বিন্দুতে ছেদ করে।

$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{16+25}$

$= \sqrt{41}$ একক।

এবং OAB ত্রিভুজের ত্রেফল $=\frac{1}{2}\times 5\times 4=10$ বর্গ একক।

II. P বিন্দুর স্থানাঙ্ক



$(\frac{1\times 0+2\times 4}{1+2},\frac{1\times 5+2\times 0}{1+2})$

$=(\frac{8}{3},\frac{5}{3})$

Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{2\times 0+1\times 4}{2+1},\frac{2\times 5+1\times 0}{2+1})$

$=(\frac{4}{3},\frac{10}{3})$

OP রেখার সমীকরণ, $y=\frac{5/3}{8/3}x$

$\Rightarrow y=\frac{5}{8}x \Rightarrow 5x=8y$ এবং

OQ রেখার সমীকরণ, $y=\frac{10/3}{4/3}x$

$\Rightarrow y=\frac{10}{4}x \Rightarrow 5x=2y$

নির্ণেয় রেখাদ্বয়ের সমীকরণ, $5x=8y$ ও $5x=2y$

III. x-অ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $\frac{5}{3}$ এবং y-অ হতে Q বিন্দুর দূরত্ব $\frac{4}{3}$.

OAP ত্রিভুজের ত্রেফল $=\frac{1}{2}(OA\times\frac{5}{3})$

$=\frac{1}{2}(4\times\frac{5}{3})=\frac{10}{3}$ বর্গ একক।

OBQ ত্রিভুজের ত্রেফল $=\frac{1}{2}(OB\times\frac{4}{3})$

$=\frac{1}{2}(5\times\frac{4}{3})=\frac{10}{3}$ বর্গ একক।

OPQ ত্রিভুজের ত্রেফল $=\frac{1}{2}|\frac{8}{3}\times\frac{10}{3}-\frac{4}{3}\times\frac{5}{3}|$

$=\frac{1}{2}|\frac{80}{9}-\frac{20}{9}|=\frac{1}{2}\times\frac{60}{9}=\frac{10}{3}$ বর্গ একক।

OAP, OPQ ও OQB ত্রিভুজ তিনটির ত্রেফল পরস্পর সমান।

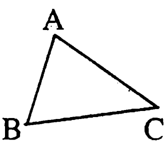
9. (a) $2y+x-5=0$, $y+2x-7=0$ এবং $x-y+1=0$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'০৩]

সমাধান: মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$AB\equiv x+2y-5=0 \cdots(1)$,

$BC\equiv 2x+y-7=0 \cdots(2)$,

$CA\equiv x-y+1=0 \cdots(3)$



(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু,

$A\equiv(\frac{2-5}{-1-2},\frac{-5-1}{-2-1})=(1,2)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু,

$B\equiv(\frac{-14+5}{1-4},\frac{-10+7}{1-4})=(3,1)$

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু,

$C\equiv(\frac{1-7}{-2-1},\frac{-7-2}{-2-1})=(2,3)$.

$\delta_{ABC}=(1-3)(1-3)-(2-1)(3-2)$

$=4-1=3$

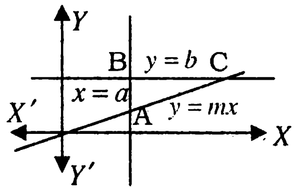
$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}|\delta_{ABC}|=\frac{3}{2}$ বর্গ একক

$\therefore$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{3}{2}$ বর্গ একক।

$$[\Delta=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & -5\\ 2 & 1 & -7\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}^2}{2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{9^2}{2\times 27}=\frac{3}{2}]$$

9(b) দেখাও যে, $x=a$, $y=b$ এবং $y=mx$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2|m|}(b-ma)^2$ বর্গ একক।[য. '০৫; রা.'০৮; কু.'১২; ব.'১৩]

প্রমাণ ঃ ধরি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,



$AB \equiv x = a \cdots (1)$,
$BC \equiv y = b \cdots (2)$,
$AC \equiv y = mx \cdots (3)$

(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু , $A \equiv (a, ma)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু , $B \equiv (a, b)$

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু , $C \equiv (\frac{b}{m}, b)$

$$\delta_{ABC} = (a - a)(b - b) - (ma - b)(a - \frac{b}{m})$$

$$= -(ma - b)\frac{ma - b}{m} = -\frac{(b - ma)^2}{m}$$

প্রদত্ত রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\left|-\frac{(b - ma)^2}{m}\right| \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2|m|}(b - ma)^2 \text{ বর্গ একক। Showed)}$$

10. (a) t এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (t + 5 , 2t – 4) হলে, এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। সঞ্চারপথটি অক্ষদ্বয় হতে যে অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x , y)

$t + 5 = x \Rightarrow t = x - 5 \cdots (1)$ এবং

$2t - 4 = y \Rightarrow 2(x - 5) - 4 = y$ [(1) দ্বারা]

$2x - y = 14$; যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

২য় অংশ ঃ $2x - y = 14 \Rightarrow \frac{x}{7} + \frac{y}{-14} = 1$

সঞ্চারপথটির x–অক্ষের খন্ডিতাংশ = 7 এবং y –অক্ষের খন্ডিতাংশ = –14.

(b) দেখাও যে, (–3, 6) বিন্দু হতে $x - 2y - 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত যেকোন রেখাংশকে $x - 2y + 5 = 0$ রেখাটি সমদ্বিখন্ডিত করে।

[সি.'০১; য.'০৫; ঢা.'০৯; চ.'১১; দি.'১২]

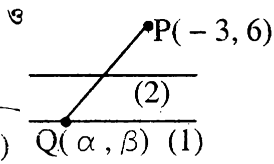
প্রমাণ : প্রদত্ত রেখাদ্বয়,

$x - 2y - 5 = 0$ (1) ও

$x - 2y + 5 = 0 \cdots (2)$

এবং বিন্দুটি P(–3,6)

(2) রেখার উপর $Q(\alpha, \beta)$ যেকোন একটি বিন্দু নেই। তাহলে, $\alpha - 2\beta - 5 = 0 \cdots (3)$



এখন ইহা প্রমাণ করা যথেষ্ট যে , PQ এর মধ্যবিন্দু $(\frac{-3+\alpha}{2}, \frac{6+\beta}{2})$, $x - 2y + 5 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। (3) হতে পাই, $y = b.$

(1) এর বামপক্ষ $= x - 2y + 5$

$$= \frac{-3+\alpha}{2} - 2\,\frac{6+\beta}{2} + 5$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha - 3 - 12 - 2\beta + 10)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha - 2\beta - 5) = \frac{1}{2} \times 0 = 0 \quad [(3) \text{ দ্বারা}]$$

PQ এর মধ্যবিন্দু $x - 2y + 5 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

10(c) মূলবিন্দু হতে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন করে ; রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **[মা.বো.'০৮]**

সমাধান: নির্ণেয় রেখার সমীকরণ

$x \cos 120° + y \sin 120° = 5$

$\Rightarrow x(-\frac{1}{2}) + y.\frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \Rightarrow -x + \sqrt{3}\,y = 10$

$x - \sqrt{3}\,y + 10 = 0$ (Ans.)

11. (a) (2 , – 1) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $-\frac{3}{4}$. এ রেখার উপর (2 , – 1) বিন্দু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$\tan\alpha = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

অথবা, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

(2 , – 1) বিন্দু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , y) হলে, $\frac{x-2}{\cos\alpha} = \frac{y+1}{\sin\alpha} = 15$

$x - 2 = 15\cos\alpha \Rightarrow x = 15\cos\alpha + 2$

এবং $y + 1 = 15\sin\alpha \Rightarrow y = 15\sin\alpha - 1$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ এর জন্য,

$x = 15 \times -\frac{4}{5} + 2 = -12 + 2 = -10$ এবং

$y = 15 \times \frac{3}{5} - 1 = 9 - 1 = 8$

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ এর জন্য,

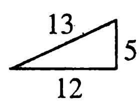
$x = 12 + 2 = 14$ এবং $y = -9 - 1 = -10$

বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (–10, 8) ও (14 , –10)

11(b) (– 1,1) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{5}{12}$. এ রেখার উপর (– 1 , 1) বিন্দু হতে 26 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$\tan\alpha = \frac{5}{12}$



$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

অথবা, $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$

(– 1 1) বিন্দু হতে 26 একক দূরে অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , y) হলে, $\frac{x+1}{\cos\alpha} = \frac{y-1}{\sin\alpha} = 26$

$x + 1 = 26\cos\alpha \Rightarrow x = 26\cos\alpha - 1$

এবং $y - 1 = 26\sin\alpha \Rightarrow y = 26\sin\alpha + 1$

$\sin\alpha = \frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ এর জন্য,

$x = 26 \times \frac{12}{13} - 1 = 24 - 1 = 23$ এবং

$y = 26 \times \frac{5}{13} + 1 = 10 + 1 = 11$

$\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ এর জন্য,

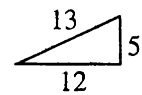
$x = -24 - 1 = -25$ এবং $y = -10 + 1 = -9$

দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (23, 11) ও (–25 , –9)

(c) A (3 , – $\frac{7}{2}$) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{5}{12}$. রেখাটির উপরস্থ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যেন AP = $\frac{13}{2}$ হয়।

সমাধান ঃ মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$\tan\alpha = \frac{5}{12}$



$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

অথবা, $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$

A(3 , – $\frac{7}{2}$) বিন্দু হতে AP = $\frac{13}{2}$ একক দূরে অবস্থিত P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x y) হলে,

$\frac{x-3}{\cos\alpha} = \frac{y+7/2}{\sin\alpha} = \frac{13}{2}$

$x - 3 = \frac{13}{2}\cos\alpha \Rightarrow x = \frac{13}{2}\cos\alpha + 3$

এবং $y + \frac{7}{2} = \frac{13}{2}\sin\alpha \Rightarrow y = \frac{13}{2}\sin\alpha - \frac{7}{2}$

$\sin\alpha = \frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ এর জন্য,

$x = \frac{13}{2} \times \frac{12}{13} + 3 = 6 + 3 = 9$ এবং

$y = \frac{13}{2} \times \frac{5}{13} - \frac{7}{2} = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -1$

$\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ এর জন্য, $x = -6 + 3 = -3$ এবং $y = -\frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -6$

বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (9, – 1) ও (–3 , – 6)

কাজ:

১. মূলবিন্দুগামী একটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $135°$ কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান : নির্ণেয় রেখার ঢাল, $m = \tan 135°$

$= \tan(180°-45°) = -\tan 45° = -1$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y = mx \Rightarrow y = -x$

$x + y = 0$ (Ans.)

২. সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে 5 একক অংশ ছেদ করে।

সমাধান: নির্ণেয় রেখার ঢাল, $m = \cot(\pm 30°)$

$= \pm\cot 30° = \pm\sqrt{3}$ এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ, $c = 5$ একক।

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y = mx + c$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{3}x + 5$ (Ans.)

3. একটি সরলরেখা $(6, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিত অংশের গুণফল 1 তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে, $ab = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} \cdots \quad (2)$

(1) রেখাটি $(6, -1)$ বিন্দুগামী।

$\frac{6}{a} + \frac{-1}{b} = 1 \Rightarrow \frac{6}{a} - a = 1 \quad [\ \frac{1}{b} = a]$

$\Rightarrow 6 - a^2 = a \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0$

$\Rightarrow (a+3)(a-2) = 0 \therefore a = 2$ অথবা, $a = -3$

$b = \frac{1}{2}$ অথবা, $b = -\frac{1}{3}$

রেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{2} + 2y = 1 \Rightarrow x + 4y = 2$

অথবা, $\frac{x}{-3} - 3y = 1 \Rightarrow x + 9y + 3 = 0$

4. একটি সরলরেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিত অংশের সমষ্টি ও অন্তরফল যথাক্রমে 9 ও 5 তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে, $a + b = 9 \Rightarrow b = 9 - a \quad (2)$

এবং $|a - b| = 5 \Rightarrow a - b = \pm 5$

$\Rightarrow a - 9 + a = \pm 5 \quad$ [(2) দ্বারা]

$\Rightarrow 2a = 12$ বা, $4 \ \therefore a = 6$ বা, 2

(2) হতে পাই, $b = 9 - 6 = 3$, যখন $a = 6$

$b = 9 - 2 = 7$, যখন $a = 2$

রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow x + 2y = 6$

অথবা, $\frac{x}{2} + \frac{y}{7} = 1 \Rightarrow 7x + 2y = 14$

5. যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[কু.'০০]**

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (1)$

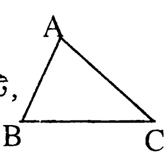
(1) রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

প্রশ্নমতে, $\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$ এবং $\frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = 6$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 12$

[MCQ এর জন্য, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{2\times 2} + \frac{y}{2\times 3} = 1$]

6. (b) $2x + y = 3$ ও $3x - 5y = -4$ রেখাদ্বয় x-অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



সমাধান: x-অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$

মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$AB \equiv 2x + y - 3 = 0 \cdots (1)$,

$AC \equiv 3x - 5y + 4 = 0 \cdots (2)$

$BC \equiv y = 0 \cdots (3)$,

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু,

$A \equiv (\frac{4-15}{-10-3}, \frac{-9-8}{-10-3}) = (\frac{11}{13}, \frac{17}{13})$

(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু , $B \equiv (\frac{3}{2}, 0)$

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু, $C \equiv (-\frac{4}{3}, 0)$

$$\delta_{ABC} = \begin{vmatrix} 11/13 & 17/13 & 1 \\ 3/2 & 0 & 1 \\ -4/3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{17}{13}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = -\frac{17}{13} \times \frac{17}{6} = -\frac{289}{78}$$

$\therefore$ Δ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\left|-\frac{289}{78}\right|$ বর্গ একক

$= \frac{289}{156}$ বর্গ একক (Ans.)

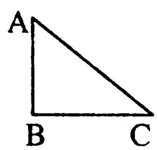
7. একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমীকরণ $x + 2y = 4$, $2x - y = 3$ ও $x - y + 2 = 0$. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী এবং এর ক্ষেত্রফল $7\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

সমাধান: মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$AB \equiv x + 2y - 4 = 0 \cdots (1)$,

$BC \equiv 2x - y - 3 = 0 \cdots (2)$,

$CA \equiv x - y + 2 = 0 \cdots (3)$



(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু ,

$A \equiv (\frac{4-4}{-1-2}, \frac{-4-2}{-1-2}) = (0, 2)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু,

$B \equiv (\frac{-6-4}{-1-4}, \frac{-8+3}{-1-4}) = (2, 1)$

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু,

$C \equiv (\frac{-2-3}{-2+1}, \frac{-3-4}{-2+1}) = (5, 7)$

এখন, $AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$BC = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$

$CA = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$

AB, BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $AB^2 + BC^2 = 5 + 45 = 50 = CA^2$ অতএব, ABC ত্রিভুজটি সমকোণী যার $\angle B = 90^0$.

২য় অংশ : ত্রিভুজটি ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AB \times BC)$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{5} \times 3\sqrt{5})$ বর্গ একক $= 7\frac{1}{2}$ বর্গ একক

$$[\ \Delta = \left|\frac{\{-4(-2+1) + 3(-1-2) + 2(-1-4)\}^2}{2(-2+1)(-1-2)(-1-4)}\right|$$

$$= \left|\frac{(4-9-10)^2}{2(-1)(-3)(-5)}\right| = \frac{15}{2}]$$

8. দেখাও যে, $2x + 7y = 14$ ও $2x - 7y = 14$ রেখাদ্বয় y-অক্ষের সাথে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

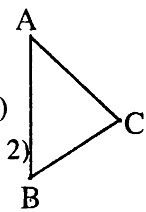
সমাধান: y-অক্ষের সমীকরণ , $x = 0$

মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$AC \equiv 2x + 7y - 14 = 0 \cdots (1)$,

$BC \equiv 2x - 7y - 14 = 0 \cdots (2)$

$AB \equiv x = 0 \cdots (3)$,



(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু , $A \equiv (0, 2)$

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু , $B \equiv (0, -2)$

$(1) + (2) \Rightarrow 4x = 28 \Rightarrow x = 7$

$(1) \Rightarrow 14 + 7y - 14 = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore$ (1) ও (2) এর ছেদবিন্দু, $C \equiv (7, 0)$

এখন, $AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$

$CA = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$

AB, BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $BC = \sqrt{53} = CA$

প্রদত্ত রেখাদ্বয় y-অক্ষের সাথে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

প্রশ্নমালা III F

1. k এর যেকোন অশূন্য মানের জন্য $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$.

2. (α,β) এবং $f(x,y)\equiv a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $g(x,y)\equiv a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\dfrac{f(x,y)}{f(\alpha,\beta)}=\dfrac{g(x,y)}{g(\alpha,\beta)}$

i.e., $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_1\alpha+b_1\beta+c_1}=\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{a_2\alpha+b_2\beta+c_2}$

3. $y=m_1x+c_1$ ও $y=m_2x+c_2$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\varphi=\pm\tan^{-1}\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$.

4. $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে, $m_1=m_2$ এবং $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে, $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$.

$ax+by+c=0$ রেখার সমান্তরাল যেকোণ রেখার সমীকরণ $ax+by+k=0$; যেখানে k একটি ধ্রুবক

5. $ax+by+c=0$ রেখার সমান্তরাল এবং (α,β) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $ax+by=a\alpha+b\beta$.

6. $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ রেখাদ্বয় লম্ব হলে, $m_1m_2=-1$ এবং $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয় লম্ব হলে, $a_1a_2+b_1b_2=0$. $ax+by+c=0$ রেখার লম্ব যেকোন রেখার সমীকরণ $bx-ay+k=0$; যেখানে k একটি ধ্রুবক।

7. $ax+by+c=0$ রেখার লম্ব এবং (α,β) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $bx-ay=b\alpha-a\beta$.

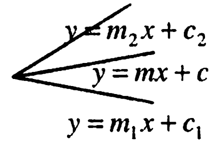
8. $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ ও $a_3x+b_3y+c_3=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

9.(a) $P(x_1,y_1)$ বিন্দুর সাপেক্ষে $A(h,k)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $(2x_1-h,\ 2y_2-k)$.

(b) (x,y) বিন্দুর প্রতিবিম্ব x-অক্ষের সাপেক্ষে $(x,-y)$ এবং y-অক্ষের সাপেক্ষে $(-x,y)$.

(c) $y=mx+c$ রেখার সাপেক্ষে $y=m_1x+c_1$ রেখার প্রতিবিম্ব $y=m_2x+c_2$ হবে, যদি $\dfrac{m_1-m}{1+m_1m}=\dfrac{m-m_2}{1+mm_2}$ হয়।



(d) x এবং y-অক্ষের সাপেক্ষে $ax+by+c=0$ রেখার প্রতিবিম্ব যথাক্রমে $ax-by+c=0$ এবং $-ax+by+c=0$.

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র ঃ

1. (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y=(y_1-y_2)x_1-(x_1-x_2)y_1$

2. (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুগামী রেখার সমান্তরাল এবং (x_3,y_3) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y=(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3$

3. (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুগামী রেখার লম্ব এবং (x_3,y_3) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $(x_1-x_2)x+(y_1-y_2)y=(x_1-x_2)x_3+(y_1-y_2)y_3$

4. (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুগামী রেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $(x_1-x_2)x+(y_1-y_2)y=\dfrac{1}{2}(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)$

5. $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং m ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ, $(a_2+mb_2)(a_1x+b_1y+c_1)-$

$(a_1+mb_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$

6. x-অক্ষের সমান্তরাল ও $f(x)\equiv a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $g(x)\equiv a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $a_2f(x)-a_1g(x)=0$

y-অক্ষের সমান্তরাল ও $f(x)\equiv a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $g(x)\equiv a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $b_2f(x)-b_1g(x)=0$

7. অক্ষদ্বয় হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে এবং $f(x)\equiv a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $g(x)\equiv a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $(a_2-b_2)f(x)-(a_1-b_1)g(x)=0$ এবং $(a_2+b_2)f(x)-(a_1+b_1)g(x)=0$.

8. (x_1,y_1) বিন্দুগামী এবং m_1 ঢাল বিশিষ্ট রেখার সাথে θ $(m_2=\tan\theta)$ কোণ উৎপন্ন করলে রেখা দুইটির সমীকরণ, $(m_1-m_2)x-(1+m_1m_2)y=(m_1-m_2)x_1-(1+m_1m_2)y_1$ এবং $(m_1+m_2)x-(1-m_1m_2)y=(m_1+m_2)x_1-(1-m_1m_2)y_1$

9. $ax+by+c=0$ রেখার সাপেক্ষে (x_1,y_1) বিন্দুর প্রতিবিম্ব $\left(x_1-\dfrac{2a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2},\ y_1-\dfrac{2b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}\right)$

10. $f(x)\equiv ax+by+c=0$ রেখার সাপেক্ষে $g(x)\equiv a_1x+b_1y+c_1=0$ রেখার প্রতিবিম্ব

$$(a^2+b^2)g(x)-2(aa_1+bb_1)f(x)=0$$

প্রশ্নমালা – III F

1.(a) মূলবিন্দু এবং $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ও $\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৫,'০৭]

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখাটির সমীকরণ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1+k\left(\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}-1\right)=0$, $k\neq 0$

রেখাটি মুলবিন্দু (0, 0) দিয়ে অতিক্রম করলে,

$\dfrac{0}{a}+\dfrac{0}{b}-1+k\left(\dfrac{0}{b}+\dfrac{0}{a}-1\right)=0\Rightarrow k=-1$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1-\frac{x}{b}-\frac{y}{a}+1=0$$

$\Rightarrow bx+ay-ax-by=0$

$\Rightarrow (b-a)x-(b-a)y=0$

$x-y=0$ (Ans.)

1(b) দেখাও যে, k এর সব মানের জন্য একগুচ্ছ সরলরেখা $(3+2k)x+5ky-3=0$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা.'০৩]

প্রমাণ : $(3+2k)x+5ky-3=0$

$\Rightarrow 3x+2kx+5ky-3=0$

$\Rightarrow 3x-3+k(2x+5y)=0$. এ রেখাটি k এর বিভিন্ন মানের জন্য একগুচ্ছ সরলরেখা সূচিত করে যারা সকলেই $3x-3=0\cdots(1)$ এবং $2x+5y\cdots(2)$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী ।

(1) হতে পাই, $3x=3\Rightarrow x=1$. আবার, $x=1$ হলে, (2) হতে পাই, $2+5y=0\Rightarrow y=-\dfrac{2}{5}$.

নির্ণেয় নির্দিষ্ট বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $\left(1,-\dfrac{2}{5}\right)$

2(a) $x-2y-1=0$ ও $2x+3y+2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $\tan 45°$ ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৮,'০৯]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখাটির সমীকরণ $x-2y-1+k(2x+3y+2)=0$

$\Rightarrow (1+2k)x+(3k-2)y+2k-1=0\cdots(1)$

(1) রেখাটির ঢাল $=-\dfrac{1+2k}{3k-2}$

প্রশ্নমতে, $-\dfrac{1+2k}{3k-2}=\tan 45°=1$

$\Rightarrow 3k-2=-1-2k\Rightarrow 5k=1\Rightarrow k=\dfrac{1}{5}$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ

$$x-2y-1+\frac{1}{5}(2x+3y+2)=0$$

$\Rightarrow 5x-10y-5+2x+3y+2=0$

$\Rightarrow 7x - 7y - 3 = 0$ (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি : $x - 2y - 1 = 0$ ও $2x + 3y + 2 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু $(\frac{-4+3}{3+4}, \frac{-2-2}{3+4})$ অর্থাৎ $(-\frac{1}{7}, -\frac{4}{7})$

$(-\frac{1}{7}, -\frac{4}{7})$ বিন্দুগামী এবং $\tan 45° = 1$ ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ $y + \frac{4}{7} = 1.(x + \frac{1}{7})$

$\Rightarrow 7y + 4 = 7x + 1 \therefore 7x - 7y - 3 = 0$

[MCQ এর জন্য, $(2 + 1.3)(x - 2y - 1) - (1 + 1\times-2)(2x + 3y + 2) = 0 \Rightarrow 5x - 10y - 5 + 2x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow 7x - 7y - 3 = 0$]

2(b) $5x - 9y + 13 = 0$ ও $9x - 5y + 11 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৪; ঢা.'১২]

সমাধান : নির্ণেয় রেখার ঢাল = $\tan(\pm 45^0) = \pm 1$

$5x - 9y + 13 = 0$ ও $9x - 5y + 11 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{-99+65}{-25+81}, \frac{117-55}{-25+81})$

$= (-\frac{34}{56}, \frac{62}{56}) = (-\frac{17}{28}, \frac{31}{28})$

$(-\frac{17}{28}, \frac{31}{28})$ বিন্দুগামী এবং ± 1 ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ $y - \frac{31}{28} = \pm 1.(x + \frac{17}{28})$

$\Rightarrow 28y - 31 = \pm(28x + 17)$

'+' নিয়ে পাই, $28x - 28y + 48 = 0$

$7x - 7y + 12 = 0$

আবার, '–' নিয়ে পাই, $28x + 28y - 14 = 0$

$\therefore 2x + 2y - 1 = 0$

উত্তর ঃ $7x - 7y + 12 = 0$ বা, $2x + 2y - 1 = 0$

2(c) মূলবিন্দু এবং $4x + 3y - 8 = 0$ ও $x + y = 1$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখাটির সমীকরণ $4x + 3y - 8 + k(x + y - 1) = 0$

$\Rightarrow (4 + k)x + (3 + k)y - 8 - k = 0 \cdots$ (i)

(i) রেখাটি মূলবিন্দু (0, 0) দিয়ে অতিক্রম করে।

$(4 + k)\times 0 + (3 + k)\times 0 - 8 - k = 0$

$\Rightarrow k = -8$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$(4 - 8)x + (3 - 8)y - 8 + 8 = 0$

$\Rightarrow 4x + 5y = 0$ (Ans.)

3. (a) দুইটি সরলরেখা (6 , 7) বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3x + 4y = 11$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'১১,'১৩; দি'০৯; চ.'১১; ব.'১৩]

সমাধান : ধরি, (6 , 7) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$y - 7 = m(x - 6) \cdots (1)$

$3x + 4y = 11$ রেখার ঢাল $= -\frac{3}{4}$

প্রশ্নমতে, $\tan 45° = \pm \frac{m + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}m}$

$\Rightarrow 1 = \pm \frac{4m + 3}{4 - 3m} \Rightarrow 4 - 3m = \pm(4m + 3)$

'+' নিয়ে, $4 - 3m = 4m + 3 \Rightarrow m = \frac{1}{7}$

'–' নিয়ে $4 - 3m = -4m - 3 \Rightarrow m = -7$

রেখা দুইটির সমীকরণ, $y - 7 = \frac{1}{7}(x - 6)$

$\Rightarrow 7y - 49 = x - 6 \Rightarrow x - 7y + 43 = 0$

এবং $y - 7 = -7(x - 6) \Rightarrow y - 7 = -7x + 42$

$\Rightarrow 7x + y - 49 = 0$

[MCQ এর জন্য,

$(-\frac{3}{4} - 1)x - (1 - \frac{3}{4})y = -\frac{7}{4}.6 - \frac{1}{4}.7,$

$(-\frac{3}{4} + 1)x - (1 + \frac{3}{4})y = \frac{1}{4}.6 - \frac{7}{4}.7$]

3.(b) দুইটি সরলরেখা (3, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $x - 2y = 3$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'১১] [য.'০৮]

সমাধান : ধরি, (3 , 2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$y - 2 = m(x - 3) \cdots (1)$

$x - 2y = 3$ রেখার ঢাল $= \frac{1}{2}$

প্রশ্নমতে, $\tan 45° = \pm \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}$

$\Rightarrow 1 = \pm \frac{2m - 1}{2 + m} \Rightarrow 2 + m = \pm(2m - 1)$

'+' নিয়ে, $2 + m = 2m - 1 \Rightarrow m = 3$

'–' নিয়ে $2 + m = -2m + 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$

রেখা দুইটির সমীকরণ, $y - 2 = 3(x - 3)$

$\Rightarrow y - 2 = 3x - 9 \Rightarrow 3x - y = 7$

এবং $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y - 6 = -x + 3$

$\Rightarrow x + 3y = 9$

3 (c) দুইটি সরলরেখা (– 1, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3x - y + 7 = 0$ রেখার সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং তাদের সমীকরণ হতে দেখাও যে, তারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থান করে। [রা.'১০; ব.'১১; সি.'০৭,'১২,'১৪; মা.'০৯; য.'১১,'১৪; য.,দি.'১৩]

সমাধান : ধরি, (– 1, 2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$y - 2 = m(x + 1) \cdots (1)$

$3x - y + 7 = 0$ রেখার ঢাল $= 3$

প্রশ্নমতে, $\tan 45° = \pm \frac{m - 3}{1 + 3m}$

$\Rightarrow 1 = \pm \frac{m - 3}{1 + 3m} \Rightarrow 1 + 3m = \pm(m - 3)$

'+' নিয়ে, $2m = -4 \Rightarrow m = -2$

'–' নিয়ে $4m = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

রেখা দুইটির সমীকরণ, $y - 2 = -2(x + 1)$

$\Rightarrow y - 2 = -2x - 2 \Rightarrow 2x + y = 0$ (Ans.)

এবং $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow 2y - 4 = x + 1$

$\Rightarrow x - 2y + 5 = 0$ (Ans.)

এখন, রেখা দুইটির ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -2.\frac{1}{2} = -1$

রেখা দুইটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থান করে।

3(d) দুইটি সরলরেখা (6, – 7) বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $y + \sqrt{3}x = 1$ রেখার সঙ্গে 60° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৫; দি.'০৯; কু.'১১]

সমাধান : ধরি, (6, –7) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$y + 7 = m(x - 6) \cdots (1)$

$y + \sqrt{3}x = 1$ রেখার ঢাল $= -\sqrt{3}$

প্রশ্নমতে, $\tan 60° = \pm \frac{m + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}m}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \pm \frac{m + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}m}$

$\Rightarrow \sqrt{3} - 3m = \pm(m + \sqrt{3})$

'+' নিয়ে, $\sqrt{3} - 3m = m + \sqrt{3} \Rightarrow m = 0$

'–' নিয়ে $\sqrt{3} - 3m = -m - \sqrt{3}$

$\Rightarrow 2m = 2\sqrt{3} \Rightarrow m = \sqrt{3}$

রেখা দুইটির সমীকরণ, $y + 7 = 0(x - 6)$

$\Rightarrow y + 7 = 0$ (Ans.)

এবং $y + 7 = \sqrt{3}(x - 6)$ (Ans.)

3(e) দুইটি সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3y = 2x$ রেখার সঙ্গে $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'১১]

সমাধান : ধরি, মূলবিন্দু (0 , 0) দিয়ে যায় এরূপ রেখার সমীকরণ $y = mx \cdots (1)$

$3y = 2x$ রেখার ঢাল $= \frac{2}{3}$

প্রশ্নমতে, $\tan \tan^{-1}\frac{1}{2} = \pm \frac{m - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}m}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \pm \frac{3m - 2}{3 + 2m}$

$\Rightarrow 3 + 2m = \pm(6m - 4)$

'+' নিয়ে, $3 + 2m = 6m - 4$

$\Rightarrow 4m = 7 \Rightarrow m = \frac{7}{4}$

'–' নিয়ে, $3 + 2m = -6m + 4$

$\Rightarrow 8m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{8}$

রেখা দুইটির সমীকরণ, $y = \frac{7}{4}x \Rightarrow 7x = 4y$

এবং $y = \frac{1}{8}x \Rightarrow x = 8y$

4(a) (4, – 3) বিন্দুগামী এবং $2x + 11y - 2 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি.'০৬; মা.'০৪,'০৬]

সমাধান : ধরি, $2x + 11y - 2 = 0$ এর সমান্তরাল নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $2x + 11y + k = 0 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে (1) রেখাটি $(4 , - 3)$ বিন্দুগামী ।

$2\times4 + 11\times-3 + k = 0 \Rightarrow k = 25$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $2x + 11y + 25 = 0$

[MCQ এর জন্য, $2x + 11y = 2\times4 + 11\times-3 = -25$]

4(b) (1 , 2) বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু.'০৪]

সমাধান : $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার ঢাল $= \frac{3}{4}$

(1 , 2) বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ,

$y - 2 = \frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow 4y - 8 = 3x - 3$

$3x - 4y + 5 = 0$

4(c) y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 3y + 4 = 0$ ও $3x + 3y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ.'০৪; ব.'০৪; মা.বো.'০৭; ব.'১০; দি.'১৪]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $2x - 3y + 4 + k(3x + 3y - 5) = 0$

$\Rightarrow (2 + 3k)x + (- 3 + 3k) y + 4 - 5k = 0$

এ রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল বলে, y-এর সহগ $- 3 + 3k = 0 \Rightarrow k = 1$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $(2 + 3)x + 4 - 5= 0$

$5x - 1 = 0$ (Ans.)

[MCQ এর জন্য, $3(2x - 3y + 4) - (-3)(3x + 3y - 5) = 0$]

4 (d) x- অক্ষের সমান্তরাল এবং $x - 3y + 2 = 0$ ও $x + y - 2 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[ব. '০১; কু. '০৭]**

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $x - 3y + 2 + k(x + y - 2) = 0$

$\Rightarrow (1 + k)x + (- 3 + k) y + 2 - 2k = 0$

এ রেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল বলে, x-এর সহগ $1 + k = 0 \Rightarrow k = -1$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $- 4y + 2 + 2 = 0$

$y - 1 = 0$ (Ans.)

[MCQ এর জন্য, $1(x-3y +2)-1(x + y-2)=0$]

5. (a) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $7x + 13y - 87 = 0$ ও $5x - 8y + 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং অক্ষ দুইটি হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে। **[চ.'০৬; সি.'০৬; ব.'১৪]**

সমাধান ধরি,প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $7x + 13y - 87 + k(5x - 8y + 7) =0$

$\Rightarrow (7 + 5k)x + (13 - 8k)y + 7k - 87= 0$

ইহা অক্ষ দুইটি হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করলে x ও y এর সহগের সংখ্যমান সমান হবে।

$7 + 5k = \pm(13 - 8k)$

'+' নিয়ে, $13k = 6 \Rightarrow k = \frac{6}{13}$

'+' নিয়ে, $3k = 20 \Rightarrow k = \frac{20}{3}$

রেখা দুইটির সমীকরণ,

$7x + 13y - 87 + \frac{6}{13}(5x - 8y + 7) = 0$

$\Rightarrow 91x+169y -1131 + 30x- 48y + 42 =0$

$\Rightarrow 121x+121y -1089 = 0\Rightarrow x + y - 9= 0$

এবং $7x + 13y - 87 + \frac{20}{3}(5x - 8y + 7) = 0$

$\Rightarrow 21x + 39y- 261+100x-160y +140 =0$

$\Rightarrow 121x - 121y - 121= 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0$

[MCQ এর জন্য, $(5 + 8)(7x + 13y - 87) - (7 - 13)(5x - 8y + 7) = 0$ এবং $(5 - 8)(7x+13y-87) - (7 + 13)(5x - 8y + 7) = 0$]

(b) যদি $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখাটি $2x - y = 1$ ও $3x - 4y + 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী হয় এবং $4x + 3y - 6 = 0$ রেখাটির সমান্তরাল হয়, তাহলে a ও b এর মান নির্ণয় কর। [ঢা.'১২; রা.'১৩]

সমাধান : $2x - y - 1 = 0$ ও

$3x - 4y + 6 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর

স্থানাঙ্ক $= (\frac{-6-4}{-8+3}, \frac{-3-12}{-8+3}) = (2, 3)$

প্রশ্নমতে, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ রেখাটি $4x + 3y - 6 = 0$ রেখাটির সমান্তরাল এবং $(2, 3)$ বিন্দুগামী

$$\frac{1/a}{4}=\frac{1/b}{3} \Rightarrow 4a = 3b \Rightarrow a = \frac{3b}{4}$$

এবং $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1 \Rightarrow \frac{8}{3b}+\frac{3}{b}=1 \Rightarrow \frac{8+9}{3b}=1$

$\Rightarrow b = \frac{17}{3}$ $a = \frac{3}{4}\times\frac{17}{3}=\frac{17}{4}$

উত্তর ঃ $a = \frac{17}{4}, b = \frac{17}{3}$

5(c) $3x - 4y + 1 = 0$ ও $5x + y - 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান সমান অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'০২]

সমাধান ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $3x - 4y + 1 + k(5x + y - 1) = 0$

$\Rightarrow (3 + 5k)x + (-4 + k)y + 1 - k = 0$

ইহা অক্ষ দুইটি হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান সমান অংশ ছেদ করলে x ও y এর সহগ সমান হবে।

$$3 + 5k = -4 + k \Rightarrow 4k = -7 \Rightarrow k = -\frac{7}{4}$$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$$3x - 4y + 1 - \frac{7}{4}(5x + y - 1) = 0$$

$\Rightarrow 12x - 16y + 4 - 35x - 7y + 7 = 0$

$\Rightarrow -23x - 23y + 11 = 0$

$23x + 23y = 11$ (Ans.)

[MCQ এর জন্য,

$(5-1)(3x-4y+1)-(3+4)(5x+y-1)=0$]

5(d) A(1 , 1) , B(3 , 4) ও C(5 , – 2) বিন্দুগুলো ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু । AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। এবং দেখাও যে, সরলরেখাটি BC এর সমান্তরাল। [চ.,দি.'১০; ঢা.'১১]

সমাধান ধরি, AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E .

$$D \equiv (\frac{1+3}{2}, \frac{1+4}{2}) = (2, \frac{5}{2})$$ এবং

$$E \equiv (\frac{1+5}{2}, \frac{1-2}{2}) = (3, -\frac{1}{2})$$

DE রেখা অর্থাৎ AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর

সংযোগ রেখার সমীকরণ $\frac{x-2}{2-3}=\frac{y-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{x-2}{2-3}=\frac{2y-5}{5+1} \Rightarrow 6x - 12 = -2y + 5$

$6x + 2y = 17$ (Ans.)

২য় অংশ : $6x + 2y = 17$ রেখার ঢাল $= -\frac{6}{2} = -3$

এবং BC রেখার ঢাল $= \frac{4+2}{3-5} = \frac{6}{-2} = -3$ পরস্পর সমান। অতএব, রেখাটি BC এর সমান্তরাল।

6(a) (4,–3) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x+11y-2=0$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'১২; কু.'১৪; মা.'১২,'১৪]

সমাধান : ধরি, $2x + 11y - 2 = 0$ এর উপর লম্ব নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $11x - 2y + k = 0$ (1)

প্রশ্নমতে (1) রেখাটি $(4, -3)$ বিন্দুগামী ।

$11\times4 - 2\times-3 + k = 0 \Rightarrow k = -50$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $11x - 2y - 50 = 0$

[MCQ এর জন্য, $11x - 2y = 11\times4-2\times-3 = 50$]

(b) (2, –3) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x - 3y = 7$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু.'০১; য.'০৭; মা.'০৩]

সমাধান : ধরি, $2x - 3y = 7$ এর উপর লম্ব নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $3x + 2y + k = 0 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে (1) রেখাটি $(2, -3)$ বিন্দুগামী ।

$$3\times2 + 2\times-3 + k = 0 \Rightarrow k = 0$$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $3x + 2y = 0$

6(c) (2, 5) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x + 12y = 3$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু.'০৫; চ.'১৪]

সমাধান ধরি, $3x + 12y = 3$ এর উপর লম্ব নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $12x - 3y + k = 0 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে (1) রেখাটি $(2, 5)$ বিন্দুগামী ।

$$12\times2 - 3\times5 + k = 0 \Rightarrow k = -9$$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $12x - 3y - 9 = 0$

7.(a) মূলবিন্দু ও (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগ রেখা এবং $(b, 0)$ ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা পরস্পর লম্ব হলে প্রমাণ কর যে, $x_1x_2 + y_1y_2 = bx_1$.

[চ.'০৩; রা.'০৪,'১৩; ব.'০৬; ঢা.'১৩]

প্রমাণ: ধরি, মূলবিন্দু ও (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগ রেখার ঢাল m_1 এবং $(b,0)$ ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার ঢাল m_2

$$m_1 = \frac{y_1}{x_1} \text{ এবং } m_2 = \frac{y_2 - 0}{x_2 - b} = \frac{y_2}{x_2 - b}$$

প্রশ্নমতে, রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব ।

$$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} \times \frac{y_2}{x_2 - b} = -1$$

$$\Rightarrow y_1y_2 = x_1x_2 + bx_1$$

$x_1x_2 + y_1y_2 = bx_1$ (Proved)

7.(b) (2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার উপর (x, y) যেকোন একটি বিন্দু এবং রেখাটি $(-1,2)$ ও $(-5, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $2x - y - 1 = 0$.

প্রমাণ: ধরি, (2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল m_1 এবং $(-1,2)$ ও $(-5, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার ঢাল m_2.

$m_1 = \frac{y-3}{x-2}$ [(2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার উপর (x, y) যেকোন একটি বিন্দু ।]

এবং $m_2 = \frac{2-4}{-1+5} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

প্রশ্নমতে, রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব ।

$$\frac{y-3}{x-2} \times -\frac{1}{2} = -1 \Rightarrow -y + 3 = -2x + 4$$

$2x - y - 1 = 0$ (Proved)

7(c) A(1, 1), B(3, 4) ও C(5, − 2) বিন্দুগুলো ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু । A বিন্দুগামী এবং BC রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান A বিন্দুগামী এবং BC রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ $y - 1 = -\frac{3-5}{4+2}(x-1)$

$$\Rightarrow y - 1 = -\frac{-2}{6}(x-1)$$

$$\Rightarrow 3y - 3 = x - 1 \therefore x - 3y + 2 = 0 \text{ (Ans.)}$$

8.(a) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা ও x-অক্ষের ছেদ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [চ.'০২; ব.'০৫; কু.'০৮,'১০]

সমাধান : প্রদত্ত রেখা $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{-b} = 1$

$\Rightarrow bx - ay = ab$, x-অক্ষকে $(a, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$ax + by = k$ (1)

প্রশ্নমতে, (1) রেখাটি $(a, 0)$ বিন্দুগামী ।

$$a.a + b.0 = k \Rightarrow k = a^2$$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $ax + by = a^2$.

8(b) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x + 2y = 9$ ও $2x + 3y = 11$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং প্রথম রেখার উপর লম্ব হয়।

সমাধান: $3x + 2y - 9 = 0 \cdots (1)$ ও

$2x+3y-11=0\cdots(2)$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{-22+27}{9-4}, \frac{-18+33}{9-4}\right) = (1, 3)$.

$(1, 3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং (1) রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ $2x-3y = 2\times1-3\times3$

$\Rightarrow 2x-3y = 2-9 \qquad 2x-3y+7=0$

9. (a) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (1,2) ও (4, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 3:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং ঐ রেখার উপর লম্ব হয়।

সমাধান:(1,2) ও (4, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 3 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$= \left(\frac{3\times4+1\times1}{3+1}, \frac{3\times5+1\times2}{3+1}\right) = \left(\frac{13}{4}, \frac{17}{4}\right)$

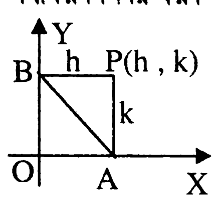
এখন, (1 , 2) ও (4 , 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের উপর লম্ব এবং $\left(\frac{13}{4}, \frac{17}{4}\right)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\left(y-\frac{17}{4}\right) = -\frac{1-4}{2-5}\left(x-\frac{13}{4}\right)$

$\Rightarrow \left(y-\frac{17}{4}\right) = -1\left(x-\frac{13}{4}\right)$

$\Rightarrow 4y-17 = -4x+13 \Rightarrow 4x+4y = 30$

$2x+2y = 15$ (Ans.)

9(b) P(h , k) বিন্দু হতে x ও y-অক্ষের উপর যথাক্রমে PA ও PB লম্ব । P বিন্দুগামী এবং AB রেখার উপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান: P(h , k) বিন্দু হতে x ও y-অক্ষের উপর যথাক্রমে PA ও PB লম্ব বলে A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (h , 0) ও (0 , k).

P বিন্দুগামী এবং AB রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ $y-k = -\frac{h-0}{0-k}(x-h)$

$\Rightarrow y-k = \frac{h}{k}(x-h)$

$\Rightarrow ky-k^2 = hx-h^2$

$hx-ky = h^2-k^2$ (Ans.)

9 (c) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $4x+7y=11$ রেখার উপর লম্ব এবং y-অক্ষ হতে 2 একক দৈর্ঘ্য কর্তন করে। [প্র.ভ.প.'৯০]

সমাধান: $4x+7y=11$ রেখার ঢাল $= -\frac{4}{7}$

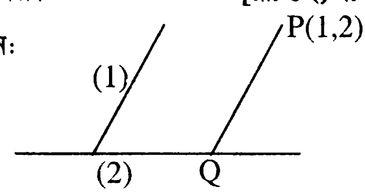
$4x+7y=11$ এর উপর লম্ব রেখার ঢাল $= \frac{7}{4}$

y-অক্ষ হতে 2 একক দৈর্ঘ্য কর্তনকারী এবং $\frac{7}{4}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ $y = \frac{7}{4}x \pm 2$

$\Rightarrow 7x-4y \pm 8 = 0$ (Ans.)

10. (a) $3x-4y+8=0$ রেখার সমান্তরাল দিকে $3x+y+4=0$ রেখা হতে (1 , 2) বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। [রা.'০২; য.'০৮]

সমাধান:



ধরি, $3x-4y+8=0$ (1) রেখার সমান্তরাল এবং P(1, 2) বিন্দুগামী সরলরেখা $3x+y+4=0$ (2) রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

PQ রেখার সমীকরণ $3x-4y = 3\times1-4\times2$

$\Rightarrow 3x-4y = -5 \Rightarrow 3x-4y+5=0 \cdots(3)$

$(2)-(3) \Rightarrow 5y-1=0 \Rightarrow y = \frac{1}{5}$.

(2) হতে পাই, $3x+\frac{1}{5}+4=0 \Rightarrow 3x = -\frac{21}{5}$

$\Rightarrow x = -\frac{7}{5}$ $\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$

নির্ণেয় দূরত্ব , $PQ = \sqrt{\left(1+\frac{7}{5}\right)^2+\left(2-\frac{1}{5}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{144+81}{25}} = \sqrt{\frac{225}{25}} = \sqrt{9} = 3$ একক।

10(b) যে সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে তার সমান্তরাল বরাবর

$3x + 5y - 11 = 0$ রেখা হতে $(-1, 1)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: যে সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ কোণ উৎপন্ন করে তার সমান্তরাল এবং $P(-1, 1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$$y - 1 = (x + 1)\tan\tan^{-1}(\frac{3}{4})$$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{3}{4}(x + 1) \Rightarrow 4y - 4 = 3x + 3$$

$$\Rightarrow 3x - 4y + 7 = 0 \cdots\cdots(1)$$

ধরি, (1) রেখা $3x + 5y - 11 = 0$ (2) রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, $(1) - (2) \Rightarrow -9y + 18 = 0 \Rightarrow y = 2$

$(1) \Rightarrow 3x - 8 + 7 = 0 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

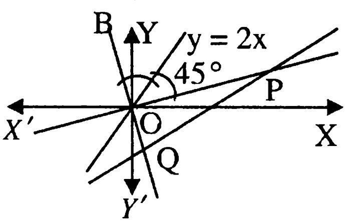
Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{1}{3}, 2)$.

নির্ণেয় দূরত্ব, $PQ = \sqrt{(-1-\frac{1}{3})^2 + (1-2)^2}$

$= \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \sqrt{\frac{16+9}{9}} = \frac{5}{3}$ একক।

10(c) যে সরলরেখা $y = 2x$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে তার সমান্তরাল বরাবর $3x - 4y = 15$ রেখা হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান:



$y = 2x$ রেখার ঢাল (ধরি) $m_1 = 2$.

ধরি, যে সরলরেখা $y = 2x$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল m_2

$$\tan 45^0 = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \Rightarrow 1 = \pm\frac{2 - m_2}{1 + 2m_2}$$

$$\Rightarrow 1 + 2m_2 = \pm(2 - m_2)$$

'+' নিয়ে, $1 + 2m_2 = 2 - m_2 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{3}$ এবং

'−' নিয়ে, $1 + 2m_2 = -2 + m_2 \Rightarrow m_2 = -3$

ধরি, মূলবিন্দু O(0,0) দিয়ে অতিক্রমকারী এবং $\frac{1}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখা $y = \frac{1}{3}x \Rightarrow x = 3y \cdots(1)$, $3x - 4y = 15 \cdots(2)$ রেখাকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

(2) হতে পাই, $9y - 4y = 15$ $[\because x = 3y]$

$\Rightarrow 5y = 15 \Rightarrow y = 5$ এবং $x = 15$.

$P \equiv (15,5)$ এবং $OP = \sqrt{5^2 + 15^2}$

$= \sqrt{5^2(1+3^2)} = 5\sqrt{10}$ একক।

আবার, ধরি মূলবিন্দু O(0,0) দিয়ে অতিক্রমকারী এবং -3 ঢাল বিশিষ্ট রেখা $y = -3x \cdots(3)$, $3x - 4y = 15 \cdots(2)$ রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

(2) হতে পাই, $3x + 12x = 15$ $[\because y = -3x]$

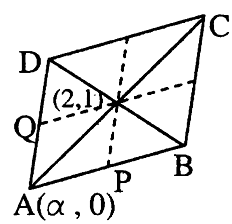
$\Rightarrow 15x = 15 \Rightarrow x = 1$ এবং $y = -3$.

$Q \equiv (1, -3)$ এবং $OP = \sqrt{1^2 + 3^2}$

$= \sqrt{10}$ একক।

10(d) ABCD রম্বসের দুইটি বাহু $x - y = 5$ ও $7x - y = 3$ এর সমান্তরাল, কর্ণদ্বয় (2, 1) বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু x- অক্ষের উপর অবস্থিত হলে A এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান:



ধরি, A এর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$.

$x - y = 5$ এর সমান্তরাল (2,1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $x - y = 2 - 1 = 1 \cdots(i)$ এবং

$A(\alpha, 0)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $x - y = \alpha \cdots(ii)$

আবার, $7x - y = 3$ এর সমান্তরাল (2, 1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $7x - y = 7\times2 - 1$

$\Rightarrow 7x - y = 13$ (iii) এবং $A(\alpha, 0)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $7x - y = 7\alpha \cdots$ (iv).

(i) ও (iv) এর ছেদবিন্দু $P(\frac{7\alpha - 1}{6}, \frac{7\alpha - 7}{6})$

(ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু $Q(\frac{13-\alpha}{6}, \frac{13-7\alpha}{6})$

$AP = AQ$, [$\because$ ABCD একটি রম্বস]

$\Rightarrow AP^2 = AQ^2$

$\Rightarrow (\alpha - \frac{7\alpha-1}{6})^2 + (\frac{7\alpha-7}{6})^2 = (\alpha - \frac{13-\alpha}{6})^2 + (\frac{13-7\alpha}{6})^2$

$\Rightarrow (1-\alpha)^2 + 49(1-\alpha)^2 = 2(7\alpha-13)^2$

$\Rightarrow 25(1-\alpha)^2 = (7\alpha-13)^2$

$\Rightarrow 5(1-\alpha) = \pm(7\alpha-13)$

'+' চিহ্ন নিয়ে, $5 - 5\alpha = 7\alpha - 13 \Rightarrow \alpha = 3/2$

'–' চিহ্ন নিয়ে, $5 - 5\alpha = -7\alpha + 13 \Rightarrow \alpha = 4$

A এর স্থানাঙ্ক (4, 0) বা, (3/2, 0).

11. (a) (8 , 5) ও (– 4 , – 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'১২; ঢা.'০৬; কু.'০৬; সি.'০৯,'১৩; চ.'১২]

সমাধান: প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{8-4}{2}, \frac{5-3}{2}) = (2, 1)$

(8 , 5) ও (– 4 , – 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার ঢাল $= \frac{5+3}{8+4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

লম্ব সমদ্বিখন্ডক রেখার ঢাল $= -\frac{3}{2}$

নির্ণেয় লম্ব সমদ্বিখন্ডক রেখার সমীকরণ,

$y - 1 = -\frac{3}{2}(x-2)$

$\Rightarrow 2y - 2 = -3x + 6$

$3x + 2y - 8 = 0$ (Ans.)

[MCQ এর জন্য, $(8+4)x + (5+3)y = \frac{1}{2}(64 - 16 + 25 - 9) = 32$]

11(b) (2 , 1) ও (6 , 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৬]

সমাধান: প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{2+6}{2}, \frac{1+3}{2}) = (4, 2)$

(2 , 1) ও (6 , 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার ঢাল $= -\frac{2-6}{1-3} = -2$

নির্ণেয় লম্ব সমদ্বিখন্ডক রেখার সমীকরণ,

$y - 2 = -2(x-4) \Rightarrow y - 2 = -2x + 8$

$2x + y - 10 = 0$ (Ans.)

11(c) P(4 , 11) ও Q(– 2 , 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প. '০৪]

সমাধান: PQ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, \frac{13}{2})$

P ও Q বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক রেখার ঢাল $= -\frac{4+2}{11-2} = -\frac{2}{3}$

নির্ণেয় লম্ব সমদ্বিখন্ডক রেখার সমীকরণ,

$y - \frac{13}{2} = -\frac{2}{3}(x-1)$

$\Rightarrow \frac{2y-13}{2} = -\frac{2}{3}(x-1)$

$\Rightarrow 6y - 39 = -4x + 4$

$4x + 6y - 43 = 0$ (Ans.)

11(d) দেখাও যে, (a , b) ও (c , d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ $(a-c)x + (b-d)y = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$. [ব.'০১]

প্রমাণ: প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$

(a , b) ও (c , d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার ঢাল $= -\frac{a-c}{b-d}$

নির্ণেয় লম্ব সমদ্বিখন্ডক রেখার সমীকরণ,

$y - \frac{b+d}{2} = -\frac{a-c}{b-d}(x - \frac{a+c}{2})$

$$\Rightarrow (b-d)y - \frac{b^2-d^2}{2}$$

$$= -(a-c)x + \frac{a^2-c^2}{2}$$

$$(a-c)x + (b-d)y = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)$$

12. (a) (2 , 3) বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি হতে সরলরেখার লম্ব–দূরত্ব নির্ণয় কর।

[য.'০৯; রা., সি.,ব.'০৯; ঢা.'১০; মা.'১৩]

সমাধান: (2 , 3) বিন্দুগামী এবং $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ,

$3x - 4y = 3\times2 - 4\times3 = 6 - 12$

$3x - 4y + 6 = 0$

$4x + 3y - 7 = 0$ ও

$3x - 4y + 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর

স্থানাঙ্ক $= (\frac{18-28}{-16-9}, \frac{-21-24}{-16-9})$

$= (\frac{-10}{-25}, \frac{-45}{-25}) = (\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$

অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$

২য় অংশ (2 , 3) বিন্দুটি হতে প্রদত্ত রেখার

লম্ব–দূরত্ব $= \sqrt{(2-\frac{2}{5})^2 + (3-\frac{9}{5})^2}$

$= \sqrt{\frac{64}{25}+\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{100}}{5} = \frac{10}{5} = 2$ একক।

12(b) (2 ,– 1) বিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।[য.'১২; সি.'০৭,'১২; ঢা.'০৮,'১৪; কু.'০৪; চ.'০৭,'১০; মা.বো.'০৮,'০৯; রা.'১২; দি.'১২]

সমাধান: $(2, -1)$ বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ,

$4x + 3y = 4\times2 + 3\times-1 = 8 - 3$

$4x + 3y - 5 = 0$

$4x + 3y - 5 = 0$ ও

$3x - 4y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর

স্থানাঙ্ক $= (\frac{15-20}{-16-9}, \frac{-15-20}{-16-9})$

$= (\frac{-5}{-25}, \frac{-35}{-25}) = (\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$

অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$

12(c) (3 , 1) বিন্দু হতে $2x + y - 3 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব.'০৫]

সমাধান: (3, 1) বিন্দুগামী এবং $2x + y - 3 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ,

$x - 2y = 1\times3 - 2\times1 = 3 - 2$

$x - 2y - 1 = 0$

$x - 2y - 1 = 0$ ও

$2x + y - 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর

স্থানাঙ্ক $= (\frac{6+1}{1+4}, \frac{-2+3}{1+4}) = (\frac{7}{5}, \frac{1}{5})$

অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, \frac{1}{5})$

12(d) P(h , k) বিন্দু হতে মূলবিন্দুগামী সরলরেখার উপর লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [ব. '০৫]

সমাধান: ধরি, মূলবিন্দু (0 , 0) দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার সমীকরণ $y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0 \cdots(1)$

P(h k) বিন্দুগামী এবং (1) রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ, $x + my = h + mk \quad \cdots(2)$

(1) হতে পাই, $m = \frac{y}{x}$

(2) নং সমীকরণে m–এর মান বসিয়ে পাই,

$$x + \frac{y}{x}y = h + \frac{y}{x}.k$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = hx + ky$; যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

13(a) এরুপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y = 6$ ও $x - 2y = 7$ সরলরেখা দুইটির সঙ্গে সমবিন্দু। [চ.'০১; য.'০২ ; কু.'০৫; ঢা.'০৭; ব.'০৮]

সমাধান: $4x + 3y - 6 = 0$ ও

$x - 2y - 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{-21-12}{-8-3}, \frac{-6+28}{-8-3}) = (\frac{-33}{-11}, \frac{22}{-11})$
$= (3, -2)$

x-অক্ষের সমান্তরাল এবং প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের সঙ্গো সমবিন্দু নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $y = -2 \Rightarrow y + 2 = 0$

13(b) $\boldsymbol{2x + by + 4 = 0, 4x - y - 26 = 0, 3x + y - 1 = 0}$ **রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে b এর মান নির্ণয় কর।** [প্র.ভ.প.'০১]

সমাধান: প্রদত্ত রেখাত্রয় সমবিন্দু বলে,

$$\begin{vmatrix} 2 & b & 4 \\ 4 & -1 & -26 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 2(1 + 26) - b(-4 + 78) + 4(4 + 3) = 0$
$\Rightarrow 54 - 74b + 28 = 0 \Rightarrow 74b = 82$

$b = \frac{82}{74} = \frac{41}{37}$ (Ans.)

13(c) $\boldsymbol{ax + by + c = 0, bx + cy + a = 0, cx + ay + b = 0}$ **রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, দেখাও যে, $a + b + c = 0$.** [সি.'০১, [ঢা.'১৪]]

প্রমাণ : প্রদত্ত রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (a + b + c)(ab - ca - b^2 + bc - c^2 + 2ca - a^2) = 0$

$\Rightarrow (a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = 0$ [-2 দ্বারা গুণ করে।]

$\Rightarrow (a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$

এখানে, $a \neq b \neq c$, $\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$ $\therefore a + b + c = 0$ (Showed)

13(d) $\boldsymbol{3x + 5y - 2 = 0, 2x + 3y = 0, ax + by + 1 = 0}$ **রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, a ও b এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।** [য.'০৯,'১৩; দি.'১১; চ.'১২]

প্রমাণ : প্রদত্ত রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -2(2b - 3a) + 1(9 - 10) = 0$
$\Rightarrow -4b + 6a - 1 = 0 \Rightarrow 6a - 4b = 1$

14. (a) দেখাও যে, $x = t, y = 2t + 1$ এবং $x = 2t, y = -t - 4$ রেখা দুইটি পরস্পরকে $(-2, -3)$ বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। [ব.'১১]

প্রমাণ : $x = t, y = 2t + 1$ রেখাটিকে লেখা যায়–

$y = 2x + 1 \cdots (1)$; যার ঢাল $= 2$

আবার, $x = 2t, y = -t - 4$ রেখাটিকে লেখা যায়–

$y = -\frac{x}{2} - 4 \cdots (2)$; যার ঢাল $= -\frac{1}{2}$

$(1) - (2) \Rightarrow 0 = (2 + \frac{1}{2})x + 5$

$\Rightarrow \frac{5}{2}x = -5 \Rightarrow x = -2 \quad \therefore y = -4 + 1 = -3$

রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(-2, -3)$.

আবার, রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয়ের গুণফল $= 2(-\frac{1}{2}) = -1$

রেখা দুইটি পরস্পরকে $(-2, -3)$ বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। (Showed)

14(b) দেখাও যে, $2x = 1 - 4t, y = 1 + t$ এবং $x = -2t, y = t - 1$ রেখা দুইটি সমান্তরাল।

প্রমাণ $2x = 1 - 4t, y = 1 + t$ রেখাটিকে লেখা যায়, $2x = 1 - 4(y - 1) \Rightarrow 2x + 4y = 5 \cdots (1)$

আবার, $x = -2t, y = t - 1$ রেখাটিকে লেখা যায়–

$x = -2(y + 1) \Rightarrow x + 2y + 2 = 0 \cdots (2)$

(1) রেখাটির ঢাল $= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ এবং

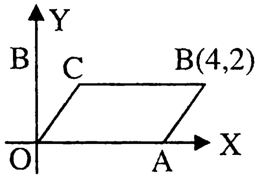
(2) রেখাটির ঢাল $= -\frac{1}{2}$

রেখা দুইটির ঢাল পরস্পর সমান বলে তারা সমান্তরাল । (Showed)

14(c) OABC একটি সামান্তরিক। x-অক্ষ বরাবর OA অবস্থিত। OC বাহুর সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, 2)$. A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'০৯,'১৩;

য.'০৭; ঢা.'০৮; সি.'০৮; চ.'১১; দি.'১৪; ব.'১৪]

সমাধান OC বাহুর সমীকরণ $y = 2x$ এবং x-অক্ষ বরাবর OA অবস্থিত। অতএব, O মূলবিন্দু। আবার, CB বাহু x-অক্ষের সমান্তরাল, সুতরাং B ও C শীর্ষের কোটি একই হবে।



ধরি, C শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(\alpha , 2)$ যা $y = 2x$ রেখার উপর অবস্থিত।

$2 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 1.$

C শীর্ষের স্থানাঙ্ক (1 , 2).

এখন, $OA = CB = |1 - 4| = 3$

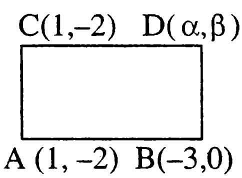
A শীর্ষের স্থানাঙ্ক (3 , 0)

AC কর্ণের সমীকরণ $\dfrac{x-3}{3-1} = \dfrac{y-0}{0-2}$

$\Rightarrow x - 3 = -y \therefore x + y - 3 = 0$

14(d) A, B ও C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, – 2), (– 3 , 0) ও (5 , 6). প্রমাণ কর যে, AB ও AC রেখাদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে। বিন্দুগুলি একটি আয়তক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দু হলে চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [য.'০৪]

প্রমাণ :



AB রেখার ঢাল $= \dfrac{-2-0}{1+3} = -\dfrac{1}{2}$

AC রেখার ঢাল $= \dfrac{-2-6}{1-5} = 2$

AB ও AC এর ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -\dfrac{1}{2}.2 = -1$

AB ও AC রেখদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে।

ধরি, আয়তক্ষেত্রের চতুর্থ শীর্ষের $D(\alpha , \beta)$.

আয়তক্ষেত্রের BC কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\dfrac{-3+5}{2} , \dfrac{0+6}{2}) = (1 , 3)$ এবং AD কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\dfrac{1+\alpha}{2} , \dfrac{-2+\beta}{2})$ একই হবে।

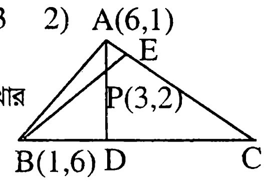
$\dfrac{1+\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 2 - 1 = 1$ এবং

$\dfrac{-2+\beta}{2} = 3 \Rightarrow \beta = 6 + 2 = 8$

চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক (1 , 8).

14(e) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে A(6, 1) ও B(1, 6) এবং এর লম্ববিন্দু P(3, 2) ; অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা.'০৪]

সমাধান : ধরি, ABC ত্রিভুজের AD, BE লম্বদ্বয় P(3 2) বিন্দুতে ছেদ করে।



AP অর্থাৎ AD রেখার ঢাল $= \dfrac{1-2}{6-3} = -\dfrac{1}{3}$

AD এর উপর লম্ব BC রেখার ঢাল = 3

BC বাহুর সমীকরণ $y - 6 = 3(x - 1)$

$\Rightarrow y - 6 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x + 3 \cdots(1)$

BP অর্থাৎ BE এর উপর লম্ব AC বাহুর ঢাল $= -\dfrac{3-1}{2-6} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

AC বাহুর সমীকরণ $y - 1 = \dfrac{1}{2}(x - 6)$

$\Rightarrow 2y - 2 = x - 6$

$\Rightarrow 2(3x + 3) - 2 = x - 6$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow 6x + 6 - x = -4 \Rightarrow 5x = -10 \Rightarrow x = -2$

(1) হতে পাই, $y = 3(-2) + 3 = -3$

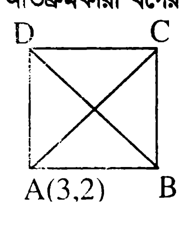
অবশিষ্ট শীর্ষ C এর স্থানাঙ্ক (–2, – 3)

15. (a) $4x + 7y - 12 = 0$ রেখাটি একটি বর্গের কর্ণ নির্দেশ করে এবং বর্গের একটি শীর্ষ (3 , 2) বিন্দুতে অবস্থিত। এ বিন্দুটি দিয়ে অতিক্রমকারী বর্গের বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ABCD বর্গের

$4x + 7y - 12 = 0 \cdots\cdots(1)$

রেখাটি BD কর্ণ নির্দেশ করে এবং



$A(3\ ,2)$ শীর্ষ দিয়ে অতিক্রমকারী বাহুর ঢাল m.

BD কর্ণের ঢাল $= -\dfrac{4}{7}$

AC কর্ণের ঢাল$= \dfrac{7}{4}$ [∵ বর্গের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব]

AC কর্ণ AD ও AB বাহুর সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\tan 45° = \pm \frac{m-\frac{7}{4}}{1+m.\frac{7}{4}} \Rightarrow 1 = \pm \frac{4m-7}{4+7m}$$

$\Rightarrow 4 + 7m = \pm (4m - 7)$

'+' নিয়ে, $3m = -11 \Rightarrow m = -\dfrac{11}{3}$

'−' নিয়ে, $11m = 3 \Rightarrow m = \dfrac{3}{11}$

$(3\ ,2)$ শীর্ষ দিয়ে অতিক্রমকারী বাহুর সমীকরণ,

$y-2= -\dfrac{11}{3}(x-3) \Rightarrow 3y-6= -11x + 33$

$\Rightarrow 11x + 3y - 39 = 0$ এবং

$y - 2 = \dfrac{3}{11}(x-3) \Rightarrow 11y - 22 = 3x - 9$

$\Rightarrow 3x - 11y + 13 = 0$

15(b) দেখাও যে, $2x + y + 5 = 0$ ও $x-2y-3 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব। রেখা দুইটিকে কোন আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু ধরলে এবং অপর বাহু দুইটি $(3\ ,4)$ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করলে অবশিষ্ট বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রমাণ : $2x + y + 5 = 0 \cdots(1)$ রেখার ঢাল $= -2$

এবং $x - 2y - 3 = 0 \cdots (2)$ রেখার ঢাল $= \dfrac{1}{2}$

ঢাল দুইটির গুণফল $= -2\times\dfrac{1}{2} = -1$ বলে প্রদত্ত রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

২য় অংশ রেখা দুইটিকে কোন আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু ধরলে অপর বাহু দুইটির একটি (1) রেখার সমান্তরাল এবং অপরটি (2) রেখার সমান্তরাল হবে।

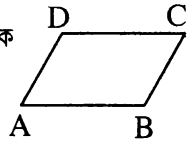
$(3\ \ 4)$ বিন্দুগামী এবং (1) রেখার সমান্তরাল বাহুটির সমীকরণ $2x + y = 2\times3 + 4$

$\Rightarrow 2x + y = 10$

এবং $(3\ ,\ 4)$ বিন্দুগামী এবং (2) রেখার সমান্তরাল বাহুটির সমীকরণ $x - 2y = 3 - 2\times4$

$\Rightarrow x - 2y + 5 = 0$

15(c) ABCD সামান্তরিকের AB , BC বাহু দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $2x + y - 8 = 0$, $x - y + 2 = 0$ এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2\ , -4)$ হলে AD ও DC এর সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান ABCD সামান্তরিক বলে, $BC || AD$ এবং $AB || DC$

$D(2, -4)$ বিন্দুগামী

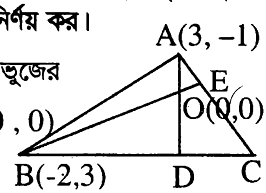
AD এর সমীকরণ $x - y = 2 - (-4)$

$\Rightarrow x - y = 6$ এবং

DC এর সমীকরণ $2x + y = 2\times2 + (-4)$

$\Rightarrow 2x + y = 0$

15(d) $A(3, -1)$, $B(-2, 3)$ বিন্দু দুইটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং তার লম্ব বিন্দুটি মূলবিন্দুতে। অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।



সমাধান : ধরি, ABC ত্রিভুজের AD, BE লম্বদ্বয় $O(0\ , 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

AO অর্থাৎ AD রেখার ঢাল $= \dfrac{-1-0}{3-0} = -\dfrac{1}{3}$

AD এর উপর লম্ব BC রেখার ঢাল $= 3$

BC বাহুর সমীকরণ $y - 3 = 3(x + 2)$

$\Rightarrow y - 3 = 3x + 6 \Rightarrow y = 3x + 9 \cdots(1)$

BO অর্থাৎ BE এর উপর লম্ব AC বাহুর ঢাল $= -\dfrac{-2-0}{3-0} = \dfrac{2}{3}$

$\therefore$ AC বাহুর সমীকরণ $y + 1 = \dfrac{2}{3}(x - 3)$

$\Rightarrow 3y + 3 = 2x - 6$

$\Rightarrow 3(3x + 9) + 3 = 2x - 6$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow 9x + 27 - 2x = -9 \Rightarrow 7x = -36$

$\Rightarrow x = -\dfrac{36}{7}$ $\quad y = 3(-\dfrac{36}{7}) + 9 = -\dfrac{45}{7}$

অবশিষ্ট শীর্ষ C এর স্থানাঙ্ক $(-\dfrac{36}{7}, -\dfrac{45}{7})$

[MCQ এর জন্য, BC বাহুর সমীকরণ,

$(3-0)x+(-1-0)y=3\times-2+(-1)\times3]$

কাজ

১. $4x-3y-1=0$ ও $2x-5y+3=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষ দুইটির সঙ্গে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : অক্ষ দুইটির সঙ্গে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার ঢাল $=\tan(\pm45°)=\pm1$

এখন, $4x-3y-1=0$ ও

$2x-5y+3=0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=\left(\frac{-9-5}{-20+6},\frac{-2-12}{-20+6}\right)=(1,1)$

$(1,1)$ বিন্দুগামী এবং ±1 ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ $y-1=\pm1.(x-1)$

'+' নিয়ে পাই, $y-1=x-1\Rightarrow x-y=0$

'–' নিয়ে পাই, $y-1=-x+1\Rightarrow x+y=2$

উত্তর ঃ $x+y=2,\ x-y=0.$

২. $2x+3y-1=0$ ও $x-2y+3=0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ φ

আমরা জানি, $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ φ হলে, $\tan\varphi=\pm\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$.

$$\tan\varphi=\pm\frac{1.3-2(-2)}{2.1+3(-2)}=\pm\frac{3+4}{2-6}=\pm\frac{7}{4}.$$

'+' চিহ্ন নিয়ে পাই, $\varphi=\tan^{-1}\frac{7}{4}$

নির্ণেয় সূক্ষ্মকোণের মান $\tan^{-1}\frac{7}{4}$

৩. k-এর মান কত হলে $5x+4y-6=0$ ও $2x+ky+9=0$ রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হবে?

সমাধান : $5x+4y-6=0$ ও $2x+ky+9=0$ রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হলে, $\frac{5}{2}=\frac{4}{k}$

$\Rightarrow k=\frac{8}{5}$ (Ans.)

৪. $5x-3y-7=0$ ও $4x+y-9=0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $13x-y-1=0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $(5x-3y-7)+k(4x+y-9)=0$

$\Rightarrow (5+4k)x+(-3+k)y-7-9k=0\ \cdots(1)$

(1) রেখাটি $13x-y-1=0$ এর সমান্তরাল ।

$\frac{5+4k}{13}=\frac{-3+k}{-1}$ $\left[\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\right.$ সূত্র দ্বারা]

$\Rightarrow -39+13k=-5-4k\Rightarrow 17k=34$

$\Rightarrow k=2$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$(5+8)x+(-3+2)y-7-18=0$

$\Rightarrow 13x-y-25=0$ (Ans.)

[MCQ এর জন্য, $\therefore 2x+2y-1=0$

$$\frac{5x-3y-7}{4x+y-9}=\frac{\begin{vmatrix}5&-3\\13&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&1\\13&-1\end{vmatrix}}=\frac{-5+39}{-4-13}=-2\ ]$$

৫. k এর মান কত হলে $2x-y+7=0$ ও $3x+ky-5=0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে ?

সমাধান : $2x-y+7=0$ ও $3x+ky-5=0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হলে,

$2\times3+(-1)\times k=0$ [$a_1a_2+b_1b_2=0$ সূত্র দ্বারা]

$\Rightarrow k=6$ (Ans.)

৬. $(2,-3)$ বিন্দুগামী এবং $(5,7)$ ও $(-6,3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(2,-3)$ বিন্দুগামী এবং $(5,7)$ ও $(-6,3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার লম্ব এরূপ সরলরেখার সমীকরণ $y+3=-\frac{5+6}{7-3}(x-2)$

$\Rightarrow y+3=-\frac{11}{4}(x-2)$

$\Rightarrow 4y+12=-11x+22$

$11x+4y=10$ (Ans.)

$\Rightarrow$ [$(5 + 6)x + (7-3)y = 11\times2 + 4\times-3=10$]

৭. এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $2x + 3y + 4 = 0$ ও $3x + 4y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $6x - 7y + 8 = 0$ রেখার উপর লম্ব হয়।

সমাধান: $2x + 3y + 4 = 0$ ও $3x + 4y - 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{-15-16}{8-9}, \frac{12+10}{8-9}) = (31, -22)$.

$(31,-22)$ বিন্দুগামী এবং $6x-7y + 8 = 0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ,

$7x + 6y = 7\times31 + 6\times-22$

$\Rightarrow 7x + 6y = 217 - 132$

$7x + 6y - 85 = 0$ (Ans.)

[MCQ এর জন্য, $\frac{2x+3y+4}{3x+4y-5} = \frac{2\times6+3\times-7}{3\times6+4\times-7}$]

৮. (2 , 5) ও (5 , 6) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, তা (− 4 , 5) ও (− 3 , 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর লম্ব।

সমাধান: (2 , 5) ও (5 , 6) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x-2}{2-5} = \frac{y-5}{5-6} \Rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{-1}$

$\Rightarrow x - 2 = 3y + 9 \therefore x - 3y + 13 = 0 \cdots(1)$

২য় অংশ : (1) রেখার ঢাল $= -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$

(− 4 , 5) ও (− 3 , 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার ঢাল $= \frac{5-2}{-4+3} = \frac{3}{-1} = -3$

ঢাল দুইটির গুণফল $= \frac{1}{3}\times-3 = -1$

(2 , 5) ও (5 , 6) বিন্দুগামী রেখাটি (− 4 , 5) ও (− 3 , 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্ব।

৯. (− 3 ,− 2) বিন্দুগামী এবং $2x + 3y = 3$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দুগামী এবং এই দুইটি রেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখারও সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: (− 3 ,− 2) বিন্দুগামী এবং $2x + 3y = 3$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ

$3x - 2y = 3\times-3 - 2\times-2$

$\Rightarrow 3x - 2y = -9 + 4 \quad \therefore 3x - 2y + 5 = 0$

২য় অংশ: ধরি, $2x+3y-3 = 0$ ও $3x-2y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$2x + 3y - 3 + k(3x-2y + 5) = 0$

$\Rightarrow (2 + 3k)x + (3 - 2k)y - 3 + 5k = 0$

এ রেখাটি মূলবিন্দুগামী বলে, ধ্রুবপদ $-3 + 5k = 0$

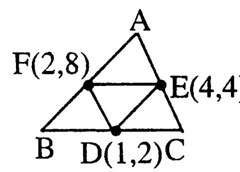
$\Rightarrow k = \frac{3}{5}$. অতএব , নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$2x + 3y - 3 + \frac{3}{5}(3x-2y + 5) = 0$

$\Rightarrow 10x + 15y - 15 + 9x - 6y + 15 = 0$

$\Rightarrow 19x + 9y = 0$ (Ans.)

১০. (1 , 2) , (4 , 4) , (2 , 8) বিন্দুগুলো একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু । বাহুগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান ধরি, ABC ত্রিভুজে BC , CA , AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D(1, 2), E(4 , 4) , F(2 , 8). **[ব.'০২]**

$BC || FE$, $CA || DF$ এবং $AB || ED$.

BC রেখার ঢাল = FE রেখার ঢাল $\neq \frac{8-4}{2-4} = -2$

AC রেখার ঢাল = FD রেখার ঢাল $= \frac{8-2}{2-1} = 6$

AB রেখার ঢাল = ED রেখার ঢাল $= \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}$

D(1 , 2) বিন্দুগামী BC বাহুর সমীকরণ $y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$

E(4 , 4) বিন্দুগামী CA বাহুর সমীকরণ $y - 4 = 6(x - 4) \Rightarrow 6x - y - 20 = 0$

এবং F(2 , 8) বিন্দুগামী AB বাহুর সমীকরণ $y - 8 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y - 24 = 2x - 4$

$2x - 3y + 20 = 0$

[MCQ এর জন্য, BC বাহুর সমীকরণ,

$\Rightarrow (4 - 8)x - (4 - 2)y = -4\times1 - 2\times2$]

১১. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $2x + 3y = 1$ ও $x - 2y + 3 = 0$ সরলরেখা দুইটির সঙ্গে

সমবিন্দু এবং অক্ষদ্বয় হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে।

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের সঙ্গে সমবিন্দু এরূপ রেখার সমীকরণ $2x + 3y - 1 + k(x - 2y + 3) = 0$

$\Rightarrow (2 + k)x + (3 - 2k)y - 1 + 3k = 0$ এ রেখাটি অক্ষদ্বয় হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে বলে x ও y এর সহগের সংখ্যামান সমান।

$$2 + k = \pm(3 - 2k)$$

$$2 + k = 3 - 2k \Rightarrow 3k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

অথবা, $2 + k = -3 + 2k \Rightarrow k = 5$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$$2x + 3y - 1 + \frac{1}{3}(x - 2y + 3) = 0$$

$$\Rightarrow 6x + 9y - 3 + x - 2y + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 7x + 7y = 0 \Rightarrow x + y = 0$$

অথবা, $2x + 3y - 1 + 5x - 10y + 15 = 0$

$$\Rightarrow 7x - 7y + 14 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$$

প্রশ্নমালা III G

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

1. $P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

2.(i) $ax + by + c_1 = 0$ ও $ax + by + c_2 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \dfrac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(ii) $ax + by + c = 0$ হতে d একক দূরবর্তী রেখার সমীকরণ $ax + by + c \pm d\sqrt{a^2 + b^2} = 0$

3. $f(x, y) \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $g(x, y) \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

(i) $P(\alpha, \beta)$ বিন্দু ধারণকারী কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ '+' হবে যখন $f(\alpha, \beta) \times g(\alpha, \beta) > 0$

'–' হবে যখন $f(\alpha, \beta) \times g(\alpha, \beta) < 0$

(ii) মূলবিন্দু ধারণকারী কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ '+' অথবা '–' হবে যখন যথাক্রমে $c_1 \times c_2 > 0$ বা, < 0

(iii) $P(x', y')$ বিন্দুটি রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে অথবা সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত হবে যখন যথাক্রমে $f(x', y') \times g(x' + y')$

$$\times(a_1a_2 + b_1b_2 > 0 \text{ বা}, < 0$$

(iv) $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ হলে, '+' স্থূলকোণের ও '–' সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ ।

$a_1a_2 + b_1b_2 < 0$ হলে, '+' সূক্ষ্মকোণের ও '–' স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ ।

4. ABC ত্রিভুজের $AB \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $AC \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $BC \equiv px + qy + r = 0$ হলে, $\angle A$ স্থূলকোণ অথবা সূক্ষ্মকোণ হবে যদি যথাক্রমে $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ p & q \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p & q \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}(a_1a_2 + b_1b_2)$ > 0, অথবা < 0 হয়।

5. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ হলে, $\angle A$ সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ হবে যদি যথাক্রমে $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) > 0$, অথবা < 0 হয়।

6. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ হলে, অন্তঃব্যাসার্ধ, $r = \dfrac{1}{a + b + c}|\delta_{ABC}|$ এবং অন্তঃকেন্দ্র $= \left(\dfrac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \dfrac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}\right)$; যখন $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ এবং $\delta_{ABC} = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)$

অর্থাৎ অন্তঃকেন্দ্রের

$$\text{ভুজ} = \frac{\sum x_1\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}{\sum\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \text{ এবং}$$

$$\text{কোটি} = \frac{\sum y_1\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}{\sum\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}$$

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র ঃ

1. $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব = $\dfrac{|c_1\sqrt{a_2^2+b_2^2}-c_2\sqrt{a_1^2+b_1^2}|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

2. $f(x)\equiv ax+by+c=0$ রেখা $g(x)\equiv a_1x+b_1y+c_1=0$ ও AB রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটি সমদ্বিখন্ডক হলে AB এর সমীকরণ $(a^2+b^2)g(x)-2(aa_1+bb_1)f(x)=0$

3. $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $ax+by+c=0$ সরলরেখাটি $|ax_1+by_1+c|$ $|ax_2+by_2+c|$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

প্রশ্নমালা III G

1(a) Sol^n.: সবগুলি তথ্য সত্য। Ans. D

(b) Sol^n. (2 , 3) ও (6 7) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল = $\dfrac{3-7}{2-6}=\dfrac{-4}{-4}=1$ Ans. A

(c) Sol^n.: y- অক্ষের সমীকরণ $x=0$
নির্ণেয় অনুপাত = $|7|$ $|-5|=7:5$

(d) Sol^n.: ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

$=\dfrac{1}{2}|24-15|=4\cdot5$

(e) Sol^n.: নির্ণেয় কোণ = $\tan^{-1}(\dfrac{4}{-4})$

$=180^0-\tan^{-1}1=180^0-45^0=135^0$

(f) Sol^n.: রেখাটির সমীকরণ, x = (3 , – 6) বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক $\Rightarrow x=3$

(g) Sol^n.: Ans.D

(h) Sol^n.: সবগুলি তথ্য সত্য। Ans. D

(i) Sol^n.: রেখাটির সমীকরণ, $3x+4y=3\times5+4\times(-3)\Rightarrow 3x+4y=3$

(j) Sol^n.: রেখাটির সমীকরণ, $4x-3y=4\times4-3\times0\Rightarrow 4x-3y=16$

(k) Sol^n.: লম্বদূরত্ব $=\dfrac{|-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{12}{5}$

(*l*) Sol^n.: $3x+4y=12\Rightarrow\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\dfrac{1}{2}|ab|=\dfrac{1}{2}|12|=6;$

[এখানে, a = 4, b = 3]

$AB=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$ একক ।

রেখার সমীকরণ, $y=\dfrac{b}{a}x\Rightarrow y=\dfrac{3}{4}x\Rightarrow 3x=4y$

(m) Sol^n.: $r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{3+3}=\sqrt{6}$ $\therefore$ Ans. C

(n) Sol^n : রেখার সমীকরণ

$7x-3y=7.2-3.1=11$

$\Rightarrow 7x-3y-11=0$ Ans. B

(o) Sol^n : $y=6$ ও $x=5$ এর ছেদবিন্দু A(5, 6)
$y^2=a(x-7)$ এ $y=6$ বসিয়ে পাই,

$36=a(x-7)\Rightarrow x=\dfrac{36}{a}+7$

$B(\dfrac{36}{a}+7, 6)$

$AB=|\dfrac{36}{a}+7-5|=7\Rightarrow\dfrac{36}{a}+2=\pm7$

$\Rightarrow\dfrac{36}{a}=5,-9\Rightarrow a=-\dfrac{36}{9}=-4,\quad a<0$

$\therefore$ Ans. A

1(i) (a) (1, 2) বিন্দু হতে $x-\sqrt{3}y+4=0$ রেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত হল। মূলবিন্দু থেকে এ লম্বের লম্বদূরত্ব নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৫]

সমাধান : (1 , 2) বিন্দু হতে $x-\sqrt{3}y+4=0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ,

$\sqrt{3}x+y=\sqrt{3}\times1+2$

$\Rightarrow \sqrt{3}x+y-2-\sqrt{3}=0\cdots\cdots(1)$

$\therefore$ মূলবিন্দুর থেকে (1) এর লম্ব দূরত্ব $=\dfrac{|-2-\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}}$

$= \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ (Ans.)

(b) $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c + 3)$ রেখা দুইটি হতে মূলবিন্দু সমদূরবর্তী। c এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। [রা.'০৮,'১২ ;চ.'০৬; য.'১০,'১৪; ঢা.'০৯]

সমাধান : $4x + 3y = c$ অর্থাৎ $4x + 3y - c = 0$

হতে মূলবিন্দু দুরত্ব $= \dfrac{|-c|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{|c|}{5}$

আবার, $12x - 5y = 2(c + 3)$ অর্থাৎ $12x - 5y - 2(c + 3) = 0$ হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব

$= \dfrac{|-2(c+3)|}{\sqrt{144+25}} = \dfrac{|2(c+3)|}{13}$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{|2(c+3)|}{13} = \dfrac{|c|}{5} \Rightarrow \dfrac{2(c+3)}{13} = \pm\dfrac{c}{5}$

'+' নিয়ে, $10c + 30 = 13c \Rightarrow 3c = 30 \therefore c = 10$

'–' নিয়ে, $10c + 30 = -13c \Rightarrow 23c = -30$

$\Rightarrow c = -30/23$

c এর ধনাত্মক মান 10. (Ans.)

(c) (a, b) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে, দেখাও যে, $a + 7b = 0$ অথবা $7a - b + 2 = 0$

[রা.'০১,'১০; সি.'০১; মা.'০৮; চ.'১৩]

প্রমাণ ঃ $3x - 4y + 1 = 0$ রেখা হতে (a, b) বিন্দুর দূরত্ব $= \dfrac{|3a-4b+1|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{|3a-4b+1|}{5}$

আবার, $4x + 3y + 1 = 0$ রেখা হতে (a, b) বিন্দুর দূরত্ব $= \dfrac{|4a+3b+1|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{|4a+3b+1|}{5}$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{|3a-4b+1|}{5} = \dfrac{|4a+3b+1|}{5}$

$\Rightarrow 3a-4b+1 = \pm(4a+3b+1)$

'+' নিয়ে, $3a-4b+1-4a-3b-1=0$

$\Rightarrow -a-7b=0 \Rightarrow a+7b=0$

'–' নিয়ে, $3a-4b+1+4a+3b+1=0$

$\Rightarrow 7a-b+2=0$

$a+7b=0$ অথবা $7a-b+2=0$

(d) মূলবিন্দু থেকে $x \sec\theta - y \operatorname{cosec}\theta = k$ ও $x \cos\theta - y \sin\theta = k \cos 2\theta$ রেখা দুইটির লম্ব দুরত্ব যথাক্রমে p ও p' হলে, প্রমাণ কর যে, $4p^2 + p'^2 = k^2$ [চ.'০৩,'১১; রা.'০৪;য.'০৯]

প্রমাণ : মূলবিন্দু থেকে $x\sec\theta - y\operatorname{cosec}\theta - k = 0$ এর দূরত্ব $p = \left|\dfrac{-k}{\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta}}\right|$

মূলবিন্দু (0 0) থেকে $x\cos\theta - y\sin\theta - k\cos 2\theta = 0$ এর দূরত্ব,

$$p' = \left|\frac{-k\cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}\right|$$

$\text{L.H.S.} = 4p^2 + p'^2$

$$= 4\frac{k^2}{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta} + \frac{k\cos^2 2\theta}{1}$$

$$= \frac{4k^2}{1/\cos^2\theta + 1/\sin^2\theta} + k^2\cos^2 2\theta$$

$$= \frac{4k^2(\sin^2\theta\cos^2\theta)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta} + k^2\cos^2 2\theta$$

$$= \frac{k^2(2\sin\theta\cos\theta)^2}{1} + k^2\cos^2 2\theta$$

$$= k^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)$$

$$= k^2 .1 = k^2 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

(e) দেখাও যে, $(\pm 4, 0)$ বিন্দু দুইটি থেকে $3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির গুণফল θ মুক্ত হবে।

[য.'০৩; ঢা.'০৬; ব.'০৮ ; কু.'১৩]

প্রমাণ : (4, 0) বিন্দু থেকে $3x\cos\theta + 5y\sin\theta - 15 = 0$ এর লম্বদূরত্ব

$$= \left|\frac{12\cos\theta - 15}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}}\right| = d_1 \text{ (ধরি)}$$

(4, 0) বিন্দু থেকে $3x\cos\theta + 5y\sin\theta - 15 = 0$ এর লম্বদূরত্ব

$$= \left|\frac{-12\cos\theta - 15}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}}\right| = d_2 \text{ (ধরি)}$$

লম্বদূরত্ব দুইটির গুণফল,

$$d_1 d_2 = \left|\frac{12\cos\theta - 15}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}}\right| \left|\frac{-12\cos\theta - 15}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}}\right|$$

$$= \left|\frac{225 - 144\cos^2\theta}{9\cos^2\theta + 25(1-\cos^2\theta)}\right|$$

$$= \left|\frac{9(25 - 16\cos^2\theta)}{(25 - 16\cos^2\theta)}\right| = 9\text{; যা } \theta \text{ মুক্ত।}$$

লম্ব দূরত্ব দুইটির গুণফল θ মুক্ত।

1(f) $(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দু থেকে $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এই লম্ব x -অক্ষের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। [কু.'০৭]

সমাধান : $(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দু থেকে $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{|3 - 1 + 8|}{\sqrt{3+1}}$

$$= \frac{10}{2} = 5$$

২য় অংশ : প্রদত্ত রেখার ঢাল $= \sqrt{3}$

প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $= -\frac{1}{\sqrt{3}}$

লম্বরেখা x -অক্ষের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তার পরিমাণ $= \tan^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = 180^0 - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$= 180^0 - 30^0 = 150^0$$

(g) (2, 3) বিন্দু এবং 4x + 37 – 7 = 0 রেখার সাপেক্ষে উক্ত বিন্দুর প্রতিবিম্বের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৫; কু.'১১]

সমাধান ঃ $(2, 3)$ বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার দূরত্ব $= \frac{|4\times2 + 3\times3 - 7|}{\sqrt{16+9}}$

$$= \frac{|8 + 9 - 7|}{5} = \frac{10}{5} = 2 \text{ একক}$$

$\therefore$ $(2, 3)$ বিন্দু এবং প্রদত্ত রেখার সাপেক্ষে উক্ত বিন্দুর প্রতিবিম্বের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2\times2 = 4$ একক

(h) প্রমাণ কর যে, $(\pm c, 0)$ বিন্দু দুটি হতে bx cosθ + ay sinθ = ab এর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের গুণফল b^2 হয় যখন $a^2 = b^2 + c^2$ [কু.'০৯]

প্রমাণ : $(c, 0)$ বিন্দু হতে প্রদত্ত রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব $= \left|\frac{bc\cos\theta - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right| = d_1$ (ধরি)

এবং $(-c, 0)$ বিন্দু হতে প্রদত্ত রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব $= \left|\frac{-bc\cos\theta - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right| = d_2$ (ধরি)

$$d_1 d_2 = \left|\frac{-(b^2c^2\cos^2\theta - a^2b^2)}{b^2\cos^2\theta + a^2 - a^2\cos^2\theta}\right|$$

$$= \left|\frac{-b^2(c^2\cos^2\theta - a^2)}{(b^2 - a^2)\cos^2\theta + a^2}\right|$$

$$= \left|\frac{b^2(a^2 - c^2\cos^2\theta)}{-c^2\cos^2\theta + a^2}\right| \quad [\because a^2 = b^2 + c^2]$$

লম্বদ্বয়ের গুণফল $= b^2$

2(a) $3x - 2y = 1$ এবং $6x - 4y + 9 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [মা.'০৪,'০৬]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখাদ্বয়,

$3x - 2y = 1 \Rightarrow 3x - 2y - 1 = 0 \cdots (1)$ এবং

$6x - 4y + 9 = 0 \Rightarrow 3x - 2y + \frac{9}{2} = 0 \cdots (2)$

(1) ও (2) সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$= \frac{|-1 - \frac{9}{2}|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|-\frac{11}{2}|}{\sqrt{13}} = \frac{11}{2\sqrt{13}} \text{ একক।}$$

2(b) দেখাও যে, $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যেকোন বিন্দু $3x + 4y - 12 = 0$ ও $5x + 12y - 52 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী।

প্রমাণ ঃ ধরি, $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপর $P(\alpha, \beta)$ যেকোন একটি বিন্দু।

$$4\alpha + 7\beta - 26 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{26 - 7\beta}{4}$$

$3x + 4y - 12 = 0$ রেখা হতে $P(\alpha, \beta)$ এর দূরত্ব

$= \dfrac{|3\alpha + 4\beta - 12|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{|3\frac{26-7\beta}{4} + 4\beta - 12|}{5}$

$= \dfrac{|78 - 21\beta + 16\beta - 48|}{5\times4} = \dfrac{|30-5\beta|}{5\times4}$

$= \dfrac{|6-\beta|}{4}$

$5x + 12y - 52 = 0$ রেখা হতে $P(\alpha, \beta)$ এর দূরত্ব

$= \dfrac{|5\alpha + 12\beta - 52|}{\sqrt{25+144}} = \dfrac{|5\frac{26-7\beta}{4} + 12\beta - 52|}{13}$

$= \dfrac{|130 - 35\beta + 48\beta - 208|}{13\times4} = \dfrac{|-78+13\beta|}{5\times4}$

$= \dfrac{13|6-\beta|}{13\times4} = \dfrac{|6-\beta|}{4}$

$\therefore$ $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যেকোন বিন্দু $3x + 4y - 12 = 0$ ও $5x + 12y - 52 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী।

বিকল্প পদ্ধতি প্রশ্নমতে এটাই প্রমাণ করা যথেষ্ট যে, $3x + 4y - 12 = 0 \cdots (1)$ ও

$5x + 12y - 52 = 0 \cdots(2)$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের একটি $4x + 7y - 26 = 0$

এখন, (1) ও (2) রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{3x+4y-12}{\sqrt{9+16}} = \pm\frac{5x+12y-52}{\sqrt{25+144}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+4y-12}{5} = \pm\frac{5x+12y-52}{13}$$

$\Rightarrow 39x + 52y - 156 = \pm(25x + 60y - 260)$

'–' নিয়ে, $64x + 112y - 416 = 0$

$\Rightarrow 4x + 7y - 26 = 0$, যা একটি সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ।

3.(a) $12x - 5y + 26 = 0$ রেখা থেকে 2 একক দূরে এবং $x + 5y = 13$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $x + 5y = 13 \cdots(1)$ রেখাস্থ বিন্দু (α, β), $12x - 5y + 26 = 0 \cdots(2)$ রেখা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত।

$\alpha + 5\beta = 13 \Rightarrow \alpha = 13 - 5\beta \quad (3)$

এবং $\dfrac{|12\alpha - 5\beta + 26|}{\sqrt{144+25}} = 2$

$\Rightarrow 12\alpha - 5\beta + 26 = \pm 26$

'+' নিয়ে, $12\alpha - 5\beta = 0$

$\Rightarrow 12(13 - 5\beta) - 5\beta = 0$ [(3) দ্বারা]

$\Rightarrow 156 - 60\beta - 5\beta = 0 \Rightarrow 65\beta = 156$

$\Rightarrow \beta = \dfrac{156}{65} = \dfrac{12}{5} \therefore \alpha = 13 - 5.\dfrac{12}{5} = 1$

আবার, '–' নিয়ে, $12\alpha - 5\beta + 52 = 0$

$\Rightarrow 12(13 - 5\beta) - 5\beta + 52 = 0$ [(3) দ্বারা]

$\Rightarrow 156 - 60\beta - 5\beta + 52 = 0 \Rightarrow 65\beta = 208$

$\Rightarrow \beta = \dfrac{208}{65} = \dfrac{16}{5} \therefore \alpha = 13 - 5.\dfrac{16}{5} = -3$

বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক $(1, \frac{12}{5}), (-3, \frac{16}{5})$

3(b) (x, y) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ ও $4x + 3y + 1 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী হলে দেখাও যে, $x + 7y = 0$ অথবা, $7x - y + 2 = 0$. [চ.'০২; সি.'০৮]

সমাধান ঃ $3x - 4y + 1 = 0$ রেখা হতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $= \dfrac{|3x-4y+1|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{|3x-4y+1|}{5}$ এবং

$4x + 3y + 1 = 0$ রেখা হতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব

$= \dfrac{|4x+3y+1|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{|4x+3y+1|}{5}$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{|3x-4y+1|}{5} = \dfrac{|4x+3y+1|}{5}$

$3x - 4y + 1 = \pm(4x + 3y + 1)$

'+' নিয়ে পাই, $3x - 4y + 1 = 4x + 3y + 1$

$\Rightarrow x + 7y = 0$

'–' নিয়ে পাই, $3x - 4y + 1 = -4x - 3y - 1$

$\Rightarrow 7x - y + 2 = 0$

4.(a) $12x - 5y = 7$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'১০ কু.'০৮; য.'১০,'১২; রা.'১৩; চ.'১৪]

সমাধান : ধরি, $12x - 5y = 7$ অর্থাৎ $12x - 5y - 7 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $12x - 5y + k = 0$

এ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{|k+7|}{\sqrt{144+25}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k+7|}{\sqrt{144+25}} = 2 \Rightarrow \frac{k+7}{13} = \pm 2$

$\Rightarrow k = \pm 26 - 7$

$k = 19$ অথবা, $k = -33$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $12x - 5y + 19 = 0$

অথবা, $12x - 5y - 33 = 0$

4(b) $(1, -2)$ বিন্দু থেকে $7\frac{1}{2}$ একক দূরবর্তী এবং $3x + 4y = 7$ রেখাটির সমান্তরাল রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[দি.'১০; চ.'১২; য.'১৩; ঢা.'১৪; সি.'১৩; ব.'১৪]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $3x + 4y + k = 0 \cdots \quad (1)$

(1) রেখা হতে $(1, -2)$ বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{|3-8+k|}{\sqrt{9+16}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|3-8+k|}{\sqrt{9+16}} = 7\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{k-5}{5} = \pm \frac{15}{2}$

$2k - 10 = 75 \Rightarrow k = 85/2$ এবং

$2k - 10 = -75 \Rightarrow k = -65/2$

নির্ণেয় রেখাসমূহের সমীকরণ $3x + 4y + \frac{85}{2} = 0$

$\Rightarrow 6x + 8y + 85 = 0$

এবং $3x + 4y - \frac{65}{2} = 0 \Rightarrow 6x + 8y = 65$

4(c) $4x - 3y = 8$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং তা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি.'০৭,'১৩; ঢা'১০,'১৩; য.'০৪; মা.'০৫; চ.'০৯; ব.'১৩; দি.'১৪]

সমাধান : ধরি, $4x - 3y = 8$ অর্থাৎ $4x - 3y - 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $4x - 3y + k = 0$

এ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{|k+8|}{\sqrt{16+9}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k+8|}{\sqrt{16+9}} = 2 \Rightarrow \frac{k+8}{5} = \pm 2$

$\Rightarrow k = \pm 10 - 8$

$k = 10 - 8 = 2$ এবং, $k = -10 - 8 = -18$

নির্ণেয় রেখাসমূহের সমীকরণ $4x - 3y + 2 = 0$

এবং $4x - 3y - 18 = 0$

4(d) $(7, 17)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $(1, 9)$ বিন্দু থেকে 6 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $(7, 17)$ বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ রেখার সমীকরণ, $y - 17 = m(x - 7)$

$\Rightarrow mx - y - 7m + 17 = 0 \cdots \cdots (1)$

(1) রেখাটি থেকে $(1, 9)$ বিন্দুর দূরত্ব

$= \left|\frac{m - 9 - 7m + 17}{\sqrt{m^2+1}}\right| = \left|\frac{8-6m}{\sqrt{m^2+1}}\right|$

পশ্নমতে, $\left|\frac{8-6m}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 6 \Rightarrow \left|\frac{4-3m}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 3$

$\Rightarrow (4 - 3m)^2 = 9(m^2 + 1)$

$\Rightarrow 16 - 24m + 9m^2 = 9m^2 + 9$

$\Rightarrow 24m = 7 \Rightarrow m = 7/24$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $y - 17 = \frac{7}{24}(x - 7)$

$\Rightarrow 24y - 408 = 7x - 49$

$\Rightarrow 7x - 24y + 359 = 0$

5. (a) এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার ঢাল -1 এবং মূলবিন্দু থেকে যার দূরত্ব 4 একক।

[কু.'০৬; সি.'০৯]

সমাধান : ধরি, -1 ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ,

$y = -1.x + c \Rightarrow x + y - c = 0 \cdots (1)$

মূলবিন্দু $(0,0)$ থেকে (1) এর দূরত্ব $= \frac{|-c|}{\sqrt{2}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|-c|}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow |c| = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow c = \pm 4\sqrt{2}$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$

5 (b) মূলবিন্দু থেকে 7 একক দূরত্বে এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ.'০৫; সি.'০৬,'১১; রা.' ০৯; দি.'০৯, '১১,'১২; ব.'১১; মা.'১৪]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ

$4x + 3y + k = 0 \cdots \quad (1)$

মূলবিন্দু (0,0) থেকে (1) এর দূরত্ব $= \dfrac{|k|}{\sqrt{16+9}}$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{|k|}{\sqrt{16+9}} = 7 \Rightarrow \dfrac{k}{5} = \pm 7$

$= \pm 35$

নির্ণেয় রেখাসমূহের সমীকরণ $4x + 3y + 35 = 0$ এবং $4x + 3y - 35 = 0$

5(c) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং মূলবিন্দু থেকে 4 একক দূরে অবস্থিত। [চ.'১৩]

সমাধান : ধরি, রেখাটির সমীকরণ,

$y = x \tan 60° + c \Rightarrow y = \sqrt{3}x + c$

$\Rightarrow \sqrt{3}x - y + c = 0 \quad \cdots(1)$

মূলবিন্দু (0,0) থেকে (1) এর দূরত্ব $= \dfrac{|c|}{\sqrt{3+1}} = \dfrac{|c|}{2}$

প্রশ্নমতে $\dfrac{|c|}{2} = 4 \Rightarrow \dfrac{c}{2} = \pm 4 \Rightarrow c = \pm 8$

রেখাটির সমীকরণ $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$

অথবা, $\sqrt{3}x - y - 8 = 0$

5(d) একটি সরলরেখা অক্ষ দুইটি থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে । মূল বিন্দু থেকে তার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 4 একক। তার সমীকরণ বের কর। [ব.'১১; কু.'১১; সি.'১৩]

সমাধান ঃ ধরি, অক্ষ দুইটি থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ,

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} = 1 \Rightarrow x + y = a \cdots$(i), যেখানে $a > 0$.

মূল বিন্দু থেকে (i) এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$\dfrac{|0+0-a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \quad \Rightarrow |-a| = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow a = 4 \quad [\because a > 0.]$

নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $x + y = 4\sqrt{2}$

6(a) $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডক y-অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

[রা.'১১,'১৪; সি.'০৫; ব.'১২;কু.'১৪; চুয়েট'০৮-০৯]

সমাধান ঃ প্রদত্ত $y = 2x + 1$ অর্থাৎ $2x - y + 1 = 0$ ও $2y - x = 4$ অর্থাৎ $x - 2y + 4 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{2x - y + 1}{\sqrt{4+1}} = \pm \frac{x - 2y + 4}{\sqrt{1+4}}$$

$\Rightarrow 2x - y + 1 = \pm(x - 2y + 4)$

'+' নিয়ে, $x + y = 3 \Rightarrow \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} = 1$, যা y-অক্ষকে P(0 , 3) বিন্দুতে ছেদ করে।

'–' নিয়ে, $2x - y + 1 = -x + 2y - 4$

$\Rightarrow 3x - 3y = -5 \Rightarrow \dfrac{x}{-5/3} + \dfrac{y}{5/3} = 1$, যা y-অক্ষকে Q(0 , $\dfrac{5}{3}$) বিন্দুতে ছেদ করে।

PQ এর দূরত্ব $= |3 - \dfrac{5}{3}| = |\dfrac{4}{3}| = 1\dfrac{1}{3}$

6(b) দেখাও যে, (0,1) বিন্দুটি $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটি সমদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত। [রা.'০৬; সি.'০৮,'১৪; কু. '১১,'১৩; চ. '০৮; য.'১১; দি.'১৩]

প্রমাণ প্রশ্নমতে এটাই প্রমাণ করা যথেষ্ট যে, $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ রেখাদ্বয় হতে (0,1) বিন্দুটি সমদূরবর্তী ।

(1) থেকে (0,1) বিন্দুর দূরত্ব $= \dfrac{|0-5+1|}{\sqrt{144+25}}$

$= \dfrac{|-4|}{13} = \dfrac{4}{13}$

(2) থেকে (0,1) বিন্দুর দূরত্ব $= \dfrac{|0+12-16|}{\sqrt{25+144}}$

$= \dfrac{|-4|}{13} = \dfrac{4}{13}$

পদত্ত রেখাদ্বয় হতে (0,1) বিন্দুটি সমদূরবর্তী ।

(0,1) বিন্দুটি পদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটি সমদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ পদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{12x-5y+1}{\sqrt{144+25}}=\pm\frac{5x+12y-16}{\sqrt{25+144}}$$

$\Rightarrow$ 12x − 5y + 1 = ±(5x + 12y − 16)

'+' নিয়ে, 12x − 5y + 1 = 5x + 12y − 16

$\Rightarrow$ 7x − 17y + 17 = 0 ⋯(1)

ধরি, f (x , y) ≡ 7x − 17y + 17 = 0

'−' নিয়ে, 12x − 5y + 1 = −5x − 12y +16

$\Rightarrow$ 17x + 7y − 15 = 0 ⋯(2)

ধরি, g (x , y) ≡ 17x + 7y − 15 = 0

এখন, f (0 , 1) = 7.0 − 17.1 + 17 = 0 এবং

g (0 , 1) = 17.0 + 7.1 − 15 = −8

(0,1) বিন্দুটি (1) কে সিদ্ধ করে অর্থাৎ (0,1) বিন্দুটি (1) দ্বারা সূচিত সমদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত।

6(c) $4y - 3x = 3$ এবং $3y - 4x = 5$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[ব.'০২; দি.'০৯]**

সমাধান ঃ $4y - 3x = 3 \Rightarrow 3x - 4y + 3 = 0$ কে $a_1x+b_1y+c_1=0$ এর সাথে এবং $3y-4x=5$ $\Rightarrow 4x - 3y + 5 = 0$ কে $a_2x+b_2y+c_2=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$$a_1a_2+b_1b_2 = 3\times4+(-4)\times(-3)$$
$$= 12 + 12 = 24 > 0$$

রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{3x-4y+3}{\sqrt{9+16}}=\frac{4x-3y+5}{\sqrt{16+9}}$

$\Rightarrow 3x-4y+3 = 4x-3y+5$

$\Rightarrow -x-y-2=0 \therefore x+y+2=0$ (Ans.)

6(d) $3x + 4y = 11$ এবং $12x - 5y - 2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[প্র.ভ.প.'০৬;ব.'০৯]**

সমাধান ঃ $3x + 4y = 11 \Rightarrow 3x + 4y - 11=0$ কে $a_1x+b_1y+c_1=0$ এর সাথে এবং $12x-5y-2=0$ কে $a_2x+b_2y+c_2=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই

$$a_1a_2+b_1b_2 = 3\times12+4\times(-5)$$
$$= 36 - 20 = > 0$$

রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{3x+4y-11}{\sqrt{9+16}}=-\frac{12x-5y-2}{\sqrt{144+25}}$

$$\Rightarrow \frac{3x+4y-11}{5}=-\frac{12x-5y-2}{13}$$

$\Rightarrow 39x+52y-143=-60x+25y+10$

$\Rightarrow$ 99x + 27y −153 = 0

11x + 3y − 17 = 0 (Ans.)

7(a) $4x - 4y + 3 = 0$ এবং $x + 7y - 2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। এদের কোনটি মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমদ্বিখন্ডক। **[য.'০২,'০৭,'১২]**

সমাধান: প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$$\frac{4x-4y+3}{\sqrt{16+16}}=\pm\frac{x+7y-2}{\sqrt{1+49}}$$

$$\Rightarrow \frac{4x-4y+3}{4\sqrt{2}}=\pm\frac{x+7y-2}{5\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ 20x − 20y + 15 = ± (4x + 28y − 8)

'+' নিয়ে, 20x − 20y + 15 = 4x + 28y − 8

$\Rightarrow$ 16x − 48y + 23 = 0 (1)

'−' নিয়ে, 20x − 20y + 15 = −4x − 28y + 8

$\Rightarrow$ 24x + 8y + 7 = 0 ⋯ (2)

২য় অংশ : (1) রেখার ঢাল = $-\frac{16}{-48}=\frac{1}{3}$

(2) রেখার ঢাল = $-\frac{24}{8}=-3$

এ ঢাল দুইটির গুণফল = $\frac{1}{3}\times-3=-1$

সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

৩য় অংশ ঃ প্রদত্ত রেখা দুইটির ধ্রুব পদ 3 ও −2 বিপরীত চিহ্নযুক্ত বলে '−' চিহ্ন নিয়ে প্রাপ্ত সমদ্বিখন্ডক সমীকরণ অর্থাৎ 24x + 8y + 7 = 0 মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমদ্বিখন্ডক।

7(b) $4x+ 3y + 2=0$ এবং $12x + 5y + 13=0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত যে কোণটি মূলবিন্দু ধারণ কারে তার সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[মা.বো.'০৭]**

সমাধান প্রদত্ত রেখা দুইটির ধ্রুব পদ 2 ও 13 সমচিহ্নযুক্ত।

মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ $\frac{4x+3y+2}{\sqrt{16+9}}=\frac{12x+5y+13}{\sqrt{144+25}}$

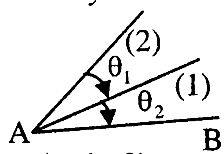
$\Rightarrow \frac{4x+3y+2}{5}=\frac{12x+5y+13}{13}$

$\Rightarrow 60x + 25y + 65 = 52x + 39y + 26$

$8x - 14y + 39 = 0$ (Ans.)

7(c) $x + y + 1 = 0$ রেখাটি $3x - 4y + 3 = 0$ ও AB রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটির সমদ্বিখন্ডক। AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, AB রেখার ঢাল m_2, $x + y + 1= 0$ $\cdots$(1) রেখার ঢাল, $m = -1$ এবং $3x- 4y + 3 = 0$ $\cdots$(2) রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{3}{4}$.



(1), (2) ও AB রেখাত্রয়ের ছেদবিন্দু = $(\frac{3+4}{-4-3}, \frac{3-3}{-4-3}) = (-1, 0)$

(2) ও (1) এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m_1 - m}{1+m_1 m}$ এবং (1) ও AB এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m-m_2}{1+mm_2}$ পরস্পর সমান।

$\frac{m_1 - m}{1+m_1 m} = \frac{m-m_2}{1+mm_2}$

$\Rightarrow \frac{\frac{3}{4}+1}{1+(-1)\frac{3}{4}} = \frac{-1-m_2}{1-m_2}$

$\Rightarrow \frac{4+3}{4-3} = \frac{-1-m_2}{1-m_2} \Rightarrow 7 = \frac{-1-m_2}{1-m_2}$

$\Rightarrow 7 - 7m_2 = -1 - m_2 \Rightarrow 6m_2 = 8$

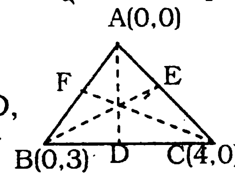
$\Rightarrow m_2 = \frac{4}{3}$

AB রেখার সমীকরণ $y - 0 = \frac{4}{3}(x+1)$

$\Rightarrow 3y = 4x + 4 \therefore 4x - 3y + 4 = 0$ (Ans.)

[**MCQ এর জন্য,** $(1^2+1^2)(3x-4y+3)-2(1\times3+1\times-4)(x+y+1)=0$]

8(a) (0 , 0) , (0 , 3) ও (4 , 0) বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তদ্বিখন্ডক নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তারা সমবিন্দু। [ঢা.'০৪; কু.'১০; সি.'১১]



সমাধান : মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি A(0,0), B(0, 3) ও C(4, 0) এবং AD, BE ও CF ত্রিভুজটির কোণগুলির অন্তর্দ্বিখন্ডক BC, CA ও AB বাহুকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।

$BC = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $AC = \sqrt{4^2+0^2} = 4$

$AB = \sqrt{0^2+3^2} = 3$

$\angle A$ এর অন্তর্দ্বিখন্ডক AD বলে, D বিন্দু BC কে AB: AC = 3   4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করবে।

$D \equiv (\frac{3.4+4.0}{3+4}, \frac{3.0+4.3}{3+4}) = (\frac{12}{7}, \frac{12}{7})$

অনুরূপভাবে, $E \equiv (\frac{3.4+5.0}{3+5}, \frac{3.0+5.0}{3+5}) = (\frac{3}{2}, 0)$

$F \equiv (\frac{4.0+5.0}{4+5}, \frac{4.3+5.0}{4+5}) = (0, \frac{4}{3})$

AD অন্তর্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$y = \frac{12/7}{12/7}x \quad y = x \;\cdots(1)$

BE অন্তর্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$(x - 0)(0 - 0) - (y - 3)(0 - \frac{3}{2}) = 0$

$\Rightarrow 3x + \frac{3}{2}y - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow 6x + 3y - 9 = 0$

$2x + y - 3 = 0 \cdots (2)$

CF অন্তর্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

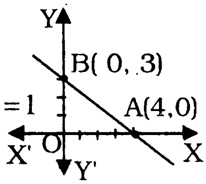
$(x - 4)(0 - \frac{4}{3}) - (y - 0)(4 - 0) = 0$

$\Rightarrow -\frac{4}{3}x + \frac{16}{3} - 4y = 0 \Rightarrow -4x - 12y + 16 = 0$

$x + 3y - 4 = 0 \quad (3)$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ ধরি, OAB ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি O(0,0), A(4, 0) ও B(0, 3).

স্পষ্টতঃ OA ও OB বাহু যথাক্রমে x ও y অক্ষ বরাবর।



OA বাহুর সমীকরণ $y = 0$

OB বাহুর সমীকরণ $x = 0$

এবং AB বাহুর সমীকরণ $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

$\Rightarrow 3x + 4y - 12 = 0$

OAB ত্রিভুজটির $\angle AOB = 90°$

$\angle OAB$ ও $\angle OBA$ সূক্ষ্মকোণ।

স্পষ্টতঃ $\angle AOB$ এর সমদ্বিখন্ডকের ঢাল ধনাত্মক। অতএব, $\angle AOB$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$$\frac{y}{\sqrt{1^2}}=\frac{x}{\sqrt{1^2}} \quad \therefore y = x \cdots(1)$$

BO ও BA বাহুর জন্য,

$a_1a_2+b_1b_2 = 1.3 + 0.4 > 0$

$\angle OBA$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$$\frac{3x+4y-12}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1^2}}$$

$\Rightarrow 3x + 4y - 12 = -5x$

$\Rightarrow 8x + 4y - 12 = 0$

$2x + y - 3 = 0 \qquad (2)$

আবার, এখন, AO ও AB বাহুর জন্য,

$a_1a_2+b_1b_2 = 0.3 + 1.4 > 0$

$\angle OAB$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$$\frac{3x+4y-12}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{y}{\sqrt{1^2}}$$

$\Rightarrow 3x + 4y - 12 = -5y$

$\Rightarrow 3x + 9y - 12 = 0$

$\therefore x + 3y - 4 = 0 \qquad (3)$

দ্বিতীয় অংশ ঃ সমীকরণ (1) ও (2) সমাধান করে পাই, $x = 1, y = 1$ যা সমীকরণ (৩) কেও সিদ্ধ করে।

ΔABC এর কোণগুলির অন্তর্দ্বিখন্ডকত্রয় সমবিন্দু।

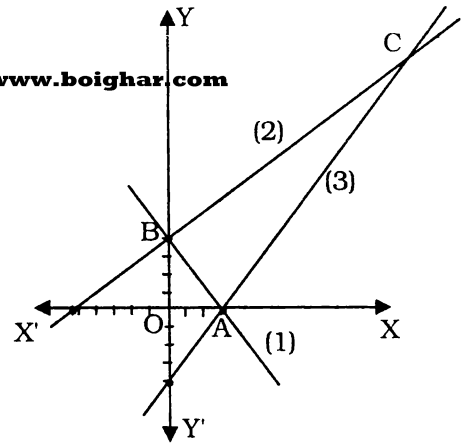
8(b) যে ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমীকরণ $4x + 3y - 12 = 0$, $3x - 4y + 16 = 0$ এবং $4x - 3y - 12 = 0$ তার অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর। [সি.'০৩]

সমাধান: ধরি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি

$$AB \equiv 4x + 3y - 12 = 0 \cdots(1) \text{ i.e., } \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$$

$$BC \equiv 3x - 4y + 16 = 0 \cdots(2) \text{ i.e., } \frac{x}{\frac{-16}{3}}+\frac{y}{4}=1$$

$$CA \equiv 4x - 3y - 12 = 0 \cdots(3) \text{ i.e., } \frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$$



চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে।

সমীকরণ তিনটির ধ্রুবপদ ' – ' করে পাই,

$4x + 3y - 12 = 0, -3x + 4y - 16 = 0,$

$4x - 3y - 12 = 0$

$\angle ABC$ এবং $\angle BAC$ কোণ দুইটির মধ্যে মূলবিন্দু নাই। অতএব, $\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডক

$$\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}}=-\frac{-3x+4y-16}{\sqrt{9+16}}$$

$\Rightarrow 4x + 3y - 12 = 3x - 4y + 16$

$\Rightarrow x + 7y - 28 = 0 \cdots (4)$ এবং

$\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক

$$\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}}=-\frac{4x-3y-12}{\sqrt{16+9}}$$

$\Rightarrow 4x + 3y - 12 = -4x + 3y + 12$

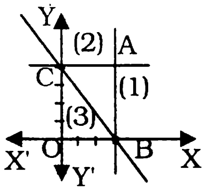
$\Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 3$

$(4) \Rightarrow 3 + 7y - 28 = 0 \Rightarrow y = \frac{25}{7}$

প্রদত্ত রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র $(3, \frac{25}{7})$.

8(c) যে ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমীকরণ $x = 3, y = 4$ এবং $4x + 3y = 12$ তার কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, ABC ত্রিভুজের AB, BC ও CA বাহু তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে $x = 3 \cdots (1)$ $y = 4$ (2) ও $4x + 3y = 12 \cdots (3)$ অর্থাৎ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$



চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে। সমীকরণ তিনটির ধ্রুবপদ '–' করে পাই,

$x - 3 = 0 \cdots (1)$, $y - 4 = 0 \cdots (2)$ এবং $4x + 3y - 12 = 0 \cdots (3)$

চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির $\angle BAC$ কোণ মূলবিন্দু ধারণ করে কিন্তু $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ কোণ দুইটি মূলবিন্দু ধারণ করে না।

$\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক $\frac{x-3}{\sqrt{1}} = \frac{y-4}{\sqrt{1}}$

$\Rightarrow x - 3 = y - 4 \Rightarrow x - y + 1 = 0$

$\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডক $\frac{x-3}{\sqrt{1}} = -\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}}$

$\Rightarrow 5(x - 3) = - 4x - 3y + 12$

$\Rightarrow 9x + 3y - 15 - 12 = 0 \Rightarrow 9x + 3y - 27 = 0$

$\Rightarrow 3x + y - 9 = 0$

$\angle ACB$ এর সমদ্বিখন্ডক $\frac{y-4}{\sqrt{1}} = -\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}}$

$\Rightarrow 5(y - 4) = - 4x - 3y + 12$

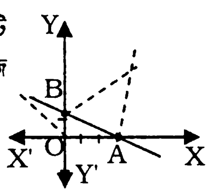
$\Rightarrow 5y - 20 + 4x + 3y - 12 = 0$

$\Rightarrow 4x + 8y - 32 = 0 \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$

ত্রিভুজের **কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ** $x - y + 1 = 0$, $3x + y - 9 = 0$ এবং $x + 2y - 8 = 0$

8(d) $5x + 12y = 15$ এবং অক্ষ দুইটি সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের কোণ তিনটির বহির্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত রেখাটি অক্ষদুইটি সমন্বয়ে OAB ত্রিভুজ গঠন করে যার বাহু তিনটি



$OA \equiv y = 0 \cdots (1)$

$OB \equiv x = 0 \cdots (2)$ এবং

$AB \equiv 5x + 12y = 15 \cdots (3)$

i.e., $\frac{x}{3} + \frac{y}{5/4} = 1$

চিত্রে OAB ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে। চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির $\angle AOB = 90°$ অতএব, $\angle OAB$ ও $\angle OBA$ এর বহিঃস্থ কোণ দুইটি স্থূলকোণ এবং $\angle AOB$ এর বহির্দ্বিখন্ডকের ঢাল ঋণাত্মক।

(1) ও (2) এর অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB$ কোণের বহির্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{x}{\sqrt{1}} = -\frac{y}{\sqrt{1}} \Rightarrow x + y = 0$

(1) ও (3) সমীকরণে x-এর সহগদ্বয়ের গুণফল + y-এর সহগদ্বয়ের গুণফল $= 0 \times 5 + 1 \times 12 = 12 > 0$

(1) ও (3) এর অন্তর্ভুক্ত কোণের বহির্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{5x+12y-15}{\sqrt{25+144}} = \frac{y}{\sqrt{1}}$

$\Rightarrow 5x + 12y - 15 = 13y$

$\Rightarrow 5x - y - 15 = 0$

আবার, (2) ও (3) সমীকরণে, x-এর সহগদ্বয়ের গুণফল + y-এর সহগদ্বয়ের গুণফল $= 1 \times 5 + 0 \times 12 = 5 > 0$

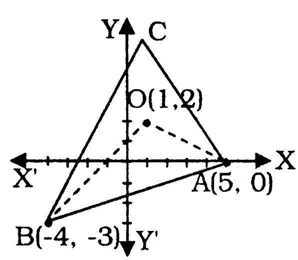
(2) ও (3) এর অন্তর্ভুক্ত কোণের বহির্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{5x+12y-15}{\sqrt{25+144}} = \frac{x}{\sqrt{1}}$

$\Rightarrow 5x + 12y - 15 = 13x$

$\Rightarrow 8x - 12y + 15 = 0$

8(e) Δ ABC এর শীর্ষ দুইটি A(5 , 0), B(–4, –3) এবং অন্তঃকেন্দ্র (1, 2) হলে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান :



ধরি, Δ ABC এর অন্তঃকেন্দ্র O(1, 2).

AB এর ঢাল $= \frac{0+3}{5+4} = \frac{1}{3}$

AO এর ঢাল $= \frac{0-2}{5-1} = -\frac{1}{2}$

BO এর ঢাল $= \frac{2+3}{1+4} = 1$

AC রেখার ঢাল m_1 হলে,

$$\frac{m_1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}m_1} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + (-\frac{1}{2}).\frac{3}{4}} \Rightarrow \frac{2m_1 + 1}{2 - m_1} = \frac{-3-2}{8-3}$$

$$\Rightarrow \frac{2m_1 + 1}{2 - m_1} = -1 \Rightarrow 2m_1 + 1 = -2 + m_1$$

$\Rightarrow m_1 = -3$

AC রেখার সমীকরণ, $y - 0 = -3(x - 5)$

$\Rightarrow y = -3x + 15 \cdots (1)$

আবার, BC রেখার ঢাল m_2 হলে,

$$\frac{m_2 - 1}{1 + 1.m_2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + 1.\frac{1}{3}} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 2m_2 - 2 = 1 + m_2 \Rightarrow m_2 = 3$

BC রেখার সমীকরণ, $y + 3 = 3(x + 4)$

$\Rightarrow y + 3 = 3x + 12$

$\Rightarrow -3x + 15 + 3 = 3x + 12$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$

(1) হতে পাই, $y = -3.1 + 15 = 12$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু $C \equiv (1, 12)$

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, Δ ABC এর অন্তঃকেন্দ্র O(1, 2).

AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-5}{5+4} = \frac{y-0}{0+3}$

$\Rightarrow x - 5 = 3y \Rightarrow x - 3y - 5 = 0$

AO রেখার সমীকরণ, $\frac{x-5}{5-1} = \frac{y-0}{0-2}$

$\Rightarrow -2x + 10 = 4y \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$

BO রেখার সমীকরণ, $\frac{x-1}{1+4} = \frac{y-2}{2+3}$

$\Rightarrow x - 1 = y - 2 \Rightarrow x - y + 1 = 0$

এখন, AC ও AB এর অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক AO. অতএব, AC রেখার সমীকরণ,

$(1^2 + 2^2)(x - 3y - 5) - 2\{1.1 + (-3)(2)\}(x + 2y - 5) = 0$

$\Rightarrow 5(x - 3y - 5) + 10(x + 2y - 5) = 0$

$\Rightarrow x - 3y - 5 + 2x + 4y - 10 = 0$

$\Rightarrow 3x + y - 15 = 0 \Rightarrow y = -3x + 15 \cdots (1)$

আবার, BA ও BC এর অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক BO. অতএব, BC রেখার সমীকরণ,

$(1^2 + 1^2)(x - 3y - 5) - 2\{1.1 + (-3)(-1)\}(x - y + 1) = 0$

$\Rightarrow x - 3y - 5 - 4(x - y + 1) = 0$

$\Rightarrow x - 3y - 5 - 4x + 4y - 4 = 0$

$\Rightarrow -3x + -3x + 15 - 9 = 0$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow -6x = -6 \Rightarrow x = 1$

(1) হতে পাই, $y = -3.1 + 15 = 12$

AC ও BC এর ছেদবিন্দু $C \equiv (1, 12)$

9. $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

(a) মূলবিন্দু ও প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(b) রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক y-অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে PQ এর দূরত্ব নির্ণয় কর। **[রা.'১১,'১৪; সি.'০৫; ব.'১২; কু.'১৪; চুয়েট'০৮-০৯]**

(c) মূলবিন্দু থেকে $\sqrt{5}$ একক দূরত্বে এবং $2y - x = 4$ রেখার উপর লম্ব রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : (a) ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $2x - y + 1 + k(x - 2y + 4) = 0$ (i) ; যা মূলবিন্দু (0, 0) দিয়ে অতিক্রম করে।

$2\times0 - 0 + 1 + k(0 - 2\times0 + 4) = 0$

$\Rightarrow 4k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $2x - y + 1 - \frac{1}{4}(x - 2y + 4) = 0$

$\Rightarrow 8x - 4y + 4 - x + 2y - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad 7x - 2y = 0$ (Ans.)

(b) প্রশ্নমালা III G এর 6(a) দ্রষ্টব্য।

(c) ধরি, $2y - x = 4 \Rightarrow x - 2y + 4 = 0$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ, $2x + y + k = 0 \cdots\cdots$ (i)

মূলবিন্দু (0,0) হতে (i) এর লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow k = \pm 5$

রেখাসমূহের সমীকরণ, $2x + y \pm 5 = 0$

10. A(1, 1), B(3, 4) এবং C(5, – 2) বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

(a) ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

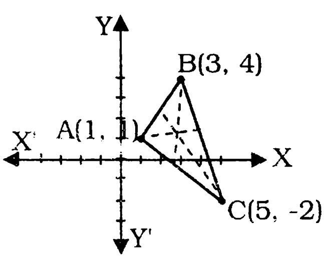
(b) AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[কু.'০৬,'০৮;ঢা.'১১; কু.'১৪; মা.বো.'০৭; য.'০৯]**

(c) ABC ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্দ্বিখন্ডক নির্ণয় কর।

সমাধান: (a) ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}|4 - 6 + 5 - (3 + 20 - 2)| = \dfrac{1}{2}|3 - 21| = 9$ বর্গ একক।

(b) প্রশ্নমালা III E এর 3(a) দ্রষ্টব্য।

(c) সমাধান:



AB, BC ও CA বাহু তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে,

$(x - 1)(1 - 4) - (y - 1)(1 - 3) = 0$

$\Rightarrow \quad + \quad 2y \quad 0$

$\Rightarrow 3x - 2y - 1 = 0 \qquad (1)$

$(x - 3)(4 + 2) - (y - 4)(3 - 5) = 0$

$\Rightarrow 6x - 18 + 2y - 8 = 0$

$\Rightarrow 3x + y - 13 = 0 \cdots\cdots (2)$ এবং

$(x - 1)(1 + 2) - (y - 1)(1 - 5) = 0$

$\Rightarrow 3x - 3 + 4y - 4 = 0$

$\Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0 \cdots\cdots (3)$

চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে।

চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির $\angle BAC$ কোণ মূলবিন্দু ধারণ করে কিন্তু $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ কোণ দুইটি মূলবিন্দু ধারণ করে না।

$AB \equiv 3x - 2y - 1 = 0 \qquad (1)$

$BC \equiv 3x + y - 13 = 0$

$CA \equiv 3x + 4y - 7 = 0$

$\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক

$$\frac{3x-2y-1}{\sqrt{9+4}} = \frac{3x+4y-7}{\sqrt{9+16}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-2y-1}{\sqrt{13}} = \frac{3x+4y-7}{5}$$

$\Rightarrow 15x - 10y - 5 = 3\sqrt{13}\,x + 4\sqrt{13}\,y - 7\sqrt{13}$

$\Rightarrow (15 - 3\sqrt{13})\,x - (10 + 4\sqrt{13})\,y - 5 + 7\sqrt{13} = 0$

$\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডক

$$\frac{3x-2y-1}{\sqrt{9+4}} = -\frac{3x+y-13}{\sqrt{9+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-2y-1}{\sqrt{13}} = -\frac{3x+y-13}{\sqrt{10}}$$

$\Rightarrow 3\sqrt{13}\,x + \sqrt{13}\,y - 13\sqrt{13} = -3\sqrt{10}\,x + 2\sqrt{10} + \sqrt{10}$

$\Rightarrow (3\sqrt{13} + 3\sqrt{10})x + (\sqrt{13} - 2\sqrt{10})y - 13\sqrt{13} - \sqrt{10} = 0$

$\angle ACB$ এর সমদ্বিখন্ডক

$$\frac{3x+4y-7}{\sqrt{9+16}} = -\frac{3x+y-13}{\sqrt{9+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+4y-7}{5} = -\frac{3x+y-13}{\sqrt{10}}$$

$\Rightarrow 15x + 5y - 65 = -3\sqrt{10}\,x - 4\sqrt{10}\,y + 7\sqrt{10}$

$\Rightarrow (15 + 3\sqrt{10})x + (5 + 4\sqrt{10})y - 65 - 7\sqrt{10} = 0$

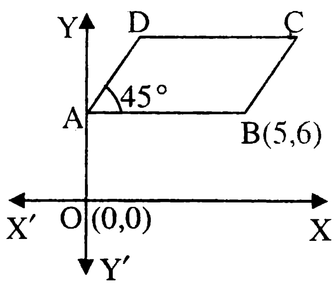
ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$(15 - 3\sqrt{13})x - (10 + 4\sqrt{13})y - 5 + 7\sqrt{13} = 0,$

$(3\sqrt{13} + 3\sqrt{10})x + (\sqrt{13} - 2\sqrt{10})y - 13\sqrt{13} - \sqrt{10} = 0$ এবং

$(15 + 3\sqrt{10})x + (5 + 4\sqrt{10})y - 65 - 7\sqrt{10} = 0$

11.



(a) AD বাহুর ঢাল $m = \tan 45° = 1$, y অক্ষের ছেদাংশ c = B বিন্দুর y স্থানাঙ্ক = 6.

AD বাহুর সমীকরণ $y = mx + c$

$\Rightarrow y = x + 6 = x + 6 \Rightarrow x - y + 6 = 0$

(b) x অক্ষের সমান্তরাল এবং B(5, 6) বিন্দুগামী AB বাহুর সমীকরণ $y = 6$

B(5, 6) বিন্দুগামী এবং AD এর সমান্তরাল BC বাহুর সমীকরণ $x - y = 5 - 6 \Rightarrow x - y + 1 = 0$

এখানে $a_1a_2 + b_1b_2 = 0\times1 + 1\times-1 = -1 < 0$ এবং $\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ।

ABC কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{x - y + 1}{\sqrt{1+1}} = -\frac{y+6}{\sqrt{1}}$$

$\Rightarrow x - y + 1 = -\sqrt{2}y - 6\sqrt{2}$

$x + (\sqrt{2} - 1)y + 1 + 6\sqrt{2} = 0$

(c) এখানে A এর স্থানাঙ্ক (0, 6)

ধরি, AB≡ $y = 6$ বাহুর সমান্তরাল DC বাহুর সমীকরণ $y = k$

$y = k$ এবং $x - y + 6 = 0 \Rightarrow x = y - 6$ এর ছেদ বিন্দু D (k – 6, k).

$y = k$ এবং $x - y + 1 = 0 \Rightarrow x = y - 1$ এর ছেদ বিন্দু C(k – 1, k)

এখন, AD = BC

$\Rightarrow \sqrt{(k-6-0)^2 + (k-6)^2} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2(k-6)^2} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2}(k-6) = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow k - 6 = 3 \Rightarrow k = 9$

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (8, 9) এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 9).

কাজ

১. দেখাও যে, $(-\frac{1}{2}, -2)$ বিন্দুটি $2x-3y+4=0$ ও $6x+4y-7=0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী। [য.'০৬]

প্রমাণ: $2x - 3y + 4 = 0$ রেখা হতে $(-\frac{1}{2}, -2)$ এর

$$\text{দূরত্ব} = \frac{|2\times-\frac{1}{2} - 3\times-2 + 4|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{|-1+6+4|}{\sqrt{13}}$$

$$= \frac{|9|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

$6x + 4y - 7 = 0$ রেখা হতে $(-\frac{1}{2}, -2)$ এর লম্ব

$$\text{দূরত্ব} = \frac{|6\times-\frac{1}{2} + 4\times-2 - 7|}{\sqrt{6^2+4^2}} = \frac{|-3-8-7|}{\sqrt{36+16}}$$

$$= \frac{|-18|}{\sqrt{52}} = \frac{18}{2\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

প্রদত্ত বিন্দু হতে রেখা দুইটি সমদূরবর্তী ।

২. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 3y - 5 = 0$ এবং $3x + 2y - 7 = 0$ রেখা দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান ধরি, মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $y = mx$

অর্থাৎ $mx - y = 0 \cdots (1)$

$2x + 3y - 5 = 0$ এবং $3x + 2y - 7 = 0$

রেখার ঢাল যথাক্রমে $m_1 = -\dfrac{2}{3}$ এবং $m_2 = -\dfrac{3}{2}$

প্রদত্ত রেখাদ্বয় (1) রেখার সঙ্গে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে বলে, $\dfrac{m - m_1}{1 + mm_1} = \pm \dfrac{m - m_2}{1 + mm_2}$

$$\Rightarrow \frac{m + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}m} = \pm \frac{m + \frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{2}m}$$

$$\Rightarrow \frac{3m + 2}{3 - 2m} = \pm \frac{2m + 3}{2 - 3m}$$

$\Rightarrow$ '+' নিয়ে, $4 - 9m^2 = 9 - 4m^2$

$\Rightarrow 5m^2 = -5$, যা সম্ভব নয়।

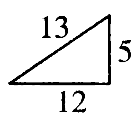
'−' নিয়ে, $4 - 9m^2 = -9 + 4m^2$

$\Rightarrow 13m^2 = 13 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$

রেখাটির সমীকরণ, $x - y = 0$ বা, $x + y = 0$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1 একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\sin^{-1}(5/13)$ কোণ উৎপন্ন করে।



সমাধান: দেওয়া আছে, রেখার ঢাল,

$m = \tan \sin^{-1}(5/13)$

$= \tan \tan^{-1} \dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{12}$ এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ, $c = 5$ একক।

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y = mx + c$

$\Rightarrow y = \dfrac{5}{12}x + 5 \Rightarrow 12y = 5x + 60$ (Ans.)

2(a) (3,2) ও (7,3) বিন্দু দুইটি $2x - 5y + 3 = 0$ রেখার একই অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত কিনা নির্ণয় কর। বিন্দু দুইটির কোনটি রেখাটির যে পার্শ্বে মূল বিন্দু, ঠিক সে পার্শ্বে অবস্থিত?

সমাধান ঃ ধরি, $f(x, y) \equiv 2x - 5y + 3 = 0$

$f(3, 2) = 2 \times 3 - 5 \times 2 + 3 = -1,$

$f(7, 3) = 14 - 15 + 3 = 2,$

$f(0, 0) = 2 \times 0 - 5 \times 0 + 3 = 3$

$f(3, 2)$ ও $f(7, 3)$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট বলে, বিন্দু দুইটি রেখাটির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

আবার, $f(7, 3)$ ও $f(0, 0)$ একই চিহ্নবিশিষ্ট বলে, মূলবিন্দু ও (7, 3) বিন্দু রেখাটির একই পার্শ্বে অবস্থিত।

2(b) দেখাও যে, মূলবিন্দু ও (1,6) বিন্দুটি $x - y + 4 = 0$ এবং $x + 2y - 4 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত বিপ্রতীপ কোণে অবস্থিত।

প্রমাণ ঃ ধরি, $f(x, y) \equiv x - y + 4 = 0 \cdots (1)$

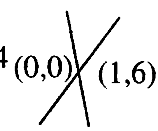
এবং $g(x, y) \equiv x + 2y - 4 = 0 \quad (2)$

$f(0,0) = 0 - 0 + 4 = 4$

$f(1, 6) = 1 - 6 + 4 = -1$

$f(0,0) \times f(1, 6) = 4 \times -1 < 0$

মূলবিন্দু ও (1,6) বিন্দু (1) রেখার বিপরীত পাশে অবস্থিত।



আবার, $g(0,0) = 0 + 0 - 4 = -4$

$g(1, 6) = 1 + 12 - 4 = 9$

$g(0,0) \times g(1, 6) = -4 \times 9 < 0$

মূলবিন্দু ও (1,6) বিন্দু (2) রেখার বিপরীত পাশে অবস্থিত।

মূলবিন্দু ও (1,6) বিন্দুটি $x - y + 4 = 0$ এবং $x + 2y - 4 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত বিপ্রতীপ কোণে অবস্থিত।

2(c) দেখাও যে, মূলবিন্দু এবং (2 , − 1) বিন্দুটি যথাক্রমে $2x - y - 4 = 0$ এবং $4x + 2y - 9 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে এবং সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত।

প্রমাণ ঃ ধরি, $f(x, y) \equiv 2x - y - 4 = 0 \cdots (1)$

এবং $g(x, y) \equiv 4x + 2y - 9 = 0 \quad (2)$

$f(0,0) = -4$, $g(0, 0) = -9$

$f(2, -1) = 4 + 1 - 4 = 1$

$g(2, -1) = 8 - 2 - 9 = -3$

এবং $a_1a_2 + b_1b_2 = 2 \times 4 + (-1) \times 2 = 6$

এখন, $f(0,0) \times g(0,0)(a_1a_2 + b_1b_2) = 216 > 0$

মূলবিন্দু প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে অবস্থিত।

এবং $f(2,-1)\times g(2,-1)(a_1a_2+b_1b_2)=-18<0$

$(2\ ,\ -1)$ বিন্দুটি প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত।

3. $2x + 3y + 5 = 0$ এবং $4x - 6y - 7 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত যে কোণটি $(1\ ,\ 2)$ বিন্দু ধারণ করে তার সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $f(x, y)\equiv 2x+3y+5=0$

এবং $g(x, y)\equiv 4x-6y-7=0$

$f(1, 2)\times g(1, 2)=(2+6+5)(4-12-7)$

$=12.(-15)<0$

$(1,2)$ বিন্দু ধারণকারী সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{2x+3y+5}{\sqrt{4+9}}=-\frac{4x-6y-7}{\sqrt{16+36}}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+5}{\sqrt{13}}=-\frac{4x-6y-7}{\sqrt{52}}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+5}{\sqrt{13}}=-\frac{4x-6y-7}{2\sqrt{13}}$$

$\Rightarrow 4x+6y+10=-4x+6y+7$

$\Rightarrow 8x+3=0$ (Ans.)

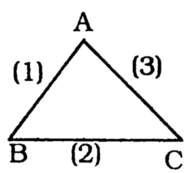
4(a) $4x + 3y = 12,\ 3x - 4y + 16 = 0$ ও $4x - 3y + 4 = 0$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি

$AB\equiv 4x+3y-12=0\cdots(1)$

$BC\equiv 3x-4y+16=0\cdots(2)$

$CA\equiv 4x-3y+4=0\cdots(3)$



(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু,

$$A\equiv\left(\frac{12-36}{-12-12},\frac{-48-16}{-12-12}\right)=\left(1,\frac{8}{3}\right)$$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু,

$$B\equiv\left(\frac{48-48}{-16-9},\frac{-36-64}{-16-9}\right)=(0,4)$$

$A(1,\frac{8}{3})$ বিন্দুগামী এবং BC এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ $4x+3y=4.1+3.\frac{8}{3}$

$\Rightarrow$ [illegible] $=0 \cdots (4)$

আবার , $B(0,\ 4)$ বিন্দুগামী এবং AC এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ $3x+4y=3.0+4.4$

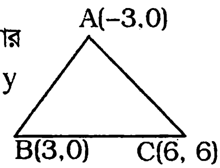
$\Rightarrow\ 3x+4y-16=0\cdots(5)$

(4) ও (5) এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$=\left(\frac{-48+48}{16-9},\frac{-36+64}{16-9}\right)=(0,4)$$

5(b) $A(-3\ ,\ 0)$, $B(3\ ,\ 0)$ ও $C(6\ ,\ 6)$ বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান : A $(-3,0)$ বিন্দুগামী এবং BC রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $(3-6)x+(0-6)y$



$=-3\times-3-6\times0$

$\Rightarrow -3x-6y-9=0$

$\Rightarrow x+2y+3=0\cdots(1)$

$B(3,0)$ বিন্দুগামী এবং AC রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $(-3-6)x+(0-6)y=-9.3+(-6).0$

$\Rightarrow -9x-6y+27=0$

$\Rightarrow 3x+2y-9=0\cdots\cdots(2)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু $\left(\frac{-18-6}{2-6},\frac{9+9}{2-6}\right)$

$=\left(\frac{-24}{-4},\frac{18}{-4}\right)=\left(6,-\frac{9}{2}\right)$,যা ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র।

এবং AC এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{3}{2},3\right)$.

এখন, BC এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{9}{2},3\right)$ দিয়ে যায় এবং BC এর উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ,

$$(3-6)x+(0-6)y=-3.\frac{9}{2}+(-6).3$$

$\Rightarrow -3x-6y=\frac{-27-36}{2}=\frac{-63}{2}$

$\Rightarrow -6x-12y+63=0$

$\Rightarrow 2x+4y-21=0\cdots(3)$

আবার, AC এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{3}{2},3\right)$ দিয়ে যায় এবং AC এর উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ,

$$(-3-6)x+(0-6)y=-9.\frac{3}{2}-6.3$$

$\Rightarrow \quad 9x - 6y = \frac{-27-36}{2} = \frac{-63}{2}$

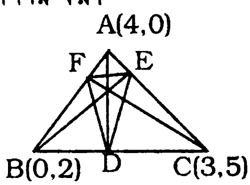
$\Rightarrow -18x - 12y + 63 = 0$

$\Rightarrow 6x + 4y - 21 = 0 \cdots \quad (4)$

(3) ও (4) এর ছেদবিন্দু $(\frac{-84+84}{8-24}, \frac{-126+42}{8-24})$

$= (\frac{0}{-16}, \frac{-84}{-16}) = (0, \frac{21}{4})$,যা ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র ।

5(c) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ ABC এর শীর্ষ তিনটি A(4 , 0), B(0 , 2) ও C(3 , 5) হলে, ΔABC এর পাদত্রিভুজের অন্ত:কেন্দ্র নির্ণয় কর।



সমাধান : ধরি, Δ ABC এ AD , BE, CF যথাক্রমে BC, CA, AB এর উপর লম্ব । অতএব, Δ ABC এর পাদত্রিভুজ Δ DEF.

BC এর উপর লম্ব AD এর সমীকরণ,

$(3-0)x + (5-2)y = 3\times4 + 3\times0$

$\Rightarrow 3x + 3y - 12 = 0$

$\Rightarrow x + y - 4 = 0 \quad (1)$

আবার, CA এর উপর লম্ব BE এর সমীকরণ,

$(4-3)x + (0-5)y = 1\times0 - 5\times2$

$\Rightarrow x - 5y + 10 = 0 \cdots (2)$

$(1) - (2) \Rightarrow 6y - 14 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{3}$

(1) হতে পাই, $x + \frac{7}{3} - 4 = 0$

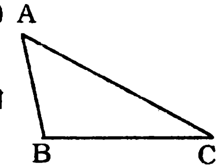
$\Rightarrow x + \frac{7-12}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

Δ ABC এর লম্বকেন্দ্র $= (\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$.

পাদত্রিভুজ Δ DEF পরিকেন্দ্র = Δ ABC এর লম্বকেন্দ্র $= (\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$ (Ans.)

6(a) ΔABC এর AB , BC , CA বাহু তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে 4x + 3y − 12 = 0 , x − 4y + 4 = 0 , 6x + 5y − 15 = 0 . দেখাও যে, $\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ।

প্রমাণ : AB , BC , CA বাহু তিনটির সমীকরণকে যথাক্রমে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, px + qy + r = 0 এর সাথে তুলনা করে পাই,



$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ p & q \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p & q \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (a_1a_2 + b_1b_2)$

$= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \{4.1 + 3.(-4)\}$

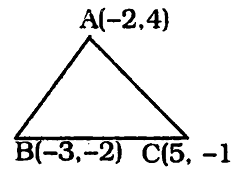
$= (20-16)(-24-5)(4-12)$

$= 4(-29)(-8) > 0$

$\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ। (Showed)

6(b) প্রমাণ কর যে, A(−2, 4) , B(−3, −2) ও C(5, −1) বিন্দু তিনটি একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ ।

প্রমাণ ঃ



$AB = \sqrt{(-2+3)^2 + (4+2)^2}$

$= \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$

$BC = \sqrt{(-3-5)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{64+1}$

$= \sqrt{65}$

$CA = \sqrt{(5+2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{49+25}$

$= \sqrt{74}$

AB , BC , CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর । অতএব, A, B, C বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজ গঠন করে।

এখন, $\angle A$ এর ক্ষেত্রে, $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) = (-2+3)(-2-5) + (4+2)(4+1) = -7 + 30 = 23 > 0$

$\angle A$ সূক্ষ্মকোণ।

$\angle B$ এর ক্ষেত্রে, $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) = (-3+2)(-3-5) + (-2-4)(-2+1) = 8 + 6 = 14 > 0$

$\angle B$ সূক্ষ্মকোণ।

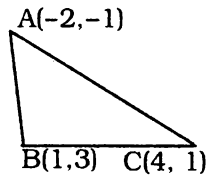
$\angle C$ এর ক্ষেত্রে, $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) = (5 + 2)(5 + 3) + (-1-4)(-1 + 2) = 56 - 5 = 53 > 1$

$\angle C$ সূক্ষ্মকোণ।

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ।

6(c) প্রমাণ কর যে, (–2, –1), (1, 3) ও (4, 1) বিন্দু তিনটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ ।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি A(–2,–1),B(1,3) ও (4,1).



$\therefore AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-3)^2}$

$= \sqrt{9+16} = 5$

$BC = \sqrt{(1-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$CA = \sqrt{(4+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

AB , BC , CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর । অতএব, A, B, C বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজ গঠন করে যার CA বৃহতম বহু।

CA বৃহতম বহুর বিপরীত কোণ $\angle B$ এর ক্ষেত্রে,

$(1-4)(1+2) + (3-1)(3+1)$

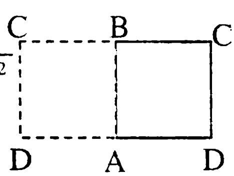
$= -9 + 8 = -1 < 0$

$\angle B$ স্থূলকোণ।

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজেরশীর্ষ ।

7(a) A(0, 7) এবং B(4,9) বিন্দুদ্বয় ABCD বর্গের শীর্ষবিন্দু হলে C ও D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ



$AB = \sqrt{(0-4)^2 + (7-9)^2}$

$= \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

AB বাহুর সমীকরণ

$(x-0)(7-9) - (y-7)(0-4) = 0$

$\Rightarrow -2x + 4y - 28 = 0 \Rightarrow x - 2y + 14 = 0$

A(0, 7) বিন্দুগামী AB বাহুর উপর লম্ব AD বাহুর সমীকরণ, $2x + y = 2\times 0 + 7$

$\Rightarrow 2x + y - 7 = 0 \qquad (1)$

B(4,9) বিন্দুগামী AB বাহুর উপর লম্ব BC বাহুর সমীকরণ, $2x + y = 2\times 4 + 9$

$\Rightarrow 2x + y - 17 = 0 \qquad (2)$

AB এর সমান্তরাল $2\sqrt{5}$ একক দূরবর্তী CD বাহুর সমীকরণ $x - 2y + 14 \pm 2\sqrt{5}\sqrt{1^2 + 2^2} = 0$

$\Rightarrow x - 2y + 14 \pm 10 = 0$

$x - 2y + 24 = 0 \cdots\cdots (3)$

$x - 2y + 4 = 0 \cdots \qquad (4)$

(1) ও (3) ছেদবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক (–2 ,11)

(2) ও (3) ছেদবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক (2 ,13)

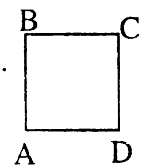
আবার, (1) ও (4) ছেদবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক (2 ,3)

(2) ও (4) ছেদবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক (6 ,5)

C(2,13) ও D (–2 ,11) অথবা, C(6 , 5) ও D(2 , 3)

7(b) (0, 7) ও (6 , 5) বিন্দুদ্বয় একটি বর্গের কর্ণের শীর্ষবিন্দু হলে অপর শীর্ষবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ ধরি, ABCD বর্গের AC কর্ণেও শীর্ষবিন্দু A(0, 7) ও C(6 , 5).



$\therefore AC = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$

AC কর্ণের লম্বসমদ্বিখন্ডক BD কর্ণের সমীকরণ $(0-6)x + (7-5)y = \frac{1}{2}(0 + 49 - 36 - 25) \Rightarrow -6x + 2y + 6 = 0$

$\Rightarrow 3x - y - 3 = 0 \qquad (1)$

AC কর্ণের সমীকরণ $x + 3y = 0 + 3\times 7$

$\Rightarrow x + 3y - 21 = 0$

AC কর্ণের সমান্তরাল $2\sqrt{10}$ একক দূরবর্তী রেখার সমীকরণ সরলরেখার সমীকরণ,

$x + 3y - 21 \pm \sqrt{10}\sqrt{1^2 + 3^2} = 0$

$\Rightarrow x + 3y - 21 \pm 10 = 0$

$x + 3y - 11 = 0 \qquad (2)$ এবং

$x + 3y - 31 = 0 \cdots \qquad (3)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 3)

(1) ও (3) এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 9)

অপর শীর্ষবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (2, 3) ও (4, 9)

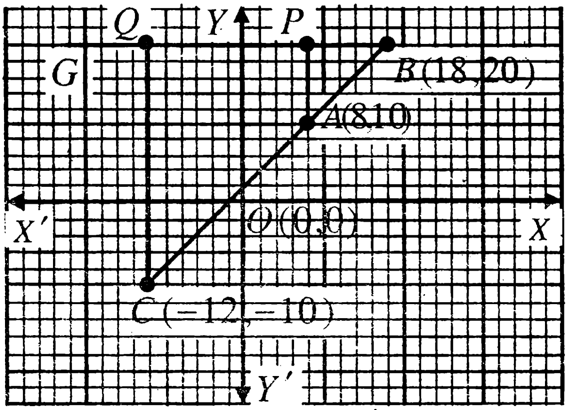
ব্যবহারিক অনুশীলন

1. পরীক্ষণের নাম ঃ A(8 , 10) ও B(18, 20) বিন্দুর সংযোগ রেখাংশকে 2 3 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় ।

মূলতত্ত্ব ঃ $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে m_1 m_2 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস।



(i) একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি।

(ii) x অক্ষ y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে A(8 10) ও B(18, 20) বিন্দুদ্বয়কে গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে সংযোগ করে AB রেখাংশ লেখচিত্রে উপস্থাপন করি।

(iii) B বিন্দু দিয়ে x অক্ষের সমান্তরাল BG রেখার উপর যেকোন দুইটি বিন্দু P ও Q নেই যেন PQ BQ = 2 3 হয়। (এখানে, B থেকে 15 বর্গ দূরে Q এবং P থেকে 10 বর্গ দূরে Q বিন্দু অবস্থিত।)

(iv) P, A যোগ করি এবং PA এর সমান্তরাল QC রেখা অঙ্কন করি যা BA এর বর্ধিতাংশকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

ফল সংকলন ঃ

C এর স্থানাঙ্ক	
গ্রাফ হতে প্রাপ্ত মান	সূত্র হতে প্রাপ্ত মান
(-12,-10)	$\left(\frac{2\times18-3\times8}{2-3}, \frac{2\times20-3\times10}{2-3}\right)$ $= \left(\frac{36-24}{-1}, \frac{40-30}{-1}\right)$ $= (-12, -10)$

ফলাফল ঃ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 2 3 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক (−12, −10).

2. পরীক্ষণের নাম ঃ ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A(5, 6), B(−9,1) এবং C(−3, −1) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

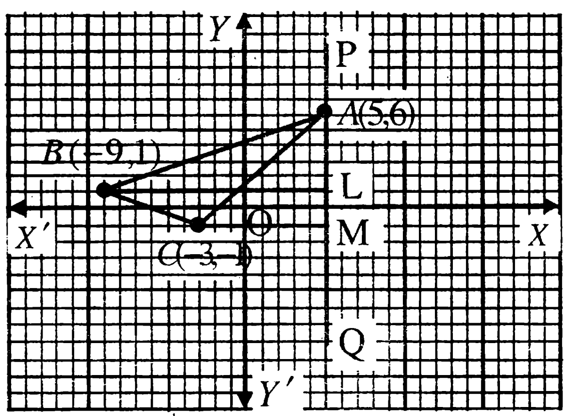
মূলতত্ত্ব ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ হলে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}\right| \text{ বর্গ একক।}$$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

(i) একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি।



(ii) x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1

বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে A(5, 6), B(−9,1) এবং C(−3, −1) বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে A,B; B, C ; C, A সংযোগ করে ABC ত্রিভুজটি অঙ্কন করি।

(iii) A বিন্দু দিয়ে y অক্ষের সমান্তরাল PQ রেখা আঁকি।

(iv) B ও C হতে PQ এর উপর যথাক্রমে BL ও CM লম্ব আঁকি ।

হিসাব ঃ $BL = |-9-(5)| = 14$,
$CM = |-3-(-5)| = 8$, $AL = |6-1| = 5$,
$LM = |1-(-1)| = 2$, $AM = 5+2 = 7$

ফল সংকলন ঃ

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল
গ্রাফ হতে প্রাপ্ত মান: ΔABC = ট্রাপিজিয়াম BLMC এর ক্ষেত্রফল + ত্রিভুজ BLA এর ক্ষেত্রফল − ত্রিভুজ AMC এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times(BL+CM)\times LM+\frac{1}{2}\times BL\times AL-\frac{1}{2}\times CM\times AM$ $=\frac{1}{2}\times(14+8)\times 2+\frac{1}{2}\times 14\times 5-\frac{1}{2}\times 8\times 7$ $= 22+35-28 = 29$ বর্গ একক।
সূত্র হতে প্রাপ্ত মান $\Delta ABC=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}5 & -9 & -3 & 5\\ 6 & 1 & -1 & 6\end{vmatrix}\right\|$ $=\frac{1}{2}\|5+9-18-(-54-3-5)\|$ $=\frac{1}{2}\|-4+62\|=\frac{1}{2}\|58\| = 29$ বর্গ একক।

ফলাফল ঃ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 29 বর্গ একক।

3. পরীক্ষণের নাম ঃ $3x-5y=-11$ সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কন

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

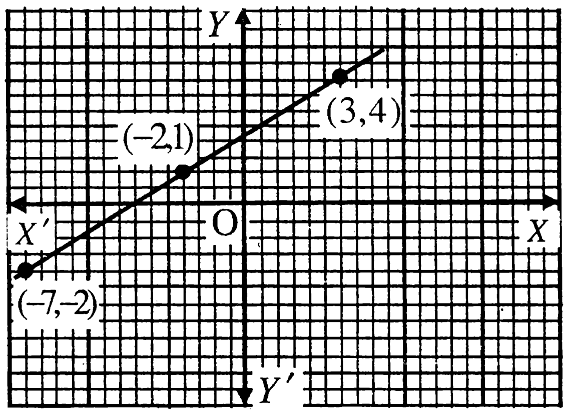
(i) প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ হতে পাই,

$$-5y=-3x-11 \Rightarrow y=\frac{3x+11}{5}$$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি তৈরি করি :

x	−2	3	−7
y	1	4	−2

(ii) একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।



(iv) x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (−2, 1) (3, 4) ও (−7, −2) বিন্দু তিনটি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে সংযোগ করে $3x-5y=-11$ সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

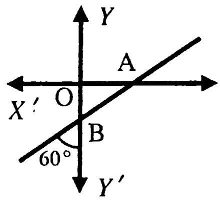
লেখচিত্রের বৈশিষ্ট ঃ

(i) প্রদত্ত সরলরেখার ঢাল–ছেদ আকৃতি $y=\frac{3}{5}x+\frac{11}{5}$ এ $c=\frac{11}{5}>0$ বলে রেখাটি y অক্ষকে ধনাত্মক দিকে $\frac{11}{5}$ একক দূরে ছেদ করবে।

(ii) $m=\frac{3}{5}>0$ বলে রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে।

4. সংযুক্ত চিত্রের সাহায্যে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে (6 , 5) বিন্দুটি AB এর উপর অবস্থিত।

পরীক্ষণের নাম ঃ প্রদত্ত চিত্র ও তথ্য হতে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।



মূলতত্ত্ব ঃ a (x অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ) ও b(y অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ) নির্ণয় করে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সূত্র দ্বারা, c (y অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ) ও ঢাল m (x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে প্রদত্ত রেখার উৎপন্ন কোণের tangent) নির্ণয় করে y = mx + c সূত্র দ্বারা সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করা যায়।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) কম্পাস, (vii) চাঁদা ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

প্রদত্ত রেখা দ্বারা x অক্ষের ধনাত্মক দিকে সাথে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ চাঁদা দিয়ে পরিমাপ করি। উৎপন্ন কোণের পরিমাণ 30° ।

হিসাব ঃ

রেখাটির ঢাল = $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$. y অক্ষের ছেদাংশ c হলে রেখাটির সমীকরণ হবে y = mx + c

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + c$$

তথ্য অনুসারে, রেখাটি (6, 5) বিন্দুগামী।

$$5 = \frac{6}{\sqrt{3}} + c \Rightarrow c = \frac{5\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}$$

রেখাটির নির্ণেয় সমীকরণ

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{5\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\,y = x + 5\sqrt{3} - 6$$

5. y-অক্ষের সাপেক্ষে A(– 5, 5) বিন্দুর এবং B(7, 2) ও C(5, –4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ y-অক্ষের সাপেক্ষে A(– 5, 5) বিন্দুর এবং B(7, 2) ও C(5, –4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় ।

মূলতত্ত্ব ঃ x-অক্ষ ও y-অক্ষের সাপেক্ষে (x , y) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি যথাক্রমে $(x , -y)$ ও $(-x , y)$ ।

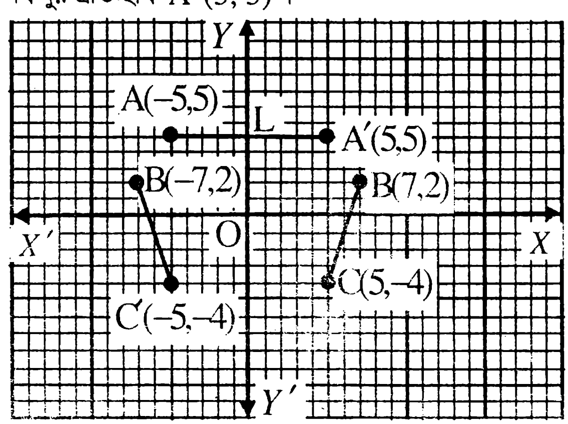
প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

(i) একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

(ii) x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে A(–5, 5), B(7 2) এবং C(5 –4) বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে B, C সংযোগ করে BC রেখাংশ অঙ্কন করি।

(iii) A(–5, 5) বিন্দু হতে y অক্ষের উপর AL লম্ব অঙ্কন করি এবং AL কে A′ পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন AL = LA′ হয়। তাহলে, y অক্ষের সাপেক্ষে A বিন্দুর প্রতিচ্ছবি A′(5, 5) ।



(iv) তদ্রূপ y অক্ষের সাপেক্ষে B(7, 2) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি B′(−7, 2) এবং C(5 −4) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি C′(−5, −4) নির্ণয় করি।

(v) সরু পেন্সিল দিয়ে B′, C′ সংযোগ করি এবং y অক্ষের সাপেক্ষে BC রেখাংশের প্রতিচ্ছবি B′C′ অঙ্কন করি, যা (−7, 2) ও (−5, −4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ।

বৈশিষ্ট ঃ

(i) y অক্ষের সাপেক্ষে A(− 5, 5) ও A′(5, 5) পরস্পর পরস্পরের প্রতিচ্ছবি এবং এদের y স্থানাঙ্ক অভিন্ন ও একটির x স্থানাঙ্ক অপরটির বিপরীত ঋণাত্মক মানের সমান।

(ii) y অক্ষের সাপেক্ষে BC রেখাংশ ও B′C′ রেখাংশ পরস্পর পরস্পরের প্রতিচ্ছবি ও দৈর্ঘ্যে সমান এবং y অক্ষ থেকে এদের যেকোন একটির উপরস্ত যেকোন বিন্দুর সমদূরবর্তী বিন্দু অপরটির উপর অবস্থিত হবে।

6. $y = x$ সরলরেখার সাপেক্ষে A(5 , 6) বিন্দুর এবং B(−3, 5) ও C(4, −8) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = x$ সরলরেখার সাপেক্ষে A(5 6) বিন্দুর এবং B(−3, 5) ও C(4, −8) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় ।

মূলতত্ত্ব ঃ y = x রেখার সাপেক্ষে (h, k) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি (k, h).

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার ইত্যাদি।

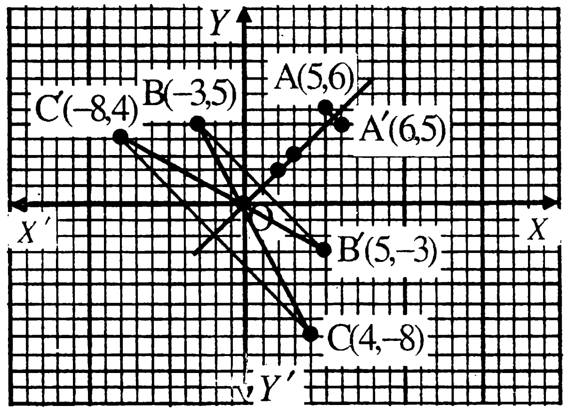
কার্যপদ্ধতি ঃ

(i) একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ y = x (i) এ x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি তৈরি করি

x	0	2	3
y	0	2	3

(iii) x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (2, 2) ও (3 , 3) বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে সংযোগ করে প্রদত্ত রেখা (i) এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।



(iv) একই স্কেলে A(5 6), B(−3, 5) ও C(4, −8) বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে B, C সংযোগ করে BC রেখাংশ অঙ্কন করি।

(v) A বিন্দু থেকে (i) নং রেখার উপর অঙ্কিত লম্বকে A′ পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন A ও A′ বিন্দুদ্বয় প্রদত্ত রেখা থেকে সমদূরবর্তী হয়। তাহলে, (i) নং রেখার সাপেক্ষে A বিন্দুর প্রতিচ্ছবি A′

6. তদ্রূপ (i) নং রেখার সাপেক্ষে B বিন্দুর প্রতিচ্ছবি B′ এবং C বিন্দুর প্রতিচ্ছবি C′ নির্ণয় করি।

7. সরু পেন্সিল দিয়ে B′ C′ সংযোগ করে (i) নং রেখার সাপেক্ষে BC রেখাংশের প্রতিচ্ছবি B′C′ অঙ্কন করি।

হিসাব ঃ $y = x$ (i) রেখার ঢাল = 1 এবং এর উপর লম্ব রেখার ঢাল = −1.

ধরি, (i) এর সাপেক্ষে A(5, 6) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি A′(h, k) ।

AA′ এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{h+5}{2}, \frac{k+6}{2}\right)$ (i) এর উপর অবস্থিত এবং AA′ ঢাল $= \frac{k-6}{h-5} = -1$

(i) হতে পাই, $\frac{k+6}{2} = \frac{h \quad 5}{2}$

$\Rightarrow h \quad 5 = k + 6$

এবং $-h + 5 = k - 6$

$\Rightarrow h + k - 11 = 0 \cdots$ (iii)

(ii) + (iii) $\Rightarrow 2h - 12 = 0 \Rightarrow h = 6$

(ii) হতে $6 - k - 1 = 0 \Rightarrow k = 5$

$y = x$ রেখার সাপেক্ষে A(5, 6) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি (6, 5)।

সূত্রের সাহায্যে ঃ A(5, 6) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি (6,5).
B(−3, 5) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি (5, −3).
C(4, −8) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি (−8,4)

ফলাফল ঃ $y = x$ রেখার সাপেক্ষে A(5, 6) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি (6,5) এবং B(−3, 5) ও C(4, −8) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের প্রতিচ্ছবি (5, −3) ও (−8,4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ ।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $y = 3x + 7$ এবং $3y - x = 8$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ – [DU 08-09]

Sol^n : এখানে $m_1 = 3$, $m_2 = \frac{1}{3}$

$$\tan\theta = \left|\frac{3 - \frac{1}{3}}{1 + 3.\frac{1}{3}}\right| = \frac{8}{6} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$$

2. $2x - 3y + 6 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং (1,-1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ–[DU, 02-03, 97-98; RU 06-07]

Sol^n : রেখার সমীকরণ $3x + 2y = 3 - 2 = 1$

3. $5x - 2y + 4 = 0$ এবং $4x - 3y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং মূলবিন্দু দিয়ে গমনকারী রেখার সমীকরণ – [DU 05-07; Jt.U 07-08]

Sol^n : সমীকরণ $5(5x - 2y) - 4(4x - 3y) = 0$

$\Rightarrow 25x - 10y - 16x + 12y = 0$

$\Rightarrow 9x + 2y = 0$

4. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ (2,3) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়। রেখাটির সমীকরণ– [DU04-05]

Sol^n : রেখার সমীকরণ $\frac{x}{2\times2} + \frac{y}{2\times3} = 1$

$\Rightarrow 3x + 2y = 12$

5. সরলরেখা $3x + 4y - 12 = 0$ দ্বারা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য– [DU 03-04]

Sol^n : দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(12/3)^2 + (12/4)^2}$

$= \sqrt{16 + 9} = 5$

6. $2x - 5y + 10 = 0$ দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা বেষ্টিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল– [DU 99-00]

Sol^n : $\frac{1}{2}.\frac{10^2}{2\times5} = 5$

7. একটি সরলরেখা (3,5) বিন্দু দিয়ে যায় অক্ষদ্বয় হতে বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট অংশ ছেদ করে।সরলরেখাটির সমীকরণ কি? [DU 98-99]

Sol^n : সমীকরণ, $x - y = 3 - 5 \Rightarrow x - y + 2 = 0$

8. α এর কোন মানের জন্য $(\alpha-1)x + (\alpha+1)y = 7$ রেখাটি $3x + 5y + 7 = 0$ রেখার সমান্তরাল হবে? [DU 01-02]

Sol^n : $\frac{\alpha - 1}{3} = \frac{\alpha + 1}{5} \Rightarrow 2\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 4$

9. $5x - 5\sqrt{3}y + 2 = 0$ এবং $3\sqrt{3}x + 3y = 4$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ হবে– [BUET 06-07]

Sol^n : এখানে ,$m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $m_2 = -\sqrt{3}$

$m_1 m_2 = -1$ অন্তর্ভুক্ত কোণ $= 90°$

10. (2,3) বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব বিন্দুর দূরত্ব – [BUET 06-07]

Sol^n : দূরত্ব $= 2\frac{|8 + 9 - 7|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{2.10}{5} = 4$

11. মূলবিন্দু হতে $3x + 4y = 10$ রেখটির লম্বদূরত্ব [DU 07-08, Jt.U 07-08]

Sol^n : লম্বদূরত্ব $= \frac{|-10|}{\sqrt{9 + 16}} = 2$

12. (4, −2) বিন্দু হতে $5x + 12y = 3$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য – [DU 06-07, 04-05; RU 06-07, 05-06; CU 02-03]

Sol^n : লম্বদূরত্ব $= \frac{|20 - 24 - 3|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{7}{13}$

13. α সূক্ষ্মকোণ হলে $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 4$ এবং $4x + 3y = 5$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব– [DU 06-07

Sol^n : সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব =

$$\left|\frac{-4}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}-\frac{-5}{\sqrt{4^2+3^2}}\right|$$

$= 4-1 = 3$

14. (1, –1) এবং (2,4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ– [DU 04-05]

Sol^n : লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$$(1-2)x + (-1-4)y = \frac{1}{2}(1^2+1^2-2^2-4^2)$$

$\Rightarrow -x - 5y + 10 = 0 \Rightarrow x + 5y - 10 = 0$

15. (–5,7) ও (3,–1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ–[DU 00-01;RU 06-07]

Sol^n : $-8x + 8y = \frac{1}{2}(25 + 49 - 9 - 1) = 32$

$\Rightarrow x - y + 4 = 0$

16. $y = 1 + \frac{1}{2+x}$ বক্ররেখা x- অক্ষকে A বিন্দুতে এবং y - অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করলে AB রেখার সমীকরণ – [DU 07-08, Jt.U 08-09]

Sol^n : $2y + xy = 2 + x + 1$

$\Rightarrow$ $x - 2y + 3 = 0$ [$\because$ সরলরেখায় xy থাকেনা]

17. x এর কোন মানের জন্য (1, –x), (1, x) এবং (x^2, –1) বিন্দু তিনটি একই রেখায় অবস্থান করবে? [BUET 12-13]

Sol^n : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x^2 & 1 \\ -x & x & -1 & -x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x-1-x^3-(-x+x^3-1) = 0$

$\Rightarrow x-1-x^3+x-x^3+1 = 0$

$\Rightarrow -2x^2+2x = 0$

$\Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 0, 1, -1$

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

1.(a) (0 , 0) কেন্দ্র এবং ' r ' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = r^2$.

(b) (h , k) কেন্দ্র এবং ' r ' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

(h,k) কেন্দ্র এবং (α, β) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = (\alpha - h)^2 + (\beta - k)^2$

(c) (– g, – f) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, যেখানে ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

(d) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

(e) একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, বৃত্ত + k(সরলরেখা)=0; ধ্রুবক $k \neq 0$

(f) দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ, প্রথম বৃত্ত + k (দ্বিতীয় বৃত্ত) = 0 ; ধ্রুবক $k \neq 0$.

(g) $f(x , y) = 0$ বৃত্ত ও $g(x , y) = 0$ সরলরেখার (অথবা , $f(x , y)= 0$ ও $g(x , y) = 0$ বৃত্তদ্বয়ের) ছেদবিন্দু এবং (α , β) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $\frac{f(x,y)}{f(\alpha,\beta)} = \frac{g(x,y)}{g(\alpha,\beta)}$; $f(\alpha,\beta) \neq 0$, $g(\alpha,\beta) \neq 0$

(h) খলিফার পদ্ধতিঃ যেকোন দুইটি বিন্দু (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ ,

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + k\{(x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2)\} = 0$$

; ধ্রুবক $k \neq 0$

2. (a) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c}$ এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{f^2 - c}$.

(b) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{r^2 - k^2}$ এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{r^2 - h^2}$

3. (a) (r_1, θ_1) কেন্দ্র ও a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সমীকরণ, $a^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\theta - \theta_1)$

(b) পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$, যার কেন্দ্র $(\sqrt{g^2 + f^2}, \tan^{-1}\frac{f}{g})$, ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র ঃ

1. f(x, y)= 0 বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $f(x , y) = f(x_1, y_1)$

2. x-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2 + y^2}{y} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1}$.

3. কেন্দ্র (h,k) এবং x –অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 = 0$

4. কেন্দ্র (h,k) এবং y –অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 = 0$

প্রশ্নমালা – IV A

1. $ax^2 + 2bxy - 2y^2 + 8x + 12y + 6 = 0$ একটি বৃত্ত নির্দেশ করলে, 'a' ও 'b' এর মান নির্ণয় কর। অতপর বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $ax^2 + 2bxy - 2y^2 + 8x + 12y + 6 = 0$ একটি বৃত্ত নির্দেশ করলে, xy এর সহগ , $2b = 0$

$\Rightarrow$ b = 0 এবং x^2 ও y^2 এর সহগ দুইটি সমান অর্থাৎ $a = -2$.

বৃত্তটির সমীকরণ হবে ,

$$-2x^2 - 2y^2 + 8x + 12y + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2(-3)y - 3 = 0$$

বৃত্তটির কেন্দ্র (–2 , – 3) এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{2^2 + 3^2 - (-3)} = \sqrt{4 + 9 + 3} = 4$

2. (a, b) কেন্দ্র এবং $\sqrt{a^2+b^2}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (a, b) কেন্দ্র এবং $\sqrt{a^2+b^2}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2$$
$$\Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=a^2+b^2$$
$$x^2+y^2-2ax-2by=0 \text{ (Ans.)}$$

3. (a) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2+y^2-4x+5y+9=0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং $(2,-1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

[কু.'০৫; য.'১০; দি.'১৩]

সমাধান ঃ $x^2+y^2-4x+5y+9=0$ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(-\frac{-4}{2},-\frac{5}{2})=(2,-\frac{5}{2})$,যা নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।

এখন নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র $(2,-\frac{5}{2})$ হতে $(2,-1)$ বিন্দুর দূরত্ব $=|-\frac{5}{2}+1|=\frac{3}{2}$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-2)^2+(y+\frac{5}{2})^2=(\frac{3}{2})^2$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+5y+\frac{25}{4}-\frac{9}{4}=0$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+5y+\frac{25-9}{4}=0$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+5y+4=0$$
$$x^2+y^2-4x+5y+8=0 \text{ (Ans.)}$$

[MCQ এর জন্য, $x^2+y^2-4x+5y=2^2+1^2-4.2+5(-1)=4+1-8-5$]

3.(b) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2+y^2-6x+8y=0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং $(3,-1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [সি.'০১]

সমাধান ঃ $x^2+y^2-6x+8y=0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(3,-4)$,যা নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।

এখন নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র $(3,-4)$ হতে $(3,-1)$ বিন্দুর দূরত্ব $=|-4+1|=3$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-3)^2+(y+4)^2=3^2$$
$$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2+8y+16=9$$
$$x^2+y^2-6x+8y+16=0 \text{ (Ans.)}$$

3(c) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4,-5)$ এবং এটি মূলবিন্দু দিয়ে যায়। তার সমীকরণ এবং অক্ষ দুইটি থেকে তা কি পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

[সি.'০৬; য.'০৮; কু.'১৪]

সমাধান ঃ কেন্দ্র $(4,-5)$ এবং মূলবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীরকণ, $x^2+y^2+2(-4)x+2(5)y=0$

$$x^2+y^2-8x+10y=0 \cdots(1)$$

(1) বৃত্তটিকে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g=-4$, $f=5$, $c=0$

বৃত্তটি দ্বারা x–অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ $2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{4^2-0}=8$ এবং

বৃত্তটি দ্বারা y–অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ $2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{5^2-0}=10$

4.(a) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4,-8)$ এবং তা y-অক্ষকে স্পর্শ করে । তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'০১; ঢা.'০২]

সমাধান ঃ $(4,-8)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে ।

বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = | কেন্দ্রের ভুজ | = | 4 | = 4

বৃত্তের সমীকরণ, $(x-4)^2+(y+8)^2=4^2$

$$\Rightarrow x^2-8x+16+y^2+16y+64=16$$
$$x^2+y^2-8x+16y+64=0$$

[MCQ এর জন্য, $x^2+y^2-8x+16y+8^2=0$]

4(b) $(-5, 7)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [মা.'০৭]

সমাধান ঃ $(-5,7)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে ।

বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = | কেন্দ্রের y-স্থানাঙ্ক |= |7|= 7

বৃত্তের সমীকরণ, $(x+5)^2+(y-7)^2=7^2$

$$\Rightarrow x^2+10x+25+y^2-14y+49=49$$
$$x^2+y^2+10x-14y+25=0$$

4(c) $(2, 3)$ বিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি y-অক্ষ হতে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

[রা.'০১; কু.'০৯]

সমাধান ঃ $(2, 3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = | কেন্দ্রের কোটি| = | 3 | = 3

বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9$

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

এখন বৃত্তটিকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g = -2, f = -3, c = 4$

বৃত্তটি দ্বারা y–অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ

$2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{9-4} = 2\sqrt{5}$

5. একটি বৃত্ত (– 6, 5), (– 3, – 4) এবং (2, 1) বিন্দু তিনটি দ্বারা অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।[ব.'০২;দি.'০৯]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(-6 \quad 5)$ ও $(-3, -4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x+6)(x+3) + (y-5)(y+4) +$
$k\{(x+6)(5+4) - (y-5)(-6+3)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 + 9x + 18 + y^2 - y - 20 +$
$k(9x + 54 + 3y - 15) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 9x - y - 2 +$
$k(9x + 3y + 39) = 0 \qquad (1)$

(1) বৃত্তটি (2, 1) বিন্দুগামী বলে,

$4 + 1 + 18 - 1 - 2 + k(18 + 3 + 39) = 0$

$\Rightarrow 60k = -20 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 + 9x - y - 2 - 3x - y - 13 = 0$

$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{6}{2}, -\frac{-2}{2}\right)$

$= (-3, 1)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{9+1-(-15)} = 5$

[MCQ : $\dfrac{(x+6)(x+3)+(y-5)(y+4)}{9(x+6)-(-3)(y-5)}$

$= \dfrac{(2+6)(2+3)+(1-5)(1+4)}{9(2+6)-(-3)(1-5)}$]

6. (a) $2x - y = 3$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (3 , – 2) ও (– 2 , 0) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢ.'০৮; ব. '১০,'১২; সি. '০৬; য. '০৭; কু. '০৭; রা.'১০,'১৩]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(3 \quad -2)$ ও $(-2, 0)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x-3)(x+2) + (y+2)(y-0) +$
$k\{(x-3)(-2-0) - (y+2)(3+2)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 + y^2 + 2y +$
$k(-2x + 6 - 5y - 10) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-1-2k)x + (2-5k)y - 6 - 4k = 0 \qquad (1)$

বৃত্তটির কেন্দ্র $\left(\frac{1+2k}{2}, -\frac{2-5k}{2}\right)$, $2x - y = 3$ রেখার উপর অবস্থিত।

$2\frac{1+2k}{2} - \left(-\frac{2-5k}{2}\right) = 3$

$\Rightarrow 2 + 4k + 2 - 5k = 6$

$\Rightarrow -k = 2 \Rightarrow k = -2$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2 + y^2 + (-1+4)x + (2+10)y - 6 + 8 = 0$

$x^2 + y^2 + 3x + 12y + 2 = 0$ (Ans.)

6(b) $x + 2y - 10 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (3 , 5) ও (6, 4) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢা.'০২; রা.'০৮; য.'১২]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(3 \quad 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x-3)(x-6) + (y-5)(y-4) +$
$k\{(x-3)(5-4) - (y-5)(3-6)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 + y^2 - 9y + 20 +$
$k(x - 3 + 3y - 15) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-9+k)x + (-9+3k)y + 38 - 18k = 0 \quad \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $\left(\frac{9-k}{2}, \frac{9-3k}{2}\right)$, $x + 2y - 10 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$\frac{9-k}{2} + 2.\frac{9-3k}{2} = 10$

$\Rightarrow 9 - k + 18 - 6k = 20$

$\Rightarrow -7k = -7 \Rightarrow k = 1$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 38 - 18 = 0$

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ (Ans.)

6(c) $x + 2 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(-7, 1)$ ও $(-1, 3)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৭;মা.'০৫]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(-7 \quad 1)$ ও $(-1, 3)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x + 7)(x + 1) + (y - 1)(y - 3) +$
$k\{(x + 7)(1-3) - (y - 1)(-7 + 1)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 + 8x + 7 + y^2 - 4y + 3 +$
$k(-2x - 14 + 6y - 6) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (8 - 2k)x + (-4 + 6k)y$
$+ 10 - 20k = 0 \quad \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(-\frac{8-2k}{2}, -\frac{-4+6k}{2}) =$ $(k - 4, 2 - 3k)$, $x + 2 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$k - 4 + 2 = 0 \Rightarrow k = 2$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2 + y^2 + (8 - 4)x + (-4 + 12)y +$
$10 - 40 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x + 8y - 30 = 0$ (Ans.)

6.(d) $x + 2y + 3 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(-1, -1)$ ও $(3, 2)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'১৩; সি.'১০]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(-1, -1)$ ও $(3, 2)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x + 1)(x - 3) + (y + 1)(y - 2) +$
$k\{(x + 1)(-1-2) - (y + 1)(-1 - 3)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 + y^2 - y - 2 +$
$k(-3x - 3 + 4y + 4) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-2 - 3k)x + (-1 + 4k)y$
$- 5 + k = 0 \quad \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(\frac{2+3k}{2}, \frac{1-4k}{2})$,

$x + 2y + 3 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$$\frac{2+3k}{2} + 2 . \frac{1-4k}{2} + 3 = 0$$

$\Rightarrow 2 + 3k + 2 - 8k + 6 = 0$

$\Rightarrow -5k = -10 \Rightarrow k = 2$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2 + y^2 + (-2-6)x + (-1 + 8)y - 5 + 2 = 0$

$x^2 + y^2 - 8x + 7y - 3 = 0$ (Ans.)

7.(a) x-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।[কু., রা., ব.'০৩; দি.'১০; সি.১৪]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(3 \quad 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x - 3)(x - 6) + (y - 5)(y - 4) +$
$k\{(x-3)(5-4) - (y - 5)(3 - 6)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 + y^2 - 9y + 20 +$
$k(x - 3 + 3y - 15) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-9+k)x + (-9 + 3k)y$
$+ 38 - 18k = 0 \quad \cdots (1)$

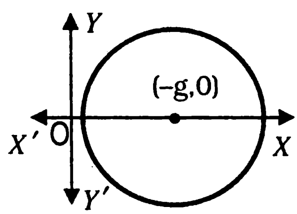
(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(\frac{k-9}{2}, \frac{9-3k}{2})$, x-অক্ষের উপর অবস্থিত। $\therefore \frac{9-3k}{2} = 0 \Rightarrow k = 3$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2 + y^2 + (-9 + 3)x + 38 - 54 = 0$

$x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি ঃ



ধরি, কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0 \cdots \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি (3, 5) ও (6,4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$9 + 25 + 6g + c = 0$

$\Rightarrow 34 + 6g + c = 0 \quad \cdots (2)$ এবং

$36 + 16 + 12g + c = 0$

$\Rightarrow 52 + 12g + c = 0 \cdots \cdots (3)$

$(3) - (2) \Rightarrow 18 + 6g = 0 \Rightarrow g = -3$

(2) হতে পাই, $34 - 18 + c = 0 \Rightarrow c = -16$

(1) এ g ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2+y^2-6x-16=0$ (Ans.)

7(b) y-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (3 , 0) ও (– 4, 1) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৫]

সমাধান : ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ,

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত।

$g=0$

বৃত্তটি (3 , 0) ও (– 4, 1) বিন্দুগামী।

$9+0+c=0 \Rightarrow c=-9$ এবং

$16+1+2f+c=0$

$\Rightarrow 17+2f-9=0 \Rightarrow 2f=-8 \Rightarrow f=-4$

(1) এ g , f ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2+y^2-8y-9=0$

7. (c) y-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত মূলবিন্দু এবং (p , q) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[রা. '০২; সি. '০৪; য. '০৫; ঢা.'১২; রা.,চ.'১৩]

সমাধান : ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ,

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত।

$g=0$

বৃত্তটি মূলবিন্দু (0, 0) ও (p, q) বিন্দুগামী।

$0+0+c=0 \Rightarrow c=0$ এবং

$p^2+q^2+2qf+0=0$

$$\Rightarrow f=-\frac{p^2+q^2}{2q}$$

(1) এ g , f ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2+y^2+2\left(-\frac{p^2+q^2}{2q}\right)y=0$$

$q(x^2+y^2)=(p^2+q^2)y$ (Ans.)

7(d) (3 , 0) ও (7, 0) বিন্দুগামী এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'০২, '০৬; ব.'০২,'১১]

সমাধানঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি (3 0) ও (7, 0) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x-3)(x-7)+(y-0)(y-0)+$
$k\{(x-3)(0-0)-(y-0)(3-7)\}=0$

$\Rightarrow x^2-10x+21+y^2+k(4y)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-10x+4ky+21=0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(5,-2k)$ এবং ব্যাসার্ধ

$=\sqrt{5^2+(-2k)^2-21}=\sqrt{4+4k^2}$

(1) বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে ।

$\sqrt{4+4k^2}=|5|$

$\Rightarrow 4+4k^2=25 \Rightarrow 4k^2=21$

$$\Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$$x^2+y^2-10x+4\left(\pm\frac{\sqrt{21}}{2}\right)y+21=0$$

$x^2+y^2-10x\pm 2\sqrt{21}y+21=0$

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি , y-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2+(y-k)^2=h^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-2hx-2ky+k^2=0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি (3 , 0) ও (7, 0) বিন্দুগামী ।

$9-6h+k^2=0 \cdots \cdots (2)$ এবং

$49-14h+k^2=0 \cdots \cdots (3)$

$(2)-(3) \Rightarrow -40+8h=0 \Rightarrow h=5$

(2) এ h = 5 বসিয়ে পাই, $9-30+k^2=0$

$\Rightarrow k^2=21 \Rightarrow k=\pm\sqrt{21}$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2+y^2-10x\pm 2\sqrt{21}y+21=0$

7(e) (1,1) ও (2,2) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1; বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এরূপ দুইটি বৃত্ত পাওয়া যাবে। [য.'০৩]

সমাধান খলিফার নিয়মানুসারে ধরি, (1 1) ও (2, 2) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x-1)(x-2)+(y-1)(y-2)+$
$k\{(x-1)(1-2)-(y-1)(1-2)\}=0$

$\Rightarrow x^2-3x+2+y^2-3y+2+$
$k(-x+1+y-1)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+(-3-k)x+(-3+k)y$
$+4=0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $\left(\frac{k+3}{2},\frac{3-k}{2}\right)$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(\frac{k+3}{2})^2 + (\frac{3-k}{2})^2 - 4}$

$= \sqrt{\frac{k^2+6k+9+k^2-6k+9-16}{4}}$

$= \sqrt{\frac{2(k^2+1)}{4}} = \sqrt{\frac{k^2+1}{2}}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{\frac{k^2+1}{2}} = 1 \Rightarrow k^2 + 1 = 2$

$\Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, যখন $k = 1$

এবং $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$, যখন $k = -1$

8.(a) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে 2 একক দূরে x-অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং যার ব্যাসার্ধ 5 একক। [য.'০৫; ব.'১১]

সমাধান নির্ণেয় বৃত্তটি মূলবিন্দু থেকে 2 একক দূরে x-অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে বলে তা (2 , 0) ও (– 2 , 0) দিয়ে অতিক্রম করে।

খলিফার নিয়মানুসারে ধরি, (2 0) ও (– 2, 0) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x-2)(x+2) + (y-0)(y-0) +$
$k\{(x-2)(0-0) - (y-0)(2+2)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4 + y^2 + k(-4y) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4ky - 4 = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(0, 2k)$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{0^2 + (2k)^2 + 4} = \sqrt{4k^2 + 4}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{4k^2+4} = 5 \Rightarrow 4k^2 + 4 = 25$

$\Rightarrow 4k^2 = 21 \Rightarrow k = \pm\frac{\sqrt{21}}{2}$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

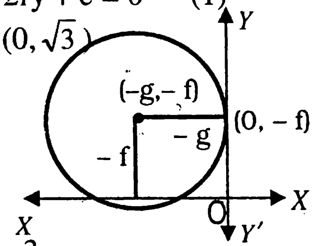
$x^2 + y^2 - 4(\pm\frac{\sqrt{21}}{2})y - 4 = 0$

$x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{21}y - 4 = 0$ (Ans.)

8(b) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (– 1, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৬; য.'১০]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (1)$



(1) বৃত্তটি y-অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$f^2 = c$ এবং

$-f = \sqrt{3}$

$\Rightarrow f = -\sqrt{3}$

$c = (-\sqrt{3})^2 = 3$

আবার, (1) বৃত্তটি(– 1, 0) বিন্দুগামী।

$1 + 0 - 2g + 0 + c = 0$

$\Rightarrow 1 - 2g + 3 = 0 \Rightarrow g = 2$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$

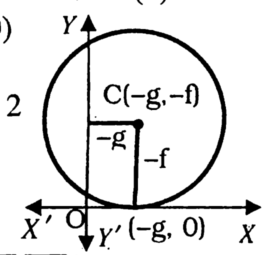
২য় অংশ ঃ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f) = (-2, \sqrt{3})$

এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4+3-3} = 2$

8(c) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (– 1, 9) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [য.'০০; চ.'০৩]

সমাধানঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots (1)$



(1) বৃত্তটি x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$g^2 = c$ এবং $-g = 2$

$\Rightarrow g = -2$

$c = (2)^2 = 4$

আবার, (1) বৃত্তটি (– 1, 9) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$1 + 81 - 2g + 18f + c = 0$

$\Rightarrow 82 + 4 + 18f + 4 = 0$

[c ও g এর মান বসিয়ে।]

$\Rightarrow 18f = -90 \Rightarrow f = -5$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ (Ans.)

[MCQ এর জন্য,

$\frac{(x-2)^2 + (y-0)^2}{y} = \frac{(-1-2)^2 + (9-0)^2}{9}$]

আবার, (1) বৃত্তটি y-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা কর্তন করে।

$$2\sqrt{f^2-c} = 6 \Rightarrow \sqrt{f^2-16} = 3$$

$$\Rightarrow f^2 - 16 = 9 \Rightarrow f^2 = 25 \Rightarrow f = \pm 5$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2+y^2-8x \pm 10y + 16 = 0 \text{ (Ans.)}$$

9.(c) (– 4 , 3) ও (12 , – 1) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের ছেদাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
[রা.'০০; ব.'০৪; কু.'০৮; দি.'১০]

সমাধান ঃ (– 4 , 3) ও (12 , – 1) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x+4)(x-12)+(y-3)(y+1)=0$$

$$\Rightarrow x^2-8x-48+y^2-2y-3=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-8x-2y-51=0 \text{ (Ans.)}$$

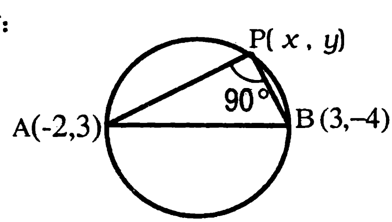
২য় অংশ ঃ $x^2+y^2-8x-2y-51=0$ কে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $g=-4$, $f=-1$ এবং $c=-51$

y-অক্ষের ছেদাংশের দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{f^2-c}$

$$= 2\sqrt{1^2-(-51)} = 2\sqrt{52} = 4\sqrt{13}$$

9(d) প্রমাণ কর যে, (–2 , 3) ও (3 , – 4) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ $(x+2)(x-3)+(y-3)(y+4)=0$

প্রমাণ:



ধরি, ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু দুইটি A(–2, 3) ও B(3 , – 4) এবং P(x,y) পরিধির উপর যেকোন একটি বিন্দু।

PA এবং PB যোগ করি। যেহেতু AB ব্যাস, $\angle APB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। $\therefore \angle APB = 90°$

(AP রেখার ঢাল) $\times$ (BP রেখার ঢাল) $= -1$

$$\Rightarrow \frac{y-3}{x+2} \times \frac{y+4}{x-3} = -1$$

$$\Rightarrow (y-3)(y+4) = -(x+2)(x-3)$$

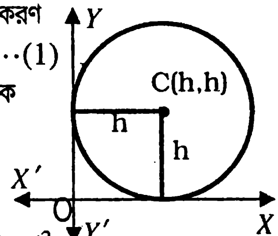
$$(x+2)(x-3)+(y-3)(y+4)=0$$

(Proved)

10. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (1, 8) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।
[চ.'০১,'০৭; য.'০৩ ; মা.বো.'০৬; সি.'০৯; কু.'১২]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \cdots (1)$$



(1) বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে।

$k = h$ এবং $r = |h|$

(1) হতে পাই,

$$(x-h)^2+(y-h)^2=|h|^2$$

$$\Rightarrow x^2-2hx+h^2+y^2-2hy+h^2=h^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2hx-2hy+h^2=0 \cdots (2)$$

যা (1, 8) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$$1+64-2h-16h+h^2=0$$

$$\Rightarrow h^2-18h+65=0$$

$$\Rightarrow (h-5)(h-13)=0 \quad \therefore h = 5, 13$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2-10x-10y+25=0$ এবং

$x^2+y^2-26x-26y+169=0$

11.(a) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (6 , 0) এবং যা $x^2+y^2-4x=0$ বৃত্ত ও $x=3$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। [ঢা.'০৭; রা.'০৭,'১৪; ব. '০৮,'১২; চ.'০৮; মা.'০৯,'১৪; য.'১৩; দি.'১৪] [ঢা.'০৩]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত ও রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2-4x+k(x-3)=0$

$$\Rightarrow x^2+y^2+(-4+k)x-3k=0 \cdots (1)$$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $\left(-\frac{k-4}{2}, 0\right)$.

প্রশ্নমতে, বৃত্তের কেন্দ্র (6 , 0).

$$-\frac{k-4}{2} = 6 \Rightarrow k-4=-12 \quad \therefore k=-8$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2+y^2+(-4-8)x-3.(-8)=0$$

$$x^2+y^2-12x+24=0 \text{ (Ans.)}$$

11(b) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু এবং $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্ত ও $2x + 3y + 1 = 0$ রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়।
[য.'০২; সি.'০২; ব.'০৭; চ.'১১]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত এবং রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 + k(2x + 3y + 1) = 0 \cdots\cdots (1)$

(1) বৃত্তটি মূলবিন্দু (0, 0) দিয়ে অতিক্রম করে।

$-4 + k = 0 \Rightarrow k = 4$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 + 8x + 12y + 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ (Ans.)

11.(c) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (0,3) এবং যা $x^2 + y^2 - 4y = 0$ বৃত্ত ও $y - 2 = 0$ রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়। **[চ.'০২]**

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত ও রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4y + k(y - 2) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-4 + k)y - 2k = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(0, -\frac{k-4}{2})$.

প্রশ্নমতে, বৃত্তের কেন্দ্র (0, 3).

$-\frac{k-4}{2} = 3 \Rightarrow k - 4 = -6 \therefore k = -2$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + (-4 - 2)y - 2.(-2) = 0$

$x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$ (Ans.)

12. (a) দেখাও যে, A(1 , 1) বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত । A বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
[ঢা.'১০; য.'০৭; কু.,রা.,'০৯;দি.'১২;ব.'১৩; চ.'১৪]

প্রমাণ : ধরি, $f(x,y) \equiv x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$

$f(1, 1) = 1^2 + 1^2 + 4.1 + 6.1 - 12$

$= 1 + 1 + 4 + 6 - 12 = 0$

A(1 , 1) বিন্দুটি প্রদত্ত বৃত্তের উপর অবস্থিত।

২য় অংশ: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র$=(-\frac{4}{2}, -\frac{6}{2}) = (-2, -3)$

ধরি, A(1 1) বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর B(α , β).

$\frac{1+\alpha}{2} = -2 \Rightarrow 1 + \alpha = -4 \Rightarrow \alpha = -5$

এবং $\frac{1+\beta}{2} = -3 \Rightarrow 1 + \beta = -6 \Rightarrow \beta = -7$

ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 5 , – 7)

12 (b) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি (2 , 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[কু.'০১]**

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$

এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (-\frac{-8}{2}, -\frac{6}{2}) = (4, -3)$

(2 , 5) বিন্দু ও কেন্দ্র (4 , –3) দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ ব্যাসের সমীকরণ, $\frac{x-2}{2-4} = \frac{y-5}{5+3}$

$\Rightarrow 8x - 16 = -2y + 10 \Rightarrow 8x + 2y = 26$

$4x + y = 13$ (Ans.)

12 (c) $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$ বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[প্র.ভ.প.' ৮৯, '০৪]**

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 5bx + 12by = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(-\frac{-5b}{2}, -\frac{12b}{2}) = (\frac{5b}{2}, 6b)$

(1) বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ $y = \frac{6b}{5b/2}x \Rightarrow y = \frac{12}{5}x$

$12x + 5y = 0$ (Ans.)

12 (d) (1,1) বিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র $x + y = 3$ রেখার উপর প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত। **[কু.'০৮]**

সমাধান : ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$c = g^2 \cdots (2)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র (– g , –f), $x + y = 3$ রেখার উপর প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$-g - f = 3 \Rightarrow f = -g - 3 \quad \cdots (3)$

আবার, বৃত্তটি (1, 1) বিন্দুগামী ।

$1 + 1 + 2g + 2f + c = 0$

$\Rightarrow 2 + 2g + 2(-g-3) + g^2 = 0$ [(2) ও (3) দ্বারা]

$\Rightarrow 2 + 2g - 2g - 6 + g^2 = 0$

$\Rightarrow g^2 = 4 \Rightarrow g = -2$

[প্রথম চতুর্ভাগে g ও f ঋণাত্মক ।]

এখন (2) হতে পাই, $c = (-2)^2 = 4$ এবং

(3) হতে পাই, $f = 2 - 3 = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

12(e) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (1,1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $y = 3x-7$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি. '০৮; রা. ০৮; কু. '০৭; য. '০৬; চ.'০৯; ঢা.'১১]

সমাধান : ধরি, $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{10})^2 = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 2(x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2) = 5 \cdots (1)$

$y = 3x-7$ রেখার উপর (1) বৃত্তের কেন্দ্র (h , k) অবস্থিত। $\therefore \ k = 3h - 7 \cdots (2)$

(1) বৃত্ত (1, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$2(1 - 2h + h^2 + 1 - 2k + k^2) = 5$

$\Rightarrow 2h^2 + 2k^2 - 4h - 4k = 1$

$\Rightarrow 2h^2 + 2(3h-7)^2 - 4h - 4(3h-7) = 1$ [(2) দ্বারা]

$\Rightarrow 2h^2 + 2(9h^2 - 42h + 49) - 4h - 12h + 28 - 1 = 0$

$\Rightarrow 2h^2 + 18h^2 - 84h + 98 - 4h - 12h + 28 - 1 = 0$

$\Rightarrow 20h^2 - 100h + 125 = 0$

$\Rightarrow 4h^2 - 20h + 25 = 0 \Rightarrow (2h-5)^2 = 0$

$\Rightarrow h = \frac{5}{2}$. (2) হতে পাই, $k = 3\frac{5}{2} - 7 = \frac{1}{2}$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$2x^2 - 4.\frac{5}{2}x + 2.\frac{25}{4} + 2y^2 - 4\frac{1}{2}y + 2.\frac{1}{4} = 5$

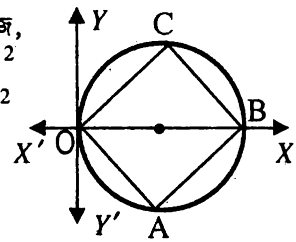
$\Rightarrow 8x^2 - 40x + 50 + 8y^2 - 8y + 2 = 20$

$\Rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x - 8y + 32 = 0$

$x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$ (Ans.)

13.(a) $4\sqrt{2}$ বাহুবিশিষ্ট বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং এর বিপরীত শীর্ষটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত। ঐ বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[য.'০৪]**

সমাধান ধরি, OABC বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দু O(0,0)এবং x-অক্ষের উপর এর বিপরীত শীর্ষ B অবস্থিত।



OAB সমকোণী ত্রিভুজে,

$OB^2 = OA^2 + AB^2$

$= (4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2$

[$\because$ বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $= 4\sqrt{2}$]

$= 32 + 32 = 64$

$OB = \pm 8 =$ B বিন্দুর ভুজ।

B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\pm 8, 0)$

OB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ

$(x-0)(x \pm 8) + (y-0)(y-0) = 0$

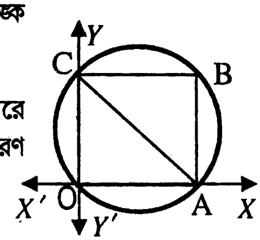
$\Rightarrow x^2 \pm 8x + y^2 = 0$

$x^2 + y^2 \pm 8x = 0$ (Ans.)

13(b) b বাহুবিশিষ্ট OABC একটি বর্গ। OA ও OC কে অক্ষ ধরে দেখাও যে, বর্গটির পরিবৃত্তের সমীকরণ হবে $x^2 + y^2 = b(x+y)$.

[ঢা.'০৫; রা.'১০; ব.'১৩]

প্রমাণ : b বাহুবিশিষ্ট OABC বর্গের x ও y- অক্ষ বরাবর যথাক্রমে OA ও OC অবস্থিত হলে A ও C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (b,0) ও (0 ,b).



বর্গের কর্ণ AC কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত পরিবৃত্তের সমীকরণ

$(x-b)(x-0) + (y-0)(y-b) = 0$

$\Rightarrow x^2 - bx + y^2 - by = 0$

$x^2 + y^2 = b(x+y)$ (Provsd)

14 (a) এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের প্রত্যেকটির কেন্দ্র (3 , 4) এবং যারা $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। **[য.'১০]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্ত $x^2+y^2=9 \cdots$ (i) এর কেন্দ্র $A(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1=3$

ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র $B(3,4)$ এবং ব্যাসাধ r_2

বৃত্তদ্বয় পস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে,

$$r_1+r_2=AB \Rightarrow 3+r_2=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$\Rightarrow r_2=2$

আবার, বৃত্তদ্বয় পস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে,

$$r_2-r_1=AB \Rightarrow r_2-3=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$r_2=8$

নির্ণেয় বৃত্ত দুইটির সমীকরণ,

$(x-3)^2+(y-4)^2=2^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-6x-8y+9+16-4=0$

$x^2+y^2-6x-8y+21=0$ এবং

$(x-3)^2+(y-4)^2=8^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-6x-8y+9+16-64=0$

$x^2+y^2-6x-8y-39=0$

14.(b) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c}$ **হলে দেখাও যে,** $x^2+y^2+2ax+c=0$ **ও** $x^2+y^2+2by+c=0$ **বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করবে।** [মা.'০৭]

প্রমাণ : $x^2+y^2+2ax+c=0$ বৃত্তের কেন্দ্র

$A(-a,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1=\sqrt{a^2-c}$

$x^2+y^2+2by+c=0$ বৃত্তের কেন্দ্র

$B(0,-b)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_2=\sqrt{b^2-c}$

বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করলে,

$AB=|r_1 \pm r_2|$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=|\sqrt{a^2-c} \pm \sqrt{b^2-c}|$

$\Rightarrow a^2+b^2=a^2-c+b^2-c$

$\pm 2\sqrt{(a^2-c)(b^2-c)}$ [বর্গ করে।]

$2c=\pm 2\sqrt{(a^2-c)(b^2-c)}$

$\Rightarrow c^2=(a^2-c)(b^2-c)$ [বর্গ করে।]

$\Rightarrow c^2=a^2b^2-b^2c-a^2c+c^2$

$\Rightarrow b^2c+a^2c=a^2b^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c}$

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c}$ হলে, প্রদত্ত রেখা দুইটি স্পর্শ করবে।

15. $x=a(\cos\theta-1)$ **এবং** $y=a(\sin\theta+1)$ **হলে, বৃত্তের কার্তেসীয় সমীকরণ, ব্যাসার্ধ ও কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।**

সমাধান: $x=a(\cos\theta-1)=a\cos\theta-a$

$\Rightarrow a\cos\theta=x-a$

আবার, $y=a(\sin\theta+1)=a\sin\theta+a$

$\Rightarrow a\sin\theta=y-a$

এখন, $a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta=(x-a)^2+(y-a)^2$

$\therefore (x-a)^2+(y-a)^2$, যা বৃত্তটির কার্তেসীয় সমীকরণ । বৃত্তটির ব্যাসার্ধ a এবং কেন্দ্র $(a,-a)$

16. প্রদত্ত শর্ত সিদ্ধ করে এরূপ বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর:

সমাধান: (a) $(4, 30^0)$ কেন্দ্র ও 5 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$5^2=r^2+4^2-2r.4\cos(\theta-30^0)$

$\Rightarrow 25=r^2+16-8r\cos(\theta-\frac{\pi}{6})$

$r^2-8r\cos(\theta-\frac{\pi}{6})-9=0$

(b) $(3,\frac{3\pi}{2})$ কেন্দ্র ও 2 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$2^2=r^2+3^2-2r.3\cos(\theta-\frac{3\pi}{2})$

$\Rightarrow 4=r^2+9-6r\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)$

$\Rightarrow r^2+5+6r\cos\theta=0$

(c) মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ a. তাহলে বৃত্তের পোলার সমীকরণ, $a^2=r^2+3^2-2r.3\cos(\theta-0^0)$

$\Rightarrow a^2=r^2+9-6r\cos(\theta \cdots \cdots$ (1)

(1) বৃত্তটি পোল $(0, 0^0)$ বিন্দুগামী বলে, $a^2=0^2+9-6.0.\cos 0^0 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=3.$

নির্ণেয় সমীকরণ, $9=r^2+9-6r\cos\theta$

$\Rightarrow r^2=6r\cos\theta \Rightarrow r=6\cos\theta$

(d) মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ p. তাহলে বৃত্তের পোলার সমীকরণ, $p^2 = r^2 + r_1^2 - 2r r_1 \cos(\theta - \theta_1) \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি পোল $(0, 0^0)$, $(a, 0^0)$, $(b, 90^0)$ বিন্দুগামী।

$p^2 = 0^2 + r_1^2 - 2.0.r_1 \cos(0^0 - \theta_1)$

$\Rightarrow p^2 = r_1^2 \Rightarrow p = r_1 \cdots \cdots (2)$

$p^2 = a^2 + r_1^2 - 2.a.r_1 \cos(0^0 - \theta_1)$

$\Rightarrow a^2 = 2a r_1 \cos\theta_1$, $[\because p = r_1]$

$\Rightarrow a = 2r_1 \cos\theta_1 \cdots \cdots (3)$

এবং $p^2 = b^2 + r_1^2 - 2.b.r_1 \cos(90^0 - \theta_1)$

$\Rightarrow b^2 = 2b r_1 \sin\theta_1$, $[\because p = r_1]$

$\Rightarrow b = 2r_1 \sin\theta_1$

(1) হতে পাই, $r_1^2 = r^2 + r_1^2$
$-2r r_1 (\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1)$

$r^2 = r(\cos\theta .2r_1\cos\theta_1 + \sin\theta .2r_1 \sin\theta_1)$

$r = a\cos\theta + b\sin\theta$

17. বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর:

(a) **সমাধান:** প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ $r^2 - 4\sqrt{3}r\cos\theta - 4r\sin\theta + 15 = 0$ কে পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g = -2\sqrt{3}$, $f = -2$, $c = 15$.

$$\sqrt{g^2 + f^2} = \sqrt{12+4} = 4, \tan^{-1}\frac{-f}{-g} =$$

$$\tan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

নির্ণেয় কেন্দ্র $(4, \frac{\pi}{6})$ এবং ব্যাসার্ধ =

$$\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{12+4-15} = 1$$

(b) $r = 2a\cos\theta \Rightarrow r^2 - 2ra\cos\theta = 0$ কে পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g = -a$, $f = 0$, $c = 0$.

$$\sqrt{g^2 + f^2} = \sqrt{a^2 + 0} = a, \tan^{-1}\frac{-f}{-g} =$$

$$\tan^{-1}\frac{0}{a} = \tan^{-1}0 = 0^0$$

নির্ণেয় কেন্দ্র $(a, 0^0)$ এবং ব্যাসার্ধ =

$$\sqrt{a^2 + 0^2 - 0} = a$$

18. (a) একটি বৃত্তের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর, যা মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 7 একক দূরে অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 4 একক হলে, বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র (7, 0) এবং ব্যাসার্ধ = 4.

বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$4^2 = r^2 + 7^2 - 2r.7\cos(\theta - 0)$

$\Rightarrow 16 = r^2 + 49 - 14r\cos\theta$

$r^2 - 14r\cos\theta + 33 = 0$ (Ans.)

(b) একটি বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর, যা মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 8 একক দূরে অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 5 একক হলে, বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(8, \frac{\pi}{2})$ এবং ব্যাসার্ধ = 5.

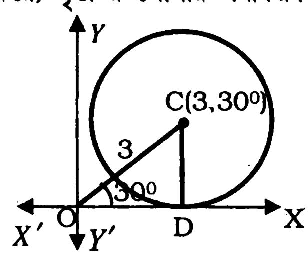
বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$5^2 = r^2 + 8^2 - 2r.8\cos(\theta - \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow 25 = r^2 + 64 - 16r\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$r^2 - 16r\sin\theta + 39 = 0$.

(c) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 30^0)$ এবং বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে; বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধানঃ প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(3, 30^0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= CD = 3\sin 30^0 = \frac{3}{2}$

বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

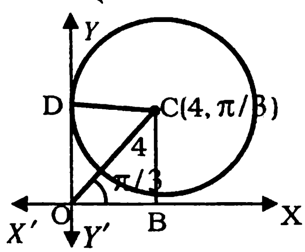
$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = r^2 + 3^2 - 2r.3\cos(\theta - 30^0)$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} = r^2 + 9 - 6r\cos(\theta - 30^0)$$

$$\Rightarrow 9 = 4r^2 + 36 - 24r\cos(\theta - 30^0)$$

$$4r^2 - 24r\cos(\theta - 30^0) + 27 = 0$$

(d) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4, \frac{\pi}{3})$ এবং বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে; বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধানঃ প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(4, \frac{\pi}{3})$ এবং ব্যাসার্ধ $= OB = 4\cos\frac{\pi}{3} = 4.\frac{1}{2} = 2$

বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$$(2)^2 = r^2 + 4^2 - 2r.4\cos(\theta - \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow 4 = r^2 + 16 - 8r\cos(\theta - \frac{\pi}{3})$$

$$r^2 - 8r\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) + 12 = 0$$

19. যদি বৃত্তের উপরস্থ (4,1) বিন্দুটি $(1 + 5\cos\theta, -3 + 5\sin\theta)$ দ্বারা প্রকাশিত হয়, তবে এ বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমতে

$$4 = 1 + 5\cos\theta, \ 1 = -3 + 5\sin\theta$$

$$\Rightarrow 5\cos\theta = 3, \ 5\sin\theta = 4$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5}, \ \sin\theta = \frac{4}{5}$$

আমরা জানি, প্রদত্ত বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের জন্য θ এর মান $180°$ বৃদ্ধি পায়।

অপর প্রান্তের জন্য,

$$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta = -\frac{3}{5} \text{ এবং}$$

$$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta = -\frac{4}{5}$$

(4,1) বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক

$$(1 + 5\times(-\frac{3}{5}), -3 + 5\times(-\frac{4}{5}))$$

$$= (1 - 3, -3 - 4) = (-2, -7) \text{ (Ans.)}$$

16(a) $r^2 - 4\sqrt{3}r\cos\theta - 4r\sin\theta + 15 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$ ও প্রদত্ত সমীকরণ $r^2 - 4\sqrt{3}r\cos\theta - 4r\sin\theta + 15 = 0$ তুলনা কওে পাই, $g = -2\sqrt{3}$, $f = -2$, $c = 15$

$$\sqrt{g^2 + f^2} = \sqrt{12 + 4} = 4,$$

$$\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{12 + 4 - 15} = 1$$

$$\tan^{-1}\frac{f}{g} = \tan^{-1}\frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \pi + \tan^{-1}\sqrt{3}$$

$$= \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\sqrt{g^2 + f^2}, \tan^{-1}\frac{f}{g})$

$= (4, \frac{7\pi}{6})$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = 1$

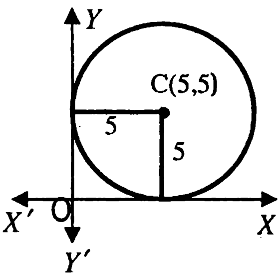
16(b) $(4, 30^0)$ কেন্দ্র ও 5 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$$5^2 = r^2 + 4^2 - 2r\times 4\times\cos(\theta - 30^0)$$

$$\Rightarrow r^2 - 8r\cos(\theta - \frac{\pi}{6}) - 9 = 0$$

কাজ

১। এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা প্রত্যেক অক্ষরেখাকে মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 5 একক দূরত্বে স্পর্শ করে।



সমাধানঃ নির্ণেয় বৃত্তটি প্রত্যেক অক্ষরেখাকে মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 5 একক দূরত্বে স্পর্শ করে।

বৃত্তটির কেন্দ্র (5, 5)

এবং ব্যাসার্ধ $= |5| = 5.$

বৃত্তটির সমীকরণ $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 25$

$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ (Ans.)

২। দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে $(3, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_1(2,-3)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{4+9-8} = \sqrt{5}$

$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_2(5, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{25+9-14} = \sqrt{20}$ $= 2\sqrt{5}$

ধরি, প্রদত্ত বিন্দু $P(3, -1)$.

এখন $C_1P = \sqrt{(2-3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{5} = r_1$

এবং $C_2P = \sqrt{(5-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5} = r_2$

$C_1C_2 = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{9+36}$

$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = C_1P + C_2P$

বৃত্তের কেন্দ্র দুইটি এবং $(3, -1)$ বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অতএব, প্রদত্ত বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে $(3, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে। (প্রমাণিত)

৩। দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 18 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 2y = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 18 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $A(3, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{9+9+18}$ $= 6$

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $A(0, 1)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{0+1+0} = 1$

এখন, $AB = \sqrt{(3-0)^2 + (-3-1)^2} = 5$

এবং $r_1 - r_2 = 6 - 1 = 5 = AB$

বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

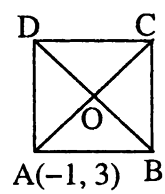
৪। বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(6, \frac{\pi}{4})$ এবং ব্যাসার্ধ 5

৫। দেখাও যে, $r = a\cos\theta$ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $(\frac{a}{2}, 0)$ ও ব্যাসার্ধ $\frac{a}{2}$.

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. ABCD বর্গের পরিবৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 39 = 0$. $A(-1, 3)$ হলে B, C ও D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ABCD বর্গের পরিবৃত্ত $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 39 = 0$ এর কেন্দ্র $(\frac{5}{2}, -4)$ হবে ABCD বর্গের AC ও BD কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O.



ধরি, C এর স্থানাঙ্ক (α, β)

AC এর মধ্যবিন্দু $(\frac{5}{2}, -4)$।

$\therefore \frac{\alpha-1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \alpha = 5 + 1 = 6$

এবং $\frac{\beta+3}{2} = -4 \Rightarrow \beta = -8 - 3 = -11$

C এর স্থানাঙ্ক $(6, -11)$.

ধরি, AB বাহুর ঢাল m এবং AB বাহু AC কর্ণের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে ।

$\frac{m+2}{1-2m} = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow m+2 = 1-2m$

$\Rightarrow 3m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$

AB ও DC বাহুর ঢাল $\frac{1}{3}$.

A(− 1, 3) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ

$y-3 = -\frac{1}{3}(x+1) \Rightarrow 3y-9 = -x-1$

$\Rightarrow x+3y-8=0 \cdots\cdots (1)$

C(6 , − 11) বিন্দুগামী (1) এর উপর লম্ব BC এর সমীকরণ $3x - y = 18+11$

$\Rightarrow 3x-y-29=0 \cdots\cdots(2)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু B এর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{-87-8}{-1-9}, \frac{-24+29}{-1-9}) = (\frac{19}{2}, -\frac{1}{2})$

A(− 1, 3) বিন্দুগামী AB এর লম্ব AD এর সমীকরণ $3x-y=-3-3$

$\Rightarrow 3x-y+6=0 \cdots (3)$

C(6 , − 11) বিন্দুগামী (3) এর উপর লম্ব CD এর সমীকরণ $x+3y = 6-33=-27$

$\Rightarrow x+3y+27=0 \quad \cdots(4)$

(3) ও (4) এর ছেদবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{-27-18}{9+1}, \frac{6-81}{9+1}) = (-\frac{9}{2}, -\frac{15}{2})$

2.(a) ABC সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু A(0 , 0) ও B(6 , 0) । ABC ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, C শীর্ষের স্থানাঙ্ক (α, β). ABC সমবাহু ত্রিভুজ বলে $AC^2 = BC^2 = AB^2$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = (\alpha-6)^2+\beta^2$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = \alpha^2-12\alpha+36+\beta^2$

$\Rightarrow 12\alpha = 36 \Rightarrow \alpha = 3$

আবার, $AC^2 = AB^2 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = 6^2$

$\Rightarrow 9+\beta^2 = 36 \Rightarrow \beta^2 = 27 \Rightarrow \beta = \pm 3\sqrt{3}$

C শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(3, \pm 3\sqrt{3})$.

ধরি, A(0,0) দিয়ে যায় এরূপ পরিবৃত্তের সমীকরণ

$x^2+y^2+2gx+2fy=0 \cdots(1)$

(1) বৃত্ত B(6,0) এবং $C(3, \pm 3\sqrt{3})$ বিন্দুগামী।

$36+12g=0 \Rightarrow g=-3$ এবং

$9+27+6g \pm 6\sqrt{3} f = 0$

$36 - 18 \pm 6\sqrt{3} f = 0 \Rightarrow \pm 6\sqrt{3} f = 18$

$\Rightarrow f = \pm\sqrt{3}$

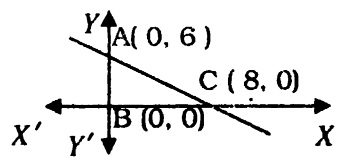
(1) এ g ও f এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2+y^2-6x \pm 2\sqrt{3} y = 0$ (Ans.)

2 (b) $3x + 4y = 24$ সরলরেখা এবং অক্ষ দুইটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $3x+4y=24 \Rightarrow \frac{x}{8}+\frac{y}{6}=1$

সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A(0, 6), B(0, 0) ও C(8, 0).



পরিবৃত্ত ঃ ABC ত্রিভুজে, $\angle ABC = 90^\circ$ বলে, A ও C বিন্দুদ্বয় ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু।

নির্ণেয় পরিবৃত্তের সমীকরণ,

$(x-0)(x-8)+(y-6)(y-0)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-8x-6y=0$ (Ans.)

অন্তঃবৃত্ত ঃ এখানে, $a = BC = |0-8| = 8$,

$b = AC = \sqrt{6^2+8^2} = 10,$

$c = AB = |6-0| = 6$

$\delta_{ABC} = 0(0-0)-6(0-8) = 48$

এবং $a+b+c = 8+10+6 = 24$ এখন $AC^2 = BC^2$

অন্তঃবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$= (\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c})$

$= (\frac{8\times0+10\times0+6\times8}{24}, \frac{8\times6+10\times0+6\times0}{24})$

$= (2, 2)$

অন্তঃব্যাসার্ধ $= \frac{|\delta_{ABC}|}{a+b+c} = \frac{48}{24} = 2$

নির্ণেয় অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ,

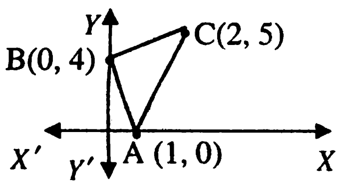
$(x-2)^2+(y-2)^2 = 2^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 4$

$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ (Ans.)

2(c) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি A(1 , 0) , B(0 , 4) ও C(2 , 5) । ABC ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ



পরিকেন্দ্র: A(1, 0) ও B(0, 4) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)(x-0)+(y-0)(y-4) = k\{(x-1)(0-4)-(y-0)(1-0)\}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - 4y = k(-4x + 4 - y)$, যা C(2, 5) বিন্দুগামী।

$2^2 + 5^2 - 2 - 4\times5 = k(-4\times2 + 4 - 5)$

$\Rightarrow 4 + 25 - 2 - 20 = k(-8 + 4 - 5)$

$\Rightarrow -9k = 7 \Rightarrow k = -7/9$

প্রদত্ত বিন্দুগামী ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 - x - 4y = -\frac{7}{9}(-4x + 4 - y)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - (1+\frac{28}{9})x - (4+\frac{7}{9})y + \frac{28}{9} = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{37}{9}x - \frac{43}{9}y + \frac{28}{9} = 0$

ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{37}{18}, \frac{43}{18})$

ভরকেন্দ্র : AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{1}{2}, 2)$ এবং C(2, 5) শীর্ষগামী মধ্যমার সমীকরণ,

$(x-2)(5-2) - (y-5)(2-\frac{1}{2}) = 0$

$\Rightarrow 3x - 6 - \frac{3}{2}y + \frac{15}{2} = 0$

$\Rightarrow 6x - 12 - 3y + 15 = 0$

$\Rightarrow 2x - y + 1 = 0 \cdots$ (i)

আবার, BC এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, \frac{9}{2})$ এবং A(1, 0) শীর্ষগামী মধ্যমার সমীকরণ,

$(x-1)(0-\frac{9}{2}) - (y-0)(1-1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$; (i) হতে পাই, $y = 2 + 1 = 3$

ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র (1, 3).

লম্বকেন্দ্র : AB বাহুর সমীকরণ

$(x-1)(0-4) - (y-0)(1-0) = 0$

$\Rightarrow -4x + 4 - y = 0 \Rightarrow 4x + y - 4 = 0$

AB বাহুর উপর লম্ব এবং C(2 , 5) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $x - 4y = 2 - 20$

$\Rightarrow x = 4y - 18$ (ii)

আবার, BC বাহুর সমীকরণ

$(x-0)(4-5) - (y-4)(0-2) = 0$

$\Rightarrow -x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow x - 2y + 8 = 0$

BC বাহুর উপর লম্ব এবং A(1 , 0) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $2x + y = 2$

$\Rightarrow 2(4y - 18) + y = 2$, [(ii) দ্বারা]

$\Rightarrow 8y - 36 + y = 2$

$\Rightarrow 9y = 38 \Rightarrow y = 38/9$

(ii) হতে পাই, $x = 4\times\frac{38}{9} - 18 = -\frac{10}{9}$

ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র $(-\frac{10}{9}, \frac{38}{9})$

প্রশ্নমালা IV B

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

1. $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তে $y = mx + c$ রেখাটি স্পর্শক হওয়ার শর্ত, $c = \pm r\sqrt{m^2+1}$ ।

$x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$ এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-mr}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

2. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

3. বহিঃস্থ যেকোন বিন্দু (x_1, y_1) হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ, $(xx_1 + yy_1 + gx + gx_1 + fy + fy_1 + c)^2 = (x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c)(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)$

4. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$(y_1 + f)x - (x_1 + g)y + gy_1 - fx_1 = 0.$

5. (x_1, y_1) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য,

$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$

6. (x_1, y_1) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শ জ্যা এর সমীকরণ,

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

7. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তেরর কোন জ্যা এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হলে তার সমীকরণ,

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

8. $S_1 = 0$ ও $S_2 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $S_1 - S_2 = 0$.

9. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর প্রতিবিম্ব

(a) x অক্ষের সাপেক্ষে $x^2+y^2 + 2gx-2fy + c=0$

(b) y অক্ষের সাপেক্ষে $x^2+y^2 - 2gx+2fy + c=0$

(c) $ax + by + c= 0$) রেখার সাপেক্ষে ঃ এ রেখার সাপেক্ষে প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ এর প্রতিবিম্ব (g', f') কে কেন্দ্র এবং প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধকে ব্যাসার্ধ ধরে অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় প্রতিবিম্ব।

প্রশ্নমালা IV B

1. (a) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + c = 0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 হলে, c এর মান নিচের কোনটি?

$\text{Sol}^n : \sqrt{2^2+3^2-c} = 3 \Rightarrow c = 13 - 9 = 4$

(b) Sol^n :

(i) সংশোধন : x-অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ 6

$2\sqrt{r^2-k^2} = 2\sqrt{5^2-4^2} = 6$

(ii) $\sqrt{2^2+3^2-c} > 0 \Rightarrow c < 13$

(iii) সংশোধন : (1, 1) বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 3x + 5y - c = 0$ বৃত্তের ভিতরে অবস্থান করলে $c > 10$ হবে।

$1^2 + 1^2 + 3.1 + 5.1 - c < 0 \Rightarrow c > 10.$

(c) Sol^n : $r = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

(d) Sol^n : $(x-h)^2 + (y-k)^2 = k^2$

(e) Sol^n : উভয় অক্ষ কে স্পর্শ করার শর্ত $g^2 = f^2 = c$

$k = \pm 4, c = 16$

(f) Sol^n : বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী বলে, $c = 0$ এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করে বলে, $f^2 = c = 0$.

(g) Sol^n : (0,1) ও (1,0) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু স্থানাঙ্ক $\left(\frac{0+1}{2}, \frac{1+0}{2}\right)$.

(h) Sol^n : (i) $AB = 5 - 3 = 2$

(ii) স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{1^2+1^2+2-6+11} = 3$

(iii) জ্যা এর সমীকরণ, $x.2 + y.3 = 2^2 + 3^2$

$\Rightarrow 2x + 3y = 13.$

(i) Sol^n : $r = a\cos\theta \Rightarrow r^2 = a.r\cos\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - ax = 0 \therefore$ কেন্দ্র $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

(j) Sol^n : সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 - (x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2) = 0$

$\Rightarrow 2x + 1 = 0$

$x - 3y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। পরবর্তী তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(k) Sol^n : ব্যাসার্ধ $= \sqrt{3^2 + 4^2 - 15} = \sqrt{10}$,

y-অক্ষের খন্ডিতাংশ $= 2\sqrt{4^2 - 15} = 2$.

(*l*) Sol^n : $\frac{|3 - 3(-4) - k|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{10}$

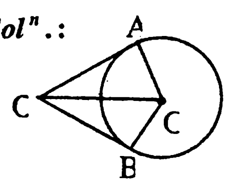
$\Rightarrow |15 - k| = 10 \Rightarrow k - 15 = \pm 10 \Rightarrow k = 5, 25$

(m) Sol^n : $x - 3y = 5$ স্পর্শকের সমান্তরাল বৃত্তটির অপর স্পর্শকের সমীকরণ, $x - 3y = 25$.

(n) ***Sol^n*.:** $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 1/3 = 0$
কেন্দ্র $= (-2/2, -4/2) = (-1, -2)$ $\therefore$ Ans. D

(o) ***Sol^n*.:** বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
(4, 3) ও (– 1, 3) এর দূরত্ব $= |4 + 1| = 5$
(4, 3) ও (9, 3) এর দূরত্ব $= |4 - 9| = 5$
(4, 3) ও (0, 3) এর দূরত্ব $= |4 - 0| = 4$
(0, 3) বৃত্তের উপর অবস্থিত নয়। Ans. C

(p) ***Sol^n*.:**



বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
$OA = OB = \sqrt{0 + c} = \sqrt{c}$
OABC চতুর্ভূজের ক্ষেত্রফল
$= 2\times OAC$ সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= 2\times\frac{1}{2}(OA\times AC)$

$= \sqrt{c}\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{c(g^2 + f^2 - c)}$

Ans. B

2(a) (3 , 7) ও (9 , 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হয়েছে। দেখাও যে, $x + y = 4$ রেখাটি ঐ বৃত্তের একটি স্পর্শক। স্পর্শবিন্দুটি নির্ণয় কর। [চ.'০৫]

প্রমাণ ঃ (3 7) ও (9 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 3)(x - 9) + (y - 7)(y - 1) = 0$
$\Rightarrow x^2 - 12x + 27 + y^2 - 8y + 7 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0$ (1)
প্রদত্ত রেখা $x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x \cdots(2)$
(1) এ y এর মান বসিয়ে পাই,
$x^2 + (4 - x)^2 - 12x - 8(4 - x) + 34 = 0$
$\Rightarrow x^2 + 16 - 8x + x^2 - 12x - 32 + 8x + 34 = 0$
$\Rightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$
$\Rightarrow (x - 3)^2 \Rightarrow x = 3$
$(2) \Rightarrow y = 4 - 3 = 1$
$\therefore$ (2) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের সাথে শুধুমাত্র (3,1) বিন্দুতে মিলিত হয়।

$x + y = 4$ রেখাটি বৃত্তটির একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দু (3,1)

বিকল্প পদ্ধতি ঃ (3 7) ও (9 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 3)(x - 9) + (y - 7)(y - 1) = 0$
$\Rightarrow x^2 - 12x + 27 + y^2 - 8y + 7 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0$ (1)
(1) বৃত্তের কেন্দ্র (6 , 4) এবং
ব্যাসার্ধ $= \sqrt{36 + 16 - 34} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
বৃত্তের কেন্দ্র (6, 4) থেকে প্রদত্ত রেখা $x + y = 4$ অর্থাৎ $x + y - 4 = 0$ (2) এর লম্ব দূরত্ব

$= \frac{|6 + 4 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

২য় অংশ ঃ (2) রেখার উপর লম্ব এবং বৃত্তের কেন্দ্র (6, 4) দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ রেখার সমীকরণ,

$x - y = 6 - 4 \Rightarrow x - y = 2$ (3)
$(2) + (3) \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$
(3) হতে পাই, $3 - y = 2 \Rightarrow y = 1$.
(2) ও (3) রেখার ছেদবিন্দু (3 1) যা নির্ণের স্পর্শ বিন্দু।

2(b) দেখাও যে, $y - 3x = 10$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10$ বৃত্তকে সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব.'০১]

প্রমাণ প্রদত্ত রেখা $y - 3x = 10$ হতে $y = 3x + 10 \cdots(1)$ এর মান প্রদত্ত বৃত্তে বসিয়ে পাই, $x^2 + (3x + 10)^2 = 10$

$\Rightarrow x^2 + 9x^2 + 60x + 100 - 10 = 0$

$\Rightarrow 10x^2 + 60x + 90 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 = 0$

$\Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$(1) \Rightarrow y = 3.(-3) + 10 = -9 + 10 = 1$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তের সাথে শুধুমাত্র $(-3,1)$ বিন্দুতে মিলিত হয়।

প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তকে সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে এবং বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(-3,1)$.

2(c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে। c এর মান ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. '০৪; ঢা. '০৪,'০৭'১১; রা. '০৫, '১২; য.'০৫, '০৮,'১১ ; চ.'০৫,'০৮; মা.বো.'০৫;]

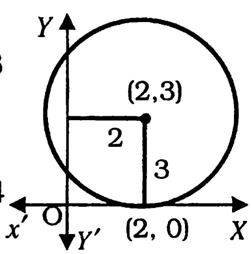
সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(2, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4 + 9 - c} = \sqrt{13 - c}$

x-অক্ষ থেকে বৃত্তের কেন্দ্র $(2 , 3)$ এর দূরত্ব $= |3| = 3$

বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\sqrt{13 - c} = 3$

$\Rightarrow 13 - c = 9 \quad c = 4$



আবার, বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্রের ভুজ 2.

স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2 , 0)$.

2(d) দেখাও যে, $x - 3y = 5$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৭; মা.'০৩]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0 \cdots(1)$ বৃত্তের কেন্দ্র $(3 , -4)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{9 + 16 - 15} = \sqrt{10}$

বৃত্তের কেন্দ্র $(3 , -4)$ থেকে $x - 3y = 5$ অর্থাৎ $x - 3y - 5 = 0$ (2) রেখার লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|3 - 3\times(-4) - 5|}{\sqrt{1+9}} = \dfrac{|3 + 12 - 5|}{\sqrt{1+9}}$

$= \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ ।

প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

২য় অংশ ঃ $x - 3y - 5 = 0$ স্পর্শকের উপর লম্ব এবং বৃত্তের কেন্দ্র $(3 , -4)$ দিয়ে অতিক্রমকারী নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ $3x + y = 3\times3 - 4 = 9 - 4$

$3x + y = 5$ (Ans.)

3.(a) $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে k এর মান নির্ণয় কর।

[য.'০১; ব.'০৩,'০৭; রা.'০৬; সি.'১২]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 = 10x$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 10x = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(5 , 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{5^2} = 5$

বৃত্তের কেন্দ্র $(5 , 0)$ থেকে $3x + 4y = k$ অর্থাৎ $3x + 4y - k = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|15 - k|}{\sqrt{9 + 16}}$

$= \dfrac{|15 - k|}{5}$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\dfrac{|15 - k|}{5} = 5 \Rightarrow |k - 15| = 25$

$\Rightarrow k - 15 = \pm 25 \quad \therefore k = 40$ বা, -10

3(b) দেখাও যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়। [কু. '০৬,'০৮; ঢা. '০৮; রা.'১১; সি. '০৪; ব. '০৫,'০৯; চ. '০৮,'১০; মা.'০৩; দি.'০৯; য.'১১]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(a , 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{a^2} = a$

বৃত্তের কেন্দ্র $(a , 0)$ থেকে $lx + my = 1$ অর্থাৎ $lx + my - 1 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|la - 1|}{\sqrt{l^2 + m^2}}$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\frac{|la-1|}{\sqrt{l^2+m^2}} = a$$

$\Rightarrow |la-1|^2 = a^2(l^2+m^2)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow (la-1)^2 = a^2l^2 + a^2m^2$

$\Rightarrow l^2a^2 - 2la + 1 = a^2l^2 + a^2m^2$

$a^2m^2 + 2al = 1$ (Showed)

3. (c) $px + qy = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। দেখাও যে, (p, q) বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত। [য.'০৬,'১২ ;কু.'০৪,'০৫,'১৩; রা.'০৫,'১৩; ঢা.'০৬; য.'০৬; ব.'০৮]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র (0 , 0) এবং ব্যাসার্ধ = a

বৃত্তের কেন্দ্র (0 , 0) থেকে $px + qy = 1$ অর্থাৎ $px + qy - 1 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \frac{|-1|}{\sqrt{p^2+q^2}}$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\left|\frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2}}\right| = a \Rightarrow p^2+q^2 = \frac{1}{a^2}$ এ থেকে স্পর্শ যে, (p , q) বিন্দুটি $x^2+y^2 = \frac{1}{a^2}$ বৃত্তের সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(p , q) বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত।

3(d) $ax + 2y - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে a এর মান নির্ণয় কর। [রা.'০৪]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (4,1) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4^2+1^2-4} = \sqrt{13}$

বৃত্তের কেন্দ্র (4 , 1) থেকে $ax + 2y - 1 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{4a+2-1}{\sqrt{a^2+4}}\right| = \left|\frac{4a+1}{\sqrt{a^2+4}}\right|$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\left|\frac{4a+1}{\sqrt{a^2+4}}\right| = \sqrt{13}$$

$\Rightarrow (4a+1)^2 = 13(a^2+4)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 16a^2 + 8a + 1 = 13a^2 + 52$

$\Rightarrow 3a^2 + 8a - 51 = 0$

$\Rightarrow 3a^2 + 17a - 9a - 51 = 0$

$\Rightarrow a(3a+17) - 3(3a+17) = 0$

$\Rightarrow (3a+17)(a-3) = 0$

$a = 3$ বা, $-17/3$

3(e) $3x + by - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। b এর মান নির্ণয় কর। [রা. '০৮,'১২; কু.'০৪,'১০; সি. '০৮; মা.'০৫, য.'১১; চ.'১১; ব.'১২; ঢা.'১৩]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (4, 1) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4^2+1^2-4} = \sqrt{13}$

বৃত্তের কেন্দ্র (4 , 1) থেকে $3x + by - 1 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{12+b-1}{\sqrt{9+b^2}}\right| = \left|\frac{11+b}{\sqrt{9+b^2}}\right|$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\left|\frac{11+b}{\sqrt{9+b^2}}\right| = \sqrt{13}$$

$\Rightarrow (11+b)^2 = 13(9+b^2)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 121 + 22b + b^2 = 117 + 13b^2$

$\Rightarrow 12b^2 - 22b - 4 = 0$

$\Rightarrow 6b^2 - 11b - 2 = 0$

$\Rightarrow 6b^2 - 12b + b - 2 = 0$

$\Rightarrow 6b(b-2) + 1(b-2) = 0$

$\Rightarrow (b-2)(6b+1) = 0$

$b = 2$ বা, $-1/6$

3(f) (4 , 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্ত $3x + 4y - 1 = 0$ ও $x - 3 = 0$ রেখা দুইটিকে স্পর্শ করে। r বৃত্তটির ব্যাসার্ধ হলে দেখাও যে, $r^2 - 20r + 40 = 0$.

প্রমাণ : ধরি, r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \cdots (1)$

(1) বৃত্ত (4 , 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$(4-h)^2 + (1-k)^2 = r^2 \cdots (2)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) হতে $3x + 4y - 1 = 0$ ও $x - 3 = 0$ রেখা দুইটির লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে

$\frac{|3h+4k-1|}{\sqrt{9+14}} = \frac{|3h+4k-1|}{5}$ ও $\frac{|h-3|}{\sqrt{1}}$

(1) বৃত্তটি প্রদত্ত রেখা দুইটিকে স্পর্শ করলে ,

$|h-3| = r \Rightarrow h-3 = \pm r \Rightarrow h = \pm r + 3$

এবং $\frac{|3h+4k-1|}{5} = r \Rightarrow 3h + 4k - 1 = \pm 5r$

$\Rightarrow 3(\pm r + 3) + 4k - 1 = \pm 5r \quad [\therefore h = \pm r + 3]$

$\Rightarrow \pm 3r + 9 + 4k - 1 = \pm 5r$

$\Rightarrow 4k + 8 = \pm 2r \Rightarrow 2k = \pm r - 4$

$\Rightarrow k = \frac{\pm r - 4}{2}$

(2) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$(4 \mp r - 3)^2 + (1 - \frac{\pm r - 4}{2})^2 = r^2$

$\Rightarrow (1 \mp r)^2 + \frac{(2 \mp r + 4)^2}{4} = r^2$

$\Rightarrow 4(1 \mp 2r + r^2) + (36 \mp 12r + r^2) = 4r^2$

$\Rightarrow 4 \mp 8r + 4r^2 + 36 \mp 12r + r^2 = 4r^2$

$\Rightarrow r^2 \mp 20r + 40 = 0$

কিন্তু বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $r>0$ বলে r এর কোন ধনাত্মক বাস্তব মান $r^2 + 20r + 40 = 0$ কে সিদ্ধ করে না।

$r^2 - 20r + 40 = 0$ (Showed)

4.(a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব । স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৫; রা.'০৭; ঢা.'১০]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (1,2) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1^2 + 2^2 + 4} = 3$

ধরি, $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব স্পর্শকের সমীকরণ $4x + 3y + k = 0 \cdots \quad (1)$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (1,2) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\frac{|4.1 + 3.2 + k|}{\sqrt{16+9}} = 3 \Rightarrow |4 + 6 + k| = 15$

$\Rightarrow k + 10 = \pm 15 \therefore k = 5, -25$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $4x + 3y - 25 = 0$, $4x + 3y + 5 = 0$

4(b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক $3x - 4y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি.'০১]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (1,2) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1^2 + 2^2 + 4} = 3$

ধরি, $3x - 4y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ $3x - 4y + k = 0 \cdots \quad (1)$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (1,2) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\frac{|3.1 - 4.2 + k|}{\sqrt{9+16}} = 3 \Rightarrow |3 - 8 + k| = 15$

$\Rightarrow k - 5 = \pm 15 \therefore k = 20, -10$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $3x - 4y + 20 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$

5.(a) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক অক্ষ দুইটি হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০১,'০৯; রা.'০৪; য.'০৭; কু.'১১]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (–2 4) এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{2^2 + 4^2 - 2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

ধরি, অক্ষ দুইটি হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে এরূপ স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ অর্থাৎ $x + y - a = 0 \cdots \cdots (1)$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (–2 , 4) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসাধ $3\sqrt{2}$ এর সমান হবে।

$\frac{|-2 + 4 - a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow |2 - a| = 6$

$\Rightarrow a - 2 = \pm 6 \quad a = 8, -4$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $x + y + 4 = 0$, $x + y - 8 = 0$

5(b) $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ.'১০; ব.'১১; কু.'য,'১২]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = 4^2$ বৃত্তের কেন্দ্র (0 ,0) এবং ব্যাসার্ধ = 4

ধরি, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ

$$y = \tan 30^0 \times x + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \times x + c$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{3}y + \sqrt{3}c = 0 \cdots (1)$$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(0, 0)$ থেকে 'এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ 4 এর সমান হবে।

$$\frac{|\sqrt{3}c|}{\sqrt{1+3}} = 4 \Rightarrow |\sqrt{3}c| = 8 \Rightarrow c = \pm \frac{8}{\sqrt{3}}$$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $x - \sqrt{3}y \pm 8 = 0$

6.(a) $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$ বৃত্তের এটি ব্যাস মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। ব্যাসটির সমীকরণ এবং মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৪]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 5bx + 12by = 0 \cdots (1)$ বৃত্তের কেন্দ্র $(\frac{5b}{2}, -6b)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{\frac{25b^2}{4} + 36b^2}$

$$= \sqrt{\frac{25b^2 + 144b^2}{4}} = \sqrt{\frac{169b^2}{4}} = \frac{13b}{2}$$

মূলবিন্দু $(0, 0)$ এবং কেন্দ্র $(\frac{5b}{2}, -6b)$ দিয়ে অতিক্রমকারী নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ $y = \frac{-6b}{5b/2}x$

$\Rightarrow 5y = -12x \quad 12x + 5y = 0$

২য় অংশ ঃ মূলবিন্দুগামী স্পর্শক মূলবিন্দুগামী ব্যাসের উপর লম্ব। অতএব, মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ $5x - 12y = 0$

6(b) দেখাও যে, $x + 2y = 17$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 10$ বৃত্তের একটি স্পর্শক । এ বৃত্তের যে ব্যাসটি স্পর্শ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'০২]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 10$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 10 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(1,3)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1+9+10} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

বৃত্তের কেন্দ্র $(1, 3)$ থেকে $x + 2y = 17$ অর্থাৎ $x + 2y - 17 = 0$ রেখার লম্বদূরত্ব $= \frac{|1+6-17|}{\sqrt{1+4}}$

$= \frac{|-10|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ ।

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের একটি স্পর্শক ।

২য় অংশ ঃ স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাস স্পর্শকের উপর লম্ব এবং কেন্দ্র দিয়ে অতিক্রম করে। অতএব, $x + 2y = 17$ স্পর্শকের উপর লম্ব এবং কেন্দ্র $(1,3)$ দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ ব্যাসের সমীকরণ $2x - y = 2.1 - 3 = -1$

$2x - y + 1 = 0$

7(a) $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$ বৃত্তের $(4, -11)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. '০২; রা.'০৯]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$ বৃত্তের $(4, -11)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$x.4 + y.(-11) - \frac{3}{2}(x + 4) + 5(y - 11) - 15 = 0$$

[$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ সূত্র দ্বারা ।]

$\Rightarrow 8x - 22y - 3x - 12 + 10y - 110 - 30 = 0$

$5x - 12y - 152 = 0$ (Ans.)

7(b) $x^2 + y^2 = 45$ বৃত্তের $(6, -3)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 35 = 0$ বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক পরস্পর লম্ব। [প্র.ভ.প.'০০]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 = 45$ বৃত্তের $(6, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $x.6 + y.(-3) = 45$

$\Rightarrow 2x - y = 15 \Rightarrow y = 2x - 15 \cdots (1)$

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 35 = 0 \quad \cdots (2)$

বৃত্তে $y = 2x - 15$ বসিয়ে পাই,

$x^2 + (2x - 15)^2 - 4x + 2(2x - 15) - 35 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 60x + 225 - 4x + 4x - 30 - 35 = 0$

$\Rightarrow 5x^2 - 60x + 160 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 8) = 0$

$\Rightarrow x = 4, 8$

(1) হতে পাই, $y = 2.4 - 15 = 8 - 15 = -7$

এবং $y = 2.8 - 15 = 16 - 15 = 1$

$\therefore$ (1) রেখাটি (2) বৃত্তকে $A(4, -7)$ ও $B(8, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 35 = 0$

(2) বৃত্তের A(4, –7) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ, x.4 + y.(–7) –2(x + 4) + (y – 7) –35 = 0

$\Rightarrow$ 4x – 7y – 2x – 8 + y – 7 – 35 = 0

$\Rightarrow$ 2x –6y –50 = 0 $\Rightarrow$ x –3y – 25 = 0 ,যার ঢাল = $-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$

আবার (2) বৃত্তের B(8, 1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

x.8 + y.1 –2(x + 8) + (y + 1) –35 = 0

$\Rightarrow$ 8x + y – 2x – 16 + y + 1 – 35 = 0

$\Rightarrow$ 6x + 2y–50 = 0 $\Rightarrow$ 3x + y – 25= 0, যার ঢাল = $-\frac{3}{1}=-3$

এ ঢালদ্বয়ের গুণফল = $\frac{1}{3}\times -3 = -1$

A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক পরস্পর লম্ব।

8.(a) $x^2+y^2=20$ বৃত্তের 2 ভুজবিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'০৫; সি.'০৯; রা.'১০; দি.'১১]

সমাধান ঃ ধরি, 2 ভুজবিশিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, β), যা প্রদত্ত বৃত্ত $x^2+y^2=20$ এর উপর অবস্থিত।

$4+\beta^2=20 \Rightarrow \beta^2=16 \Rightarrow \beta = 4, -4$

2 ভুজবিশিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2,4) এবং (2,–4)

প্রদত্ত বৃত্তের (2,4) এবং (2,–4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ x.2 + y.4 = 20 $\Rightarrow$ x + 2y = 10 এবং x.2 + y.(–4) = 20 $\Rightarrow$ x – 2y = 10

8(b) $x^2+y^2=13$ বৃত্তের 2 কোটিবিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৮]

সমাধান ঃ ধরি, 2 কোটিবিশিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, 2), যা প্রদত্ত বৃত্ত $x^2+y^2=13$ এর উপর অবস্থিত।

$\alpha^2+4=13 \Rightarrow \alpha^2=9 \Rightarrow \alpha = 3, -3$

2 ভুজবিশিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3,2) এবং (–3,2)

প্রদত্ত বৃত্তের (3,2) এবং (–3,2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ x.3 + y.2 = 13 $\Rightarrow$ 3x + 2y = 13 এবং x.(–3) + y.2 =13 $\Rightarrow$ 3x – 2y +13 = 0

9.(a) (1, – 1) বিন্দু থেকে $2x^2+2y^2-x+3y+1=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[য.'০২; কু.'১৩; চ.'১১]

সমাধান ঃ (1, – 1) বিন্দু থেকে $2x^2+2y^2-x+3y+1=0$ অর্থাৎ $x^2+y^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=0$

বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$=\sqrt{1^2+(-1)^2-\frac{1}{2}.1+\frac{3}{2}(-1)+\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{4-3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ একক।

9. (b) (3, – 3) বিন্দু থেকে $x^2+y^2+8x+4y-5=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ এবং দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[য.'০১]**

সমাধান ঃ $x^2+y^2+8x+4y-5=0$ বৃত্তের কেন্দ্র (– 4, –2) এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{16+4+5}=5$

ধরি, (3, – 3) বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ y + 3 = m(x –3) অর্থাৎ mx – y – 3m – 3 = 0

এ রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (– 4, –2) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{17}$ এর সমান হবে।

$$\left|\frac{-4m+2-3m-3}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 5$$

$\Rightarrow (-7m-1)^2 = 25(m^2+1)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 49m^2+14m+1=25m^2+25$

$\Rightarrow 24m^2+14m-24=0$

$\Rightarrow 12m^2+7m-12=0$

$\Rightarrow 12m^2+16m-9m-12=0$

$\Rightarrow 4m(3m+4)-3(3m+4)=0$

$\Rightarrow (3m+4)(4m-3)=0$

$m=-\frac{4}{3},\frac{3}{4}$

স্পর্শকের সমীকরণ $y+3=\frac{3}{4}(x-3)$

$\Rightarrow 4y+12=3x-9 \therefore 3x-4y=21$ এবং

$y+3=-\frac{4}{3}(x-3) \Rightarrow 3y+9=-4x+12$

$4x+3y=3$

২য় অংশ ঃ (3, –3) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$$= \sqrt{(3)^2 + (-3)^2 + 8.3 + 4.(-3) - 5}$$
$$= \sqrt{9 + 9 + 24 - 12 - 5} = \sqrt{25} = 5 \text{ একক।}$$

10.(a) (1, – 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $2x - y - 4 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ব.'০৩; সি.'০৯; দি.'১০; য.'১২]

সমাধান ঃ বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র (1, – 3) হতে $2x - y - 4 = 0$ স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব

$$= \frac{|2.1 + 3 - 4|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(1, – 3) কেন্দ্র ও $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = (\frac{1}{\sqrt{5}})^2$

$$\Rightarrow 5(x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9) = 1$$
$$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 50 - 1 = 0$$
$$5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 49 = 0$$

10(b) $\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $x + y + 1 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং যাদের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত। [সি.'০৩,'১১]

সমাধান ঃ ধরি, x-অক্ষের উপর অবস্থিত বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (α , 0).

$x + y + 1 = 0$ রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (α , 0) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{2}$ এর সমান হবে।

$$\frac{|\alpha + 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |\alpha + 1| = 2$$
$$\Rightarrow \alpha + 1 = \pm 2 \;\therefore \alpha = 1, -3$$

বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র (1 , 0) এবং (– 3, 0)

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 1 = 2$$

$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ (Ans.) এবং

$$(x + 3)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$$
$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 = 2$$

$x^2 + y^2 + 6x + 7 = 0$ (Ans.)

10(c) (p , q) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ হবে $px + qy = 0$. [কু.'০৩; য.'০৭]

সমাধান ঃ নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র (p , q) হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব = $\sqrt{p^2 + q^2}$

(p , q) কেন্দ্র ও $\sqrt{p^2 + q^2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x - p)^2 + (y - q)^2 = p^2 + q^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 = p^2 + q^2$$

$x^2 + y^2 - px - qx = 0$ (Ans.)

২য় অংশ ঃ $x^2 + y^2 - px - qx = 0$ বৃত্তে মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$x.0 + y.0 - \frac{1}{2}p(x + 0) - \frac{1}{2}q(y + 0) = 0$$
$$\Rightarrow -px - qy = 0 \;\therefore px + qy = 0 \text{ (Proved)}$$

11.(a) $y = 2x$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তের একটি জ্যা। উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।[কু.'০৪; চ.'০৩; দি.'০৯; য.'১০]

সমাধান ঃ ধরি, $y = 2x$ অর্থাৎ $2x - y = 0 \cdots (1)$ রেখা এবং $x^2 + y^2 - 10x = 0$ বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 - 10x + k(2x - y) = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-10 + 2k)x - ky = 0 \cdots (2)$$

(2) বৃত্তের কেন্দ্র $(-\frac{-10 + 2k}{2}, -\frac{-k}{2})$

$$= (5 - k, \frac{k}{2})$$

প্রদত্ত রেখাটি (2) বৃত্তের ব্যাস বলে এর কেন্দ্র $2x - y = 0$ রেখার উপর অবস্থিত হবে।

$$2(5 - k) - \frac{k}{2} = 0 \Rightarrow 20 - 4k - k = 0$$
$$\Rightarrow 5k = 20 \Rightarrow k = 4$$

(2) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 + (-10 + 8)x - 4y = 0$$

$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি : $y = 2x \cdots (1)$ হতে y এর মান প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x^2 + (2x)^2 = 10x$

$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 10x = 0 \Rightarrow 5x^2 - 10x = 0$$
$$\Rightarrow 5x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

(1) হতে পাই, $y = 2.0 = 0$ এবং $y = 2.2 = 4$

প্রদত্ত বৃত্তের (1) জ্যা এর প্রান্তবিন্দু দুইটি (0,0) এবং (2,4).

(0,0) এবং (2,4) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 0)(x-2) + (y - 0)(y - 4) = 0$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ (Ans.)

11. (b) (3 , 7) ও (9 , 1) বিন্দু দুইটিকে একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, বৃত্তটি $x - y + 4 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে। [চ.'০৫; কু.'০৯; ঢা.'১২]

সমাধান ঃ (3 , 7) ও (9 1) বিন্দু দুইটিকে একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 3)(x - 9) + (y - 7)(y -1) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 27 + y^2 - 8y + 7 = 0$

$x^2 + y^2 -12x - 8y + 34 = 0 \cdots (1)$

২য় অংশ ঃ (1) বৃত্তের কেন্দ্র (6 , 4) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{36 + 16 - 34} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

এখন কেন্দ্র (6 , 4) থেকে $x - y + 4 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{6-4+4}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ ।

বৃত্তটি প্রদত্ত রেখাকে স্পর্শ করে।

12.(a) (3, –1) বিন্দুগামী একটি বৃত্ত x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৫; কু.'১২]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (1)$

(1) বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$c = g^2 \quad (2)$

(1) বৃত্তটি (2, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$4 + 0 + 4g + 0 + c = 0$

$\Rightarrow 4 + 4g + g^2 = 0 \; [\because c = g^2]$

$\Rightarrow (g + 2)^2 = 0 \Rightarrow g + 2 = 0 \Rightarrow g = -2$

(2) হতে পাই, $c = (-2)^2 = 4$

আবার (1) বৃত্তটি (3, –1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে বলে, $9 + 1 + 6g - 2f + c = 0$

$\Rightarrow 10 + 6.(-2) - 2f + 4 = 0$

$\Rightarrow 14 - 12 - 2f = 0 \Rightarrow 2 - 2f = 0 \Rightarrow f = 1$

(1) এ g, f ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

২য় অংশ ঃ ধরি, মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ $y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0$, $m \neq 0$.

এ রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (2, –1) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{4+1-4} = 1$ এর সমান হবে।

$\left|\dfrac{2m+1}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 1 \Rightarrow (2m + 1)^2 = m^2 + 1$

$\Rightarrow 4m^2 + 4m + 1 = m^2 + 1$

$\Rightarrow 3m^2 + 4m = 0 \Rightarrow 3m + 4 = 0$

$\Rightarrow m = -\dfrac{4}{3}$

মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ $y = -\dfrac{4}{3}x \quad \therefore 4x + 3y = 0$ (Ans.)

12 (b) b ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত যার কেন্দ্রের ভুজ ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক , x-অক্ষ এবং $3y = 4x$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে ; তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, b ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = b^2 \cdots (1)$; এখানে h, k উভয়ই ধনাত্মক ।

(1) বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $b = |$ কেন্দ্রের কোটি $| = |k| = k$

আবার, (1) বৃত্ত $3y = 4x$ অর্থাৎ $4x - 3y = 0$ রেখাকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (h, k) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ b এর সমান হবে ।

$\dfrac{|4h - 3k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = b \Rightarrow |4h - 3b| = 5b$

$\Rightarrow 4h - 3b = \pm 5b$

$4h = 8b$ অথবা, $4h = -2b$

$\Rightarrow h = 2b$ অথবা, $h = -\dfrac{b}{2}$; কিন্তু $h>0$.

$h = 2b$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$(x - 2b)^2 + (y - b)^2 = b^2$

$\Rightarrow x^2 - 4bx + 4b^2 + y^2 - 2by + b^2 + b^2 = 0$

$x^2 + y^2 - 4bx - 2by + 4b^2 = 0$ (Ans.)

12 (c) $2x + 3y - 5 = 0$ রেখাটি (3 , 4) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শক। বৃত্তটি y-অক্ষের যে অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ নির্ণয় কর। [য.'০৪; কু.'০৭]

সমাধান ঃ বৃত্তের ব্যাসার্ধ r = কেন্দ্র (3 , 4) হতে প্রদত্ত স্পর্শকের লম্বদূরত্ব $= \frac{|6+12-5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$

$= \sqrt{13}$

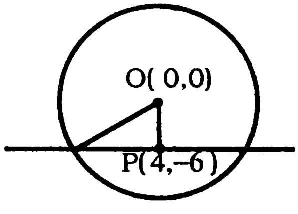
বৃত্তটি y-অক্ষের যে অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ

$= 2\sqrt{r^2 - h^2}$, এখানে h = কেন্দ্রের ভুজ = 3

$= 2\sqrt{(\sqrt{13})^2 - 3^2} = 2\sqrt{13-9} = 2.2 = 4$

13.(a) $x^2 + y^2 = 144$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু (4, – 6) বিন্দুতে অবস্থিত। [চ.'০৯; দি.'০৯,'১১;রা.'০৫;য.'০৬; ঢা.'০৭; মা.'০৪; কু.'১০; সি.'১১]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 144$ এর কেন্দ্র O(0 , 0) এবং জ্যা এর মধ্যবিন্দু P(4, –6).



OP রেখার সমীকরণ $y = \frac{-6}{4}x \Rightarrow 2y = -3x$

$\Rightarrow 3x + 2y = 0$

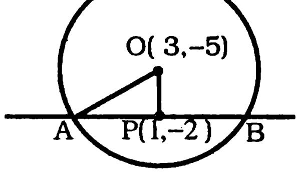
P(4, –6) বিন্দুগামী এবং 3x + 2y = 0 রেখার উপর লম্ব নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ,

$2x - 3y = 2.4 - 3.(-6) = 8 + 18 = 26$

$2x - 3y = 26$ (Ans.)

13.(b) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 21 = 0$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু (1, – 2) বিন্দুতে অবস্থিত।

সমাধান ঃ



ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 21 = 0$

এর কেন্দ্র O(3 , – 5) এবং AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু P(1, – 2).

OP রেখার ঢাল $= \frac{-5+2}{3-1} = \frac{-3}{2}$

OP ⊥ AB বলে, AB এর ঢাল $= \frac{2}{3}$

P(1, –2) বিন্দুগামী $\frac{2}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট নির্ণেয় জ্যা AB এর সমীকরণ, $y + 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$

$\Rightarrow 3y + 6 = 2x - 2$

$2x - 3y - 8 = 0$ (Ans.)

২য় অংশ ঃ $OP = \sqrt{(3-1)^2 + (-2+5)^2}$

$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

OA = বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{3^2 + 5^2 + 21}$

$= \sqrt{9+25+21} = \sqrt{55}$

OAP সমকোণী ত্রিভুজে OA অতিভুজ।

$AP^2 = OA^2 - OP^2 = 55 - 13 = 42$

$\Rightarrow AP = \sqrt{42}$

নির্ণেয় জ্যা এর দৈর্ঘ্য $AB = 2\ AP = 2\sqrt{42}$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 21 = 0$ বৃত্তের যে জ্যাটি (1 , –2) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার সমীকরণ, $x.1 + y.(-2) - 3(x + 1) + 5(y - 2) - 21 = 1^2 + (-2)^2 - 6.1 + 10.(-2) - 21$ [$T = S_1$ সূত্রের সাহায্যে ।]

$\Rightarrow x - 2y - 3x - 3 + 5y - 10 = 1 + 4 - 6 - 20$

$\Rightarrow -2x + 3y - 13 + 21 = 0$

$2x - 3y - 8 = 0$ (Ans.)

২য় অংশ ঃ প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র (3 , –5) এবং ব্যাসার্ধ r $= \sqrt{9+25+21} = \sqrt{55}$.

কেন্দ্র (3 , –5) এবং জ্যা এর মধ্যবিন্দু (1, –2) এর দূরত্ব $d = \sqrt{(3-1)^2 + (-5+2)^2} = \sqrt{13}$

জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{55-13}$

$= 2\sqrt{44}$ একক।

14. (a) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ ও $x^2 + y^2 + 8x + y + 10 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৫]

সমাধান ঃ ধরি, $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

এবং $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 8x + y + 10 = 0$

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow -2x + y - 4 = 0$

$\Rightarrow 2x - y + 4 = 0 \cdots \cdots (1)$

ধরি, এ সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 + k(2x - y + 4) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (6 + 2k)x + (2 - k)y + 6 + 4k = 0 \cdots (2)$

(2) বৃত্তের কেন্দ্র $(-k-3, \frac{k-2}{2})$, যা সাধারণ জ্যা (1) এর উপর অবস্থিত।

$2(-k-3) - \frac{k-2}{2} + 4 = 0$

$\Rightarrow -4k - 12 - k + 2 + 8 = 0$

$\Rightarrow -5k - 2 = 0 \Rightarrow k = -\frac{2}{5}$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 - \frac{2}{5}(2x - y + 4) = 0$

$\Rightarrow 5(x^2 + y^2) + 30x + 10y + 30 - 4x + 2y - 8 = 0$

$5(x^2 + y^2) + 26x + 12y + 22 = 0$

14 (b) $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ ও $(x-q)^2 + (y-p)^2 = r^2$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণদ্বয়কে লিখা যাই,

$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0$

এবং $x^2 + y^2 - 2qx - 2py + p^2 + q^2 - r^2 = 0$

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$(-2p + 2q)x + (-2q + 2p)y = 0$

$\Rightarrow x - y = 0 \cdots \cdots (1)$

১ম বৃত্তের কেন্দ্র (p, q) এবং ব্যাসার্ধ $= r$

কেন্দ্র (p, q) থেকে (1) সাধারণ জ্যা এর লম্বদূরত্ব $d = \frac{|p-q|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|p-q|}{\sqrt{2}}$

সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$

$= 2\sqrt{r^2 - \frac{|p-q|^2}{(\sqrt{2})^2}} = \sqrt{4r^2 - \frac{4(p-q)^2}{2}}$

$= \sqrt{4r^2 - 2(p-q)^2}$ (Ans.)

14 (c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর।[প্র.ভ.প.'০৫;'০৬]

সমাধান ঃ ধরি, $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$

এবং $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$S_1 - S_2 = 0$

$\Rightarrow (-4 + 5)x + (6 - 8)y + (-36 + 43) = 0$

$x - 2y + 7 = 0$ (Ans.)

15.(a) দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$ ও $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে। সাধারণ স্পর্শক ও স্পর্শ বিন্দু নির্ণয় কর। [ব.'১১]

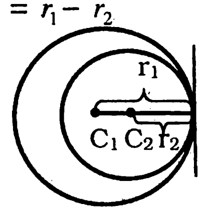
প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_1(1, -2)$ ও ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{1 + 4 + 31} = 6$

এবং $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_2(-2, 2)$ ও ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{4 + 4 - 7} = 1.$

$C_1C_2 = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-2)^2}$

$= \sqrt{9 + 16} = 5 = 6 - 1 = r_1 - r_2$

প্রদত্ত বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে।



সাধারণ স্পর্শক অর্থাৎ সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$(-2 - 4)x + (4 + 4)y + (-31 - 7) = 0$

$\Rightarrow -6x + 8y - 38 = 0$

$3x - 4y + 19 = 0$ (Ans.)

এ সাধারণ স্পর্শক কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ C_1C_2 কে ব্যাসার্ধদ্বয়ের অনুপাতে অর্থাৎ $r_1 : r_2$ অনুপাতে

বহির্বিভক্ত করবে। অতএব, স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{6.(-2)-1.1}{6-1}, \frac{6.2-1.(-2)}{6-1}) = (-\frac{13}{5}, \frac{14}{5})$

15(b) দেখাও যে, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ যেকোন বিন্দু হতে $x^2+y^2+2gx+2fy+c'=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $\sqrt{c'-c}$.

প্রমাণ : ধরি, (α, β) প্রথম বৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু ।

$$\alpha^2+\beta^2+2g\alpha+2f\beta+c=0$$
$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+2g\alpha+2f\beta = -c \cdots(1)$$

এখন (α, β) বিন্দু থেকে দ্বিতীয় বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\alpha^2+\beta^2+2g\alpha+2f\beta+c'}$

$$= \sqrt{-c+c'} = \sqrt{c'-c} \text{ (Showed)}$$

16.(a) $(-5, 4)$ বিন্দু থেকে $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০১; ঢা.'০৫,'১৩]

সমাধান ঃ $x^2+y^2-2x-4y+1=0 \cdots(1)$

বৃত্তের কেন্দ্র $(1, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1+4-1} = 2$

ধরি, $(-5, 4)$ বিন্দুগামী সাপর্শকের সমীকরণ $y-4=m(x+5)$ অর্থাৎ $mx-y+5m+4=0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(1, 2)$ থেকে এ স্পর্শকের লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ 2 এর সমান হবে।

$$\frac{|m-2+5m+4|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \Rightarrow \frac{|6m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$$
$$\Rightarrow (3m+1)^2 = m^2+1$$
$$\Rightarrow 9m^2+6m+1 = m^2+1$$
$$\Rightarrow 8m^2+6m=0 \Rightarrow m(8m+6)=0$$
$$m = 0, -\frac{3}{4}$$

স্পর্শকের সমীকরণ $y-4=0$ এবং

$$y-4 = -\frac{3}{4}(x+5)$$
$$\Rightarrow 4y-16 = -3x-15 \quad \therefore 3x+4y-1=0$$

16.(b) মূলবিন্দু থেকে $x^2+y^2-10x+20=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৮,'১১; রা.'১০,'১৩; সি.'১০; য.'০৫; চ. '০৬,'০৯,'১৩ ব.'১২]

সমাধান ঃ $x^2+y^2-10x+20=0 \cdots(1)$

বৃত্তের কেন্দ্র $(5, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{25-20} = \sqrt{5}$

ধরি, মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে অতিক্রমকারী সাপর্শকের সমীকরণ $y=mx$ অর্থাৎ $mx-y=0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(5, 0)$ থেকে এ স্পর্শকের লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{5}$ এর সমান হবে।

$$\frac{|5m-0|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow 25m^2 = 5(m^2+1)$$
$$\Rightarrow 5m^2 = m^2+1 \Rightarrow 4m^2 = 1 \therefore m = \pm\frac{1}{2}$$
$$(3m+1)^2 = m^2+1$$

স্পর্শক দুইটির সমীকরণ $y = \frac{1}{2}x \Rightarrow x-2y=0$

এবং $y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow x+2y=0$

16 (c) মূলবিন্দু থেকে $x^2+y^2-6x-4y+9=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2+y^2-6x-4y+9=0 \quad \cdots(1)$

বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{9+4-9} = 2$

ধরি, মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে অতিক্রমকারী সাপর্শকের সমীকরণ $y=mx$ অর্থাৎ $mx-y=0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 2)$ থেকে এ স্পর্শকের লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ 2 এর সমান হবে।

$$\frac{|3m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \Rightarrow (3m-2)^2 = 4(m^2+1)$$
$$\Rightarrow 9m^2-12m+4 = 4m^2+4$$
$$\Rightarrow 5m^2-12m=0 \Rightarrow m(5m-12)=0$$
$$\therefore m = 0, \frac{12}{5}$$

স্পর্শক দুইটির সমীকরণ $y=0$ এবং $y=\frac{12}{5}x.$

এখন $y=\frac{12}{5}x$ রেখা $y=0$ রেখা অর্থাৎ x-অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে, $\tan\theta = m$

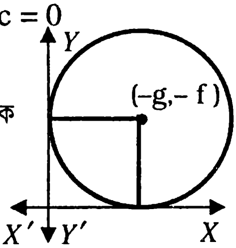
$\theta = \tan^{-1}\frac{12}{5}$, যা স্পর্শক দূইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ।

17.(a) $x=0, y=0$ ও $x=a$ রেখা তিনটিকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[য.'০১; রা.'০৫; কু.'০৪,'১১]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$



বৃত্তটি $x = 0$ রেখাকে অর্থাৎ y-অক্ষকে এবং $y = 0$ রেখাকে অর্থাৎ x-অক্ষকে স্পর্শ করে ।

$f^2 = c$ এবং $g^2 = c$

$g^2 = f^2 = c$

আবার, বৃত্তটি $x = a$ অর্থাৎ $x - a = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে । অতএব, বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ হতে রেখাটির লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ এর সমান হবে।

$$\frac{|-g - a|}{\sqrt{1}} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$$\Rightarrow g^2 + 2ag + a^2 = g^2 + f^2 - c$$

$$\Rightarrow 2ag + a^2 = f^2 - f^2 \quad [\quad c = f^2]$$

$$\Rightarrow 2ag + a^2 = 0 \;\therefore g = -\frac{a}{2}$$

$$c = g^2 = (-\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} \text{ এবং}$$

$$f^2 = g^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow f = \pm\frac{a}{2}$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 2(-\frac{a}{2})x + 2(\pm\frac{a}{2})y + \frac{a^2}{4} = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax \pm ay + \frac{1}{4}a^2 = 0 \text{ (Ans.)}$$

17.(b) $\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত। [প্র.ভ.প. '০৪]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{2}$

বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে।

$r = |h| = |k|$

$\Rightarrow r = -h = -k = \sqrt{2}$ [কেন্দ্র তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত, $\therefore h, k < 0$]

$h = k = -\sqrt{2}$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x + \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 = 2$$

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$$

17(c) (– 5, – 6) বিন্দুগামী একটি বৃত্ত $3x + 4y - 11 = 0$ রেখাকে (1 , 2) বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (1 2) বিন্দুতে বিন্দুবৃত্তের সমীকরণ

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0 \cdots (1)$$

(– 5 , – 6) বিন্দুগামী এবং (1) বৃত্ত ও প্রদত্ত রেখা $3x + 4y - 11 = 0$ এর ছেদ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}{3x + 4y - 11} = \frac{25 + 36 + 10 + 24 + 5}{-15 - 24 - 11}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}{3x + 4y - 11} = \frac{100}{-50}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = -6x - 8y + 22$$

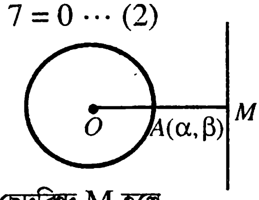
$$x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$$

18. $12x + 5y = 212$ সরলরেখা হতে $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 167$ বৃত্তের উপর যে বিন্দুটির দূরত্ব ক্ষুদ্রতম তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O(1, 1) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1 + 1 + 167} = \sqrt{169} = 13$

$12x + 5y - 212 = 0 \cdots (1)$ রেখার উপর লম্ব এবং কেন্দ্র O(1 ,1) দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ রেখার সমীকরণ, $5x - 12y = 5 \times 1 - 12 \times 1 = -7$

$\Rightarrow 5x - 12y + 7 = 0 \cdots (2)$



(1) ও (2) রেখার ছেদবিন্দু M হলে,

$$M \equiv (\frac{35 - 2544}{-144 - 25}, \frac{-1060 - 84}{-144 - 25})$$

$$= (\frac{-2509}{-169}, \frac{-1144}{-169}) = (\frac{193}{13}, \frac{88}{13})$$

$$OM = \sqrt{(1-\frac{193}{13})^2 + (1-\frac{88}{13})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{32400+5625}{169}} = \sqrt{\frac{38025}{169}} = 15$$

ধরি, নির্ণেয় বিন্দুটি $A(\alpha, \beta)$।

$OA = 13$ এবং

$AM = OM - OA = 15 - 13 = 2$

$OA : AM = 13 : 2$

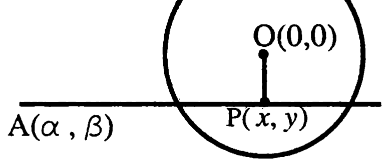
$$\therefore \alpha = \frac{13 \times \frac{193}{13} + 2 \times 1}{13+2} = \frac{195}{15} = 13$$

এবং $$\beta = \frac{13 \times \frac{88}{13} + 2 \times 1}{13+2} = \frac{90}{15} = 6$$

নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(13, 6)$।

19.(a) $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের যেসব জ্যা (α, β) বিন্দুগামী তাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ



ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = r^2$ এর কেন্দ্র $O(0 \quad 0)$ এবং $A(\alpha, \beta)$ বিন্দুগামী জ্যাসমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের উপর $P(x, y)$ যেকোন একটি বিন্দু। তাহলে, $OP \perp AP$.

OP এর ঢাল $\times$ AP এর ঢাল $= -1$

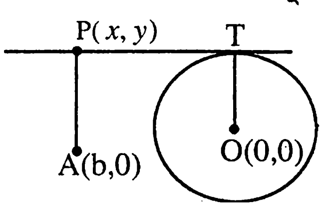
$$\Rightarrow \frac{0-y}{0-x} \times \frac{y-\beta}{x-\alpha} = -1$$

$$\Rightarrow y(y-\beta) = -x(x-\alpha)$$

$x(x-\alpha) + y(y-\beta) = 0$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

19. (b) (b , 0) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৮]

সমাধান ঃ



ধরি, $A(b,0)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথের উপর $P(x, y)$ যেকোন একটি বিন্দু PT যেকোন একটি স্পর্শক। তাহলে, $AP \perp PT$.

PT স্পর্শকের ঢাল, $m = -\frac{b-x}{0-y} = \frac{b-x}{y}$

PT স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx \pm a\sqrt{m^2+1}$

$$\Rightarrow y = \frac{b-x}{y}x \pm a\sqrt{\frac{(b-x)^2}{y^2}+1}$$

$$\Rightarrow y^2 = bx - x^2 \pm a\sqrt{(b-x)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - bx = \pm a\sqrt{(b-x)^2 + y^2}$$

$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2\{(b-x)^2 + y^2\}^2$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

19 (c) (h , k) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 = 12$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $x^2 + y^2 + 5x + 5y = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ। (h, k) বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (h, k) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 = 12$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 12 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{h^2+k^2-12}$ এবং $(h \quad k)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 + 5x + 5y = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের $= \sqrt{h^2+k^2+5h+5k}$

প্রশ্নমতে,

$$\sqrt{h^2+k^2-12} = 2\sqrt{h^2+k^2+5h+5k}$$

$$\Rightarrow h^2 + k^2 - 12 = 4(h^2 + k^2 + 5h + 5k)$$

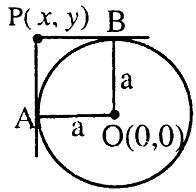
$$\Rightarrow 3h^2 + 3k^2 + 20h + 20k + 12 = 0$$

এখন h কে x দ্বার এবং k কে y দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $3x^2 + 3y^2 + 20x + 20y + 12 = 0$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

19 (d) যেসব বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব হয় তাদের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৮]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = a^2$ এর কেন্দ্র $O(0 \quad 0)$ এবং সঞ্চারপথের উপর $P(x, y)$ যেকোন একটি

বিন্দু থেকে অঙ্কিত PA ও PB স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব ।



PAOB চতুর্ভুজে,

$\angle A = \angle B = \angle P = 90°$

$\angle O = 90°$ তাছাড়া, AO = OB = a

PAOB একটি বর্গক্ষেত্র যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক।

$PO^2 = PA^2 + AO^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + a^2$

$\therefore x^2 + y^2 = 2a^2$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ ধরি, প্রদত্ত বৃত্তে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$

$\Rightarrow y - mx = \pm a\sqrt{1+m^2}$

$\Rightarrow y^2 - 2mxy + m^2x^2 = a^2(1 + m^2)$

$\Rightarrow (x^2 - a^2)m^2 - 2mxy + y^2 - a^2 = 0$

মূলদ্বয় m_1 ও m_2 হলে, শর্তমতে, $m_1 m_2 = -1$

$\frac{y^2 - a^2}{x^2 - a^2} = -1 \Rightarrow y^2 - a^2 = -x^2 + a^2$

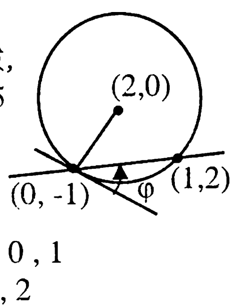
$\therefore x^2 + y^2 = 2a^2$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

19(e) $3x - y - 1 = 0$ সরলরেখা $(x-2)^2 + y^2 = 5$ বৃত্তকে যে সূক্ষ্মকোণে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্ত $(x-2)^2 + y^2 = 5$ (1)

এবং সরলরেখা $3x - y - 1 = 0$

অর্থাৎ $y = 3x - 1$ (2)



(1) এ y- এর মান বসিয়ে পাই,

$(x-2)^2 + (3x-1)^2 = 5$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 6x + 1 = 5$

$\Rightarrow 10x^2 - 10x = 0$

$\Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$

(2) হতে পাই, $y = -1, 2$

(2) রেখা (1) বৃত্তকে $(0, -1)$ ও $(1,2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(1) বৃত্তের কেন্দ্র (2,0).

$(0, -1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $= \frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2}$

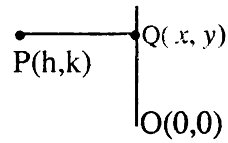
$(0, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= -2$

(2) রেখার ঢাল = 3.

ধরি, নির্ণেয় কোণ φ.

$\tan\varphi = \left|\frac{3+2}{1+3.(-2)}\right| = 1 \quad \varphi = 45°$

19(f) দেখাও যে, P(h , k) বিন্দু থেকে মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের প্রাদবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।



প্রমাণ ঃ ধরি, P(h , k) বিন্দু থেকে মূলবিন্দু O(0,0) দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথের উপর Q(x,y) যেকোন একটি বিন্দু । তাহলে, $OQ \perp PQ$

OQ এর ঢাল × PQ এর ঢাল = −1

$\Rightarrow \frac{y}{x} \times \frac{y-k}{x-h} = -1 \Rightarrow y^2 - ky = -x^2 - hx$

$\Rightarrow \therefore x^2 + y^2 + hx + ky = 0$, যা একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

সঞ্চারপথটি একটি বৃত্ত।

20. সমাধান ঃ

(a) ব্যাসের দৈর্ঘ্য = $(2, -4)$ ও $(0, 0)$ বিন্দু দুইটির দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16}$

$= 2\sqrt{5}$ একক।

(b) ব্যাসটির সমীকরণ,

$(x-2)(-4-0) - (y+4)(2-0) = 0$

$\Rightarrow -4(x-2) - 2(y+4) = 0$

$\Rightarrow 2(x-2) + (y+4) = 0$

$\Rightarrow 2x - 4 + y + 4 = 0 \ \therefore 2x + y = 0$

আবার, (2 −4) ও (0 0) বিন্দু দুইটিকে একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-2)(x-0) + (y+4)(y-0) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$

$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \cdots (1)$ (Ans.)

(c) (2 −4) ও (0 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী ব্যাসের সমীকরণ, $y = \frac{-4}{2}x$

$\Rightarrow y = -2x \Rightarrow 2x + y = 0$

ধরি, $2x + y = 0$ ব্যাসের সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ $2x + y + k = 0$ (2)

(1) বৃত্ত (2) রেখাকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(1, -2)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ এর সমান হবে।

$$\frac{|2-2+k|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow |k| = 5 \Rightarrow k = \pm 5$$

(2) এ k এর মান বসিয়ে পাই, $2x + y \pm 5 = 0$

21. $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0}$ **বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।**

(a) প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2.(-3)y + c = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(2, 3)$,

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{2^2 + 3^2 - c} = \sqrt{13 - c}$

এবং বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশ $= 2\sqrt{2^2 - c}$

$$= 2\sqrt{4 - c}$$

(b) প্রশ্নমালা IV B এর 2(c) দ্রষ্টব্য।

(c) প্রশ্নমালা IV A এর 4(c) দ্রষ্টব্য।

22. সমাধান: কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের সম্পর্ক হতে পাই, $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$r^2 = -4r\cos\theta$ হতে পাই,

$x^2 + y^2 = -4x \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x = 0$

(a) বৃত্তটির কেন্দ্র $= (-\frac{4}{2}, \frac{0}{2}) = (-2, 0)$

এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{2^2 + 0 - 0} =$

(b) খলিফার নিয়মানুসারে $(-6,5)$ ও $(-3, -4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x+6)(x+3) + (y-5)(y+4) + k\{(x+6)(5+4) - (y-5)(-6+3)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x + 18 + y^2 - y - 20 + k(9x + 54 + 3y - 15) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 9x - y - 2 + k(9x + 3y + 39) = 0 \quad (1)$$

(1) বৃত্তটি $(2, 1)$ বিন্দুগামী বলে,

$$4 + 1 + 18 - 1 - 2 + k(18 + 3 + 39) = 0$$

$$\Rightarrow 60k = -20 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 + 9x - y - 2 - 3x - y - 13 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0 \quad (1)$$

(c) দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র $(-3, 1)$.

$(-2, 0)$ ও $(-3, 1)$ কেন্দ্রগামী সরলরেখার সমীকরেণ

$$\frac{x+2}{-2+3} = \frac{y-0}{0-1} \Rightarrow y = -x - 2$$

$x^2 + y^2 + 4x = 0$ বৃত্তে $y = -x - 2$ বসিয়ে পাই, $x^2 + (x+2)^2 + 4x = 0$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 + 4x = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 8x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= -2 \pm \sqrt{2}$$

$x = -2 + \sqrt{2}$ হলে, $y = 2 - \sqrt{2} - 2 = -\sqrt{2}$

$x = -2 - \sqrt{2}$ হলে, $y = 2 + \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2}$

প্রথম বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু

$(-2+\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ও $(-2-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

কাজ

১। $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$ বৃত্তের $(-2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$ বৃত্তের $(-2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$x.(-2) + y.4 + 2(x-2) - 5(y+4) + 28 = 0$$

$$\Rightarrow -2x + 4y + 2x - 4 - 5y - 20 + 28 = 0$$

$$\Rightarrow -y + 4 = 0 \quad y = 4$$

এখন ধরি, $y = 4$ স্পর্শকের উপর লম্ব অভিলম্বের সমীকরণ $x = k$, যা $(-2, 4)$ বিন্দুগামী।

$$-2 = k \Rightarrow k = -2$$

অভিলম্বের সমীকরণ $x = -2 \Rightarrow x + 2 = 0$

২। $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সাথে $\tan^{-1}\frac{2}{5}$ কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র (0 ,0) এবং ব্যাসার্ধ = a

ধরি, x-অক্ষের সাথে $\tan^{-1}\frac{2}{5}$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ $y = \tan(\tan^{-1}\frac{2}{5})x + c$

$\Rightarrow y = \frac{2}{5}x + c \Rightarrow 2x - 5y + 5c = 0 \cdots (1)$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (0 0) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ a এর সমান হবে।

$$\frac{|5c|}{\sqrt{4+25}} = a \Rightarrow |5c| = \sqrt{29}\,a$$

$$\Rightarrow 5c = \pm\sqrt{29}\,a \qquad c = \pm\frac{\sqrt{29}a}{5}$$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ

$$2x - 5y + 5(\pm\frac{\sqrt{29}a}{5}) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 5y \pm \sqrt{29}a = 0 \text{ (Ans.)}$$

৩। $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক অক্ষ দুইটির সাথে a^2 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র (0 ,0) এবং ব্যাসার্ধ = a. ধরি, স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1$

অর্থাৎ $cx + by - ab = 0 \cdots (1)$

(1) রেখাটি অক্ষ দুইটির সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}bc$

প্রশ্নমতে , $\frac{1}{2}bc = a^2 \Rightarrow bc = 2a^2 \cdots (2)$

আবার, (1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (0 , 0) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ a এর সমান হবে।

$$\left|\frac{0-0-bc}{\sqrt{c^2+b^2}}\right| = a \Rightarrow b^2c^2 = a^2(b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow b^2c^2 = \frac{bc}{2}(b^2+c^2) \qquad [\,(2) \text{ দ্বারা}\,]$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2bc \Rightarrow (b-c)^2 = 0$$

$$b - c = 0 \Rightarrow b = c$$

$$(2) \Rightarrow b^2 = 2a^2 \Rightarrow b = c = \pm\sqrt{2}a$$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{\pm\sqrt{2}a} + \frac{y}{\pm\sqrt{2}a} = 1$

$$x + y = \pm a\sqrt{2} \text{ (Ans.)}$$

৪। দেখাও যে, x-অক্ষ $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 4 = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকের সমীকরল নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(2, \frac{5}{2})$ এবং ব্যাসার্ধ = $\sqrt{4 + \frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2}$

এখন x-অক্ষ থেকে বৃত্তের কেন্দ্র $(2, \frac{5}{2})$ এর দূরত্ব

= | কেন্দ্রের কোটি | = $|\frac{5}{2}| = \frac{5}{2}$ = বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

x-অক্ষ প্রদত্ত বৃত্তের একটি স্পর্শক।

২য় অংশ ঃ ধরি মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0 \quad \cdots (1)$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের একটি স্পর্শক হলে কেন্দ্র $(2, \frac{5}{2})$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসাধ $\frac{5}{2}$ এর সমান হবে।

$$\left|\frac{2m - 5/2}{\sqrt{m^2+1}}\right| = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(4m-5)^2}{4} = \frac{25}{4}(m^2+1)$$

$$\Rightarrow 16m^2 - 40m + 25 = 25m^2 + 25$$

$$\Rightarrow 9m^2 + 40m = 0 \ \therefore m = -\frac{40}{9}$$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y = -\frac{40}{9}x$

$$40x + 9y = 0 \text{ (Ans.)}$$

৫। 5 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $3x - 4y + 8 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং

যাদের কেন্দ্র $3x + 4y - 1 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। [প্র.ভ.প. ৮৮]

সমাধান ঃ ধরি, 5 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = 5^2 \cdots(1)$

(1) এর কেন্দ্র (h, k) , $3x + 4y - 1 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$3h + 4k - 1 = 0 \cdots \cdots (2)$

(1) বৃত্ত $3x - 4y + 8 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (h , k) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ 5 এর সমান হবে।

$$\frac{|3h-4k+8|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|3h-4k+8|}{5} = 5$$

$\Rightarrow |3h-4k+8| = 25 \Rightarrow 3h - 4k + 8 = \pm 25$

$3h - 4k - 17 = 0 \cdots \quad (3)$ এবং

$3h - 4k + 33 = 0 \quad \cdots(4)$

$(2) + (3) \Rightarrow 6h - 18 = 0 \Rightarrow h = 3$

(2) হতে , $9 + 4k - 1 = 0 \Rightarrow k = -2$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$ (Ans.)

আবার, $(2) + (4) \Rightarrow 6h + 32 = 0 \Rightarrow h = -\frac{16}{3}$

(2) হতে , $3(-\frac{16}{3}) + 4k - 1 = 0$

$\Rightarrow -16 + 4k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{17}{4}$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$$(x+\frac{16}{3})^2 + (y-\frac{17}{4})^2 = 25$$

৬। মূলবিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3y + x = 20$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং যার একটি ব্যাসের সমীকরণ $y = 3x$.

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots(1)$

(1) বৃত্ত মূলবিন্দুগামী। $c = 0$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র (−g , −f), $y = 3x$ ব্যাসের উপর অবস্থিত। $\therefore -f = 3(-g) \Rightarrow f = 3g \cdots(2)$

আবার, $3y + x = 20$ অর্থাৎ $x + 3y - 20 = 0$ রেখা (1) বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (− g, −f) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$ এর সমান হবে।

$$\frac{|-g-3f-20|}{\sqrt{1+9}} = \sqrt{g^2+f^2-c}$$

$\Rightarrow (g + 3f + 20)^2 = 10(g^2 + f^2)$ [c=0]

$\Rightarrow (g + 9g + 20)^2 = 10(g^2 + 9g^2)$ [$\because$ f = 3g]

$\Rightarrow 100(g+2)^2 = 100g^2$

$\Rightarrow g^2 + 4g + 4 = g^2 \Rightarrow g = -1$

(2) হতে পাই, $f = 3.(-1) = -3$

(1) এ f , g ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ (Ans.)

৭। $y = 2x$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তের একটি জ্যা। উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের (2 , 4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y = 2x$ (1) হতে y এর মান প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x^2 + (2x)^2 = 10x$

$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 10x = 0 \Rightarrow 5x^2 - 10x = 0$

$\Rightarrow 5x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

(1) হতে পাই, $y = 2.0 = 0$ এবং $y = 2.2 = 4$

প্রদত্ত বৃত্তের (1) জ্যা এর প্রান্তবিন্দু দুইটি (0,0) এবং (2,4).

(0,0) এবং (2,4) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-0)(x-2) + (y-0)(y-4) = 0$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

এখন $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ বৃত্তের (2, 4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.2 + y.4 - (x+2) - 2(y+4) = 0$

$\Rightarrow 2x + 4y - x - 2 - 2y - 8 = 0$

$x + 2y - 10 = 0$ (Ans.)

৮। (3, −1) বিন্দুগামী একটি বৃত্ত $3x + y = 10$ রেখাকে (3, 1) বিন্দুতে স্পর্শ করে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (3, 1) কেন্দ্রবিশিষ্ট বিন্দুবৃত্তের সমীকরণ, $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 0 \cdots (1)$

(3, −1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং (1) বৃত্ত ও $3x + y - 10 = 0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-3)^2+(y-1)^2}{(3-3)^2+(-1-1)^2} = \frac{3x+y-10}{3\times(3)+(-1)-10}$$

$\Rightarrow \dfrac{x^2-6x+9+y^2-2y+1}{0+4} = \dfrac{3x+y-10}{9-1-10}$

$\Rightarrow \dfrac{x^2-6x+y^2-2y+10}{4} = \dfrac{3x+y-10}{-2}$

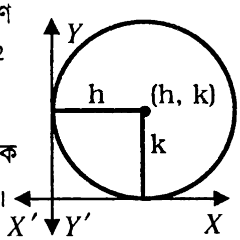
$\Rightarrow x^2-6x+y^2-2y+10 = -6x-2y+20$

$x^2+y^2 = 10$ (Ans.)

৯। এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x = 0$, $y = 0$, $3x - 4y = 12$ রেখা তিনটিকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$



বৃত্তটি $x = 0$ রেখাকে অর্থাৎ y-অক্ষকে এবং $y = 0$ রেখাকে অর্থাৎ x-অক্ষকে স্পর্শ করে ।

$r = |k| = k$ এবং

$r = |h| = h$

[$\because$ কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত, $\therefore h, k > 0$]

$h = k = r$

আবার, বৃত্তটি $3x - 4y = 12$ অর্থাৎ $3x - 4y - 12 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে । অতএব, বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) হতে রেখাটির লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ r এর সমান হবে।

$\dfrac{|3h-4k-12|}{\sqrt{9+16}} = r$

$\Rightarrow |3h - 4h - 12| = 5h$ [$h = k = r$]

$\Rightarrow |h + 12| = 5h \Rightarrow h + 12 = \pm 5h$

$4h=12 \Rightarrow h = 3$ অথবা, $-6h=12 \Rightarrow h = -2$

কিন্তু $h > 0$ $\therefore h = k = r = 3$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 9$

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$

১০। $2\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x - y = 6$ রেখাকে $(1, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots(1)$

(1) বৃত্তের $(1, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$x.1 + y.(-3) + g(x+1) + f(y-3) + c = 0$

$\Rightarrow x - 3y + gx + g + fy - 3f + c = 0$

$\Rightarrow (1+g)x + (-3+f)y + g - 3f + c = 0$

প্রশ্নমতে, এ রেখা এবং $3x - y = 6$ অভিন্ন।

$\dfrac{1+g}{3} = \dfrac{-3+f}{-1} = \dfrac{g-3f+c}{-6}$

$\dfrac{1+g}{3} = \dfrac{-3+f}{-1}$ হতে পাই, $1 + g = 9 - 3f$

$\Rightarrow g = 8 - 3f \cdots(2)$

$\dfrac{-3+f}{-1} = \dfrac{g-3f+c}{-6}$ হতে পাই,

$-18 + 6f = g - 3f + c$

$\Rightarrow c = -18 + 9f - g = -18 + 9f - 8 + 3f$

$= 12f - 26$

আবার (1) বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2+f^2-c}$

$\sqrt{g^2+f^2-c} = 2\sqrt{10}$

$\Rightarrow (8-3f)^2 + f^2 - 12f + 26 = 40$

$\Rightarrow 64 - 48f + 9f^2 + f^2 - 12f - 14 = 0$

$\Rightarrow 10f^2 - 60f + 50 = 0$

$\Rightarrow f^2 - 6f + 5 = 0 \Rightarrow (f-5)(f-1) = 0$

$f = 1, 5$

$f = 1$ ধরে, $g = 8 - 3 = 5$, $c = 12 - 26 = -14$

$f = 5$ ধরে, $g = 8 - 15 = -7$, $c = 60 - 26 = 34$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 10x + 2y - 14 = 0$ এবং

$x^2 + y^2 - 14x + 10y - 34 = 0$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $(1, -3)$ বিন্দুতে বিন্দুবৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$.

ধরি, এ বৃত্ত ও প্রদত্ত রেখার ছেদ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2 + (y+3)^2 + k(3x - y - 6) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + 3kx - ky - 6k = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-2+3k)x + (6-k)y + 10 - 6k = 0 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে , (1) এর ব্যাসার্ধ $= 2\sqrt{10}$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\dfrac{2-3k}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{k-6}{2}\right)^2 - 10 + 6k} = 2\sqrt{10}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(4-12k+9k^2+k^2-12k+36)-10$
$+6k=40$

$\Rightarrow 4-12k+k^2+k^2-12k+36-200+24k=0$

$\Rightarrow 10k^2-160=0 \Rightarrow k^2=16 \therefore k=\pm 4$

(1) হতে নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,
$x^2+y^2+10x+2y-14=0$ এবং
$x^2+y^2-14x+10y+34=0$

১১। $(-2, 3)$ বিন্দু থেকে $2x^2+2y^2=3$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ব.'০১]

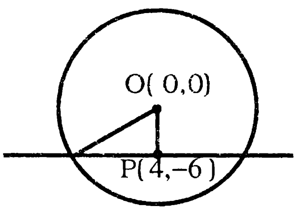
সমাধান ঃ $(-2, 3)$ বিন্দু থেকে $2x^2+2y^2=3$ অর্থাৎ $x^2+y^2-\frac{3}{2}=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের

দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(-2)^2+(3)^2-\frac{3}{2}}=\sqrt{4+9-\frac{3}{2}}$

$=\sqrt{13-\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{26-3}{2}}=\sqrt{\frac{23}{2}}$ একক।

১২। $x^2+y^2=16$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু $(-2, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত। [য.'০০]

সমাধান ঃ



ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2+y^2=16$ এর কেন্দ্র $O(0, 0)$ এবং জ্যা এর মধ্যবিন্দু $P(-2, 3)$.

OP রেখার সমীকরণ $y=\frac{3}{-2}x \Rightarrow -2y=3x$

$\Rightarrow 3x+2y=0$

$P(-2, 3$ বিন্দুগামী এবং $3x+2y=0$ রেখার উপর লম্ব নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ,

$2x-3y=2.(-2)-3.3=-4-9=-13$
$2x-3y+13=0$ (Ans.)

১৩। $x^2+y^2+4x-2y+3=0$ ও $x^2+y^2-4x+6y-21=0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ এবং দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $S_1 \equiv x^2+y^2+4x-2y+3=0$
এবং $S_2 \equiv x^2+y^2-4x+6y-21=0$
বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$S_1-S_2=0 \Rightarrow 8x-8y+24=0$
$x-y+3=0$ (1) (Ans.)

এখন S_1 বৃত্তের কেন্দ্র $(-2\ \ 1)$ এবং ব্যাসার্ধ

$r=\sqrt{(-2)^2+1^2-3}=\sqrt{2}$

কেন্দ্র $(-2, 1)$ হতে $x-y+3=0$ এর লম্বদূরত্ব

$d=\frac{|-2-1+3|}{\sqrt{1+1}}=0$

সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $=2\sqrt{r^2-d^2}$
$=2\sqrt{2-0}=2\sqrt{2}$ একক।

১৪। $3x^2+3y^2-29x-19y+56=0$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ $x-y+2=0$. উক্ত জ্যা এর দৈর্ঘ্য এবং এ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $3x^2+3y^2-29x-19y+56=0$

অর্থাৎ $x^2+y^2-\frac{29}{3}x-\frac{19}{3}y+\frac{56}{3}=0$ বৃত্তের

কেন্দ্র $(\frac{29}{6}, \frac{19}{6})$ এবং

ব্যাসার্ধ $r=\sqrt{(\frac{29}{6})^2+(\frac{19}{6})^2-\frac{56}{3}}$

$=\sqrt{\frac{841+361-672}{36}}=\sqrt{\frac{530}{36}}$

কেন্দ্র $(\frac{29}{6}, \frac{19}{6})$ থেকে $x-y+2=0$

জ্যা এর লম্বদূরত্ব $d=\frac{|\frac{29}{6}-\frac{19}{6}+2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{11}{3\sqrt{2}}$

জ্যা এর দৈর্ঘ্য $=2\sqrt{r^2-d^2}$

$=2\sqrt{\frac{530}{36}-\frac{121}{18}}=2\sqrt{\frac{530-242}{36}}$

$=2\sqrt{\frac{288}{36}}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$ একক।

২য় অংশ ঃ ধরি প্রদত্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - \frac{29}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{56}{3} + k(x - y + 2) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-\frac{29}{3} + k)x + (-\frac{19}{3} - k)y + \frac{56}{3} + 2k = 0 \cdots(1)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(\frac{29}{6} - \frac{k}{2}, \frac{19}{6} + \frac{k}{2})$, যা $x - 2y + 7 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$$\frac{29}{6} - \frac{k}{2} - \frac{19}{3} - k + 7 = 0$$

$\Rightarrow 29 - 3k - 38 - 6k + 42 = 0$

$\Rightarrow -9k = -33 \Rightarrow k = \frac{11}{3}$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - \frac{29}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{56}{3} + \frac{11}{3}(x - y + 2) = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 + y^2) - 29x - 19y + 56 + 11x - 11y + 22 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 + y^2) - 18x - 30y + 78 = 0$

$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 26 = 0$ (Ans.)

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -4)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{3^2 + 4^2 - 21} = 2$

ধরি, x-অক্ষের সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ $y + k = 0$ (1)

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(3, -4)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\frac{|-4 + k|}{\sqrt{1}} = 2 \Rightarrow |-4 + k| = 2$$

$\Rightarrow k - 4 = \pm 2 \quad \therefore k = 6, 2$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y + 6=0$, $y + 2=0$

ব্যবহারিক

পরীক্ষণের নাম ঃ $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর।সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ হতে পাই,

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$

$\Rightarrow (y - 4)^2 = 5^2 - (x + 3)^2$

$\Rightarrow y - 4 = \pm\sqrt{(5 + x + 3)(5 - x - 2)}$

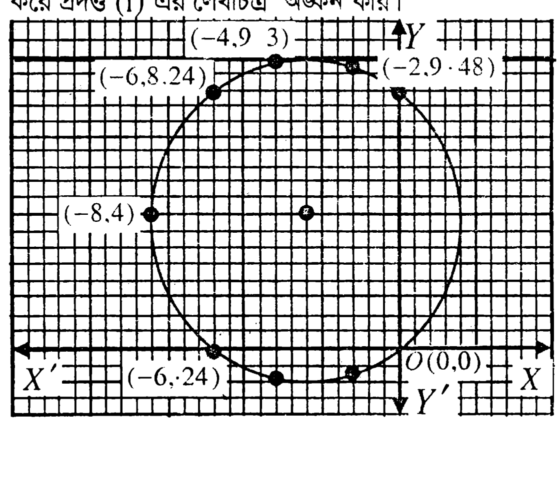
$\Rightarrow y = 4 \pm \sqrt{-(x + 8)(x - 3)}$ (i)

$(x + 8)(x - 3) \leq 0 \Rightarrow -8 \leq x \leq 3$ অর্থাৎ $x \in [-8, 3]$ এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি তৈরি করি

x	−8	−6	−6	−4	−4
y	4	8·24	−·24	9.29	−1·29
x	−2	−2	0	0	
y	9·48	−1·48	8·89	−0·89	

2. একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি

3. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে মুক্তহস্তে সংযোগ করে প্রদত্ত (i) এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।



লেখের বৈশিষ্ট ঃ

1. লেখচিত্রটি একটি বৃত্ত।
2. লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন।

সতর্কতা ঃ

1. গ্রাফ পেপার সুষম বর্গক্ষেত্র বিশিষ্ট কিনা দেখে নেই।
2. শার্পনার দিয়ে পেন্সিল সরু করে নেই।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. k এর মান কত হলে $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করবে? [DU 08-09, 01-02, SU 03-04]

Soln. বৃত্তের সমীকরণে xy এর সহগ শূন্য।
$-2 + k = 0 \Rightarrow k = 2$

2. $2x^2 + ay^2 = 9$ একটি বৃত্তের সমীকরণ । তাই a এর মান – [CU 07-09]

Soln. x^2 ও y^2 এর সহগ সমান । তাই $a = 2$

3. $x^2 + y^2 = 16$ এর বিবেচনায় (4,–3) বিন্দুটির অবস্থান কোথায় ? [RU 06-07]

Soln. $4^2 + (-3)^2 - 16 = 9 > 0$ বৃত্তের বাইরে।

4. $x^2 + y^2 - 24x + 10y = 0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ – [DU 03-04; RU 05-06]

Soln. ব্যাসার্ধ $= \sqrt{12^2 + 5^2 - 0} = 13$

5. $2x^2 + 2y^2 + 6x + 10y - 1 = 0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে, r =? [DU 95-96,97-98]

Soln. প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 + 3x + 5y - 1/2 = 0$

$$r = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (\frac{5}{2})^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9 + 25 + 2}{4}} = 3$$

6. $x^2 + y^2 - 5x = 0$ ও $x^2 + y^2 + 3x = 0$ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রের দূরত্ব কত? [DU 06-07]

Soln. কেন্দ্র $(\frac{5}{2}, 0)$ ও $(-\frac{3}{2}, 0)$ এর দূরত্ব $= |\frac{5}{2} + \frac{3}{2}|$
$= 4$

7. (–9 , 9) ও (5, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ–[DU 05-06, 02-03; RU 06-07;NU 02-03]

Soln. $(x + 9)(x - 5) + (y - 9)(y - 5) = 0$
$\Rightarrow x^2 + 4x - 45 + y^2 - 14y + 45 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 14y = 0$

8. (4,5) কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্ত, যা $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে গমন করে তার সমীকরণ– [DU 03-04; RU 05-06]

Soln. প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(-2, -3)$. নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 8x - 10y = (-2)^2 + (-3)^2 - 8(-2) - 10(-3)$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 10y - 59 = 0$

9. (–1,1) এবং (–7, 3) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী একটি বৃত্তের কেন্দ্র $2x + y = 9$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ– [NU 08-09;SU 03-04]

A. $(x + 1)^2 + (y - 11)^2 = 100$
B. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 81$
C. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$
D. $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 64$

Soln. A. option টির কেন্দ্র (–1, 11) , যা প্রদত্ত রেখার উপর অবস্থিত।

10. (5, 0) এবং (0, 5) বিন্দুটি অক্ষরেখাদ্বয়কে স্পর্শকারী বৃত্তের সমীকরণ – [DU 04-05]

Soln. $x^2 + y^2 - 2.5x - 2.5y + 5^2 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

11. নিম্নের কোন সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত বৃত্তের স্পর্শক x অক্ষ? [DU 08-09]

A. $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$
B. $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$
C. $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 25 = 0$
D. $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 28 = 0$

Soln. প্রদত্ত option গুলোর মধ্যে B এর ক্ষেত্রে $g^2 = c$

12. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে । c এর মান– [DU 00-01,01-02; RU 07-08; NU 05-06]

Soln. $c = (\text{x এর সহগের অর্ধেক})^2 = 4$

13. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে । স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক – [NU 07-08]

Sol^n. স্পর্শবিন্দু$\equiv$(−x এর সহগের অর্ধেক,0)=(2,0)

14. $x^2+y^2=81$ **বৃত্তটির জ্যা (−2, 3) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হলে জ্যা এর সমীকরণ – [JU 05-06; KU 03-04]**

Sol^n. $x.(-2)+y.3=(-2)^2+3^2$
$\Rightarrow 2x-3y+13=0$

15. $x^2+y^2-4x+6y-36=0$ **এবং** $x^2+y^2-5x+8y-43=0$ **বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ [RU 07-08; KUET 05-06]**

Sol^n. $(-4+5)x+(6-8)y-36+43=0$
$\Rightarrow x-2y+7=0$

16, (4,3) বিন্দুতে কেন্দ্র ধরে কত ব্যাসার্ধ বৃত্ত অঙ্কন করলে $x^2+y^2=4$ **বৃত্তকে স্পর্শ করবে?[IU07-08]**

Sol^n. $r\pm 2=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=5$
$r=7$ বা, 3

17. $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ **বৃত্তের কেন্দ্র হতে 3 একক দুরত্বে অবস্থিত জ্যা এর দৈর্ঘ্য – [IU 07-08]**

Sol^n. জ্যা এর দৈর্ঘ্য $=2\sqrt{5^2-3^2}=8$

18. $x^2+y^2=100$ **বৃত্ত দ্বারা** $x+7y-50=0$ **রেখার ছেদাংশের পরিমাণ – [KU 07-08]**

Sol^n. এখানে $r=10, d=\dfrac{|0+0-50|}{\sqrt{1+49}}=\sqrt{50}$

ছেদাংশের পরিমাণ $=2\sqrt{r^2-d^2}$
$=2\sqrt{100-50}=2\sqrt{50}=10\sqrt{2}$

19. $2x-3y-9=0$ **রেখাটি যে বৃত্তকে স্পর্শ করে তার কেন্দ্র (1,2) এর ব্যাসার্ধ** $r=\sqrt{5+c}$ **। c এর মান কত? [RU 06-07]**

Sol^n. $r=\sqrt{5+c}=\dfrac{|2.1-3.2-9|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\sqrt{13}$

$c=13-5=8$

20. যে বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং এবং $2x+\sqrt{5}y-1=0$ **রেখাকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ হবে– [CU-07-08; JU 07-08]**

Sol^n. $(x-0)^2+(y-0)^2=\left(\dfrac{2.0+5.0-1}{\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}}\right)^2$

$\Rightarrow x^2+y^2=\dfrac{1}{9}\ \therefore 9(x^2+y^2)=1$

21. মূলবিন্দু থেকে (1,2) কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2 একক হলে বৃত্তটির সমীকরণ– [RU 07-08]

Sol^n. (1,2) কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্ত $x^2+y^2-2x-4y+c=0$ এবং (0,0) বিন্দু থেকে এ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{c}$. $\sqrt{c}=2\Rightarrow c=4$
$x^2+y^2-2x-4y+4=0$

22. একটি বৃত্তের সমীকরণ হল $2x^2+2y^2=25$**। 5 একক দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি জ্যা কেন্দ্রে কত রেডিয়ান কোণ তৈরী করবে? [SU 06-07]**

Sol^n. $2x^2+2y^2=25\Rightarrow x^2+y^2=\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$\cos\theta=\frac{(5/\sqrt{2})^2+(5/\sqrt{2})^2-5^2}{2.\frac{5}{\sqrt{2}}.\frac{5}{\sqrt{2}}}=0$$

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

বিন্যাস ও সমাবেশ

প্রশ্নমালা V A

1. সমাধান ঃ

(a) দেওয়া আছে, ${}^{n-1}P_3 : {}^{n+1}P_3 = 5 : 12 \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-1-3)!} : \frac{(n+1)!}{(n+1-3)!} = 5 : 12$ **[রা.'০৫]**

$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-4)!} \times \frac{(n-2)!}{(n+1)!} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-4)!} \times \frac{(n-2).(n-3).(n-4)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{5}{12}$

$\Rightarrow \frac{(n-2).(n-3)}{(n+1)n} = \frac{5}{12} \Rightarrow 12(n^2 - 5n + 6) = 5(n^2 + n) \Rightarrow 12n^2 - 5n^2 - 60n - 5n + 72 = 0$

$\Rightarrow 7n^2 - 65n + 72 = 0 \Rightarrow 7n^2 - 56n - 9n + 72 = 0 \Rightarrow 7n(n-8) - 9(n-8) = 0$

$\Rightarrow (n-8)(7n-9) = 0 \Rightarrow n = 8, \frac{9}{7}$ কিন্তু n ভগ্নাংশ হতে পারেনা । $n = 8$

(b) দেওয়া আছে, $4 \times {}^nP_3 = 5 \times {}^{n-1}P_3 \Rightarrow 4.\frac{n!}{(n-3)!} = 5\frac{(n-1)!}{(n-1-3)!}$ **[কু.'০৫]**

$\Rightarrow 4.\frac{n.(n-1)!}{(n-3).(n-4)!} = 5\frac{(n-1)!}{(n-4)!} \Rightarrow 4.\frac{n}{n-3} = 5 \Rightarrow 5n - 15 = 4n \quad \therefore n = 15$ (Ans.)

(c) সাধারণ সূত্র ব্যবহার না করে n- সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে প্রত্যেকবার যেকোন 3টিকে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবার 3টি জিনিস নিয়ে 3টি শূন্যস্থান যত রকম ভাবে পূরণ করা যায় তাই হবে n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবার 3টি জিনিস নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যার সমান ।

n সংখ্যক জিনিসের যেকোন একটিকে বসিয়ে প্রথম শূন্যস্থানটি n সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। প্রথম শূন্যস্থানটি n প্রকারের যেকোন এক উপায়ে পূরণ করার পর দ্বিতীয় শূন্য স্থানটি অবশিষ্ট (n – 1) সংখ্যক জিনিস দ্বারা (n – 1) সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায় । যেহেতু প্রথম শূন্য স্থানটি পূরণকরার প্রত্যেক উপায়ের সঙ্গে দ্বিতীয় স্থান পূরণের (n – 1) সংখ্যক সংযোগ করা যায়, সুতরাং প্রথম দুইটি শূন্য স্থান একত্রে n(n – 1) সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যাবে। অর্থাৎ ${}^nP_2 = n(n-1)$.

n সংখ্যক জিনিসের যেকোন দুইটি দ্বারা প্রথম ও দ্বিতীয় শূন্য স্থান পূরণ করার পর তৃতীয় শূন্য স্থানটি অবশিষ্ট (n – 2) সংখ্যক জিনিস দ্বারা (n – 2) সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং , প্রথম তিনটি স্থান একত্রে মোট n(n – 1)(n – 2) সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায় । অর্থাৎ ${}^nP_3 = n(n-1)(n-2)$.

2 'COURAGE' শব্দটির বর্ণগুলো নিয়ে কতগুলো বিন্যাস তৈরি করা করা যায়, যাদের প্রথমে একটি স্বরবর্ণ থাকবে?

সমাধান ঃ 'COURAGE' শব্দটিতে মোট 7টি বিভিন্ন অক্ষর আছে যাদের 4টি স্বরবর্ণ । প্রথম স্থানটি এই 4টি ভিন্ন স্বরবর্ণে যেকোনো একটি দ্বারা ${}^4P_1 = 4$ প্রকারে পূরণ করা যায় এবং অবশিষ্ট (7 – 1) অর্থাৎ , 6টি স্থান বাকি 6টি ভিন্ন অক্ষর দ্বারা $6! = 720$ প্রকারে পূরণ করা যায়। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 4 \times 720 = 2880$

3. (a) সাধারণ সূত্র ব্যবহার না করে (p + q) সংখ্যক জিনিসের p সংখ্যক জিনিস এক জাতীয় এবং বাকীগুলো সব ভিন্ন হলে, এদের সবগুলোকে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি , নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা x । এই x সংখ্যক বিন্যাসের যেকোন একটির অন্তর্গত p সংখ্যক এক জাতীয় জিনিসের স্থলে p সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস বসানো হলে অন্যদের স্থান পরিবর্তন না করে কেবল তাদের সাজানো

পরিবর্তন করে মোট p! সংখ্যক নতুন বিন্যাস পাওয়া যায় । সুতরাং , x সংখ্যক বিন্যাসের জন্য মোট $x \times p!$ সংখ্যক বিন্যাস হবে।

উপর্যুক্ত প্রক্রিয়ার পর দেখা যায় জিনিসগুলো সবই এখন ভিন্ন ভিন্ন এবং $(p + q)$ সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিসের সকগুলো নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা $(p + q)!$. $\quad x \times p! = (p+q)! \Rightarrow x = \dfrac{(p+q)!}{p!}$

(b) 10 টি বর্ণের কিছু সংখ্যক একজাতীয় এবং বাকীগুলো ভিন্ন ভিন্ন । যদি তাদের সবগুলোকে একত্রে নিয়ে 30240টি শব্দ গঠন করা যায়, তবে কতগুলো বর্ণ এক জাতীয়।

সমাধান ঃ মনে করি, 10টি বর্ণের r সংখ্যক একজাতীয় ।

এ 10টি বর্ণের সবগুলোকে একত্রে নিয়ে শব্দ গঠন করা যায় $\dfrac{10!}{r!}$ টি।

প্রশ্নমতে, $\dfrac{10!}{r!} = 30240 \Rightarrow r! = \dfrac{10!}{30240} = \dfrac{3628800}{30240} = 120 = 5! \qquad r = 5$ (Ans.)

4 (a) প্রমাণ কর যে, 'AMERICA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা ' CANADA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যার 21 গুণ । **[চ.'০৩]**

প্রমাণ ঃ 'AMERICA ' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 2 টি A .

'AMERICA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{7!}{2!} = 2520 = 21 \times 120$

' CANADA ' শব্দটিতে 3টি A সহ মোট 6টি বর্ণ আছে ।

' CANADA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{6!}{3!} = 120$

'AMERICA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা 'CANADA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যার 21 গুণ ।

4. (b) দেখাও যে, ' AMERICA ' শব্দটি বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় ' CALCUTTA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে তার দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায়। **[ঢা.'০৪; রা.'১৩]**

প্রমাণ ঃ ' AMERICA ' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 2টি A .

' AMERICA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{7!}{2!} = 2520.$

' CALCUTTA ' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যাদের 2টি C , 2টি A এবং 2টি T

' CALCUTTA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{8!}{2!2!2!} = 5040 = 2 \times 2520$

' AMERICA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় ' CALCUTTA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে তার দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায় ।

5 (a) ' ARRANGE' শব্দটির অক্ষরগুলো কত প্রকারে সাজানো যায়, যাতে R দুইটি পাশাপাশি থাকবে না ?

সমাধান ঃ 'ARRANGE' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 2টি A এবং 2টি R .

সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{7!}{2! \times 2!} = 1260$

2টি R কে একটি একক বর্ণ মনে করলে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(7 - 2 + 1)$ অর্থাৎ, 6টি যাদের 2টি A .

2টি R কে পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{6!}{2!} = 360$

R দুইটি পাশাপাশি না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা – R দুইটি পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 1260 - 360 = 900$

5 (b) 'ENGINEERING ' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। তাদের কতগুলোতে তিনটি E একত্রে থাকবে এবং কতগুলোতে এরা প্রথমে থাকবে। [ব.'০২; রা.'০৩; কু.'০৩]

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 'ENGINEERING' শব্দটিতে মোট 11টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 3টি E, 3টি N, 2টি G এবং 2টি I.

সব কয়টি বর্ণকে একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{11!}{3!.3!.2!.2!} = \frac{39916800}{6.6.2.2} = 277200$ (Ans.)

২য় অংশ ঃ যেহেতু E তিনটি একত্রে থাকে, অতএব তাদেরকে একটি একক বর্ণ মনে করলে মোট বর্ণগুলো হবে (EEE), N, G, I, N, R, I, N, G. এই 9টি বর্ণের 3টি N, 2টি G এবং 2টি I.

E তিনটি একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{9!}{3!.2!.2!} = \frac{362880}{6.2.2} = 15120$

৩য় অংশ ঃ 3 টি E প্রথমে রেখে অবশিষ্ট বর্ণের সংখ্যা হবে $(11-3)$ অর্থাৎ, 8টি ; যাদের 3টি N, 2টি G ও 2টি I

E তিনটি প্রথমে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{8!}{3!.2!.2!} = \frac{40320}{6.2.2} = 1680$ (Ans.)

6. (a) 'PARALLEL' শব্দটির বর্ণগুলোর সবগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর এবং স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে বর্ণগুলো কত প্রকারে সাজানো যায় তাও নির্ণয় কর।

[য.'০৬; ব.'০৭; সি.'০৮,'১১; চ.'০৮,'১২; দি.'০৯; রা.'১১; ঢা.'১৩]

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 'PARALLEL' শব্দটিতে 2টি A এবং 3টি L সহ মোট 8টি বর্ণ আছে ।

সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{8!}{2!.3!} = \frac{40320}{2.6} = 3360$

২য় অংশ ঃ স্বরবর্ণ 3টি পৃথক না হলে, তাদেরকে একটি একক বর্ণ ধরতে হবে এবং ফলে বর্ণগুলো হবে (AAE), P, R, L, L, L.

3টি L সহ এই 6টি বর্ণকে $\frac{6!}{3!} = 120$ উপায়ে এবং 2টি A সহ 3টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $\frac{3!}{2!} = 3$ উপায়ে সাজানো যায় ।

স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে বর্ণগুলোর মোট সাজানো সংখ্যা $= 120 \times 3 = 360$. (Ans.)

(b) স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি না রেখে ' TRIANGLE ' শব্দটির বর্ণগুলো কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর? [ঢা.'০৫; চ.'০৭; মা.বো.'০৯,'১৩; ব.'১০]

সমাধান ঃ 'TRIANGLE' শব্দটিতে মোট 8টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ।

সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= 8! = 40320$

3টি স্বরবর্ণকে একটি একক বর্ণ মনে করলে পৃথক বর্ণগুলো হবে (IAE), T, R, N, G এবং L. এই 6টি ভিন্ন বর্ণকে 6! প্রকারে এবং 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে 3! প্রকারে সাজানো যায় ।

স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$

স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা – স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 40320 - 4320 = 36000$

(c) স্বরবর্ণগুলোকে (i) কোন সময়ই পৃথক না রেখে এবং (ii) কোন সময়ই পাশাপাশি না রেখে ' DAUGHTER' শব্দটির বর্ণগুলো কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। [চ.'১০]

সমাধান ঃ (i) ' DAUGHTER ' শব্দটিতে মোট 8টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ ।

সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= 8! = 40320$

3টি স্বরবর্ণকে একটি একক বর্ণ মনে করলে পৃথক বর্ণগুলো হবে (AUE), D, G, H, T এবং R . এই 6টি ভিন্ন বর্ণকে 6! প্রকারে এবং 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে 3! প্রকারে সাজানো যায় ।

স্বরবর্ণগুলোকে কোন সময়ই পৃথক না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$

(ii) স্বরবর্ণগুলোকে কোন সময়ই পাশাপাশি না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা – স্বরবর্ণগুলোকে কোন সময়ই পৃথক না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 40320 - 4320 = 36000$

(d) 'DIGITAL' শব্দটির বর্ণগুলোর সবগুলো একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর এবং এদের কতগুলিতে স্বরবর্ণ গুলো একত্রে থাকবে? [য. '১০]

সমাধান ঃ ' DIGITAL ' শব্দটিতে 2টি I সহ মোট 7টি বর্ণ আছে ।

সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{7!}{2!} = 2520$ (Ans.)

3টি স্বরবর্ণ I, I ও A কে একটি একক বর্ণ মনে করলে পৃথক বর্ণগুলো হবে (I I A), D, G, T এবং L . এই 5টি ভিন্ন বর্ণকে 5! প্রকারে এবং 3টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $\frac{3!}{2!} = 3$ প্রকারে সাজানো যায় ।

স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 5! \times 3 = 120 \times 3 = 360$ (Ans.)

7. 9 টি বলের 7টি বল লাল, 2টি সাদা (i) এদের উপর কোন বিধি–নিষেধ আরোপ না করে এবং (ii) সাদা বল দুইটি পাশাপাশি না রেখে বলগুলোকে কত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে 9 টি বলের মধ্যে 7টি লাল এবং 2টি সাদা।

(i) এদের উপর কোন বিধি–নিষেধ আরোপ না করে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \frac{9!}{7! \times 2!} = 36$

(ii) সাদা বল দুইটি একটি একক বল মনে করলে মোট বলের সংখ্যা হবে $(9 - 2 + 1)$ অর্থাৎ, 8টি যাদের মধ্যে 7টি লাল । অতএব, সাদা বল দুইটি পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{8!}{7!!} = 8$

সাদা বল দুইটি পাশাপাশি না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 36 - 8 = 28$

8.(a) স্বরবর্ণগুলোর স্থান পরিবর্তন না করে ' PERMUTATION ' শব্দটির বর্ণগুলো কত উপায়ে পুনর্বিন্যাস করা যায়? [ব.'০০, ০৫ ; চ.'০০, ০৪; ঢা.'০৯; দি.'১৩]

সমাধান ঃ ' PERMUTATION ' শব্দটিতে মোট 11টি বর্ণ আছে যাদের 5টি স্বরবর্ণ।

5 টি স্বরবর্ণের স্থান পরিবর্তন না করে 2টি T সহ অবশিষ্ট $(11 - 5)$ বা, 6টি ব্যঞ্জন বর্ণকে $\frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$ উপায়ে সাজানো যায় ।

নির্ণেয় পুনর্বিন্যাস করার উপায় $= 360 - 1 = 359$ (Ans.)

(b) স্বরবর্ণগুলোর (i) ক্রম পরিবর্তন না করে (ii) স্থান পরিবর্তন না করে এবং (iii) স্বরবর্ণের ও ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে 'DIRECTOR' শব্দটি কত প্রকারে পুনরায় সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (i) 'DIRECTOR' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ । ক্রম পরিবর্তন না করায় স্বরবর্ণ 3টি (I , E , O) পরস্পরের মধ্যে আগেরটি পরে ও পরেরটি আগে আসতে পারে না । তাই তারা 3টি এক জাতীয় বর্ণের ন্যায় অবস্থান করে । তাহলে, 8 টি বর্ণের মধ্যে 3টি স্বরবর্ণ এক জাতীয় এবং 2টি R অন্য এক জাতীয় ।

স্বরবর্ণগুলোর ক্রম পরিবর্তন না করে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{8!}{3! \times 2!} = 3360$

'DIRECTOR' শব্দটি নিজেই একটি সাজানো সংখ্যা।

নির্ণেয় পুনরায় সাজানো সংখ্যা $= 3360 - 1 = 3359$

(ii) স্বরবর্ণ 3টির স্থান নির্দিষ্ট রেখে 2টি R সহ 5টি ব্যঞ্জন বর্ণকে $\frac{5!}{2!} = 60$ রকমে সাজানো যায়।

স্বরবর্ণগুলোর স্থান পরিবর্তন না করে নির্ণেয় পুনরায় সাজানো সংখ্যা $= 60 - 1 = 59$

(iii) এক্ষেত্রে , স্বরবর্ণ 3টি নির্দিষ্ট 3টি (২য় , ৪র্থ এবং ৭ম) স্থানে নিজেরা $3! = 6$ প্রকারে বিন্যস্ত হয় এবং ব্যঞ্জন বর্ণ 5টি নির্দিষ্ট 5টি (১ম , ৩য় , ৫ম ৬ষ্ঠ এবং ৮ম) স্থানে নিজেরা $\frac{5!}{2!} = 60$ প্রকারে বিন্যস্ত হয়।

স্বরবর্ণের ও ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 6 \times 60 - 1 = 359$

9.(a) 'MILLENNIUM ' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। তাদের কতগুলোতে প্রথমে ও শেষে M থাকবে? [সি.,০৬, '১২; প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান ঃ১ম অংশঃ 'MILLENNIUM' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 2টি I, 2টি M, 2টি L ও 2টি N

এ শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো যায় $\frac{10!}{2! \times 2! \times 2! \times 2!} = 226800$ উপায়ে।

২য় অংশ ঃ প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি ' L ' দ্বারা নিদিষ্ট করে 2টি M এবং 2টি N সহ অবশিষ্ট (10 – 2) অর্থাৎ , 8টি বর্ণকে 8টি স্থানে $\frac{8!}{2! \times 2! \times 2!} = 5040$ উপায়ে সাজানো যায় ।

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা 226800 ও 5040.

(b) 'IMMEDIATE' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। কতগুলোর প্রথমে T এবং শেষে A থাকবে ?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ ' IMMEDIATE ' শব্দটিতে মোট 9টি বর্ণ আছে যাদের 2টি I, 2টি M এবং 2টি E .

এ শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো যায় $= \frac{9!}{2! \times 2! \times 2!} = 45360$ উপায়ে।

২য় অংশ ঃ প্রথম স্থানটি ' T ' এবং শেষ স্থানটি ' A ' দ্বারা নিদিষ্ট করে অবশিষ্ট (9 – 2) বা 7টি বর্ণকে (যাদের 2টি I, 2টি M এবং 2টি E) 7টি স্থানে $\frac{7!}{2! \times 2! \times 2!} = 630$ উপায়ে সাজানো যায় ।

(c) 'DAUGHTER' শব্দটির বর্ণগুলো মোট কত রকমে সাজানো যাবে ? কতগুলো D দ্বারা শুরু হবে? কতগুলোর প্রথমে D এবং শেষে R থাকবে? [ব.'০৩]

কতগুলোর প্রথমে D থাকবে কিন্তু শেষে R থাকবে না ? কতগুলোর প্রথমে D এবং শেষে R থাকবে না ?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ ' DAUGHTER' শব্দটির 8 টি ভিন্ন বর্ণ আছে ।

নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 8! = 40320$

২য় অংশ ঃ প্রথম স্থানাটি 'D' দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-1)$ অর্থাৎ, 7টি বর্ণকে $7!$ উপায়ে সাজানো যায়।

নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 7! = 5040$ (Ans.)

৩য় অংশ ঃ প্রথম স্থানটি 'D' এবং শেষ স্থানটি 'R' দ্বারা নিদিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-2)$ বা, 6টি বর্ণকে $6!$ উপায়ে সাজানো যায়।

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 6! = 720$ (Ans.)

৪র্থ অংশ ঃ প্রথমে D থাকবে কিন্তু শেষে R থাকবে না এমন সাজানো সংখ্যা = প্রথমে D থাকে এমন সাজানো সংখ্যা – প্রথমে D এবং শেষে R থাকে এমন সাজানো সংখ্যা $= 5040 - 720 = 4320$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ যেহেতু প্রথম স্থানটি D দ্বারা পূরণ করতে হয় এবং শেষের স্থানটি R দ্বারা পূরণ করা যায় না, অতএব শেষের স্থানটি $(8-2)$ বা, 6টি বর্ণ দ্বারা $^6P_1$ ভাবে পূরণ করা যায়

আবার, মাঝের $(8-2)$ বা, 6টি স্থান অবশিষ্ট 6টি বর্ণ দ্বারা $6!$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^6P_1 \times 6! = 6 \times 720 = 4320$

৫ম অংশ ঃ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা – প্রথমে 'D' নিয়ে সাজানো সংখ্যা – শেষে 'R' নিয়ে সাজানো সংখ্যা + প্রথমে 'D' এবং শেষে 'R' নিয়ে সাজানো সংখ্যা

$$= 8! - 7! - 7! + 6! = 40320 - 2.5040 + 720 = 41040 - 10080 = 30960$$

10. (a) 'POSTAGE' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে যাতে স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থান দখল করবে? কতগুলোতে ব্যঞ্জনবর্ণগুলো একত্রে থাকবে? [কু.'১৪]

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 'POSTAGE' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ। এখানে 7টি স্থানের মধ্যে 3টি জোড় স্থান (২য়, ৪র্থ এবং ৬ষ্ঠ) 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $3!$ উপায়ে এবং 4টি বিজোড় স্থান (১ম, ৩য়, ৫ম এবং ৭ম) 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা $4!$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

২য় অংশ ঃ 4টি ব্যঞ্জনবর্ণকে একটি একক বর্ণ মনে করলে ভিন্ন বর্ণ হবে (PSTG), O, A, E। এই 4টি বর্ণকে $4!$ প্রকারে এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $4!$ প্রকারে সাজানো যাবে।

ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$

(b) স্বরবর্ণগুলোকে কেবল (i) জোড় স্থানে (ii) বিজোড় স্থানে রেখে 'ARTICLE' শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। [ঢা. '১০]

সমাধান ঃ (i) 'ARTICLE' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ। এখানে 7টি স্থানের মধ্যে 3টি জোড় স্থান (২য়, ৪র্থ এবং ৬ষ্ঠ) 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $3!$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 4টি স্থান 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা $4!$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

স্বরবর্ণগুলোকে কেবল জোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

(ii) 7টি স্থানের মধ্যে 4টি বিজোড় স্থান (১ম, ৩য়, ৫ম এবং ৭ম) এর 3টি স্থান 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^4P_3$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 4টি স্থান 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা $4!$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

স্বরবর্ণগুলোকে কেবল বিজোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^4P_3 \times 4! = 24 \times 24 = 576$

10. (c) 'ALLAHABAD' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। এদের কতগুলোতে A চারটি একত্রে থাকবে ? এদের কতগুলোতে স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থান দখল করবে?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 'ALLAHABAD' শব্দটিতে মোট 9টি বর্ণের মধ্যে 4টি A এবং 2টি L আছে।

সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{9!}{4!\times 2!} = 7560$

২য় অংশ ঃ A চারটিকে একটি একক বর্ণ মনে করলে ভিন্ন বর্ণ হবে (AAAA), L, L, H, B এবং D. 2টি L সহ এ 6টি বর্ণকে $\dfrac{6!}{2!} = 360$ উপায়ে এবং A চারটিকে নিজেদের মধ্যে $\dfrac{4!}{4!} = 1$ উপায়ে সাজানো যাবে।

A চারটি একত্রে নিয়ে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 360\times 1 = 360$

৩য় অংশ ঃ 4টি স্থানের মধ্যে 4টি জোড় স্থান 4টি স্বরবর্ণ অর্থাৎ 4টি A দ্বারা $\dfrac{4!}{4!} = 1$ উপায়ে এবং 5টি বিজোড় স্থান 2টি L সহ 5টি ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা $\dfrac{5!}{2!} = 60$ উপায়ে সাজানো যাবে।

স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 1\times 60 = 60$

11 (a) দেখাও যে, দুইখানা বিশেষ পুস্তক একত্রে না রেখে n সংখ্যক বিভিন্ন পুস্তক যত রকমে সাজানো যায় তার সংখ্যা (n – 2)(n – 1)!

সমাধান ঃ n সংখ্যক বিভিন্ন পুস্তকের সবগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= n!$

দুইখানা বিশেষ পুস্তককে একটি একক পুস্তক মনে করলে সাজানোর জন্য $(n-1)$ সংখ্যক পুস্তক পাই। এই $(n-1)$ সংখ্যক পুস্তক একত্রে $(n-1)!$ প্রকারে এবং বিশেষ পুস্তক দুইটিকে নিজেদের মধ্যে $2! = 2$ প্রকারে সাজানো যায়।

দুইখানা বিশেষ পুস্তক একত্রে রেখে সাজানো সংখ্যা $= (n-1)!\times 2 = 2(n-1)!$

দুইখানা বিশেষ পুস্তক একত্রে না রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= n! - 2(n-1)! = n.(n-1)! - 2(n-1)!$
$= (n-2).(n-1)!$

(b) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনসকে কত রকমে এক সারিতে সাজানো যায়, যাতে বিশেষ দুইটি জিনিস সারির প্রথমে বা শেষে না থাকে?

সমাধান ঃ বিশেষ জিনিস দুইটি সারির প্রথমে বা শেষে না থাকলে অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন জিনস দ্বারা প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি ${}^{n-2}P_2$ উপায়ে পূরণ করা যায় এবং অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন জিনস দ্বারা মধ্যের $(n-2)$ সংখ্যক স্থান $(n-2)!$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^{n-2}P_2\times(n-2)! = (n-2)(n-3).(n-2)!$

(c) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r সংখ্যক একবারে নিয়ে কত রকমে এক সারিতে সাজানো যায়, যাতে বিশেষ দুইটি জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকে কিন্তু তারা সারির প্রথমে বা শেষে থাকে না?

সমাধান ঃ বিশেষ জিনিস দুইটি সারির প্রথমে বা শেষে না থাকলে অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন জিনস দ্বারা প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি ${}^{n-2}P_2$ উপায়ে পূরণ করা যায় এবং অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন জিনস দ্বারা মধ্যের $(r-2)$ সংখ্যক স্থান ${}^{n-2}P_{r-2}$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^{n-2}P_2\times {}^{n-2}P_{r-2} = (n-2)(n-3)\dfrac{(n-2)!}{(n-2-r+2)!} = \dfrac{(n-2)!}{(n-r)!}(n-2)(n-3)$

12.(a) 'SECOND ' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে একটি স্বরবর্ণ ও দুইটি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যেতে পারে, যখন স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যম স্থান দখল করে? [ব.'০৩]

সমাধান ঃ ' SECOND ' শব্দটিতে মোট 6টি বর্ণ আছে যাদের 2টি স্বরবর্ণ এবং 3টি ব্যঞ্জন বর্ণ ।
মধ্যম স্থানটি দুইটি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^2P_1 = 2$ উপায়ে এবং প্রান্ত স্থান 2টি 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা $^4P_2 = 12$ উপায়ে পুরণ করা যেতে পারে ।

নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 2 \times 12 = 24$ (Ans.)

(b) 7টি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 3টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ থেকে দুইটি ব্যঞ্জনবর্ণ ও একটি স্বরবর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যায়, যাতে স্বরবর্ণটি ব্যঞ্জনবর্ণের মাঝখারে থাকবে?

সমাধান ঃ মধ্যম স্থানটি 3টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^3P_1 = 3$ উপায়ে এবং প্রান্ত স্থান 2টি, 7টি বিভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা $^7P_2 = 42$ উপায়ে পূরণ করা যাবে । $\therefore$ নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 3 \times 42 = 126$

(c) যদি ' CAMBRIDGE ' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে কেবল 5টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করা হয় তবে কতগুলোতে প্রদত্ত শব্দটির সব কয়টি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকবে? [চ.'০৪; কু.'০৭]

সমাধান ঃ 'CAMBRIDGE' শব্দটিতে মোট 9টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ এবং 6টি ব্যঞ্জন বর্ণ।

5টি স্থান 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^5P_3 = 60$ উপায়ে পূরণ করা যাবে । অবশিষ্ট $(5 - 3)$ অর্থাৎ, 2টি স্থান 6টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা $^6P_2 = 30$ উপায়ে পূরণ করা যাবে ।

নির্ণেয় শব্দ .গঠন করার উপায় সংখ্যা $= 60 \times 30 = 1800$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ প্রদত্ত শব্দটিতে মোট 9টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ এবং 6টি ব্যঞ্জন বর্ণ।

6টি ব্যঞ্জন বর্ণ হতে 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ $^6C_2$ উপায়ে বেছে নেওয়া যায় । 3 টি স্বরবর্ণ এবং 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ $5!$ প্রকারে বিন্যস্ত হয় ।

নির্ণেয় শব্দ গঠন করার উপায় সংখ্যা $= {^6C_2} \times 5! = 15 \times 120 = 1800$ (Ans.)

12. (d) 'EQUATION' শব্দটির বর্ণগুলো হতে প্রত্যেকবার 4টি বর্ণ নিয়ে বিভিন্ন শব্দ গঠন করা হল, এদের কতগুলোতে Q বর্তমান থাকবে কিন্তু N থাকবে না ? [য.'০৮]

সমাধান ঃ 'EQUATION' শব্দটিতে 8 টি ভিন্ন বর্ণ আছে। 4টি বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দে 4টি স্থানে Q বর্তমান থাকবে $^4P_1 = 4$ উপায়ে। অবশিষ্ট $(4 - 1)$ অর্থাৎ 3টি স্থান 6টি বর্ণ E, U, A, T, I এবং O দ্বারা পূরণ করা যাবে $^6P_3 = 120$ উপায়ে। Q কে বর্তমান রেখে এবং N কে বর্তমান না রেখে শব্দ হঠন করা যাবে $4 \times 120 = 480$ টি।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ Q কে বর্তমান রেখে এবং N কে বর্তমান না রেখে 4টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করা হলে অন্য $(8-2) = 6$ টি বর্ণ হতে 3টি বর্ণ নিতে হবে এবং তা $^6C_3 = 20$ উপায়ে নেওয়া যায়। আবার, 4টি ভিন্ন বর্ণ দ্বারা শব্দ গঠন করা যায় $4! = 24$ টি।

Q কে বর্তমান রেখে এবং N কে বর্তমান না রেখে শব্দ হঠন করা যায় $20 \times 24 = 480$ টি।

13. (a) 10 টি বস্তুর 5টি একবারে নিয়ে কতগুলো বিন্যাসের মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকবে? [কু.'১০]

সমাধান ঃ 5টি একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের 5টি স্থান 2টি বিশেষ বস্তু দ্বারা $^5P_2 = 20$ উপায়ে পূরণ করার পর অবশিষ্ট $(5 - 2)$ অর্থাৎ, 3টি স্থান বাকি $(10 - 2)$ অর্থাৎ, 8টি বস্তু দ্বারা $^8P_3 = 336$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 20 \times 336 = 6720$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ 2 টি বিশেষ বস্তুকে সর্বদা অন্তর্ভুক্ত রেখে অবশিষ্ট $(10-2)$ বা, 8টি বস্তু হতে 3টি বস্তু $^8C_3$ উপায়ে বেছে নেওয়া যাবে। আবার, 5 টি বস্তুকে $5!$ উপায়ে সাজানো যাবে।

নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^8C_3 \times 5! = 56 \times 120 = 6720$

(b) ইংরেজি বর্ণমালার 26টি বর্ণ থেকে কতপ্রকারে 5টি বিভিন্ন বর্ণ সমন্বিত একটি শব্দ গঠন করা যায়, যাদের মধ্যে A এবং L অক্ষর দুইটি অবশ্যই থাকবে ?

সমাধান ঃ 5টি অক্ষর নিয়ে গঠিত শব্দে 5টি স্থান A এবং L অক্ষর দ্বারা $^5P_2 = 20$ উপায়ে পূরণ করার পর অবশিষ্ট $(5-2)$ অর্থাৎ, 3টি স্থান বাকি $(26-2)$ অর্থাৎ, 24টি অক্ষর দ্বারা $^{24}P_3 = 12144$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

নির্ণেয় সংখ্যা $= 20 \times 12144 = 242880$

14 (a) একজন লোকের একটি সাদা, দুইটি লাল এবং তিনটি সবুজ পতাকা আছে। একটির উপর আরেকটি সাজানো চারটি পতাকা নিয়ে সে কতগুলো বিভিন্ন সংকেত তৈরী করতে পারবে ? [রা.'০২]

সমাধান ঃ মোট পতাকার সংখ্যা $= 1 + 2 + 3 = 6$.

6টি পতাকা হতে 4টি পতাকা নির্বাচন করে সে নিম্নরূপে সংকেত তৈরী করতে পারবে ঃ

সাদা পতাকা (1)	লাল পতাকা (2)	সবুজ পতাকা (3)	সংকেত তৈরীর উপায় সংখ্যা
1	2	1	$\frac{4!}{2!} = 12$
1	1	2	$\frac{4!}{2!} = 12$
1	0	3	$\frac{4!}{3!} = 4$
0	1	3	$\frac{4!}{3!} = 4$
0	2	2	$\frac{4!}{2!2!} = 6$

সে সংকেত তৈরী করতে পারবে $(12 + 12 + 4 + 4 + 6)$ বা, 38 উপায়ে।

14 (b) একজন লোকের একটি সাদা, দুইটি লাল এবং তিনটি সবুজ পতাকা আছে। একটির উপর আরেকটি সাজানো পাঁচটি পতাকা নিয়ে সে কতগুলো বিভিন্ন সংকেত তৈরী করতে পারবে ? [কু.'০১; দি.'১০; প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান ঃ মোট পতাকার সংখ্যা $= 1 + 2 + 3 = 6$.

6টি পতাকা হতে 5টি পতাকা নির্বাচন করে সে নিম্নরূপে সংকেত তৈরী করতে পারবে ঃ

সাদা পতাকা (1)	লাল পতাকা (2)	সবুজ পতাকা (3)	সংকেত তৈরীর উপায় সংখ্যা
1	2	2	$\frac{5!}{2!2!} = 30$
1	1	3	$\frac{5!}{3!} = 20$
0	2	3	$\frac{5!}{2!3!} = 10$

নির্ণেয় সংখ্যা $= 30 + 20 + 10 = 60$ (Ans.)

15. (a) দুইজন B.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে পাশাপাশি না বসিয়ে 14 জন I.Sc. ক্লাসের ও 10 জন B.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে কত রকমে একটি লাইনে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর। [য.'০৪]

সমাধান ঃ 14 জন I.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে একটি লাইনে 14! রকমে সাজানো যায়। এই 14 জন I.Sc. ক্লাসের ছাত্রের মাঝখানে $(14-1) = 13$ টি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। এ ছাড়া লাইনের দুই প্রান্তে আরও দুইটি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। সুতরাং, $(13+2) = 15$ টি ফাঁকা স্থানে 10 জন B.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে $^{15}P_{10}$ রকমে সাজানো যায়।

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 14! \times {}^{15}P_{10}$

15 (b) দুইটি যোগবোধক চিহ্ন পাশাপাশি না রেখে p-সংখ্যক যোগবোধক চিহ্ন ও q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্ন (p < q) কত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ p-সংখ্যক যোগবোধক চিহ্ন একজাতীয় এবং q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্ন একজাতীয়। q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্নকে এক সারিতে $\frac{q!}{q!} = 1$ রকমে সাজানো যায়।এই q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্নের মাঝখানে $(q-1)$ টি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। এ ছাড়া সারির দুই প্রান্তে আরও দুইটি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। সুতরাং, $\{(q-1)+2\} = (q+1)$ টি ফাঁকা স্থানে p-সংখ্যক যোগবোধক চিহ্নকে $\frac{^{q+1}P_p}{p!} = \frac{(q+1)!}{p! \times (q+1-p)!}$ রকমে সাজানো যায়।

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 1 \times \frac{(q+1)!}{p! \times (q+1-p)!} = \frac{(q+1)!}{p! \times (q-p+1)!}$

16 (a) 3, 4, 5, 6, 7, 8 অঙ্কগুলোর একটিকেও পুনরাবৃত্তি না করে 5000 এবং 6000 মধ্যবর্তী কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? [ব.'১৩]

সমাধান ঃ 5000 এবং 6000 মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলো অবশ্যই 4 অঙ্কের হতে হবে এবং প্রথম অঙ্কটি 5 দ্বারা আরম্ভ হতে হবে। এখানে 6টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে। প্রথম স্থানটি 5 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(4-1) = 3$টি স্থান বাকি $(6-1) = 5$টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে $^5P_3$ উপায়ে। $\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= {}^5P_3 = 60$

(b) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 5, 6, 7, 8, 0 অঙ্কগুলো দ্বারা পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট এবং 4 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ এখানে শূন্যসহ মোট 5টি অঙ্ক আছে । সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। 4 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলোর শেষের অঙ্ক দুইটি দ্বারা গঠিত সংখ্যা 4 দ্বারা বিভাজ্য হবে। অতএব, 4 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলোর শেষের অঙ্ক দুইটি দ্বারা গঠিত সংখ্যা 08, 60, 80, 56, 68, 76 হবে।

শেষ দুইটি স্থানে 08, 60 ও 80 এর যেকোন একটি দ্বারা $^3P_1$ উপায়ে পূরণ করে অবশিষ্ট $(5-2) = 3$টি স্থান বাকি $(5-2) = 3$টি অঙ্ক দ্বারা 3! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

আবার, শেষ দুইটি স্থানে 56, 68 ও 76 এর যেকোন একটি দ্বারা $^3P_1$ উপায়ে এবং 0 ব্যতীত অপর দুইটি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা প্রথম স্থানটি $^2P_1$ উপায়ে পূরণ করে অবশিষ্ট $(5-3) = 2$টি স্থান 0 ও অপর একটি অঙ্ক দ্বারা 2! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

4 দ্বারা বিভাজ্য মোট সংখ্যা $= {}^3P_1 \times 3! + {}^3P_1 \times {}^2P_1 \times 2! = 3 \times 6 + 3 \times 2 \times 2 = 18 + 12 = 30$

17. (a) প্রতিটি অঙ্ক যতবার আছে এর বেশি সংখ্যকবার ব্যবহার না করে 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6 এর বিজোড় অঙ্কগুলো সবসময় বিজোড় স্থানে রেখে সাত অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ সাত অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার 4টি বিজোড় স্থান ও 3টি জোড় স্থান থাকে। 3, 5, 3 ও 5 অঙ্কগুলো দ্বারা 4টি বিজোড় স্থান $\frac{4!}{2!\times 2!} = 6$ উপায়ে এবং 4, 4 ও 6 অঙ্কগুলো দ্বারা বাকি স্থান 3টি $\frac{3!}{2!} = 3$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 6\times 3 = 18$

(b) প্রত্যেক সংখ্যায় প্রতিটি অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7, 8, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়, যাদের প্রথমে ও শেষে জোড় অঙ্ক থাকবে?

সমাধান ঃ এখানে 9টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে যাদের 4টি জোড় অঙ্ক ।

প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি 4টি জোড় অঙ্কের যেকোন দুইটি দ্বারা $^4P_2$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট $(9-2) = 7$টি স্থান বাকি $(9-2) = 7$টি অঙ্ক দ্বারা $7!$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

প্রথমে ও শেষে জোড় অঙ্ক নিয়ে মোট সংখ্যা $= {}^4P_2 \times 7! = 12 \times 5040 = 60480$

18. কোন সংখ্যায় কোন অঙ্কের পুনরাবৃত্তি না করে 0 ,3 , 5 , 6 , 8 অঙ্কগুলো দ্বারা 4000-এর চেয়ে বড় কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ প্রশ্নমতে সংখ্যাগুলো 4 অঙ্কের ও 5 অঙ্কের হবে।

4000-এর চেয়ে বড় 4 অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যাগুলো 5 , 6 কিংবা 8 দ্বারা আরম্ভ হবে।

4 অঙ্ক দ্বারা গঠিত মোট সংখ্যা $= {}^3P_1 \times {}^4P_3 = 3 \times 24 = 72$

4000-এর চেয়ে বড় 5 অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যাগুলো 3, 5 , 6 কিংবা 8 দ্বারা আরম্ভ হবে।

4 অঙ্ক দ্বারা গঠিত মোট সংখ্যা $= {}^4P_1 \times {}^4P_4 = 4\times 24 = 96$

নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 72 + 96 = 168$

19 (a)1,2,3, 4 অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে তিন অঙ্কের বেশি নয় এমন কতগুলি সংখ্যা তৈরী করা যায় ?

সমাধান ঃ এখানে অঙ্ক 4টির প্রতিটি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করা যাবে।

∴ এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 4 উপায়ে।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রতিটি স্থান (একক বা দশক) 4টি অঙ্ক দ্বারা 4 উপায়ে পূরণ করা যাবে। অতএব, দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $4\times 4 = 4^2$ উপায়ে।

অনুরূপভাবে, তিন ভঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 4^3 উপায়ে।

নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= (4+4^2+4^3) = (4+16+64) = 84$

(b) 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 অঙ্কগুলো যেকোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে 10000 এর ছোট কতগুলো বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ শূন্যসহ 8টি অঙ্কের প্রতিটি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করা যাবে। সংখ্যার শেষে 1 , 3, 5 বা 7 থাকলে সংখ্যাগুলি বিজোড় হবে এবং প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা । তাই, শেষ স্থানটি (অর্থাৎ একক স্থান) এ চারটি বিজোড় সংখ্যা দ্বারা 4 উপায়ে, বাম দিক হতে প্রথম স্থানটি 0 ব্যতীত বাকী 7টি অঙ্ক দ্বারা 7 উপায়ে এবং অন্যান্য স্থানগুলির প্রতিটি শূন্যসহ 8টি অঙ্ক দ্বারা 8 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

∴ এক অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে 4 উপায়ে।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে 7×4 অর্থাৎ 28 উপায়ে।

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে $7\times 8\times 4$ অর্থাৎ 224 উপায়ে।

চার অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে $7\times8\times8\times4$ অর্থাৎ 1792 উপায়ে।

নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= (4+28+224+1792) = 2048$

20. (a) একটি প্রফেসরের পদের জন্য 3 জন প্রার্থী 5 জন লোকের ভোটে একজন নির্বাচিত হবে। কত প্রকারে ভোট দেওয়া যেতে পারে? [য.'০৫; কু.'০৯; রা.'১০]

সমাধান ঃ প্রত্যেক ভোটার 3 জন প্রর্থীকে ভোট দিতে পারে 3 উপায়ে।

5 জন ভোটার 3 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারে $3\times3\times3\times3\times3 = 3^5 = 243$ উপায়ে।

243 প্রকারে ভোট দেওয়া যেতে পারে।

(b) তিনটি পুরস্কারের একটি সদাচারের জন্য, একটি ক্রীড়ার জন্য এবং একটি সাধারণ উন্নতির জন্য। 10 জন বালকের মধ্যে এগুলো কত রকমে বিতরণ করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ প্রত্যেক পুরস্কার 10 জন বালকের মধ্যে 10 উপায়ে বিতরণ করা যায়।

তিনটি পুরস্কার 10 জন বালকের মধ্যে বিতরণ করার মোট উপায় সংখ্যা $= 10\times10\times10 = 1000$

21. (a) গণিতের 5 খানা, পদার্থবিজ্ঞানের 3 খানা ও রসায়নবিজ্ঞানের 2 খানা পুস্তককে একটি তাকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে যাতে একই বিষয়ের পুস্তকগুলো একত্রে থাকে?

সমাধান ঃ যেহেতু একই বিষয়ের পুস্তকগুলো একত্রে থাকে, অতএব গণিতের 5 খানা পুস্তককে গণিতের একটি একক পুস্তক, পদার্থবিজ্ঞানের 3 খানা পুস্তককে পদার্থবিজ্ঞানের একটি একক পুস্তক এবং রসায়নবিজ্ঞানের 2 খানা পুস্তককে রসায়নবিজ্ঞানের একটি একক পুস্তক মনে করতে হবে।

এই 3 বিষয়ের পুস্তক $3! = 6$ উপায়ে এবং গণিতের 5 খানা পুস্তককে নিজেদের মধ্যে $5! = 120$ উপায়ে, পদার্থবিজ্ঞানের 3 খানা পুস্তককে $3! = 6$ উপায়ে ও রসায়নবিজ্ঞানের 2 খানা পুস্তককে $2! = 2$ উপায়ে সাজানো যাবে।

একই বিষয়ের পুস্তকগুলো একত্রে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 6\times120\times6\times2 = 8640$

(b) একটি তালার 4টি রিং এর প্রত্যেকটিতে 5টি করে অক্ষর মুদ্রিত আছে। প্রতিটি রিং এর একটি করে 4টি অক্ষরের একমাত্র বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা গেলে কতগুলি বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা যাবে না ?

সমাধান ঃ প্রতিটি বিন্যাসের প্রথম স্থানটি প্রথম রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।

প্রতিটি বিন্যাসের দ্বিতীয় স্থানটি দ্বিতীয় রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।

প্রতিটি বিন্যাসের তৃতীয় স্থানটি তৃতীয় রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।

প্রতিটি বিন্যাসের চতুর্থ স্থানটি চতুর্থ রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।

চারটি রিং এর অক্ষরগুলি দ্বারা গঠিত বিন্যাসের সংখ্যা $= 5\times5\times5\times5 = 25$

যেসব বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা যাবেনা তাদের সংখ্যা $= 625-1 = 624$

22. (a) 8 জন মেয়ে বৃত্তাকারে নাচবে। কত প্রকারে পৃথক পৃথক ভাবে তারা বৃত্তাকারে দাঁড়াবে?

সমাধান ঃ 1 জন মেয়েকে নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-1)$ বা, 7 জন মেয়েকে $7!$ প্রকারে সাজানো যায়।

$7! = 5040$ ভাবে তারা বৃত্তাকারে দাঁড়াতে পারবে।

(b) 8 টি ভিন্ন ধরনের মুক্তা কত রকমে একটি ব্যান্ডে লাগিয়ে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ 1টি মুক্তা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-1)$ বা, 7 টি মুক্তাকে $7!$ প্রকারে একটি ব্যান্ডে লাগিয়ে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে। কিন্তু হারটি একটি চক্র বিন্যাস যা উপর এবং নিচ থেকে অথবা উল্টিয়ে দেখা যায়।

$\frac{7!}{2} = \frac{5040}{2} = 2520$ রকমে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে।

22 (c) দুইজন কলা বিভাগের ছাত্রকে পাশাপাশি না বসিয়ে 8 জন বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র ও 7 জন কলা বিভাগের ছাত্রকে কত রকমে একটি গোল টেবিলের চারপাশে বসানো যায়, তা নির্ণয় কর। [বা.'১১; ঢা.'১২]

সমাধান ঃ 1 জন বিজ্ঞানের ছাত্রকে নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-1)$ বা, 7 জন বিজ্ঞানের ছাত্রকে একটি গোল টেবিলের চারপাশে $7!$ রকমে বসানো যায় । 8 জন বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্রের মধ্যের 8 টি আসনে 7 জন কলা বিভাগের ছাত্রকে $^8P_7$ রকমে বসানো যায় । $\therefore$ তাদেরকে $7!\times {^8P_7}$ রকমে বসানো যেতে পারে।

(d) 15 সদস্যের একটি কমিটিকে গোলটেবিলে 15টি আসনে কতভাবে বসানো যায়? প্রধান অতিথিকে মাঝের আসনে বসিয়ে তাদেরকে একটি লম্বা টেবিলে 15টি আসনে কতভাবে বসানো যায় তাও নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ 15 জন সদস্যের মধ্যে একজনকে একটি আসনে নির্দিষ্ট করে বাকি 14 জনকে গোল টেবিলের 14টি আসনে $14!$ উপায়ে বসানো যাবে। সুতরাং , নির্ণেয় সংখ্যা $= 14!$

আবার , একটি লম্বা টেবিলে প্রধান অতিথিকে মাঝের আসনে বসিয়ে বাকি 14 টি আসনে 14 জনকে $14!$ উপায়ে বসানো যাবে। সুতরাং , নির্ণেয় সংখ্যা $= 14!$

23 (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 0, 2 , 4 , 6 , 8 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 0, 2 , 4 , 6 , 8 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় সংখ্যা পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট হবে।

পাঁচ স্থানের যেকোন একটি স্থান এ পাঁচটি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট চারটি স্থান বাকী চারটি অঙ্ক দ্বারা $4!$ উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং , প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক, শতক, হাজার বা অযুত) $4!$ সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হবে।

পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $= 4!\times(0+2+4+6+8) = 24\times20 = 480$

প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 0, 2 , 4 , 6 , 8 অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 480\times1+480\times10+480\times100+480\times1000+480\times10000$

$$= 480(1+10+100+1000+10000) = 480\times11111 = 5333280$$

তবে এদের মধ্যে প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা এবং এরূপ সংখ্যার সমষ্টি = প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 2 4 6 8 অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি

$= 3!\times(0+2+4+6+8)\times1111 = 6\times20\times1111 = 133320$

নির্ণেয় সমষ্টি $= 5333280 - 133320 = 5199960$

[বি.দ্র. : নির্ণেয় সমষ্টি $= (2+4+6+8)(4!\times11111 - 3!\times1111) = 5199960$]

23. (b) কোন অঙ্ক কোন সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলো দ্বারা যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 1+2+3+4 = 10$

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার একক বা দশক স্থান এ চারটি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট তিনটি অঙ্ক দ্বারা বাকী স্থানটি $^3P_1$ উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং , প্রত্যেক অঙ্ক একক ও দশক স্থানে $^3P_1$ সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হয়।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের (একক বা দশক) অঙ্কগুলির সমষ্টি $= {^3P_1}(1+2+3+4)$

$$= 10\times{^3P_1} = 30$$

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 10\times{^3P_1}\times10 + 10\times{^3P_1}\times1$ [যেমন $26 = 2\times10+6\times1$]

$$= 10\times{^3P_1}(10+1) = 10\times{^3P_1}\times11 = 330$$

অনুরূপভাবে, তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি = $10 \times {}^3P_2 \times 111 = 10 \times 6 \times 111 = 6660$

চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি = $10 \times {}^3P_3 \times 1111 = 10 \times 6 \times 1111 = 66660$

নির্ণেয় সমষ্টি $= 10 + 330 + 6660 + 66660 = 73660$

[বি.দ্র. : নির্ণেয় সমষ্টি $= (1+2+3+4)(1 + 11 \times {}^3P_1 + 111 \times {}^3P_2 + 1111 \times {}^3P_3)$ যেকোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলো দ্বারা যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি $= (1+2+3+4)(1 + 11 \times 4^1 + 111 \times 4^2 + 1111 \times 4^3) = 10(1 + 44 + 1776 + 71104) = 729250$]

23 (c) প্রত্যেক সংখ্যায় 5 পাঁচবার এবং 4 চারবার ব্যবহার করে 9 অঙ্কের গঠিত ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যার গড় নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রত্যেক সংখ্যায় 5 পাঁচবার এবং 4 চারবার ব্যবহার করে 9 অঙ্কের $\frac{9!}{5!4!} = 126$ সংখ্যক সংখ্যা গঠিত হয়। যেকোন স্থান (একক, দশক,শতক ইত্যাদি) 5 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট আটটি স্থান 4টি 5 ও 4টি 4 দ্বারা $\frac{8!}{4!4!} = 70$ উপায়ে পূরণ করা যায় অর্থাৎ যেকোন স্থানে 70 বার 5 পুনরাবৃত্ত হয় । আবার, যেকোন স্থান 4 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট আটটি স্থান 5টি 5 ও 3টি 4 দ্বারা $\frac{8!}{5!3!} = 56$ উপায়ে পূরণ করা যায় অর্থাৎ যেকোন স্থানে 56 বার 4 পুনরাবৃত্ত হয় ।

নয় অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $= 5 \times 70 + 4 \times 56 = 350 + 224 = 574$

প্রত্যেক সংখ্যায় 5 পাঁচবার এবং 4 চারবার ব্যবহার করে 9 অঙ্কের গঠিত সংখ্যার সমষ্টি

$= 574 \times 111111111 = 63777777714$

নির্ণেয় গড় $= 63777777714 \div 126 = 506172839$

কাজ

১। 'EQUATION' শব্দটির সবগুলো অক্ষর ব্যবহার করে কতটি শব্দ গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ 'EQUATION' শব্দটিতে মোট 8টি বিভিন্ন অক্ষর আছে । এই 8টি অক্ষর একত্রে ব্যবহার করে গঠিত বিভিন্ন শব্দের সংখ্যা ${}^8P_8 = 8! = 40320$

২। 'LAUGHTER' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। এদের কতগুলো L দ্বারা শুরু হবে?

সমাধান ঃ 'LAUGHTER' শব্দটিতে মোট 8টি বিভিন্ন অক্ষর আছে । এই 8টি অক্ষর একত্রে ব্যবহার করে গঠিত বিভিন্ন শব্দের সংখ্যা ${}^8P_8 = 8! = 40320$

প্রথম স্থানটি L দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-1)$ অর্থাৎ, 7টি অক্ষরকে তাদের নিজেদের মধ্যে $7! = 5040$ উপায়ে সাজানো যায়। সুতরাং L দ্বারা শুরু হয় এরূপ সাজানো সংখ্যা $= 5040$

৩। (a) নিচের শব্দগুলোর সবগুলো বর্ণ একবারে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় ঃ (i) committee (ii) infinitesimal (iii) proportion ?

সমাধান ঃ (i) 'committee' শব্দটিতে মোট 9টি অক্ষর আছে , যাদের মধ্যে 2টি m , 2টি t এবং 2টি e .

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{9!}{2!\times 2!\times 2!}$

(ii) infinitesimal শব্দটিতে মোট 13টি অক্ষর আছে , যাদের মধ্যে 4টি i, 2টি n .

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{13!}{4!\times 2!}$

(iii) proportion শব্দটিতে মোট 10টি অক্ষর আছে , যাদের মধ্যে 2টি p, 2টি r, 3টি o.

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{10!}{2!\times 2!\times 3!}$

(b) একটি লাইব্রেরীতে একখানা পুস্তকের 8 কপি , দুইখানা পুস্তকের প্রত্যেকের 3 কপি , তিনখানা পুস্তকের প্রত্যেকের 5 কপি এবং দশখানা পুস্তকের 1 কপি করে আছে। সবগুলো একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে?

সমাধান : মোট পুস্তকের সংখ্যা $= 8 + 2\times 3 + 3\times 5 + 10 = 8 + 6 + 15 + 10 = 39$

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{39!}{8!\times 3!\times 3!\times 5!\times 5!\times 5!} = \dfrac{39!}{8!\times (3!)^2\times (5!)^3}$

৪। স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে 'INSURANCE' শব্দটি বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান : 'INSURANCE' শব্দটিতে মোট 9টি বর্ণ আছে যাদের 4টি ভিন্ন স্বরবর্ণ । যেহেতু স্বরবর্ণ 4টি একত্রে থাকে, অতএব তাদেরকে একটি একক বর্ণ মনে করলে বর্ণগুলো হবে (IUAE), N, S, R, N, C .

2টি N সহ এই 6টি বর্ণকে $\dfrac{6!}{2!.} = 360$ প্রকারে সাজানো যায় । আবার, 4 টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $4! = 24$ প্রকারে সাজানো যায় ।

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 360\times 24 = 8640$

৫। (a)'CHITTAGONG'শব্দটির বর্ণগুলো কত রকম ভাবে বিন্যাস করা যায়, যখন স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকে।[চ.'০১]

সমাধান : ' CHITTAGONG ' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ ।

যেহেতু স্বরবর্ণ তিনটি একত্রে থাকে, অতএব তাদেরকে 1টি বর্ণ মনে করে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(10 - 3 + 1)$ অর্থাৎ, 8টি। 2টি T ও 2টি G সহ এই 8টি বর্ণকে $\dfrac{8!}{2!.2!} = 10080$ প্রকারে এবং 3 টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $3! = 6$ প্রকারে সাজানো যায় ।

স্বরবর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বর্ণগুলোর মোট সাজানো সংখ্যা $= 10080\times 6 = 60480$

(b) স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে 'TECHNOLOGY' শব্দটির বর্ণগুলো কত উপায়ে বিন্যাস করা যায়? [প্র.ভ.প.'০৫]

সমাধান : ' TECHNOLOGY' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ ।

যেহেতু স্বরবর্ণ তিনটি একত্রে থাকে, অতএব তাদেরকে 1টি বর্ণ মনে করে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(10 - 3 + 1)$ অর্থাৎ, 8টি । এই 8টি ভিন্ন বর্ণকে 8! উপায়ে এবং 2টি O সহ 3 টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $\dfrac{3!}{2!} = 3$ উপায়ে বিন্যাস করা যায় ।

স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে বর্ণগুলোর মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 8!\times 3 = 120960$

৬। 7টি সবুজ , 4টি নীল এবং 2টি লাল কাউন্টার এক সারিতে কত রকমে সাজানো যেতে পারে ? এদের কতগুলোতে লাল কাউন্টার দুইটি একত্রে থাকবে?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ এখানে মোট $(7 + 4 + 2) = 3$টি কাউন্টারের মধ্যে 7টি সবুজ , 4টি নীল এবং 2টি লাল ।

সবগুলো কাউন্টার একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{13!}{7!\times 4!\times 2!} = 25740$

২য় অংশ ঃ লাল কাউন্টার দুইটিকে একটি একক কাউন্টার মনে করলে মোট কাউন্টার সংখ্যা হবে $(13 - 2 + 1)$ অর্থাৎ, 12টি যাদের মধ্যে 7টি সবুজ এবং 4টি নীল ।

লাল কাউন্টার দুইটি একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{12!}{7!\times 4!} = 3960$

৭। 'IDENTITY' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। কতগুলোর প্রথমে I এবং শেষে I থাকবে ? কতগুলোতে I দুইটি এবং T দুইটি একত্রে থাকবে ?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 'IDENTITY' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যাদের 2টি I এবং 2টি T

এ শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো যায় $= \dfrac{8!}{2!\times 2!!} = 10080$ প্রকারে।

২য় অংশ ঃ প্রথম ও শেষ স্থান দুইট ' I ' দ্বারা নিদিষ্ট করে 2টি T সহ অবশিষ্ট $(8 - 2)$ অর্থাৎ, 5টি বর্ণকে 5টি স্থানে $\dfrac{5!}{2!} = 60$ প্রকারে সাজানো যায় ।

৩য় অংশ ঃ I দুইটিকে একটি একক বর্ণ এবং T দুইটি একটি একক বর্ণ মনে করে মোট ভিন্ন বর্ণের সংখ্যা হবে $(8 - 2)$ অর্থাৎ, 6টি। সুতরাং, I দুইটি এবং T দুইটি একত্রে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 6! = 720$

৮। ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে বিজোড় স্থানে রেখে 'EQUATION' শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ 'EQUATION' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যাদের 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 3টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ। এখানে 8টি স্থানের মধ্যে 4টি বিজোড় স্থান (১ম , ৩য় , ৫ম এবং ৭ম) এর 3টি স্থান 3টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা ${}^4P_3$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 5টি স্থান 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা 5! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে বিজোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^4P_3 \times 5! = 24\times 120 = 2880$

৯। (a) 6টি পরীক্ষার খাতাকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে, যাতে সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটি একত্রে না থাকে?

সমাধান ঃ 6টি খাতা একত্রে $6! = 720$ প্রকারে সাজানো যায়। সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটিকে একটি একক খাতা মনে করে মোট খাতার সংখ্যা হবে $(6 - 2 + 1)$ অর্থাৎ 5 টি। এই 5টি খাতা একত্রে $5! = 120$ প্রকারে এবং সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটিকে নিজেদের মধ্যে $2! = 2$ প্রকারে সাজানো যায়।

সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটিকে একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= 120\times 2 = 240$

সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটি একত্রে না নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= 720 - 240 = 480$

(b) আটটি বস্তুকে এক সারিতে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে , যাতে (i) দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে থাকে এবং (ii) দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে না থাকে?

সমাধান ঃ (i) দুইটি বিশেষ বস্তুকে একটি একক বস্তু মনে করলে সাজানোর জন্য $(8 - 2 + 1)$ অর্থাৎ, 7টি বস্তু পাই। এই 7টি বস্তু একত্রে 7! প্রকারে এবং বিশেষ বস্তু দুইটিকে নিজেদের মধ্যে $2! = 2$ প্রকারে সাজানো যায়।

দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে নিয়ে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 7! \times 2 = 5040 \times 2 = 10080$

(ii) 8টি বস্তুকে এক সারিতে $8! = 40320$ প্রকারে সাজানো যায়।

দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে না নিয়ে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 40320 - 10080 = 30240$

১০। (a) 'PERMUTATIONS' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে একটি স্বরবর্ণ ও দুইটি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যেতে পারে, যখন স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যম স্থান দখল করে?

সমাধান ঃ 'PERMUTATIONS' শব্দটিতে মোট 12টি বর্ণ আছে যাদের 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 2টি T সহ 7টি ব্যঞ্জন বর্ণ। মধ্যম স্থানটি 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^5P_1 = 5$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

প্রান্ত স্থান 2টি 6টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ P, R, M, T, N ও S দ্বারা $^6P_2 = 30$ উপায়ে এবং 2টি T দ্বারা $\frac{2!}{2!} = 1$ উপায়ে পূরণ করা যাবে। অতএব, প্রান্ত স্থান 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা $(30 + 1) = 31$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 5 \times 31 = 155$ (Ans.)

(b) একটি বালকের 11টি বিভিন্ন বস্তু আছে, যার মধ্যে 5টি কালো এবং 6টি সাদা। একটি কালো বস্তু মাঝখানে রেখে সে তিনটি বস্তু এক সারিতে কত প্রকারে সাজাতে পারে?

সমাধান ঃ সারির মাঝখানের স্থানটি 5টি বিভিন্ন কালো বস্তু দ্বারা $^5P_1 = 5$ উপায়ে এবং প্রান্ত স্থান 2টি অবশিষ্ট $(11 - 1) = 10$টি বিভিন্ন বস্তু দ্বারা $^{10}P_2 = 90$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 5 \times 90 = 450$

(c) a, b, c, d, e, f অক্ষরগুলো থেকে তিনটি অক্ষর দ্বারা গঠিত বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় কর, যেখানে প্রতিটি বিন্যাসে কমপক্ষে একটি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকে।

সমাধান ঃ a, b, c, d, e, f অক্ষরগুলোর মধ্যে 2টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ। 6টি অক্ষরের যেকোন 3টি নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা $= {^6P_3}$. এদের মধ্যে কেবল 3টি ব্যঞ্জন বর্ণ থাকবে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= {^4P_3}$

প্রতিটি বিন্যাসে কমপক্ষে একটি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকবে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= {^6P_3} - {^4P_3} = 120 - 24 = 96.$

১১। দুইজন মেয়েকে পাশাপাশি না রেখে x জন ছেলে ও y জন মেয়েকে $(x > y)$ কত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ x জন ছেলেকে এক সারিতে $x!$ প্রকারে সাজানো যায়।এই x জন ছেলের মাঝখানে $(x - 1)$ টি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। এ ছাড়া সারির দুই প্রান্তে আরও দুইটি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। সুতরাং, $\{(x - 1) + 2\} = (x + 1)$ টি ফাঁকা স্থানে y জন মেয়েকে $^{x+1}P_y$ উপায়ে সাজানো যায়। $\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= x! \times {^{x+1}P_y}$

১২। (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলো দ্বারা ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? এদের কতগুলো 5 দ্বারা বিভাজ্য হবে না?

সমাধান ঃ এখানে 6টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে। প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 6টি অঙ্ক দ্বারা ছয় অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা $= {^6P_6} = 6! = 720$

শেষ স্থানটি 5টি অঙ্ক 2, 3, 4, 6 ও 7 এর যেকোন একটি দ্বারা $^5P_1$ প্রকারে পূরণ করে অবশিষ্ট 5টি স্থানে বাকি 5টি অঙ্ককে 5! প্রকারে সাজানো যায়।

5 দ্বারা বিভাজ্য নয় এরূপ মোট সংখ্যা $= {^5P_1} \times 5! = 5 \times 120 = 600$

(b) প্রতিটি অঙ্ক যতবার আছে এর বেশি সংখ্যকবার ব্যবহার না করে 2, 2, 2, 3, 3, 4 অঙ্কগুলো দ্বারা ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? এদের কতগুলো 400000 অপেক্ষা বড় হবে?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ এখানে 3টি 2 এবং 2টি 3 সহ মোট 6টি অঙ্ক আছে।

ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা $= \frac{6!}{3! \times 2!} = 60$

২য় অংশ ঃ 400000 অপেক্ষা বড় সংখ্যাগুলোর প্রথম অঙ্কটি 4 দ্বারা আরম্ভ হতে হবে। প্রথম স্থানটি 4 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(6-1) = 5$টি স্থান 3টি 2 এবং 2টি 3 সহ বাকি 5টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে $\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$ উপায়ে।

নির্ণেয় মোট সংখ্যা = 10

১৩। (a) 1, 2, 3 অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে চার অঙ্কের বেশি নয় এমন কতগুলি সংখ্যা তৈরী করা যায়?

সমাধান ঃ এখানে অঙ্ক 3টির প্রতিটি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করা যাবে।

এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 3 উপায়ে।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রতিটি স্থান (একক বা দশক) 3টি অঙ্ক দ্বারা 3 উপায়ে পূরণ করা যাবে। অতএব, দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $3 \times 3 = 3^2$ উপায়ে।

অনুরূপভাবে, তিন ঙ্ক বিশিষ্ট ও চার ঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে যথাক্রমে 3^3 ও 3^4 উপায়ে।

নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) = (3 + 9 + 27 + 81) = 120$

[দ্র. 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে চার অঙ্কের বেশি নয় এমন সংখ্যা গঠন করা যায় $\frac{5(5^4 - 1)}{5 - 1} = 780$ উপায়ে।]

(b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলো যেকোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে 10000 এর ছোট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ শূন্যসহ 8টি অঙ্কের প্রতিটি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করা যাবে। সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। তাই, বাম দিক হতে সংখ্যার প্রথম স্থান 0 ব্যতীত বাকী 7টি অঙ্ক দ্বারা 7 উপায়ে এবং অন্যান্য স্থানগুলির প্রতিটি শূন্যসহ 8টি অঙ্ক দ্বারা 8 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 7 উপায়ে।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 7×8 অর্থাৎ 56 উপায়ে।

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 \times 8$ অর্থাৎ 448 উপায়ে।

চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 \times 8 \times 8$ অর্থাৎ 3584 উপায়ে।

নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $(7 + 56 + 448 + 3584) = 4095$

১৪। তিনটি ফুটবল খেলার ফলাফল কত উপায়ে হতে পারে?

সমাধান ঃ প্রথম খেলার ফলাফল কোন বিশেষ দলের জন্য জয়, পরাজয় অথবা অমীমাংসিত অর্থাৎ 3 উপায়ে হতে পারে। অনূরূপ ২য় খেলার ফলাফল 3 উপায়ে এবং ৩য় খোলার ফলাফলও 3 উপায়ে হতে পারে।

নির্ণেয় সংখ্যা = $3 \times 3 \times 3 = 27$

১৫। (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 3, 5, 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 3, 5, 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় সংখ্যা পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট হবে।

পাঁচ স্থানের যেকোন একটি স্থান এ পাঁচটি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট চারটি স্থান বাকী চারটি অঙ্ক দ্বারা 4! উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং , প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক, শতক, হাজার বা ওযুত) 4! সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হবে।

পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি = $4! \times (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 24\times25 = 600$

প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 3, 5, 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 600\times1+ 600\times10 + 600\times100 + 600\times1000 + 600\times10000$

$= 600(1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) = 600 \times 11111 = 6666600$ (Ans.)

[বি.দ্র. : নির্ণেয় সমষ্টি = $(5-1)! \times (1+3+5+7+9) \times 11111 = 24 \times 25 \times 11111 = 6666600$]

(b) কোন অঙ্ক কোন সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে 1 , 3 , 5 , 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি = $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার একক বা দশক স্থান এ পাঁচটি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট চারটি অঙ্ক দ্বারা বাকী স্থানটি $^4P_1$ উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং , প্রত্যেক অঙ্ক একক ও দশক স্থানে $^4P_1$ সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হয়।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের (একক বা দশক) অঙ্কগুলির সমষ্টি = $^4P_1(1 + 3 + 5 + 7 + 9)$

$= 25 \times {^4P_1} = 100$

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি = $25 \times {^4P_1} \times 10 + 25 \times {^4P_1} \times 1$ [যেমন $26 = 2 \times 10 + 6 \times 1$]

$= 25 \times {^4P_1}(10 + 1) = 25 \times {^4P_1} \times 11 = 1100$

অনুরূপভাবে, তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি = $25\times {^4P_2} \times 111 = 25 \times 12 \times 111 = 33300$

চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি = $25 \times {^4P_3} \times 1111 = 25 \times 24 \times 1111 = 666600$

পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি = $25 \times {^4P_4} \times 11111 = 25 \times 24 \times 11111 = 6666600$

নির্ণেয় সমষ্টি = $25 + 1100 + 33300 + 666600 + 6666600 = 7367625$

[বি.দ্র. নির্ণেয় সমষ্টি = $(1 + 3 + 5 + 7 + 9)(1 + 11 \times {^4P_1} + 111\times {^4P_2} + 1111 \times {^4P_3} + 11111\times {^4P_4})$]

প্রশ্নমালা VI B

1(a) Sol^n : 26টি বর্ণ হতে প্রতিবার 5টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করা যায় $^{26}P_5 = 7893600$ টি । ∴ Ans. A

(b) Sol^n : (i) 8 জন মেয়ে পৃথক পৃথক ভাবে বৃত্তাকারে দাঁড়াতে পারবে $(8-1)! = 5040$ উপায়ে।

(ii) 8 টি ভিন্ন ধরনের মুক্তা একটি ব্যান্ডে লাগিয়ে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে $\frac{(8-1)!}{2} = 2520$ উপায়ে।

(iii) 4টি ডাকবক্সে 5টি চিঠি ফেলা যায় = $4^5 = 1024$ উপায়ে। Ans. A

(c) **Sol^n :** $\dfrac{10!}{2!} = 1814400.$

(d) **Sol^n :** অঙ্কগুলির সমষ্টি $\times (4-1)! \times 4$ সংখ্যক 1 দ্বারা গঠিত সংখ্যা $= (1+2+3+4)\times 3! \times 1111$
$= 10\times 6\times 1111 = 66660$

(e) **Sol^n :** উপরের সবগুলি তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. D.

(f) **Sol^n :** ${}^nP_3 + {}^nC_3 = 70 \Rightarrow {}^nC_3 \times 3! + {}^nC_3 = 70 \Rightarrow 7.{}^nC_3 = 70 \Rightarrow {}^nC_3 = 10 = {}^5C_3 \quad n = 5$

(g) **Sol^n :** ${}^{5-2}C_3 + {}^{5-2}C_{3-1} + {}^{5-2}C_{3-2} = {}^3C_3 + {}^3C_2 + {}^3C_1 = 1 + 3 + 3 = 7$

(h) **Sol^n :** ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ $\therefore$ Ans. A.

(i) **Sol^n :** প্রদত্ত শব্দে 2 টি সহ ব্যঞ্জন বর্ণ আছে 6টি। নির্ণেয় উপায় সংখ্যা $= \dfrac{6!}{2!} - 1 = 360 - 1 = 359$

Ans. B

(j) **Sol^n :** সংখ্যা গঠন করা যায় $4\times 10^7 = 40000000$ সংখ্যক Ans. D

(k) **Sol^n :** ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ Ans. B

(*l*) **Sol^n :** 'PARALLEL' শব্দটির বর্ণগুলি থেকে অন্তত একটি বর্ণ বাছাই করা যায় $(3+1)(2+1)2^3 - 1$ উপায়ে। Ans. B

2. **(a)** দেওয়া আছে, ${}^{2n}C_r = {}^{2n}C_{r+2} \Rightarrow r + r + 2 = 2n$ [${}^nC_x = {}^nC_y$ হলে, $x + y = n$]
$\Rightarrow 2r = 2(n-1) \quad \therefore r = n - 1$ (Ans.)

(b) দেওয়া আছে, ${}^nC_r : {}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 1:2:3$

১ম এবং ২য় অনুপাত হতে আমরা পাই, ${}^nC_r : {}^nC_{r+1} = 1:2 \Rightarrow \dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}}\ \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2\ {}^nC_r = {}^nC_{r+1}$

$$\Rightarrow 2\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} \Rightarrow 2\frac{1}{r!(n-r)(n-r-1)!} = \frac{1}{(r+1).r!(n-r-1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n-r} = \frac{1}{r+1} \Rightarrow n - r = 2r + 2 \Rightarrow n = 3r + 2 \cdots\cdots\cdots(1)$$

২য় এবং শেষ অনুপাত হতে আমরা পাই, ${}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 2:3 \Rightarrow 3.{}^nC_{r+1} = 2.{}^nC_{r+2}$

$$\Rightarrow 3.\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = 2.\frac{n!}{(r+2)!(n-r-2)!}$$

$$\Rightarrow 3.\frac{1}{(r+1)!(n-r-1).(n-r-2)!} = 2.\frac{1}{(r+2).(r+1)!(n-r-2)!} \Rightarrow \frac{3}{n-r-1} = \frac{2}{r+2}$$

$\Rightarrow 2n - 2r - 2 = 3r + 6 \Rightarrow 2n = 5r + 8 \Rightarrow 2(3r+2) = 5r + 8$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow 6r + 4 = 5r + 8 \Rightarrow r = 4$

(1) হতে আমরা পাই, $n = 3.4 + 2 = 14 \quad \therefore r = 4, n = 14$ (Ans.)

(c) **দেখাও যে, ${}^nC_r = {}^{n-2}C_r + 2\ {}^{n-2}C_{r-1} + {}^{n-2}C_{r-2}$, যখন $n > r > 2$.**

প্রমাণ : $^{n-2}C_r + 2\ ^{n-2}C_{r-1} + ^{n-2}C_{r-2} = (^{n-2}C_r + \ ^{n-2}C_{r-1}) + (^{n-2}C_{r-1} + ^{n-2}C_{r-2})$

$= ^{n-2+1}C_r + ^{n-2+1}C_{r-1} = \ ^{n-1}C_r + ^{n-1}C_{r-1}$ $\qquad [\ ^nC_r + ^nC_{r-1} = ^{n+1}C_r]$

$= ^{n-1+1}C_r = ^nC_r$

$^nC_r = ^{n-2}C_r + 2\ ^{n-2}C_{r-1} + ^{n-2}C_{r-2}$

(d) দেখাও যে, $^{n+2}C_r = ^nC_r + 2\ ^nC_{r-1} + ^nC_{r-2}$,যখন $n > r > 2$.

প্রমাণ : $^nC_r + 2\ ^nC_{r-1} + ^nC_{r-2} = (^nC_r + \ ^nC_{r-1}) + (\ ^nC_{r-1} + ^nC_{r-2})$

$= ^{n+1}C_r + ^{n+1}C_{r-1} = ^{n+1+1}C_r$ $\qquad [\ ^nC_r + ^nC_{r-1} = ^{n+1}C_r]$

$^{n+2}C_r = ^nC_r + 2\ ^nC_{r-1} + ^nC_{r-2}$

3. (a) 'LOGARITHMS' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবারে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ কত প্রকারে বাছাই করা যায় ?

সমাধান : 'LOGARITHMS' শব্দটিতে মোট 10টি বিভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 7টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 3টি স্বরবর্ণ ।

7টি ব্যঞ্জনবর্ণ থেকে প্রতিবারে 3টি $^7C_3 = \dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$ উপায়ে এবং 3টি স্বরবর্ণ থেকে প্রতিবারে 2টি $^3C_2 = 3$ উপায়ে বাছাই করা যায়। অতএব, প্রতিবারে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ বাছাই সংখ্যা $= 35\times3 = 105$

(b) 'DEGREE' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবারে 4টি বর্ণ নিয়ে কত প্রকারে বাছাই করা যেতে পারে ?

[য.'০৭,'১৩; রা.'১১]

সমাধান : ' DEGREE ' শব্দটিতে 3টি E সহ মোট 6টি বর্ণ আছে ।

সবগুলোই বর্ণ ভিন্ন এরূপ বাছাই সংখ্যা $= ^4C_4 = 1$ [$\because$ ভিন্ন বর্ণ 4টি]

2 টি E এবং অন্য 2টি ভিন্ন এরূপ বাছাই সংখ্যা $= ^3C_2 = ^3C_1 = 3$ [E ব্যতীত ভিন্ন বর্ণ 3টি]

3টি E এবং আরেকটি অন্য বর্ণ এরূপ বাছাই সংখ্যা $= ^3C_1 = 3$

নির্ণেয় বাছাই সংখ্যা $= 1 + 3 + 3 = 7$ (Ans.)

4. (a) 4 জন ভদ্র মহিলাসহ 10 ব্যক্তির মধ্য থেকে 5 জনের একটি কমিটি কত রকমে গঠন করা যেতে পারে , যাতে অন্তত একজন ভদ্র মহিলা থাকবে? [য.'০২; মা.বো.'১৩]

সমাধান : 5 জনের কমিটি নিম্নরূপে গঠন করা যায় –

ভদ্র মহিলা (4)	অন্যান্য (6)	কমিটি গঠনের উপায়
1	4	$^4C_1\times\ ^6C_4 = 4\times15 = 60$
2	3	$^4C_2\times\ ^6C_3 = 6\times20 = 120$
3	2	$^4C_3\times\ ^6C_2 = 4\times15 = 60$
4	1	$^4C_4\times\ ^6C_1 = 1\times6 = 6$

কমিটি গঠনের মোট উপায় $= 60 + 120 + 60 + 6 = 246$

[বি. দ্র. কমিটি গঠনের মোট উপায় $= \sum_{i=1}^{4}\ ^4C_i\times\ ^6C_{5-i} = \ ^4C_1\times\ ^6C_4 + ^4C_2\times\ ^6C_3 + \ ^4C_3\times\ ^6C_2$

$+ \ ^4C_4\times\ ^6C_1 = 246$]

4. (b) 6 জন বিজ্ঞান ও 4 জন কলা বিভাগের ছাত্র থেকে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে। বিজ্ঞানের ছাত্রদেরকে সংখ্যা গরিষ্ঠতা দিয়ে কত প্রকারে কমিটি গঠন করা যাবে ? [য.'০৬,'১২; কু.'০৯; ব.,চ.'১৩]

সমাধান : নিম্নরূপে 6 জনের কমিটি গঠন করা যেতে পারে –

বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র (6)	কলা বিভাগের ছাত্র (4)	কমিটি গঠনের উপায়
6	0	$^6C_6 = 1$
5	1	$^6C_5 \times {}^4C_1 = 6 \times 4 = 24$
4	2	$^6C_4 \times {}^4C_2 = 15 \times 6 = 90$

$(1 + 24 + 90)$ অর্থাৎ, 115 প্রকারে কমিটি গঠন করা যাবে ।

(c) 5 জন বিজ্ঞান ও 3 জন কলা বিভাগের ছাত্রের মধ্য থেকে 4 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে। যদি প্রত্যেক কমিটিতে (i) অন্ততঃ একজন বিজ্ঞানের ছাত্র থাকে, (ii) অন্ততঃ একজন বিজ্ঞান ও একজন কলা বিভাগের ছাত্র থাকে, তাহলে কত প্রকারে কমিটি গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ (i) নিম্নরূপে 4 জনের কমিটি গঠন করা যেতে পারে –

বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র (5)	কলা বিভাগের ছাত্র (3)	কমিটি গঠনের উপায়	
1	3	$^5C_1 \times {}^3C_3 = 5 \times 1 = 15$	
2	2	$^5C_2 \times {}^3C_2 = 10 \times 3 = 30$	3
1	$^5C_3 \times {}^3C_1 = 10 \times 3 = 30$		
	4	0	$^5C_4 \times {}^3C_0 = 5 \times 1 = 5$

নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 5 + 30 + 30 + 5 = 70$

(ii) নিম্নরূপে 4 জনের কমিটি গঠন করা যেতে পারে –

বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র (5)	কলা বিভাগের ছাত্র (3)	কমিটি গঠনের উপায়	
1	3	$^5C_1 \times {}^3C_3 = 5 \times 1 = 15$	
2	2	$^5C_2 \times {}^3C_2 = 10 \times 3 = 30$	3
1	$^5C_3 \times {}^3C_1 = 10 \times 3 = 30$		

নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 5 + 30 + 30 = 65$

(d) 15 জন ক্রিকেট খেলোয়াড়ের মধ্যে 5 জন বোলার এবং 3 জন উইকেট রক্ষক । এদের মধ্য হতে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি দল কত প্রকারে বাছাই করা যেতে পারে যাতে অন্ততঃ 8 জন বোলার ও 2 জন উইকেট রক্ষক থাকে? [রা.'১৪]

সমাধান ঃ 11 জনের একটি দল নিম্নরূপে বাছাই করা যায় –

বোলার (5)	ইউকেট রক্ষক (3)	অন্যান্য (7)	দল বাছাই করার উপায় সংখ্যা
4	2	5	$^5C_4 \times {}^3C_2 \times {}^7C_5 = 5 \times 3 \times 21 = 315$
4	3	4	$^5C_4 \times {}^3C_3 \times {}^7C_4 = 5 \times 1 \times 35 = 175$
5	2	4	$^5C_5 \times {}^3C_2 \times {}^7C_4 = 1 \times 3 \times 35 = 105$
5	3	3	$^5C_5 \times {}^3C_3 \times {}^7C_3 = 1 \times 1 \times 35 = 35$

নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 315 + 175 + 105 + 35 = 630$

5. (a) প্রতি গ্রুপে 5টি প্রশ্ন আছে এমন দুইটি গ্রুপে বিভক্ত 10 টি প্রশ্ন থেকে একজন পরীক্ষার্থীকে 6 টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে এবং তাকে কোন গ্রুপ থেকে 4 টির বেশি উত্তর দিতে দেয়া হবে না । সে কত প্রকারে প্রশ্নগুলো বাছাই করতে পারবে? [য.'০৩]

সমাধান ঃ একজন পরীক্ষার্থী 6টি প্রশ্ন নিম্নরূপে বাছাই করতে পারবে

১ম গ্রুপ (5)	২য় গ্রুপ (5)	প্রশ্ন বাছাই করার উপায়

2	4	${}^5C_2 \times {}^5C_4 = 10 \times 5 = 50$
3	3	${}^5C_3 \times {}^5C_3 = 10 \times 10 = 100$
4	2	${}^5C_4 \times {}^5C_2 = 5 \times 10 = 50$

নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 50 + 100 + 50 = 200$

(b) একজন পরীক্ষার্থীকে 12 টি প্রশ্ন থেকে 6 টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। তাকে প্রথম 5 টি থেকে ঠিক 4 টি প্রশ্ন বাছাই করতে হবে। সে কত প্রকারে প্রশ্নগুলো বাছাই করতে পারবে? [ব.'০২, '০৬, '০৭]

সমাধান ঃ সে প্রথম 5টি প্রশ্ন হতে 4টি ${}^5C_4 = 5$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 7টি প্রশ্ন থেকে 2টি ${}^7C_2 = 21$ উপায়ে বাছাই করতে পারবে।

নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 5 \times 21 = 105$ (Ans.)

(c) একজন পরীক্ষার্থীকে 12 টি প্রশ্ন হতে 7 টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। এদের মধ্যে তাকে প্রথম পাঁচটি হতে ঠিক চারটি প্রশ্ন বাছাই করতে হবে। সে কত প্রকারে 7 টি প্রশ্ন বাছাই করতে পারবে? [সি.'০১]

সমাধান ঃ পরীক্ষার্থী প্রথম 5টি প্রশ্ন হতে 4টি ${}^5C_4 = 5$ প্রকারে এবং শেষের 7টি প্রশ্ন হতে 3টি ${}^7C_3 = 35$ প্রকারে বাছাই করতে পারবে।

সে $5 \times 35 = 175$ প্রকারে 7টি প্রশ্ন বাছাই করতে পারবে।

6. (a) সাতটি সরল রেখার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 সে.মি.। দেখাও যে, একটি চতুর্ভুজ গঠন করার জন্য চারটি সরল রেখা যত প্রকারে বাছাই করা যায় তার সংখ্যা 32.

[রা. '০৪,'১০; চ.'০৬, '০৮,'১২; সি.'০৮,'১২; দি.'০৯; ব.'০৮,'১০; য.'০৯]

সমাধান ঃ 7টি সরল রেখা হতে 4টি সরল রেখা বাছাই করার উপায় $= {}^7C_4 = 35$

কিন্তু বাছাই করা 4টি সরল রেখার দৈর্ঘ্যের সেট $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{1, 2, 3, 7\}$ এবং $\{1, 2, 4, 7\}$ হলে, তাদের ক্ষুদ্রতম সরল রেখা তিনটির দৈর্ঘ্যের যোগফল ৪র্থ সরল রেখার দৈর্ঘ্যের বৃহত্তম নয় বলে তাদের দ্বারা কোন চতুর্ভুজ গঠন করা সম্ভব নয়। $\therefore$ নির্ণেয় চতুর্ভুর সংখ্যা $= 35 - 3 = 32$

(b) দেখাও যে, n বাহু বিশিষ্ট একটি বহুভুজের $\frac{1}{2}n(n-3)$ সংখ্যক কর্ণ আছে। আরও দেখা যে, এর কৌণিক বিন্দুগুলোর সংযোগ রেখা দ্বার $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন ত্রিভুজ গঠন করা যেতে পারে। [ঢা.'০৫]

সমাধান ঃ প্রথম অংশ ঃ n বাহু বিশিষ্ট একটি বহুভুজের nটি কৌণিক বিন্দু আছে এবং দুই বিন্দুর সংযোগে একটি সরলরেখা উৎপন্ন হয়। $\therefore$ n টি কৌণিক বিন্দু দ্বারা গঠিত সরল রেখার সংখ্যা $= {}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$

কিন্তু এদের মধ্যে, বহুভুজের nটি সীমান্ত বাহু কর্ণ নয়।

$$\text{কর্ণের সংখ্যা} = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{1}{2}n(n-1-2) = \frac{1}{2}n(n-3)$$

দ্বিতীয় অংশ ঃ অসমরেখ তিনটি বিন্দুর সংযোগ রেখা দ্বারা একটি ত্রিভুজ গঠিত হয়।

$$\text{nটি কৌণিক বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের সংখ্যা} = {}^nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

n বাহু বিশিষ্ট একটি বহুভুজের $\frac{1}{2}n(n-3)$ সংখ্যক কর্ণ আছে এবং $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ সংখ্যক সংখ্যক ত্রিভুজ গঠন করা যেতে পারে।

7. (a) 10 খানা ও 12 খানা বই এর দুইজন মালিক কতভাবে দুইখানার পরিবর্তে দুইখানা বই পরস্পরের মধ্যে বিনিময় করতে পারবে?

সমাধান : 10 খানা বই এর মালিক দুইখানা বই $^{10}C_2$ উপায়ে 12 খানা বই এর মালিককে দিতে পারবে এবং 12 খানা বই এর মালিক দুইখানা বই $^{12}C_2$ উপায়ে 10 খানা বই এর মালিককে দিতে পারবে ।

তারা $^{10}C_2 \times {}^{12}C_2 = 2970$ উপায়ে দুইখানার পরিবর্তে দুইখানা বই পরস্পরের মধ্যে বিনিময় করতে পারবে।

(b) 12 খানা পুস্তকের মধ্যে 5 খানা কত প্রকারে বাছাই করা যায় (i) যাতে দুইখানা নির্দিষ্ট পুস্তক সর্বদাই থাকবে এবং (ii) যাতে দুইখানা নির্দিষ্ট পুস্তক সর্বদাই বাদ থাকবে?

সমাধান : (i) দুইখানা নির্দিষ্ট পুস্তক সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত রেখে অবশিষ্ট $(12-2)$ অর্থাৎ, 10 খানা পুস্তক হতে বাকি $(5-2)$ অর্থাৎ, 3 খানা পুস্তক বাছাই করা যাবে $^{10}C_3 = 120$ উপায়ে। সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা $= 120$

(ii) দুইখানা নির্দিষ্ট পুস্তক সর্বদাই বাদ দিয়ে অবশিষ্ট $(12-2)$ অর্থাৎ, 10 খানা পুস্তক হতে 5 খানা পুস্তক বাছাই করা যাবে $^{10}C_5 = 252$ উপায়ে। সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা $= 252$

(c) দুইজনকে কখনও একত্রে না নিয়ে, 9 জন ব্যক্তি হতে 5 জনকে একত্রে কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান : বিশেষ দুইজনের কাউকে না নিয়ে 5 জনকে একত্রে বাছাই করার উপায় $= {}^{9-2}C_5 = {}^7C_5 = 21$

বিশেষ দুইজনের এক জন এবং অন্য 7 জনের 4 জনকে নিয়ে বাছাই করার উপায় $= {}^2C_1 \times {}^7C_4 = 2 \times 35 = 70$

নির্ণেয় সংখ্যা $= 21 + 70 = 91$

8. (a) 1 হতে 30 সংখ্যাগুলোর যে তিনটির সমষ্টি জোড় তাদেরকে কত ভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান ঃ 1 হতে 30 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর 15টি জোড় এবং 15টি বিজোড় । তিনটি জোড় সংখ্যার যোগফল একটি জোড় সংখ্যা এবং দুইটি বিজোড় ও একটি জোড় সংখ্যার যোগফল একটি জোড় সংখ্যা ।

15টি জোড় সংখ্যা হতে 3টি জোড় সংখ্যা $^{15}C_3 = 455$ উপায়ে বাছাই করা যায় যাদের সমষ্টি একটি জোড় সংখ্যা

আবার , 15টি বিজোড় সংখ্যা হতে 2টি বিজোড় সংখ্যা $^{15}C_2 = 105$ উপায়ে এবং 15টি জোড় সংখ্যা হতে 1টি জোড় সংখ্যা $^{15}C_1 = 15$ উপায়ে বাছাই করা যায়

1 হতে 30 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর দুইটি বিজোড় ও একটি জোড় সংখ্যা $105 \times 15 = 1575$ উপায়ে বাছাই করা যায় যাদের সমষ্টি একটি জোড় সংখ্যা ।

$(455 + 1575)$ বা , 2030 উপায়ে বাছাই করা যায় ।

(b) 3টি শূন্য পদের জন্য 10 জন প্রার্থী আছে। একজন নির্বাচক তিন বা তিনের কম প্রার্থীকে কতভাবে নির্বাচন করতে পারেন? [ঢা.'০৯]

সমাধান ঃ একজন নির্বাচক নিম্নরূপে নির্বাচন করতে পারেন –

তিনি 3 জন প্রার্থীকে নির্বাচন করতে পারেন $^{10}C_3$ বা, 120 উপায়ে ।

তিনি 2 জন প্রার্থীকে নির্বাচন করতে পারেন $^{10}C_2$ বা, 45 উপায়ে ।

তিনি 1 জন প্রার্থীকে নির্বাচন করতে পারেন $^{10}C_1$ বা, 10 উপায়ে ।

নির্ণেয় সংখ্যা $= 120 + 45 + 10 = 175$ (Ans)

(c) কোন নির্বাচনে 5 জন পদপ্রার্থী আছেন, তার মধ্যে 3 জনকে নির্বাচন করতে হবে । একজন ভোটার যত ইচ্ছা ভোট দিতে পারেন, কিন্তু যতজন নির্বাচিত হবেন তার চেয়ে বেশি ভোট দিতে পারবেন না । তিনি মোট কতভাবে ভোট দিতে পারবেন ?

সমাধান ঃ একজন ভোটার নিম্নরূপে ভোট দিতে পারেন–

তিনি 1 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারেন $^5C_1$ বা, 5 উপায়ে ।

তিনি 2 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারেন $^5C_2$ বা, 10 উপায়ে ।

তিনি 3 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারেন $^5C_3$ বা, 10 উপায়ে ।

নির্ণেয় সংখ্যা = 5 + 10 + 1 0 = 25 (Ans)

9. (a) 277200 সংখ্যাটির উৎপাদকের সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $277200 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^1 \times 11^1$

277200 এর উৎপাদকের সংখ্যা $= (4+1)(2+1)(2+1)2^2 - 1 = 179$ (Ans.)

(b) "Daddy did a deadly deed" বাক্যটির বর্ণগুলো হতে যতগুলো সমাবেশ গঠন করা যাবে তার সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ "Daddy did a deadly deed" এ আছে 9 টি d , 3 টি a , 3 টি e , 2 টি y, 1 টি *l* এবং 1 টি *i*

নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা $= (9 + 1)(3 + 1)(3 + 1)(2 + 1)2^2 - 1 = 1920 - 1 = 1919$

(c) কোন পরীক্ষায় কৃতকার্য হতে হলে 6টি বিষয়ের প্রতিটিতে ন্যূনতম নম্বর পেতে হয়। একজন ছাত্র কত রকমে অকৃতকার্য হতে পারে?

সমাধান ঃ একজন ছাত্র এক, দুই, তিন , চার, পাঁচ বা ছয় বিষয়ে অকৃতকার্য হতে পারে ।

ছাত্রটির মোট অকৃতকার্য হওয়ার উপায় $= {}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6$

$= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$

(d) দেখাও যে, প্রতিটি বিকল্পসহ 8টি প্রশ্ন থেকে একজন পরীক্ষার্থী একটি অথবা একাধিক প্রশ্ন $3^8 - 1$ উপায়ে বাছাই করতে পারে।

প্রমাণ ঃ যেহেতু প্রতিটি প্রশ্নের বিকল্প প্রশ্ন দেওয়া আছে, প্রতিটি প্রশ্নকে তিন উপায়ে নিষ্পত্তি করা যায়– প্রশ্নটিকে গ্রহণ করে, এর বিকল্প প্রশ্নকে গ্রহণ করে অথবা উভয় প্রশ্নকে গ্রহণ না করে। অতএব, প্রদত্ত 8টি প্রশ্ন নিষ্পত্তি করা যায় 3^8 উপায়ে। কিন্তু এর ভিতর বিকল্পসহ 8টি প্রশ্নের একটিও না নেয়ার উপায়ও অন্তর্ভুক্ত ।

নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 3^8 - 1$

10. একটি OMR সীটের একটি সারিতে 20টি ছোট বৃত্ত আছে। পেন্সিল দ্বারা কমপক্ষে একটি বৃত্ত কতভাবে ভরাট করা যায় ?

সমাধান ঃ 20টি ছোট বৃত্তের কমপক্ষে একটি বৃত্ত ভরাট করার উপায় $= 2^{20} - 1 = 1048575$,[$2^n - 1$ সূত্রের সাহায্যে]

11 (a) 21টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ এবং 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ হতে প্রতিবার কমপক্ষে 1টি ব্যঞ্জন বর্ণ এবং কমপক্ষে 2টি স্বরবর্ণ কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান ঃ 21টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ হতে কমপক্ষে 1টি বাছাই করা যায় $(2^{21} - 1) = 2097151$ উপায়ে।

5টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ হতে কমপক্ষে 2টি বাছাই করা যায় $\sum_{r=2}^{5} {}^5C_r = {}^5C_2 + {}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 26$ উপায়ে।

নির্ণেয় বাছাই সংখ্যা $= 2097151 \times 26 = 54525926$

(b) 3টি নারিকেল, 4টি আপেল, 2টি কমলা লেবু হতে প্রত্যেক প্রকার ফলের কমপক্ষে একটি করে ফল কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান ঃ 3টি নারিকেলের কমপক্ষে একটি $(2^3 - 1)$ উপায়ে, 4টি আপেলের কমপক্ষে একটি $(2^4 - 1)$ উপায়ে এবং 2টি কমলা লেবুর কমপক্ষে একটি $(2^2 - 1)$ উপায়ে বাছাই করা যায় ।

তিন প্রকারের কমপক্ষে একটি করে ফল বাছাই করার উপায় $= (2^3 - 1)(2^4 - 1)(2^2 - 1) = 315$

12. (a) 9 ব্যক্তির একটি দল দুইটি যানবাহনে ভ্রমন করবে, যার একটিতে সাত জনের বেশি এবং অন্যটিতে চার জনের বেশি ধরে না। দলটি কত প্রকারে ভ্রমণ করতে পারবে?

[চ.'০৯; ঢা.'১১,'১৪; রা.'০৭; সি.'১০,'১৪; ব.'০৯;কু.'১০; য.'১১; দি.'১৪]

সমাধান ঃ নিম্নরূপে দলটি ভ্রমণ করতে পারবে –

১ম যানবাহন	২য় যানবাহন	ভ্রমণ করার উপায়
7	2	${}^9C_7 \times {}^2C_2 = 36 \times 1 = 36$
6	3	${}^9C_6 \times {}^3C_3 = 6 \times 1 = 84$
5	4	${}^9C_5 \times {}^4C_4 = 15 \times 1 = 126$

$(36 + 84 + 126)$ বা, 246 উপায়ে দলটি ভ্রমণ করতে পারবে ।

[বি. দ্র.: ভ্রমণ করার উপায় সংখ্যা $({}^9C_7 + {}^9C_6 + {}^9C_5)$ বা, $({}^9C_4 + {}^9C_3 + {}^9C_2)$]

(b) 20 ব্যক্তির একটি দল দুইটি যানবাহনে ভ্রমন করবে । প্রতিটি যানবাহনের ধারণ ক্ষমতা 20। দলটি কত প্রকারে ভ্রমণ করতে পারবে?

সমাধান ঃ দলটির দুইটি যানবাহনে ভ্রমণ করার উপায় $= \sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r \times {}^{20-r}C_{20-r}$ $[\quad {}^nC_n = 1]$

$$= \sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r = 2^{20} = 1048576$$

বিকল্প পদ্ধতি : প্রতিজন দুইটি যানবাহনের যেকোন একটিতে ভ্রমণ করতে পারবে।

প্রতিজনের ভ্রমণ করার উপায় = 2

20 ব্যক্তির দলটি দুইটি যানবাহনে ভ্রমণ করতে পারবে 2^{20} বা, 1048576 উপায়ে।

(c) 10 জন লোক দুইটি শয়ন কক্ষে কত রকমভাবে রাত্রি যাপন করতে পারবে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রতিজন লোক দুইটি শয়ন কক্ষের যেকোন একটিতে রাত্রি যাপন করতে পারবে।

প্রতিজনের রাত্রি যাপনের উপায় = 2

10 জন লোক দুইটি শয়ন কক্ষে রাত্রি যাপন করতে পারবে 2^{10} বা, 1024 উপায়ে।

(d) A, B ও C কে কতভাবে 12 খানা বই দেয়া যাবে যেন A ও B একত্রে C এর দ্বিগুণ পায়?

সমাধান ঃ মনে করি, C বই পায় x টি । তাহলে, A ও B একত্রে বই পায় $2x$ টি

$x + 2x = 12 \Rightarrow x = 4$

4 খানা বই C পাবে এবং অবশিষ্ট $(12 - 4)$ বা, 8 খানা বই A ও B পাবে।

12 খানা বই হতে 4 খানা C কে দেওয়া যায় ${}^{12}C_4 = 495$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 8 খানা বই A ও B কে দেওয়া যায় $\sum_{r=0}^{8} {}^8C_r \times {}^{8-r}C_{8-r} = \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r = 2^8 = 256$ উপায়ে, $[\quad {}^nC_n = 1]$ ।

A, B ও C কে 12 খানা বই দেয়া যাবে 495×256 বা 126720 উপায়ে।

13. (a) 15 জন ছাত্রের মধ্য থেকে প্রতি কমিটিতে 5 জন হিসাবে মোট 3টি কমিটি গঠন করতে হবে। কত উপায়ে কমিটিগুলো গঠন করা যাবে? **[প্র.ভ.প.'০৫]**

সমাধান ঃ 15 জন ছাত্রের মধ্য থেকে প্রতি কমিটিতে 5 জন হিসাবে 3টি কমিটি গঠন করা যায় $\frac{15!}{3!(5!)^3}$ উপায়ে।

(b) কত প্রকারে 52 খানা তাস 4 ব্যক্তির মধ্যে সমানভাবে ভাগ করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ 52 খানা তাস 4 ব্যক্তির মধ্যে সমানভাবে ভাগ করা যায় $\frac{52!}{(13!)^4}$ উপায়ে । [সূত্র প্রয়োগ করে।]

[চ.'০৯; ঢা.'১১,'১৪; রা.'০৭; সি.'১০,'১৪; ব.'০৯;কু.'১০; য.'১১; দি.'১৪]

সমাধান ঃ নিম্নরূপে দলটি ভ্রমণ করতে পারবে –

১ম যানবাহন	২য় যানবাহন	ভ্রমণ করার উপায়
7	2	${}^9C_7 \times {}^2C_2 = 36 \times 1 = 36$
6	3	${}^9C_6 \times {}^3C_3 = 6 \times 1 = 84$
5	4	${}^9C_5 \times {}^4C_4 = 15 \times 1 = 126$

$(36 + 84 + 126)$ বা , 246 উপায়ে দলটি ভ্রমণ করতে পারবে ।

[বি. দ্র.: ভ্রমণ করার উপায় সংখ্যা $({}^9C_7 + {}^9C_6 + {}^9C_5)$ বা, $({}^9C_4 + {}^9C_3 + {}^9C_2)$]

(b) 20 ব্যক্তির একটি দল দুইটি যানবাহনে ভ্রমন করবে । প্রতিটি যানবাহনের ধারণ ক্ষমতা 20। দলটি কত প্রকারে ভ্রমণ করতে পারবে?

সমাধান ঃ দলটির দুইটি যানবাহনে ভ্রমণ করার উপায় $= \sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r \times {}^{20-r}C_{20-r}$ $[\ {}^nC_n = 1]$

$= \sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r = 2^{20} = 1048576$

বিকল্প পদ্ধতি : প্রতিজন দুইটি যানবাহনের যেকোন একটিতে ভ্রমণ করতে পারবে।

প্রতিজনের ভ্রমণ করার উপায় = 2

20 ব্যক্তির দলটি দুইটি যানবাহনে ভ্রমণ করতে পারবে 2^{20} বা, 1048576 উপায়ে।

(c) 10 জন লোক দুইটি শয়ন কক্ষে কত রকমভাবে রাত্রি যাপন করতে পারবে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রতিজন লোক দুইটি শয়ন কক্ষের যেকোন একটিতে রাত্রি যাপন করতে পারবে।

প্রতিজনের রাত্রি যাপনের উপায় = 2

10 জন লোক দুইটি শয়ন কক্ষে রাত্রি যাপন করতে পারবে 2^{10} বা, 1024 উপায়ে।

(d) A , B ও C কে কতভাবে 12 খানা বই দেয়া যাবে যেন A ও B একত্রে C এর দ্বিগুণ পায়?

সমাধান ঃ মনে করি, C বই পায় x টি । তাহলে, A ও B একত্রে বই পায় $2x$ টি

$x + 2x = 12 \Rightarrow x = 4$

4 খানা বই C পাবে এবং অবশিষ্ট (12 – 4) বা, 8 খানা বই A ও B পাবে।

12 খানা বই হতে 4 খানা C কে দেওয়া যায় ${}^{12}C_4 = 495$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 8 খানা বই A ও B কে দেওয়া যায় $\sum_{r=0}^{8} {}^8C_r \times {}^{8-r}C_{8-r} = \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r = 2^8 = 256$ উপায়ে, $[\ {}^nC_n = 1\ ]$ ।

A , B ও C কে 12 খানা বই দেয়া যাবে 495×256 বা 126720 উপায়ে।

13. (a) 15 জন ছাত্রের মধ্য থেকে প্রতি কমিটিতে 5 জন হিসাবে মোট 3টি কমিটি গঠন করতে হবে। কত উপায়ে কমিটিগুলো গঠন করা যাবে? **[প্র.ভ.প.'০৫]**

সমাধান ঃ 15 জন ছাত্রের মধ্য থেকে প্রতি কমিটিতে 5 জন হিসাবে 3টি কমিটি গঠন করা যায় $\frac{15!}{3!(5!)^3}$ উপায়ে।

(b) কত প্রকারে 52 খানা তাস 4 ব্যক্তির মধ্যে সমানভাবে ভাগ করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ 52 খানা তাস 4 ব্যক্তির মধ্যে সমানভাবে ভাগ করা যায় $\frac{52!}{(13!)^4}$ উপায়ে । [সূত্র প্রয়োগ করে।]

(c). 23 জন খেলোয়াড় দ্বারা 11 সদস্যের দুইটি ক্রিকেট দল কতভাবে গঠন করা যায়.? 23 জনের মধ্যে দু'জন উইকেট কিপিং করতে পারে এবং তাদেরকে দুইটি দলে রেখে কতভাবে দুইটি ক্রিকেট দল গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 23 জন খেলোয়াড় হতে 22 জনকে $^{23}C_{22}$ উপায়ে বাছাই করা যায় । আবার 22 জনকে 11 জন করে সমান দুইটি দলে বিভক্ত করা যায় $\frac{22!}{2!(11!)^2}$ উপায়ে ।

দুইটি ক্রিকেট টিম গঠন করার উপায় $= {}^{23}C_{22} \times \frac{22!}{2!(11!)^2} = 23 \times \frac{22!}{2!(11!)^2} = \frac{23!}{2!(11!)^2}$

২য় অংশ ঃ 21 জন হতে 20 জনকে বাছাই করা যায় $^{21}C_{20}$ উপায়ে । আবার, দুইজন ইউকেট রক্ষককে দুইটি টিমে নিদিষ্ট করে 20 জনকে দুইটি সমান ভাগে সেই নির্দিষ্ট টিমে বিভক্ত করা যায় $\frac{20!}{(10!)^2}$ উপায়ে ।

দুইটি ক্রিকেট টিম গঠন করার উপায় $= {}^{21}C_{20} \times \frac{20!}{(10!)^2} = \frac{21!}{20!} \times \frac{20!}{(10!)^2} = \frac{21!}{(10!)^2}$

(d) 23 জন খেলোয়াড়ের মধ্যে দুইজন উইকেট রক্ষক । তাদেরকে দুইটি দলে রেখে A ও B দল নামে দুইটি ক্রিকেট দল কতভাবে গঠন করা যায় ?

সমাধান ঃ দুইজন উইকেট রক্ষককে A ও B দলে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে $2! = 2$ উপায়ে।

অবশিষ্ট 21 জন খেলোয়াড় হতে A -দলের জন্য বাকি 10 জনকে বাছাই করা যায় $^{21}C_{10}$ উপায়ে । বাকি 11 জন হতে B -দলের জন্য 10 জনকে বাছাই করা যায় $^{11}C_{10} = 11$ উপায়ে ।

A ও B দল নামে দুইটি ক্রিকেট টিম গঠন করার উপায় $= 2\times {}^{21}C_{10}\times 11 = 2\times\frac{21!}{10!11!}\times 11$

$$= 2\times\frac{21!}{(10!)^2}$$

(e) একটি কম্পানি দুইটি ফ্যাক্টরির জন্য 15 জনকে নিয়োগ দিয়েছে । একটি ফ্যাক্টরিতে 5 জনকে ও অপরটিতে 10 জনকে কতভাবে নিয়োগ দেওয়া যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ 15 জন হতে একটি ফ্যাক্টরিতে 5 জনকে নিয়োগ দেওয়া যাবে $^{15}C_5$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 10 জনকে অপর ফ্যাক্টরিতে $^{10}C_{10}$ উপায়ে নিয়োগ দেওয়া যাবে ।

নির্ণেয় উপায় সংখ্যা $= {}^{15}C_5\times {}^{10}C_{10} = \frac{15!}{5!\times 10!}\times 1 = \frac{15!}{5!\times 10!}$

(f) একটি ক্রিকেট টুর্নামেন্ট– এ 16 টি দল অংশ নেয়। র‍্যাংকিং - এ শীর্ষ 8 টি দল থেকে দুইটি দল এবং অপর 8 টি দল থেকে দুইটি দল নিয়ে 4 দলের 4 টি গ্রুপ কতভাবে গঠন করা যায় তা নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ শীর্ষ 8টি দলকে 2টি করে সমান 4টি দলে বিভক্ত করা যায় $\frac{8!}{4!(2!)^4} = 105$ উপায়ে ।

পুনরায় , অপর 8টি দলকে 2টি করে সমান 4টি দলে বিভক্ত করা যায় $\frac{8!}{4!(2!)^4} = 105$ উপায়ে ।

4 দলের 4টি গ্রুপ গঠন করার উপায় $= 105 \times 105 = 11025$

২য় অংশ ঃ শীর্ষ 8টি দলকে 2টি করে A , B , C, D নামে 4টি দলে বিভক্ত করা যায় $\frac{8!}{(2!)^4} = 2520$ উপায়ে।

অপর 8টি দলকে 2টি করে A, B, C, D নামে 4টি দলে বিভক্ত করা যায় $\frac{8!}{(2!)^4} = 2520$ উপায়ে।

A B, C, D নামে 4 দলের 4টি গ্রুপ গঠন করার উপায় $= 2520 \times 2520 = 6350400$

(g) এক ব্যক্তির 5টি সিম কার্ড এবং দুইটি করে সিম কার্ড ব্যবহার উপযোগী দুইটি মোবাইল সেট আছে। তিনি তাঁর মোবাইল সেট দুইটিতে কতভাবে 2 টি করে 4 টি সিম কার্ড সংরক্ষিত রাখতে পারেন এবং কতভাবে 1 টি করে 2 টি সিম কার্ড চালু রাখতে পারেন ?

সমাধান : 5 টি সিম কার্ড হতে 4 টি সিম কার্ড $^5C_4 = 5$ উপায়ে বেছে নেওয়া যায়। এই বেছে নেওয়া 4 টি সিম কার্ড দুইটি মোবাইল সেটে সমান দুইভাগে ভাগ করা যায় $\frac{4!}{(2!)^2} = \frac{24}{4} = 6$ উপায়ে।

4 টি সিম কার্ড মোবাইল সেট দুইটিতে সংরক্ষিত রাখা যায় $= 5 \times 6 = 30$ উপায়ে।

এখন, একটি মোবাইল সেটের সংরক্ষিত সিম কার্ড দুইটির একটি চালু রাখা যায় 2! উপায়ে এবং অপর মাবাইল সেটের সংরক্ষিত সিম কার্ড দুইটির একটি চালু রাখা যায় 2! উপায়ে।

2 টি সিম কার্ড দুইটি সেটে চালু রাখা যায় $30 \times 2! \times 2! = 120$ উপায়ে।

14. দেওয়া আছে, $^nP_r = 240 \cdots\cdots(1)$ এবং $^nC_r = 120 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$ [চ.'১১]

$(1) \div (2) \Rightarrow {}^nP_r \div {}^nC_r = 240 \div 120 = 2 \Rightarrow {}^nP_r = 2.{}^nC_r$

$\Rightarrow r!.{}^nC_r = 2.{}^nC_r \Rightarrow r! = 2 \quad \therefore r = 2 \qquad [\quad {}^nP_r = r!.{}^nC_r]$

এখন, $^nC_r = 120 \Rightarrow {}^nC_2 = 120 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{1.2} = 120 \Rightarrow n^2 - n = 420 \Rightarrow n^2 - n - 420 = 0$

$\Rightarrow (n-16)(n+15) = 0 \Rightarrow n = 16, -15.$

কিন্তু n-এর মান ঋণাত্মক হতে পারেনা। $n = 16$ (Ans.)

15. (a) 21টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ এবং 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ হতে প্রতিবার 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ এবং 3টি স্বরবর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়?

সমাধান : 21টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ হতে 2টি $^{21}C_2 = 210$ উপায়ে এবং 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ হতে 3টি $^5C_3 = 10$ উপায়ে বেছে নেওয়া যায়। এ বেছে নেওয়া 5টি ভিন্ন বর্ণ (2টি ব্যঞ্জন বর্ণ ও 3টি স্বরবর্ণ) দ্বারা $5! = 120$ টি শব্দ গঠন করা যায়। $\therefore 210 \times 10 \times 120 = 252000$ টি শব্দ গঠন করা যায়।

(b) 12টি বিভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ এবং 5টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ হতে প্রতিবার 3টি ব্যঞ্জন বর্ণ এবং 2টি স্বরবর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়? [চ.'১০]

সমাধান : 12টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ হতে 3টি $^{12}C_3 = 220$ উপায়ে এবং 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ হতে 2টি $^5C_2 = 10$ উপায়ে বেছে নেওয়া যায়। এ বেছে নেওয়া 5টি ভিন্ন বর্ণ (2টি ব্যঞ্জন বর্ণ ও 3টি স্বরবর্ণ) দ্বারা $5! = 120$ টি শব্দ গঠন করা যায়। $\therefore 220 \times 10 \times 120 = 264000$ টি শব্দ গঠন করা যায়।

(c) 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলো একবার এবং 6 দুইবার পর্যন্ত ব্যবহার করে তিন অঙ্কের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান : নিম্নরূপ তিন অঙ্কের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়–

6 দুইবার ব্যবহার করা হলে, অন্য 4টি অঙ্কের 1টি ব্যবহার করতে হবে এবং তা $^4C_1$ উপায়ে ব্যবহার করা যাবে।

6 দুইবার ব্যবহার করে সংখ্যা গঠন করা যায় $^4C_1 \times \frac{3!}{2!} = 4 \times 3 = 12$ টি

অনুরূপভাবে, 6 একবার ব্যবহার করে সংখ্যা গঠন করা যায় $^4C_2 \times 3! = 36$ টি এবং

6 ব্যবহার না করে সংখ্যা গঠন করা যায় $^4C_3 \times 3! = 24$টি

সর্বমোট শব্দ সংখ্যা $= 12 + 36 + 24 = 72$

16. (a) ' ALGEBRA' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবার 3টি করে নিয়ে কতগুলো ভিন্ন ভিন্ন শব্দ গঠন করা যায়? [ব. ১০]

সমাধান ঃ ALGEBRA' শব্দটিতে 2টি A সহ মোট 7টি বর্ণ আছে ।

7টি বর্ণ হতে 3টি নিয়ে নিম্নরূপে শব্দ গঠন করা যায় –

6টি ভিন্ন বর্ণ A, L, G, E, B ও R হতে 3টি নিয়ে শব্দ গঠন করা যায় $^6P_3 = 120$ উপায়ে।

2টি A এবং অপর 5টি ভিন্ন বর্ণ L, G, E, B ও R হতে 1টি নিয়ে শব্দ গঠন করা $= {}^2C_2 \times {}^5C_1 \times \frac{3!}{2!}$

$= 1 \times 5 \times 3 = 15$ উপায়ে। $\therefore$ সর্বমোট শব্দ সংখ্যা $= 120 + 15 = 135$

(b) 'EXAMINATION' শব্দটির বর্ণগুলো হতে প্রত্যেকবার 4টি বর্ণ নিয়ে বিভিন্ন শব্দ গঠন করা হল, এদের কতগুলোতে এক প্রান্তে N এবং অন্য প্রান্তে A থাকবে ? [প্র.ভ.প.'৮৮]

সমাধান ঃ 'EXAMINATION ' শব্দটিতে 2টি A , 2টি I ও 2টি N সহ মোট 11টি বর্ণ আছে ।

এক প্রান্তে N এবং অন্য প্রান্তে A রেখে 4টি বর্ণ নিয়ে বিভিন্ন শব্দ গঠন করা হলে, মধ্যের স্থান দুইটি অবশিষ্ট $(11-2) = 9$ টি বর্ণের 2টি দ্বারা পূরণ করতে হবে।

2টি I দ্বারা মধ্যের স্থান দুইটি পূরণ করা যায় $\frac{2!}{2!} = 1$ উপায়ে।

2টি ভিন্ন বর্ণ দ্বারা মধ্যের স্থান দুইটি পূরণ করা যায় $^{9-1}P_2 = {}^8P_2 = 56$ উপায়ে। [$11-3 = 8$ টি ভিন্ন বর্ণ]

আবার, N ও A দ্বারা প্রান্তের স্থান দুইটি পূরণ করা যায় $2! = 2$ উপায়ে।

নির্ণেয় সংখ্যা $= (1+56) \times 2 = 114$

(c) ' MATHEMATICS ' শব্দটিতে 2টি M , 2টি A ও 2টি T সহ মোট 11টি বর্ণ আছে যাদের 4টি স্বরবর্ণ ও 7টি ব্যঞ্জন বর্ণ ।

সমাধান ঃ 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ A , E ও I হতে 1টি স্বরবর্ণ এবং 5টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ M , T , H , C ও S হতে 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^3C_1 \times {}^5C_2 \times 3! = 3 \times \frac{5 \times 4}{2} \times 3 \times 2 \times 1 = 180$

আবার, 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ A , E ও I হতে 1টি স্বরবর্ণ এবং 2টি M বা 2টি T নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^3C_1 \times {}^2C_1 \times \frac{3!}{2!} = 3 \times 2 \times 3 = 18$. $\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 180 + 18 = 198$

(d) 'EXPRESSION' শব্দটির বর্ণগুলো হতে প্রত্যেকবার 4 টি বর্ণ নিয়ে সমাবেশ ও বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ ' EXPRESSION ' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 2টি E এবং 2টি S

10টি বর্ণ হতে 4টি বর্ণ নিয়ে নিম্নরূপে সমাবেশ ও বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করা যায় –

8টি ভিন্ন বর্ণ E, X, P, R, S, I ,O ও N হতে 4টি নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা $= {}^8C_4 = 70$ এবং বিন্যাস সংখ্যা $= {}^8P_4 = 1680$

2টি E এবং অপর 7টি ভিন্ন বর্ণ X, P, R, S, I , O ও N হতে 2টি নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা $= {}^2C_2 \times {}^7C_2 = 1 \times 21 = 21$ এবং বিন্যাস সংখ্যা $= 21 \times \frac{4!}{2!} = 21 \times 12 = 252$

অনুরূপভাবে, 2টি S এবং অপর 7টি ভিন্ন বর্ণ E, X, P, R, I ,O ও N হতে 2টি নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = 21 এবং বিন্যাস সংখ্যা = 252

2টি E এবং 2টি S নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা $= {}^2C_2 \times {}^2C_2 = 1$ এবং বিন্যাস সংখ্যা $= 1\times \frac{4!}{2!2!} = 6$

নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা $= 70 + 42 + 1 = 113$ এবং বিন্যাস সংখ্যা $= 1680 + 504 + 6 = 2190$

(e) 'ENGINEERING' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবারে 3 টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করা হল, এদের কতগুলোতে অন্তত একটি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকবে। [RU 06-07]

সমাধান ঃ ' ENGINEERING ' শব্দটিতে ব্যঞ্জন বর্ণ আছে 3টি N, 2 টি G ও 1টি R এবং স্বরবর্ণ আছে 3টি E ও 2টি I .

যেকোন 3টি বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা = 5টি ভিন্ন বর্ণ E, N, G, I ও R হতে 3টি নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা + 2টি N বা, 2 টি G বা, 2টি E বা, 2 টি I এবং অপর 4টি ভিন্ন বর্ণ হতে 1টি নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা + 3টি N বা, 3টি E নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা $= {}^5P_3 + {}^4C_1 \times {}^4C_1 \times \frac{3!}{2!} + {}^2C_1 \times \frac{3!}{3!} = 60 + 4 \times 4 \times 3 + 2 \times 1$

$= 60 + 48 + 2 = 110$

যেকোন 3টি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা = 3টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ N, G ও R একত্রে নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা + 2টি N বা, 2 টি G এবং অপর 2টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ হতে 1টি নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা + 3টি N দ্বারা গঠিত শব্দ সংখ্যা

$$= 3! + {}^2C_1 \times {}^2C_1 \times \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{3!} = 6 + 2 \times 2 \times 3 + 1 = 6 + 12 + 1 = 19$$

অন্তত 1টি স্বরবর্ণ নিয়ে 3টি বর্ণ দ্বারা গঠিত শব্দ সংখ্যা = যেকোন 3টি বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা – কোন স্বরবর্ণ না নিয়ে অর্থাৎ যেকোন 3টি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা $= 110 - 19 = 91$

17. (a) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r (n> r) সংখ্যক একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের যেগুলোতে একটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকে তাদের সংখ্যা এবং যেগুলোতে উহা অন্তর্ভুক্ত থাকেনা তাদের সংখ্যা সমান হলে দেখাও যে, n = 2r.

সমাধান ঃ n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের একটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকলে অবশিষ্ট $(n-1)$ সংখ্যক জিনিস হতে বাকি $(r-1)$ সংখ্যক জিনিসকে ${}^{n-1}C_{r-1}$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে। এক্ষেত্রে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{n-1}C_{r-1} \times r!$

একটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত না থাকলে অবশিষ্ট $(n-1)$ সংখ্যক জিনিস হতে r সংখ্যক জিনিসকে ${}^{n-1}C_r$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে। এক্ষেত্রে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{n-1}C_r \times r!$

প্রশ্নমতে , ${}^{n-1}C_{r-1} \times r! = {}^{n-1}C_r \times r! \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r+1)!} = \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(r-1)!(n-r).(n-r-1)!} = \frac{1}{r.(r-1)!(n-1-r)!} \Rightarrow \frac{1}{n-r} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \quad n - r = r \Rightarrow n = 2r \text{ (Showed)}$$

(b) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r সংখ্যক একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের যেগুলোতে দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকে তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর। এদের কতগুলোতে বিশেষ জিনিস দুইটি পাশাপাশি থাকবে।

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকলে অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক জিনিস হতে বাকি $(r-2)$ সংখ্যক জিনিসকে ${}^{n-2}C_{r-2}$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে।

n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r সংখ্যক একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের যেগুলোতে দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকে তাদের সংখ্যা $= {}^{n-2}C_{r-2} \times r! = \dfrac{(n-2)!r!}{(r-2)!(n-2-r+2)!} = \dfrac{(n-2)!r!}{(r-2)!(n-r)!}$ (Ans.)

২য় অংশ ঃ এই দুইটি বিশেষ জিনিসকে একটি একক জিনিস বিবেচনা করলে $(r-1)$ সংখ্যক ভিন্ন জিনিস $(r-1)!$ ভাবে বিন্যস্ত হবে এবং বিশেষ জিনিস দুইটি $2!$ ভাবে বিন্যস্ত হবে।

$$\text{নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা} = {}^{n-2}C_{r-2} \times (r-1)! \times 2! = \frac{(n-2)!}{(r-2)!(n-2-r+2)!} 2.(r-1)!$$

$$= \frac{(n-2)!}{(r-2)!(n-r)!} 2.(r-1).(r-2)! = \frac{2(r-1).(n-2)!}{(n-r)!} \text{ (Ans.)}$$

17. (c) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r সংখ্যক একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের যেগুলোতে দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকলে উভয়েই থাকে তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকলে অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক জিনিস হতে বাকি $(r-2)$ সংখ্যক জিনিসকে ${}^{n-2}C_{r-2}$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে। এক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{n-2}C_{r-2} \times r!$

n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের দুইটি বিশেষ জিনিসের কোনটি অন্তর্ভুক্ত না থাকলে অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক জিনিস হতে r সংখ্যক জিনিসকে ${}^{n-2}C_r$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে। এক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{n-2}C_r \times r!$

$$\text{নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা} = {}^{n-2}C_{r-2} \times r! + {}^{n-2}C_r \times r! = \frac{(n-2)!.r!}{(r-2)!(n-2-r+2)!} + \frac{(n-2)!.r!}{r!(n-2-r)!}$$

$$= \frac{(n-2)!.r(r-1).(r-2)!}{(r-2)!(n-r)!} + \frac{(n-2)!.}{(n-2-r)!} = \frac{(n-2)!.r(r-1)}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)!} + \frac{(n-2)!.}{(n-2-r)!}$$

$$= \frac{(n-2)!\{r(r-1)+(n-r)(n-r-1)\}}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)!} = \frac{(n-2)!(r^2-r+n^2-2nr+r^2-n+r)}{(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-2)!}{(n-r)!}(2r^2+n^2-2nr-n) \text{ (Ans.)}$$

(d) একটি সংকেত তৈরি করতে তিনটি পতাকার প্রয়োজন হয়। 6টি বিভিন্ন রং-এর প্রত্যেটির 4টি করে 24টি পতাকা দ্বারা কতগুলো সংকেত দেয়া যেতে পারে?

সমাধান ঃ সবগুলো পতাকা ভিন্ন ভিন্ন রঙের নিয়ে সংকেত দেয়ার সংখ্যা $= {}^6P_3 = 120$

6টি বিভিন্ন রঙের পতাকা হতে এক রঙের 2টি পতাকা বাছাই করা যায় ${}^6C_1$ উপায়ে। আবার অবশিষ্ট 5টি বিভিন্ন রঙের পতাকা হতে এক রঙের 1টি পতাকা বাছাই করা যায় ${}^5C_1$ উপায়ে। এই বেছে নেয়া এক রঙের 2টি ও অন্য রঙের 1টি পতাকাকে $\dfrac{3!}{2!} = 3$ উপায়ে সাজানো যায়।

2টি এক রঙের এবং অপরটি অন্য এক রঙের নিয়ে সংকেত দেয়ার সংখ্যা $= {}^6C_1 \times {}^5C_1 \times 3 = 6 \times 5 \times 3 = 90$

সবগুলো পতাকা একই রঙের নিয়ে সংকেত দেয়ার সংখ্যা $= {}^6C_1 \times \dfrac{3!}{3!} = 6$

নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 120 + 90 + 6 = 216$

18. n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে যত প্রকারে বিন্যাস (Permutation) করা যায় তার সংখ্যা ${}^nP_r$ এবং যতগুলি সমাবেশ (Combination) হতে পারে তার সংখ্যা ${}^nC_r$.

(a) ${}^{n+1}P_3+{}^nC_3+{}^nC_2=343$ হলে n এর মান নির্ণয় কর। বইঘর কম

(b) প্রমাণ কর যে, ${}^nC_r+{}^nC_{r-1}={}^{n+1}C_r$

[ঢা.'১০,'১২; রা. '০৮; চ. '০৭,'১৪; সি. '০৭, '০৯; কু.'০৭,'১২,'১৪; ব .'০৮,'১২,'১৪; দি.'১০,'১৩; য.'১৪]

(c) 'Combination' শব্দটির বর্ণগুলি থেকে অন্তত একটি বর্ণ কত উপায়ে বাছাই করা যায় এবং স্বরবর্ণগুলির স্থান পরিবর্তন না করে 'Permutation' শব্দটির বর্ণগুলি কত উপায়ে পুনর্বিন্যাস করা যায়?

[ব.০৫ ; চ.'০৪; ঢা. '০৯; দি.'১৩]

সমাধান ঃ (a) ${}^{n+1}P_3+{}^nC_3+{}^nC_2=392 \Rightarrow {}^{n+1}P_3+({}^nC_3+{}^nC_{3-1})=392$

$\Rightarrow \quad {}^{n+1}C_3\times 3!+{}^{n+1}C_3=392 \Rightarrow 7\times {}^{n+1}C_3=392 \Rightarrow {}^{n+1}C_3=56={}^8C_3 \Rightarrow n+1=8 \therefore n=7$

(b) **মূল বইয়ের ১৩৮ পৃষ্ঠা দ্রষ্টব্য।**

(c) 'Combination' শব্দটিতে 2টি O, 2টি N, 2টি I ও 5টি ভিন্ন ভিন্ন বর্ণ আছে।

অন্তত একটি বর্ণ বাছাই করা যাই $(2+1)(2+1)(2+1)2^5-1=863$ উপায়ে।

'PERMUTATION' শব্দটিতে মোট 11টি বর্ণ আছে যাদের 5টি স্বরবর্ণ।

5 টি স্বরবর্ণের স্থান পরিবর্তন না করে 2টি T সহ অবশিষ্ট (11 – 5) বা, 6টি ব্যঞ্জন বর্ণকে $\frac{6!}{2!}=\frac{720}{2}=360$ উপায়ে সাজানো যায়।

নির্ণেয় পুনর্বিন্যাস করার উপায় $=360-1=359$ (Ans.)

19. সাতটি সরল রেখার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 সে.মি.।

(a) 1234567 সংখ্যাটির অঙ্কগুলি থেকে অন্তত একটি জোড় অঙ্ক ও অন্তত একটি বিজোড় অঙ্ক কতভাবে বাছাই করা যায়? উ: 105

(b) ${}^nP_r$ এর মান নির্ণয় কর। [কু.'০৮;ব.'০৯ ; চ.'০৬,'০৯,'১৩;য.'০৭,'১১; দি.'১৪]

(c) দেখাও যে, একটি চতুর্ভুজ গঠন করার জন্য চারটি সরল রেখা যত প্রকারে বাছাই করা যায় তার সংখ্যা 32.

[চ.'০৮,'১২;সি.'০৮,'১২; দি.'০৯;য.'০৯;ব.'০৮,'১০]

সমাধানঃ (a) 1234567 সংখ্যাটির তিনটি জোড় অঙ্ক ও চারটি বিজোড় অঙ্ক আছে।

অন্তত একটি জোড় অঙ্ক ও অন্তত একটি বিজোড় অঙ্ক বাছাই করা যায় $(2^3-1)(2^4-1)=105$ উপায়ে।

(b) **মূল বইয়ের ১২৭ পৃষ্ঠা দ্রষ্টব্য।**

(c) **প্রশ্নমালা VB এর 6(a) দ্রষ্টব্য।**

20. যেকোনো সংখ্যা গঠনে 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলি ব্যবহার করা হয়।

(a) প্রত্যেক সংখ্যায় প্রত্যেক অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 10 অঙ্কের কতগুলি অর্থপূর্ণ সংখ্যা গঠন করা যায়?

(b) প্রত্যেক সংখ্যায় প্রত্যেক অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 10 অঙ্কের কতগুলি অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করা যায়।

(c) প্রত্যেক সংখ্যায় 1 নয়বার ও 9 একবার ব্যবহার করে 10 অঙ্কের যতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের গড় নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (a) প্রদত্ত 10টি অঙ্ক ব্যবহার করে 10! সংখ্যক সংখ্যা গঠন করা যায়। কিন্তু 0 দ্বারা শুরু 9! সংখ্যক সংখ্যা অর্থপূর্ণ সংখ্যা নয়।

নির্ণেয় অর্থপূর্ণ সংখ্যা $= 10! - 9! = 3265920$

(b) সংখ্যাগুলির শেষে 0, 2, 4, 6 অথবা 8 থাকলে সংখ্যাগুলি জোড় হবে। আবার, সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা।

0 শেষে রেখে প্রথম স্থানটি 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 বা 9 দ্বারা 9 উপায়ে পূরণ করা যায়। অবশিষ্ট মাঝের 8টি স্থান বাকী 8টি অঙ্ক দ্বারা $8! = 40320$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

0 শেষে রেখে অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করার উপায় সংখ্যা $= 9 \times 40320 = 362880$

আবার, 2 শেষে রেখে প্রথম স্থানটি 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 বা 9 দ্বারা 8 উপায়ে পূরণ করা যায়। অবশিষ্ট মাঝের 8টি স্থান বাকী 8টি অঙ্ক দ্বারা $8! = 40320$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

2 শেষে রেখে অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করার উপায় সংখ্যা $= 8 \times 40320 = 322560$

অনুরূপভাবে, 4, 6 অথবা 8 শেষে রেখে অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠন করার উপায় সংখ্যা $= 322560$

নির্ণেয় অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা $= 362880 + 4 \times 322560 = 1653120$ সংখ্যক।

(c) প্রত্যেক সংখ্যায় 1 নয়বার ও 9 একবার ব্যবহার করে যতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সংখ্যা $= \frac{10!}{9!} = 10$

প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক, শতক ইত্যাদি) 9 একবার ও 1 নয়বার পুনরাবৃত্ত হয়।

দশ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $= 9 + 1 \times 9 = 18$

প্রত্যেক সংখ্যায় 1 নয়বার ও 9 একবার ব্যবহার করে 10 অঙ্কের গঠিত সংখ্যার সমষ্টি

$= 18 \times 1111111111 = 19999999998$

নির্ণেয় গড় $= 19999999998 \div 10 = 1999999999{\cdot}8$

অথবা,

গঠিত সংখ্যার সমষ্টি $= 9111111111 + 1911111111 + 1191111111 + 1119111111 + 1111911111 + 1111191111 + 1111119111 + 1111111911 + 1111111191 + 1111111119$
$= 19999999998$

নির্ণেয় গড় $= 19999999998 \div 10 = 1999999999{\cdot}8$

কাজ:

১। 10 টি জিনিসের মধ্যে 2টি এক জাতীয় এবং বাকীগুলো ভিন্ন ভিন্ন জিনিস। ঐ জিনিসগুলো থেকে প্রতিবারে 5টি নিয়ে কত প্রকারে বাছাই করা যায়?

সমাধান : সবগুলোই জিনিস ভিন্ন ভিন্ন এরূপ বাছাই সংখ্যা $= (10 - 2 + 1)$ অর্থাৎ 9টি বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবারে 5টি নিয়ে বাছাই সংখ্যা $= {}^9C_5 = 126$

2টি জিনিস এক জাতীয় এবং অপর 3টি জিনিস ভিন্ন ভিন্ন এরূপ বাছাই সংখ্যা $= {}^2C_2 \times {}^8C_3 = 1 \times 56 = 56$

নির্ণেয় মোট বাছাই সংখ্যা $= 126 + 56 = 182$

২। 13 জন বালকের একটি দলে 5 জন বালক সেনা আছে। কত প্রকারে 7 জন বালক বাছাই করা যায় যাতে (i) ঠিক 3 জন বালক সেনা থাকে, (ii) অন্তত 3 জন বালক সেনা থাকে?

(i) সমাধান : 5 জন বালক সেনা থেকে প্রতিবারে ঠিক 3 জনকে ${}^5C_3 = 10$ উপায়ে এবং অন্যান্য $(13 - 5)$ অর্থাৎ, 8 জন বলক থেকে প্রতিবারে বাকি $(7 - 3)$ অর্থাৎ, 4 জনকে ${}^8C_4 = 70$ উপায়ে বাছাই করা যায়।

7 জনের দল গঠন করা যাবে $= 10 \times 70 = 700$ উপায়ে।

(ii) ঃ নিম্নরূপে 7 জনের একটি দল গঠন করা যেতে পারে –

বালক সেনা (5)	অন্যান্য বালক (8)	কমিটি গঠনের উপায়
3	4	${}^5C_3 \times {}^8C_4 = 10 \times 70 = 700$
4	3	${}^5C_4 \times {}^8C_3 = 5 \times 56 = 280$
5	2	${}^5C_5 \times {}^8C_2 = 1 \times 28 = 28$

$(700 + 280 + 28)$ অর্থাৎ, 1008 প্রকারে দল গঠন করা যাবে।

৩। 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 চিহ্নিত আটটি কাউন্টার থেকে অন্যূন একটি বিজোড় ও একটি জোড় কাউন্টার নিয়ে চারটি কাউন্টারের কতগুলো সমাবেশ গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ নিম্নরূপে 4টি কাউন্টারের সমাবেশ গঠন করা যেতে পারে –

জোড় কাউন্টার (4)	বিজোড় কাউন্টার (4)	সমাবেশ গঠনের উপায়
1	3	${}^4C_1 \times {}^4C_3 = 4 \times 4 = 16$
2	2	${}^4C_2 \times {}^4C_2 = 6 \times 6 = 36$
3	1	${}^4C_3 \times {}^4C_1 = 4 \times 4 = 16$

নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 16 + 36 + 16 = 68$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. (a) একটি সমতলে n- সংখ্যক সরলরেখা টানলে, যদি কোন দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল না হয়, এবং কোন তিনটিও সমবিন্দু না হয়, তবে সেখানে কতগুলো ছেদবিন্দু থাকবে?

সমাধান ঃ দুইটি অসমান্তরাল সরলরেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করে।

যেকোন দুইটি সমান্তরাল নয় এরূপ n- সংখ্যক সরলরেখা ছেদ করবে ${}^nC_2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ সংখ্যক বিন্দুতে।

(b) শূন্যে অবস্থিত n- সংখ্যক বিন্দুর মধ্যে কোন তিনটি বিন্দুও সমরেখ নয় এবং কোন চারটি এক সমতলে নয়। n-এর কত মানের জন্য বিন্দুগুলোর সংযোগ রেখার দ্বারা প্রাপ্ত সরলরেখার সংখ্যা ও সমতলের সংখ্যা সমান হবে?

সমাধান ঃ একটি সরলরেখার জন্য দুটি বিন্দু এবং একটি সমতলের জন্য তিনটি বিন্দুর প্রয়োজন।এখানে মোট n- সংখ্যক বিন্দু ।অতএব, মোট সরলরেখার সংখ্যা ${}^nC_2$ এবং মোট সমতলের সংখ্যা ${}^nC_3$.

প্রশ্নমতে, ${}^nC_3 = {}^nC_2 \Rightarrow \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) = \frac{1}{2}n(n-1) \Rightarrow n-2 = 3 \therefore n = 5$

(c) শূন্যে অবস্থিত n- সংখ্যক বিন্দুর মধ্যে কোন তিনটি বিন্দুও সমরেখ নয় এবং কোন চারটি এক সমতলে নয়, কেবল p-সংখ্যক বিন্দু এক সমতলে অবস্থিত।ঐ বিন্দুগুলো দ্বারা কতগুলো ভিন্ন সমতল গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ একটি সমতল গঠন করাতে তিনটি বিন্দুর প্রয়োজন।

প্রদত্ত n- সংখ্যক বিন্দু দ্বারা গঠিত সমতলের সংখ্যা $= {}^nC_3$

কিন্তু যেহেতু p- সংখ্যক বিন্দু একসমতলে অবস্থিত; সুতরাং তারা ${}^pC_3$ সংখ্যক সমতলের পরিবর্তে কেবল একটি সমতল গঠন করে।

নির্ণেয় সমতলের সংখ্যা $= {}^nC_3 - {}^pC_3 + 1 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - \frac{1}{6}p(p-1)(p-2) + 1$

(d) কোন সমতলে অবস্থিত n- সংখ্যক বিন্দুর মধ্যে , p- সংখ্যক বিন্দু সমরেখ, বাকিগুলোর যে কোন তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত নয়। ঐ n- সংখ্যক বিন্দুগুলো সংযোগ করে মোট কতগুলো সরলরেখা পাওয়া যাবে? এদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের সংখ্যাও নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রথম অংশ ঃ দুই বিন্দুর সংযোগে একটি সরলরেখা উৎপন্ন হয়।

প্রদত্ত n- সংখ্যক বিন্দু দ্বারা গঠিত সরলরেখার সংখ্যা = $^nC_2$

কিন্তু যেহেতু p- সংখ্যক বিন্দু সমরেখ; সুতরাং তারা $^pC_2$ সংখ্যক রেখার পরিবর্তে কেবল একটি রেখা গঠন করে।

নির্ণেয় রেখার সংখ্যা = $^nC_2 - {}^pC_2 + 1 = \frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}p(p-1) + 1$

দ্বিতীয় অংশ ঃ অসমরেখ তিনটি বিন্দুর সংযোগ রেখা দ্বারা একটি ত্রিভুজ গঠিত হয়।

উপরের যুক্তি অনুযায়ী নির্ণেয় ত্রিভুজ সংখ্যা = $^nC_3 - {}^pC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} - \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{p(p-1)(p-2)}{6}$$

3. ক্রিকেট বিশ্বকাপ -2007 এ 4 টি গ্রুপ থেকে 2টি করে দল শীর্ষ আটে উঠে। নিজ গ্রুপের দল ব্যতীত এই 8 টি দলের প্রতিটি দল পরস্পরের মুখোমুখি হলে শীর্ষ আটে মোট কয়টি খেলা অনুষ্ঠিত হয়।

সমাধান : 8টি দলের 2টি করে দল পরস্পরের সাথে খেললে মোট খেলার সংখ্যা হয় $^8C_2$ বা 28 টি।

কিন্তু শীর্ষ আটে নিজ গ্রুপের দল দুইটি পরস্পরের সাথে খেলেনি বলে 4টি গ্রুপের 4টি খেলা অনুষ্ঠিত হয়নি।

শীর্ষ আটে মোট খেলা অনুষ্ঠিত হয় (28 – 4) বা , 24 টি

4. (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 2, 3, 4, 5, 6, 7 এবং 8 অঙ্কগুলো দ্বারা চার অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো পৃথক সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ এখানে 7টি অঙ্ক আছে। প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 7টি অঙ্ক দ্বারা চার অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা = $^7P_4 = 840$

(b) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 3, 1, 7, 0, 9, 5 অঙ্কগুলো দ্বারা ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? এদের মধ্যে কতগুলো সংখ্যার দশকের স্থানে শূন্য থাকবে?

সমাধান ঃ এখানে শূন্যসহ মোট 6টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে। সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা।

প্রথম স্থানটি 5টি অঙ্ক 3, 1, 7, 9, 5 এর যেকোন একটি দ্বারা $^5P_1$ উপায়ে পূরণ করে অবশিষ্ট 5টি স্থান বাকি 5টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে 5! উপায়ে। $\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $^5P_1 \times 5! = 5 \times 120 = 600$

২য় অংশ : প্রথম স্থানটি 5টি অঙ্ক 3, 1, 7, 9, 5 এর যেকোন একটি দ্বারা $^5P_1$ উপায়ে এবং দশকের স্থান শূন্য দ্বারা পূরণ করে অবশিষ্ট 4টি স্থান বাকি 4টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে 4! উপায়ে। $\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $^5P_1 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

(c) 3, 4, 0, 5, 6 অঙ্কগুলোর একটিকেও পুনরাবৃত্তি না করে 10 এবং 1000 মধ্যবর্তী কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ 10 এবং 1000 মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলো দুই অঙ্কের ও তিন অঙ্কের হবে। এখানে শূন্যসহ মোট 5টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে। সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা।

দুই অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা = 5টি অঙ্ক দ্বারা দুই অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা – 0 প্রথমে রেখে বাকি 4টি অঙ্ক দ্বারা এক অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা = $^5P_2 - {}^4P_1 = 20 - 4 = 16$

অনুরূপভাবে, তিন অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা = $^5P_3 - {}^4P_2 = 60 - 12 = 48$

নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $16 + 48 = 64$

[MCQ এর জন্য : নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $4\ ({}^4P_1 + {}^4P_2) = 64$]

5. (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর ছোট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ এখানে শূন্যসহ মোট 8টি অঙ্ক আছে । সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। 10000 এর ছোট সংখ্যা নিম্নরূপে গঠন করা যায় ঃ

শূন্য ব্যতীত বাকী 7টি অঙ্ক দ্বারা এক অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = ${}^7P_1 = 7$

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = 8টি অঙ্ক দ্বারা দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা – 0 প্রথমে রেখে বাকি 7টি অঙ্ক দ্বারা এক অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = ${}^8P_2 - {}^7P_1 = 49$

অনুরূপভাবে, তিন অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = ${}^8P_3 - {}^7P_2 = 294$

এবং চার অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = ${}^8P_4 - {}^7P_3 = 1470$

10000 এর ছোট মোট সংখ্যা = $(7 + 49 + 294 + 1470) = 1820$

[MCQ এর জন্য : নির্ণেয় মোট সংখ্যা = ${}^7P_1\ (1 + {}^7P_1 + {}^7P_2 + {}^7P_3) = 1820$]

(b) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা 1000-এর চেয়ে ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ এখানে শূন্যসহ মোট 10টি ভিন্ন অঙ্ক আছে । সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। 5 দ্বারা সংখ্যাগুলোর শেষে 0 বা 5 থাকতে হবে।

1000-এর চেয়ে ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা নিম্নরূপে গঠন করা যায় ঃ

এক অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = 1

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = শেষে 0 থাকে এরূপ মোট সংখ্যা + শেষে 5 থাকে এরূপ মোট সংখ্যা

$$= {}^9P_1 + {}^8P_1 = 9 + 8 = 17$$

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = শেষে 0 থাকে এরূপ মোট সংখ্যা + শেষে 5 থাকে এরূপ মোট সংখ্যা

$$= {}^9P_2 + ({}^9P_2 - {}^8P_1) = 72 + 72 - 8 = 136$$

নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $1 + 17 + 136 = 154$

(c) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে 0, 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলো দ্বারা তিন অঙ্কের বেশি নয় , এরূপ কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ এখানে শূন্যসহ মোট 5টি ভিন্ন অঙ্ক আছে । সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। তিন অঙ্কের বেশি নয় এরূপ সংখ্যা নিম্নরূপে গঠন করা যায় ঃ

এক অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = ${}^4P_1 = 4$

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = ${}^5P_2 - {}^4P_1 = 20 - 4 = 16$

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = ${}^5P_3 - {}^4P_2 = 60 - 12 = 48$

নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $4 + 16 + 48 = 68$

(d) 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে চার অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় ? এ সংখ্যাগুলির কয়টিতে একই অঙ্ক একাধিকবার থাকবে।

সমাধান ঃ প্রদত্ত পাঁচটি অঙ্ক দ্বারা চার অঙ্কবিশিষ্ট প্রত্যেক সংখ্যার প্রতিটি স্থান 5 উপায়ে পূরণ করা যায়।

প্রদত্ত অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে চার অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যায় $5^4 = 625$ উপায়ে। আবার, প্রদত্ত অঙ্কগুলি প্রত্যেক সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে চার অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যায় $^5P_4 = 120$ উপায়ে।

$625 - 120 = 505$ টি সংখ্যায় একই অঙ্ক একাধিকবার থাকবে।

6. কোনো পরীক্ষায় তিনটি বিষয়ের প্রতিটির পূর্ণমাণ-100 । একজন ছাত্র কতভাবে 200 নম্বর পেতে পারে?

সমাধান : একজন ছাত্রকে 200 নম্বর পেতে হলে প্রতিটি বিষয়ে 0 হতে 100 নম্বর পেতে হবে।

ছাত্রটি নিম্নরূপে পরীক্ষায় 200 নম্বর পেতে পারে -

১ম বিষয়ে প্রাপত নম্বর	২য় বিষয়ে প্রাপত নম্বর	৩য় বিষয়ে প্রাপত নম্বর	মোট প্রাপ্ত নম্বর
0	100	100	200
1	100	99	200
1	99	100	200
2	100	88	200
2	99	99	200
2	88	100	200

লক্ষ্যনীয় যে, ১ম বিষয়ে 0 পাওয়া যায় 1 উপায়ে, 1 পাওয়া যায় 2 উপায়ে, 2 পাওয়া যায় 3 উপায়ে। অনুরূপভাবে, ১ম বিষয়ে 3 পাওয়া যায় 4 উপায়ে, 4 পাওয়া যায় 5 উপায়ে, 5 পাওয়া যায় 6 উপায়ে $\cdots$, 100 পাওয়া যায় 101 উপায়ে।

নির্ণেয় সংখ্যা $= 1 + 2 + 3 + \cdots + 101 = \frac{101(101+1)}{2} = \frac{101 \times 102}{2} = 5151$

7 (a) n (A) = 4 হলে, P(A) সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান ঃ দেওয়া আরছে , $n(A) = 4$ $P(A)$ সেটের উপাদান সংখ্যা $= 2^4 = 16$

$P(A)$ সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান বাছাই করা যায় $(2^{16} - 1)$ বা 65535 উপায়ে।

(b) $n(A) = 2$, $n(B) = 3$ হলে, $P(A \times B)$ সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান ঃ দেওয়া আরছে , $n(A) = 2$, $n(B) = 3$ $n(A \times B) = 2 \times 3 = 6$

$P(A \times B)$ সেটের উপাদান সংখ্যা $= 2^6 = 64$

$P(A \times B)$ সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান বাছাই করা যায় $(2^{64} - 1)$ উপায়ে।

8. $n(A) = 3$, $n(B) = 4$ হলে A , B ও J_5 প্রত্যেক সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান ঃ $n(J_5) = 5$.

প্রত্যেক সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান বাছাই করার উপায় $= (2^3 - 1)(2^4 - 1)(2^5 - 1) = 3255$

9. 'EQUATION' শব্দটির সবগুলো ে প্রশ্নমালা V (A + B) কারে দুইটি শব্দ গঠন করা যেতে পারে, যেন E, Q, U অক্ষর তিনটি এক শব্দে এবং C, - । অন্তর্ভুক্ত থাকে?

সমাধান ঃ A, T, I অক্ষর তিনটি থেকে যেকোন 0, 1, 2 ও 3টি অক্ষর ১ম শব্দে (E, Q, U অন্তর্ভুক্ত শব্দে) অন্তর্ভুক্ত করা হলে ২য় শব্দে (O, N অন্তর্ভুক্ত শব্দে) যথাক্রমে 3, 2, 1 ও 0টি অক্ষর অন্তর্ভুক্ত করতে হবে। এ 3টি

অক্ষরকে ১ম শব্দে 1টি ও ২য় শব্দে 2টি অন্তর্ভুক্ত করা যায় $\frac{3!}{1! \times 2!}$ উপায়ে।

A, T, I অক্ষর তিনটি নিম্নরূপে অন্তর্ভুক্ত করে দুইটি শব্দ গঠন করা যায় –

E, Q, U অন্তর্ভুক্ত শব্দ	O, N অন্তর্ভুক্ত শব্দ	দুইটি শব্দ গঠন করার উপায়
$3+0=3$	$2+3=5$	$\frac{3!}{0! \times 3!} \times 3! \times 5! = 720$
$3+1=4$	$2+2=4$	$\frac{3!}{1! \times 2!} \times 4! \times 4! = 1728$
$3+2=5$	$2+1=3$	$\frac{3!}{2! \times 1!} \times 5! \times 3! = 2160$
$3+3=6$	$2+0=6$	$\frac{3!}{3! \times 0!} \times 6! \times 2! = 1440$

নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 720 + 1728 + 2160 + 1440 = 6048$

10. **(a) 11 ডিজিট বিশিষ্ট গ্রমীণফোন মোবাইল নম্বরে বাম দিক হতে প্রথম চারটি 0171 দ্বারা নির্ধারিত। গ্রামীণফোন সারা দেশে সর্বাধিক কত সংখ্যক মোবাইল সংযোগ দিতে পারবে? এদের কত সংখ্যক 5 দ্বারা বিভাজ্য হবে? কতগুলোর ঠিক শেষের তিনটি ডিজিট এক রকম হবে তাও নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 0 হতে 9 পর্যন্ত মোট 10টি অঙ্ক (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) আছে। বাম দিক হতে প্রথম চারটি ডিজিট 0171 দ্বারা নির্ধারিত করে অবশিষ্ট $(11 - 4)$ বা, 7টি ডিজিট প্রত্যেকটি 10টি অঙ্ক দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

নির্ণেয় টেলিফোন সংযোগ সংখ্যা $= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^7$

২য় অংশ ঃ 5 দ্বারা বিভাজ্য বলে শেষের ডিজিট 0 অথবা 5 হবে এবং তা $^2C_1 = 2$ উপায়ে পূরণ করা যাবে এবং অবশিষ্ট $(14 - 4 - 1)$ বা, 6টি ডিজিট প্রত্যেকটি 10টি অঙ্ক দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

নির্ণেয় টেলিফোন সংযোগ সংখ্যা $= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 2 = 2 \times 10^6$

৩য় অংশ ঃ শেষের তিনটি ডিজিট 10টি অঙ্কের যেকোন একটির তিনটি দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যাবে। শেষের তিনটি ডিজিট 10টি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা পূরণ করার পর ডান দিক হতে ৪র্থ ডিজিট অবশিষ্ট 9টি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা 9 উপায়ে পূরণ করা যাবে। অবশিষ্ট $(7 - 3 - 1)$ বা, 3টি ডিজিট প্রত্যেকটি 10টি অঙ্ক দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

শেষের তিনটি ডিজিট ঠিক এক রকম এমন টেলিফোন সংযোগ সংখ্যা $= 10 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^4$

11 ডিজিট বিশিষ্ট টেলিটক মোবাইল নম্বরে বাম দিক হতে প্রথম চারটি 0155 দ্বারা নির্ধারিত। বাম দিক হতে ৫ম ডিজিট জোড় সংখ্যা দ্বারা নির্ধারিত হলে, সারা দেশে কত সংখ্যক টেলিটকের মোবাইল সংযোগ দেওয়া যাবে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ 0 হতে 9 পর্যন্ত মোট 4টি অঙ্ক (2, 4, 6, 8) জোড়। বাম দিক হতে ৫ম ডিজিট 4টি অঙ্ক দ্বারা $^4C_1$ উপায়ে পূরণ করা যায়। অবশিষ্ট 6টি ডিজিট প্রত্যেকটি 10টি অঙ্ক দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যায়।

মোট সংযোগ সংখ্যা $= {}^4C_1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 4 \times 10^6$

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যার বাম দিক থেকে প্রথম দুইটি অঙ্কের সমষ্টি 4, প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে গঠিত সংখ্যার সমষ্টি 1998 এবং সংখ্যাটির উৎপাদকের সংখ্যা 8 হলে সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, সংখ্যাটি $(100a + 10b + c)$.

প্রশ্নমতে, $a + b = 4 \quad \cdots(i)$

$(3-1)! \times (a+b+c) \times 111 = 1998 \Rightarrow a+b+c = \dfrac{1994}{222} = 9 \Rightarrow 4+c = 9 \Rightarrow c = 5$

(i) হতে পাই, $(a, b) = (4, 0), (2, 2), (3, 1)$ অথবা, $(1, 3)$.

নির্ণেয় সংখ্যাটি হবে 405, 225, 315 অথবা, 135.

এখন, $405 = 3^4 \times 5$. 405 এর উৎপাদকের সংখ্যা $= (4+1)(1+1) = 10$

$225 = 3^2 \times 5^2$ 225 এর উৎপাদকের সংখ্যা $= (2+1)(2+1) = 9$

$315 = 3^2 \times 5 \times 7$ 315 এর উৎপাদকের সংখ্যা $= (2+1)(1+1)(1+1) = 12$

$135 = 3^3 \times 5$ 135 এর উৎপাদকের সংখ্যা $= (3+1)(1+1) = 8$

নির্ণেয় সংখ্যা 135.

ভর্তি পরীক্ষার MCQ:

1. যদি *TIME* শব্দটির অক্ষরগুলি পুনর্বিন্যাস করা হয় তবে কতগুলো বিন্যাস স্বরবর্ণ দ্বারা শুরু হবে ? [DU 88-99]

Sol^n : নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^2P_1 \times 3! = 12$

2. *SCIENCE* শব্দটির স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে সবকয়টি বর্ণকে যত উপায়ে সাজানো যায় তাদের সংখ্যা কত? [DU 97-98]

Sol^n : নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{5!}{2!} \times \dfrac{3!}{2!} = 180$

3. প্রতিটি সংখ্যায় প্রতিটি অঙ্ক একবার ব্যবহার করে 0,1,2,3,4,5 দ্বারা কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?[IU 06-07]

Sol^n : নির্ণেয় উপায় $= 6! - 5! = 600$

4. SCHOOL শব্দটি হতে তিনটি অক্ষর বাছাই করা যায় ? [DU 07-08]

Sol^n : নির্ণেয় উপায় $= {}^5C_3 + {}^4C_1 = 14$

5. 6 জন ছাত্র ও 5 জন ছাত্রী হতে 5 জনের একটি কমিটি কতভাবে গঠন করা যাবে যাতে অন্ততঃ একজন ছাত্র ও একজন ছাত্রী অন্তর্ভুক্ত থাকে ? [DU 05-06; Jt.U 06-07]

Sol^n : নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^5C_1 \times {}^6C_4 + {}^5C_2 \times {}^6C_3 + {}^5C_3 \times {}^6C_2 + {}^5C_4 \times {}^6C_1 = 455$

6. আটজন ব্রক্তি হতে পাঁচ সদস্যের একটি কমিটি কতভাবে হঠন করা যায় যাতে তিনজন বিশেষ ব্যক্তির সর্বাধিক একজন অন্তর্ভুক্ত থাকে? [DU 97-98]

Sol^n : কমিটি গঠনের উপায় সংখ্যা $= {}^3C_1 \times {}^5C_4 + {}^3C_0 \times {}^5C_5 = 16$

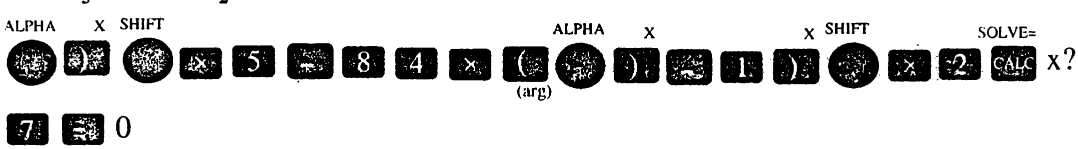
7. 8 জন লোক প্রত্যেকে প্রত্যেকের সাথে করমর্দন করলে করমর্দনের সংখ্যা কত হবে? [SU 07-08]

Sol^n নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^8C_2 = 28$ [$\because$ করমর্দনে দুইজন ব্যক্তি লাগে।]

8. একটি টেনিম টুনামেন্টে 150 জন খেলোয়াড় আছে । এক জন খেলোয়াড় একটি ম্যাচ হারলে টুনামেন্ট থেকে বিদ্যায় নেয়। টুনামেন্টে কতটি ম্যাচ খেলা হয়েছে? [SU 06-07]

Sol^n টুনামেন্টে একজন বিজায়ী হয় এবং অবশিষ্ট $(150 - 1) = 149$ জন খেলোয়াড় 149টি ম্যাচে পরাজিত হয়ে টুনামেন্ট থেকে বিদ্যায় নেয়।অতএব. নির্ণেয় ম্যাচ সংখ্যা $= 149$.

9. ${}^nP_5 = 84 \times {}^{n-1}P_2$ হলে n এর মান কত?



1. প্রমাণ কর যে,

(a) $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= (\tan\theta + \sec\theta)^2$

$= \left\{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta}\right\}^2 = \left\{\dfrac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}\right\}^2$

$= \dfrac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \dfrac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}$

$= \dfrac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} =$ R.H.S.

1(b) $\dfrac{\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta - 2}{\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta + 2} = \left(\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)^2$

L.H.S.$= \dfrac{\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta - 2}{\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta + 2}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{1}{\sin\theta} - 2}{\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{1}{\sin\theta} + 2} = \dfrac{1-2\sin\theta\cos\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{(\sin\theta - \cos\theta)^2}{(\sin\theta + \cos\theta)^2} = \dfrac{\cos^2\theta(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - 1)^2}{\cos^2\theta(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + 1)^2}$

$= \dfrac{(\tan\theta - 1)^2}{(\tan\theta + 1)^2} = \dfrac{(1-\tan\theta)^2}{(1+\tan\theta)^2} = \left(\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)^2$

= R.H.S. (Proved)

1(c) $1 - 4\sin^2\theta\ \cos^2\theta = \sin^4\theta(1 - \cot^2\theta)^2$

L.H.S. $= 1 - 4\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 4\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= \sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta - 4\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= (\sin^2\theta)^2 + (\cos^2\theta)^2 - 2(\sin^2\theta)(\cos^2\theta)$

$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)^2 = \{\sin^2\theta(1 - \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta})^2\}$

$= \sin^4(1 - \cot^2\theta)^2 =$ R.H.S. (Proved)

1(d) $\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = (1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2$

L.H.S.$= (\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2$

$= \sin^2\theta\left(1 + \dfrac{\sec\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \cos^2\theta\left(1 + \dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta}\right)^2$

$= (1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= (1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2 .1$

$= (1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2 =$ R.H.S. (Proved)

1(e) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

L.H.S.$= \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$

$= \dfrac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{1-\cos\theta}} = \dfrac{\sqrt{1+\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{1-\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}$

$= \dfrac{1+\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \dfrac{1+\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}} = \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

= R.H.S. (proved)

1(f) $\sin^2\theta(1 + \cot^2\theta) + \cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 2$

L.H.S.$= \sin^2\theta(1 + \cot^2\theta) + \cos^2\theta(1 + \tan^2\theta)$

$= \sin^2\theta + \sin^2\theta\cot^2\theta + \cos^2\theta + \cos^2\theta\tan^2\theta$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \sin^2\theta\ \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$+ \cos^2\theta\ .\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= 1 + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 + 1 = 2 =$ R.H.S.

1(g) $\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta + \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta)}$

$= \sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

L.H.S.$= \dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)(\cot\theta+\tan\theta)}$

$= \dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta})}$

$= \dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)(\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta})}$

$= \dfrac{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$= \sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$ = R.H.S.

(Proved)

1.(h) $3(\sin\theta+\cos\theta)-2(\sin^3\theta+\cos^3\theta) = (\sin\theta+\cos\theta)^3$

L.H.S.

$= 3(\sin\theta+\cos\theta)-2(\sin^3\theta+\cos^3\theta)$

$= 3(\sin\theta+\cos\theta)-2(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta)$

$= (\sin\theta+\cos\theta)\{3-2(1-\sin\theta\cos\theta)\}$

$= (\sin\theta+\cos\theta)(1+2\sin\theta\cos\theta)$

$= (\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)$

$= (\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$= (\sin\theta+\cos\theta)^3$ = L.H.S. (Proved)

1(i) $1+\tan\theta+\sec\theta = \dfrac{2}{1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta}$

L.H.S.$= 1+\tan\theta+\sec\theta$

$= 1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}$

$= \dfrac{(\cos\theta+\sin\theta+1)(\cos\theta+\sin\theta-1)}{\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta-1)}$

$= \dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)^2-1}{\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta-1)}$

$= \dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta-1)}$

$= \dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta-1)}$

$= \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta-1)}$

$= \dfrac{2}{\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta+\cos\theta-1)}$

$= \dfrac{2}{1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta}$ = R.H.S. (Proved)

2. (a) $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ হলে দেখাও যে, $a\sin\theta+b\cos\theta=\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $a\cos\theta-b\sin\theta=c$

$\Rightarrow a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-2ab\sin\theta\cos\theta=c^2$

$\Rightarrow a^2(1-\sin^2\theta)+b^2(1-\cos^2\theta)-2ab\sin\theta\cos\theta=c^2$

$\Rightarrow a^2-a^2\sin^2\theta+b^2-b^2\cos^2\theta-2ab\sin\theta\cos\theta=c^2$

$\Rightarrow -\{(a\sin\theta)^2+(b\cos)^2\theta+2.a\sin\theta.b\cos\theta\}=c^2-a^2-b^2$

$\Rightarrow (a\sin\theta+b\cos\theta)^2=a^2+b^2-c^2$

$a\sin\theta+b\cos\theta=\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

(Proved)

2(b) $\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta=2$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin^n\theta+\operatorname{cosec}^n\theta=2$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta=2$

$\Rightarrow \sin\theta+\dfrac{1}{\sin\theta}=2 \Rightarrow \sin^2\theta-2\sin\theta+1=0$

$\Rightarrow (\sin\theta-1)^2=0 \Rightarrow \sin\theta-1=0 \therefore \sin\theta=1$

এখন, L.H.S.$= \sin^n\theta+\operatorname{cosec}^n\theta$

$= \sin^n\theta+\dfrac{1}{\sin^n\theta}=1^n+\dfrac{1}{1^n} = 1+1=2=$ R.H.S. (Proved)

2(c) $x\sin^3\theta+y\cos^3\theta=\sin\theta\cos\theta$ এবং $x\sin\theta-y\cos\theta=0$ হলে দেখাও যে, $x^2+y^2=1$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$x\sin^3\theta+y\cos^3\theta=\sin\theta\cos\theta\cdots\cdots(1)$ এবং

$x\sin\theta-y\cos\theta=0 \Rightarrow x\sin\theta=y\cos\theta$

$\therefore x = y\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ....(2)

(1) এ $x = y\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ বসিয়ে পাই

$y\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}.\sin^3\theta + y\cos^3\theta = \sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow y\sin^2\theta\cos\theta + y\cos^3\theta = \sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow y\cos\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow y\cos\theta.1 = \sin\theta\cos\theta$

$y = \sin\theta$

(2) হতে পাই, $x = \sin\theta \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cos\theta$

এখন, $x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$x^2 + y^2 = 1$ (Showed)

2. (d) $k\tan\theta = \tan k\theta$ হলে দেখাও যে, $\dfrac{\sin^2 k\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{k^2}{1+(k^2-1)\sin^2\theta}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $k\tan\theta = \tan k\theta$

$\Rightarrow k\dfrac{1}{\cot\theta} = \dfrac{1}{\cot k\theta} \Rightarrow k\cot k\theta = \cot\theta$

$\Rightarrow k^2(\cot^2 k\theta) = \cot^2\theta$

$\Rightarrow k^2(\operatorname{cosec}^2 k\theta - 1) = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

$\Rightarrow k^2\operatorname{cosec}^2 k\theta = \operatorname{cosec}^2\theta + k^2 - 1$

$\Rightarrow k^2\dfrac{1}{\sin^2 k\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta} + k^2 - 1 = \dfrac{1+(k^2-1)\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\Rightarrow \dfrac{k^2}{1+(k^2-1)\sin^2\theta} = \dfrac{\sin^2 k\theta}{\sin^2\theta}$

$\dfrac{\sin^2 k\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{k^2}{1+(k^2-1)\sin^2\theta}$ (Proved)

2(e) $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta$ হলে, $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta$

$\Rightarrow 3\sec^4\theta - 10\sec^2\theta + 8 = 0$

$\Rightarrow 3\sec^4\theta - 6\sec^2\theta - 4\sec^2\theta + 8 = 0$

$\Rightarrow 3\sec^2\theta(\sec^2\theta - 2) - 4(\sec^2\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow (\sec^2\theta - 2)(3\sec^2\theta - 4) = 0 \Rightarrow \sec^2\theta = 2$

$\Rightarrow 1 + \tan^2\theta = 2 \Rightarrow \tan^2\theta = 1 \quad \therefore \tan\theta = \pm 1$

অথবা, $\sec^2\theta = \dfrac{4}{3} \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow \tan^2\theta = \dfrac{4}{3} - 1 = \dfrac{1}{3} \quad \therefore \tan\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta = \pm 1, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2(f) $(a^2 - b^2)\sin\theta + 2ab\cos\theta = a^2 + b^2$ এবং θ সূক্ষ্ম ও ধনাত্মক কোণ হলে, $\tan\theta$ এবং $\operatorname{cosec}\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ $(a^2 - b^2)\sin\theta + 2ab\cos\theta = a^2 + b^2$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)\tan\theta + 2ab = (a^2 + b^2)\sec\theta$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2\tan^2\theta + 2.(a^2 - b^2)\tan\theta.2ab + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2\sec^2\theta$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2\tan^2\theta + 2.(a^2 - b^2)\tan\theta.2ab + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2(1 + \tan^2\theta)$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2\tan^2\theta + 4ab(a^2 - b^2)\tan\theta + 4a^2b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 + b^2)^2\tan^2\theta$

$\Rightarrow \{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2\}\tan^2\theta + 4ab(a^2 - b^2)\tan\theta + 4a^2b^2 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4 = 0$

$\Rightarrow -4a^2b^2\tan^2\theta + 4ab(a^2 - b^2)\tan\theta - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = 0$

$\Rightarrow 4a^2b^2\tan^2\theta - 4ab(a^2 - b^2)\tan\theta + (a^2 - b^2)^2 = 0$

$\Rightarrow \{2ab\tan\theta - (a^2 - b^2)\}^2 = 0$

$\Rightarrow 2ab\tan\theta - (a^2 - b^2) = 0$

$\Rightarrow 2ab\tan\theta = a^2 - b^2$

$\tan\theta = \dfrac{a^2 - b^2}{2ab}$ (Ans.)

এখন, $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{1 - \cot^2\theta}$

[$\because \theta$ ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণ।]

$= \sqrt{1 - \left(\dfrac{2ab}{a^2 - b^2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}{(a^2 - b^2)^2}}$

$= \sqrt{\dfrac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2}} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ (Ans.)

2(g) $\cot A + \cot B + \cot C = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $(\Sigma \tan A)^2 = \Sigma \tan^2 A$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\cot A + \cot B + \cot C = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\tan B \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B}{\tan A \tan B \tan C} = 0$$

$$\Rightarrow \tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 0$$

$$\Rightarrow 2(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A) = 0$$

$$\Rightarrow \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C + 2(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A) = \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C$$

$$\Rightarrow (\tan A + \tan B + \tan C)^2 = \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C$$

$$\left(\sum \tan A\right)^2 = \sum \tan^2 A \quad \text{(Showed)}$$

2(h) $\cos\theta + \sec\theta = \frac{5}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos^n\theta + \sec^n\theta = 2^n + 2^{-n}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\cos\theta + \sec\theta = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \cos\theta + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta + 1 = \frac{5}{2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\theta + 2 = 5\cos\theta$$

$$\Rightarrow 2\cos\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 4\cos\theta - \cos\theta + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos\theta(\cos\theta - 2) - 1(\cos\theta - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (\cos\theta - 2)(2\cos\theta - 1) = 0$$

$\cos\theta - 2 = 0$ অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

কিন্তু $\cos\theta - 2 \neq 0 \quad [\because -1 \leq \cos\theta \leq 1]$

$$2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \therefore \sec\theta = 2$$

এখন, L.H.S. $= \cos^n\theta + \sec^n\theta$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n + (2)^n$$

$$= 2^n + 2^{-n} = \text{R.H.S.}$$

L.H.S. = R.H.S. (প্রমাণিত)

2(i) $a_1 \sin\theta + b_1 \cos\theta + c_1 = 0$ এবং $a_2 \sin\theta + b_2 \cos\theta + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয় হতে θ অপসারণ কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $a_1 \sin\theta + b_1 \cos\theta + c_1 = 0$

$$a_2 \sin\theta + b_2 \cos\theta + c_2 = 0$$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে পাই,

$$\frac{\sin\theta}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\cos\theta}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

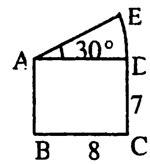
$$\sin\theta = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad \cos\theta = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

এখন, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)^2 + \left(\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_2c_1 - a_1c_2)^2 = a_1b_2 - a_2b_1$$

3. সমাধান ঃ



$$DE = s = r\theta = 8 \times \frac{30\pi}{180}$$

$= 4.189$ মিটার (প্রায়)।

ABCDE সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

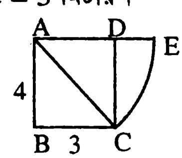
= ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল +

ADE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= 8 \times 7 + \frac{r^2\theta}{2}$

$$= 56 + \frac{8^2}{2} \times \frac{30\pi}{180}$$

$= 56 + 16{\cdot}755 = 80{\cdot}755$ বর্গ মিটার (প্রায়)।

4. সমাধান ঃ এখানে AD = BC = 3 মিটার।



DC = AB = 4 মিটার।

$$\tan CAD = \frac{DC}{AD} = \frac{4}{3}$$

$= \tan(0{\cdot}927)$

ধরি, $\theta = \angle CAD = 0{\cdot}927$ রেডিয়ান।

$r = AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ মিটার।

বৃত্তাংশ CE এর দৈর্ঘ্য $= r\theta = 5 \times 0{\cdot}927$

$= 4{\cdot}635$ মিটার (প্রায়)

ত্রিভুজ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AD \times CD) = \frac{1}{2}(3 \times 4) = 6$ বর্গ মিটার।

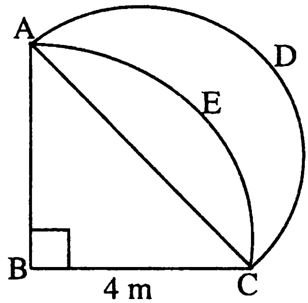
ACE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{r^2\theta}{2} = \frac{25 \times 0 \cdot 927}{2}$

$= 11 \cdot 5875$ বর্গ মিটার।

CDE ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (11 \cdot 5875 - 6)$

$= 5 \cdot 5875$ বর্গ মিটার (প্রায়)।

5. সমাধান ঃ AECB একটি বৃত্তকলা বলে
AB = BC = 4 মিটার ।



$AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ মিটার

ADC অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2}$ মিটার

ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \times 8$

$= 4\pi$ বর্গ মিটার।

বৃত্তাংশ AEC এর দৈর্ঘ্য $= r\theta = 4 \times \frac{\pi}{2}$

$= 2 \times 3 \cdot 1416 = 6 \cdot 2832$ মিটার।

AECB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{r^2\theta}{2} = \frac{4^2}{2} \times \frac{\pi}{2}$

$= 4\pi$ বর্গ মিটার।

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times a^2 = \frac{1}{2} \times 4^2$

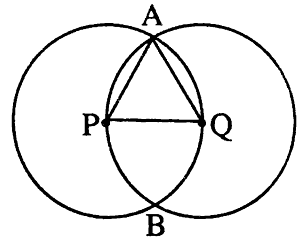
$= 8$ বর্গ মিটার।

AECD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল − AEC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল − (AECB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল − ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল)

$= 4\pi - 4\pi + 8 = 8$ বর্গ মিটার

6. সমাধান ঃ A, P ; P,Q ; A,Q যোগ করি। তাহলে APQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।



APQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}(1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক।

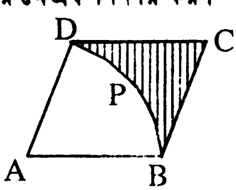
APQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{r^2\theta}{2} = \frac{1^2}{2} \times \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ বর্গ একক।

APBQ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 4(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4})$

$= 4 \times \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}$ বর্গ একক।

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

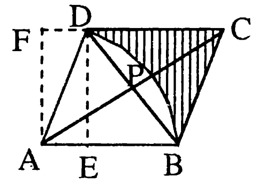
1. 2 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট ABCD রম্বসের সূক্ষ্মকোণ $A = 60^0$ । ABPD একটি বৃত্তকলা । বৃত্তাংশ **BPD এর দৈর্ঘ্য এবং BPDC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**



সমাধান: এখানে, ABPD বৃত্তকলার BPD বৃত্তাংশ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = \angle BAD = 60^0 = \frac{\pi}{3}$,

বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = রম্বসের বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 সে.মি.

বৃত্তাংশ BPD এর দৈর্ঘ্য $= r\theta = 2\times\frac{\pi}{3} = 2\cdot1$ সে. মি. (প্রায়)।



ABPD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\theta r^2 = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times2^2$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times2^2 = 2\cdot1$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

$DE\perp AB$ ও $AF\perp CD$ অঙ্কন করি যা AB কে F বিন্দুতে ও CD এর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

ΔABD এ, $\angle A = 60^0$ (সূক্ষকোণ)

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2.\ AB.AE$$
$$= AB^2 + AD^2 - 2.\ AB.AD\cos A$$
$$= 2^2 + 2^2 - 2\times2\times2\times\cos60^0$$
$$= 8 - 8\times\frac{1}{2} = 4$$

$BD = 2$ সে.মি.।

আবার, Δ ACD, $\angle ADC = 120^0$ (স্থূলকোণ)

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2CD\times DF$$
$$= AD^2 + DC^2 + 2CD\times AD\cos ADF$$
$$= AD^2 + DC^2 + 2CD\times AD\cos60^0$$
$$= 2^2 + 2^2 + 2\times2\times2\times(\frac{1}{2}) = 12$$
$$AC = 2\sqrt{3}$$

এখন, ABCD রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AC\times BD)$

$= \frac{1}{2}(2\sqrt{3}\times2) = 2\sqrt{3}$ বর্গ সে.মে.।

BPDC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCD রম্বসের ক্ষেত্রফল – ABPD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} = 1\cdot37$ বর্গ সে.মি..(প্রায়)।

2. 6 মিটার লম্বা ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটার শীর্ষবিন্দু 5 সেকেন্ডে কতটুকু বৃত্তাকার পথ অতিক্রম করবে?

সমাধান: ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটা

60 সেকেন্ডে 360^0 কোণ উৎপন্ন করে

20 সেকেন্ডে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে।

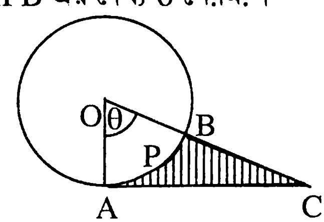
এখানে, উৎপন্ন কোণ $\theta = 30^0 = \frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান,

$r = 6$ মি.। ধরি, সেকেন্ডের কাঁটাটি s মি. বৃত্তাকার পথ অতিক্রম করবে।

$$s = r\theta = 6\times\frac{\pi}{6} = \pi = 3\cdot1416$$

নির্ণেয় বৃত্তাকার পথ $= 3\cdot1416$ মি.।

3. O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 সে.মে.। বৃত্তাংশ APB এর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি.।



(a) $\theta = \angle AOB$ নির্ণয় কর। উ: $1\cdot2$ রেডিয়ান

(b) OAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: 15 বর্গ সে.মি.

(c) A বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শক OB এর বর্ধিতাংশকে C বিন্দুতে ছেদ করে। APBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: $17\cdot15$ বর্গ সে.মি.।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ প্রশ্ন উত্তরসহ ঃ

1. $\frac{3\pi}{8}$ রেডিয়ান কোণের ষাটমূলক পদ্ধতিতে মান কত? **[CU 07-08]**

Sol".: $\frac{3\pi}{8}$ রেডিয়ান $= \frac{3\times180^0}{8} = 67^\circ 30'$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে,

3 × 1 8 0 ÷ 8 = 67.5 0,,, $67^0 30'$

2. $50^0 37' 30''$ = কত রেডিয়ান ? [CU 05-06]

Sol".: $50^0 37' 30'' = \frac{50.625\times\pi}{180} = \frac{9\pi}{32}$

ত্রিকোণমিতি ফাংশনের লেখচিত্র

প্রশ্নমালা VI B

1(a) **Sol^n :** জ্যামিতিক কোণ ধনাত্মক এবং 360^0 এর ছোট হয়। $\therefore$ Ans. B

(b) **Sol^n :** $\dfrac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{2r} = \pi$ Ans. C (c) **Sol^n :** $\sec\theta = \dfrac{OB}{OP}$ $\therefore$ Ans. A

(d) **Sol^n :** $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ Ans. C

(e) **Sol^n :** সবগুলি তথ্য সত্য । Ans. D

(f) **Sol^n :** $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ এর মান সবসময় -1 থেকে $+1$ Ans. C

(g) **Sol^n :** কোণ $90°$ থেকে বেড়ে $180°$ হলে $\cos\theta$ এর মান 0 থেকে কমে -1 হবে। Ans. A

(h) **Sol^n :** সর্বোচ্চ মান $= 1 + \sqrt{(\pm 1)^2 + 1} = 1 + \sqrt{2}$ Ans. C

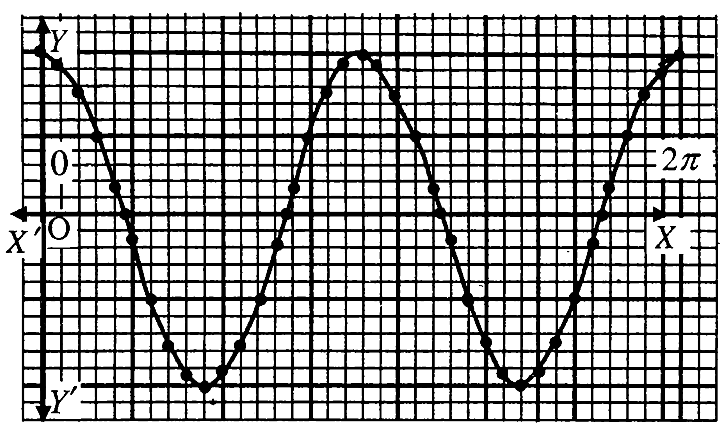
2. নিম্নের ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ

(a) $y = \cos 2x$, যখন $0 \le x \le 2\pi$ [ঢা.'১০,'১৪; চ.'০৯,'১৩]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0\ ,\ 2\pi]$ এর জন্য $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$4.5\times\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
y = cos2x	1	0.94	0·77	0·5	0·17	0	−0·17	−0·5
x	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$	$12.\frac{\pi}{18}$	$17.\frac{\pi}{18}$	$22.\frac{\pi}{18}$	$28.\frac{\pi}{18}$	$36.\frac{\pi}{18}$
y = cos2x	−0·77	−0.93	−1.	−0·5	0.94	−0·17	0.94	1

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।



$y = \cos 2x$ এর লেখচিত্র ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos 2x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

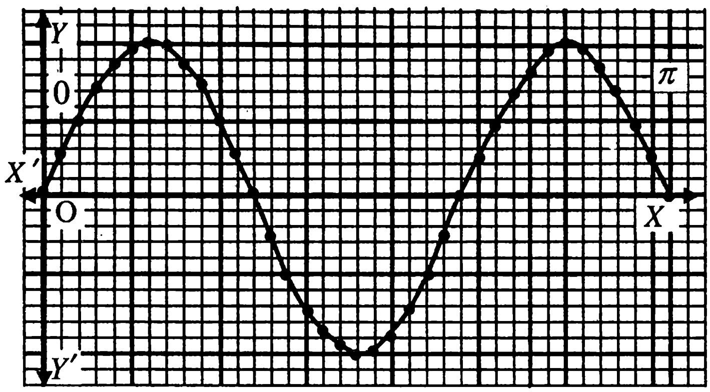
(b) $y = \sin 3x$, **যখন** $0 \le x \le \pi$ **[কু. '০৯,'১২; রা.'১৪; দি.'১৩]**

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0, \pi]$ এর জন্য $y = \sin 3x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{36}$	$2.\frac{\pi}{36}$	$3.\frac{\pi}{36}$	$4.\frac{\pi}{36}$	$5.\frac{\pi}{36}$	$6.\frac{\pi}{36}$	$7.\frac{\pi}{36}$
y = sin3x	0	0·26	0.5	0·71	0·87	0·97	1	0·97
x	$8.\frac{\pi}{36}$	$9.\frac{\pi}{36}$	$10.\frac{\pi}{36}$	$12.\frac{\pi}{36}$	$17.\frac{\pi}{36}$	$22.\frac{\pi}{36}$	$28.\frac{\pi}{36}$	$36.\frac{\pi}{36}$
y = sin3x	0·87	0.71	0.5	0	–0.97	–0·5	0.87	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{36}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1



y = sin 3x এর লেখচিত্র

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin 3x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

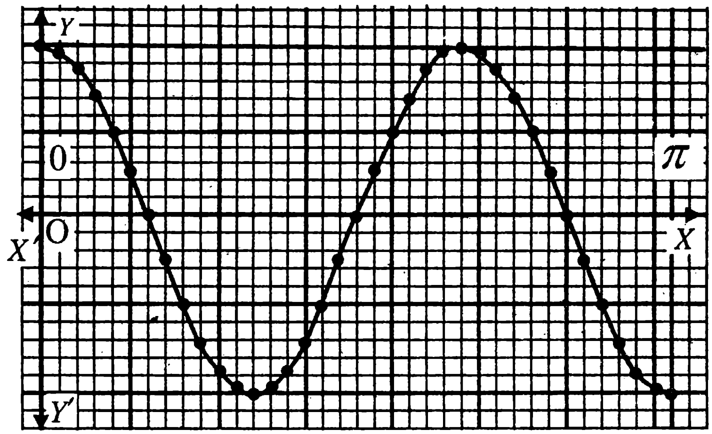
2. (c) $y = \cos 3x$, **যখন** $0 \le x \le \pi$ **[চ.'০১,'০৪; ঢা.'০৩ ; য.'০৫]**

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0, \pi]$ এর জন্য $y = \cos 3x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{36}$	$2.\frac{\pi}{36}$	$3.\frac{\pi}{36}$	$4.\frac{\pi}{36}$	$5.\frac{\pi}{36}$	$6.\frac{\pi}{36}$	$7.\frac{\pi}{36}$
y = cos3x	1	0·97	0.87	0·71	0·5	0·26	0	–0·26
x	$8.\frac{\pi}{36}$	$9.\frac{\pi}{36}$	$10.\frac{\pi}{36}$	$12.\frac{\pi}{36}$	$17.\frac{\pi}{36}$	$22.\frac{\pi}{36}$	$28.\frac{\pi}{36}$	$36.\frac{\pi}{36}$
y = cos3x	–0·5	–0.71	–0.87	–1	–0.26	–0·5	0.5	–1

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{36}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1



y = cos 3x এর লেখচিত্র ।

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি । স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos 3x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল ।

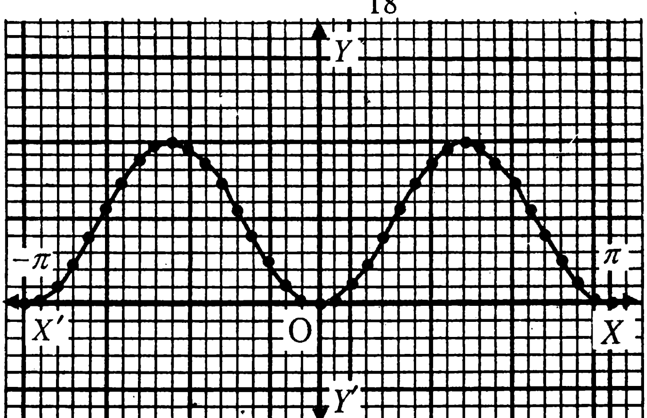
2. (d) $y = \sin^2 x$ যখন $-\pi \leq x \leq \pi$ [ব.'০১;সি.'১,'১০; ঢা.'০৪; কু.'১৩; চ.'১৩]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \sin^2 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^2 x$	0	0·03	0·117	0·25	0·41	0·59	0·75
x	$\pm 7.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$\pm 12.\frac{\pi}{18}$	$\pm 14.\frac{\pi}{18}$	$\pm 16.\frac{\pi}{18}$	$\pm 18.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^2 x$	0·88	0.97	1	0.75	0.41	0·117	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1$



$y = \sin^2 x$ এর লেখচিত্র ।

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin^2 x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

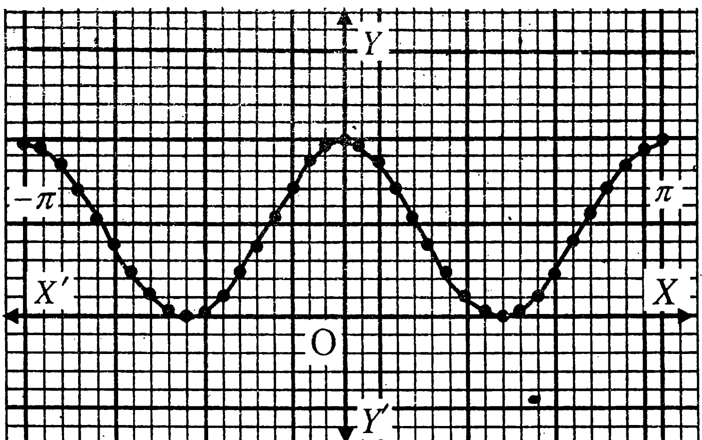
(e) $y = \cos^2 x$, যখন $-\pi \leq x \leq \pi$ [রা.'০৩, '০৬,'০৯; ব.'০৫; চ.'০৫,'১১; য.'০৯,'১৩; ব.,দি.'১৩]

সমাধান: নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \cos^2 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি:

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$
$y = \cos^2 x$	1	0·97	0.88	0·75	0·59	0·41	0·25
x	$\pm 7.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$+9.\frac{\pi}{18}$	$\pm 10\frac{\pi}{18}$	$\pm 12.\frac{\pi}{18}$	$\pm 15.\frac{\pi}{18}$	$\pm 18.\frac{\pi}{18}$
$y = \cos^2 x$	0·12	0·03	0	0·97	0·25	0·75	1

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ: x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1$



$y = \cos^2 x$ এর লেখচিত্র।

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos^2 x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

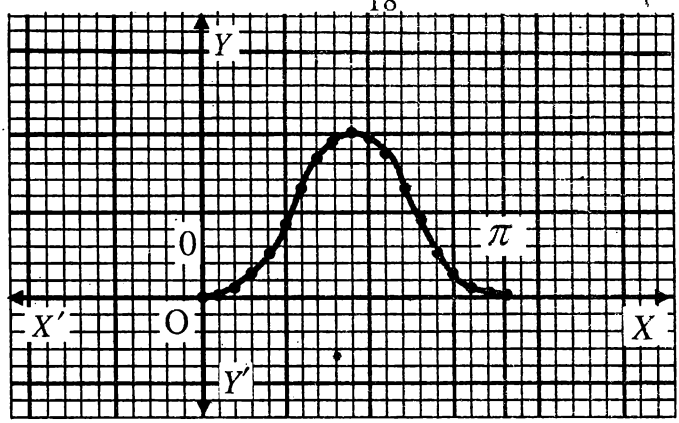
2. (f) $y = \sin^3 x$, যখন $0 \leq x \leq \pi$ [য. '০০; চ. '০২]

সমাধান: নিচের তালিকায় $x \in [0, \pi]$ এর জন্য $y = \sin^3 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি:

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^3 x$	0	0·005	0·04	0·13	0·27	0·45	0·65
x	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$	$12.\frac{\pi}{18}$	$14.\frac{\pi}{18}$	$16.\frac{\pi}{18}$	$18.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^3 x$	0·83	0.96	1	0.65	0.27	0·04	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $=\dfrac{\pi}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1$



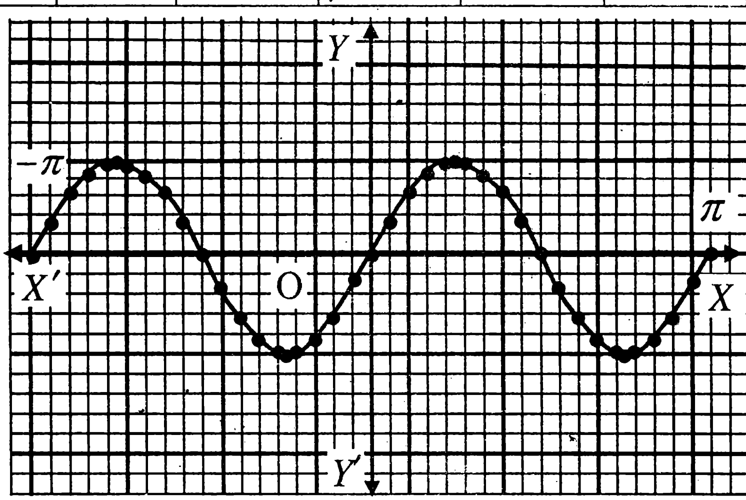
এখন নির্ধরিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin^3 x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

2. (g) $y = \sin x \cos x$, যখন $-\pi \le x \le \pi$

সমাধান ঃ $y = \sin x \cos x \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$
$y = \frac{1}{2}\sin 2x$	0	$\pm 0\cdot 17$	± 0.32	$\pm 0\cdot 43$	$\pm 0\cdot 49$	$\pm 0\cdot 5$	± 0.49
x	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$	$\pm 7\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$\pm 14.\frac{\pi}{18}$	$\pm 15.\frac{\pi}{18}$	$\pm 18.\frac{\pi}{18}$
$y = \frac{1}{2}\sin 2x$	$\pm 0\cdot 43$	± 0.32	± 0.17	0	∓ 0.49	$\mp 0\cdot 43$	0



$y = \sin x \cos x$ এর লেখচিত্র ।

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1$

এখন নির্ধরিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি । স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin x \ \cos x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল ।

3. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর ঃ

(a) $\sin x - \cos x = 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

[কু. '০৯; রা.'১৩; চ.'১২; য.'১১,'১৪; ব.'০৯; সি.'০৯; ঢা. '০৯,'১২,'১৪; মা.'১৪]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x$

মনে করি , $y = \sin x = \cos x$ $\therefore y = \sin x$ এবং $y = \cos x$

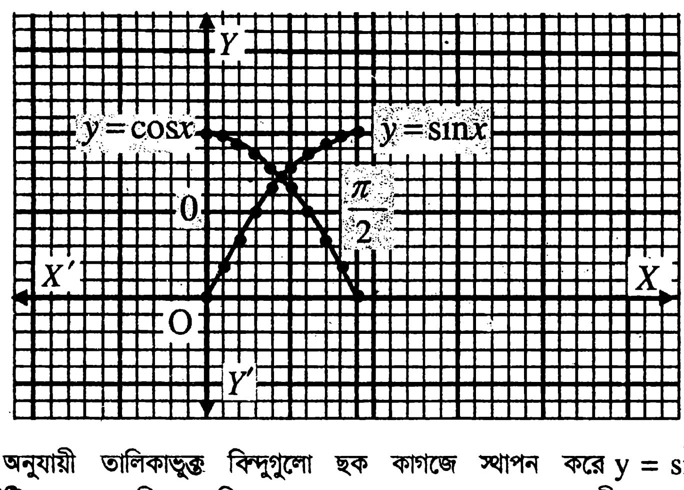
নিচের তালিকায় $x \in [0 , \frac{\pi}{2}]$ এর জন্য $y = \sin x$ ও $y = \cos x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{4}$	$5.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin x$	0	0·17	0·34	0·5	0.64	0.71	0.77
$y = \cos x$	1	0·98	0·94	0.87	0.77	0.71	0.64

x	$6.\frac{\pi}{18}$	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin x$	0.87	0·94	0·98	1
$y = \cos x$	0·5	0·34	0·17	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1$



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = \sin x$ ও $y = \cos x$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজ

হচ্ছে $\frac{\pi}{4}$. সুতরাং নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{\pi}{4}$.

3. (b) $2\sin^2 x = \cos 2x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ [য.'০৩,'০৮,'০৯]

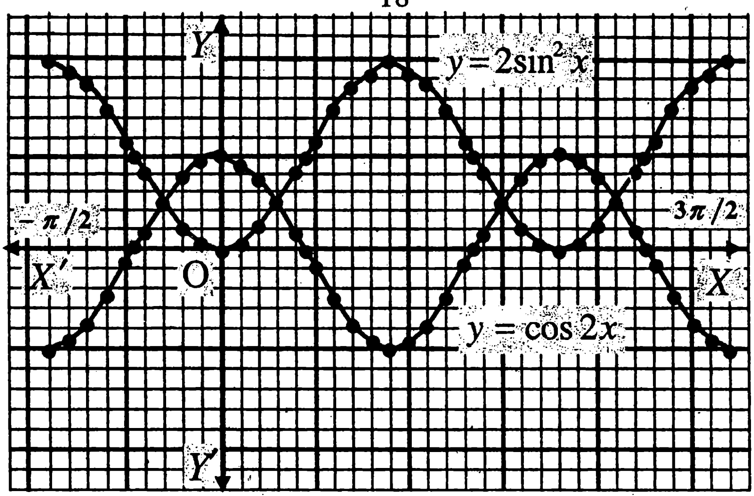
সমাধান : মনে করি, $y = 2\sin^2 x = \cos 2x$ $y = 2\sin^2 x$ এবং $y = \cos 2x$

নিচের তালিকায় $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ এর জন্য $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm.\frac{\pi}{4}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$
$y = 2\sin^2 x$	0	0·06	0·23	0·5	0.83	1	1.17
$y = \cos 2x$	1	0·94	0·77	0.5	0.17	0	–0·17
x	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$	$\pm 7.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$15.\frac{\pi}{18}$	$21.\frac{\pi}{18}$	$27.\frac{\pi}{18}$
$y = 2\sin^2 x$	1.5	1·77	1·94	2	0·5	0.5	2
$y = \cos 2x$	–0·5	-0·77	0·94	–1	0.5	0.5	-1

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ : x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 5 বাহু = 1



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভুজসমূহ হচ্ছে $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$. সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান, $x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

3. (c) $5\sin x + 2\cos x = 5$, $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$ [য.'০৪; চ.'১০; রা.,ব.'১৪]

সমাধান : দেওয়া আছে, $5\sin x + 2\cos x = 5 \Rightarrow 2\cos x = 5(1 - \sin x)$

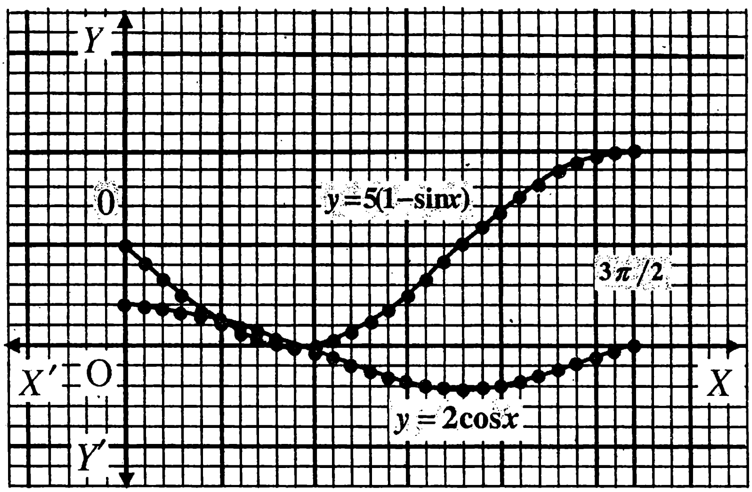
মনে করি $y = 5(1 - \sin x) = 2\cos x$ $\therefore y = 5(1 - \sin x)$ এবং $y = 2\cos x$

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ এর জন্য, $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
$y = 5(1 - \sin x)$	5	4·13	3·29	2·5	1.79	1.17	0.67
$y = 2\cos x$	2	1·97	1·88	1.73	1.53	1·29	1
x	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$	$11.\frac{\pi}{18}$	$15.\frac{\pi}{18}$	$19.\frac{\pi}{18}$	$20.\frac{\pi}{18}$
$y = 5(1 - \sin x)$	0·3	0·08	0	0.3	2·5	5.89	6.7
$y = 2\cos x$	·68	0·35	0	–0.68	-1.73	–1.97	–1.88
x	$21.\frac{\pi}{18}$	$22.\frac{\pi}{18}$	$23.\frac{\pi}{18}$	$24.\frac{\pi}{18}$	$25.\frac{\pi}{18}$	$26.\frac{\pi}{18}$	$27.\frac{\pi}{18}$
$y = 5(1 - \sin x)$	7·5	8·2	8.83	9.93	9·7	9.9	10
$y = 2\cos x$	–·73	1·53	–1.29	–1	-0.68	–0.35	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = 5(1 - \sin x)$ ও $y = 2\cos x$. ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $46.4° = \frac{232}{9}\pi, 90° = \frac{\pi}{2}$. সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান, $x = 46.4° = \frac{232}{9}\pi, 90° = \frac{\pi}{2}$

3. (d) $x - \tan x = 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

[রা.'০৪,'০৯; ব.'০৪,'১১,'১৩.'০৫,'১০,'১২; কু. '০৭,'১০; দি.'১০,'১২; চ.'১১; ঢা.'১১; য.'১২]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $x - \tan x = 0 \Rightarrow x = \tan x$

মনে করি $y = x = \tan x$ $\therefore y = x$ এবং $y = \tan x$

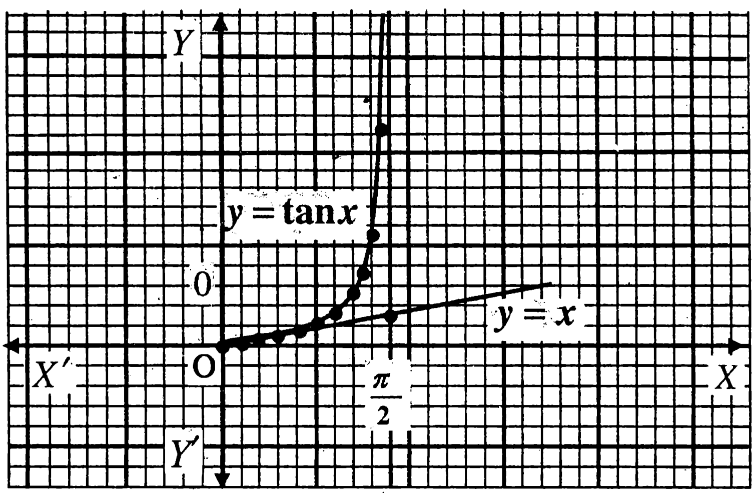
নিচের তালিকায় $x \in [\, 0 , \frac{\pi}{2}\,]$ এর জন্য $y = x$ ও $y = \tan x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{2}$
y = x	0	0.18	0.52	1.57

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
y = tanx	0	0.18	0·36	0·58	0·84	1·19	1·73
x	$7\frac{\pi}{18}$	$7\cdot5\times\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$8\cdot5\times\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$		
y = tanx	2·75	3·73	5.67	11.43	অসংজ্ঞায়িত		

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = x$ ও $y = \tan x$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $0 , \frac{\pi}{18}$. সুতরাং নির্ণেয় সমাধান $x = 0 , \frac{\pi}{18}$

3 (e) $\mathbf{2x = \tan x}$, $\quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ [চ.'০২]

সমাধান ঃ মনে করি $y = 2x = \tan x$ $\therefore y = 2x$ এবং $y = \tan x$

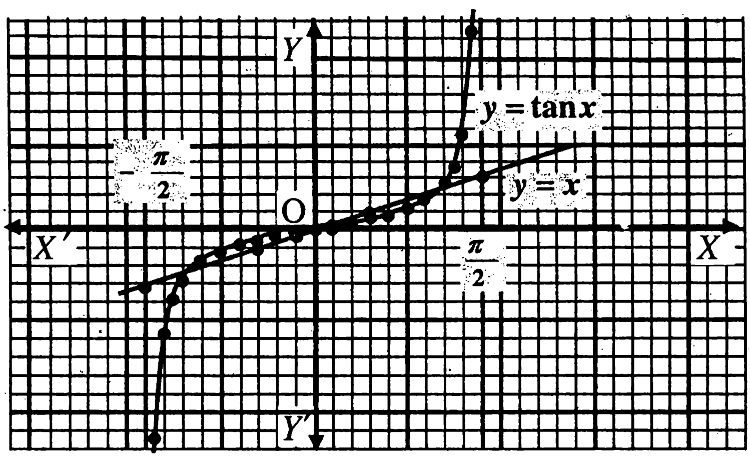
নিচের তালিকায় $x \in [\, -\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\,]$ এর জন্য $y = 2x$ ও $y = \tan x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\pm\dfrac{\pi}{18}$	$\pm 3.\dfrac{\pi}{18}$	$\pm\dfrac{\pi}{2}$
y = 2x	0	± 0.35	± 1.05	±3.14

x	0	$\pm\dfrac{\pi}{18}$	$\pm 2.\dfrac{\pi}{18}$	$\pm 3.\dfrac{\pi}{18}$	$\pm 4.\dfrac{\pi}{18}$	$\pm 5.\dfrac{\pi}{18}$	$\pm 6.\dfrac{\pi}{18}$
y = tanx	0	± 0.18	± 0·36	± 0·58	± 0·84	± 1·19	± 1·73
x	$\pm 7\dfrac{\pi}{18}$	$\pm 7\cdot 5\times\dfrac{\pi}{18}$	$\pm 8.\dfrac{\pi}{18}$	$\pm\, 8\cdot 5\times\dfrac{\pi}{18}$	$\pm 9.\dfrac{\pi}{18}$		
y = tanx	± 2·75	± 3·73	± 5.67	± 11.43	অসংজ্ঞায়িত		

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = $\dfrac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে y = 2x ও y = tanx ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $0\,, -66^\circ = -\dfrac{11\pi}{30}, 66^\circ = \dfrac{11\pi}{30}$. সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান, $x = 0\,, -\dfrac{11\pi}{30}, \dfrac{11\pi}{30}$

3. (f) $\cot x - \tan x = 2,\ \ 0 \le x \le \pi$ [য. '০৫ ; চ.'০২; সি.'০৩,'১১; ঢা.'০৬; রা.'১০,'১২;কু.'১:

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $\cot x - \tan x = 2 \Rightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} = 2 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x \cos x$

$\Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$

মনে করি , $y = \sin 2x = \cos 2x \quad \therefore y = \sin 2x\,, y = \cos 2x$

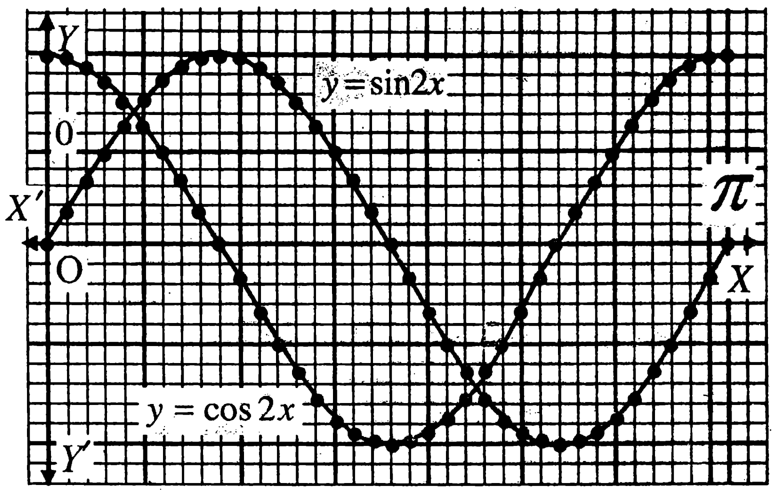
নিচের তালিকায় $x \in [0\,, \pi]$ এর জন্য $y = \sin 2x$ ও $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\dfrac{\pi}{36}$	$2.\dfrac{\pi}{36}$	$3.\dfrac{\pi}{36}$	$4.\dfrac{\pi}{36}$	$5.\dfrac{\pi}{36}$	$6.\dfrac{\pi}{36}$

$y = \sin 2x$	0	0·17	0.34	0.5	0·64	0·77	0.87
$y = \cos 2x$	1	0·98	0.94	0.87	0·77	0·64	0.5
x	$7.\frac{\pi}{36}$	$8.\frac{\pi}{36}$	$9.\frac{\pi}{36}$	$10.\frac{\pi}{36}$	$24.\frac{\pi}{36}$	$32.\frac{\pi}{36}$	$36.\frac{\pi}{36}$
$y = \sin 2x$	0.94	0·98	1	0·98	– 0.87	– 0.64	0
$y = \cos 2x$	0.34	0·17	0	– 0·17	– 0.5	0.77	1

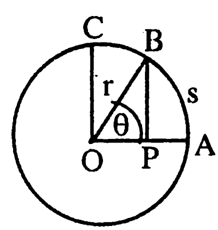
একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{36}$ এবং y-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = \sin 2x$ ও $y = \cos 2x$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$. সুতরাং নির্ণেয় সমাধান $x = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$.

4. **(a) প্রমাণ :** $OA \perp OC$ টানি।



$$\frac{\text{বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা } AOC \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\angle AOB \text{ এর পরিমাপ}}{\angle AOC \text{ এর পরিমাপ}}$$

$$\Rightarrow \text{বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{\pi/2} \times \text{বৃত্তকলা } AOC \text{ এর ক্ষেত্রফল}$$

$$= \frac{2\theta}{\pi} \times \frac{1}{4} \times \text{বৃত্তের ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{r^2\theta}{2}$$

(b) **সমাধান:** OBP ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, $\sin\theta = \frac{BP}{OB} = \frac{BP}{r}$ ও $\cos\theta = \frac{OP}{OB} = \frac{OP}{r}$

উত্তরের অবশিষ্ট অংশ প্রশ্নমালা VI B এর 3(a) দ্রষ্টব্য।

(c) **সমাধান:** দেওয়া আছে, $\theta = 60^0 = \frac{\pi}{3}$, r = 5 সে.মি., BP = 4 সে.মি.

$OP = \sqrt{OB^2 - BP^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$ সে.মি.

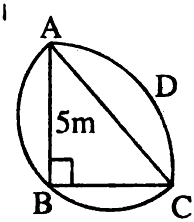
বৃত্তাংশ s এর দৈর্ঘ্য $= r\theta = 5\times\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ সে.মি.

এবং ABP ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল – ত্রিভুজ OBP এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{r^2\theta}{2} - \frac{1}{2}(OP\times BP) = \frac{1}{2}\times 5^2\times\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}(3\times 4)$$

$$= \frac{25\pi}{6} - 6 = \frac{25\pi - 36}{6}$$ বর্গ সে.মি. ।

5. চিত্রে ABC সমকোণী ত্রিভুজে ABC একটি অর্ধবৃত্ত ও ADC একটি বৃত্তাংশ ।



(a) **সমাধান:** ADC একটি বৃত্তাংশ বলে AB = BC = 5 মিটার ।

বৃত্তাংশ ADC এর দৈর্ঘ্য $= AB \times \angle ABC = 5\times\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$ মিটার ।

(b) প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ-1 দ্রষ্টব্য ।

(c) $AC = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$ মিটার । সুতরাং, ABC একটি অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$ মিটার ।

ABCD সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

+ (ABC বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল – ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল)

$$= \frac{1}{2}\pi\times(2\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2}\times 5^2\times\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\times 5\times 5)$$

$$= 4\pi + (\frac{25\pi}{4} - \frac{25}{2}) = \frac{16\pi + 25\pi - 50}{4} = \frac{41\pi - 50}{4}$$ বর্গ মিটার ।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ ঃ

1. $\sin(4x+1)$ এর পর্যায় কত? [RU 06-07;BUET 00-01]

$Sol^n.:$ $4x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ $\therefore$ পর্যায়কাল $= \frac{\pi}{2}$

নিয়ম ঃ $\sin x, \cos x, \sec x, \operatorname{cosec} x$ এর পর্যায় $= 2\pi$ এবং $\tan x, \cot x$ এর পর্যায় $= \pi$.

2. $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ এর সর্বোচ্চ মান- [SU 08-09]

$Sol^n.:$ সর্বোচ্চ মান $= \sqrt{1+3} = 2$

বি.দ্র.ঃ $a\cos x + b\sin x$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x + \tan^{-1}\frac{b}{a})$$

$a\cos\theta + b\sin\theta$ সর্বোচ্চ হবে যদি $\sin(x+\tan^{-1}\frac{b}{a})$ সর্বোচ্চ হয় অর্থাৎ $\sin(x+\tan^{-1}\frac{b}{a}) = 1$ হয়।

$\therefore$ $x = 90^0 - \tan^{-1}\frac{b}{a}$ এর জন্য $a\cos x + b\sin x$ এর সর্বোচ্চ মান $= \sqrt{a^2+b^2}$

3. $f(x) = 1 + \sqrt{\sin^2 x + 1}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান হবে- [CU 07-08]

$Sol^n.:$ সর্বোচ্চ মান $= 1 + \sqrt{(\pm 1)^2 + 1} = 1 + \sqrt{2}$

4. $f(x) = 2\cos|x|$ এর সীমা - [RU 03-04]

$Sol^n.:$ $\cos|x|$ এর বিস্তার $= [-1,1]$

$\therefore$ $-2 \le f(x) \le 2$

5. $\cos^2 x$ $(x \in \mathbb{R})$ এর বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান হচ্ছে- [CU 03-04]

$Sol^n.:$ বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান যথাক্রমে 1 ও 0.

6. $\sin 2x - \cos x$ এর সর্বনিম্ন মান - [IU 07-08]

$Sol^n.:$ $x = -45^0$ এর জন্য প্রদত্ত রাশির সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায় $-\sqrt{3}$.

1(a) $\sin(-1230°) - \cos\{(2n+1)\pi + \frac{\pi}{3}\}$

$= -\sin 1230° - \cos\{2n\pi + (\pi + \frac{\pi}{3})\}$

$= -\sin(3.360° + 150°) - \cos(\pi + \frac{\pi}{3})$

$= -\sin 150° - (-\cos\frac{\pi}{3})$

$= -\sin(180° - 30°) + \cos\frac{\pi}{3}$

$= -\sin 30° + \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ (Ans.)

1(b) $\sin 780° \cos 390° +$
$\sin(-330°)\cos(-300°)$ [চ.'০১]

$= \sin 780° \cos 390° - \sin 330° \cos 300°$

$= \sin(2.360° + 60°)\cos(360° + 30°) -$
$\sin(360° - 30°)\cos(360° - 60°)$

$= \sin 60° \cos 30° - (-\sin 30°)\cos 60°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ (Ans.)

2. মান নির্ণয় কর ঃ

(a) $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14}$
[ঢা. '০২; সি. '০৯; মা.বো.'০৯; ব.'১০; য.'১১]

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}) + \sin^2(\pi + \frac{\pi}{7}) +$
$\sin^2(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7})$

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}$

$= 2(\sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}) = 2.1 = 2$ (Ans.)

2(b) $\sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} +$
$\sin^2\frac{9\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{12}$

$= \sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12})$
$+ \sin^2(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{12}) + \sin^2(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12})$

$= \sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12}$
$+ \cos^2\frac{3\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12}$

$= (\sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12}) + (\sin^2\frac{3\pi}{12} + \cos^2\frac{3\pi}{12})$
$+ (\sin^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12})$

$= 1 + 1 + 1 = 3$ (Ans.)

2.(c) $\sin^2\frac{17\pi}{18} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{37\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

$= \sin^2(\pi - \frac{\pi}{18}) + \sin^2(\pi - \frac{3\pi}{8}) +$
$\cos^2(2\pi + \frac{\pi}{18}) + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

$= \sin^2\frac{\pi}{18} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

$= (\sin^2\frac{\pi}{18} + \cos^2\frac{\pi}{18}) + (\sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8})$

$= 1 + 1 = 2$ (Ans.)

3.(a) $\sec^2\frac{14\pi}{17} - \sec^2\frac{39\pi}{17} + \cot^2\frac{41\pi}{34} - \cot^2\frac{23\pi}{34}$

$= \sec^2(\pi - \frac{3\pi}{17}) - \sec^2(2\pi + \frac{5\pi}{17}) +$
$\cot^2(\pi + \frac{7\pi}{34}) - \cot^2(\pi - \frac{11\pi}{34})$

$= \sec^2\frac{3\pi}{17} - \sec^2\frac{5\pi}{17} + \cot^2\frac{7\pi}{34} - \cot^2\frac{11\pi}{34}$

$= \sec^2\frac{3\pi}{17} - \sec^2\frac{5\pi}{17} + \cot^2(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{17}) -$
$\cot^2(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{17})$

$= \sec^2\frac{3\pi}{17} - \sec^2\frac{5\pi}{17} + \tan^2\frac{5\pi}{17} - \tan^2\frac{3\pi}{17}$

$= (\sec^2\frac{3\pi}{17} - \tan^2\frac{3\pi}{17}) - (\sec^2\frac{5\pi}{17} - \tan^2\frac{5\pi}{17})$

$= 1 - 1 = 0$ (Ans.)

3(b) $\tan 15° + \tan 45° + \tan 75° + \cdots + \tan 165°$

$= \tan 15° + \tan 45° + \tan 75° + \tan 105° + \tan 135° + \tan 165°$

$= \tan 15° + \tan 45° + \tan(90° - 15°) + \tan(90° + 15°) + \tan(180 - 45°) + \tan(180° - 15°)$

$= \tan 15° + \tan 45° + \cot 15° - \cot 15° - \tan 45° - \tan 15° = 0$ (Ans.)

3(c) $\cos^2 15° + \cos^2 25° + \cos^2 35° + \cdots\cdots + \cos^2 75°$

$= \cos^2 15° + \cos^2 25° + \cos^2 35° + \cos^2 45° + \cos^2 55° + \cos^2 65° + \cos^2 75°$

$= \cos^2 15° + \cos^2 25° + \cos^2 35° + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \cos^2(90° - 35°) + \cos^2(90° - 25°) + \cos^2(90° - 15°)$

$= \cos^2 15° + \cos^2 25° + \cos^2 35° + \frac{1}{2} + \sin^2 35° + \sin^2 25° + \sin^2 15°$

$= \sin^2 5° + \cos^2 5°) + (\sin^2 25° + \cos^2 25°) + (\sin^2 35° + \cos^2 35°) + \frac{1}{2}$

$= 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ (Ans.)

4a) প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , [দি.'১৪;' য.'১২; চ.'০৯]

$\sin\theta = \frac{5}{13}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$, $\cos\theta = -\sqrt{1 - \sin^2\theta}$

$= -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$

$\sec\theta = -\frac{13}{12}$ এবং

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{13} \times (-\frac{13}{12}) = -\frac{5}{12}$

$\Rightarrow \cot\theta = -\frac{12}{5}$

এখন , $\frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \operatorname{cosec}(-\theta)} = \frac{\tan\theta + \sec\theta}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta}$

$= \frac{\frac{-5}{12} + \frac{-13}{12}}{\frac{-12}{5} - \frac{13}{5}} = \frac{\frac{-5-13}{12}}{\frac{-12-13}{5}}$

$= (-\frac{18}{12}) \times (-\frac{5}{25}) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

$\therefore \frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \operatorname{cosec}(-\theta)} = \frac{3}{10}$

4.(b) যেহেতু $\cot\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan\theta = \frac{4}{3}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক

$\therefore \sec\theta = -\sqrt{1 + \tan^2\theta} = -\sqrt{1 + \frac{16}{9}}$

$= -\sqrt{\frac{25}{9}} = -\frac{5}{3}$

$\therefore \cos\theta = -\frac{3}{5}$ এবং

$\sin\theta = \tan\theta \cos\theta = \frac{4}{3} \times (-\frac{3}{5}) = -\frac{4}{5}$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = -\frac{5}{4}$

এখন , $\frac{\cot(-\theta) + \operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta + \sin(-\theta)} = \frac{-\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$

$= \frac{-\frac{3}{4} + (-\frac{5}{4})}{-\frac{3}{5} - \frac{-4}{5}} = \frac{-3-5}{4} \times \frac{5}{-3+4}$

$= -\frac{40}{4} = -10$ (Ans.)

5. সমাধান ঃ

(a) $\sin x + \sin(\pi + x) + \sin(2\pi + x) + \cdots\cdots$ (n +1)তম পদ পর্যন্ত

$= \sin x - \sin x + \sin x - \sin x + \cdots\cdots$ (n +1) তম পদ পর্যন্ত

$n = 1$ হলে, $(1+1)$ বা ২য় পদ পর্যন্ত যোগফল
$= \sin x - \sin x = 0$
$n = 3$ হলে, $(3 + 1)$ বা ৪র্থ পদ পর্যন্ত
যোগফল $= \sin x - \sin x + \sin x - \sin x = 0$
তদ্রূপ, n যেকোন বিজোড় সংখ্যা হলে নির্ণেয় যোগফল $= 0$
আবার, $n = 2$ হলে $(2 + 1)$ বা ৩য় পদ পর্যন্ত যোগফল
$= \sin x - \sin x + \sin x = \sin x$
$n = 4$ হলে, $(4 + 1)$ বা ৫ম পদ পর্যন্ত যোগফল
$= \sin x - \sin x + \sin x - \sin x + \sin x$
$= \sin x$
তদ্রূপ, n যেকোন জোড় সংখ্যা হলে নির্ণেয় যোগফল $= \sin x$

5(b) $\tan\theta + \tan(\pi + \theta) + \tan(2\pi + \theta) + \cdots + \tan(n\pi + \theta)$
$= \tan\theta + \tan\theta + \tan\theta + \cdots$ n তম পদ পর্যন্ত
$= (n + 1)\tan\theta$ (Ans.)

6(a) দেওয়া আছে, $\theta = \frac{\pi}{20} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 10\theta$

L.H.S. $= \cot\theta \cot 3\theta \cot 5\theta \cot 7\theta \cot 9\theta \cot 11\theta \cot 13\theta \cot 15\theta \cot 17\theta \cot 19\theta$

$= \cot\theta \cot 3\theta \cot 5\theta \cot 7\theta \cot 9\theta \cot(10\theta + \theta) \cot(10\theta + 3\theta) \cot(10\theta + 5\theta) \cot(10\theta + 7\theta) \cot(10\theta + 9\theta)$

$= \cot\theta \cot 3\theta \cot 5\theta \cot 7\theta \cot 9\theta \cot(\frac{\pi}{2} + \theta) \cot(\frac{\pi}{2} + 3\theta) \cot(\frac{\pi}{2} + 5\theta) \cot(\frac{\pi}{2} + 7\theta) \cot(\frac{\pi}{2} + 9\theta)$

$= \frac{1}{\tan\theta \tan 3\theta \tan 5\theta \tan 7\theta \tan 9\theta}(-\tan\theta)(-\tan 3\theta)(-\tan 5\theta)(-\tan 7\theta)(-\tan 9\theta)$

$= -1 =$ R.H.S.

6. (b) দেওয়া আছে, $\theta = \frac{\pi}{28} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 14\theta$

L.H.S $= \tan\theta \tan 3\theta \tan 5\theta \tan 7\theta \tan 9\theta \tan 11\theta \tan 13\theta$

$= \tan\theta \tan 3\theta \tan 5\theta \tan 7\theta \tan(14\theta - 5\theta) \tan(14\theta - 3\theta) \tan(14\theta - \theta)$

$= \frac{1}{\tan\theta \tan 3\theta \tan 5\theta} \tan\frac{\pi}{4} \tan(\frac{\pi}{2} - 5\theta) \tan(\frac{\pi}{2} - 3\theta) \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$= \frac{1}{\tan\theta \tan 3\theta \tan 5\theta}.1.\tan 5\theta.\tan 3\theta.\tan\theta$

$= 1 =$ R.H.S.

6(c) $\tan\theta.\tan 2\theta.\tan 3\theta. \cdots \tan(2n-1)\theta$

এখানে, পদসংখ্যা $= 2n-1$, যা বিজোড় সংখ্যা।

$\frac{2n-1+1}{2}$ অর্থাৎ n তম পদ মধ্যপদ।

$\therefore$ মধ্যপদ $= \tan n\theta = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ $[\because 4n\theta = \pi]$

$\tan\theta.\tan(2n-1)\theta = \tan\theta.\tan(2n\theta - \theta)$
$= \tan\theta.\tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$ $[\because 4n\theta = \pi]$
$= \tan\theta.\cot\theta = 1$

$\tan 2\theta.\tan(2n-2)\theta = \tan 2\theta.\tan(2n\theta - 2\theta)$
$= \tan 2\theta.\tan(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$
$= \tan 2\theta.\cot 2\theta = 1$

অনুরূপভাবে, $\tan 3\theta.\tan(2n-3)\theta = 1$
$\tan 4\theta.\tan(2n-4)\theta = 1, \cdots$ ইত্যাদি।
অর্থাৎ, মধ্যপদ হতে সমদূরবর্তী পদ দুইটির গুণফল $= 1$
$\therefore \tan\theta.\tan 2\theta.\tan 3\theta. \cdots \cdots \tan(2n-1)\theta = 1$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. মান নির্ণয় কর :

(a) $\tan(-1590°) = -\tan(1590°)$
$= -\tan(4.360° + 150°) = -\tan 150°$
$= -\tan(180° - 30°) = +\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $\cos 420° \sin(-300°) - \sin 870° \cos 570°$
$= \cos 420°(-\sin 300°) - \sin 870° \cos 570°$
$= -\cos(360° + 60°)\sin(360° - 60°)$

$-\sin(2.360° + 150°)\cos(2.360° - 150°)$

$= -\cos 60°(-\sin 60°) - \sin 150° \cos 150°$

$= \cos 60° \sin 60° - \sin(180° - 30°) \cos(180° - 30°)$

$= \cos 60° \sin 60° - \sin 30° (-\cos 30°)$

$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Ans.)

2. $\cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2\frac{31\pi}{24} + \cos^2\frac{37\pi}{24}$

$= \cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2(\frac{\pi}{2} + \frac{19\pi}{24}) + \cos^2(3.\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{24})$

$= \cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \sin^2\frac{\pi}{24} + \sin^2\frac{19\pi}{24}$

$= (\sin^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{\pi}{24}) + (\sin^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24})$

$= 1 + 1 = 2$ (Ans.)

3(a) $\cos^2 25° + \cos^2 35° + \cos^2 45° + \cos^2 55° + \cos^2 65°$

$= \cos^2 25° + \cos^2 35° + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2(90° - 35°) + \cos^2(90° - 25°)$

$= \cos^2 25° + \cos^2 35° + \frac{1}{2} + \sin^2 35° + \sin^2 25°$

$= (\sin^2 25° + \cos^2 25°) + \frac{1}{2} + (\sin^2 25° + \cos^2 25°)$

$= 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ (Ans.)

3(b) $\sin^2 10° + \sin^2 20° + \sin^2 30° + \cdots + \sin^2 80°$

$= \sin^2 10° + \sin^2 20° + \sin^2 30° + \sin^2 40° + \sin^2 50° + \sin^2 60° + \sin^2 70° + \sin^2 80°$

$= \sin^2 10° + \sin^2 20° + \sin^2 30° + \sin^2 40° + \sin^2(90° - 40°) + \sin^2(90° - 30°) + \sin^2(90° - 20°) + \sin^2(90° - 10°)$

$= \sin^2 10° + \sin^2 20° + \sin^2 30° + \sin^2 40° + \cos^2 40° + \cos^2 30° + \cos^2 20° + \cos^2 10°$

$= (\sin^2 10° + \cos^2 10°) + (\sin^2 20° + \cos^2 20°) + (\sin^2 30° + \cos^2 30°) + (\sin^2 40° + \cos^2 40°)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ (Ans.)

4. $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে ,

$\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক

$\therefore \sec\theta = -\sqrt{1 + \tan^2\theta} = -\sqrt{1 + \frac{9}{16}}$

$= -\sqrt{\frac{25}{16}} = -\frac{5}{4}$ $\therefore \cos\theta = -\frac{4}{5}$ এবং

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{3}{4}(-\frac{4}{5}) = -\frac{3}{5}$

এখন , $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}}$

$= -\frac{3+4}{5} \times \frac{4}{-5+3} = -\frac{7}{5} \times \frac{4}{-2} = \frac{14}{5}$ (Ans.)

5. $\sin\theta = \frac{12}{13}$ এবং $90° < \theta < 180°$ হলে দেখাও যে, $\frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \mathrm{cosec}(-\theta)} = \frac{10}{3}$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $\sin\theta = \frac{12}{13} \Rightarrow \mathrm{cosec}\theta = \frac{13}{12}$

এবং $90° < \theta < 180°$,

$\therefore \cos\theta = -\sqrt{1 - \sin^2\theta}$

$$= -\sqrt{1-\frac{144}{169}} = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$$

$$\sec\theta = -\frac{13}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{13}\times\left(-\frac{13}{5}\right) = -\frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow \cot\theta = -\frac{5}{12}$$

এখন , $\dfrac{\tan\theta+\sec(-\theta)}{\cot\theta+\operatorname{cosec}(-\theta)} = \dfrac{\tan\theta+\sec\theta}{\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta}$

$$= \frac{-\frac{12}{5}-\frac{13}{5}}{-\frac{5}{12}-\frac{13}{12}} = \frac{-25}{5}\times\frac{12}{-5-13}$$

$$= 5\times\frac{12}{18} = \frac{10}{3}$$

6. যোগফল নির্ণয় কর ঃ $\cos\theta + \cos(\pi+\theta) + \cos(2\pi+\theta) + \cdots \quad + \cos(n\pi+\theta)$

সমাধান: $\cos\theta + \cos(\pi+\theta) + \cos(2\pi+\theta) + \quad + \cos(n\pi+\theta)$

$= \cos\theta + \{-\cos\theta + \cos\theta - \cos\theta + \cdots + (-1)^n\cos\theta\}$

$n = 2$ হলে যোগফল $= \cos\theta + \{-\cos\theta + \cos\theta\}$
$= \cos\theta$

$n = 4$ হলে যোগফল $= \cos\theta + \{-\cos\theta + \cos\theta - \cos\theta + \cos\theta\} = \cos\theta$

তদ্রূপ, n যেকোন জোড় হলে নির্ণেয় যোগফল $= \cos x$

$n = 1$ হলে যোগফল $= \cos\theta + (-\cos\theta) = 0$

$n = 3$ হলে যোগফল $= \cos\theta + \{-\cos\theta + \cos\theta - \cos\theta\} = 0$

তদ্রূপ, n যেকোন বিজোড় হলে নির্ণেয় যোগফল $= 0$

7. $n \in \mathbb{Z}$ হলে , $\sin\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}\}$ এর মান নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ (a) $\sin\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}\}$

n জোড় সংখ্যা হলে মনে করি, $n = 2m$, যেখানে $m\in\mathbb{N}$.

$$\therefore \sin\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}\}$$

$$= \sin\{2m\pi + (-1)^{2m}\frac{\pi}{4}\}$$

$$= \sin\left(2m\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

n বিজোড় সংখ্যা হলে মনে করি , $n = 2m+1$; $m\in\mathbb{N}$.

$$\therefore \sin\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}\}$$

$$= \sin\{(2m+1)\pi + (-1)^{2m+1}\frac{\pi}{4}\}$$

$$= \sin\{2m\pi + (\pi - \frac{\pi}{4})\}$$

$$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{(Ans.)}$$

8. দেখাও যে , $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12} = 1$

প্রমাণ: $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}$

$= \tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)$

$= \tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\cot\frac{\pi}{12}\cot\frac{5\pi}{12}$

$= \left(\tan\frac{\pi}{12}.\cot\frac{\pi}{12}\right)\left(\tan\frac{5\pi}{12}.\cot\frac{5\pi}{12}\right)$

$= 1.1 = 1 \quad [\because \tan\theta.\cot\theta = 1]$

প্রশ্নমালা VII B

1. মান নির্ণয় কর ঃ (a) $\tan 105°$ **(b)** $\cot 165°$ **(c)** $\operatorname{cosec} 165°$

(a) $\tan 105° = \tan(60° + 45°)$

$$= \frac{\tan 60^0 + \tan 45^0}{1-\tan 60^0\tan 45^0} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}.1}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}+2)}{-2} = -(\sqrt{3}+2)$$

1(b) $\cot 165° = \cot(90° + 75°) = -\tan 75°$

$= -\tan(30° + 45°) = -\dfrac{\tan 30^0 + \tan 45^0}{1 - \tan 30^0 \tan 45^0}$

$= -\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.1} = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = -\dfrac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$= -\dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = -\dfrac{2(\sqrt{3}+2)}{2} = -(\sqrt{3}+2)$

1(c) $\text{cosec } 165° = \text{cosec } (90° + 75°)$

$= \sec 75° = \dfrac{1}{\cos 75^0} = \dfrac{1}{\cos(45^0 + 30^0)}$

$= \dfrac{1}{\cos 45^0 \cos 30^0 - \sin 45^0 \sin 30^0}$

$= \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$

$= \dfrac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{2(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{3-1}$

$= \dfrac{2(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{2} = \sqrt{6}+\sqrt{3}$

2. মান নির্ণয় কর ঃ

(a) $\cos 38°15' \sin 68°15' - \cos 51°45' \sin 21°45'$

$= \cos 38°15' \sin 68°15' - \cos(90° - 38°15') \sin(90° - 68°15')$

$= \cos 38°15' \sin 68°15' - \sin 38°15' \cos 68°15'$

$= \sin(68°15' - 38°15') = \sin 30° = \dfrac{1}{2}$

2(b) $\cos 69°22' \cos 9°22' + \cos 80°38' \cos 20°38'$

$= \cos 69°22' \cos 9°22' + \cos(90° - 9°22') \cos(90° - 69°22')$

$= \cos 69°22' \cos 9°22' + \sin 9°22' \sin 69°22'$

$= \cos(69°22' - 9°22') = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

3. প্রমাণ কর যে,

(a) L.H.S. $= \sin(25° + A)\cos(25° - A) + \cos(25° + A)\cos(115° - A)$

$= \sin(25° + A)\cos(25° - A) + \cos(25° + A)\cos\{90° + (25° - A)\}$

$= \sin(25° + A)\cos(25° - A) - \cos(25° + A)\sin(25° - A)$

$= \sin\{(25° + A) - (25° - A)\}$

$= \sin(25° + A - 25° + A)$

$= \sin 2A =$ R.H.S. (Proved)

3(b) $\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)\cos(\frac{\pi}{6} - \beta) - \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)\sin(\frac{\pi}{6} - \beta)$

$= \cos\{(\frac{\pi}{3} - \alpha) + (\frac{\pi}{6} - \beta)\}$

$= \cos\{(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) - (\alpha + \beta)\}$

$= \cos\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\}$

$= \sin(\alpha + \beta) =$ R.H.S. (Proved)

3(c) L.H.S. $= \sin(n+1)x \cos(n-1)x - \cos(n+1)x \sin(n-1)x$

$= \sin\{(n+1)x - (n-1)x\}$

$= \sin(nx + x - nx + x)$

$= \sin 2x =$ R.H.S. (Proved)

4. প্রমাণ কর যে,

(a) L.H.S. $= \sin A \sin(B - C) + \sin B \sin(C - A) + \sin C \sin(A - B)$

$= \sin A(\sin B \cos C - \sin C \cos B) + \sin B(\sin C \cos A - \sin A \cos C) + \sin C(\sin A \cos B - \sin B \cos A)$

$= \sin A \sin B \cos C - \sin A \cos B \sin C + \cos A \sin B \sin C - \sin A \sin B \cos C + \sin A \cos B \sin C - \cos A \sin B \sin C$

$= 0 =$ R.H.S. (Proved)

4(b) L.H.S. $= \sin(B+C)\sin(B-C) + \sin(C+A)\sin(C-A) + \sin(A+B)\sin(A-B)$

$= \sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 C - \sin^2 A + \sin^2 A - \sin^2 B$

$= 0 =$ R.H.S. (Proved)

4(c) L.H.S. $= \sin(135° - A) + \cos(135° + A)$

$= \sin\{180° - (45° + A)\} + \cos\{180° - (45° - A)\}$

$= \sin(45° + A) - \cos(45° - A)$

$= \sin(45° + A) - \cos\{90° - (45° + A)\}$

$= \sin(45° + A) - \sin(45° + A)$

$= 0 =$ R.H.S. (Proved)

5. প্রমাণ কর যে,

(a) L.H.S.$= \dfrac{\cos 15^0 + \sin 15^0}{\cos 15^0 - \sin 15^0}$

$= \dfrac{\cos 15^0 (1 + \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0})}{\cos 15^0 (1 - \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0})} = \dfrac{1 + \tan 15^0}{1 - \tan 15^0}$

$= \dfrac{\tan 45^0 + \tan 15^0}{1 - \tan 45^0 \tan 15^0} = \tan(45° + 15°)$

$= \tan 60° = \sqrt{3} =$ R.H.S. (Proved)

5(b) L.H.S.$= \dfrac{\cos 25^0 - \sin 25^0}{\cos 25^0 + \sin 25^0}$

$= \dfrac{\cos 25^0 (1 - \frac{\sin 25^0}{\cos 25^0})}{\cos 25^0 (1 + \frac{\sin 25^0}{\cos 25^0})} = \dfrac{1 - \tan 25^0}{1 - \tan 25^0}$

$= \dfrac{\tan 45^0 - \tan 25^0}{1 + \tan 45^0 \tan 25^0} = \tan(45° - 25°)$

$= \tan 20° =$ R.H.S. (proved)

5(c) L.H.S.$= \dfrac{\sin 75^0 + \sin 15^0}{\sin 75^0 - \sin 15^0}$

$= \dfrac{\sin(90^0 - 15^0) + \sin 15^0}{\sin(90^0 - 15^0) - \sin 15^0}$

$= \dfrac{\cos 15^0 + \sin 15^0}{\cos 15^0 - \sin 15^0} = \dfrac{\cos 15^0 (1 + \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0})}{\cos 15^0 (1 - \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0})}$

$= \dfrac{1 + \tan 15^0}{1 - \tan 15^0} = \dfrac{\tan 45^0 + \tan 15^0}{1 - \tan 45^0 \tan 15^0}$

$= \tan(45° + 15°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

6. প্রমাণ কর যে,

(a) $\tan\dfrac{\pi}{4} = \tan\left(\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi}{5}\right)$

$\Rightarrow 1 = \dfrac{\tan\frac{\pi}{20} + \tan\frac{\pi}{5}}{1 - \tan\frac{\pi}{20}\tan\frac{\pi}{5}}$

$\Rightarrow \tan\dfrac{\pi}{20} + \tan\dfrac{\pi}{5} = 1 - \tan\dfrac{\pi}{20}\tan\dfrac{\pi}{5}$

$\therefore \tan\dfrac{\pi}{20} + \tan\dfrac{\pi}{5} + \tan\dfrac{\pi}{20}\tan\dfrac{\pi}{5} = 1$

6(b) $\tan 70° = \tan(50° + 20°)$

[চ.'০৫; ঢা.'১০; প্র.ভ.প.'০৩]

$\Rightarrow \tan 70° = \dfrac{\tan 50^0 + \tan 20^0}{1 - \tan 50^0 \tan 20^0}$

$\Rightarrow \tan 70° - \tan 70° \tan 50° \tan 20° = \tan 50° + \tan 20°$

$\Rightarrow \tan 70° - \tan(90° - 20°)\tan 50° \tan 20° = \tan 50° + \tan 20°$

$\Rightarrow \tan 70° - \cot 20° \tan 50° \tan 20° = \tan 50° + \tan 20°$

$\Rightarrow \tan 70° - \tan 50° = \tan 50° + \tan 20°$

$\therefore \tan 70° = \tan 20° + 2\tan 50°$

6(c) $\tan(A - B) = -\tan(B - A)$

$= -\tan\{(B - C) + (C - A)\}$

$= -\dfrac{\tan(B-C) + \tan(C-A)}{1 - \tan(B-C)\tan(C-A)}$

$\Rightarrow \tan(A - B) - \tan(A - B)\tan(B - C)$

$\tan(C-A) = -\tan(B-C) - \tan(C-A)$
$\tan(B-C) + \tan(C-A) + \tan(A-B)$
$= \tan(B-C)\tan(C-A)\tan(A-B)$

7(a) L.H.S. $= 2\sin(\theta + \frac{\pi}{4})\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$

$= 2(\sin\theta \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\theta)$

$(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\theta)$

$= 2(\sin\theta . \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)$

$(\sin\theta . \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)$

$= 2 . \frac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta)(\sin\theta - \cos\theta)$

$= \sin^2\theta - \cos^2\theta =$ R.H.S. (Proved)

বিকল্প পদ্ধতি: L.H.S.$= 2\sin(\theta + \frac{\pi}{4})\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$

$= 2(\sin^2\theta - \sin^2\frac{\pi}{4})$

$[\because \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B]$

$= 2(\sin^2\theta - \frac{1}{2}) = 2\sin^2\theta - 1$

$= 2\sin^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= \sin^2\theta - \cos^2\theta =$ R.H.S. (Proved)

7(b) L.H.S.$= \tan(A+B)\tan(A-B)$

$= \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\cos(A-B)}$

$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B} =$ R.H.S.

7.(c) L.H.S.$= \dfrac{\tan(\frac{\pi}{4}+\theta) - \tan(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\tan(\frac{\pi}{4}+\theta) + \tan(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

$= \{\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)} - \dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}\} \div$

$\{\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)} + \dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}\}$

$= \dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\cos(\frac{\pi}{4}-\theta) - \cos(\frac{\pi}{4}+\theta)\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)} \times$

$\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\cos(\frac{\pi}{4}-\theta) + \cos(\frac{\pi}{4}+\theta)\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

$= \dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta-\frac{\pi}{4}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta+\frac{\pi}{4}-\theta)} = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\frac{\pi}{2}}$

$= \sin 2\theta =$ R.H.S. (Proved)

8. (a) $a\cos(x+\alpha) = b\cos(x-\alpha)$ **হলে দেখাও যে,** $(a+b)\tan x = (a-b)\cot\alpha$ **[ঢা.'০৫]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $a\cos(x+\alpha) = b\cos(x-\alpha)$

$\Rightarrow a(\cos x\cos\alpha - \sin x\sin\alpha)$
$= b(\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha)$

$\Rightarrow (a-b)\cos x\cos\alpha = (a+b)\sin x\sin\alpha$

$\Rightarrow (a+b)\frac{\sin x}{\cos x} = (a-b)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\therefore (a+b)\tan x = (a-b)\cot\alpha$

8(b) $a\sin(x+\theta) = b\sin(x-\theta)$ **হলে দেখাও যে,** $(a+b)\tan\theta + (a-b)\tan x = 0$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $a\sin(x+\theta) = b\sin(x-\theta)$

$\Rightarrow a(\sin x\cos\theta + \sin\theta\cos x)$
$= b(\sin x\cos\theta - \sin\theta\cos x)$

$\Rightarrow (a-b)\sin x\cos\theta = -(a+b)\sin\theta\cos x$

$\Rightarrow (a-b)\frac{\sin x}{\cos x} = -(a+b)\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\Rightarrow (a-b)\tan x = -(a+b)\tan\theta$

$\therefore (a+b)\tan\theta + (a-b)\tan x = 0$

8.(c) θ **কোণকে** α **এবং** β **এই দুই অংশে এমন ভাবে বিভক্ত করা হল যেন,** $\tan\alpha : \tan\beta = x : y$ **হয় ।**

দেখাও যে, $\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{x-y}{x+y}\sin\theta$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\theta = \alpha + \beta$ এবং

$\tan\alpha \quad \tan\beta = x : y$

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta = \frac{x+y}{x-y}(\tan\alpha - \tan\beta)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{x+y}{x-y}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{x+y}{x-y}\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}\right)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \frac{x+y}{x-y}\sin(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{x+y}{x-y}\sin(\alpha - \beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{x-y}{x+y}\sin\theta$$

8(d) $\tan\theta + \sec\theta = \dfrac{x}{y}$ হলে দেখাও যে,

$$\sin\theta = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে , $\tan\theta + \sec\theta = \dfrac{x}{y}$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{x^2}{y^2}$$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

$$\Rightarrow \frac{1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta}{1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

[যোজন–বিয়োজন করে।]

$$\Rightarrow \frac{1 + 2\sin\theta + (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{(1 - \cos^2\theta) + 2\sin\theta + \sin^2\theta} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2\sin\theta + 1}{\sin^2\theta + 2\sin\theta + \sin^2\theta} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2(1 + \sin\theta)}{2\sin\theta(1 + \sin\theta)} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$ (Showed)

8.(e) $\sin(A + B) = n\sin(A - B)$ এবং $n \neq 1$ হলে দেখাও যে, $\cot A = \dfrac{n-1}{n+1}\cot B$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\sin(A + B) = n\sin(A - B)$

$$\Rightarrow \frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = n$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{\sin(A+B) - \sin(A-B)} = \frac{n+1}{n-1}$$

[যোজন–বিয়োজন করে।]

$$\Rightarrow \frac{2\sin A\cos B}{2\sin B\cos A} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\cot B}{\cot A} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\therefore \cot A = \frac{n-1}{n+1}\cot B$$

9. (a) $a\sin(\theta + \alpha) = b\sin(\theta + \beta)$ হলে দেখাও যে, $\cot\theta = \dfrac{a\cos\alpha - b\cos\beta}{b\sin\beta - a\sin\alpha}$ [য .'০৫]

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $a\sin(\theta + \alpha) = b\sin(\theta + \beta)$

$\Rightarrow a(\sin\theta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\theta)$

$= b(\sin\theta\cos\beta + \sin\beta\cos\theta)$

$\Rightarrow a\sin\theta\cos\alpha - b\sin\theta\cos\beta$

$= b\sin\beta\cos\theta - a\sin\alpha\cos\theta$

$\Rightarrow (a\cos\alpha - b\cos\beta)\sin\theta$

$= (b\sin\beta - a\sin\alpha)\cos\theta$

$$\therefore \cot\theta = \frac{a\cos\alpha - b\cos\beta}{b\sin\beta - a\sin\alpha}$$ (Showed)

9.(b) $\sin\theta = k\cos(\theta - \alpha)$ হলে দেখাও যে,

$\cot\theta = \dfrac{1+k\sin\alpha}{k\cos\alpha}$ [কু.'১২]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\sin\theta = k\cos(\theta-\alpha)$

$\Rightarrow \sin\theta = k(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)$

$\Rightarrow \sin\theta + k\sin\theta\sin\alpha = k\cos\theta\cos\alpha$

$\Rightarrow (1+k\sin\alpha)\sin\theta = k\cos\theta\cos\alpha$

$\Rightarrow \dfrac{1+k\sin\alpha}{k\cos\alpha} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\cot\theta = \dfrac{1+k\sin\alpha}{k\cos\alpha}$

9(c) $\cot\alpha + \cot\beta = a$, $\tan\alpha + \tan\beta = b$ এবং $\alpha+\beta = \theta$ হলে দেখাও যে, $(a-b)\tan\theta = ab$
[ঢা.'০১,'১১; য.'০১; ব.'০৮]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে ,

$\cot\alpha + \cot\beta = a\cdots(1)$, $\tan\alpha + \tan\beta = b\cdots(2)$

এবং $\alpha+\beta = \theta\cdots\cdots(3)$

(1) হতে আমরা পাই , $\dfrac{1}{\tan\alpha} + \dfrac{1}{\tan\beta} = a$

$\Rightarrow \dfrac{\tan\beta+\tan\alpha}{\tan\alpha\tan\beta} = a$

$\Rightarrow \dfrac{b}{\tan\alpha\tan\beta} = a \Rightarrow \tan\alpha\tan\beta = \dfrac{b}{a}$

এখন , $\theta = \alpha+\beta$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$= \dfrac{b}{1-\dfrac{b}{a}} = \dfrac{ab}{a-b}$

$\therefore (a-b)\tan\theta = ab$

9(d) $\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} = \dfrac{2\sin(\beta+\theta)}{\sin\beta}$ হলে দেখাও যে, $\cot\alpha - \cot\theta = 2\cot\beta$ [কু.'১২]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} = \dfrac{2\sin(\beta+\theta)}{\sin\beta}$

$\Rightarrow \sin\beta.\sin(\alpha+\theta) = 2\sin\alpha.\sin(\beta+\theta)$

$\Rightarrow (\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)\sin\beta$

$= 2\sin\alpha(\sin\beta\cos\theta + \sin\theta\cos\beta)$

$\Rightarrow \sin\alpha\cos\theta\sin\beta + \cos\alpha\sin\theta\sin\beta$

$= 2\sin\alpha\sin\beta\cos\theta + 2\sin\alpha\sin\theta\cos\beta$

$\Rightarrow \cos\alpha\sin\theta\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

$= 2\sin\alpha\sin\theta\cos\beta$

ধরি , $\sin\theta\sin\alpha\sin\beta \neq 0$ এবং উভয় পক্ষকে $\sin\theta\sin\alpha\sin\beta$ দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই ,

$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = 2\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$

$\therefore \cot\alpha - \cot\theta = 2\cot\beta$

10. $A+B = \dfrac{\pi}{4}$ হলে দেখাও যে,

$(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $A+B = \dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} = 1$

$\Rightarrow \tan A + \tan B = 1 - \tan A\tan B$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan A\tan B + 1 = 2$

$\Rightarrow 1(1+\tan A) + \tan B(1+\tan A) = 2$

$\therefore (1+\tan A)(1+\tan B) = 2$ (Showed)

11.(a) $\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + 1 = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $1 + \cot\alpha\tan\beta = 0$ [য.'০৭]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে ,

$\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + 1 = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 1$

$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = 1 \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos 0$

$\therefore \alpha+\beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha$

এখন , L.H.S. $= 1 + \cot\alpha\tan(-\alpha)$

$= 1 + \dfrac{1}{\tan\alpha}(-\tan\alpha) = 1 - 1 = 0 =$ R.H.S.

11. (b) $\tan\beta = \dfrac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$ হলে দেখাও যে , $\dfrac{1}{\tan\alpha} + \dfrac{1}{\tan\gamma} = \dfrac{2}{\tan\beta}$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\tan\beta = \dfrac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$

$\Rightarrow \sin\beta(\sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha)$

$= 2\sin\alpha \cos\beta \sin\gamma$

$\Rightarrow \sin\alpha\sin\beta \cos\gamma + \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma = 2\sin\alpha \cos\beta \sin\gamma$

ধরি, $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \neq 0$ এবং উভয় পক্ষকে $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$$\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

$\Rightarrow \cot\gamma + \cot\alpha = 2\cot\beta$

$\therefore \frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\gamma}=\frac{2}{\tan\beta}$ (Showed)

11(c) $\tan\beta = \frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}$ **হলে দেখাও যে, $\tan(\alpha-\beta)=(1-n)\tan\alpha$**

প্রমাণ ঃ $\tan\beta = \frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}$ ....(1)

এখন, $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}}$$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(1-\frac{n\cos^2\alpha}{1-n\sin^2\alpha})}{1+\frac{n\sin^2\alpha}{1-n\sin^2\alpha}}$$

$$=\tan\alpha(\frac{1-n\sin^2\alpha-n\cos^2\alpha}{1-n\sin^2\alpha})\times\frac{1-n\sin^2\alpha}{1-n\sin^2\alpha+n\sin^2\alpha}$$

$$=\tan\alpha\,\frac{1-n(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{1}$$

$\therefore \tan(\alpha-\beta) = (1-n)\tan\alpha$ (Showed)

12(a) $\tan\alpha-\tan\beta = x$ **এবং** $\cot\beta-\cot\alpha = y$ **হলে দেখাও যে,** $\cot(\alpha-\beta)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan\alpha-\tan\beta = x$ এবং $\cot\beta-\cot\alpha = y$

এখন, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\tan\alpha-\tan\beta}+\frac{1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\cot\alpha}-\frac{1}{\cot\beta}}+\frac{1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

$$=\frac{\cot\alpha\cot\beta}{\cot\beta-\cot\alpha}+\frac{1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

$$=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}=\cot(\alpha-\beta)$$

$\therefore \cot(\alpha-\beta) = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (Showed)

(b) $\tan\theta=\frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi}$ **এবং** $\tan\varphi=\frac{y\sin\theta}{1-y\cos\theta}$ **হলে দেখাও যে,** $\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}=\frac{x}{y}$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan\theta=\frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi}$

$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi}$

$\Rightarrow x\cos\theta\sin\varphi = \sin\theta - x\sin\theta\cos\varphi$

$\Rightarrow x(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi)=\sin\theta$

$\Rightarrow x\cos(\theta+\varphi)=\sin\theta \Rightarrow x=\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\varphi)}$

এবং $\tan\varphi=\frac{y\sin\theta}{1-y\cos\theta} \Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{y\sin\theta}{1-y\cos\theta}$

$\Rightarrow y(\sin\theta\cos\varphi+\sin\varphi\cos\theta)=\sin\varphi$

$\Rightarrow y=\frac{\sin\varphi}{\sin(\theta+\varphi)}$

এখন, $\frac{x}{y}=\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\varphi)}\times\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin\varphi}=\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}$

$\therefore \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}=\frac{x}{y}$ (Showed)

13.(a) $\sin x+\sin y = a$ এবং $\cos x+\cos y = b$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{1}{2}(x-y)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2-b^2}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sin x+\sin y = a$

$\Rightarrow \sin^2 x+\sin^2 y+2\sin x\sin y=a^2 \cdots (1)$

এবং $\cos x+\cos y = b$

$\Rightarrow \cos^2 x+\cos^2 y+2\cos x\cos y=b^2 \cdots (2)$

(1) ও (2) যোগ করে পাই,

$(\sin^2 x+\cos^2 x)+(\sin^2 y+\cos^2 y)+$
$2(\cos x\cos y+\sin x \sin y) = a^2+b^2$

$\Rightarrow 1+1+2\cos(x-y) = a^2+b^2$

$\Rightarrow 2\{1+\cos(x-y)\} = a^2+b^2$

$\Rightarrow 2\{2\cos^2\frac{1}{2}(x-y)\} = a^2+b^2$

$\Rightarrow 4\{1-\sin^2\frac{1}{2}(x-y)\} = a^2+b^2$

$\Rightarrow 4\sin^2\frac{1}{2}(x-y)=4- a^2+b^2$

$\Rightarrow \sin^2\frac{1}{2}(x-y)=\frac{1}{4}(4-a^2-b^2)$

$\sin\frac{1}{2}(x-y)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2-b^2}$

13(b) $\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma=\cos(\alpha-\gamma+\beta)$ হলে দেখাও যে, $\cot\alpha$, $\cot\gamma$ এবং $\cot\beta$ সমান্তর প্রগমন ভুক্ত।

প্রমাণ ঃ $\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma = \cos(\alpha-\gamma+\beta)$

$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta)\cos\gamma-\cos\{(\alpha+\beta)-\gamma\}=0$

$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta)\cos\gamma-\{\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+$
$\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma\}=0$

$\Rightarrow \{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\cos\gamma$
$-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma\}=0$

$\Rightarrow 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-(\sin\alpha\cos\beta+$
$\sin\beta\cos\alpha)\sin\gamma=0$

$\Rightarrow 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$
$-\sin\beta\cos\alpha\sin\gamma=0$

$\Rightarrow 2\cot\gamma-\cos\beta-\cot\alpha=0$

[উভয় পক্ষকে $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \cot\gamma-\cos\beta=\cot\alpha-\cot\gamma$

$\Rightarrow \cot\alpha-\cot\gamma=\cot\gamma-\cos\beta$

$\cot\alpha$, $\cot\gamma$ একং $\cot\beta$ সমান্তর প্রগমন ভুক্ত।

13(c) $\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\alpha-\beta)=-\frac{3}{2}$ হলে দেখাও যে, $\Sigma\cos\alpha=0$ এবং $\Sigma\sin\alpha=0$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে ,

$\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\alpha-\beta)=-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 2(\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma+\cos\gamma\cos\alpha+$
$\sin\gamma\sin\alpha+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=-3$

$\Rightarrow 2(\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha)$
$+2(\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha)$
$+1+1+1=0$

$\Rightarrow 2(\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha)$
$+2(\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha)$
$+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+$
$(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)=0$

$\Rightarrow\{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2(\cos\alpha\cos\beta+$
$\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha)\}+\{\sin^2\alpha+$
$\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2(\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma$
$+\sin\gamma\sin\alpha)\}=0$

$\Rightarrow(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2+(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2=0$

$\therefore \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$ এবং
$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$

[$\because$ দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে সংখ্যা দুইটি পৃথক পৃথক ভাবে শূন্য হয় ।]

$\therefore \sum\cos\alpha=0$ এবং $\sum\sin\alpha=0$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. মান নির্ণয় কর ঃ

(a) $\sin 76°40'\cos 16°40'-$
$\cos 73°20'\sin 13°20'$

$=\sin 76°40'\cos 16°40'-\cos(90°-16°40')$
$\sin(90°-76°40')$

$=\sin 76°40'\cos 16°40'-$
$\sin 16°40'\cos 76°40'$

$=\sin(76°40'-16°40')=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\cos 17°40'\sin 77°40'+$
$\cos 107°40'\sin 12°20'$

$=\cos 17°40'\sin 77°40'+$

$\cos(90° + 17°40') \sin(90° - 77°40')$

$= \cos 17°40' \sin 77°40' - \sin 17°40' \cos 77°40'$

$= \sin(77°40' - 17°40') = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\frac{\tan 68^0 35' - \cot 66^0 25'}{1 + \tan 68^0 35' \cot 66^0 25'}$

$= \frac{\tan 68^0 35' - \cot(90^0 - 23^0 35')}{1 + \tan 68^0 35' \cot(90^0 - 23^0 35')}$

$= \frac{\tan 68^0 35' - \tan 23^0 35'}{1 + \tan 68^0 35' \tan 23^0 35'}$

$= \tan(68°35' - 23^0 35') = \tan 45° = 1$ (Ans.)

প্রমাণ কর যে,

2. $\cos(A - B) \cos(A - C) + \sin(A - B) \sin(A - C) = \cos(B - C)$

L.H.S. $= \cos(A - B) \cos(A - C) + \sin(A - B) \sin(A - C)$

$= \cos\{(A - B) - (A - C)\}$

$= \cos(A - B - A + C) = \cos(-B + C)$

$= \cos(B - C) =$ R.H.S. (Proved)

3. $\frac{\cot(3A - B)\cot B - 1}{-\cot B - \cot(3A - B)} = -\cot 3A$

L.H.S. $= \frac{\cot(3A - B)\cot B - 1}{-\cot B - \cot(3A - B)}$

$= \frac{\cot(3A - B)\cot B - 1}{-\{\cot B + \cot(3A - B)\}}$

$= -\frac{\cot(3A - B)\cot B - 1}{\cot B + \cot(3A - B)}$

$= -\cot(3A - B + B) = -\cot 3A$

$=$ R.H.S. (Proved)

4. $\cos A + \cos(\frac{2\pi}{3} - A) + \cos(\frac{2\pi}{3} + A) = 0$

L.H.S. $= \cos A + \cos(\frac{2\pi}{3} - A) + \cos(\frac{2\pi}{3} + A)$

$= \cos A + 2\cos\frac{2\pi}{3}\cos A$

$= \cos A + 2 . (-\frac{1}{2})\cos A$

$= \cos A - \cos A = 0 =$ R.H.S.

(Proved)

5. $\frac{\sin 75^0 - \sin 15^0}{\sin 75^0 + \sin 15^0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

L.H.S. $= \frac{\sin 75^0 - \sin 15^0}{\sin 75^0 + \sin 15^0}$

$= \frac{\sin(90^0 - 15^0) - \sin 15^0}{\sin(90^0 - 15^0) + \sin 15^0}$

$= \frac{\cos 15^0 - \sin 15^0}{\cos 15^0 + \sin 15^0} = \frac{\cos 15^0 (1 - \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0})}{\cos 15^0 (1 + \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0})}$

$= \frac{1 - \tan 15^0}{1 + \tan 15^0} = \frac{\tan 45^0 - \tan 15^0}{1 + \tan 45^0 \tan 15^0}$

$= \tan(45° - 15°) = \tan 30°$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} =$ R.H.S. (proved)

6. (a) $\tan 5A \tan 3A \tan 2A = \tan 5A - \tan 3A - \tan 2A$

(b) $\tan 32° + \tan 13° + \tan 32° \tan 13° = 1$

(c) $\tan\frac{\pi}{20} + \tan\frac{\pi}{5} + \tan\frac{\pi}{20} \tan\frac{\pi}{5} = 1$

প্রমাণ: (a) $\tan 5A = \tan(3A + 2A)$

$\Rightarrow \tan 5A = \frac{\tan 3A + \tan 2A}{1 - \tan 3A \tan 2A}$

$\Rightarrow \tan 3A + \tan 2A = \tan 5A - \tan 5A \tan 3A \tan 2A$

$\therefore \tan 5A \tan 3A \tan 2A = \tan 5A - \tan 3A - \tan 2A$

(b) $\tan 45° = \tan(32° + 13°)$

$\Rightarrow 1 = \frac{\tan 32^0 + \tan 13^0}{1 - \tan 32^0 \tan 13^0}$

$\Rightarrow \tan 32° + \tan 13° = 1 - \tan 32° \tan 13°$

$\therefore \tan 32° + \tan 13° + \tan 32° \tan 13° = 1$

(c) $\tan 50° = \tan 40° + 10°)$

$\Rightarrow \tan 50° = \dfrac{\tan 40^0 + \tan 10^0}{1 - \tan 40^0 \tan 10^0}$

$\Rightarrow \tan 50° - \tan 50° \tan 40° \tan 10° = \tan 40° + \tan 10°$

$\Rightarrow \tan 50° - \tan(90° - 40°) \tan 40° \tan 10° = \tan 40° + \tan 10°$

$\Rightarrow \tan 50° - \cot 40° \tan 40° \tan 10° = \tan 40° + \tan 10°$

$\Rightarrow \tan 50° - \tan 10° = \tan 40° + \tan 10°$

$\tan 50° = \tan 40° + 2\tan 10°$

7. (a) $\tan(45° + A)\tan(45° - A) = 1$

(b) $\cos^2(A - B) - \sin^2(A + B) = \cos 2A \cos 2B$.

(a) L.H.S. $= \tan(45° + A)\tan(45° - A)$
$= \tan(45° + A)\tan\{90° - (45° + A)\}$
$= \tan(45° + A).\cot(45° + A)$
$= 1 =$ R.H.S. (Proved)

(b) L.H.S.$= \cos^2(A - B) - \sin^2(A + B)$
$= \cos\{(A - B) + (A + B)\}\cos\{(A - B) - (A + B)\}$
$= \cos(A - B + A + B)\cos(A - B - A - B)$
$= \cos 2A \cos(-2B) = \cos 2A \cos 2B =$ R.H.S.

11.(a) $\boldsymbol{\sin\alpha = k\sin(\alpha + \beta)}$ **হলে দেখাও যে,**

$\boldsymbol{\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta - k}}$**.**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sin\alpha = k\sin(\alpha + \beta)$

$\Rightarrow \sin\alpha = k(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)$

$\Rightarrow \sin\alpha = k\sin\alpha\cos\beta + k\sin\beta\cos\alpha$

$\Rightarrow \sin\alpha(1 - k\cos\beta) = k\sin\beta\cos\alpha$

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{k\sin\beta}{1 - k\cos\beta}$

এখন, $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$$= \frac{\dfrac{k\sin\beta}{1 - k\cos\beta} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{k\sin\beta}{1 - k\cos\beta}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{k\sin\beta\cos\beta + \sin\beta - k\sin\beta\cos\beta}{(1 - k\cos\beta)\cos\beta}}{\dfrac{\cos\beta - k\cos^2\beta - k\sin^2\beta}{(1 - k\cos\beta)\cos\beta}}$$

$$= \frac{\sin\beta}{\cos\beta - k(\cos^2\beta + \sin^2\beta)}$$

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta - k}$ (Showed)

(b) $\boldsymbol{\tan\alpha = \dfrac{b}{a}}$ **হলে দেখাও যে,**

$\boldsymbol{a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \alpha)}$**.**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$

এখন, $\sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \alpha)$

$= \sqrt{a^2\left(1 + \dfrac{b^2}{a^2}\right)}\cos(\theta - \alpha)$

$= a\sqrt{1 + \tan^2\alpha}\cos(\theta - \alpha)$

$= a\sqrt{\sec^2\alpha}\cos(\theta - \alpha) = a\sec\alpha\cos(\theta - \alpha)$

$= \dfrac{a}{\cos\alpha}(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta)$

$= a\cos\theta + a\sin\theta\tan\alpha$

$= a\cos\theta + a\sin\theta\,\dfrac{b}{a}$

$= a\cos\theta + b\sin\theta$

$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \alpha)$

বিকল্প পদ্ধতি: দেওয়া আছে, $\tan\alpha = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{a}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{b} = \dfrac{\cos\alpha}{a} = \dfrac{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$b = \sqrt{a^2 + b^2}\sin\alpha$, $a = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\alpha$

এখন, $a\cos\theta + b\sin\theta$

$= \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta)$

$\therefore a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \alpha)$

(showed)

12.(a) $\cos\alpha + \cos\beta = a$ এবং $\sin\alpha + \sin\beta = b$ হলে দেখাও যে, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2)$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\cos\alpha + \cos\beta = a$

$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta = a^2 \cdots(1)$

এবং $\sin\alpha + \sin\beta = b$

$\Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta = b^2 \quad (2)$

(1) ও (2) যোগ করে পাই,

$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\sin^2\beta + \cos^2\beta) + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 1 + 1 + 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2 - 2$

$\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2)$.(Showed)

(b) $\tan\theta = \frac{a\sin x + b\sin y}{a\cos x + b\cos y}$ হলে দেখাও যে, $a\sin(\theta - x) + b\sin(\theta - y) = 0$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{a\sin x + b\sin y}{a\cos x + b\cos y}$

$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a\sin x + b\sin y}{a\cos x + b\cos y}$

$\Rightarrow a\sin\theta\cos x + b\sin\theta\cos y = a\sin x\cos\theta + b\cos\theta\sin y$

$\Rightarrow a(\sin\theta\cos x - \sin x\cos\theta) + b(\sin\theta\cos y - \cos\theta\sin y) = 0$

$a\sin(\theta - x) + b\sin(\theta - y) = 0$

(Showed)

(c) $\tan\beta = \frac{\sin 2\alpha}{5 + \cos 2\alpha}$ হলে দেখাও যে, $3\tan(\alpha - \beta) = 2\tan\alpha$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan\beta = \frac{\sin 2\alpha}{5 + \cos 2\alpha}$

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{\frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}}{5 + \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}}$$

$$= \frac{\frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}}{\frac{5 + 5\tan^2\alpha + 1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha}{6 + 4\tan^2\alpha}$$

$$= \frac{\tan\alpha}{3 + 2\tan^2\alpha}$$

এখন, $3\tan(\alpha - \beta) = 3\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$$= 3\frac{\tan\alpha - \frac{\tan\alpha}{3 + 2\tan^2\alpha}}{1 + \tan\alpha.\frac{\tan\alpha}{3 + 2\tan^2\alpha}}$$

$$= 3\frac{3\tan\alpha + 2\tan^3\alpha - \tan\alpha}{3 + 2\tan^2\alpha + \tan^2\alpha}$$

$$= 3\frac{2\tan\alpha + 2\tan^3\alpha}{3 + 3\tan^2\alpha}$$

$$= 3\frac{2\tan\alpha(1 + \tan^3\alpha)}{3(1 + \tan^2\alpha)} = 2\tan\alpha$$

$\therefore 3\tan(\alpha - \beta) = 2\tan\alpha$

13. (a) $\cos(\alpha + \beta)\sin(\gamma + \theta) = \cos(\alpha - \beta)\sin(\gamma - \theta)$ হলে দেখাও যে, $\tan\theta = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\cos(\alpha + \beta)\sin(\gamma + \theta) = \cos(\alpha - \beta)\sin(\gamma - \theta)$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin(\gamma - \theta)}{\sin(\gamma + \theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))} = \frac{\sin(\gamma - \theta) + \sin(\gamma + \theta)}{\sin(\gamma - \theta) - \sin(\gamma + \theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\alpha\cos\beta}{-2\sin\alpha\sin\beta} = \frac{2\sin\gamma\cos\theta}{-2\sin\theta\cos\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\tan\gamma}{\tan\theta}$$

$\tan\theta = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ (Showed)

(b) $(\theta - \varphi)$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin\theta + \sin\varphi = \sqrt{3}(\cos\varphi - \cos\theta)$ হলে দেখাও যে, $\sin 3\theta + \sin 3\varphi = 0$

প্রমাণ ঃ $\sin\theta + \sin\varphi = \sqrt{3}(\cos\varphi - \sin\theta)$

$\Rightarrow\ 2\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=$

$\sqrt{3}\{\ 2\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)\}$

$\Rightarrow\ \cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=\sqrt{3}\ \sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)$

$\Rightarrow\ \cot\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=\sqrt{3}=\cot 30^0$

$\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=30^0$ যেহেতু $(\theta-\varphi)$ সূক্ষ্মকোণ ।

$\Rightarrow\ \theta-\varphi=60^0$

এখন, $\sin 3\theta+\sin 3\varphi$

$=2\sin\frac{3}{2}(\theta+\varphi)\cos\frac{3}{2}(\theta-\varphi)$

$=2\sin\frac{3}{2}(\theta+\varphi)\cos\frac{3}{2}(60^0)$

$=2\sin\frac{3}{2}(\theta+\varphi)\cos 90^0$

$=2\sin\frac{3}{2}(\theta+\varphi)\times 0$

$\therefore \sin 3\theta+\sin 3\varphi=0$

প্রশ্নমালা VII C

1. প্রমাণ কর যে,

(a) $\sin 10°\ \sin 30°\ \sin 50°\ \sin 70° = \frac{1}{16}$

L.H.S.$=\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°$

$=\sin 10°.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\{\cos(70°-50°)-\cos(70°+50°)\}$

$=\frac{1}{4}\sin 10°(\cos 20°-\cos 120°)$

$=\frac{1}{4}\sin 10°\cos 20°-\frac{1}{4}(-\frac{1}{2})\sin 10°$

$=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}\{\sin(20°+10°)-\sin(20°-10°)\}+\frac{1}{8}\sin 10°$

$=\frac{1}{8}\sin 30°-\frac{1}{8}\sin 10°+\frac{1}{8}\sin 10°$

$=\frac{1}{8}.\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$ = R.H.S. (Proved)

1(b) $\cos 20°\ \cos 40°\ \cos 60°\cos 80° = \frac{1}{16}$

L.H.S.$=\cos 20°\cos 40°\cos 60°\cos 80°$

$=\frac{1}{2}\{\cos(40°+20°)+\cos(40°-20°)\}\frac{1}{2}.\cos 80°$

$=\frac{1}{4}\{\cos 60°+\cos 20°\}\cos(90°-10°)$

$=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}+\cos 20°)\sin 10°$

$=\frac{1}{8}\sin 10°+\frac{1}{4}\cos 20°\sin 10°$

$=\frac{1}{8}\sin 10°+\frac{1}{8}\{\sin(20°+10°)-\sin(20°-10°)\}$

$=\frac{1}{8}\sin 10°+\frac{1}{8}\sin 30°-\frac{1}{8}\sin 10°$

$=\frac{1}{8}.\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$ = R.H.S. (Proved)

1(c) $\tan 20°\ \tan 40°\ \tan 60°\ \tan 80° = 3$

L.H.S. $=\tan 20°\tan 40°\tan 60°\tan 80°$

$=\tan 20°\tan 40°.\sqrt{3}.\tan 80°$

$=\sqrt{3}\ \tan 20°\tan 40°\tan 60°$

$=\sqrt{3}.\frac{2\sin 20^0\sin 40^0\sin 80^0}{2\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0}$

$=\frac{\sqrt{3}\{\cos(40^0-20^0)-\cos(40^0+20^0)\}\sin(90^0-10^0)}{\{\cos(40^0+20^0)+\cos(40^0-20^0)\}\cos(90^0-10^0)}$

$=\sqrt{3}\frac{(\cos 20^0-\cos 60^0)\cos 10^0}{(\cos 60^0+\cos 20^0)\sin 10^0}$

$=\sqrt{3}\ \frac{\cos 20^0\cos 10^0-\frac{1}{2}\cos 10^0}{\frac{1}{2}\sin 10^0+\cos 20^0\sin 10^0}$

$$= \sqrt{3}\,\frac{\frac{1}{2}\{\cos(20^0+10^0)+\cos(20^0-10^0)\}-\frac{1}{2}\cos 10^0}{\frac{1}{2}\sin 10^0+\frac{1}{2}\{\sin(20^0+10^0)-\sin(20^0-10^0)\}}$$

$$= \sqrt{3}.\frac{\frac{1}{2}\cos 30^0+\frac{1}{2}\cos 10^0-\frac{1}{2}\cos 10^0}{\frac{1}{2}\sin 10^0+\frac{1}{2}\sin 30^0-\frac{1}{2}\sin 10^0}$$

$$= \sqrt{3}.\frac{\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4$$

$$= \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3 = \text{R.H.S.}$$

2.(a) $\cos\theta\ \cos(60°-\theta)\cos(60°+\theta) = \frac{1}{4}\cos 3\theta$

L.H.S. $= \cos\theta\cos(60°-\theta)\cos(60°+\theta)$

$= \cos\theta.\frac{1}{2}\{\cos(60°+\theta+60°-\theta)$

$+\cos(60°+\theta-60°+\theta)\}$

$= \frac{1}{2}\cos\theta(\cos 120°+\cos 2\theta)$

$= \frac{1}{2}\cos\theta(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\cos\theta\cos 2\theta$

$= -\frac{1}{4}\cos\theta+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\{\cos(2\theta+\theta)+\cos(2\theta-\theta)\}$

$= -\frac{1}{4}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{1}{4}\cos\theta$

$= \frac{1}{4}\cos 3\theta = $ R.H.S. (Proved)

2(b) $\cos(36°-\theta)\cos(36°+\theta)+$ $\cos(54°+\theta)\cos(54°-\theta) = \cos 2\theta$

L.H.S.$= \cos(36°-\theta)\cos(36°+\theta)+$
$\cos(54°+\theta)\cos(54°-\theta)$

$= \frac{1}{2}(\cos 72°+\cos 2\theta).+\frac{1}{2}(\cos 108°+\cos 2\theta)$

$= \frac{1}{2}\{\cos(90°-18°)+\cos 2\theta\}+$
$\frac{1}{2}\{\cos(90°+18°)+\cos 2\theta\}$

$= \frac{1}{2}(\cos 2\theta+\cos 18°)+\frac{1}{2}(\cos 2\theta-\cos 18°)$

$= \frac{1}{2}(\cos 2\theta+\cos 18°+\cos 2\theta-\cos 18°)$

$= \frac{1}{2}.2\cos 2\theta = \cos 2\theta = $ R.H.S. (Proved)

3. প্রমাণ কর যে,

(a) $\cos(60°-\theta)+\cos(60°+\theta)-\cos\theta = 0$

L.H.S. $= \cos(60°-\theta)+\cos(60°+\theta)-\cos\theta$

$= 2\cos 60°\cos\theta-\cos\theta$

$= 2.\frac{1}{2}\cos\theta-\cos\theta$

$= \cos\theta-\cos\theta = 0 = $ R.H.S. (Proved)

(b) $\sin\theta+\sin(120°+\theta)+\sin(240°+\theta) = 0$ [ঢা.'১২]

L.H.S.$= \sin\theta+\sin(120°+\theta)+\sin(240°+\theta)$

$= \sin\theta+\sin\{180°-(60°-\theta)\}+$
$\sin\{180°+(60°+\theta)\}$

$= \sin\theta+\sin(60°-\theta)-\sin(60°+\theta)$

$= \sin\theta-\{\sin(60°+\theta)-\sin(60°-\theta)\}$

$= \sin\theta-2\cos 60°\sin\theta = \sin\theta-2.\frac{1}{2}\sin\theta$

$= \sin\theta-\sin\theta = 0 = $ R.H.S. (Proved)

3(c) $\cos 70°-\cos 10°+\sin 40° = 0$

L.H.S. $= \cos 70°-\cos 10°+\sin 40°$

$= 2\sin\frac{1}{2}(70°+10°)\sin\frac{1}{2}(10°-70°)+\sin 40°$

$= 2\sin 40°\sin(-30°)+\sin 40°$

$= -2\sin 40°.(\frac{1}{2})+\sin 40°$

$= -\sin 40°+\sin 40° = 0 = $ R.H.S.

4(a) $\sin 18°+\cos 18° = \sqrt{2}\cos 27°$ [ব'১১]

L.H.S.$= \sin 18°+\cos 18°$

$= \sin(90°-72°)+\cos 18°$

$= \cos 72°+\cos 18°$

$= 2\cos\frac{1}{2}(72°+18°)\cos\frac{1}{2}(72°-18°)$

$= 2\cos 45^\circ \cos 27^\circ = 2.\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 27^\circ$

$= \sqrt{2}\cos 27^\circ$

4.(b) $\frac{\cos 10^0 - \sin 10^0}{\cos 10^0 + \sin 10^0} = \tan 35^\circ$

L.H.S.$= \frac{\cos 10^0 - \sin 10^0}{\cos 10^0 + \sin 10^0}$

$= \frac{\cos 10^0(1-\tan 10^0)}{\cos 10^0(1+\tan 10^0)} = \frac{\tan 45^0 - \tan 10^0}{1+\tan 45^0 \tan 10^0}$

$= \tan(45^\circ - 10^\circ) = \tan 35^\circ =$ R.H.S. (Proved)

5.(a) $\cot(A+15^\circ) - \tan(A-15^\circ) = \frac{4\cos 2A}{2\sin 2A + 1}$

L.H.S. $= \cot(A+15^\circ) - \tan(A-15^\circ)$

$= \frac{\cos(A+15^0)}{\sin(A+15^0)} - \frac{\sin(A-15^0)}{\cos(A-15^0)}$

$= \frac{\cos(A+15^0)\cos(A-15^0) - \sin(A+15^0)\sin(A-15^0)}{\sin(A+15^0)\cos(A-15^0)}$

$= \frac{\cos(A+15^0+A-15^0)}{\frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 30^0)} = \frac{2\cos 2A}{\sin 2A + \frac{1}{2}}$

$= \frac{4\cos 2A}{2\sin 2A + 1} =$ R.H.S. (Proved)

5(b) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$

$= 4\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ [য.'১২]

L.H.S. $= (\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$

$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta +$
$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin^2\alpha\sin\beta$

$= 1 + 1 + 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

$= 2\{1 + \cos(\alpha+\beta)\}$

$= 2.\ 2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

$= 4\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta) =$ R.H.S. (Prived)

5(c) $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} = 0$

L.H.S. $= 2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13}$

$= 2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + 2\cos\frac{1}{2}(\frac{5\pi}{13} + \frac{3\pi}{13})\cos\frac{1}{2}(\frac{5\pi}{13} - \frac{3\pi}{13})$

$= 2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + 2\cos\frac{4\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}$

$= 2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + 2\cos(\pi - \frac{9\pi}{13})\cos\frac{\pi}{13}$

$= 2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} - 2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}$

$= 0 =$ R.H.S. (Proved)

6. $\left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}\right)^n + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B}\right)^n$

$= 2\cot^n\frac{1}{2}(A-B)$ **অথবা 0 যখন n যথাক্রমে জোড় অথবা বিজোড় সংখ্যা।**

$\left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}\right)^n + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B}\right)^n$

$= \left(\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}\right)^n + \left(\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(B-A)}\right)^n$

$= \left(\cot\frac{1}{2}(A-B)\right)^n + \left(\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{-\sin\frac{1}{2}(A-B)}\right)^n$

$= \cot^n\frac{1}{2}(A-B) + \left(-\cot\frac{1}{2}(A-B)\right)^n$

$= \cot^n\frac{1}{2}(A-B) + (-1)^n\cot^n\frac{1}{2}(A-B)$

যখন n বিজোড় সংখ্যা,

$\cot^n\frac{1}{2}(A-B) + (-1)^n\cot^n\frac{1}{2}(A-B)$

$= \cot^n \frac{1}{2}(A-B) - \cot^n \frac{1}{2}(A-B) = 0$,

যখন n জোড় সংখ্যা,

$\cot^n \frac{1}{2}(A-B) + (-1)^n \cot^n \frac{1}{2}(A-B)$

$= \cot^n \frac{1}{2}(A-B) + \cot^n \frac{1}{2}(A-B)$

$= 2 \cot^n \frac{1}{2}(A-B)$

$\left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}\right)^n + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B}\right)^n =$

$2\cot^n \frac{1}{2}(A-B)$ অথবা o যখন যথাক্রমে জোড় অথবা বিজোড় সংখ্যা।

7. (a) $a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$ হলে দেখাও যে, $\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

দেওয়া আছে,

$a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$

$\Rightarrow a(\cos\alpha - \cos\beta) = b(\sin\beta - \sin\alpha)$

$\Rightarrow a.2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

$= b.2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\Rightarrow \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow \frac{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

[যোজন - বিয়োজন করে ।]

$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

$\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

7.(b) $\cos x = k\cos y$ হলে দেখাও যে, $\tan\frac{x+y}{2} = \frac{k-1}{k+1}\cot\frac{y-x}{2}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\cos x = k\cos y$

$\Rightarrow \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{k}{1} \Rightarrow \frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y} = \frac{k+1}{k-1}$

$\Rightarrow \frac{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y-x}{2}}{2\sin\frac{y-x}{2}\sin\frac{x+y}{2}} = \frac{k+1}{k-1}$

$\Rightarrow \frac{\cot\frac{y-x}{2}}{\tan\frac{x+y}{2}} = \frac{k+1}{k-1}$

$\tan\frac{x+y}{2} = \frac{k-1}{k+1}\cot\frac{x+y}{2}$

7(c) $\sin\theta = k\sin(\alpha-\theta)$ হলে দেখাও যে, $\tan(\theta - \frac{\alpha}{2}) = \frac{k-1}{k+1}\tan\frac{\alpha}{2}$ [সি.বো.০৩; কু.বো.০৮]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sin\theta = k\sin(\alpha-\theta)$

$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{k}{1}$

$\Rightarrow \frac{\sin\theta + \sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta - \sin(\alpha-\theta)} = \frac{k+1}{k-1}$

$\Rightarrow \frac{2\sin\frac{\theta+\alpha-\theta}{2}\cos\frac{\theta-\alpha+\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta+\alpha-\theta}{2}\sin\frac{\theta-\alpha+\theta}{2}} = \frac{k+1}{k-1}$

$\Rightarrow \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan(\theta-\frac{\alpha}{2})} = \frac{k+1}{k-1}$

$\tan(\theta - \frac{\alpha}{2}) = \frac{k-1}{k+1}\tan\frac{\alpha}{2}$ (Showed).

7(d) $\frac{\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\beta)} = \frac{a}{b}$ হলে দেখাও যে, $\frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta) = \sin^2(\theta+\alpha) - \sin^2(\theta+\beta)$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\frac{\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\beta)} = \frac{a}{b}$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\theta+\alpha)+\tan(\theta+\beta)}{\tan(\theta+\alpha)-\tan(\theta+\beta)} = \frac{a+b}{a-b}$$

[যোজন – বিয়োজন করে ।]

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}+\dfrac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}}{\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}-\dfrac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)+\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)-\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}}{\sin\{(\theta+\alpha)-(\theta+\beta)\}} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}\sin(\alpha-\beta) = \sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta) = \sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}\sin\{(\theta+\alpha)-(\theta+\beta)\}$$

$$\therefore \frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta) = \sin^2(\theta+\alpha)-\sin^2(\theta+\beta)$$

[$\because \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$]

8. $\dfrac{x}{\tan(\theta+\alpha)} = \dfrac{y}{\tan(\theta+\beta)} = \dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$ হলে

দেখাও যে, $\dfrac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta) + \dfrac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma) + \dfrac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha) = 0$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে ,

$$\frac{x}{\tan(\theta+\alpha)} = \frac{y}{\tan(\theta+\beta)} = \frac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$$

১ম ও ২য় অনুপাত হতে পাই,

$$\frac{}{\tan(\theta+\alpha)} = \frac{}{\tan(\theta+\beta)}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\beta)} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\theta+\alpha)+\tan(\theta+\beta)}{\tan(\theta+\alpha)-\tan(\theta+\beta)} = \frac{x+y}{x-y}$$

[যোজন – বিয়োজন করে ।]

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}+\dfrac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}}{\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}-\dfrac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)+\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)-\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}}{\sin\{(\theta+\alpha)-(\theta+\beta)\}} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y}\sin(\alpha-\beta) = \sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta) = \sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}\sin\{(\theta+\alpha)-(\theta+\beta)\}$$

$$\therefore \frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta) = \sin^2(\theta+\alpha)-\sin^2(\theta+\beta)$$

অনুরূপভাবে, $\dfrac{y}{\tan(\theta+\beta)} = \dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$

$$\Rightarrow \frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma) = \sin^2(\theta+\beta)-\sin^2(\theta+\gamma)$$

এবং $\dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)} = \dfrac{x}{\tan(\theta+\alpha)}$

$$\Rightarrow \frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha) = \sin^2(\theta+\gamma)-\sin^2(\theta+\alpha)$$

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta) + \frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma) + \frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha) = \sin^2(\theta+\alpha)-\sin^2(\theta+\beta)+\sin^2(\theta+\beta)-\sin^2(\theta+\gamma)+\sin^2(\theta+\gamma)-\sin^2(\theta+\alpha) = 0$$

9 (a) **$\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ হলে দেখাও যে, $A + B = \dfrac{\pi}{2}$** [সি.'০৯; চ.,দি.'১০; কু.'১২]

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$

$\Rightarrow \sin A - \sin B = \cos B - \cos A$

$\Rightarrow 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$

$$= 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)} = 1$$

$$\Rightarrow \tan\frac{1}{2}(A+B) = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore A+B = \frac{\pi}{2}$$

9(b) $\sin\theta + \sin\varphi = a$ এবং $\cos\theta + \cos\varphi = b$ হলে দেখাও যে, $\tan\frac{\theta-\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\sin\theta + \sin\varphi = a$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = a$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই ,

$$4\sin^2\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = a^2 \cdots (1)$$

এবং $\cos\theta + \cos\varphi = b$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = b$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই ,

$$4\cos^2\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = b^2 \cdots (2)$$

(1) ও (2) যোগ করে আমরা পাই ,

$$4\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)\{\sin^2\frac{1}{2}(\theta+\varphi) + \cos^2\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\} = a^2+b^2$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \frac{a^2+b^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sec^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \frac{4}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \frac{4}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \frac{4}{a^2+b^2} - 1$$

$$= \frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\therefore \tan\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$$

9.(c) cosec A + sec A = cosec B + sec B হলে দেখাও যে, $\tan A\tan B = \cot\frac{A+B}{2}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে ,

$$\text{cosec } A + \sec A = \text{cosec } B + \sec B$$

$$\Rightarrow \text{cosec } A - \text{cosec } B = \sec B - \sec A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin A} - \frac{1}{\sin B} = \frac{1}{\cos B} - \frac{1}{\cos A}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B - \sin A}{\sin A\sin B} = \frac{\cos A - \cos B}{\cos A\cos B}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B - \sin A}{\cos A - \cos B} = \frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}} = \tan A\tan B$$

$$\tan A\tan B = \cot\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

10. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = k = x\cos\beta + y\sin\beta$ হলে দেখাও যে,

$$\frac{x}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{y}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{k}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে ,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - k = 0 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x\cos\beta + y\sin\beta - k = 0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় সাহায্যে (1) ও (2) হতে আমরা পাই

$$\frac{x}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{y}{-\cos\beta + \cos\alpha}$$

$$= \frac{k}{\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$

$$= \frac{y}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} = \frac{k}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$

$$= \frac{y}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$

$$= \frac{k}{2\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$

$$\therefore \frac{x}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{y}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{k}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

11. $\sin\frac{\pi}{16}.\sin\frac{3\pi}{16}.\sin\frac{5\pi}{16}.\sin\frac{7\pi}{16}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\sin\frac{\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{16}\sin\frac{5\pi}{16}\sin\frac{7\pi}{16}$

$$= \frac{1}{4}(2\sin\frac{7\pi}{16}\sin\frac{\pi}{16})(2\sin\frac{5\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{16})$$

$$= \frac{1}{4}\{\cos(\frac{7\pi}{16}-\frac{\pi}{16}) - \cos(\frac{7\pi}{16}+\frac{\pi}{16})\}$$
$$\{\cos(\frac{5\pi}{16}-\frac{3\pi}{16}) - \cos(\frac{5\pi}{16}+\frac{3\pi}{16})\}$$

$$= \frac{1}{4}(\cos\frac{3\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{2})(\cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{1}{4}\{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}) - 0\}(\cos\frac{\pi}{8} - 0)$$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{8}\sin 2.\frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{16} \quad \text{(Ans.)}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

প্রমাণ কর যে,

1(a) $\cos 10° \cos 50° \cos 70° = \frac{\sqrt{3}}{8}$ [প্র.ভ.প.'৯৩]

L.H.S $= \cos 10° \cos 50° \cos 70°$

$$= \frac{1}{2}\{\cos(50°+10°) + \cos(50°-10°)\}$$
$\cos(90°-20°)$

$$= \frac{1}{2}(\cos 60° + \cos 40°)\sin 20°$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sin 20° + \frac{1}{2}\cos 40°\sin 20°$$

$$= \frac{1}{4}\sin 20° + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\{\sin(40°+20°) - \sin(40°-20°)\}$$

$$= \frac{1}{4}\sin 20° + \frac{1}{4}\sin 60° - \frac{1}{4}\sin 20°$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

1.(b) $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{3}{16}$

L.H.S $= \sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80°$

$$= \frac{1}{2}\{\cos(40°-20°) - \cos(40°+20°)\}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin 80°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(\cos 20° - \cos 60°)\sin(90°-10°)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(\cos 20° - \frac{1}{2})\cos 10°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 20°\cos 10° - \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{2}\{\cos(20°-10°) + \cos(20°+10°)\}$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10° + \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 30° - \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

1(c) $\cos 10° \cos 30° \cos 50° \cos 70° = \frac{3}{16}$

L.H.S. $= \cos 10° \cos 30° \cos 50° \cos 70°$

$$= \cos 10°.\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\{\cos(70°+50°) +$$

$\cos(70° - 50°)\}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}.\cos 10° \cos 120° + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 20° \cos 10°$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 10°.(-\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{1}{2}\{\cos(20°+10°) + \cos(20°-10°)\}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10° + \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 30° + \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10°$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16}$ = R.H.S. (Proved)

2(a) $4\cos\theta\cos(\frac{2\pi}{3}+\theta)\cos(\frac{4\pi}{3}+\theta) = \cos 3\theta$

LH.S. $= 4\cos\theta\cos(\frac{2\pi}{3}+\theta)\cos(\frac{4\pi}{3}+\theta)$

$= 4\cos\theta.\frac{1}{2}\{\cos(\frac{4\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+2\theta) + \cos(\frac{4\pi}{3}-\frac{2\pi}{3})\}$

$= 2\cos\theta\{\cos(2\pi+2\theta) + \cos\frac{2\pi}{3}\}$

$= 2\cos\theta\cos 2\theta + 2\cos\theta(-\frac{1}{2})$

$= \cos(2\theta+\theta) + \cos(2\theta-\theta) - \cos\theta$

$= \cos 3\theta + \cos\theta - \cos\theta$

$= \cos 3\theta =$ R.H.S. (Proved)

2(b) $\sin(45°+A)\sin(45°-A) = \frac{1}{2}\cos 2A$

L.H.S. $= \sin(45°+A)\sin(45°-A)$

$= \frac{1}{2}\{\cos(45°+A-45°+A) - \cos(45°+A+45°-A)\}$

$= \frac{1}{2}(\cos 2A - \cos 90°) = \frac{1}{2}(\cos 2A - 0)$

$= \frac{1}{2}\cos 2A =$ R.H.S. (Proved)

2(c) $4\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{A+B}{2}$ $= \cos A + \cos B + \cos C + \cos(A+B+C)$

L.H.S. $= 4\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

$= 2\{\cos\frac{1}{2}(B+C+C+A) + \cos\frac{1}{2}(B+C-C-A)\}\cos\frac{A+B}{2}$

$= 2\cos\frac{1}{2}(B+2C+A)\cos\frac{A+B}{2} + 2\cos\frac{1}{2}(B-A)\cos\frac{A+B}{2}$

$= \cos\frac{1}{2}(A+B+2C+A+B) + \cos\frac{1}{2}(A+B+2C-A-B) + \cos\frac{1}{2}(B-A+A+B) + \cos\frac{1}{2}(B-A-A-B)$

$= \cos(A+B+C) + \cos C + \cos B + \cos(-A)$

$= \cos A + \cos B + \cos C + \cos(A+B+C)$

= R.H.S. (Proved)

3(a) $\sin\theta + \sin(60°-\theta) - \sin(60°+\theta) = 0$

L.H.S. $= \sin\theta + \sin(60°-\theta) - \sin(60°+\theta)$

$= \sin\theta - \{\sin(60°+\theta) - \sin(60°-\theta)\}$

$= \sin\theta - 2\sin\theta\cos 60° = \sin\theta - 2(\frac{1}{2})\sin\theta$

$= \sin\theta - \sin\theta = 0 =$ R.H.S. (Proved)

(b) $\cos 40° + \cos 80° + \cos 160° = 0$

L.H.S. $= \cos 40° + \cos 80° + \cos 160°$

$= \cos 40° + 2\cos\frac{1}{2}(160°+80°)\cos\frac{1}{2}(160°-80°)$

$= \cos 40° + 2\cos 120°\cos 40°$

$= \cos 40° + 2(-\frac{1}{2})\cos 40°$

$= \cos 40° - \cos 40° = 0 =$ R.H.S.

4. $\sin 65° + \cos 65° = \sqrt{2}\cos 20°$

L.H.S. = $\sin 65° + \cos 65°$
$= \sin 65° + \cos(90° - 25°)$
$= \sin 65° + \sin 25°$
$= 2\sin\frac{1}{2}(65° + 25°)\cos(65° - 25°)$
$= 2\sin 45° \cos 20° = 2.\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 20°$
$= \sqrt{2}\cos 20° =$ R.H.S. (Proved)

5.(a) $\tan(\frac{\pi}{6}+\theta)\tan(\frac{\pi}{6}-\theta) = \frac{2\cos 2\theta - 1}{2\cos 2\theta + 1}$

L.H.S.$= \tan(\frac{\pi}{6}+\theta)\tan(\frac{\pi}{6}-\theta)$

$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{6}+\theta)\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{6}+\theta)\cos(\frac{\pi}{6}-\theta)}$$

$$= \frac{2\sin(\frac{\pi}{6}+\theta)\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)}{2\cos(\frac{\pi}{6}+\theta)\cos(\frac{\pi}{6}-\theta)}$$

$$= \frac{\cos(\frac{\pi}{6}+\theta-\frac{\pi}{6}+\theta)-\cos(\frac{\pi}{6}+\theta+\frac{\pi}{6}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{6}+\theta-\frac{\pi}{6}+\theta)+\cos(\frac{\pi}{6}+\theta+\frac{\pi}{6}-\theta)}$$

$$= \frac{\cos 2\theta - \cos\frac{\pi}{3}}{\cos 2\theta + \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\cos 2\theta - \frac{1}{2}}{\cos 2\theta + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2\cos 2\theta - 1}{2\cos 2\theta + 1} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

5.(b) $\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha-\beta-\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma) = 4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$

L.H.S.$= \sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha-\beta-\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma)$
$= \sin\{\alpha+(\beta+\gamma)\} + \sin\{\alpha-(\beta+\gamma)\} + \sin\{\alpha+(\beta-\gamma)\} + \sin\{\alpha-(\beta-\gamma)\}$
$= 2\sin\alpha\cos(\beta+\gamma) + 2\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)$
$= 2\sin\alpha\{\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)\}$
$= 2\sin\alpha .2\cos\beta\cos\gamma$
$= 4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma =$ R.H.S. (Prived)

6 $\sin x = k\sin y$ **হলে দেখাও যে,**

$$\tan\frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1}\tan\frac{x+y}{2}$$ [প্র.ভ.প.'১৭]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\sin x = k\sin y$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{k}{1} \Rightarrow \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{x+y}{2}}{\tan\frac{x-y}{2}} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\therefore \tan\frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1}\tan\frac{x+y}{2}$$

7. $x\sin\varphi = y\sin(2\theta+\varphi)$ **হলে দেখাও যে,**

$$\cot(\theta+\varphi) = \frac{x-y}{x+y}\cot\theta$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $x\sin\varphi = y\sin(2\theta+\varphi)$

$$\Rightarrow \frac{\sin(2\theta+\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(2\theta+\varphi)-\sin\varphi}{\sin(2\theta+\varphi)+\sin\varphi} = \frac{x-y}{x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\frac{2\theta+\varphi+\varphi}{2}\sin\frac{2\theta+\varphi-\varphi}{2}}{2\sin\frac{2\theta+\varphi+\varphi}{2}\cos\frac{2\theta+\varphi-\varphi}{2}} = \frac{x-y}{x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{\cot(\theta+\varphi)}{\cot\theta} = \frac{x-y}{x+y}$$

$$\therefore \cot(\theta+\varphi) = \frac{x-y}{x+y}\cot\theta \quad \text{(Showed)}$$

প্রশ্নমালা –VII D

প্রমাণ কর যে,

1. (a) $\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot\theta$

L.H.S.$= \frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{2\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \cot\theta =$ R.H.S. (proved)

1(b) $\sin 2x \tan 2x = \frac{4\tan^2 x}{1-\tan^4 x}$

L.H.S. $= \sin 2x \tan 2x$

$= \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \times \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$= \frac{4\tan^2 x}{1-\tan^4 x} =$ R.H.S. (proved)

1(c) $\tan\theta + 2\tan 2\theta + 4\tan 4\theta + 8\cot 8\theta = \cot\theta$ **[য.'০২; সি.'০৮]**

প্রমাণ ঃ $4\tan 4\theta + 8\cot 8\theta$

$= 4(\frac{\sin 4\theta}{\cos 4\theta} + 2\frac{\cos 8\theta}{\sin 8\theta})$

$= 4(\frac{\sin 4\theta}{\cos 4\theta} + \frac{2\cos 8\theta}{2\sin 4\theta\cos 4\theta})$

$= 4(\frac{\sin^2 4\theta + 1 - 2\sin^2 4\theta}{\sin 4\theta\cos 4\theta})$

$= 4 (\frac{1-\sin^2 4\theta}{\sin 4\theta\cos 4\theta}) = 4(\frac{\cos^2 4\theta}{\sin 4\theta\cos 4\theta})$

$= 4\cot 4\theta$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় ,

$2\tan 2\theta + 4\cot 4\theta = 2\cot 2\theta$ এবং

$\tan\theta + 2\cot 2\theta = \cot\theta$

L.H.S.$= \tan\theta + 2\tan 2\theta + 4\tan 4\theta + 8\cot 8\theta$

$= \tan\theta + 2\tan 2\theta + 4\cot 4\theta$

$= \tan\theta + 2\cot 2\theta = \cot\theta =$ R.H.S. (Proved)

2.(a) $4(\sin^3 10° + \cos^3 20°) = 3(\sin 10° + \cos 20°)$

L.H.S. $= 4(\sin^3 10° + \cos^3 20°)$

$= 4\sin^3 10° + 4\cos^3 20°$

$= 3\sin 10° - \sin(3.10°) + \cos(3.20°) + 3\cos 20°$

$= 3(\sin 10° + \cos 20°) - \sin 30° + \cos 60°$

$= 3(\sin 10° + \sin 20°) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$= 3(\sin 10° + \cos 20°) =$ R.H.S. (Proved)

(b) $\sin^2(60° + A) + \sin^2 A + \sin^2(60° - A) = \frac{3}{2}$

L.H.S. $= \sin^2(60° + A) + \sin^2 A + \sin^2(60 - A)$

$= \frac{1}{2}\{1 - \cos 2(60° + A) + 1 - \cos 2A + 1 - \cos 2(60° - A)\}$

$= \frac{1}{2}\{3 - \cos(120° + 2A) - \cos(120° - 2A) - \cos 2A\}$

$= \frac{1}{2}[3 - \{\cos(120° + 2A) + \cos(120° - 2A)\} - \cos 2A]$

$= \frac{1}{2}\{3 - 2.\cos 120°\cos 2A - \cos 2A\}$

$= \frac{1}{2}\{3 - 2(-\frac{1}{2})\cos 2A - \cos 2A\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos 2A - \cos 2A\} = \frac{3}{2} =$ R.H.S.

2(c) $\sin^2(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$ **[রা.'১১]**

L.H.S. $= \sin^2(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2})$

$= \frac{1}{2}\{1 - \cos 2(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2})\} - \frac{1}{2}\{1 - \cos 2(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2})\}$

$= \frac{1}{2}\{1 - \cos(\frac{\pi}{4} + \theta) - 1 + \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)\}$

$= \frac{1}{2}\{\cos(\frac{\pi}{4} - \theta) - \cos(\frac{\pi}{4} + \theta)\}$

$= \frac{1}{2}.2\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta =$ R.H.S.

2. (d) $\cos^2(A - 120°) + \cos^2 A + \cos^2(A + 120°) = 3/2$ **[ঢা.'০৩; কু.'০৭; য.'০৮]**

L.H.S. $= \cos^2(A - 120°) + \cos^2 A + \cos^2(A + 120°)$

$= \frac{1}{2}\{1 + \cos 2(A - 120°) + 1 + \cos 2A + 1 + \cos 2(A + 120°)\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos(2A - 240°) + \cos(2A + 240°) + \cos 2A\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + 2\cos 2A \cos 240° + \cos 2A\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + 2\cos 2A \cos(180° + 60°) + \cos 2A\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + 2\cos 2A(-\cos 60°) + \cos 2A\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + 2.\cos 2A(-\frac{1}{2}) + \cos 2A\}$

$= \frac{1}{2}(3 - \cos 2A + \cos 2A) = \frac{3}{2} =$ R.H.S.

2(e) $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2(\frac{\pi}{3} + \frac{A}{2}) + \cos^2(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}$

L.H.S. $= \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2(\frac{\pi}{3} + \frac{A}{2}) + \cos^2(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{3})$

$= \frac{1}{2}\{1 + \cos 2.\frac{A}{2} + 1 + \cos 2(\frac{\pi}{3} + \frac{A}{2}) + 1 + \cos 2(\frac{\pi}{3} - \frac{A}{2})\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos A + \cos(\frac{2\pi}{3} + A) + \cos(\frac{2\pi}{3} - A)\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos A + 2\cos\frac{2\pi}{3}\cos A\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos A + 2(-\frac{1}{2})\cos A\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos A - \cos A\} = \frac{3}{2} =$ R.H.S.

f) $\tan(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \tan(\alpha - \frac{\pi}{3}) = \frac{4\sin 2\alpha}{1 - 4\sin^2\alpha}$

L.H.S. $= \tan(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \tan(\alpha - \frac{\pi}{3})$

$= \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{3})}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})} + \frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{3})}{\cos(\alpha - \frac{\pi}{3})}$

$= \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{3})\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \cos(\alpha + \frac{\pi}{3})\sin(\alpha - \frac{\pi}{3})}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})\cos(\alpha - \frac{\pi}{3})}$

$= \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{3} + \alpha - \frac{\pi}{3})}{\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\frac{\pi}{3})} = \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + (-\frac{1}{2})}$

$= \frac{4\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha - 1} = \frac{4\sin 2\alpha}{2(1 - 2\sin^2\alpha) - 1}$

$= \frac{4\sin 2\alpha}{1 - 4\sin^2\alpha} =$ R.H.S. (Proved)

3.(a) $\cos^3 x + \cos^3(60° - x) + \cos^3(60° + x) = \frac{1}{4}(6\cos x - \cos 3x)$

L.H.S. $= \cos^3 x + \cos^3(60° - x) + \cos^3(60° + x)$

$= \frac{1}{4}\{3\cos x + \cos 3x + 3\cos(60° - x) + \cos 3(60° - x) + 3\cos(60° + x) + \cos 3(60° + x)\}$

$= \frac{1}{4}[3\{\cos x + \cos(60° + x) + \cos(60° - x)\} + \cos 3x + \cos(180° + 3x) + \cos(180° - 3x)]$

$= \frac{1}{4}[3(\cos x + 2\cos 60° \cos x) + \cos 3x - \cos 3x - \cos 3x]$

$= \frac{1}{4}[3(\cos x + 2.\frac{1}{2}\cos x) - \cos 3x]$

$= \frac{1}{4}(3.2\cos x - \cos 3x)$

$= \frac{1}{4}(6\cos x - \cos 3x) =$ R.H.S. (Proved)

(b) $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \cos^3 2x$ [য.'০৩]

L.H.S. $= \cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x$

$= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)\cos 3x +$

$\frac{1}{4}$ $(3 \sin x - \sin 3x) \sin 3x$

$= \frac{1}{4}$ $(\cos^2 3x + 3 \cos x \cos 3x +$

$3\sin x \sin 3x - \sin^2 3x)$

$= \frac{1}{4}\{\cos 2.3x + 3\cos(3x - x)\}$

$= \frac{1}{4}\{\cos 3.2x + 3\cos 2x\} = \cos^3 2x =$ R.H.S.

3. (c) $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

L.H.S. $= \cos^4 x = (\cos^2 x)^2$

$= \{\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\}^2$

$= \frac{1}{4}\{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\}$

$= \frac{1}{4}\{1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\}$

$= \frac{1}{4}\{1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x)\}$

$= \frac{1}{4}\{\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x)\}$

$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x =$ R.H.S.

3(d) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

L.H.S.$= \sin^4 x + \cos^4 x$

$= (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

$= 1^2 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x =$ R.H.S. (Proved)

4.(a) $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4\theta}}}$ [দি.'০৯; ঢা.'১৪]

L.H.S. $= \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{2}{2\cos\theta}$

$= \frac{2}{\sqrt{4\cos^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{2(1 + \cos 2\theta)}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2 + 2\cos 2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{4\cos^2 2\theta}}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 4\theta)}}} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4\theta}}}$

= R.H.S.

4.(b) $\frac{1}{\sin 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0} = 4$ [কু.'০৬; রা.'০৭; ঢা.'০৭; চ., ব.'০৮; দি.'১১; সি.'১২; য.'১৩]

L.H.S. $= \frac{1}{\sin 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}$

$= \frac{\cos 10^0 - \sqrt{3}\sin 10^0}{\sin 10^0 \cos 10^0}$

$= \frac{\frac{1}{2}\cos 10^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0}{\frac{1}{2}\sin 10^0 \cos 10^0}$

$= \frac{\cos 60^0 \cos 10^0 - \sin 60^0 \sin 10^0}{\frac{1}{4}\sin 20^0}$

$= \frac{4\cos(60^0 + 10^0)}{\sin(90^0 - 70^0)} = \frac{4\cos 70^0}{\cos 70^0} = 4 =$ R.H.S.

4(c) $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^0} - \frac{1}{\cos 20^0} = 4$ [ঢা.'১০;চ.'১৪]

L.H.S. $= \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^0} - \frac{1}{\cos 20^0}$

$= \frac{\sqrt{3}\cos 20^0 - \sin 20^0}{\sin 20^0 \cos 20^0}$

$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^0 - \frac{1}{2}\sin 20^0}{\frac{1}{2}\sin 20^0 \cos 20^0}$

$= \frac{\cos 30^0 \cos 20^0 - \sin 30^0 \sin 10^0}{\frac{1}{4}\sin 40^0}$

$= \frac{4\cos(30^0 + 20^0)}{\sin(90^0 - 50^0)} = \frac{4\cos 50^0}{\cos 50^0} = 4 =$ R.H.S.

5. (a) $\tan\theta = \frac{1}{7}$ এবং $\tan\varphi = \frac{1}{3}$ হলে দেখাও যে, $\cos 2\theta = \sin 4\varphi$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\tan\theta = \frac{1}{7}$, $\tan\varphi = \frac{1}{3}$.

$$\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-(1/7)^2}{1+(1/7)^2}$$

$$= \frac{1-1/49}{1+1/49} = \frac{49-1}{49+1} = \frac{48}{50} = \frac{24}{25}$$

$$\sin 4\varphi = 2\sin 2\varphi\cos 2\varphi$$

$$= 2\frac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}\frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}$$

$$= \frac{4.\frac{1}{3}(1-\frac{1}{9})}{(1+\frac{1}{9})^2} = \frac{4.\frac{1}{3}.\frac{8}{9}}{(\frac{10}{9})^2} = \frac{32}{27}\times\frac{81}{100} = \frac{24}{25}$$

$\cos 2\theta = \sin 4\varphi$ (Showed)

5.(b) $2\tan\alpha = 3\tan\beta$ হলে প্রমাণ কর যে, $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $2\tan\alpha = 3\tan\beta$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{2}\tan\beta$$

$$\text{L.H.S.} = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{(\frac{3}{2}-1)\tan\beta}{1+\frac{3}{2}\tan^2\beta} = \frac{\tan\beta}{2+3\tan^2\beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{2+3\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}} = \frac{\sin\beta\cos\beta}{2\cos^2\beta+3\sin^2\beta}$$

$$= \frac{2\sin\beta\cos\beta}{2.2\cos^2\beta+3.2\sin^2\beta}$$

$$= \frac{\sin 2\beta}{2(1+\cos 2\beta)+3(1-\cos 2\beta)}$$

$$= \frac{\sin 2\beta}{2+2\cos 2\beta+3-3\cos 2\beta} = \frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}$$

= R.H.S. (Proved)

6.(a) $x = \sin\frac{\pi}{18}$ হলে দেখাও যে,

$$8x^4+4x^3-6x^2-2x+\frac{1}{2} = 0$$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, $4\sin^3\theta = 3\sin\theta - \sin 3\theta$

$$\therefore\ 4\sin^3\frac{\pi}{18} = 3\sin\frac{\pi}{18} - \sin 3\frac{\pi}{18}$$

$$\Rightarrow 4x^3 = 3x - \sin\frac{\pi}{6} \qquad [\ x = \sin\frac{\pi}{18}]$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$$

এখন, $8x^4+4x^3-6x^2-2x+\frac{1}{2}$

$$= 2x(4x^3-3x+\frac{1}{2}) + 1(4x^3-3x+\frac{1}{2})$$

$$= 2x\times 0 + 1\times 0 = 0 \quad \text{(Showed)}$$

6(b) প্রমাণ কর ঃ $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ [রা.'১১]

প্রমাণ ঃ $\cos 5\theta = \cos(3\theta+2\theta)$

$= \cos 3\theta\cos 2\theta - \sin 3\theta\sin 2\theta$

$= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta).\ 2\sin\theta\cos\theta$

$= 8\cos^5\theta - 6\cos^3\theta - 4\cos^3\theta + 3\cos\theta - 2\cos\theta(3\sin^2\theta - 4\sin^4\theta)$

$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta - 2\cos\theta\{3(1-\cos^2\theta) - 4(1-\cos^2\theta)^2\}$

$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta - 2\cos\theta\{3 - 3\cos^2\theta - 4(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta)\}$

$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta - (6\cos\theta - 6\cos^3\theta - 8\cos\theta + 16\cos^3\theta - 8\cos^5\theta)$

$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta - 6\cos\theta + 6\cos^3\theta + 8\cos\theta - 16\cos^3\theta + 8\cos^5\theta$

$\therefore \cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

7.(a) $\tan\alpha\tan\beta = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ হলে প্রমাণ কর যে , $(a - b\cos 2\alpha)(a - b\cos 2\beta) = a^2 - b^2$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\tan\alpha\tan\beta = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

$\Rightarrow \tan^2\alpha\tan^2\beta = \frac{a-b}{a+b}$

$\Rightarrow (a-b) = (a+b)\tan^2\alpha\tan^2\beta \cdots\cdots(1)$

L.H.S = $(a - b\cos 2\alpha)(a - b\cos 2\beta)$

$= \left\{a - b\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right\}\left\{a - b\frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}\right\}$

$= \frac{a + a\tan^2\alpha - b + b\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \times \frac{a + a\tan^2\beta - b + b\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}$

$= \frac{(a-b)+(a+b)\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \times \frac{(a-b)+(a+b)\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}$

$= \frac{(a+b)\tan^2\alpha\tan^2\beta + (a+b)\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \times \frac{(a+b)\tan^2\alpha\tan^2\beta + (a+b)\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}$

$= \frac{(a+b)\tan^2\alpha(\tan^2\beta+1)}{1+\tan^2\alpha} \times \frac{(a+b)\tan^2\alpha(\tan^2\beta+1)}{1+\tan^2\beta}$

$= (a+b)^2\tan^2\alpha\tan^2\beta = (a+b)^2\ \frac{a-b}{a+b}$

$= a^2 - b^2 =$ R.H.S. (Proved)

7. (b) যদি α ও β কোণদ্বয় ধনাত্মক ও সূক্ষ্ম এবং $\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta - 1}{3-\cos 2\beta}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan\alpha = \pm\sqrt{2}\tan\beta$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta - 1}{3-\cos 2\beta}$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{3-\cos 2\beta}{3\cos 2\beta - 1}$

$\Rightarrow \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{3-\cos 2\beta - 3\cos 2\beta + 1}{3 - \cos 2\beta + 3\cos 2\beta - 1}$

$\Rightarrow \frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{4(1-\cos 2\beta)}{2(1+\cos 2\beta)}$

$\Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{2.2\sin^2\beta}{2\cos^2\beta} = 2\tan^2\beta$

$\therefore \tan\alpha = \pm\sqrt{2}\tan\beta$ (Showed)

7(c) $\cos A\sin(A - \frac{\pi}{6})$ এর মান বৃহত্তম হলে A এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\cos A\sin(A - \frac{\pi}{6})$

$= \frac{1}{2}.2\cos A\cos(A - \frac{\pi}{6})$

$= \frac{1}{2}\{\sin(A + A - \frac{\pi}{6}) - \sin(A - A + \frac{\pi}{6})\}$

$= \frac{1}{2}\{\sin(2A - \frac{\pi}{6}) - \sin\frac{\pi}{6}\}$

$= \frac{1}{2}\{\sin(2A - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}\}$

ইহা বৃহত্তম হলে , $\sin(2A - \frac{\pi}{6}) = 1$

$\Rightarrow \sin(2A - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore 2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2A = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi+\pi}{6}$

$\Rightarrow 2A = \frac{4\pi}{6}\ \therefore A = \frac{\pi}{3}$ (Ans.)

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

প্রমাণ কর যে,

1(a) $\tan\theta(1 + \sec 2\theta) = \tan 2\theta$

L.H.S.= $\tan\theta(1 + \sec 2\theta)$

$= \tan\theta(1 + \frac{1}{\cos 2\theta})$

$= \tan\theta(1 + \frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta})$

$= \tan\theta(\frac{1-\tan^2\theta + 1 + \tan^2\theta}{1-\tan^2\theta})$

$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan 2\theta =$ R.H.S. (proved)

1.(b) $\dfrac{\sin A + \sin 2A}{1+\cos A + \cos 2A} = \tan A$

L.H.S.= $\dfrac{\sin A + \sin 2A}{1+\cos A + \cos 2A}$

$= \dfrac{\sin A + 2\sin A\cos A}{1+\cos A + 2\cos^2 A - 1}$

$= \dfrac{\sin A(1+2\cos A)}{\cos A(1+2\cos A)} = \tan A =$ R.H.S.

1(c) $\dfrac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos x + \sin x} = 1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x$

L.H.S.= $\dfrac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos x + \sin x}$

$= \dfrac{(\cos x + \sin x)(\cos^2 x + \sin^2 x - \cos x \sin x)}{\cos x + \sin x}$

$= 1 - \cos x \sin x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x =$ R.H.S.

2. $\dfrac{\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4}) - 1}{\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4}) + 1} = \sin 2\theta$

L.H.S.= $\dfrac{\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4}) - 1}{\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4}) + 1}$

$= -\dfrac{1-\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4})}{1+\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4})} = -\cos 2(\theta + \dfrac{\pi}{4})$

$= -\cos(\dfrac{\pi}{2} + 2\theta) = -(-\sin 2\theta)$

$= \sin 2\theta =$ R.H.S (Proved)

3 $4\cos^3 x \sin 3x + 4\sin^3 x \cos 3x = 3\sin 4x$

L.H.S. = $4\cos^3 \sin 3x + 4\sin^3 x\cos 3x$

$= (\cos 3x + 3\cos x)\sin 3x + (3\sin x - \sin 3x)\cos 3x$

$= \cos 3x \sin 3x - \sin 3x \cos 3x + 3(\sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x)$

$= 3\sin(3x + x)$

$= 3\sin 4x =$ R.H. S **(Proved)**

4. $\tan^2\theta = 1 + 2\tan^2\varphi$ হলে দেখাও যে, $\cos 2\varphi = 1 + 2\cos 2\theta$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan^2\theta = 1 + 2\tan^2\varphi$

এখন, $1 + 2\cos 2\theta = 1 + 2\dfrac{1-\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \dfrac{1+\tan^2\theta + 2 - 2\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{3-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$= \dfrac{3-1-2\tan^2\varphi}{1+1+2\tan^2\varphi} = \dfrac{2(1-\tan^2\varphi)}{2(1+\tan^2\varphi)}$

$= \dfrac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi} = \cos 2\varphi$

$\cos 2\varphi = 1 + \cos 2\theta$ (Showed)

বিকল্প পদ্ধতি: দেওয়া আছে, $\tan^2\theta = 1 + 2\tan^2\varphi$

$\Rightarrow \tan^2\theta - 1 = 2\tan^2\varphi$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\tan^2\varphi} = \dfrac{2}{\tan^2\theta - 1}$

$\Rightarrow \dfrac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi} = \dfrac{2-\tan^2\theta+1}{2+\tan^2\theta-1}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \cos 2\varphi = \dfrac{3-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$= \dfrac{1+\tan^2\theta + 2(1-\tan^2\theta)}{1+\tan^2\theta}$

$= \dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} + 2\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\therefore \cos 2\varphi = 1 + 2\cos 2\theta$

5. $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{1}{x})$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{2}(x^2 + \dfrac{1}{x^2})$, $\cos 3\alpha = \dfrac{1}{2}(x^3 + \dfrac{1}{x^3})$, $\cos 4\alpha = \dfrac{1}{2}(x^4 + \dfrac{1}{x^4})$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{1}{x})$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$= 2.\left(\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})\right)^2 - 1$$

$$= 2.\frac{1}{4}(x^2 + 2.x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) - 1$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2) = \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{x^2})$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{x^2})$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})\right)^3 - 3.\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$$

$$= 4.\frac{1}{8}(x^3 + 3x^2.\frac{1}{x} + 3x\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})$$

$$- 3.\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$$

$$= \frac{1}{2}(x^3 + 3x + 3.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - 3x - 3.\frac{1}{x})$$

$$= \frac{1}{2}(x^3 + \frac{1}{x^3})$$

$$\therefore \cos 3\alpha = \frac{1}{2}(x^3 + \frac{1}{x^3})$$

$$\cos 4\alpha = \cos 2.2\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$$

$$= 2.\{\frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{x^2})\}^2 - 1$$

$$= \frac{1}{2}(x^4 + 2.x^2\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}) - 1$$

$$= \frac{1}{2}(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} - 2)$$

$$\cos 4\alpha = (x^4 + \frac{1}{x^4})$$

6 $\tan\theta = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x \tan y}$ **হলে দেখাও যে,**

$$\sin 2\theta = \frac{\sin 2x + \sin 2y}{1 + \sin 2x . \sin 2y}$$

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $\tan\theta = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$$= \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin y}{\cos y}}{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}\dfrac{\sin y}{\cos y}} = \frac{\sin x\cos y + \sin y\cos x}{\cos x\cos y + \sin x\sin y}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}$$

$$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}}{1 + \{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}\}^2}$$

$$= \frac{2\sin(x+y)}{\cos(x-y)} \times \frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x-y) + \sin^2(x+y)}$$

$$= \frac{2\sin(x+y)\cos(x-y)}{\frac{1}{2}\{1+\cos 2(x-y)\} + \frac{1}{2}\{1-\cos 2(x+y)\}}$$

$$= \frac{\sin(x+y+x-y) + \sin(x+y-x+y)}{\frac{1}{2}\{2 + \cos 2(x-y) - \cos 2(x+y)\}}$$

$$= \frac{\sin 2x + \sin 2y}{1 + \frac{1}{2}.2\sin\frac{2(x-y)+2(x+y)}{2}\sin\frac{2(x+y)-2(x-y)}{2}}$$

$$\therefore \sin 2\theta = \frac{\sin 2x + \sin 2y}{1 + \sin 2x + \sin 2y} \quad \text{(Showed)}$$

7. $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ **হলে দেখাও যে,**

$$x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = x.$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$$x\cos 2\theta + y\sin 2\theta$$

$$= x\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} + y\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$= x\frac{1-\dfrac{y^2}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} + y\frac{2\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}$$

$$= x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y(\frac{2y}{x} \times \frac{x^2}{x^2+y^2})$$

$$= \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{x^3 - xy^2 + 2xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{x(x^2 + y \ )}{x^2 + y^2}$$

$x \cos 2\theta + y \sin 2\theta = x$ (Showed)

৮. $\sqrt{2}$ cosA=cosB+ $\cos^3$B এবং $\sqrt{2}$ sinA = sinB−$\sin^3$B হলে দেখাও যে, $\sin(A-B) = \pm\frac{1}{3}$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sqrt{2}\cos A = \cos B + \cos^3 B$

$\sqrt{2}\sin A = \sin B - \sin^3 B$

$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin B - \sin^3 B)\cos B -$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin B(\cos B + \cos^3 B)$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(A-B) = \sin B\cos B - \sin^3 B\cos B$
$- \sin B\cos B - \sin B\cos^3 B$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(A-B = -\sin B\cos B(\sin^2 B + \cos^2 B)$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(A-B) = -\frac{1}{2}\sin 2B$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}\sin(A-B) = -\sin 2B \cdots\cdots (1)$

$\sqrt{2}\cos(A-B) = \sqrt{2}\cos A\cos B - \sqrt{2}\sin A\sin B$

$= (\cos B + \cos^3 B)\cos B - \sin B(\sin B - \sin^3 B)$

$= \cos^2 B + \sin^2 B + \cos^4 B - \sin^4 B$

$= 1 + (\cos^2 B + \sin^2 B)(\cos^2 B - \sin^2 B)$

$\sqrt{2}\cos(A-B) = 1 + \cos 2B$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos(A-B) - 1 = \cos 2B \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

(1) ও (2) বর্গ করে যোগ করলে আমরা পাই,

$(2\sqrt{2})^2\sin^2(A-B) + (\sqrt{2})^2\cos^2(A-B) +$
$1 - 2\sqrt{2}\cos(A-B) = \sin^2 2B + \cos^2 2B$

$\Rightarrow 8\{1 - \cos^2(A-B)\} + 2\cos^2(A-B)$
$+ 1 - 2\sqrt{2}\cos(A-B) = 1$

$\Rightarrow 8 - 8\cos^2(A-B) + 2\cos^2(A-B)$
$-2\sqrt{2}\cos(A-B) = 0$

$\Rightarrow 6\cos^2(A-B) - 2\sqrt{2}\cos(A-B) - 8 = 0$

$\Rightarrow 3\cos^2(A-B) - \sqrt{2}\cos(A-B) - 4 = 0$

$\Rightarrow 3\cos^2(A-B) - 3\sqrt{2}\cos(A-B)$
$+ 2\sqrt{2}\cos(A-B) - 4 = 0$

$\Rightarrow 3\cos(A-B)\{\cos(A-B) - \sqrt{2}\}$
$+ 2\sqrt{2}\{\cos(A-B) - \sqrt{2}\} = 0$

$\Rightarrow \{\cos(A-B) - \sqrt{2}\}\{3\cos(A-B) + 2\sqrt{2}\} = 0$

$\therefore \cos(A-B) = \sqrt{2}$ অথবা, $\cos(A-B) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

কিন্তু $-1 \le \cos\theta \le 1$ বলে $\cos(A-B) \neq \sqrt{2}$

$\therefore \cos(A-B) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \sin(A-B) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(A-B)}$

$= \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{8}{9}}$

$\therefore \sin(A-B) = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$

9. দেখাও যে, $\frac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta} = (1 + \sec 2\theta)(1 + \sec 2^2\theta)(1 + \sec 2^3\theta)\cdots\cdots(1 + \sec 2^n\theta)$

প্রমাণ ঃ $\tan\theta(1 + \sec 2\theta) = \tan\theta\left(1 + \frac{1 + \tan^2\theta}{1 - \tan^2\theta}\right) = \tan\theta\left(\frac{1 - \tan^2\theta + 1 + \tan^2\theta}{1 - \tan^2\theta}\right)$

$= \tan\theta\frac{2}{1 - \tan^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \tan 2\theta$

$\therefore \frac{\tan 2\theta}{\tan\theta} = 1 + \sec 2\theta$

অনুরূপভাবে আমরা পাই, $\frac{\tan 2^2\theta}{\tan 2\theta} = 1 + \sec 2^2\theta$, $\frac{\tan 2^3\theta}{\tan 2^2\theta} = 1 + \sec 2^3\theta, \cdots, \frac{\tan 2^n\theta}{\tan 2^{n-1}\theta} = 1 + \sec 2^n\theta$

$\therefore$

$\frac{\tan 2\theta}{\tan\theta}\cdot\frac{\tan 2^2\theta}{\tan 2\theta}\cdot\frac{\tan 2^3\theta}{\tan 2^2\theta}\cdots\cdots\frac{\tan 2^n\theta}{\tan 2^{n-1}\theta} =$
$(1 + \sec 2\theta)(1 + \sec 2^2\theta)$

$(1+\sec 2^3\theta)\cdots\cdots(1+\sec 2^n\theta)$

$\Rightarrow \dfrac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta} = (1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots\cdots\cdots(1+\sec 2^n\theta)$

10.(a) দেখাও যে, $\dfrac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos\theta+1} = (2\cos\theta-1)(2\cos 2\theta-1)(2\cos 2^2\theta-1)\cdots(2\cos 2^{n-1}-1)$

প্রমাণ : আমরা পাই,

$(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1) = 4\cos^2\theta-1$

$= 4\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)-1 = 2+2\cos 2\theta-1$

$2\cos\theta-1 = \dfrac{2\cos 2\theta+1}{2\cos\theta+1}$

অনুরূপভাবে,

$2\cos 2\theta-1 = \dfrac{2\cos 2^2\theta+1}{2\cos 2\theta+1}$

$2\cos 2^2\theta-1 = \dfrac{2\cos 2^3\theta+1}{2\cos 2^2\theta+1}$

$2\cos 2^{n-1}\theta-1 = \dfrac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos 2^{n-1}\theta+1}$

গুণ করে আমরা পাই,

$(2\cos\theta-1)(2\cos 2\theta-1)(2\cos 2^2\theta-1)\cdots\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta-1)$

$\dfrac{2\cos 2\theta+1}{2\cos\theta+1}\cdot\dfrac{2\cos 2^2\theta+1}{2\cos 2\theta+1}\cdot\dfrac{2\cos 2^3\theta+1}{2\cos 2^2\theta+1}\cdots\cdots\cdots\dfrac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos 2^{n-1}\theta+1} = \dfrac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}$

$\dfrac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos\theta+1} = (2\cos\theta-1)((2\cos 2\theta-1)(2\cos 2^2\theta-1)\cdots\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta-1)$

10.(b) $13\theta=\pi$ হলে দেখাও যে, $\cos\theta.\cos 2\theta.\cos 3\theta.\cos 4\theta.\cos 5\theta.\cos 6\theta = \dfrac{1}{2^6}$

প্রমাণ : $\cos\theta\cos 2\theta\cos 3\theta\cos 4\theta\cos 5\theta\cos 6\theta$

আমরা জানি, $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$

$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

$\therefore \sin\theta\cos\theta\cos 2\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta\cos 2\theta$

$= \frac{1}{2^2}\sin 4\theta$

অনুরূপভাবে, $\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta.\cos 4\theta = \frac{1}{2^3}\sin 8\theta$

$\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta.\cos 4\theta\cos 8\theta = \frac{1}{2^3}\sin 16\theta$

$\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta.\cos 4\theta\cos 8\theta\cos 16\theta\cos 32\theta = \frac{1}{2^6}\sin 64\theta$

$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta\cos 2\theta.\cos 4\theta\cos(13\theta-5\theta)\cos(13\theta+3\theta)\cos(26\theta+6\theta) = \frac{1}{2^6}\sin(65\theta-\theta)$

$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta\cos 2\theta.\cos 4\theta\cos(\pi-5\theta)\cos(\pi+3\theta)\cos(2\pi+6\theta) = \frac{1}{2^6}\sin(5\pi-\theta)$

$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta\cos 2\theta.\cos 4\theta(-\cos 5\theta)(-\cos 3\theta).\cos 6\theta = \frac{1}{2^6}(\sin\theta)$

$\therefore \cos\theta\cos 2\theta\cos 3\theta\cos 4\theta\cos 5\theta\cos 6\theta = \frac{1}{2^6}$ (Showed)

10.(c) $\theta = \dfrac{\pi}{2^n+1}$ হলে প্রমাণ কর যে, $2^n\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cdots\cdots\cdots\cos 2^{n-1}\theta = 1$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\theta = \dfrac{\pi}{2^n+1} \Rightarrow 2^n\theta+\theta = \pi$

$\Rightarrow 2^n\theta = \pi-\theta \Rightarrow \sin 2^n\theta = \sin(\pi-\theta)$

$\Rightarrow 2\sin 2^{n-1}\theta\cos 2^{n-1}\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow 2\cos 2^{n-1}\theta(2\sin 2^{n-2}\theta\cos 2^{n-2}\theta) = \sin\theta$

$\Rightarrow 2^2\cos 2^{n-1}\theta\cos 2^{n-2}\theta\sin 2^{n-2}\theta = \sin\theta$

$$\Rightarrow 2^n \cos 2^{n-1}\theta \cos 2^{n-2}\theta \cos 2^{n-3}\theta \cdots \sin 2^{n-n}\theta \cos 2^{n-n}\theta = \sin\theta$$

$$\Rightarrow 2^n \cos 2^{n-1}\theta \cos 2^{n-2}\theta \cos 2^{n-3}\theta \cdots \sin 2^{0}\theta \cos 2^{0}\theta = \sin\theta$$

$$\Rightarrow 2^n \cos 2^{n-1}\theta \cos 2^{n-2}\theta \cos 2^{n-3}\theta \cdots \sin\theta \cos\theta = 1$$

$$2^n \cos\theta \,.\, \cos 2\theta . \cos 2^2\theta \,\cdots \cos 2^{n-1}\theta = 1$$

(Showed)

প্রশ্নমালা –VII E

প্রমাণ কর যে,

1. (a) $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x} = \tan^2(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2})$

L.H.S.$= \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$$= \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})^2}{(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})^2} = \left(\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}\right)^2 = \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) = \text{R.H.S}$$

1. (b) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \cos^2(\dfrac{\alpha}{2} - 60°) + \cos^2(\dfrac{\alpha}{2} + 60°) = \dfrac{3}{2}$

L.H.S. $= \cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \cos^2(\dfrac{\alpha}{2} - 60°) + \cos^2(\dfrac{\alpha}{2} + 60°)$

$$= \frac{1}{2}\{1 + \cos 2.\frac{\alpha}{2} + 1 + \cos 2.(\frac{\alpha}{2} - 60°) + 1 + \cos 2(\frac{\alpha}{2} + 60°)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{3 + \cos\alpha + \cos(\alpha - 120°) + \cos(\alpha + 120°)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{3 + \cos\alpha + 2\cos\alpha\cos 120°\}$$

$$= \frac{1}{2}\{3 + \cos\alpha + 2\cos\alpha.(-\frac{1}{2})\}$$

$$= \frac{1}{2}\{3 + \cos\alpha - \cos\alpha\} = \frac{3}{2}$$

1.(c) $\sin^2(\dfrac{\alpha}{2} - 36°) + \sin^2(\dfrac{\alpha}{2} + 36°)$ $= \dfrac{1}{4}\{4 - (\sqrt{5} - 1)\cos\alpha\}$

L.H.S.$= \sin^2(\dfrac{\alpha}{2} - 36°) + \sin^2(\dfrac{\alpha}{2} + 36°)$

$$= \frac{1}{2}\{1 - \cos 2(\frac{\alpha}{2} - 36°) + 1 - \cos 2(\frac{\alpha}{2} + 36°)\}$$

$$= \frac{1}{2}[2 - \{\cos(\alpha - 72°) + \cos(\alpha + 72°)\}]$$

$$= \frac{1}{2}\{2 - 2\cos\alpha\cos 72°\} = 1 - \cos\alpha\cos 72°$$

$$= 1 - \cos\alpha.\cos(90° - 18°)$$

$$= 1 - \cos\alpha\sin 18°$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{4}\{4 - (\sqrt{5} - 1)\cos\alpha\} = \text{R.H.S.}$$ (Proved)

2.(a) $2\cos\dfrac{\pi}{16} = 2\cos 11°15'$ $= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ [কু.'০৭,'১৩; চ.'০১; রা.'০৩]

R.H.S.$= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

$$= \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})}} = \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})}}$$

$$= \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 45^0)}}$$

$$= \sqrt{2 + \sqrt{2.2\cos^2 22^0 30'}}$$

$$= \sqrt{2 + 2\cos 22^0 30'} = \sqrt{2(1 + \cos 22^0 30')}$$

$$= \sqrt{2.2\cos^2 11^0 15'} = 2\cos 11°15' = \text{M.H.S.}$$

আবার , $2\cos\frac{\pi}{16} = 2\cos 11^\circ 15'$

$$2\cos\frac{\pi}{16} = 2\cos 11^\circ 15' = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

2. (b) $\cos(7\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

[রা '০২; কু.,চ.'১০]

R.H.S.= $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2(1+\frac{\sqrt{3}}{2})}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 30^0)}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2.2\cos^2 15^0)}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos 15^0}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2(1+\cos 15^0)} = \frac{1}{2}\sqrt{2.2\cos^2(7\frac{1}{2})^0}$

$= \frac{1}{2}.2\cos(7\frac{1}{2})^0 = \cos(7\frac{1}{2})^0 =$ RH.S.

2(c) $\tan(7\frac{1}{2})^0 = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

L.H.S. $= \tan(7\frac{1}{2})^0 = \tan 7^0 30'$

$= \frac{\sin 7^0 30'}{\cos 7^0 30'} = \frac{2\sin^2 7^0 30'}{2\sin 7^0 30' \cos 7^0 30'}$

$= \frac{1-\cos 15^0}{\sin 15^0} = \frac{1-\cos(45^0-30^0)}{\sin(45^0-30^0)}$

$= \frac{1-(\cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0)}{\sin 45^0 \cos 30^0 - \cos 45^0 \sin 30^0}$

$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$

$= \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$= \frac{2\sqrt{6}-3-\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{3-1}$

$= \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}-4-2\sqrt{3}}{2}$

$= \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2 =$ R.H.S (Proved)

3. $\frac{\sec\alpha - \tan\alpha}{\sec\alpha + \tan\alpha} = \cot^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})$

L.H.S. $= \frac{\sec\alpha - \tan\alpha}{\sec\alpha + \tan\alpha}$

$= \frac{\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$

$= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$

$= \frac{(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2})^2}{(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2})^2} = \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}(\cot\frac{\alpha}{2}-1)}{\cos\frac{\alpha}{2}(\cot\frac{\alpha}{2}+1)}\right)^2$

$= \left(\frac{\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\pi}{2}-1}{\cot\frac{\pi}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \left(\cot(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2})\right)^2$

$= \cot^2(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}) =$ R.H.S. (Proved)

4. $\cos\theta = \frac{a\cos\varphi - b}{a-b\cos\varphi}$ হলে দেখাও যে,

$$\frac{\tan\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{a+b}} = \frac{\tan\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{a-b}}$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\cos\theta = \frac{a\cos\varphi - b}{a-b\cos\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{a\frac{1-\tan^2\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}}-b}{a-b\frac{1-\tan^2\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}}}$$

$$\text{or, } \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{a(1-\tan^2\frac{\varphi}{2})-b(1+\tan^2\frac{\varphi}{2})}{a(1+\tan^2\frac{\varphi}{2})-b(1-\tan^2\frac{\varphi}{2})}$$

$$\text{or, } \frac{2}{-2\tan^2\frac{\theta}{2}} =$$

$$\frac{a(1-\tan^2\frac{\varphi}{2}+1+\tan^2\frac{\varphi}{2})-b(1+\tan^2\frac{\varphi}{2}+1-\tan^2\frac{\varphi}{2})}{a(1-\tan^2\frac{\varphi}{2}-1-\tan^2\frac{\varphi}{2})-b(1+\tan^2\frac{\varphi}{2}-1+\tan^2\frac{\varphi}{2})}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2a-2b}{-2a\tan^2\frac{\varphi}{2}-2b\tan^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{a-b}{(a+b)\tan^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan^2\frac{1}{2}\theta}{a+b} = \frac{\tan^2\frac{1}{2}\varphi}{a-b}$$

$$\therefore \frac{\tan\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{a+b}} = \frac{\tan\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{a-b}} \quad \text{(Showed)}$$

5. (a) $\sec(\theta+\alpha)+\sec(\theta-\alpha) = 2\sec\theta$ হলে দেখাও যে , $\cos\theta = \pm\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

প্রমাণ ঃ $\sec(\theta+\alpha)+\sec(\theta-\alpha) = 2\sec\theta$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos(\theta+\alpha)}+\frac{1}{\cos(\theta-\alpha)} = \frac{2}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\theta-\alpha)+\cos(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)} = \frac{2}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\theta\cos\alpha}{\cos^2\theta-\sin^2\alpha} = \frac{2}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta\cos\alpha = \cos^2\theta - \sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta\,(1-\cos\alpha) = \sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha} = 1+\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \cos\theta = \pm\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{(Showed)}$$

5(b) $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sin B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে দেখাও যে , $\tan\frac{A+B}{2}\cot\frac{A-B}{2} = 5+2\sqrt{6}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sin B = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \text{ [যোজন-বিয়োজন করে]}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow \tan(\frac{A+B}{2})\cot(\frac{A-B}{2}) = \frac{3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}{3-2}$$

$$\therefore \tan(\frac{A+B}{2})\cot(\frac{A-B}{2}) = 5+2\sqrt{6}$$

(Showed)

6 (a) $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\varphi}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos\varphi = \frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}$ [চ.'০৮; সি.'.০৮,'১২; রা.'০৯]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\varphi}{2}$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-e}{1+e}\tan^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1-e}{1+e}\frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2}}{(1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2}-(1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2}+(1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})-e(\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2})}{(\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2})-e(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})}$$

$$\cos\varphi = \frac{\cos\theta - e}{1-e\cos\theta}$$

6.(b) $A + B \neq 0$ এবং $\sin A + \sin B = 2\sin(A+B)$ হলে দেখাও যে, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$ **[কু.'০১]**

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin A + \sin B = 2\sin(A+B)$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B) = 2\times 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+B)$$

$$\Rightarrow \sin\frac{1}{2}(A+B)\{\cos\frac{1}{2}(A-B) - 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\} = 0$$

$A+B\neq 0$ বলে $\sin\frac{1}{2}(A+B)\neq 0$

$$\cos\frac{1}{2}(A-B) - 2\cos\frac{1}{2}(A+B) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} - 2(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{1}{3}$$

$\therefore \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$ (Showed)

7.(a) $\sin\theta = \frac{a-b}{a+b}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin\theta = \frac{a-b}{a+b}$

$$\text{L.H.S.} = \tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}$$

$$= \frac{2\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})} = \frac{\sin 2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{1+\cos 2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}$$

$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{1+\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-(\frac{a-b}{a+b})^2}}{1+\frac{a-b}{a+b}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}}{a+b}}{\frac{a+b+a-b}{a+b}} = \frac{\sqrt{4ab}}{2a}$$

$$= \frac{2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2a} = \sqrt{\frac{b}{a}} = \text{R.H.S.}$$

বিকল্প পদ্ধতি : দেওয়া আছে, $\sin\theta = \frac{a-b}{a+b}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = \frac{a+b}{a-b} \Rightarrow \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = \frac{a+b-a+b}{a+b+a-b}$$

[বিয়োজন-যোজন করে।]

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}-2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{2b}{2a}$$

$$\Rightarrow \frac{(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})^2}{(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})^2}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\Rightarrow \frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{b}{a}}\Rightarrow\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

7. (b) $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ সমীকরণটি θ এর দুইটি ভিন্ন মান α, β দ্বারা সিদ্ধ হলে দেখাও যে,

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

সমাধান ঃ $\cos\theta + b\sin\theta = c$ সমীকরণটি θ এর দুইটি ভিন্ন মান α ও β দ্বারা সিদ্ধ বলে,

$a\cos\alpha + b\sin\alpha = c$

এবং $a\cos\beta + b\sin\beta = c$

$a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$

$\Rightarrow a(\cos\alpha - \cos\beta) = b(\sin\beta - \sin\alpha)$

$$\Rightarrow a\,.2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$$

$$=b.2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$$

$\alpha\neq\beta$ বলে, $\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\neq 0$

$$a\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=b\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{b}{a}$$

এখন, L.H.S. $=\sin(\alpha+\beta)=\sin 2.\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

$$=\frac{2\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{1+\tan^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{2\frac{b}{a}}{1+(\frac{b}{a})^2}$$

$$=\frac{2b}{a}\times\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}=\text{R.H.S.}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

প্রমাণ কর যে,

1. $\cos^2(\frac{\alpha}{2}-18°)+\cos^2(\frac{\alpha}{2}+18°)$

$=\frac{1}{4}\{4+(\sqrt{5}+1)\cos\alpha\}$

L.H.S.$=\cos^2(\frac{\alpha}{2}-18°)+\cos^2(\frac{\alpha}{2}+18°)$

$=\frac{1}{2}\{1+\cos 2(\frac{\alpha}{2}-18°)+1+\cos 2(\frac{\alpha}{2}+18°)\}$

$=\frac{1}{2}\{2+\cos(\alpha-36°)+\cos(\alpha+36°)\}$

$=\frac{1}{2}(2+2\cos\alpha\cos 36°)$

$=\{1+\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\cos\alpha\}$

$=\frac{1}{4}\{4+(\sqrt{5}+1)\cos\alpha\}=$ R.H.S.(Proved)

2.(a) $\sin(292.5)^0=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

L.H.S. $=\sin(292.5)^0$

$=\sin\{270^0+(22.5)^0\}=-\cos(22.5)^0$

$=-\sqrt{\cos^2(22.5)^0}=-\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 45^0)}$

$=-\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$

$=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}=$ R.H.S.

2.(b) $\cot(142.5)^0=\sqrt{2}+\sqrt{3}-2-\sqrt{6}$

L.H.S. $=\cot(142.5)^0=\cot 142^0 30'$

$=\cot(180^0-37^0 30')=-\cot 37^0 30'$

$$=-\frac{\cos 37^0 30'}{\sin 37^0 30'}=-\frac{2\cos^2 37^0 30'}{2\sin 37^0 30'\cos 37^0 30'}$$

$$=-\frac{1+\cos 75^0}{\sin 75^0}=-\frac{1+\cos(45^0+30^0)}{\sin(45^0+30^0)}$$

$$=-\frac{1+\cos 45^0\cos 30^0-\sin 45^0\sin 30^0}{\sin 45^0\cos 30^0+\cos 45^0\sin 30^0}$$

$$= -\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}} = -\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= -\frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= -\frac{2\sqrt{6}+3-\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}{3-1}$$

$$= -\frac{2\sqrt{6}+4-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2}$$

$$= -(\sqrt{6}+2-\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{3}+\sqrt{2}-2-\sqrt{6}$$

2(c) $\tan(82.5)^0 = \sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$

L.H.S. $= \tan(82.5)^0 = \tan 82^0 30'$

$= \tan(90^0 - 7^0 30') = \cot 7^0 30'$

$$= \frac{\cos 7^0 30'}{\sin 7^0 30'} = \frac{2\cos^2 7^0 30'}{2\sin 7^0 30' \cos 7^0 30'}$$

$$= \frac{1+\cos 15^0}{\sin 15^0} = \frac{1+\cos(45^0-30^0)}{\sin(45^0-30^0)}$$

$$= \frac{1+\cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0}{\cos 45^0 \cos 30^0 - \sin 45^0 \cos 30^0}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}+3+\sqrt{3}+2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{3-1}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}+4+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{6}+2+\sqrt{3}+\sqrt{2} = \sqrt{6}+\sqrt{3}+2+\sqrt{2}$$

3. $a\sin\theta + b\sin\varphi = c = a\cos\theta + b\cos\varphi$ **হলে দেখাও যে,**

$$\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \pm\sqrt{\frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}}$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $a\sin\theta + b\sin\varphi = c$

$\Rightarrow a^2\sin^2\theta + b^2\sin^2\varphi + 2ab\sin\theta\sin\varphi = c^2 \quad \cdots(1)$

এবং $a\cos\theta + b\cos\varphi = c$

$\Rightarrow a^2\cos^2\theta + b^2\cos^2\varphi + 2ab\cos\theta\cos\varphi = c^2 \quad \cdots(2)$

(1) ও (2) যোগ করে পাই ,

$a^2+b^2+2ab(\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi) = 2c^2$

$\Rightarrow 2ab\cos(\theta-\varphi) = 2c^2-a^2-b^2$

$\Rightarrow 2ab\{2\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)-1\} = 2c^2-a^2-b^2$

$\Rightarrow 4ab\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = 2c^2-a^2-b^2+2ab$

$= 2c^2-(a-b)^2$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}$$

$$\therefore \cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \pm\sqrt{\frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}}$$

4. **দেখাও যে,** $\sin x = 2^n \cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2^2}.$

$\cos\frac{x}{2^3}.\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}.\sin\frac{x}{2^n}$

প্রমাণ : $\sin x = \sin 2.\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$

$= 2\cos\frac{x}{2}.\sin 2.\frac{x}{2^2} = 2\cos\frac{x}{2}.2\sin\frac{x}{2^2}.\cos\frac{x}{2^2}$

$= (2\cos\frac{x}{2}).(2\cos\frac{x}{2^2}).\sin\frac{x}{2^2}$

$= (2\cos\frac{x}{2}).(2\cos\frac{x}{2^2}).(2\cos\frac{x}{2^3}).\sin\frac{x}{2^3}$

$= (2\cos\frac{x}{2}).(2\cos\frac{x}{2^2}).(2\cos\frac{x}{2^3}).$

$(2\cos\frac{x}{2^{n-1}})\ (2\cos\frac{x}{2^n}).\sin\frac{x}{2^n}$

$\therefore \sin x = 2^n\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2^2}.\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}.\sin\frac{x}{2^n}$

প্রশ্নমালা VII F

A + B + C = π হলে প্রমাণ কর যে,

1. (a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ [য.'০২]

প্রমাণ ঃ **L.H.S.** $= \sin A + \sin B + \sin C$

$=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B) + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})\cos\frac{1}{2}(A-B) + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A-B) + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B) + \sin\frac{C}{2}\}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B) + \sin(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2})\}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\{\cos(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}) + \cos(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})\}$

$= 2\cos\frac{C}{2}(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2})$

$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ = R.H.S. (Proved)

1.(b) $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ [য.'০৮]

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$= \sin A + \sin B - \sin C$

$=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B) - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})\cos\frac{1}{2}(A-B) - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A-B) - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B) - \sin\frac{C}{2}\}$

$=2\cos\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B) - \sin(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2})\}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\{\cos(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}) - \cos(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})\}$

$= 2\cos\frac{C}{2}(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})$

$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ = R.H.S. (Proved)

1. (c) $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4\cos A\sin B\cos C$ [কু.'০১]

প্রমাণ ঃ **L.H.S.** $= \sin 2A - \sin 2B + \sin 2C$

$= 2\sin\frac{2A-2B}{2}\cos\frac{2A+2B}{2} + \cos 2C$

$= 2\sin(A-B)\cos(A+B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin(A-B)\cos(\pi - C) + 2\sin C\cos C$

$= -2\cos C\sin(A-B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\cos C\{\sin C - \sin(A-B)\}$

$= 2\cos C[\sin\{\pi-(A+B)\} - \sin(A-B)]$

$= 2\cos C\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\}$

$= 2\cos C.2\sin B\cos A = 4\cos A\sin B\cos C$
= R.H.S. (Proved)

1.(d) $\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4\sin A\cos B\sin C$

প্রমাণ ঃ **L.H.S.** $= \cos 2A - \cos 2B + \cos 2C$

$= \cos 2A + \cos 2C - \cos 2B$

$= 2\cos(A+C)\cos(A-C) - (2\cos^2 B - 1)$

$= 2\cos(\pi - B)\cos(A-C) - 2\cos^2 B + 1$

$= -2\cos B\cos(A-C) - 2\cos^2 B + 1$

$= 1 - 2\cos B\{\cos(A-C) + \cos B\}$

$=1 - 2\cos B[\cos(A-C) + \cos\{\pi-(A+C)\}]$

$= 1 - 2\cos B\{\cos(A-C) - \cos(A+C)\}$

$=1 - 2\cos B.2\sin A\sin C$

$= 1 - 4\sin A\cos B\sin C$ = R.H.S. (Proved)

(e) $\frac{\cos A}{\sin B\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B} = 2$ [চ.'১১]

প্রমাণ ঃ

L.H.S. $= \frac{\cos A}{\sin B\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B}$

$= \frac{\cos A\sin A + \cos B\sin B + \cos C\sin C}{\sin A\sin B\sin C}$

$= \dfrac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{2\sin A \sin B \sin C}$

এখন, $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$= 2\sin(A + B)\cos(A - B) + 2\sin C \cos C$

$= 2\sin(\pi - C) \cos(A - B) + 2\sin C \cos C$

$= 2\sin C \cos(A - B) + 2 \sin C \cos C$

$= 2\sin C\{\cos(A - B) + \cos C\}$

$= 2 \sin C \{\cos(A - B) + \cos(\pi - \overline{A + B})\}$

$= 2 \sin C\{\cos (A - B) - \cos (A + B)\}$

$= 2\sin C.2\sin A \sin B = 4\sin A \sin B \sin C$

L.H.S.$= \dfrac{4\sin A \sin B \sin C}{2\sin A \sin B \sin C} = 2 =$ R.H.S.

2.(a) $\sin (B + 2C) + \sin (C+2A) + \sin (A+2B)$ $= 4 \sin \dfrac{B-C}{2} \sin \dfrac{C-A}{2} \sin \dfrac{A-B}{2}$

প্রমাণ ঃ L.H.S.$= \sin(B + 2C) + \sin(C + 2A) + \sin(A + 2B)$

$= \sin\{A + B + C + (C-A)\} + \sin\{A + B + C + (A - B)\} + \sin\{A + B + C + (B - C)\}$

$= \sin\{\pi - (A - C)\} + \sin\{\pi - (B - A)\} + \sin\{\pi - (C - B)\}$

$= \sin(A - C) + \sin(B - A) + \sin(C - B)$

$= 2\sin\frac{1}{2}(A - C + B - A)\cos\frac{1}{2}(A - C - B + A) - \sin(B - C)$

$= 2\sin\frac{1}{2}(B - C)\cos\frac{1}{2}(2A - B - C) - 2\sin\frac{1}{2}(B - C)\cos(B - C)$

$= 2\sin\frac{1}{2}(B - C) \{\cos\frac{1}{2}(2A - B - C) - \cos(B - C)$

$= 2\sin\dfrac{B-C}{2}\{2\sin\frac{1}{2}(\dfrac{2A-B-C+B-C}{2}) \sin\frac{1}{2}(\dfrac{B-C-2A+B+C}{2})\}$

$= 2\sin\dfrac{B-C}{2}.2 \sin\dfrac{A-C}{2}\sin\dfrac{B-A}{2}$

$= 4\sin\dfrac{B-C}{2} \sin\dfrac{C-A}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} =$ R.H.S.

2.(b) $\cos \dfrac{A}{2} + \cos \dfrac{B}{2} + \cos \dfrac{C}{2} = 4 \cos\dfrac{\pi-A}{4} \cos\dfrac{\pi-B}{4} \cos\dfrac{\pi-C}{4}$

R.H.S.$= 4 \cos\dfrac{\pi-A}{4}\cos\dfrac{\pi-B}{4}\cos\dfrac{\pi-C}{4}$

$= 2.2 \cos\dfrac{B+C}{4}\cos\dfrac{C+A}{4}\cos\dfrac{A+B}{4}$

$= 2[\cos(\dfrac{B+C}{4}+\dfrac{C+A}{4}) + \cos(\dfrac{B+C}{4}-\dfrac{C+A}{4})]\cos\dfrac{A+B}{4}$

$= 2[\cos\dfrac{A+B+2C}{4}+\cos\dfrac{B-A}{4}]\cos\dfrac{A+B}{4}$

$= 2\cos\dfrac{A+B+2C}{4}\cos\dfrac{A+B}{4}+ 2\cos\dfrac{B-A}{4}\cos\dfrac{A+B}{4}$

$= \cos\dfrac{A+B+C}{2}+\cos\dfrac{C}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos(-\dfrac{A}{2})$

$= \cos\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}$

$= 0+\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}$

$= \cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2} =$ R.H.S.(Proved)

3.(a) $\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} = 1$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow \dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2} = \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$

$\therefore \tan(\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}) = \tan(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2})$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \cot\frac{C}{2} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\therefore \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1$$

3(b) $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$ [প্র.ভ.প.'০৫]

প্রমাণ : দেওয়া আছে $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow A+B = \pi - C \Rightarrow \cot(A + B) = \cot(\pi - C)$

$\Rightarrow \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A} = -\cot C$

$\Rightarrow \cot A \cot B - 1 = -\cot B\cot C - \cot C\cot A$

$\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$

4. (a) $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A \cos B \sin C$ [ঢা.'০২ ; চ.'০২,'১৩; সি.'০৭; রা.'১১]

প্রমাণ : L.H.S. $= \sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2A + 1 - \cos 2C) - \sin^2 B$

$= 1 - \sin^2 B - \frac{1}{2}.2\cos(A + C)\cos(A - C)$

$= \cos^2 B - \cos(\pi - B)\cos(A - C)$

$= \cos^2 B + \cos B \cos(A - C)$

$= \cos B\{\cos B + \cos(A - C)\}$

$= \cos B[\cos\{\pi - (A + C)\} + \cos(A - C)]$

$= \cos B[-\cos(A + C) + \cos(A - C)]$

$= \cos B .2 \sin A \sin C$

$= 2 \sin A \cos B \sin C$ = R.H.S. (Proved)

(b) $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2 \sin A \sin B \cos C$ [ঢা.'০৩,'০৭,'০৯; য.'০৭]

প্রমাণ : L.H.S. $= \cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) - \cos^2 C$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2 C$

$= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A - B) - \cos^2 C$

$= 1 - \cos C \cos(A - B) - \cos^2 C$

$= 1 - \cos C\{\cos(A - B) + \cos C\}$

$= 1 - \cos C[\cos(A - B) + \cos\{\pi - (A + B)\}]$

$= 1 - \cos C.[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

$= 1 - 2\cos C \sin A \sin B$ = R.H.S

(c) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$ [সি.'০২, '০৭; দি.'০৯; ঢা.'১১; চ.'১৩]

প্রমাণ : L.H.S. $= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C$

$= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A - B) + \cos^2 C$

$= 1 - \cos C \cos(A - B) + \cos^2 C$

$= 1 - \cos C[\cos(A - B) - \cos C]$

$= 1 - \cos C[\cos(A - B) - \cos\{\pi - (A + B)\}]$

$= 1 - \cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

$= 1 - \cos C. 2\cos A \cos B$

$= 1 - 2\cos A \cos B \cos C$ = R.H.S.

4(d) $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2\cos 2A \cos 2B \cos 2C$

প্রমাণ : L.H.S. $= \cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C$

$= \frac{1}{2}[1 + \cos 4A + 1 + \cos 4B] + \cos^2 2C$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos 2(A + B)\cos 2(A - B) + \cos^2 2C$

$= 1 + \cos(2\pi - 2C)\cos 2(A - B) + \cos^2 2C$

$= 1 + \cos 2C\{\cos 2(A - B) + \cos 2C\}$

$= 1 + \cos 2C[\cos 2(A - B) + \cos\{2\pi - 2(A + B)\}]$

$= 1 + \cos 2C[\cos 2(A - B) + \cos 2(A + B)]$

$= 1 + \cos 2C.2\cos 2A \cos 2B$

$= 1 + 2\cos 2A \cos 2B \cos 2C$ = R.H.C. (Proved)

4(e) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ [কু.'০৯]

প্রমাণ : **L.H.S.** $= \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos A + 1 - \cos B) + \sin^2\frac{C}{2}$

$= 1 - \frac{1}{2}.2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B) + \sin^2\frac{C}{2}$

$= 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})\cos\frac{1}{2}(A-B) + \sin^2\frac{C}{2}$

$= 1 - \sin\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A-B) + \sin^2\frac{C}{2}$

$= 1 - \sin\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B) - \sin\frac{C}{2}\}$

$= 1 - \sin\frac{C}{2}[\cos\frac{1}{2}(A-B) - \sin\{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(A+B)\}]$

$= 1 - \sin\frac{C}{2}[\cos\frac{1}{2}(A-B) - \cos\frac{1}{2}(A+B)]$

$= 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ = R.H.S. (Proved)

5. $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে,

(a) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin A \sin B \sin C = 1$ [ঢা.,বা.'০১;মা., দি.'১২; কু.'১৪]

প্রমাণ : **L.H.S.** $= \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin A\cos B\sin C$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B) + \sin^2 C + 2\sin A\cos B\sin C$

$= 1 - \frac{1}{2}.2\cos(A+B)\cos(A-B) + \sin^2 C + 2\sin A\cos B\sin C$

$= 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - C)\cos(A-B) + \sin^2 C + 2\sin A\cos B\sin C$

$= 1 - \sin C\cos(A-B) + \sin^2 C + 2\sin A\sin B\sin C$

$= 1 - \sin C\{\cos(A-B) - \sin C\} + 2\sin A\cos B\sin C$

$= 1 - \sin C[\cos(A-B) - \sin\{\frac{\pi}{2} - (A+B)\}] + 2\sin A\cos B\sin C$

$= 1 - \sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)] + 2\sin A\cos B\sin C$

$= 1 - \sin C.2\sin A\sin B + 2\sin A\cos B\sin C$

$= 1 - 2\sin A\sin B\sin C + 2\sin A\sin B\sin C$

$= 1$ = R.H.S.

5(b) $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A\cot B\cot C$

প্রমাণ : দেওয়া আছে , $A + B + C = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} - C$

$\Rightarrow \cot(A+B) = \cot(\frac{\pi}{2} - C)$

$\Rightarrow \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A} = \tan C$

$\Rightarrow \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A} = \frac{1}{\cot C}$

$\Rightarrow \cot A + \cot B = \cot A\cot B\cot C + \cot C$

$\therefore \cot A + \cot B + \cot C = \cot A\cot B\cot C$

6. (a) $A + B + C = 2\pi$ হলে প্রমাণ কর যে,
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos A\cos B\cos C = 1$ [সি.'০১]

প্রমাণ : **L.H.S.** $= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos A\cos B\cos C$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C - 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C - 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1 + \cos(2\pi - C)\cos(A-B) + \cos^2 C - 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1 + \cos C\{\cos(A-B) + \cos C\} - 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1 + \cos C[\cos(A-B) + \cos\{2\pi - (A+B)\}] - 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1 + \cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)] - 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1 + \cos C.2\cos A.\cos B - 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C + 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1$

6(b) $A + B + C = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos A + \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 1$

প্রমাণ : L.H.S. $= \cos A + \cos B + \cos C$

$= 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B) + 2\cos^2\frac{1}{2}C - 1$

$= 2\cos\frac{1}{2}(-C)\cos\frac{1}{2}(A-B) + 2\cos^2\frac{1}{2}C - 1$

$= 2\cos\frac{1}{2}C\left[\cos\frac{1}{2}(A-B) + \cos\frac{1}{2}\{-(A+B)\}\right] - 1$

$= 2\cos\frac{1}{2}C[\cos\frac{1}{2}(A-B) + \cos\frac{1}{2}(A+B)] - 1$

$= 2\cos\frac{1}{2}C.2\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B - 1$

$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 1 =$ R.H.S. (Proved)

6. (c) $A + B + C = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $\tan A\tan C + \tan C\tan A + \tan A\tan B = 1$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $A + B + C = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow A + B = (n\pi + \frac{\pi}{2}) - C$

$\Rightarrow \tan(A + B) = \tan\{(n\pi + \frac{\pi}{2}) - C\}$

$= \tan\{n\pi + (\frac{\pi}{2} - C)\}$

$= \tan(\frac{\pi}{2} - C) = \cot C$

$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = \frac{1}{\tan C}$

$\Rightarrow \tan A\tan C + \tan B\tan C = 1 - \tan A\tan B$

$\tan A\tan C + \tan C\tan A + \tan A\tan B = 1$

7. (a) $A + B + C = \pi$ এবং $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$ হলে দেখাও যে, $A = B = C$. [ব.'০৭]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow A + B = \pi - C$

$\Rightarrow \cot(A + B) = \cot(\pi - C)$

$\Rightarrow \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A} = -\cot C$

$\Rightarrow \cot A\cot B - 1 = \cot B\cot C - \cot C\cot A$

$\Rightarrow \cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$

এখন, $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2(\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A) = 3(\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A)$

$\Rightarrow \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C - (\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\{(\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2\} = 0$

প্রত্যেকটি শূন্য না হলে তিনটি বর্গের সমষ্টি শূন্য হতে পারে না।

$\cot A - \cot B = 0 \Rightarrow \cot A = \cot B$

$\cot B - \cot C = 0 \Rightarrow \cot B = \cot C$

$\cot A = \cot B = \cot C$

$\Rightarrow A = B = C$

7(b) $A + B + C = \pi$ এবং $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \sin B\sin C + \sin C\sin A + \sin A\sin B$ হলে দেখাও যে, $A = B = C$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A$

$\Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - (\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\{(\sin A - \sin B)^2 + (\sin B - \sin C)^2 + (\sin C - \sin A)^2\} = 0$

প্রত্যেকটি শূন্য না হলে তিনটি বর্গের সমষ্টি শূন্য হতে পারে না।

$\sin A - \sin B = 0 \Rightarrow \sin A = \sin B$

$\Rightarrow \sin A = \sin B = \sin(\pi - B)$

$\sin A = \sin B$ অথবা, $\sin A = \sin(\pi - B)$

$A = B$ অথবা, $A = \pi - B \Rightarrow A + B = \pi$

কিন্তু $A + B + C = \pi$ বলে, $A + B = \pi$ হতে পারে না।

$A = B$ অনুরূপভাবে, $B = C$

$A = B = C$ (Showed)

7.(c) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ হলে দেখাও যে, $A + B + C = n\pi$, যখন $n \in \mathbb{Z}$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A \tan B)$

$\Rightarrow \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$

$\Rightarrow \tan(A + B) = -\tan C = \tan(\pi - C) = \tan(2\pi - C) = \tan(3\pi - C) = \cdots$

$= \tan(n\pi - C)$, যেখানে $n \in \mathbb{Z}$.

$A + B = n\pi - C \Rightarrow A + B + C = n\pi$ (Showed)

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

$A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ কর যে,

1. $\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} - 1$

প্রমাণ ঃ **L.H.S.** $= \cos A + \cos B - \cos C$

$= 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B) - (1 - 2\sin^2\frac{C}{2})$

$= 2\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})\cos\frac{1}{2}(A - B) + 2\sin^2\frac{C}{2} - 1$

$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A - B) + 2\sin^2\frac{C}{2} - 1$

$= 2\sin\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B) + \sin\frac{C}{2}\} - 1$

$= 2\sin\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B) + \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2})\} - 1$

$= 2\sin\frac{C}{2}\{\cos(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}) + \cos(\frac{A}{2} + \frac{B}{2})\} - 1$

$= 2\sin\frac{C}{2}(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}) - 1$

$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1 =$ R.H.S. (Proved)

2.(a) $\sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C) = 4\sin A \sin B \sin C$

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$= \sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C)$

$= \sin(A + B + C - 2A) + \sin(A + B + C - 2B) + \sin(A + B + C - 2C)$

$= \sin(\pi - 2A) + \sin(\pi - 2B) + \sin(\pi - 2C)$

$= \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$= 2\sin\frac{1}{2}(2A + 2B)\cos\frac{1}{2}(2A - 2B) + \cos 2C$

$= 2\sin(A + B)\cos(A - B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin(\pi - C)\cos(A - B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C\cos(A - B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C\{\cos(A - B) + \cos C\}$

$= 2\sin C\{\cos(A - B) + \cos(\pi - \overline{A + B})\}$

$= 2\sin C\{\cos(A - B) - \cos(A + B)\}$

$= 2\sin C . 2\sin A\sin B = 4\sin A\sin B\sin C$

$=$ R.H.S. (Proved)

2. (b) $\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} = 1 + 4\sin\dfrac{B+C}{4}\sin\dfrac{C+A}{4}\sin\dfrac{A+B}{4}$

$= 1 + 4\sin\dfrac{\pi - A}{4}\sin\dfrac{\pi - B}{4}\sin\dfrac{\pi - C}{4}$

M.H.S.$= 1 + 4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$

$= 1 + 2.2\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$

$= 1 + 2[\cos\frac{B+C-C-A}{4} - \cos\frac{B+C+C+A}{4}]\sin\frac{A+B}{4}$

$= 1 + 2\cos\frac{B-A}{4}\sin\frac{A+B}{4} -$

$2\cos\frac{A+B+2C}{4}\sin\frac{A+B}{4}$

$= 1 + \sin(\frac{A+B}{4} + \frac{B-A}{4}) +$

$\sin(\frac{A+B}{4} - \frac{B-A}{4}) -$

$\{\sin(\frac{A+B}{4} + \frac{A+B+2C}{4}) +$

$\sin(\frac{A+B}{4} - \frac{A+B+2C}{4})\}$

$= 1 + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2} -$

$\sin\frac{A+B+C}{2} - \sin(-\frac{C}{2})$

$= 1 + \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} - \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{C}{2}$

$= 1 + \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} - 1$

$= \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$ = L.H.S.

Again , $1 + 4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$

$= 1 + 4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$ = R.H.S.

(c) sin A cos B cos C + sin B cos C cos A + sin C cos A cos B = sin A sin B sin C

প্রমাণ ঃ **L.H.S.** = sinA cos B cos C + sin B cos C cos A + sin C cos A cos B

= (sin A cos B + sin B cos A) cos C + sin C cos A cos B

= sin (A + B) cos C + sin C cos A cos B

= sin (π − C) cos{π − (A + B)} + sin C cos A cos B

= sin C { − cos (A + B) + cos A cos B}

= sin C (− cos A cos B + sinA sinB + cos A cos B)

= sin A sin B sin C = R.H.S. (Proved)

3. tan 2A + tan 2B + tan 2C = tan 2A tan 2B tan 2C

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow 2A + 2B = 2\pi - 2C$

$\Rightarrow \tan(2A + 2B) = \tan(2\pi - 2C)$

$\Rightarrow \frac{\tan 2A + \tan 2B}{1 - \tan 2A + \tan 2B} = -\tan 2C$

$\Rightarrow \tan 2A + \tan 2B = -\tan 2C + \tan 2A\tan 2B\tan 2C$

$\therefore \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A\tan 2B\tan 2C$

4. $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

প্রমাণ ঃ **L.H.S.** $= \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos A + 1 + \cos B) + \cos^2\frac{C}{2}$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B) + \cos^2\frac{C}{2}$

$= 1 + \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})\cos\frac{1}{2}(A-B) + \cos^2\frac{C}{2}$

$= 1 + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A-B) + 1 - \sin^2\frac{C}{2}$

$= 2 + \sin\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B) - \sin\frac{C}{2}\}$

$= 2 + \sin\frac{C}{2}[\cos\frac{1}{2}(A-B) - \sin\{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(A+B)\}]$

$= 2 + \sin\frac{C}{2}[\cos\frac{1}{2}(A-B) - \cos\frac{1}{2}(A+B)]$

$= 2 + \sin\frac{C}{2}.2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

$= 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ = R.H.S (Proved)

5. $A+B+C=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\pm 4\cos A\cos B\cos C$

প্রমাণ ঃ $\sin\{(2n+1)\frac{\pi}{2}-\theta\}=\sin\{n\pi+(\frac{\pi}{2}-\theta)\}$

$=\pm\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\pm\cos\theta$

এখন, $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$= 2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$= 2\sin\{(2n+1)\frac{\pi}{2}-C\}\cos(A-B)+$

$2\sin\{(2n+1)\frac{\pi}{2}-(A+B)\}\cos C$

$= 2(\pm\cos C)\cos(A-B)+$
$2\{\pm\cos(A+B)\}\cos C$

$= \pm 2\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$

$= \pm 2\cos C(2\cos A\cos B)$

$\pm 4\cos A\cos B\cos C$

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=$
$\pm 4\cos A\cos B\cos C$

6. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$ হলে দেখাও যে, $A\pm B\pm C=(2n+1)\pi$, যেখানে n যে কোন অখন্ড সংখ্যা।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+$
$2\cos A\cos B\cos C=1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2B)+\cos^2 C+$
$\cos C\,.\,2\cos A\cos B=1$

$\Rightarrow 1+\frac{1}{2}.2\cos(A+B)\cos(A-B)+$
$\cos^2 C+\cos C\{\cos(A+B)+$
$\cos(A-B)\}=1$

$\Rightarrow \cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C+\cos C\cos(A+B)+\cos(A-B)\cos C=0$

$\Rightarrow \cos(A-B)\{\cos(A+B)+\cos C\}+$
$\cos C\{\cos(A+B)+\cos C\}=0$

$\Rightarrow \{\cos(A+B)+\cos C\}$
$\{\cos(A-B)+\cos C\}=0$

$\cos(A\pm B)+\cos C=0$

$\Rightarrow \cos(A\pm B)=-\cos C=\cos(\pi\pm C)=$
$\cos(3\pi\pm C)=$

$=\cos\{(2n+1)\pi\pm C\}$, যেখানে $n\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow A\pm B=(2n+1)\pi\pm C$

$\Rightarrow A\pm B\pm C=(2n+1)\pi$

7. $x+y+z=xyz$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=$
$\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}$

মনে করি, $x=\tan A\Rightarrow A=\tan^{-1}x$

$y=\tan B\Rightarrow A=\tan^{-1}y$

$z=\tan C\Rightarrow C=\tan^{-1}z$

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

$\Rightarrow \tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A\tan B)$

$\Rightarrow \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$

$\Rightarrow \tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$\Rightarrow A+B=\pi-C$

$\Rightarrow 2A+2B=2\pi-2C$

$\Rightarrow \tan(2A+2B)=\tan(2\pi-2C)$

$\Rightarrow \frac{\tan 2A+\tan 2B}{1+\tan 2A\tan 2B}=-\tan 2C$

$\Rightarrow \tan 2A+\tan 2B=$
$\tan 2C+\tan A\tan B\tan C$

$\Rightarrow \tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=$
$\tan A\tan B\tan C$

$\Rightarrow \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}+\frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}=$
$\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\ \frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}\ \frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}$

$\Rightarrow \frac{2x}{1-x^2}+\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2x}{1-x^2}=$
$\frac{2x}{1-x^2}\ \frac{2x}{1-x^2}\ \frac{2x}{1-x^2}$

8. $x+y+z=xyz$ হলে প্রমাণ কর যে,

$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}$

$$= \frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}$$

প্রমাণ ঃ মনে করি, $x = \tan A$, $y = \tan B$, $z = \tan C$

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B$
$\tan C$ $\quad [\because x + y + z = x y z]$

$\Rightarrow \tan A + \tan B = \tan C (\tan A . \tan B - 1)$

$\Rightarrow \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = - \tan C$

$\Rightarrow \tan (A + B) = \tan (\pi - C)$

$A + B = \pi - C$

$\Rightarrow 3A + 3B + 3C = 3\pi$

$\tan (3A + 3B + 3C) = \tan 3\pi$

$\Rightarrow \dfrac{\tan 3A + \tan 3B + \tan 3C - \tan 3A. \tan 3B. \tan 3C}{1 - \tan 3A. \tan 3B - \tan 3B. \tan 3C - \tan 3C. \tan 3A} = 0$

$\Rightarrow \tan 3A + \tan 3B + \tan 3C -$
$\tan 3A . \tan 3B . \tan 3C = 0$

$\Rightarrow \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A} + \dfrac{3\tan B - \tan^3 B}{1-3\tan^2 B}$
$+ \dfrac{3\tan C - \tan^3 C}{1-3\tan^2 C}$

$= \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\ \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$
$\dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

$\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2} + \dfrac{3y-y^3}{1-3y^2} + \dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}$

$= \dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\ \dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}\ \dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}$ (Proved)

9. $yz + zx + xy = 1$ **হলে প্রমাণ কর যে,**

$$\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{xy} + \frac{(y^2-1)(z^2-1)}{yz} + \frac{(z^2-1)(x^2-1)}{zx} = 4$$

প্রমাণ ঃ মনে করি, $x = \cot A \Rightarrow A = \cot^{-1} x$

$y = \cot B \Rightarrow A = \cot^{-1} y$

$z = \cot C \Rightarrow C = \cot^{-1} z$

$\cot A \cot B + \cot B \cot C +$
$\cot C \cot A = 1$

$\Rightarrow \cot A \cot B - 1 = - (\cot B + \cot A)\cot C$

$\Rightarrow \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = - \cot C$

$\Rightarrow \cot (A + B) = \cot (\pi - C)$

$\Rightarrow A + B = \pi - C$

$\Rightarrow 2A + 2B = 2\pi - 2C$

$\Rightarrow \cot (2A + 2B) = \cot (2\pi - 2C)$

$\Rightarrow \dfrac{\cot 2A \cot 2B - 1}{\cot 2B + \cot 2A} = -\cot 2C$

$\Rightarrow \cot 2A \cot 2B + \cot 2B \cot 2C +$
$\cot 2C \cot 2A = 1$

$\Rightarrow \dfrac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}\ \dfrac{\cot^2 B - 1}{2\cot B} +$
$\dfrac{\cot^2 B - 1}{2\cot B}\ \dfrac{\cot^2 C - 1}{2\cot C} +$
$\dfrac{\cot^2 C - 1}{2\cot C}\ \dfrac{\cot^2 A - 1}{2\cot A} = 1$

$\dfrac{x^2-1}{2x}\ \dfrac{y^2-1}{2y} + \dfrac{y^2-1}{2y}\cdot\dfrac{z^2-1}{2z} +$
$\dfrac{z^2-1}{2z}\ \dfrac{x^2-1}{2x} = 1$

$\therefore \dfrac{(x^2-1)(y^2-1)}{xy} + \dfrac{(y^2-1)(z^2-1)}{yz} +$
$\dfrac{z^2-1)(x^2-1)}{zx} = 4$ (Showed)

1. (a) Sol^n : $\sec(-135^0) = \sec 135^0$
$= \sec(180^0 - 45^0) = -\sec 45^0 = -\sqrt{2}$

(b) Sol^n : $\sec\theta = \pm\sqrt{1+\tan^2\theta}$
$= \pm\sqrt{1+\frac{25}{144}} = \pm\frac{13}{12}$ $\quad \cos\theta = \pm\frac{12}{13}$

(c) Sol^n : $\cot 45^0 + \cot(\pi + 45^0) + \cot(2\pi + 45^0) + \cdots\cdots + \cot(9\pi + 45^0)$
$= (9+1)\cot 45^0 = 10.1 = 10$

(d) Sol^n : A ও B পূরক কোণ হলে,
$\sin A = \cos B$ Ans. **A.**

(e) Sol^n : ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, $\sin 15°$ এবং $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ এর আসন্ন মান $= 0{\cdot}258$ $\therefore$ Ans. **C.**

(f) Sol^n : $\cos 68°20'\cos 8°20' + \cos 81°40'\cos 21°40' = \cos(68°20' - 8°20')$
$= \cos 60° = \frac{1}{2}$

(g) Sol^n : $\frac{\cos 8^0 + \sin 8^0}{\cos 8^0 - \sin 8^0} = \frac{1+\tan 8^0}{1-\tan 8^0}$
$= \frac{\tan 45^0 + \tan 8^0}{\tan 45^0 - \tan 8^0} = \tan(45° + 8°) = \tan 53°$

(h) Sol^n : সবগুলি তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. **D.**

(i) Sol^n : $\tan\theta = \pm\frac{\sqrt{13^2-12^2}}{12} = \pm\frac{5}{12}$
Ans. A

(j) Sol^n : $\angle C = 180° - (60° + 75°) = 45°$
$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin 60^0} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 45^0}$
$\Rightarrow a = \sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}/2}{1/\sqrt{2}} = \frac{6}{2} = 3$ $\therefore$ Ans. B

(k) Sol^n : $\theta = 20°$ ধরে প্রদত্ত রাশি $= 0{\cdot}766$ এবং $\cos 2\theta = 0{\cdot}766$. $\therefore$ Ans. C

(*l*) Sol^n : $\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$
$= \pm\sqrt{\frac{25-24}{25+24}} = \pm\frac{1}{7}$

(m) Sol^n : $9^2 + 40^2 = 41^2$ $\therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{41}{2} = 20{\cdot}5$

ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে,

2. (a) $\frac{a-b}{a+b} = \tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$

[চ.'০৩; য.'০৯; রা.'১০]

প্রমাণ : L.H.S. $= \frac{a-b}{a+b} = \frac{2R\sin A - 2R\sin B}{2R\sin A + 2R\sin B}$

$= \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}$

$= \tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{A+B}{2} = \tan\frac{A-B}{2}\cot(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})$

$= \tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2} =$ R.H.S. (Proved)

2(b) $\cos\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$ **[য.'১০; ঢা.'১২]**

প্রমাণ : R.H.S. $= \frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$

$= \frac{2R\sin B + 2R\sin C}{2R\sin A}\sin\frac{A}{2}$

$= \frac{\sin B + \sin C}{\sin A}\sin\frac{A}{2}$

$= \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\sin\frac{A}{2}$

$= \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2})\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$

$= \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \cos\frac{B-C}{2} =$ L.H.S.

3.(a) $a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B) = 0$ [রা. '০৭, য. '০৭,'১২]

প্রমাণ : **L.H.S.** $= a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B)$

$= 4R^2 \sin^2 A(\cos^2 B - \cos^2 C) + 4R^2 \sin^2 B(\cos^2 C - \cos^2 A) + 4R^2 \sin^2 C(\cos^2 A - \cos^2 B)$

$= 4R^2(\sin^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \cos^2 C + \sin^2 B \cos^2 C - \cos^2 A \sin^2 B + \sin^2 C \cos^2 A - \cos^2 B \sin^2 C)$

$= 4R^2\{\sin^2 A(1 - \sin^2 B) - \sin^2 A(1 - \sin^2 C) + \sin^2 B(1 - \sin^2 C) - \sin^2 B(1 - \sin^2 A) + \sin^2 C(1 - \sin^2 A) - \sin^2 C(1 - \sin^2 B)\}$

$= 4R^2(\sin^2 A - \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 A + \sin^2 A \sin^2 C + \sin^2 B - \sin^2 B \sin^2 C - \sin^2 B + \sin^2 B \sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 C \sin^2 A - \sin^2 C + \sin^2 C \sin^2 B)$

$= 4R^2 \times 0 = 0 =$ R.H.S. (proved)

3(b) $(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C = a + b + c$ [ব.'০৫ ; সি.'০৩,'০৭; রা.'১৪]

প্রমাণ : **L.H.S.**$= (b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C$

$= b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C$

$= (c\cos B + b\cos C) + (c\cos A + a\cos C) + (b\cos A + a\cos B) = a + b + c =$ R.H.S.

[নোট $a = c\cos B + b\cos C$]

3(c) $a^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + b^2(\sin^2 C - \sin^2 A) + c^2(\sin^2 A - \sin^2 B) = 0$ [ঢা.'০০, য.'০৪]

প্রমাণ : L.H.S.$= a^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + b^2(\sin^2 C - \sin^2 A) + c^2(\sin^2 A - \sin^2 B)$

$= (2R\sin A)^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + (2R\sin B)^2(\sin^2 C - \sin^2 A) + (2R\sin C)^2(\sin^2 A - \sin^2 B)$

$= 4R^2\{\sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 A\sin^2 C + \sin^2 B\sin^2 C - \sin^2 B\sin^2 A + \sin^2 C\sin^2 A - \sin^2 C\sin^2 B\}$

$= 4R^2 \times 0 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

4. (a) $a(\cos C - \cos B) = 2(b - c)\cos^2\frac{A}{2}$

[য.'০৪; রা.'০৯; দি.'১০; ঢা.'১১; সি.'১২]

প্রমাণ : **L.H.S.** $= a(\cos C - \cos B)$

$= a\cos C - a\cos B$

$= (b - c\cos A) - (c - b\cos A)$

$= b - c + (b - c)\cos A$

$= (b - c)(1 + \cos A) = (b - c).2\cos^2\frac{A}{2}$

$= 2(b - c)\cos^2\frac{A}{2} =$ R.H.S.

4(b) $a(\cos B + \cos C) = 2(b + c)\sin^2\frac{A}{2}$

[য.'০০; ব.'০৪; ঢা.'০৮; চ. '০৯; সি.'১৪]

প্রমাণ : **L.H.S.** $= a(\cos B + \cos C)$

$= a\cos B + a\cos C$

$= c - b\cos A + b - c\cos A$

$= b + c - (b + c)\cos A = (b + c)(1 - \cos A)$

$= (b + c)\,2.\sin^2\frac{A}{2}$

$= 2(b + c)\sin^2\frac{A}{2} =$ R.H.S.

4(c) $b^2\sin 2C + c^2\sin 2B = 4\Delta$

প্রমাণ : L.H.S.$= b^2\sin 2C + c^2\sin 2B$

$= b^2.2\sin C\cos C + c^2.2\sin B\cos B$

$= 2b^2\frac{c}{2R}\cos C + 2c^2\frac{b}{2R}\cos B$

$= \frac{bc}{R}(b\cos C + c\cos B) = \frac{bc}{R}a$

$= \frac{abc}{R} = 4\Delta =$ R.H.S.

4(d) $a^3\cos(B - C) + b^3\cos(C - A) + c^3\cos(A - B) = 3abc$ [ব.'০৩]

প্রমাণ : $a^3\cos(B - C)$

$= a(a^2\cos B\cos C + a^2\sin B\sin C)$

$= a(a\cos B.\,a\cos C + a\sin B.\,a\sin C)$

$= a\{(c - b\cos A)(b - c\cos A) + b\sin A.c\sin A\}$

$= a\{bc - b^2\cos A - c^2\cos A + bc\cos^2 A + bc\sin^2 A\}$

$= a\{bc - (b^2 + c^2)\cos A + bc\}$

$= 2abc - a(b^2 + c^2)\cos A.$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$b^3\cos(C - A) = 2abc - b(c^2 + a^2)\cos B$ এবং

$c^3\cos(A - B) = 2abc - c(a^2 + b^2)\cos C$

এখন, L.H.S.$= a^3\cos(B - C) + b^3\cos(C - A) + c^3\cos(A - B)$

$= 6abc - a(b^2 + c^2)\cos A - b(c^2 + a^2)\cos B - c(a^2 + b^2)\cos C$

$= 6abc - ab^2\cos A - c^2a\cos A - bc^2\cos B - a^2b\cos B - ca^2\cos C - b^2c\cos C$

$= 6abc - bc(c\cos B + b\cos C) - ab(a\cos B + b\cos A) - ca(c\cos A + a\cos C)$

$= 6abc - bc.a - ab.c - ca.b$

$= 6abc - 3abc = 3abc =$ R.H.S. (Proved)

5.(a) $a^3\sin(B - C) + b^3\sin(C - A) + c^3\sin(A - B) = 0$

প্রমাণ : $a^3\sin(B - C) = a^2.a\sin(B - C)$

$= a^2.2R\sin A\sin(B - C)$

$= 2Ra^2\sin\{\pi - (B + C)\}\sin(B - C)$

$= 2R\,a^2\sin(B + C)\sin(B - C)$

$= 2R.4R^2\sin^2 A(\sin^2 B - \sin^2 C)$

$= 8R^3\sin^2 A(\sin^2 B\ \ \sin^2 C)$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$b^3\sin(C - A) = 8R^3\sin^2 B(\sin^2 C - \sin^2 A)$ ও

$c^3\sin(A - B) = 8R^3\sin^2 C(\sin^2 A - \sin^2 B)$

এখন, L.H.S.$= a^3\sin(B - C) + b^3\sin(C - A) + c^3\sin(A - B)$

$= 8R^3(\sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 B\sin^2 C - \sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 C\sin^2 A - \sin^2 B\sin^2 C)$

$= 8R^3 \times 0 = 0 =$ R.H.S (Proved).

5. (b) $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = 0$

প্রমাণ : $(b^2 - c^2)\cot A$

$= (b^2 - c^2)\frac{R}{abc}(b^2 + c^2 - a^2)$

$= \frac{R}{abc}\{(b^2 - c^2)(b^2 + c^2) - a^2(b^2 - c^2)\}$

$= \frac{R}{abc}\{b^4 - c^4 - a^2(b^2 - c^2)\}$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$(c^2 - a^2)\cot B = \frac{R}{abc}\{c^4 - a^4 - b^2(c^2 - a^2)\}$,

$(a^2 - b^2)\cot C = \frac{R}{abc}\{a^4 - b^4 - c^2(a^2 - b^2)\}$

L.H.S. $= (b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C$

$= \frac{R}{abc}\{b^4 - c^4 + c^4 - a^4 + a^4 - b^4 - (a^2b^2 - c^2a^2 + b^2c^2 - a^2b^2 + c^2a^2 - b^2c^2)\}$

$= \frac{R}{abc}\times 0 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

5(c) $(a - b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a + b)^2\sin^2\frac{C}{2} = c^2$

[কু.'০৯]

প্রমাণ:L.H.S.$=(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a + b)^2\sin^2\frac{C}{2}$

$= (a - b)^2\frac{1}{2}(1 + \cos C) + (a + b)^2\frac{1}{2}(1 - \cos C)$

$= \frac{1}{2}[\{(a - b)^2 + (a + b)^2\} - \{(a + b)^2 - (a - b)^2\}\cos C]$

$= \frac{1}{2}.\{2(a^2 + b^2) - 4ab\cos C\}$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2 =$ R.H.S. (Proved)

6 . (a) $(s - a)\tan\frac{A}{2} = (s - b)\tan\frac{B}{2} = (s - c)\cot\frac{C}{2}$

প্রমাণ : $(s - a)\tan\frac{A}{2}$

$= (s - a)\frac{\sqrt{(s - b)(s - c)}}{\sqrt{s(s - a)}}$

$= \frac{\sqrt{s - a}\sqrt{s - a}\sqrt{(s - b)(s - c)}}{\sqrt{s(s - a)}}$

$= \dfrac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}}$

$(s - b)\tan\dfrac{B}{2} = (s-b)\dfrac{\sqrt{(s-c)(s-a)}}{\sqrt{s(s-b)}}$

$= \dfrac{\sqrt{s-b}\sqrt{s-b}\sqrt{(s-c)(s-a)}}{\sqrt{s(s-b)}}$

$= \dfrac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}}$

$(s-c)\tan\dfrac{C}{2} = (s-c)\dfrac{\sqrt{(s-a)(s-b)}}{\sqrt{s(s-c)}}$

$= \dfrac{\sqrt{s-c}\sqrt{s-c}\sqrt{(s-a)(s-b)}}{\sqrt{s(s-c)}}$

$= \dfrac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}}$

$\therefore (s-a)\tan\dfrac{A}{2} = (s-b)\tan\dfrac{B}{2} = (s-c)\cot\dfrac{C}{2}$

6(b) $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{s}{R}$

প্রমাণ :L.H.S.= $\sin A + \sin B + \sin C$

$= \dfrac{a}{2R} + \dfrac{b}{2R} + \dfrac{c}{2R} = \dfrac{a+b+c}{2R}$

$= \dfrac{2s}{2R} = \dfrac{s}{R}$ = R.H.S. (Proved)

6(c) $a\sin(\dfrac{A}{2} + B) = (b+c)\sin\dfrac{A}{2}$

[কু.'০৩; সি.'০৯,'১১; ঢা.'১০; চ.'১১]

প্রমাণ : R.H.S.= $(b+c)\sin\dfrac{A}{2}$

$= (2R\sin B + 2R\sin C)\sin\dfrac{A}{2}$

$= 2R(\sin B + \sin C)\sin\dfrac{A}{2}$

$= 2R\, 2.\sin\dfrac{1}{2}(B+C)\cos\dfrac{1}{2}(B-C)\sin\dfrac{A}{2}$

$= 4R\sin(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2})\sin(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{B-C}{2})\sin\dfrac{A}{2}$

$= 2R.2\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{\pi + B - C}{2}$

$= 2R\sin A\sin\dfrac{A+B+C+B-C}{2}$

$= a\sin(\dfrac{A}{2} + B)$= R.H.S. (Proved)

7.(a) $a\sin B\sin C + b\sin C\sin A + c\sin A\sin B = \dfrac{3\Delta}{R}$

প্রমাণ :L.H.S.= $a\sin B\sin C + b\sin C\sin A + c\sin A\sin B$

$= a.\dfrac{b}{2R}.\dfrac{c}{2R} + b\dfrac{c}{2R}\dfrac{a}{2R} + c\dfrac{a}{2R}\dfrac{b}{2R}$

$= \dfrac{abc}{4R^2} + \dfrac{abc}{4R^2} + \dfrac{abc}{4R^2} = \dfrac{3abc}{4R^2}$

$= \dfrac{abc}{4R}.\dfrac{3}{R} = \Delta.\dfrac{3}{R} = \dfrac{3\Delta}{R}$ = R.H.S. (Proved)

7(b) $\dfrac{1}{a}\sin A + \dfrac{1}{b}\sin B + \dfrac{1}{c}\sin C = \dfrac{6\Delta}{abc}$

[প্র.ভ.প. '১৫]

প্রমাণ : L.H.S. = $\dfrac{1}{a}\sin A + \dfrac{1}{b}\sin B + \dfrac{1}{c}\sin C$

$= \dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{2R} = \dfrac{3}{2R}$

$= \dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{R} = \dfrac{3}{2}.\dfrac{4\Delta}{abc} = \dfrac{6\Delta}{abc}$ = R.H.S. (Proved)

8.(a) $\dfrac{\cos B\cos C}{bc} + \dfrac{\cos C\cos A}{ca} + \dfrac{\cos A\cos B}{ab} = \dfrac{1}{4R^2}$

L.H.S.= $\dfrac{\cos B\cos C}{bc} + \dfrac{\cos C\cos A}{ca} + \dfrac{\cos A\cos B}{ab}$

$= \dfrac{a\cos B\cos C + b\cos C\cos A + c\cos A\cos B}{abc}$

$= \dfrac{1}{abc}\{2R\sin A\cos B\cos C + 2R\sin B\cos C\cos A + 2R\sin C\cos A\cos B\}$

$= \dfrac{2R}{abc}\{(\sin A\cos B + \sin B\cos A)\cos C$

$+ \sin C \cos A \cos B\}$

$= \frac{2R}{abc}\{\sin(A+B)\cos C + \cos A \cos B \sin C\}$

$= \frac{2R}{abc}\{\sin(\pi - C)\cos C + \cos A \cos B \sin C\}$

$= \frac{2R}{abc}[\sin C \sin\{\pi - (A+B)\}$

$+ \cos A \cos B \sin C]$

$= \frac{2R}{abc}\sin C\{-\cos(A+B) + \cos A \cos B\}$

$= \frac{2R}{abc}\sin C(-\cos A\cos B + \sin A \sin B +$

$\cos A \cos B)$

$= \frac{2R}{abc}\sin A \sin B \sin C = \frac{2R}{abc}.\frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R}$

$= \frac{1}{4R^2} = $ R.H.S. (Proved)

8(b) $\frac{b^2 - c^2}{a^2}\sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2}\sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2}\sin 2C = 0$

প্রমাণ : $\frac{b^2 - c^2}{a^2}\sin 2A$

$= \frac{4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C)}{4R^2 \sin^2 A}\cdot 2\sin A\cos A$

$= 2\cos A\frac{\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin A}$

$= 2\cos A \frac{\sin(\pi - A)\sin(B-C)}{\sin A}$

$= \frac{2\cos\{\pi - (B+C)\}\sin A\sin(B-C)}{\sin A}$

$= -2\cos(B+C)\sin(B-C)$

$= -(\sin 2B - \sin 2C) = \sin 2C - \sin 2B$

অনুরূপভাবে আমরা পাই ,

$\frac{c^2 - a^2}{b^2}\sin 2B = \sin 2A - \sin 2C$,

$\frac{a^2 - b^2}{c^2}\sin 2C = \sin 2B - \sin 2A$

এখন L.H.S. $= \frac{b^2 - c^2}{a^2}\sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2}\sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2}\sin 2C$

$= \sin 2C - \sin 2B + \sin 2A - \sin 2C + \sin 2B - \sin 2A$

$= 0 = $ R.H.S. (Proved)

9. (a) $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$ হলে দেখাও যে, $C = 45^\circ$ অথবা 135° [য.'০৬,'১১; চ.'১৪ ; রা.'১০,'১৪; ঢা.'০৬,'১১,'১৪ ; কু.'০৬,'০৮]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে ,

$a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 - 2c^2a^2 - 2b^2c^2 = 0$

$\Rightarrow (a^2)^2 + (b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2a^2.b^2 + 2b^2(-c^2) + 2(-c^2)a^2 = 2a^2b^2$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 2a^2b^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = \pm\sqrt{2}\,ab$

$\Rightarrow 2ab\cos C = \pm\sqrt{2}\,ab \Rightarrow \cos C = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos C = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে , $\cos C = \cos 45^\circ$ $\quad C = 45^\circ$

$\cos C = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে , $\cos C = -\cos 45^\circ$

$\Rightarrow \cos C = \cos(180^\circ - 45^\circ) = \cos 135^\circ$

$C = 135^\circ$

$C = 45^\circ$ অথবা , 135° (Showed)

9(b) $c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$ হলে দেখাও যে, $C = 60^\circ$ অথবা 120°

সমাধান ঃ দেওয়া আছে ,

$c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$

$\Rightarrow c^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 \;\; 0$

$\Rightarrow (a^2)^2 + (b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = a^2b^2$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 4a^2b^2.\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \cos^2 C = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos C = \pm \dfrac{1}{2}$

$\cos C = \dfrac{1}{2} = \cos 60° \Rightarrow C = 60°$

অথবা , $\cos C = -\dfrac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow C = 120°$

$C = 60°$ অথবা , $120°$

10.(a) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো 13, 14 এবং 15 হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[ব.'০২; চ.'০৫; য.'০৭; ঢা. '০৯]

সমাধান : মনে করি $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$

অর্ধপরিসীমা $s = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$

$= \dfrac{1}{2}(13 + 14 + 15) = \dfrac{1}{2} \times 42 = 21$

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$

$= \sqrt{21.8.7.6} = \sqrt{7056} = 84$ (Ans.)

10(b) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো $\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}, \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}$ এবং $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$ হলে,ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি.বো.০৭]

সমাধান ঃ মনে করি, $a = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$, $b = \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}$ এবং $c = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$

অর্ধপরিসীমা $s = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$

$= \dfrac{1}{2}(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z})$

$= \dfrac{1}{2}.2(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}) = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}$

$s - a = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{z} - \dfrac{z}{x} = \dfrac{x}{y}$

$s - b = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y} - \dfrac{z}{x} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z}$

$s - c = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y} - \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{z} = \dfrac{z}{x}$

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{\left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}\right)\dfrac{x}{y}\dfrac{y}{z}\dfrac{z}{x}}$

$= \sqrt{\left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}\right)}$ (Ans.)

10. (c) $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$ হলে, A কোণের মান নির্ণয় কর। [চ.'০০; য.'০৫,'০৮; রা.'০৭,'১১,'১৩; ঢা.'০৮ ; সি.'১০; দি.'১১,'১৪]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে ,

$(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$

$\Rightarrow (b + c)^2 - a^2 = 3bc$

$\Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 - a^2 = 3bc$

$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc \Rightarrow 2\,bc \cos A = bc$

$\Rightarrow \cos A = \dfrac{1}{2} = \cos 60° \therefore A = 60°$ (Ans.)

10(d) ΔABC -এ যদি $A = 60°$ হয়, তবে দেখাও যে, $b + c = 2a \cos\dfrac{B - C}{2}$

[ঢা.,সি '১০; ব.'০৯; রা.'০৯,'১৪]

প্রমাণ ঃ $b + c = 2R(\sin B + \sin C)$

$2R.2 \sin\dfrac{1}{2}(B + C) \cos\dfrac{1}{2}(B - C$

$= 4R \sin\dfrac{1}{2}(120°) \cos\dfrac{1}{2}(B - C)$

$[\because A = 60° \quad \therefore B + C = 120°]$

$= 4R \cos 60° \cos\dfrac{1}{2}(B - C)$

$= 2.2R \cos A \cos\dfrac{1}{2}(B - C)$

$= 2\,a \cos\dfrac{1}{2}(B - C) =$ R.H.S.

(e) ΔABC -এ $C = 60°$ হলে দেখাও যে $\dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{3}{a+b+c}$

11.(a) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো সমান্তর প্রগমন ভুক্ত হলে দেখাও যে, $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$ ও $\cot\frac{C}{2}$ সমান্তর প্রগমন ভুক্ত।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের বাহু a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

$$a - b = b - c$$

$$\Rightarrow (s-b)-(s-a)=(s-c)-(s-b)$$

$$\Rightarrow s(s-b)-s(s-a)=s(s-c)-s(s-b)$$

$$\Rightarrow \frac{s(s-b)}{\Delta}-\frac{s(s-a)}{\Delta}=\frac{s(s-c)}{\Delta}-\frac{s(s-b)}{\Delta}$$

$$\Rightarrow \cot\frac{B}{2}-\cot\frac{A}{2}=\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \cot\frac{A}{2}-\cot\frac{B}{2}=\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{C}{2}$$

$\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$ ও $\cot\frac{C}{2}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

11(b) a^2, b^2 ও c^2 সমান্তর প্রগমন ভুক্ত হলে প্রমাণ কর যে, cot A, cot B ও cot C সমান্তর প্রগমন ভুক্ত।

প্রমাণ ঃ a^2, b^2 ও c^2 সমান্তরাল শ্রেণীভুক্ত বলে,

$$a^2-b^2=b^2-c^2 \Rightarrow 2a^2-2b^2=2b^2-2c^2$$

$$\Rightarrow 2b^2-2a^2=2c^2-2b^2$$

$$\Rightarrow b^2+c^2-a^2-c^2-a^2+b^2$$

$$=c^2+a^2-b^2-a^2-b^2+c^2$$

$$\Rightarrow \frac{R}{abc}\{(b^2+c^2-a^2)-(c^2+a^2-b^2)\}$$

$$=\frac{R}{abc}\{(c^2+a^2-b^2)-(a^2+b^2-c^2)\}$$

$$\Rightarrow \frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}-\frac{R(c^2+a^2-b^2)}{abc}$$

$$=\frac{R(c^2+a^2-b^2)}{abc}-\frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}$$

$$\Rightarrow \cot A-\cot B=\cot B-\cot C$$

$\therefore$ cotA, cotB ও cotC সমান্তরা শ্রেণীভুক্ত।

11(c) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো m, n, $\sqrt{m^2+mn+n^2}$ হলে, বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ m, n এবং $\sqrt{m^2+mn+n^2}$ একটি ত্রিভুজের বাহু বলে, প্রত্যেকেই ধনাত্মক এবং m ও n এর যেকোন ধনাত্মক মানের জন্য,

$$\sqrt{m^2+mn+n^2} > m \text{ বা, } n$$

$\therefore \sqrt{m^2+mn+n^2}$ বৃহত্তম বাহু। বৃহত্তম কোণ A হলে,

$$\cos A=\frac{m^2+n^2-(\sqrt{m^2+mn+n^2})^2}{2mn}$$

$$=\frac{m^2+n^2-m^2-mn-n^2}{2mn}$$

$$=-\frac{1}{2}=\cos 120^\circ \quad \therefore A=120^\circ$$

অতএব ত্রিভুজটি স্থূলকোণী।

11.(d) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো $2x+3$, x^2+3x+3, x^2+2x হলে, বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $2x+3$, x^2+3x+3 এবং x^2+2x একটি ত্রিভুজের বাহু বলে, প্রত্যেকেই ধনাত্মক।

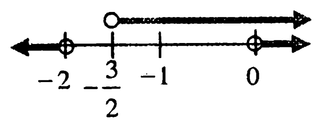
$$2x+3>0 \Rightarrow x>-\frac{3}{2},$$

$$x^2+3x+3>0 \Rightarrow (x+\frac{3}{2})^2+3-\frac{9}{4}>0$$

$\Rightarrow (x+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ যা x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য সত্য এবং

$$x^2+2x>0 \Rightarrow x(x+2)>0$$

$x>0$ অথবা $x<-2$



$\therefore x>0$ - এর সকল বাস্তব মানের জন্য $2x+3$, x^2+3x+3 ও x^2+2x প্রত্যেকেই ধনাত্মক এবং $x^2+3x+3>2x+3, x^2+3x+3>x^2+2x$.

$\therefore x^2+3x+3$ বৃহত্তম বাহু। বৃহত্তম কোণ A হলে,

$$(x^2+3x+3)^2=(2x+3)^2+(x^2+2x)^2-2(2x+3)(x^2+2x)\cos A$$

$$\Rightarrow x^4+9x^2+9+6x^3+18x+6x^2=4x^2+9 \quad 12x+x^4+4x^2+4x^3-2(2x^3+7x^2+6x)\cos A$$

$$\Rightarrow 2. \quad +7x^2+6x=$$

$$-2(2x^3+7x^2+6x)\cos A$$

$\Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2} = \cos 120°$ $A = 120°$

11(e) যদি কোন ত্রিভুজের যে কোন দুইটি কোণের কোসাইন তাদের বিপরীত বাহুর সথে ব্যস্ত ভেদে অন্বিত হয়, তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী ।

প্রমাণ ঃ মনে করি , ΔABC -এ ,

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{2R\sin B}{2R\sin A}$$

$\Rightarrow \cos A\sin A = \cos B \sin B$

$\Rightarrow 2 \sin A \cos A = 2 \sin B \cos B$

$\Rightarrow \sin 2A = \sin 2B$

$\Rightarrow \sin 2A - \sin 2B = 0$

$\Rightarrow 2\sin(A - B)\cos(A + B) = 0$

$\Rightarrow \sin(A - B) \cos(A + B) = 0$

$\sin(A - B) = 0 \Rightarrow \sin(A - B) = \sin 0$

$A - B = 0 \Rightarrow A = B$

অথবা , $\cos(A + B) = 0$

$\Rightarrow \cos(A + B) = \cos 90° \Rightarrow A + B = 90°$

$C = 90°$

অতএব , ত্রিভুজটি সমবাহু অথবা সমকোণী ।

11(f) দেখাও যে, কোন ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 3 , 5 ও 7 হলে ত্রিভুজটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ ; স্থূলকোণটির মান নির্ণয় কর। [চ.,কু.'১০; দি.'১২]

প্রমাণ ঃ এখানে , বৃহত্তম বাহু = 7.

$\therefore$ বৃহত্তম কোণটি A হলে আমরা পাই ,

$$\cos A = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2.3.5} = \frac{9 + 25 - 49}{30}$$

$$= \frac{34 - 49}{30} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2} = \cos 120°$$

$A = 120°$, যা স্থূলকোণ।

অতএব, ত্রিভুজটি একটি স্থূলকোণী এবং স্থূলকোণটির মান $120°$

12.(a) ΔABC -এ যদি $A = 75°$, $B = 45°$ হয় , তবে দেখাও যে , $c : b = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ [ব.'০৭]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $A = 75^0, B = 45^0$

$\therefore C = 180^0 - (75^0 + 45^0) = 180^0 - 120^0 = 60^0$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{b}{\sin 45^0} = \frac{c}{\sin 60^0} \Rightarrow \frac{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$c : a = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$$

12. (b) ΔABC- এ যদি $A = 45°$, $B = 75°$ হয় , তবে দেখাও যে , $a + \sqrt{2}\, c = 2b$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $A = 45^0 . B = 75^0$

$\therefore C = 180^0 - (45^0 + 75^0) = 180^0 - 120^0 = 60^0$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 45^0} = \frac{b}{\sin 75^0} = \frac{c}{\sin 60^0}$$

এখন, $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$

$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = k \text{ (ধরি)}$$

$$a = \frac{k}{\sqrt{2}}, b = \frac{k(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}, c = \frac{\sqrt{3}}{2}k$$

এখন, $a + \sqrt{2}c = \frac{k}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}k = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}k$

$$= 2.\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}k = 2b$$

$a + \sqrt{2}c = 2b$

12(c) $a = 2b$ এবং $A = 3B$ হলে, ত্রিভুজের কোণত্রয় নির্ণয় কর। [কু. '০৯,'১২ ; প্র.ভ.প'০৩]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $a = 2b \cdots\cdots(1)$

এবং $A = 3B \cdots\cdots\cdots(2)$

(1) হতে পাই , $2R \sin A = 2 .2R \sin B$

$\Rightarrow \sin A = 2\sin B \Rightarrow \sin 3B = 2\sin B$; (2) দ্বারা।

$\Rightarrow 3\sin B - 4\sin^3 B = 2\sin B$

$\Rightarrow 4\sin^3B - \sin B = 0 \Rightarrow \sin B(4\sin^2B - 1) = 0$

$\Rightarrow \sin B(2\sin B + 1)(2\sin B - 1) = 0$

$\sin B = 0$ হলে , $B = 0$

$2\sin B + 1 = 0$ হলে , $\sin B = -\frac{1}{2}$

$B = 150°$ এবং $A = 3B = 450°$

কিন্তু ABC ত্রিভুজের জন্য, $B = 0$ এবং $A = 450°$ সম্ভব নয় ।

$\sin B \neq 0$ এবং $\sin B \neq -1/2$.

$\sin B = \frac{1}{2} = \sin 30° \Rightarrow B = 30°$

$A = 3B = 3 \times 30° = 90°$ এবং

$C = 180° - (90° + 30°)$

$= 180° - 120° = 60°$

ত্রিভুজের কোণ তিনটি $30°, 60°, 90°$

13. (a) ΔABC - এ, $a = 2$, $b = \sqrt{3} + 1$ এবং $C = 60°$ হলে ত্রিভুজটির অপর বহু ও কোণদ্বয় নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প'০২]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে; ΔABC –এ $a = 2, b = \sqrt{3} + 1$ এবং $C = 60^0$. ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$= 2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2.2.(\sqrt{3}+1)\cos 60^0$

$= 4 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4(\sqrt{3}+1)/2$

$= 8 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2 = 6 \qquad c = \sqrt{6}$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sin B} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^0}$

$\Rightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2} = 2\sqrt{2}$

$\sin A = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^0 \Rightarrow A = 45^0$

$\sin B = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sin 75^0 \Rightarrow B = 75^0$

ত্রিভুজটির অপর বাহু $c = \sqrt{6}$ এবং কোণদ্বয় $A = 45^0$ ও $B = 75^0$

13(b) ΔABC- এ, $A = 45°$, $C = 105°$ এবং $c = \sqrt{3} + 1$ হলে ত্রিভুজটির অপর কোণ ও বহুদ্বয় নির্ণয় কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $A = 45^0$ $C = 105^0$ এবং $c = \sqrt{3} + 1$.

$\therefore B = 180^0 - (45^0 + 105^0) = 180^0 - 150^0 = 30^0$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \frac{a}{\sin 45^0} = \frac{b}{\sin 30^0} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sin 105^0}$

এখন , $\sin 105° = \sin(60° + 45°)$

$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow \sqrt{2}a = 2b = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow a = 2, b = \sqrt{2}$

ত্রিভুজটির অপর কোণ 30^0 এবং বাহুদ্বয় 2 ও $\sqrt{2}$

13(c) ΔABC-এ , $B = 30°$, $C = 45°$ ও $a = (\sqrt{3} + 1)$ সেমি. দেখাও যে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ বর্গ সেমি.।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $B = 30^0, C = 45^0$ এবং $a = (\sqrt{3}+1)$ সে.মি.

$\therefore A = 180^0 - (30^0 + 45^0) = 180^0 - 75^0 = 105^0$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \frac{a}{\sin 105^0} = \frac{c}{\sin 45^0}$

এখন , $\sin 105° = \sin(60° + 45°)$

$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{c}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{2}c \Rightarrow c = 2$

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} ac \sin B$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) \times 2 \sin 30^0$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) \times 2 \times \frac{1}{2}$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ বর্গ সে.মি.

14. ABC ত্রিভুজে A, B ও C কোণের বিপরীত বাহু যথাক্রমে a, b ও c. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে,

(a) $\tan A = \tan B + \tan C$, যখন $\cos A = \cos B \cos C$. **[য.'০৩,'০৯; ব.,কু.,দি.'১৩; রা.'১৪]**

(b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$ **[ঢা.'১২;কু.'০৬; ব.'১২]**

(c) $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ **[ব.'১১ ; য.'১১,'১৪; চ.'১০; দি.'১১; রা.'১৩; মা.'১০,'১২,'১৪]**

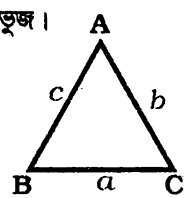
অথবা, প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য তার বিপরীত কোণের সাইন (sine)-এর সমানুপাতিক ।
[ঢা.'১৩ ; ব.'১০,'১৪; রা.'১২ ; কু.'১০; য.'০৮; দি.'১০,'১৩; চ.'১৪]

সমাধান : (a) প্রশ্নমালা VII B এর উদাহরণ 7 দ্রষ্টব্য।

(b) প্রশ্নমালা VII F এর উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য।

(c) প্রশ্নমালা VII G এর কোসাইন সূত্র ও সাইন সূত্র দ্রষ্টব্য।

15. পাশের চিত্রে, ABC একটি ত্রিভুজ।



(a) ত্রিভুজটির বাহু তিনটি $a = 3$ একক, $b = 5$ একক ও $c = 7$ একক হলে, এর পরিব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

(b) $A = \frac{\pi}{16}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$2 \sin A = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

[য. '১৪; কু.'০৩; ব. '১০,'১৪; রা.'১২,'১৪; চ.'১৪]

(c) $\cos A = \sin B - \cos C$ হলে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী । **[কু.'১৩ ;, রা.'১২; চ.'০৮ ; য.'০৯,'১২,'১৪ ; সি.'১১; ঢা.'০৭,'১৩; ব.'১০,'১২; মা.'০৯,'১৪ প্র.ভ.প.'০৪,'০৫]**

সমাধান : (a) ত্রিভুজটির অর্ধপরিসীমা,

$s = \frac{3+5+7}{2} = 7 \cdot 5$ একক।

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল,

$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{7 \cdot 5(7 \cdot 5 - 3)(7 \cdot 5 - 5)(7 \cdot 5 - 7)}$

$= \sqrt{7 \cdot 5 \times 4 \cdot 5 \times 2 \cdot 5 \times 0 \cdot 5}$

$= 6 \cdot 495$ বর্গ একক।

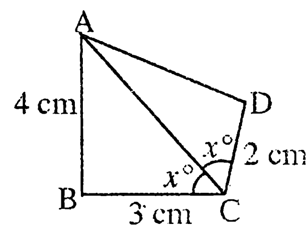
ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ, $R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{3 \times 5 \times 7}{4 \times 6 \cdot 495}$

$= \frac{3 \times 5 \times 7}{4 \times 6 \cdot 495} = 4 \cdot 041$ একক (প্রায়)

(b) প্রশ্নমালা VII D এর উদাহরণ 1 দ্রষ্টব্য।

(c) প্রশ্নমালা VII G এর উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য।

16.



সমাধান: (a) $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

$\cos x^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$, $\sin x^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$

(b) ΔADC এ কোসাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC.CD \cos x^\circ$

$= 5^2 + 2^2 - 2 \times 5 \times 2 \times \frac{3}{5}$

$= 25 + 4 - 12 = 17$ বর্গ সে.মি.

(c) ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল + ACD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AB \times BC) + \frac{1}{2}(AC \times CD \sin x^0)$

$=\frac{1}{2}(4\times3)+\frac{1}{2}(5\times2\times\frac{4}{5})$

$= 6 + 4 = 10$ বর্গ সে.মি.।

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে,

1(a) $(b-c)\sin A + (c-a)\sin B + (a-b)\sin C = 0$

প্রমাণ : L.H.S. $= (b-c)\sin A + (c-a)\sin B + (a-b)\sin C$

$= (2R\sin B - 2R\sin C)\sin A + (2R\sin C - 2R\sin A)\sin B + (2R\sin A - 2R\sin B)\sin C$

$= 2R(\sin A\sin B - \sin A\sin C + \sin B\sin C - \sin A\sin B + \sin A\sin C - \sin B\sin C)$

$= 2R\times0 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

1(b) $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$

প্রমাণ : L.H.S. $= a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B)$

$= 2R\sin A(\sin B - \sin C) + 2R\sin B(\sin C - \sin A) + 2R\sin C(\sin A - \sin C)$

$= 2R(\sin A\sin B - \sin A\sin C + \sin B\sin C - \sin A\sin B + \sin A\sin C - \sin B\sin C)$

$= 2R\times0 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

2.(a) $(b^2-c^2)\sin^2 A + (c^2-a^2)\sin^2 B + (a^2-b^2)\sin^2 C = 0$

প্রমাণ : L.H.S.$= (b^2-c^2)\sin^2A + (c^2-a^2)\sin^2B + (a^2-b^2)\sin^2C$

$= (4R^2\sin^2B - 4R^2\sin^2C)\sin^2A + (4R^2\sin^2C - 4R^2\sin^2A)\sin^2B + (4R^2\sin^2A - 4R^2\sin^2B)\sin^2C$

$= 4R^2(\sin^2A\sin^2B - \sin^2C\sin^2A + \sin^2B\sin^2C - \sin^2A\sin^2B + \sin^2C\sin^2A - \sin^2B\sin^2C)$

$= 4R^2\times0 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

2(b) $a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0$ [কু.'০০]

প্রমাণ : L.H.S. $= a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B)$

$= 2R\sin A(\sin B\cos C - \cos B\sin C) + 2R\sin B(\sin C\cos A - \sin A\cos C) + 2R\sin C(\sin A\cos B - \sin B\cos A)$

$= 2R(\sin A\sin B\cos C - \sin A\cos B\sin C + \cos A\sin B\sin C - \sin A\sin B\cos C + \sin A\cos B\sin C - \cos A\sin B\sin C)$

$= 2R\times0 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

3. (a) $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A} + \dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B} + \dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C} = 0$

প্রমাণ : $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}$

$= \dfrac{(2R\sin A)^2\sin(B-C)}{\sin A}$

$= 4R^2\sin A\sin(B-C)$

$= 4R^2\sin\{\pi-(B+C)\}\sin(B-C)$

$= 4R^2\sin(B+C)\sin(B-C)$

$= 4R^2(\sin^2B - \sin^2C)$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B} = 4R^2(\sin^2C - \sin^2A)$ এবং

$\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C} = 4R^2(\sin^2A - \sin^2B)$

এখন, L.H.S.$= \dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A} + \dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B} + \dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}$

$= 4R^2(\sin^2B - \sin^2C + \sin^2C - \sin^2A + \sin^2A - \sin^2B)$

$= 4R^2\times0 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

3(b) $a\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2} + b\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C-A}{2} + c\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} = 0$ [রা.'০৩]

প্রমাণ : $a \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B-C}{2}$

$= 2R \sin A \sin\frac{1}{2}A \sin\frac{B-C}{2}$

$= 2R \sin A \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}) \sin\frac{B-C}{2}$

$= 2R \sin A \cos\frac{B+C}{2} \sin\frac{B-C}{2}$

$= R \sin A (\sin B - \sin C)$

অনুরূপভাবে আমরা পাই ,

$b \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C-A}{2} = R\sin B(\sin C - \sin A)$ এবং

$c \sin\frac{C}{2} \sin\frac{A-B}{2} = R\sin C(\sin A - \sin B)$

এখন , L.H.S.= $a \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B-C}{2} + b \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C-A}{2} + c \sin\frac{C}{2} \sin\frac{A-B}{2}$

$= R(\sin A \sin B - \sin C \sin A + \sin B \sin C - \sin A \sin B + \sin C \sin A - \sin B \sin C)$

$= R \times 0 = 0$

4(a) $\frac{2\cot A + \cot B + \cot C}{\cot A - \cot B + 2\cot C} = \frac{b^2 + c^2}{2b^2 - c^2}$

প্রমাণ : $2\cot A + \cot B + \cot C$

$= 2\frac{R}{abc}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{R}{abc}(c^2 + a^2 - b^2) + \frac{R}{abc}(a^2 + b^2 - c^2)$

$= \frac{R}{abc}(2b^2 + 2c^2 - 2a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2)$

$= \frac{R}{abc}(2b^2 + 2c^2) = \frac{2R}{abc}(b^2 + c^2)$

এবং $\cot A - \cot B + 2\cot C = \frac{R}{abc}\{b^2 + c^2 - a^2 - (c^2 + a^2 - b^2) + 2(a^2 + b^2 - c^2)\}$

$= \frac{R}{abc}(b^2 + c^2 - a^2 - c^2 - a^2 + b^2 + 2a^2 + 2b^2 - 2c^2)$

$= \frac{R}{abc}(4b^2 - 2c^2) = \frac{2R}{abc}(2b^2 - c^2)$

এখন , L.H.S. $= \frac{2\cot A + \cot B + \cot C}{\cot A - \cot B + 2\cot C}$

$= \frac{\frac{2R}{abc}(b^2 + c^2)}{\frac{2R}{abc}(2b^2 - c^2)} = \frac{b^2 + c^2}{2b^2 - c^2}$ = R.H.S.

4(b) $4\Delta(\cot A + \cot B + \cot C) = a^2 + b^2 + c^2$

প্রমাণ : L.H.S.= $4\Delta(\cot A + \cot B + \cot C)$

$= 4\Delta\frac{R}{abc}(b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2)$

$= 4.\frac{abc}{4R}\frac{R}{abc}(a^2 + b^2 + c^2)$

$= a^2 + b^2 + c^2$ = R.H.S (Proved)

5(a) $(a + b + c)(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}) = 2c \cot\frac{C}{2}$

প্রমাণ : L.H.S.= $(a + b + c)(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2})$

$= (a + b + c)\left(\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta} + \frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}\right)$

$= (s - c)(a + b + c)\frac{2s - b - a}{\Delta}$

$= (s - c).2s\frac{a + b + c - b - a}{\Delta}$

$= 2c.\frac{s(s-c)}{\Delta} = 2c \cot\frac{C}{2}$ = R.H.S. (Proved)

(b) $(b + c - a)\tan\frac{A}{2} = (c + a - b)\tan\frac{B}{2} = (a + b - c)\tan\frac{C}{2}$

প্রমাণ : L.H.S. $= (b + c - a)\tan\frac{A}{2}$

$= (a + b + c - 2a)\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$

$= (2s - 2a)\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$

$$= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

M.H.S. $= (c + a - b) \tan\frac{B}{2}$

$$= (2s - 2b)\frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$$

$$= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

R.H.S. $= (a + b - c) \tan\frac{C}{2}$

$$= (2s - 2c)\ \frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$$

$$= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

$\therefore$ L.H.S. = M.H.S. = R.H.S. (Proved)

6.(a) $\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{s^2}{abc}$

[প্র.ভ.প. '০০]

L.H.S. $= \frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2}$

$$= \frac{1}{a}\ \frac{s(s-a)}{bc} + \frac{1}{b}\ \frac{s(s-b)}{ca} + \frac{1}{c}\ \frac{s(s-c)}{ab}$$

$$= \frac{s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)}{abc}$$

$$= \frac{3s^2 - s(a+b+c)}{abc} = \frac{3s^2 - s.2s}{abc}$$

$$= \frac{s^2}{abc} = \text{R.H.S.}$$

6(b) $\frac{a^2-b^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)} = \Delta$

প্রমাণ : $\frac{a^2-b^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$

$$= \frac{4R^2(\sin^2 A-\sin^2 B)}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$$

$$= \frac{2R^2\sin(A+B)\sin(A-B)\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$$

$$= 2R^2\sin\{\pi-(A+B)\}\sin A\sin B$$

$$= 2R^2\sin A\sin B\sin C = 2R^2\ \frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R}$$

$$= \frac{abc}{4R} = \Delta = \text{R.H.S.(Proved)}$$

7. (a) $\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}+\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}=0$

প্রমাণ : $\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C} = \frac{4R^2(\sin^2 B-\sin^2 C)}{\cos B+\cos C}$

$$= \frac{4R^2(\cos^2 C-\cos^2 B)}{\cos B+\cos C}$$

$$= \frac{4R^2(\cos C+\cos B)(\cos C-\cos B)}{\cos B+\cos C}$$

$$= 4R^2(\cos C-\cos B)$$

অনুরূপভাবে আমরা পাই ,

$\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A} = 4R^2(\cos A-\cos C)$ এবং

$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B} = 4R^2(\cos B-\cos A)$

এখন , L.H.S. $= \frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C} + \frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A} + \frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}$

$$= 4R^2\{\cos C-\cos B+\cos A-\cos C\ \cos B-\cos A\}$$

$$= 4R^2\times 0 = 0 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

7(b) $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}=0$

প্রমাণ : L.H.S. $= \frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}$

$$= \frac{b-c}{a}\times\frac{s(s-a)}{bc}+\frac{c-a}{b}\times\frac{s(s-b)}{ca}$$

$$+\frac{a-b}{c}\times\frac{s(s-c)}{ab}$$

$$=\frac{s}{abc}\{(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)$$
$$+(a-b)(s-c)\}$$

$$=\frac{s}{abc}\{s(b-c+c-a+a-b)+$$
$$(-ab+ca-bc+ab-ca+bc)\}$$

$$=\frac{s}{abc}\{s\times 0+0\}=0 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

8(a) ΔABC -তে $\frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos A}{7}=\frac{\cos B}{19}=\frac{\cos C}{25}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$$\frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}=\frac{b+c+c+a+a+b}{11+12+13}$$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}=\frac{2(a+b+c)}{36}$$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}=\frac{a+b+c}{18}$$

$$\frac{a+b+c}{18}=\frac{b+c}{11}=\frac{a+b+c-b-c}{18-11}=\frac{a}{7},$$

$$\frac{a+b+c}{18}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b+c-c-a}{18-12}=\frac{b}{6}\text{ এবং}$$

$$\frac{a+b+c}{18}=\frac{a+b}{13}=\frac{a+b+c-a-b}{18-13}=\frac{c}{5}$$

$$\frac{a}{7}=\frac{b}{6}=\frac{c}{5}=k\ \text{(say)}$$

$\Rightarrow a=7k,\ b=6k,\ c=5k$

এখন,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{36k^2+25k^2-49k^2}{2.6k.5k}$$
$$=\frac{61-49}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{25k^2+49k^2-36k^2}{2.5k.7k}$$
$$=\frac{74-36}{70}=\frac{38}{70}=\frac{19}{35}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{49k^2+36k^2-25k^2}{2.7k.6k}$$
$$=\frac{85-25}{84}=\frac{60}{84}=\frac{5}{7}$$

$$\therefore \cos A\quad \cos B:\cos C=\frac{1}{5}:\frac{19}{35}:\frac{5}{7}=7\quad 19:25$$

$$\frac{\cos A}{7}=\frac{\cos B}{19}=\frac{\cos C}{25}\ \text{(Showed)}$$

8. (b) ΔABC- এ, $a=6$, $b=3\sqrt{3}$ এবং $A=90°$ হলে B কোণের মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, ΔABC −এ $a=6, b=3\sqrt{3}$ ও $A=90^0$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

$$\Rightarrow \frac{6}{\sin 90^0}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin B}\Rightarrow \frac{6}{1}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \sin B=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^0 \qquad B=60^0$$

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 40 সে.মি., 50 সে.মি. এবং 60 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 40 সে.মি., 50 সে.মি. এবং 60 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয়।

মুলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার তিনটি বাহু যথাক্রমে a = 40 সে.মি., b = 50 সে.মি. এবং c = 60 সে.মি.। ΔABC তে বৃহত্তম বাহু c = 60 সে.মি. এর বিপরীত কোণ $\angle C$ বৃহত্তম কোণ এবং ক্ষুদ্রতম বাহু a = 40 সে.মি. এর বিপরীত কোণ $\angle A$ ক্ষুদ্রতম কোণ। তাহলে প্রদত্ত উপাত্তের সাহায্যে ΔABC অঙ্কন করে চাঁদার সাহায্যে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয় করি এবং সূত্র $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ও $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ থেকে প্রাপ্ত মানের সাথে সত্যতা যাচাই করি।

$$= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

M.H.S. $= (c + a - b)\tan\dfrac{B}{2}$

$$= (2s - 2b)\frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$$

$$= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

R.H.S. $= (a + b - c)\tan\dfrac{C}{2}$

$$= (2s - 2c)\frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$$

$$= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

$\therefore$ L.H.S. = M.H.S. = R.H.S. (Proved)

6.(a) $\dfrac{1}{a}\cos^2\dfrac{A}{2} + \dfrac{1}{b}\cos^2\dfrac{B}{2} + \dfrac{1}{c}\cos^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{s^2}{abc}$

[প্র.ভ.প. '০০]

L.H.S. $= \dfrac{1}{a}\cos^2\dfrac{A}{2} + \dfrac{1}{b}\cos^2\dfrac{B}{2} + \dfrac{1}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{s(s-a)}{bc} + \frac{1}{b}\,\frac{s(s-b)}{ca} + \frac{1}{c}\,\frac{s(s-c)}{ab}$$

$$= \frac{s(s-a) + s(s-b) + s(s-c)}{abc}$$

$$= \frac{3s^2 - s(a+b+c)}{abc} = \frac{3s^2 - s.2s}{abc}$$

$$= \frac{s^2}{abc} = \text{R.H.S.}$$

6(b) $\dfrac{a^2 - b^2}{2}\cdot\dfrac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)} = \Delta$

প্রমাণ : $\dfrac{a^2 - b^2}{2}\cdot\dfrac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$

$$= \frac{4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B)}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$$

$$= \frac{2R^2\sin(A+B)\sin(A-B)\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$$

$$= 2R^2\sin\{\pi - (A+B)\}\sin A\sin B$$

$$= 2R^2\sin A\sin B\sin C = 2R^2\,\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}$$

$$= \frac{abc}{4R} = \Delta = \text{R.H.S.(Proved)}$$

7. (a) $\dfrac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \dfrac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} + \dfrac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} = 0$

প্রমাণ : $\dfrac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} = \dfrac{4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C)}{\cos B + \cos C}$

$$= \frac{4R^2(\cos^2 C - \cos^2 B)}{\cos B + \cos C}$$

$$= \frac{4R^2(\cos C + \cos B)(\cos C - \cos B)}{\cos B + \cos C}$$

$$= 4R^2(\cos C - \cos B)$$

অনুরূপভাবে আমরা পাই ,

$\dfrac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} = 4R^2(\cos A - \cos C)$ এবং

$\dfrac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} = 4R^2(\cos B - \cos A)$

এখন , L.H.S. $= \dfrac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \dfrac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} + \dfrac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B}$

$= 4R^2\{\cos C - \cos B + \cos A - \cos C$
$\cos B - \cos A\}$

$= 4R^2 \times 0 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

7(b) $\dfrac{b-c}{a}\cos^2\dfrac{A}{2} + \dfrac{c-a}{b}\cos^2\dfrac{B}{2} + \dfrac{a-b}{c}\cos^2\dfrac{C}{2} = 0$

প্রমাণ : L.H.S. $= \dfrac{b-c}{a}\cos^2\dfrac{A}{2} + \dfrac{c-a}{b}\cos^2\dfrac{B}{2} + \dfrac{a-b}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}$

$$= \frac{b-c}{a}\times\frac{s(s-a)}{bc} + \frac{c-a}{b}\times\frac{s(s-b)}{ca}$$

$$+\frac{a-b}{c}\times\frac{s(s-c)}{ab}$$

$$=\frac{s}{abc}\{(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)$$
$$+(a-b)(s-c)\}$$

$$=\frac{s}{abc}\{s(b-c+c-a+a-b)+$$
$$(-ab+ca-bc+ab-ca+bc)\}$$

$$=\frac{s}{abc}\{s\times 0+0\}=0 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

8(a) ΔABC -তে $\frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos A}{7}=\frac{\cos B}{19}=\frac{\cos C}{25}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$$\frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}=\frac{b+c+c+a+a+b}{11+12+13}$$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}=\frac{2(a+b+c)}{36}$$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}=\frac{a+b+c}{18}$$

$$\frac{a+b+c}{18}=\frac{b+c}{11}=\frac{a+b+c-b-c}{18-11}=\frac{a}{7},$$

$$\frac{a+b+c}{18}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b+c-c-a}{18-12}=\frac{b}{6} \text{ এবং}$$

$$\frac{a+b+c}{18}=\frac{a+b}{13}=\frac{a+b+c-a-b}{18-13}=\frac{c}{5}$$

$$\frac{a}{7}=\frac{b}{6}=\frac{c}{5}=k \text{ (say)}$$

$$\Rightarrow a=7k,\ b=6k,\ c=5k$$

এখন,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{36k^2+25k^2-49k^2}{2.6k.5k}$$
$$=\frac{61-49}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{25k^2+49k^2-36k^2}{2.5k.7k}$$
$$=\frac{74-36}{70}=\frac{38}{70}=\frac{19}{35}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{49k^2+36k^2-25k^2}{2.7k.6k}$$
$$=\frac{85-25}{84}=\frac{60}{84}=\frac{5}{7}$$

$$\therefore \cos A \quad \cos B : \cos C=\frac{1}{5}:\frac{19}{35}:\frac{5}{7}=7 \quad 19:25$$

$$\frac{\cos A}{7}=\frac{\cos B}{19}=\frac{\cos C}{25} \text{ (Showed)}$$

8. (b) ΔABC- এ, $a=6$, $b=3\sqrt{3}$ এবং $A=90°$ হলে B কোণের মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $a=6, b=3\sqrt{3}$ ও $A=90^0$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

$$\Rightarrow \frac{6}{\sin 90^0}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin B}\Rightarrow \frac{6}{1}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \sin B=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^0 \qquad B=60^0$$

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 40 সে.মি., 50 সে.মি. এবং 60 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 40 সে.মি., 50 সে.মি. এবং 60 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয়।

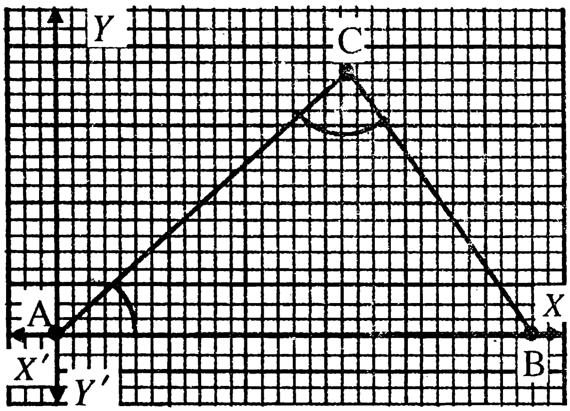
মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার তিনটি বাহু যথাক্রমে a = 40 সে.মি., b = 50 সে.মি. এবং c = 60 সে.মি.। ΔABC তে বৃহত্তম বাহু c = 60 সে.মি. এর বিপরীত কোণ $\angle C$ বৃহত্তম কোণ এবং ক্ষুদ্রতম বাহু a = 40 সে.মি. এর বিপরীত কোণ $\angle A$ ক্ষুদ্রতম কোণ। তাহলে প্রদত্ত উপাত্তের সাহায্যে ΔABC অঙ্কন করে চাঁদার সাহায্যে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয় করি এবং সূত্র $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ও $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ থেকে প্রাপ্ত মানের সাথে সত্যতা যাচাই করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'AX$ ও YAY' আঁকি ।

2. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 সে.মি. ধরি ।



3. গ্রাফ পেপারে AX বরাবর ক্ষুদ্রতম $(60 \div 2)$ অর্থাৎ 30 বর্গের বাহুর সমান করে বৃহত্তম বাহু AB = 60 সে.মি. কেটে নেই।

4. A কে কেন্দ্র করে ক্ষুদ্রতম $(50 \div 2)$ অর্থাৎ 25 বর্গের বাহুর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি এবং B কে কেন্দ্র করে $(40 \div 2)$ অর্থাৎ 20 বর্গের বাহুর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে আরও একটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে। A, B এবং B, C যোগ করি। তাহলে ΔABC তে AB = c = 60 সে.মি., BC = a = 40 সে.মি. এবং AC = b = 50 সে.মি. সূচিত করে।

5. চাঁদার সাহায্যে বৃহত্তম কোণ $\angle C$ এবং ক্ষুদ্রতম কোণ $\angle A$ নির্ণয় করি।

হিসাব ঃ $\cos C = \dfrac{40^2 + 50^2 - 60^2}{2 \times 40 \times 50}$

$= \dfrac{1600 + 2500 - 3600}{4000} = \dfrac{500}{4000} = 0{\cdot}125$

$\angle C = 82{\cdot}82°$

$\cos A = \dfrac{50^2 + 60^2 - 40^2}{2 \times 50 \times 60}$

$= \dfrac{2500 + 3600 - 1600}{6000} = \dfrac{4500}{6000} = 0{\cdot}75$

$\angle A = 41{\cdot}41°$

ফল সংকলন ঃ

বৃহত্তম কোণ C নির্ণয়		ক্ষুদ্রতম কোণ A নির্ণয়	
গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান
$\angle C = 83°$	$\angle C = 82{\cdot}82°$	$\angle A = 41{\cdot}5°$	$\angle A = 41{\cdot}41°$

ফলাফল ঃ নির্ণেয় বৃহত্তম কোণ $\angle C = 83°$ এবং ক্ষুদ্রতম কোণ $\angle A = 41{\cdot}5°$।

মন্তব্য ঃ গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

2. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি 105°, 60°, 15° হলে ত্রিভুজটির বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ একটি ত্রিভুজের কোণগুলি 105° 60°, 15° হলে ত্রিভুজটির বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয়

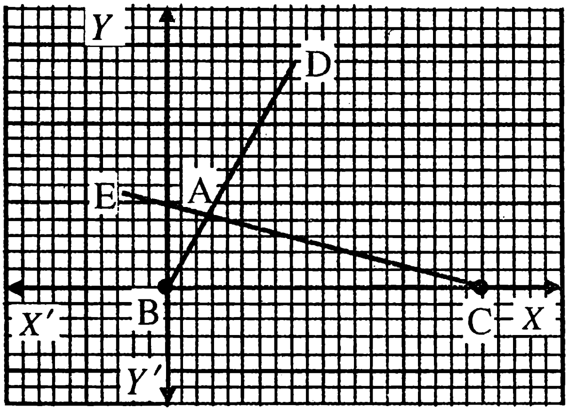
মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ΔABC এর কোণগুলি $\angle A = 105°$ $\angle B = 60°$ ও $\angle C = 15$ এর বিপরীত বাহুগুলি যথাক্রমে a, b ও c । তাহলে প্রদত্ত উপাত্ত হতে গ্রাফের সাহায্যে এবং $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ সূত্রের সাহায্যে a, b ও c এর অনুপাত নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'BX$ ও YBY' আঁকি ।

2. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 সে.মি. ধরে BC = a = 10 সে.মি. কেটে নেই ।



3. চাঁদার সাহায্যে B বিন্দুতে $\angle CBD = 60°$ ও C বিন্দুতে $\angle BCE = 15°$ অঙ্কন করি। BD ও CE রেখা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

4. গ্রাফ থেকে চাঁদার সাহায্যে $\angle A$ এবং পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে AB ও AC বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে BX বরাবর বসিয়ে যথাক্রমে c ও b বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

হিসাব ঃ আমরা জানি, ΔABC তে

$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow \angle A + 60° + 15° = 180°$

$\angle A = 105°$

আবার, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 105^0} = \frac{b}{\sin 60^0} = \frac{c}{\sin 15^0}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{0\cdot966} = \frac{b}{0\cdot866} = \frac{c}{0\cdot259}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{0\cdot966\times10}{0\cdot966}} = \frac{b}{\frac{0\cdot866\times10}{0\cdot966}} = \frac{c}{\frac{0\cdot259\times10}{0\cdot966}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{8\cdot96} = \frac{c}{2\cdot68}$$

$a : b : c = 10 \quad 8\cdot96 : 2\cdot68$

ফল সংকলন ঃ

a : b : c নির্ণয়	
গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত অনুপাত ঃ a b c = 10 : 9 : 2·7	সূত্র থেকে প্রাপ্ত অনুপাত ঃ a b : c = 10 : 8·96 : 2·68

ফলাফল ঃ নির্ণেয় অনুপাত

$a \quad b \quad c = 10 \quad 8\cdot96 \quad 2\cdot68$

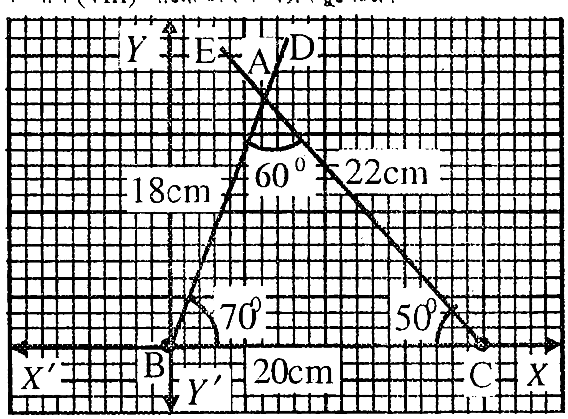
মন্তব্য ঃ গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

3. একটি ত্রিভুজের একটি বাহু 20 সে.মি. এবং এ বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ 70° ও 50° দেওয়া আছে, অপর কোণ ও বাহুদ্বয় নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ একটি ত্রিভুজের একটি বাহু 20 সে.মি. এবং এ বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ 70° ও 50° দেওয়া আছে, অপর কোণ ও বাহুদ্বয় নির্ণয় করতে হবে।

মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার একটি বাহু $a = 20$ সে.মি. এবং এ বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle B = 70°$ $\angle C = 50°$ দেওয়া আছে। তাহলে প্রদত্ত উপাত্ত থেকে a বাহুর বিপরীত কোণ $\angle A$ এবং $\angle B$ ও $\angle C$ কোণের বিপরীত বাহু যথাক্রমে b ও c গ্রাফের সাহায্যে এবং $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ ও $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।



কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'BX$ ও YBY' আঁকি ।

2. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 সে.মি. ধরে BX বরাবর ক্ষুদ্রতম 20 বর্গের বাহুর সমান করে BC = 20 সে.মি. কেটে নেই।

3. চাঁদার সাহায্যে BC রেখার B বিন্দুতে $\angle CBD = 70°$ এবং C বিন্দুতে $\angle BCE = 50°$ অঙ্কন করি। BD ও CE রেখা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

হিসাব ঃ আমরা জানি, ΔABC তে

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$
$$\Rightarrow \angle A + 70° + 50° = 180°$$
$$\angle A = 60°$$

আবার, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} \Rightarrow \dfrac{20}{\sin 60^0} = \dfrac{b}{\sin 70^0}$

$$\Rightarrow b = \frac{\sin 70^0}{\sin 60^0} \times 20 = \frac{0 \cdot 939}{0 \cdot 866} \times 20$$

$= 21 \cdot 69$ সে.মি.(প্রায়)

তদ্রূপ, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow \dfrac{20}{\sin 60^0} = \dfrac{c}{\sin 50^0}$

$$\Rightarrow c = \frac{\sin 50^0}{\sin 60^0} \times 20 = \frac{0 \cdot 766}{0 \cdot 866} \times 20$$

$= 17 \cdot 69$ সে.মি. (প্রায়)

ফল সংকলন ঃ

	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান ঃ	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান ঃ
$\angle A$	$60°$	$60°$
b	22 সে.মি.	$21 \cdot 69$ সে.মি.(প্রায়)
c	18 সে.মি.	$17 \cdot 69$ সে.মি.(প্রায়)

ফলাফল ঃ নির্ণেয় $\angle A = 60°$

b বাহুর দৈর্ঘ্য $AC = 21 \cdot 69$ সে.মি. (প্রায়) ও c বাহুর দৈর্ঘ্য $AB = 17 \cdot 69$ সে.মি. (প্রায়)

মন্তব্য ঃ গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

4. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 9 সে.মি. 6 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° দেওয়া আছে, অপর বাহু ও কোণদ্বয় নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 9 সে.মি. , 6 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $60°$ দেওয়া আছে, অপর বাহু ও কোণদ্বয় নির্ণয় ।

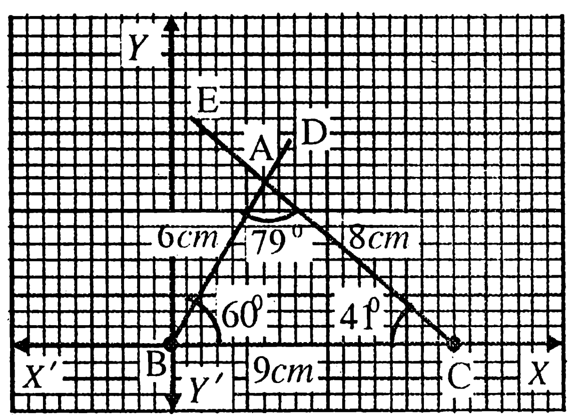
মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার দুইটি বাহু $BC = a = 9$ সে.মি., $AB = c = 6$ সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle B = 60°$ দেওয়া আছে । তাহলে প্রদত্ত উপাত্ত থেকে a বাহুর বিপরীত কোণ $\angle A$, c বাহুর বিপরীত কোণ $\angle C$ এবং $AC = b$ গ্রাফের সাহায্যে এবং $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ ও $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'BX$ ও YBY' আঁকি ।

2. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 সে.মি. ধরে BX বরাবর ক্ষুদ্রতম 18 বর্গের বাহুর সমান করে $BC = a = 9$ সে.মি. কেটে নেই।



3. চাঁদার সাহায্যে BC রেখার B বিন্দুতে $\angle CBD = 60°$ অঙ্কন করি।

4. BD রেখা হতে ক্ষুদ্রতম 12 বর্গবাহুর সমান করে BA = c = 6 সে.মি. কেটে নেই। A, C যোগ করি।

4. গ্রাফ থেকে চাঁদার সাহায্যে $\angle A$, $\angle C$ এবং পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে AC বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে BX বরাবর বসিয়ে b বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

হিসাব ঃ

আমরা জানি, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$= 9^2 + 6^2 - 2\times9\times6\cos 60°$

$= 81 + 36 - 108(\cdot5)$

$\Rightarrow b^2 = 117 - 54 = 63$

$b = 7\cdot94$ সে.মি. (প্রায়)

আবার, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} \Rightarrow \dfrac{9}{\sin A} = \dfrac{7\cdot94}{\sin 60^0}$

$\Rightarrow \sin A = \dfrac{9\times0\cdot866}{7\cdot94} =$

$\Rightarrow \sin A = \dfrac{17\cdot32}{18} = 0\cdot982$

$A = 78\cdot99°$ (প্রায়)

তদ্রূপ, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow \dfrac{7\cdot94}{\sin 60^0} = \dfrac{6}{\sin C}$

$\Rightarrow \sin C = \dfrac{6\times0\cdot866}{7\cdot94} = 0\cdot65$

$C = 40\cdot87°$ (প্রায়)

ফল সংকলন ঃ

	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান ঃ	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান ঃ
b	8 সে.মি.	7·94 সে.মি.(প্রায়)
$\angle A$	79°(প্রায়)	78·99° (প্রায়)
$\angle C$	41° (প্রায়)	40·87° (প্রায়)

ফলাফল ঃ নির্ণেয় $b = 7\cdot94$ সে.মি. (প্রায়), $\angle A = 79°$ এবং $\angle C = 41°$

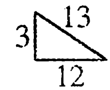
মন্তব্য ঃ গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ প্রশ্ন উত্তরসহ ঃ

1.(a) $\tan\theta = \dfrac{5}{12}$ এবং θ সূক্ষ্মকোণ হলে $\sin\theta + \sec(-\theta)$ এর মান– **[DU 08-09]**

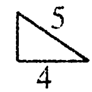
(b) যদি $\cos A = \dfrac{4}{5}$ হয়, তবে $\dfrac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A}$ এর মান– **[BUET 06-07]**

***Sol*".:(a)** θ সূক্ষ্মকোণ বলে



$\sin\theta + \sec(-\theta) = \dfrac{5}{13} + \dfrac{13}{12} = \dfrac{229}{156}$

(b) $\tan A = \dfrac{3}{4}$ $\dfrac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A} = \dfrac{25}{7}$



(ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)

2. $\cot A - \tan A$ সমান– **[DU 08-09]**

***Sol*".:** $\cot A - \tan A = \dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{2\cos 2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = 2\cot 2\theta$

3.(a) $\cos^2 0^0 + \cos^2 10^0 + \cos^2 20^0 + \cdots +$ $\cos^2 90^0$ এর মান – **[DU 08-09]**

(b) $\cos^2 30^0 + \cos^2 60^0 + \cos^2 90^0 + \quad +$ $\cos^2 180^0$ এর মান – **[BUET 06-07]**

***Sol*".:(a)** এখানে পদ সংখ্যা $= \dfrac{90-0}{10} + 1 = 10$ অর্থাৎ 5 জোড়া পদ। Ans. 5

(b) এখানে পদ সংখ্যা $= \dfrac{180-30}{30} + 1 = 6$ অর্থাৎ 3 জোড়া পদ। Ans. 3

4. $\cos 75^0$ এর সঠিক মান –**[BUET, DU 07-08]**

A. $\dfrac{\sqrt3+1}{2\sqrt2}$ B. $\dfrac{\sqrt3}{2\sqrt2}$ C. $\dfrac{-\sqrt3}{2\sqrt2}$ D. $\dfrac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}$

***Sol*".:** ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, $\cos 75^0 = 0.2588$
Option D = 0.2588 Ans. D

5. $\sin(780^0)\cos(390^0) - \sin(330^0)\cos(-300^0)$ এর মান–**[DU 02-03, 05-06;Jt U 05-06,08-09]**

***Sol*".:** ক্যালকুলেটরের সাহায্যে রাশি মান = 1.

6. $\tan 54^0 - \tan 36^0$ এর মান– **[DU 03-04; BUET 03-04]**

Sol".: প্রদত্ত মান $= 2\tan(54^0 - 36^0)$

$= 2\tan 18^0$ [নিয়ম ঃ $A + B = 90^0$ হলে $\tan A - \tan B = 2\tan(A - B)$]

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে করতে হবে।

7. $\sin 65^0 + \cos 65^0$ সমান– **[DU 02-03; KU 06-07]**

প্রদত্ত মান $= \sqrt{2}\sin(65^0 + 45^0) = \sqrt{2}\sin 115^0$

$= \sqrt{2}\cos(65^0 - 45^0) = \sqrt{2}\cos 20^0$

নিয়ম ঃ $a\cos A + b\sin A$

$= \sqrt{a^2 + b^2}\sin(A + \tan^{-1}\frac{b}{a})$

$= \sqrt{a^2 + b^2}\cos(A - \tan^{-1}\frac{b}{a})$

8. $\tan 15^0$ এর মান– **[DU 00-01; CU 07-08]**

A . $2 + \sqrt{2}$ B. $2 - \sqrt{3}$

C. $2 + \sqrt{3}$ D. $3 + \sqrt{2}$

Sol".: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, $\tan 15^0 = 0.268$

Option B = 0.268 . Ans.B

9. $\frac{\sin 75^0 - \sin 15^0}{\sin 75^0 + \sin 15^0}$ এর মান– **[DU 99-00, 04-05]**

Sol".: প্রদত্ত রাশি $= \frac{\cos 15^0 - \sin 15^0}{\cos 15^0 + \sin 15^0}$

$= \tan(45^0 - 15^0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

নিয়ম : 1. $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \tan(45^0 - A)$

2. $\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \tan(45^0 + A)$

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে প্রদত্ত রাশি = 0.57735

10. $\cot\frac{\pi}{20}\cot\frac{3\pi}{20}\cot\frac{5\pi}{20}\cot\frac{7\pi}{20}\cot\frac{9\pi}{20}$ **[RU 07-08]**

Sol".: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে প্রদত্ত মান = 1

$\frac{\pi}{20} = \frac{180}{20} = 9$

1 ÷ tan Ans tan 3 Ans tan 5 Ans tan 7 Ans tan 9 Ans =

11. $\frac{1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta} = ?$ **[CU 02-03, RU 07-08]**

A . $\sec\theta$ B. $\sin\theta$ C. $\tan\theta$ D. $\cot\theta$

Sol".: $\theta = 30^0$ বসিয়ে প্রদত্ত রাশি = 0.5773

$\tan 30^0 = 0.5773$ Ans. D

12. n একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে $\cos\{(2n + 1)\pi + \pi/3\}$ **[SU 06-070]**

A . $-\frac{1}{2}$ B. 0 C. 1 D. কোনটিই নয়।

Sol".: n =0 হলে প্রদত্ত রাশি $= \cos(\pi + \pi/3) = -\frac{1}{2}$

n = 1 হলে প্রদত্ত রাশি $= \cos(3\pi + \pi/3) = -\frac{1}{2}$

13.(a) $\tan 27^0 + \tan 18^0 + \tan 27^0 \tan 18^0$ এর মান– **[IU 05-06]**

(b) $\tan 75^0 - \tan 30^0 - \tan 75^0 \tan 30^0$ এর মান– **[DU 03-04]**

Sol".: (a) প্রদত্ত রাশি $= \tan(27^0 + 18^0) = 1$

(b) প্রদত্ত রাশি = 1

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে প্রদত্ত রাশি = 1

নিয়ম : (a) $A + B = n\pi + \pi/4$ হলে,

$\tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1$

(b) $A - B = \pi/4$ হলে ,

$\tan A - \tan B - \tan A \tan B = 1$

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে প্রদত্ত রাশি = 1

14. $\sin A = \frac{1}{2}$ এবং $\tan B = \sqrt{3}$ হয় তবে $\sin A\cos B + \cos A\sin B$ এর মান–**[KU 03-04]**

Sol".: $A = 30^0$, $B = 60^0$

প্রদত্ত রাশি $= \sin(A + B) = \sin 90^0 = 1$

16. $A + B + C = \pi$ হলে $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ এর মান– **[KU ; RU 07-08]**

a. 4sinA sinB sinC b. $4\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$

c. 1 – 4sinA sinB sinC d. 4sinA sinB sinC -1

Sol^n.: A=B=C= 60^0 ধরে প্রদত্ত রাশি = 2.598

Option গুলোতে A=B=C= 60^0 বসালে a = 2.598

17. tanA + tanB + tanC = tanA tanBtan C হলে A + B + C এর মান কত? [EA 05-06]

A. $\pi/2$ **B.** 0 **C.** π **D.** 2π

Sol^n.: Ans. π

18. $\sin^2(60^0 + A) + \sin^2 A + \sin^2(60^0 - A)$ এর মান -

Sol^n.: $A = 30^0$ ধরে,

(sin 9 0) x² + (sin 3 0) x² + (sin 3 0) x² =

19. ABC ত্রিভুজে cos A + cos C = sin B হলে, $\angle C$ সমান – [DU 04-05]

A .30° B . 60° C. 90° D. 45°

কৌশল ঃ কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের cosine অনুপাতের যোগফল অপর কোণের sine এর সমান হলে ত্রিভুজটি সমকোণী এবং cosine এর সাথের কোণদ্বয়ের যেকোন একটি কোণ সমকোণ।

Sol^n.: Ans. C

20. ABC ত্রিভুজে $a = 8$, $b = 4, c = 6$ হলে $\angle A = ?$ [SU 08-09]

A. $\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{8}$ *B.* $2\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{8}$ **C.** $\sin^{-1}\frac{4}{5}$ **D.** $2\sin^{-1}\frac{4}{5}$

Sol^n.: $\cos A = \frac{4^2 + 6^2 - 8^2}{2.4.6} = -\frac{1}{4}$

A= 104.48°

Option গুলোতে $D = 106.26^0 \approx 104.48^0$

21. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার a = 10 cm এবং b = c ত্রিভুজটির পরিলিখিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 cm হলে $\angle B$ = ? [SU 08-09]

Sol^n.: $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{10}{2.10}$

$\Rightarrow A = 30^0 \therefore$ B + C = 180° – 30°= 150°

B = 150°/2 = 75°

22. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর পরিমাপ যথাক্রমে 3, 5 ও 7 হলে স্থূলকোণটির মান – [IU 06-07; RU 07-08]

Sol^n.: স্থূলকোণটি = $\cos^{-1}\frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2.3.5} = 120^0$

23. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো 13, 14, 15 হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল – [RU 07-08; BUET 06-07]

Sol^n.: $S = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$

ক্ষেত্রফল = $\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$

24. ABC ত্রিভুজে $\angle A = 60^0, \angle B = 75^0$ এবং $c = \sqrt{6}\,cm$ হলে $a = ?$ [SU 06-07]

Sol^n.: $\angle C = 180^0 - (60^0 + 75^0) = 45^0$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow a = \sqrt{6}\frac{\sin 60^0}{\sin 45^0} = 3$$

25. $(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2} = ?$ **[SU 06-07]**

প্রদত্ত রাশি = $a^2 + b^2 - 2ab(\cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2})$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2$

26. ABC একটি ত্রিভুজ হলে $2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C) = ?$ [RU 06-07]

Sol^n.: প্রদত্ত রাশি = $2bc\,\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 2ca\,\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + 2bc\,\frac{a^2 + a^2 - b^2}{2ab}$

$= a^2 + b^2 + c^2$

27. যেকোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রে $bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2} = ?$ [IU 05-06]

Sol^n.: প্রদত্ত রাশি = $bc\,\frac{s(s-a)}{bc} + ca\frac{s(s-b)}{ca} + ab\frac{s(s-c)}{ab} = s\{3s - 2(a+b+c)\}$

$= s(3s - 2s) = s^2$

কিছু বিশেষ সূত্র / কৌশল যা ভর্তি পরীক্ষায় দ্রুত উত্তর করতে সাহায্য করবে :

1. $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ হলে, $f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$,

ডোমেন $f=\mathbb{R}-\{-\dfrac{d}{c}\}$, রেঞ্জ $f=\mathbb{R}-\{\dfrac{a}{c}\}$

2. $f(x)=ax+b$ হলে, $f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}$,

ডোমেন $f=\mathbb{R}$, রেঞ্জ $f=\mathbb{R}$

3. $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ হলে,

ডোমেন $f=\mathbb{R}-\{a\}$, রেঞ্জ $f=\mathbb{R}-\{2a\}$

4. $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}$ হলে,

ডোমেন $f=\{x\in\mathbb{R} \quad x\leq -a \text{ or } x\geq a\}$,

রেঞ্জ $f=\{x\in\mathbb{R} \quad x\geq 0\}$

5. $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}$ হলে,

ডোমেন $f=\{x\in\mathbb{R}:-a\leq x\leq a\}=[-a,a]$,

রেঞ্জ $f=\{x\in\mathbb{R}:0\leq x\leq a\}=[0,a]$

6. $f(x)=\log(a+bx)$ হলে,

ডোমেন $f=\{x\in\mathbb{R}:x>-\dfrac{a}{b}\}$, রেঞ্জ $f=\mathbb{R}$

7. $f(x)=e^x$ হলে, ডোমেন $f=\mathbb{R}$,

রেঞ্জ $f=\{x\in\mathbb{R}:\ x>0\}$

প্রশ্নমালা VIII

1. (a) Sol^n : $f(x)=x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত f: [0 , 2]→ ফাংশনটি একক কিন্তু সার্বিক নয়।

[0 , 2] এর ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের ছবি ভিন্ন ভিন্ন কিন্তু $\mathbb{R}$ সেটের সকল উপাদানই A সেটের উপাদানের ছবি নয়। ∴ Ans. **C.**

(b) Sol^n : [– 2 , 2] এর ভিন্ন উপাদান –2 ও 2 এর ছবি 4 কিন্তু [0 , 4] সেটের সকল উপাদানই [– 2 , 2] সেটের উপাদানের ছবি । ∴ Ans. **B.**

(c) Sol^n : সবগুলি তথ্য সত্য। ∴ Ans. **D.**

(d) Sol^n : দ্বিঘাত ফাংশনের লেখ y অক্ষ অথবা y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম হয়।

Ans.B.

(e) Sol^n : f(x) এর রূপান্তরি ফাংশন f(x–4) ডানে স্থান্তরিত হয় । Ans. **B.**

(f) Sol^n : x অক্ষের সাপেক্ষে $y=x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y=-x^2$

(g) Sol^n : 3 বিজোড় বলে $\text{cosec}^3(4\theta+\dfrac{\pi}{3})$ এর পর্যায় $=\dfrac{\pi}{|4|}=\dfrac{\pi}{4}$. ∴ Ans.**D.**

(h) Sol^n : $1-x^2\geq 0\Rightarrow x^2-1\leq 0$
$\Rightarrow -1\leq x\leq 1$ ∴ Ans. B

(i) Sol^n : x>0 হলে $\dfrac{x}{|x|}=1$, x<0 হলে $\dfrac{x}{|x|}=-1$

বিস্তার f = {–1, 1} ∴ Ans. A.

(j) Sol^n : f(x) ফাংশনের গ্রাফ থেকে এর রূপান্তরিত ফাংশন f(x + 2) এর গ্রাফ 2 একক স্থানান্তরিত হবে বামে। ∴ Ans. **A.**

(k) Sol^n : f(x) = x + 1 এবং g(x) = 2x হলে, (fog)(2) = f(g(2)) = f(2×2)= f(4) =4 + 1= 5 এর মান নিচের কোনটি?

D. একক নয়, সার্বিক নয়
$g(x)=2x \quad \therefore g^{-1}(x)=\dfrac{x}{2}$.

$(fog^{-1})(2)=f(g^{-1}(2))=f(\dfrac{2}{2})=f(1)$

$=1+1=2$

2. (a) দেওয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} 3x-1, x>3 \\ x^2-2, -2\le x\le 3 \\ 2x+3, x<-2 \end{cases}$

[ঢা.'১২; য.'০৭, রা '০৮; চ .'০৮,'১২; কু.'১৩]

$f(2) = 2^2 - 2$ $\quad [\because -2\le 2\le 3]$
$= 4 - 2 = 2$
$f(4) = 3\times 4 - 1$ $\quad [\quad 4>3]$
$= 12 - 1 = 11$
$f(-1) = (-1)^2 - 2$ $\quad [\because -2\le -1\le 3]$
$= 1 - 2 = -1$
$f(-3) = 2\times(-3) + 3$ $\quad [\because -3<-2]$
$= -6 + 3 = -3$

2(b) $f(x) = x^2 + ax + b$, $f(1) = 1$ ও $f(2) = 2$ হলে, $f(3)$ এর মান নির্ণয় কর। **[চ.'০৪]**

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + ax + b \cdots(1)$

$f(1) = 1^2 + a.1 + b = 1 \Rightarrow a + b = 0 \cdots(2)$
$f(2) = 2^2 + a.2 + b = 1$
$\Rightarrow 2a + b = -3 \quad \cdots(3)$
(3) থেকে (2) বিয়োগ করে পাই, $a = -3$
(2) থেকে পাই, $-3 + b = 0 \Rightarrow b = 3$
$(1) \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 3$
$f(3) = 3^2 - 3\times 3 + 3 = 9-9+3 = 3$ (Ans.)

2.(c) $A = [-3, 5]$ এবং $f: A \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 2x^2 - 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $f(2)$, $f(6)$ এবং $f(t-2)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $2 \in A = [-3, 5]$, সুতরাং $f(2)$ সংজ্ঞায়িত এবং $f(2) = 2.2^2 - 7 = 8 - 7 = 1$

$6 \notin A = [-3, 5]$, সুতরাং $f(6)$ অসংজ্ঞায়িত।

যদি $t - 2 \in A = [-3, 5]$ i.e. $-3 \le t - 2 \le 5$ i.e. $-1 \le t \le 7$ হয় তবে $f(t-2)$ সংজ্ঞায়িত হবে এবং $f(t-2) = 2.(t-2)^2 - 7$
$= 2(t^2 - 4t + 4) - 7 = 2t^2 - 8t + 8 - 7$
$= 2t^2 - 8t + 1$

3.(a) $f(x) = b\dfrac{x-a}{b-a} + a\dfrac{x-b}{a-b}$ হলে, দেখাও যে, $f(a) + f(b) = f(a+b)$ **[ব.'০৮; য.'১২; ঢা.'০৭; রা.'০৮,'১৩; কু.'০৮]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = b\dfrac{x-a}{b-a} + a\dfrac{x-b}{a-b}$

$$f(a) = b\frac{a-a}{b-a} + a\frac{a-b}{a-b} = a$$

$$f(b) = b\frac{b-a}{b-a} + a\frac{b-b}{a-b} = b \text{ এবং}$$

$$f(a+b) = b\frac{a+b-a}{b-a} + a\frac{a+b-b}{a-b}$$

$$= \frac{b^2}{b-a} + \frac{a^2}{a-b} = \frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = a+b$$

$$= f(a) + f(b)$$

$f(a) + f(b) = f(a+b)$ (Showed)

3(b) $f(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$, $g(x) = \frac{1}{2}(3 - 3^{-x})$ হলে, প্রমাণ কর যে, $f(x+y) = f(x)\,f(y) + g(x)\,g(y)$ **[য.'০৯;সি.'১২; দি.'১৩; চ.'১৪]**

প্রমাণঃ L.H.S. $= f(x+y) = \frac{1}{2}(3^{x+y} + 3^{-x-y})$

R.H.S. $= f(x)\,f(y) + g(x)\,g(y)$

$$= \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})\,\frac{1}{2}(3^y + 3^{-y}) + \frac{1}{2}(3^x - 3^{-x})\,\frac{1}{2}(3^y - 3^{-y})$$

$$= \frac{1}{4}(3^{x+y} + 3^{x-y} + 3^{-x+y} + 3^{-x-y} + 3^{x+y} - 3^{x-y} - 3^{-x+y} + 3^{-x-y})$$

$$= \frac{1}{4}.2(3^{x+y} + 3^{-x-y}) = \frac{1}{2}(3^{x+y} + 3^{-x-y})$$

L.H.S. = R.H.S. (Proved)

4(a) $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$ হলে, x এর মাধ্যমে $f(y)$ এর মান নির্ণয় কর। **[য.'০৭; প্র.ভ.প.'০৪]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx-a} \Rightarrow f(y) = \frac{ay+b}{cx-a} \cdots(1)$$

এবং $y = \dfrac{ax+b}{cx-a} \Rightarrow cxy - ay = ax + b$

$\Rightarrow cxy - ax = ay + b$

$\Rightarrow (cy-a)x = ay + b$

$\Rightarrow x = \dfrac{ay+b}{cy-a} = f(y)$ [(1) দ্বারা]

$f(y) = x$

4(b) $\phi(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $\dfrac{\phi(x)-\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \dfrac{x-y}{1+xy}$ **[য.'০২; সি.'০৫]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$\phi(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. $\phi(y) = \dfrac{y-1}{y+1}$

$$\frac{\phi(x)-\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{y-1}{y+1}}{1+\dfrac{x-1}{x+1}\dfrac{y-1}{y+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{xy+x-y-1-(xy-x+y-1)}{(x+1)(y+1)}}{\dfrac{xy+x+y+1+xy-x-y+1}{(x+1)(y+1)}}$$

$$= \frac{xy+x-y-1-xy+x-y+1}{2xy+2} = \frac{2(x-y)}{2(1+xy)}$$

$\dfrac{\phi(x)-\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \dfrac{x-y}{1+xy}$ (Proved)

3(c) যদি $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$ **হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে,** $\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = 2x$ **[দি.'১০; ব.'১৩]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x) \quad \dfrac{2x+1}{2x-1}$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{1} = \dfrac{2x+1}{2x-1}$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = \dfrac{(2x+1)+(2x-1)}{(2x+1)-(2x-1)}$

[যোজন-বিয়োজন করে ।]

$\Rightarrow \dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = \dfrac{4x}{2} \quad \dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = 2x$

4(d) যদি $f(x) = \dfrac{3x+5}{3x-5}$ **হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে,** $\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = \dfrac{3x}{5}$. **[চ.'১১]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{3x+5}{3x-5}$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{1} = \dfrac{3x+5}{3x-5}$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)+1}{f(x)\mp 1} = \dfrac{(3x+5)+(3x-5)}{(3x+5)-(3x-5)}$

[যোজন-বিয়োজন করে ।]

$\Rightarrow \dfrac{f(x)+1}{f(x)\mp 1} = \dfrac{6x}{10} \quad \dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = \dfrac{3x}{5}$

4(e) যদি y = $f(x) = \dfrac{5x+3}{4x-5}$ **হয়, তাহলে দেখাও যে, x = f(y). [ঢা.'১১; সি.'১৩]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $y = f(x) = \dfrac{5x+3}{4x-5}$

$f(y) = \dfrac{5y+3}{4y-5}$, $[\because f(x) = \dfrac{5x+3}{4x-5}]$

এখন, $y = \dfrac{5x+3}{4x-5} \Rightarrow 4xy - 5y = 5x + 3$

$\Rightarrow 4xy - 5x = 5y + 3$

$\Rightarrow (4y-5)x = 5y + 3$

$\Rightarrow x = \dfrac{5y+3}{4y-5} = f(y) \quad \therefore x = f(y)$

4(f) $y = f(x) = \dfrac{4x-7}{2x-4}$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $f(y) = x$ [রা.'১২; ব.'১১; চ.'১২; দি. '০৯,'১৪; সি.'০৯; ঢা.'কু.'১৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $y = \dfrac{4x-7}{2x-4}$

$\Rightarrow 4x - 7 = 2xy - 4y$

$\Rightarrow 4x - 2xy = -4y + 7$

$\Rightarrow -x(2y-4) = -(4y-7)$

$\Rightarrow x = \dfrac{4y-7}{2y-4} \quad \cdots \text{(i)}$

আবার, $f(x) = \dfrac{4x-7}{2x-4}$

$f(y) = \dfrac{4y-7}{2y-4} \cdots \quad \text{(ii)}$

(i) ও (ii) হতে পাই, $f(y) = x$

4(g) $f(x) = \dfrac{1+x^2+x^4}{x^2}$ **হলে, দেখাও যে,** $f(\dfrac{1}{x}) = f(x)$ **[রা.'০৬; মা.'০৩]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{1+x^2+x^4}{x^2}$

$$f(\frac{1}{x}) = \frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^4+x^2+1}{x^4} \times \frac{x^2}{1}$$

$$= \frac{1+x^2+x^4}{x^2} = f(x)$$

5(a) $f(x) = e^x + e^{-x}$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $f(x+y)f(x-y) = f(2x) + f(2y)$

[চ.'০৯,'১৩; কু.'১০; রা.'১০, '১৪; ব. '০৯; সি.'০৭; ঢা.'১২; য. '০৮,'১২]

প্রমাণ ঃ L.H.S.$= f(x+y)f(x-y)$

$= \{e^{x+y} + e^{-(x+y)}\}\{e^{x-y} + e^{-(x-y)}\}$

$= e^{x+y+x-y} + e^{x+y-x+y} + e^{-x-y+x-y} + e^{-x-y-x+y}$

$= e^{2x} + e^{2y} + e^{-2y} + e^{-2x}$

$= (e^{2x} + e^{-2x}) + (e^{2y} + e^{-2y})$

$= f(2x) + f(2y) =$ R.H.S.

L.H.S. = R.H.S. (Proved)

5(b) $\phi(x) = \ln(\dfrac{1-x}{1+x})$ **হলে, দেখাও যে,** $\phi(y) + \phi(z) = \phi(\dfrac{y+z}{1+yz})$ **[রা.'১০; য.'০৬; কু.'১১; ব.'১২]**

প্রমাণ : $\phi(y) + \phi(z) = \ln(\dfrac{1-y}{1+y}) + \ln(\dfrac{1-z}{1+z})$

$= \ln(\dfrac{1-y}{1+y})(\dfrac{1-z}{1+z}) = \ln\dfrac{1-y-z+yz}{1+y+z+yz}$

$$\phi(\frac{y+z}{1+yz}) = \ln\frac{1-\frac{y+z}{1+yz}}{1+\frac{y+z}{1+yz}} = \ln\frac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}$$

$\phi(y) + \phi(z) = \phi(\dfrac{y+z}{1+yz})$

5(c) $f(x) = \ln(\sin x)$ **ও** $\phi(x) = \ln(\cos x)$ **হলে, দেখাও যে,** $e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\phi(2a)}$

[য.'১০; ব.'১০,'১৪; ঢা.'১০; সি. '০৮,'১০,'১৪; রা.'০৯]

প্রমাণ ঃ $f(x) = \ln(\sin x) \quad f(a) = \ln(\sin a)$

$\phi(x) = \ln(\cos x) \quad \therefore \phi(a) = \ln(\cos a)$ এবং

$\phi(2a) = \ln(\cos 2a)$

এখন, $e^{2\varphi(a)} - e^{2f(a)} = e^{2\ln(\cos a)} - e^{2\ln(\sin a)}$

$= e^{\ln(\cos^2 a)} - e^{\ln(\sin^2 a)} = \cos^2 a - \sin^2 a$

$= \cos 2a = e^{\ln(\cos 2a)} = e^{\phi(2a)}$

$e^{2\varphi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\phi(2a)}$ (Showed)

5(d) $f(x) = \ln(\sin x)$ **ও** $\phi(x) = \ln(\cos x)$ **হলে,দেখাও যে,** $e^{2\phi(x)} + e^{2f(x)} = 1$ **[প্র.ভ.প. '৯৯]**

প্রমাণ ঃ $f(x) = \ln(\sin x) \quad \therefore f(a) = \ln(\sin a)$ এবং

$\phi(x) = \ln(\cos x) \quad \phi(a) = \ln(\cos a)$

এখন, $e^{2\varphi(a)} + e^{2f(a)} = e^{2\ln(\cos x)} + e^{2\ln(\sin x)}$

$= e^{\ln(\cos^2 x)} + e^{\ln(\sin^2 x)} = \cos^2 x + \sin^2 x$

$e^{2\varphi(a)} + e^{2f(a)} = 1$ (Showed)

5(e) $f(x) = \ln(x)$ **ও** $\phi(x) = x^3$ **হলে, দেখাও যে,** $f(\phi(x)) = 3f(x)$ **[ব.'০২]**

প্রমাণ ঃ $f(\phi(x)) = f(x^3) \quad [\because \phi(x) = x^3]$

$= ln(x^3) \quad [\because f(x) = \ln(x)]$

$= 3\,ln(x) = 3f(x) \quad [\because f(x) = \ln(x)]$

$f(\phi(x)) = 3f(x)$ (Showed)

5(f) $f(x)=\ln(x)$ ও $\phi(x)=x^n$ হলে, দেখাও যে, $f(\phi(x))=n\,f(x)$ [রা. '০৩,'০৭; সি. '০৬]

প্রমাণ ঃ $f(\phi(x))=f(x^n)$ [$\because \phi(x)=x^n$]

$= ln\,(x^n)$ [$\because f(x)=\ln(x)$]

$= n\,ln(x) = n\,f(x)$ [$\because f(x)=\ln(x)$]

$f(\phi(x))=nf(x)$ (Showed)

6. (a) $f(x)=\cos x$ হলে,দেখাও যে,

$f(2x) = 2\{f(x)\}^2 - 1$ এবং

$f(3x)=4\{f(x)\}^3-3f(x)$ [ঢা.'০১, য.'১৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=\cos x$

$f(2x)=\cos 2x = 2\cos^2 x-1$

$= 2(\cos x)^2 - 1$

$f(2x) = 2\{f(x)\}^2-1$ (Showed)

$f(3x)=\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$= 4(\cos x)^3 - 3\cos x$

$\therefore f(3x)=4\{f(x)\}^3-3f(x)$ (Showed)

6(b) $f(x) = \sin^3 x\cos x$ হলে, $f(x-\frac{3\pi}{2})$ এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৬]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin^3 x\cos x$

$f(x-\frac{3\pi}{2}) = \sin^3(x-\frac{3\pi}{2})\cos(x-\frac{3\pi}{2})$

$= [\sin\{-(\frac{3\pi}{2}-x)\}]^3\cos\{-(\frac{3\pi}{2}-x)\}$

$= [-\sin(\frac{3\pi}{2}-x)]^3\cos(\frac{3\pi}{2}-x)$

$= [+\cos x]^3\{-\sin x\}$

$= -\cos^3 x\sin x$ (Ans.)

6.(c) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $f(\cos\theta)=\tan^2\frac{\theta}{2}$ [কু.'০৭,'০৯,'১৪;দি.'১১; সি.'১১]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$

$$f(\cos\theta)=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$f(\cos\theta)=\tan^2\frac{\theta}{2}$ (Showed)

7.(a) $\phi(x)=\tan x$ হলে, দেখাও যে, $\phi(a-b)=\frac{\phi(a)-\phi(b)}{1+\phi(a)\phi(b)}$ [সি.'০৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\phi(x)=\tan x$

$\phi(a)=\tan a$, $\phi(b)=\tan b$ এবং

$$\phi(a-b)=\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

$\phi(a-b)=\frac{\phi(a)-\phi(b)}{1+\phi(a)\phi(b)}$ (Showed)

7(b) $f(x)=\tan x$ হলে, দেখাও যে, $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ [ঢা.'০৫]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=\tan x$

$f(y)=\tan y$ এবং

$$f(x+y)=\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ (Showed)

7(c) $f(x) = \cos(lnx)$ হলে, $f(x)\,f(y) - \frac{1}{2}[f(\frac{x}{y}) + f(xy)]$ এর মান নির্ণয় কর।

[য.'০৫; কু.'০৭, '০৯; সি.,দি.'১১]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \cos(lnx)$

$f(x)\,f(y)-\frac{1}{2}[f(\frac{x}{y})+f(xy)]$

$= \cos(lnx)\cos(ln\,y) - \frac{1}{2}[\cos(\ln\frac{x}{y}) + \cos(ln\,xy)]$

$= \cos(ln\,x)\cos(ln\,y) - \frac{1}{2}[\cos(lnx-lny)+\cos(lnx+lny)]$

$= \cos(ln\,x)\cos(ln\,y) -$

$\frac{1}{2}[\,2\cos(\ln x)\cos(\ln y)]$

$=\cos(\ln x)\cos(\ln y)-\cos(\ln x)\cos(\ln y)$

$=0$ (Ans.)

8. (a) দেওয়া আছে, $f(x)=x^2-2|x|$ এবং

$g(x)=x^2+1$

(i) $(gof)(-4)=g(f(-4))$ [ঢা.'০৫ ; সি'০৮]

$=g((-4)^2-2|-4|)=g(16-2.4)$

$=g(16-8)=g(8)=8^2+1$

$=64+1=65$

(ii) $(fog)(5)=f(g(5))$ [ঢা.'০৫ ; সি'০৮]

$=f(5^2+1)=f(25+1)=f(26)$

$=26^2-2|26|=676-2\times 26$

$=676-52=624$

(iii) $(g\circ f)(3)=g(f(3))$ [ব.'০৭]

$=g(3^2-2|3|)=g(9-6)$

$=g(3)=3^2+1=9+1=10$

(iv) $(f\circ g)(-2)=f(g(-2))$ [য.'০৩; ব.'০৭]

$=f((-2)^2+1)=f(4+1)=f(5)$

$=5^2-2|5|=25-10=15$

8. (b) দেওয়া আছে, $f(x)=2x-5$ এবং

$g(x)=x^2+6$

[ব.'০৬; সি.'০৬ ; চ.'০৭; য.'০৬,'০৯; রা.'১৩]

$g(f(2))=g(2\times 2-5)=g(4-5)$

$=g(-1)=(-1)^2+6=1+6=7$

$f(g(5))=f(5^2+6)=f(25+6)=f(31)$

$=2\times 31-5=62-5=57$

8(c) দেওয়া আছে, $f(x)=x^2+3x+1$ এবং

$g(x)=2x-3$ [চ.'০৭; ব.'১২; দি.'১৩]

$(gof)(2)=g(f(2))=g(2^2+3.2+1)$

$=g(4+6+1)=g(11)=2\times 11-3$

$=22-3=19$

$fog)(2)=f(g(2))=f(2.2-3)=f(4-3)$

$=f(1)=1^2+3\times 1+1=1+3+1=5$

(d) $f\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, যেখানে $f(x)=x^2$; $g\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, যেখানে $g(x)=x^3+1$ এবং $x=-3$ হলে দেখাও যে, $(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$

[ঢা.'০৭,'১১]

8(e) দেওয়া আছে, $f(x)=x^2+2x-3$ এবং $g(x)=3x-4$ [কু.'০৬; দি.'১০; সি.'১২]

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-4)$

$=(3x-4)^2+2(3x-4)-3$

$=9x^2-24x+16+6x-8-3$

$=9x^2-18x+5$ (Ans.)

$(f\circ g)(3)=9\times 3^2-18\times 3+5$

$=81-54+5=32$ (Ans.)

8(f) $f(x)=2x^3+3$ এবং $g(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{2}}$ হলে, দেখাও যে, $(fog)(x)=(g\circ f)(x)$ [প্র.ভ.প.'০৩]

সমাধান : $(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}})$

$$=2\left(\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}\right)^3+3=2\times\frac{x-3}{2}+3$$

$=x-3+3=x$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x^3+3)$

$$=\sqrt[3]{\frac{2x^3+3-3}{2}}=\sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}}=\sqrt[3]{x^3}=x$$

$\therefore (fog)(x)=(g\circ f)(x)$ (Showed

9.(a) নিম্নের ফাংশনসমূহের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর

(i) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ [য.'১০] **(ii)** $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$

(iii) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ **(iv)** $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

(i) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}\in\mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x\in\mathbb{R}$ এবং $x-1\neq 0$ i.e., $x\neq 1$ হয়।

ডোমেন $f=\mathbb{R}-\{1\}$.

মনে করি , f এর অধীন x এর ছবি y

$$y=f(x)=\frac{x}{x-1}\Rightarrow xy-y=x$$

$\Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x(y-1) = y \Rightarrow x = \dfrac{y}{y-1}$

$x = \dfrac{y}{y-1} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং

$y - 1 \neq 0$ i.e. $y \neq 1$ হয়।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{1\}$

(ii) $x = 0$ ব্যতীত সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ সংজ্ঞায়িত হয়।

ডোমেন $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$x > 0$ হলে $|x| = x$ অতএব, ডোমেন f এর সকল $x > 0$ উপাদানের জন্য, $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$

$x < 0$ হলে $|x| = -x$ অতএব, ডোমেন f এর সকল $x < 0$ উপাদানের জন্য, $f(x) = \dfrac{x}{-x} = -1$

রেঞ্চ $f = \{-1, 1\}$

(iii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) \geq 0$

অর্থাৎ $x \geq 3$ অথবা, $x \leq -3$ হয়।

ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3$ অথবা, $x \leq -3\}$

$x = \pm 3 \in$ ডোমেন f এর জন্য $f(x) = 0$ এবং $x > 3$ অথবা $x < -3$ এর জন্য $f(x) > 0$.

রেঞ্চ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

(iv) $f(x) = \sqrt{16 - x^2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 16 \leq 0$

$\Rightarrow (x-4)(x+4) \leq 0$ অর্থাৎ $-4 \leq x \leq 4$ হয়।

ডোমেন $= \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 4\}$

$x = \pm 4$ এর জন্য $f(x) = 0$, যা $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান এবং $x = 0$ এর জন্য $f(x) = 4$, যা $f(x)$ এর বৃহত্তম মান।

রেঞ্চ $f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$

9.(b) f $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি (i) $f(x) = x^3$ (ii) $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা প্রকাশিত হলে, উহাদের রেঞ্জ নির্ণয় কর। [কু.'০৭]

(i) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^3$

$x \in \mathbb{R}$ এর যেকোন মানের জন্য $f(x) = x^3$ এর মান যেকোন বাস্তব সংখ্যা।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R}$

(ii) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^2 + 1$

মনে করি, f এর অধীন x এর ছবি y

$y = f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1} \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $y \geq 1$

রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R} \quad y \geq 1\}$ (Ans.)

9(c) $\mathbb{R}$ বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$; $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, $f(x)$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। [য.'০০]

সমাধান ঃ $f(-3) = (-3)^2 + (-3) + 1$

$= 9 - 3 + 1 = 7$

$f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$

$f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

$f(3) = 3^2 + 3 + 1 = 9 + 3 + 1 = 13$

$f(x)$ -এর রেঞ্জ $= \{7, 1, 3, 13\}$

9(d) $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ এবং $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + 2x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। [চ.'০১]

সমাধান ঃ $f(-4) = (-4)^2 + 2(-4) + 3$

$= 16 - 8 + 3 = 11$

$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3$

$f(0) = 0^2 + 2 \times 0 + 3 = 3$

$f(2) = 2^2 + 2 \times 2 + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$

$f(4) = 4^2 + 2 \times 4 + 3 = 16 + 8 + 3 = 27$

$\therefore f$ -এর রেঞ্জ $= \{11, 3, 3, 11, 27\}$

$= \{3, 11, 27\}$ (Ans.)

9(e) দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x}$ এবং

$g(x) = x^2 - 1$ [চ.'০২ ; সি.'০৫]

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1)$

$= \sqrt{x^2-1}$ $\quad$ fog $= \sqrt{x^2-1}$

$(\text{fog})(x) = \sqrt{x^2-1} = \sqrt{(x-1)(x+1)} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $(x-1)(x+1) \geq 0.$

$x \geq 1$ অথবা $x \leq -1$ $\quad [\because 1 > -1]$

ডোমেন (fog) $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1$ অথবা $x \leq -1\}$

$x = 1 \in$ ডোমেন (fog) অথবা $x = -1 \in$ ডোমেন (fog) এর জন্য $(\text{fog})(x) = 0$; যা fog এর ক্ষুদ্রতম মান এবং এর বৃহত্তম মান $\to \infty$.

রেঞ্জ (f o g) $= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < \infty\}$

আবার, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x})$

$= (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$

$g \circ f = x - 1$

এখন, $g \circ f = x - 1 \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$

ডোমেন (gof) $= \mathbb{R}$

সকল $x \in$ ডোমেন (gof) $= \mathbb{R}$ এর জন্য gof এর মান বাস্তব সংখ্যা।

রেঞ্জ $(g \circ f) = \mathbb{R}$

10. (a) নিম্নের ফাংশনসমূহে কোনটি এক–এক এবং সার্বিক কারণসহ উল্লেখ কর। এক – এক এবং সার্বিক ফাংশনগুলোর জন্য বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর।

(i) $f(x) = 2x - 3$ **[চ.'১০; রা.'১১]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = 2x - 3$

যদি সম্ভব হয় কল্পনা করি , $f(x) = 2x - 3$ একটি এক – এক ফাংশন নয় এবং যেকোন দুইটি অসমান উপাদান $x_1, x_2 \in$ ডোমেন f এর ছবি সমান , অর্থাৎ

$f(x_1) = f(x_2)$

$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2$

$x_1 = x_2$; যা আমাদের কল্পনাকে অযৌক্তিক প্রতিপন্ন করে , কেননা $x_1 \neq x_2$

f(x) একটি এক – এক ফাংশন নয় তা সম্ভব নয়।

f(x) একটি এক – এক ফাংশন।

$x \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য, $f(x) = 2x - 3$ এর মান সকল বাস্তব সংখ্যা।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R}$. অর্থাৎ , $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

অতএব, f(x) একটি সার্বিক ফাংশন।

এখন, $f(x) = 2x - 3$

$f(f^{-1}(x)) = 2 f^{-1}(x) - 3$

$\Rightarrow x = 2 f^{-1}(x) - 3 \Rightarrow 2 f^{-1}(x) = x + 3$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$

(ii) প্রদত্ত ফাংশন, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^3 + 5$

[সি.'০৩;ব.'১৩]

যেকোন $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ -এর জন্য , $f(x_1) = f(x_2)$ যদি ও কেবল যদি , $x_1^3 + 5 = x_2^3 + 5$

$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$

f(x) একটি এক – এক ফাংশন।

$x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $f(x) = x^3 + 5$ এর মান সকল বাস্তব সংখ্যা।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R}$. i.e., $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

অতএব , f(x) একটি সার্বিক ফাংশন।

যদি ফাংশন f -এর অধীন x এর ছবি y অর্থাৎ $y = f(x)$ হয় , তবে ফাংশন f^{-1} -এর অধীন y এর ছবি x অর্থাৎ $x = f^{-1}(y)$ হবে।

এখন, $y = f(x) \Rightarrow y = x^3 + 5 \Rightarrow x^3 = y - 5$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{y-5} \quad \therefore f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-5}$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$

10(a) (iii) প্রদত্ত ফাংশন, $A = \mathbb{R} - \{3\}, B = \mathbb{R} - \{1\}$, $f : A \to B$ এবং $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

যেকোন $x_1, x_2 \in A$ -এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $\dfrac{x_1 - 2}{x_1 - 3} = \dfrac{x_2 - 2}{x_2 - 3}$

$\Rightarrow x_1x_2 - 3x_1 - 2x_2 + 6 = x_1x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 6$

$\Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

অতএব , f(x) একটি এক – এক ফাংশন।

মনে করি , f -এর অধীন x এর ছবি y

$y = f(x) = \dfrac{x-2}{x-3} \Rightarrow xy - 3y = x - 2$

$\Rightarrow x(y-1) = 3y - 2 \Rightarrow x = \dfrac{3y-2}{y-1} \cdots\cdots (1)$

এখন , $x = \dfrac{3y-2}{y-1} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y - 1 \neq 0$ i.e., $y \neq 1$ হয়।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{1\} = B$

$f(A) = B$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

(1) হতে পাই, $x = \dfrac{3y-2}{y-1}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{3y-2}{y-1}$ $[\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $f^{-1}(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}$

10(a) (iv) প্রদত্ত ফাংশন, $A = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \}$ এবং $f \quad A \rightarrow A$, $f(x) = x^2$

যেকোন $x_1, x_2 \in A$ -এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad [\because x \geq 0]$

অতএব, $f(x)$ একটি এক – এক ফাংশন।

মনে করি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x^2 = y$

$\Rightarrow x = \sqrt{y} \qquad (1) \quad [\because x \geq 0]$

$x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y \geq 0$ হয়।

রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0] = A$

$f(A) = A$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

এখন, (1) হতে পাই, $x = \sqrt{y}$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ $[\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

10(a) (v) প্রদত্ত ফাংশন, $f \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$x_1 = 1, x_2 = -1 \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য,

$f(x_1) = f(1) = (1)^2 = 1$ এবং

$f(x_2) = f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(x_1) = f(x_2) = 1$, কিন্তু $x_1 \neq x_2$.

অতএব, $f(x)$ এক – এক ফাংশন নয়।

মনে করি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x^2 = y$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$x = \pm\sqrt{y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y \geq 0$ হয়।

রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R} \quad y \geq 0\}$

অর্থাৎ রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন নয়।

10(a)(vi) প্রদত্ত ফাংশন, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$

যেকোন $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$-এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি $x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$

$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$

অতএব, $f(x)$ একটি এক – এক ফাংশন।

এখন, $x \in \mathbb{R}$(ডোমেন f) এর জন্য, $f(x) = x^3 + 1$ - এর মান সকল বাস্তব সংখ্যা।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R}$ i.e., $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

এখন, $y = f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow x^3 = y - 1$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1}$

$\therefore f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$ $[\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

10(a) (vii) প্রদত্ত ফাংশন,

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|$

$x_1 = 0, x_2 = 2 \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য,

$f(x_1) = f(0) = |0-1| = |-1| = 1$ এবং

$f(x_2) = f(2) = |2-1| = |1| = 1$

$f(x_1) = f(x_2) = 1$, কিন্তু $x_1 \neq x_2$.

অতএব, $f(x)$ এক – এক ফাংশন নয়।

$x \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য, $f(x) = |x-1|$ এর মান সকল বাস্তব সংখ্যা।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R}$. অর্থাৎ, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

10(a) (viii) প্রদত্ত ফাংশন, $A = [-2, 2]$ $B = [0,4]$, $f \quad A \rightarrow B$, $f(x) = x^2$

$x_1 = -2, x_2 = 2 \in \mathbb{R}$ (ডোমেনf) এর জন্য,

$f(x_1) = f(-2) = (-2)^2 = 4$ এবং

$f(x_2) = f(2) = 2^2 = 4$

$f(x_1) = f(x_2) = 4$, কিন্তু $x_1 \neq x_2$

অতএব , f(x) এক – এক ফাংশন নয় ।

সকল x∈ ডোমেন f এর জন্য, $f(x) = x^2$ এর মান অঋণাত্মক এবং $x \le 4$

রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0$ এবং $x \le 4\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 4\} = [0, 4] = B$

$f(A) = B$

অতএব , f(x) একটি সার্বিক ফাংশন ।

10.(b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $f : A \to B$ ফাংশনটি $f(x) = x + 1$ দ্বারা প্রকাশিত । ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর । ফাংশনটি কি এক–এক ? [কু.'১২; প্র.ভ.প. ০৫]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = x + 1$

$f(1) = 1 + 1 = 2$, $f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(3) = 4$; $f(4) = 5$

ডোমেন $f = \{1, 2, 3, 4\} = A$

রেঞ্জ $f = \{2, 3, 4, 5\}$

প্রতীয়মান হয় যে, $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = x + 1$ এর ভিন্ন ভিন্ন মান পাওয়া যায়।

অতএব , $f(x)$ একটি এক – এক ফাংশন ।

10(c) বাস্তব সংখ্যা সেট $\mathbb{R}$ এর উপর $S = \{(x, y) : y = \sqrt{x}\}$ অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর । S^{-1} নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : y = \sqrt{x}\}$

S সেটের বর্ণনাকারী শর্ত , $y = \sqrt{x}$.

$y = \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $x \ge 0$ হয়।

ডোমেন $S = \{ x \in \mathbb{R} \quad x \ge 0\}$

সকল $x \in$ ডোমেন S এর জন্য, $f(x) = x^2$ এর মান অঋণাত্মক ।

রেঞ্জ $S = \{ x \in \mathbb{R} : x \ge 0 \}$

এখন , $y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$

$S^{-1} = \{(y , x) \quad x = y^2 \}$

x কে y দ্বারা y এবং কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$S^{-1} = \{(x, y) : y = x^2 \}$

10.(d) $A = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ এবং $B = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ -এর দুইটি উপসেট এবং $f : A \to B$; যেখানে $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$. দেখাও যে, ফাংশনটি এক–এক ও সার্বিক। [ঢা. '০৯]

সমাধান ঃ যেকোন $x_1 , x_2 \in A = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ যদি ও কেবল যদি,

$$\frac{x_1 - 3}{2x_1 + 1} = \frac{x_2 - 3}{2x_2 + 1}$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 - 6x_2 + x_1 - 3x_1 - 1$$
$$= 2x_1x_2 - 6x_1 + x_2 - 3$$

$$\Rightarrow 7x_1 = 7x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

অতএব , $f(x)$ একটি এক – এক ফাংশন ।

ধরি , $y = f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1} \Rightarrow 2xy + y = x - 3$

$$\Rightarrow (2y - 1)x = -y - 3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{1-2y}$$

এখন , $x = \dfrac{y+3}{1-2y} \in A = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $1 - 2y \ne 0$ অর্থাৎ $y \ne \frac{1}{2}$.

রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} = B$.

$f(A) = B$.

অতএব , f(x) একটি সার্বিক ফাংশন ।

10(e) $A = \mathbb{R} - \{3\}$ এবং $B = \mathbb{R} - \{1\}$ বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ -এর দুইটি উপসেট এবং $f : A \to B$; যেখানে $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$. দেখাও যে, ফাংশনটি এক–এক ও সার্বিক।

সমাধান ঃ যেকোন $x_1, x_2 \in A = \mathbb{R} - \{3\}$ এর জন্য ,

$f(x_1) = f(x_2)$ যদি ও কেবল যদি, $\dfrac{x_1 - 2}{x_1 - 3} = \dfrac{x_2 - 2}{x_2 - 3}$

$$\Rightarrow x_1x_2 - 2x_2 - 3x_1 + 6$$

$= x_1x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 6$

$\Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

অতএব, f (x) একটি এক - এক ফাংশন।

ধরি, $y = f(x) = \dfrac{x-2}{x-3} \Rightarrow xy - 3y = x - 2$

$\Rightarrow (y-1)x = 3y - 2 \Rightarrow x = \dfrac{3y-2}{y-1}$

এখন, $x = \dfrac{3y-2}{y-1} \in A = \mathbb{R} - \{3\}$ হবে যদি ও

কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y - 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$ হয়।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{1\} = B.$

$f(A) = B.$

অতএব, f(x) একটি সার্বিক ফাংশন।

11. (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে, মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $f^{-1}(25)$ [কু.'০৫; য.'১১]

(ii) $f^{-1}(-16)$ [য.'০৪, '১১]

(iii) $f^{-1}([16,36])$ **(iv)** $f^{-1}(\{16,36\})$

সমাধান ঃ (i) মনে করি, $f^{-1}(25) = x$

$f(x) = 25$ [$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$

$f^{-1}(25) = \{-5, 5\}$

(ii) মনে করি, $f^{-1}(-16) = x$

$f(x) = -16 \Rightarrow x^2 = -16$

x এর এমন কোন বাস্তব মান নেয় যার বর্গ ঋণাত্মক।

$f^{-1}(-16) = \emptyset$

(iii) মনে করি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$

[$y = f(x)$ iff $x = f^{-1}(y)$]

$f^{-1}(16) = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ এবং

$f^{-1}(36) = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

$f^{-1}([16,36]) = [-6, -4] \cup [4, 6]$

$= \{x \in \mathbb{R} \ \ -6 \leq x \leq -4$ অথবা $4 \leq x \leq 6\}$

(iv) মনে করি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$

[$\because y = f(x)$ iff $x = f^{-1}(y)$]

$f^{-1}(16) = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ এবং

$f^{-1}(36) = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

$f^{-1}(\{16,36\}) = \{-6, -4, 4, 6\}$ (Ans.)

11(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে, মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $f^{-1}(5)$ [চ.'০০] **(ii)** $f^{-1}(0)$ [ব.'১১]

(iii) $f^{-1}([5,37])$ [ব.'১১]

(iv) $f^{-1}(-5)$ [কু.'০৩; য.'০৮]

(v) $f^{-1}(10)$ [য.'০৮] **(vi)** $f^{-1}(\{1, 10\})$

(i) মনে করি, $f^{-1}(5) = x$

$f(x) = 5$, [$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$f^{-1}(5) = \{-2 \quad 2\}$

(ii) মনে করি, $f^{-1}(0) = x$

$f(x) = 0$ [$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$; যা x এর বাস্তব মানের জন্য সম্ভব নয়।

$f^{-1}(0) = \emptyset$

(iii) মনে করি, $y = f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$

$f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y-1}$

[$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$f^{-1}(5) = \pm\sqrt{5-1} = \pm 2$ এবং

$f^{-1}(37) = \pm\sqrt{37-1} = \pm 6$

$f^{-1}([16,36]) = [-6, -2] \cup [2, 6]$

$= \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq -2$ অথবা $2 \leq x \leq 6\}$

(iv) মনে করি, $f^{-1}(-5) = x$ $\quad f(x) = -5$

[$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\Rightarrow x^2 + 1 = -5 \Rightarrow x^2 = -6$; যা x এর বাস্তব মানের জন্য সম্ভব নয় ।

$f^{-1}(-5) = \emptyset$

(v) মনে করি , $f^{-1}(10) = x$ $\quad f(x) = 10$

$[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

$\Rightarrow x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$f^{-1}(10) = \{-3, 3\}$

(vi) মনে করি, $y = f(x) = x^2 + 1$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$

$f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y-1}$

$[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

$f^{-1}(1) = \pm\sqrt{1-1} = 0$ এবং

$f^{-1}(10) = \pm\sqrt{10-1} = \pm 3$

$f^{-1}(\{1,10\}) = \{-3, 0, 3\}$

11.(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 - 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে , মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $f^{-1}(2)$ [চ.'০৩; রা.'১০] **(ii) $f^{-1}(-3)$**

(i) মনে করি , $f^{-1}(2) = x$

$f(x) = 2 \quad [\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

$\Rightarrow x^2 - 7 = 2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$f^{-1}(2) = \{-3, 3\}$

(ii) মনে করি , $f^{-1}(-3) = x$

$f(x) = -3 \quad [\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

$\Rightarrow x^2 - 7 = -3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\therefore f^{-1}(-3) = \{-2, 2\}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^3 + 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(34)$ এবং $f^{-1}(-57)$ এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান ঃ মনে করি, $y = f(x) = x^3 + 7$

$x^3 = y - 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-7}$

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-7}$

$[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

y এর পরিবর্তে x লিখে পাই,

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-7}$ (Ans.)

$f^{-1}(2) = \sqrt[3]{34-7} = \sqrt[3]{27} = 3$ এবং

$f^{-1}(-57) = \sqrt[3]{-57-7} = \sqrt[3]{-64} = -4$

12(a) $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ হলে, দেখাও যে, $f^{-1}(x) = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$.

প্রমাণ ঃ ধরি, $y = f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \cdots (1)$ এবং

$y = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^y$

$\Rightarrow e^y + xe^y = 1 - x \Rightarrow x + xe^y = 1 - e^y$

$\Rightarrow (1 + e^y)x = 1 - e^y \Rightarrow x = \frac{1-e^y}{1+e^y}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1-e^y}{1+e^y}$ [(1) দ্বারা]

$f^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ (Showed)

12(b) $f(2x-1) = x + 2$ হলে, $f(x+3)$ এবং $f^{-1}(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ ধরি, $2x - 1 = y \therefore f(y) = x + 2$ এবং

$2x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y+1)$

$\Rightarrow x + 2 = 2 + \frac{1}{2}(y+1) = \frac{4+y+1}{2}$

$\Rightarrow f(y) = \frac{y+5}{2}$

$f(x+3) = \frac{x+3+5}{2} = \frac{x+8}{2}$ (Ans.)

আবার, $f(2x-1) = x + 2$

$\Rightarrow f^{-1}(x+2) = 2x - 1$

$f^{-1}\{(x-2)+2\} = 2(x-2) - 1$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 4 - 1 = 2x - 5$ (Ans.)

12(c) $\boldsymbol{\varphi(x) = \cot^{-1}(1 + x + x^2)}$ **হলে দেখাও যে,** $\boldsymbol{\varphi(0) + 2\varphi(1) + \varphi(2) = \frac{\pi}{2}}$ **[ঢা.'০৯]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\varphi(x) = \cot^{-1}(1 + x + x^2)$

$$\varphi(0) = \cot^{-1}(1+0+0) = \cot^{-1}(1) = \tan^{-1}(1)$$

$$\varphi(1) = \cot^{-1}(1+1+1) = \cot^{-1}(3) = \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

$$\varphi(2) = \cot^{-1}(1+2+4) = \cot^{-1}(7) = \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$\varphi(0) + 2\varphi(1) + \varphi(2)$$

$$= \tan^{-1}(1) + 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$= \{\tan^{-1}(1) + \tan^{-1}\frac{1}{7}\} + 2\tan^{-1}\frac{1}{3}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} + \tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{7+1}{7-1} + \tan^{-1}(\frac{2}{3}\times\frac{9}{9-1})$$

$$= \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{6}{8} = \tan^{-1}\frac{4}{3} + \cot^{-1}\frac{4}{3}$$

$$\varphi(0) + 2\varphi(1) + \varphi(2) = \frac{\pi}{2} \text{ (Showed),}$$

$$[\because \tan^{-1}\theta + \cot^{-1}\theta = \frac{\pi}{2}]$$

12(d) যদি $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{1-x^2}}$ **,** $\boldsymbol{-1 \le x \le 0}$ **হয়, তবে** $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ **নির্ণয় কর এবং** $\boldsymbol{f^{-1}(\frac{1}{2})}$ **-এর মান নির্ণয় কর। [রা.'১১]**

সমাধান ঃ ধরি, $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{1-y^2}, [\because -1 \le x \le 0]$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = -\sqrt{1-y^2} \qquad f^{-1}(x) = -\sqrt{1-y^2}$$

$$[\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$$

এখন, $f^{-1}(\frac{1}{2}) = -\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = -\sqrt{\frac{4-1}{4}}$

$$f^{-1}(\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (Ans.)}$$

13. (a) $\boldsymbol{F = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}}$ **এবং** $\boldsymbol{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1\}}$**. অন্বয় F এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।** $\boldsymbol{F^{-1}}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ F সেটের বর্ণনাকারী শর্ত $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2)$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2} \cdots\cdots\cdots (1)$$

$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$x \in \mathbb{R}$ এবং $16 - x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 - 4^2 \le 0$

$\Rightarrow (x-4)(x+4) \le 0 \Rightarrow -4 \le x \le 4$ হয়।

ডোমেন $F = \{x \in \mathbb{R} : -4 \le x \le 4\} = [-4, 4]$

এখন, $x = 0 \in$ ডোমেন F এর জন্য,

$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{16-0^2} = \pm\frac{3}{4}\times 4 = \pm 3$ যা রেঞ্জ F এর যথাক্রমে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান।

রেঞ্জ $F = [-3, 3]$

$F^{-1} = \{(y, x) : y \in [-3, 3], x \in [-4, 4]$ এবং $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1\}$

x কে y দ্বারা এবং y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই;

$F^{-1} = \{(x, y) : x \in [-3, 3], y \in [-4, 4]$ এবং $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1\}$

$F^{-1} = \{(x, y) : x \in [-3, 3], y \in [-4, 4]$ এবং $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1\}$

13(b) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2 + 4}}$ **দ্বারা প্রকাশিত** $\boldsymbol{f : [-2, 2] \to \mathbb{R}}$

অন্বয়ের রেঞ্জ নির্ণয় কর। $f^{-1}([\sqrt{5}, \frac{5}{2}])$ ও নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

$f(0) = \sqrt{4} = 2$ যা $x \in [-2, 2]$ এর জন্য $f(x)$ অর্থাৎ রেঞ্জ f এর ক্ষুদ্রতম মান।

$f(\pm 2) = \sqrt{(\pm 2)^2 + 4} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

যা $x \in [-2, 2]$ এর জন্য $f(x)$ অর্থাৎ রেঞ্জ f এর বৃহত্তম মান।

রেঞ্জ $f = [2, 2\sqrt{2}]$

মরে করি, $y = f(x) = \sqrt{x^2+4}$

$y^2 = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = y^2 - 4$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 - 4}$

$f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y^2-4}$

$[\quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$

$f^{-1}(\sqrt{5}) = \pm\sqrt{5-4} = \pm 1$ এবং

$$f^{-1}(\frac{5}{2}) = \pm\sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \pm\sqrt{\frac{25-16}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$

$$f^{-1}([\sqrt{5}, \frac{5}{2}]) = [-\frac{3}{2} \quad -1] \cup [1, \frac{3}{2}]$$

13(c) $f(x) = 5 - 3x$ দ্বারা প্রকাশিত $f: [-5, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় কর। $f^{-1}([-4, \frac{1}{2}])$ ও নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = 5 - 3x$

$f(-5) = 5 - 3 \times (-5) = 5 + 20 = 20$

যা $x \in [-5, 3]$ এর জন্য $f(x)$ এর বৃহত্তম মান।

$f(3) = 5 - 3 \times (3) = 5 - 9 = -4$ যা $x \in [0, 2]$ এর জন্য $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

রেঞ্জ $f = [-4, 20]$ (Ans.)

মনে করি, $y = f(x) \quad y = 5 - 3x$

$$\Rightarrow 3x = 5 - y \Rightarrow x = \frac{5-y}{3}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{5-y}{3}$$

$[\quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$

$$\therefore f^{-1}(-4) = \frac{5+4}{3} = 3$$; যা $y \in [-4, \frac{1}{2}]$ এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর বৃহত্তম মান।

$$f^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{5 - \frac{1}{2}}{3} = \frac{9}{2 \times 3} = \frac{3}{2}$$; যা $y \in [-4, \frac{1}{2}]$ এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$$f^{-1}([-4, \frac{1}{2}]) = [\frac{3}{2}, 3] \quad \text{(Ans.)}$$

13(d) $f(x) = 2x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় কর। $f^{-1}([\frac{3}{2}, 3])$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = 2x^2 + 1$

$f(0) = 2 \times (0)^2 + 1 = 1$; যা $x \in [0, 2]$ এর জন্য $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$f(2) = 2 \times (2)^2 + 1 = 9$; যা $x \in [0, 2]$ এর জন্য $f(x)$ এর বৃহত্তম মান।

রেঞ্জ $f = [1, 9]$ (Ans.)

মনে করি, $y = f(x) \quad y = 2x^2 + 1$

$$\Rightarrow 2x^2 = y - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{y-1}{2}} \quad [\quad x \in [0, 2]]$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y-1}{2}}$$

$[\quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$

$$\therefore f^{-1}(3) = \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$; যা $y \in [\frac{3}{2}, 3]$ এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর বৃহত্তম মান।

$$f^{-1}(\frac{3}{2}) = \sqrt{\frac{\frac{3}{2} - 1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$; যা $y \in [\frac{3}{2}, 3]$ এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$$f^{-1}([\frac{3}{2}, 3]) = [\frac{1}{2}, 1] \quad \text{(Ans.)}$$

14(a) $f(\frac{1-x}{1+x}) = x + 2$ হলে $f(x+3)$ এবং

$f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, $\frac{1-x}{1+x} = y \quad \therefore f\ (y) = x + 2$

এবং $y + xy = 1 - x \Rightarrow x(y+1) = 1 - y$

$\Rightarrow x = \frac{1-y}{1+y} \Rightarrow x + 2 = \frac{1-y}{1+y} + 2$

$\Rightarrow f(y) = \frac{1-y+2+2y}{1+y} \quad [\because f(y) = x+2]$

$\Rightarrow f(y) = \frac{3+y}{1+y}$

$f(x+3) = \frac{3+(x+3)}{1+(x+3)} = \frac{x+6}{x+4}$ (Ans.)

২য় অংশ: দেওয়া আছে, $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x + 2$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(x+2) = \frac{1-x}{1+x}$

$f^{-1}\{(x-2)+2\} = \frac{1-(x-2)}{1+(x-2)}$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-1}$ (Ans.)

14 (b) $f(2x-1) = x+2$ হলে $f(x+3)$ এবং $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, $2x - 1 = y \;\therefore f\ (y) = x + 2$

এবং $2x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$

$\Rightarrow x + 2 = \frac{y+1}{2} + 2$

$\Rightarrow f(y) = \frac{y+1+4}{2} \quad [\because f(y) = x+2]$

$\Rightarrow f(y) = \frac{y+5}{2}$

$f(x+3) = \frac{(x+3)+5}{2} = \frac{x+8}{2}$ (Ans.)

২য় অংশ: দেওয়া আছে, $f(2x-1) = x+2$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(x+2) = 2x - 1$

$f^{-1}\{(x-2)+2\} = 2(x-2) - 1$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(x) = 2x - 5$ (Ans.)

14(c) দেখাও যে, $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ এবং $f: A \to A,\ f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশনের $f^{-1}(x)$ বিদ্যমান। $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

যেকোন $x_1, x_2 \in A$ এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ হয়।$[\because x \geq 0]$

$f(x)$ একটি এক– এক ফাংশন ।

ধরি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x^2 = y$

$\Rightarrow \; x = \sqrt{y} \cdots\cdots (1) \quad [\because x \geq 0]$

এখন, $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি, $y \in \mathbb{R}$ এবং $y \geq 0$

রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0] = A$

$f(A) = A$

$f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন ।

যেহেতু $f(x)$ একটি এক – এক ও সার্বিক ফাংশন সুতরাং $f(x)$ -এর বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান ।

এখন (1) হতে পাই, $x = \sqrt{y}$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad [\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থান করে পাই, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

14 (d) $A, B \subseteq \mathbb{R}$ এবং $f(x) : A \to B$ হলে এবং (i) $f(x) = \sqrt{x-2}$ (ii) $f(x) = x^2$ (iii) $f(x) = (x-1)^2$ ফাংশনগুলোর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x)$ বিদ্যমান থাকলে A এবং B সেটের মান নির্ণয় কর ; যেখানে A বৃহত্তম।

(*i*) যেহেতু $f(x) = \sqrt{x-2}$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক – এক এবং সার্বিক ।

রেঞ্জ $f = B$.

এখন, $f(x) = \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি, $x \in \mathbb{R}$ এবং $x - 2 \geq 0$ i.e., $x \geq 2$ হয়।

ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$

ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ এর জন্য, $f(x) = \sqrt{x-2}$ একটি এক – এক ফাংশন।

$A =$ ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$

$x \in$ ডোমেন f এর জন্য, $f(x)$ এর মান অঋণাত্মক ।

রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

$B = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$

(ii) যেহেতু $f(x) = x^2$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান, সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক – এক এবং সার্বিক।

রেঞ্জ $f = B$

এখন, $f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি, $x \in \mathbb{R}$.

ডোমেন.$f = \mathbb{R}$

ডোমেন $f = \mathbb{R}$ এর জন্য, $f(x) = x^2$ ফাংশনটি এক – এক নয়।

কিন্তু ডোমেন f-এর সর্বাধিক মান $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$ অথবা $\{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\}$এর জন্য $f(x) = x^2$ ফাংশনটি এক–এক।

$A = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$ অথবা $A = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\}$

$x \in$ ডোমেন f এর জন্য, $f(x)$ -এর মান অঋণাত্মক।

রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$

$B = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$

(iii) যেহেতু $f(x) = (x-1)^2$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান, সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক – এক এবং সার্বিক।

রেঞ্জ $f = B$

এখন, $f(x) = (x-1)^2 \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি, $x \in \mathbb{R}$

ডোমেন $f = \mathbb{R}$

ডোমেন $f = \mathbb{R}$-এর জন্য, পদত্ত ফাংশন $f(x) = (x-1)^2$ এক–এক নয়।

কিন্তু ডোমেন f -এর সর্বাধিক মান $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 1\}$ অথবা $\{x \in \mathbb{R}: x \leq 1\}$এর জন্য $f(x) = (x-1)^2$ ফাংশনটি এক–এক।

$A = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 1\}$ অথবা $A = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1\}$

$x \in$ ডোমেন f এর জন্য, $f(x)$ এর মান অঋণাত্মক

রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$.

$B = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$

15. নিম্নের অন্বয়গুলোর লেখ অঙ্কন কর। কোনগুলো ফাংশন এবং কোনগুলো ফাংশন নয় তা লেখচিত্র থেকে কারণসহ উল্লেখ কর।

সমাধান :

(a) নিচের তালিকায় $x \in [-3, 3]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = x^2$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি

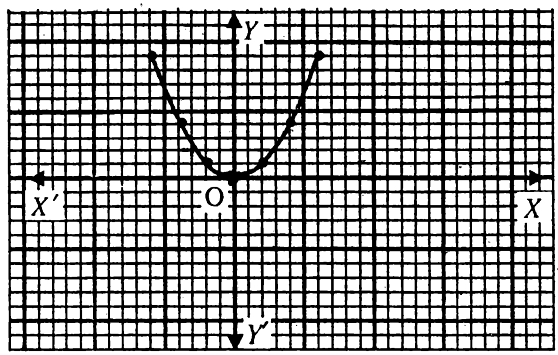
x	± 3	± 2	± 1	0
$y = x^2$	9	4	1	0

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নিধারণ :

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1 একক।



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $R = \{(x, y) \quad y = x^2$ এবং $-3 \leq x \leq 3\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

$-3 \leq x \leq 3$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন।

15(b) নিচের তালিকায় $x \in [0, 4]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	1	2	3	4
$y = \pm\sqrt{x}$	0	± 1	± 1.42	± 1.73	± 2

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

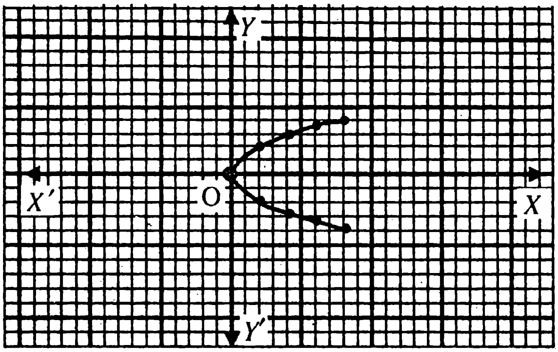
স্কেল নিধারণ :

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে

বক্রাকারে যোগ করে $R = \{(x\ ,\ y) \quad y^2 = x$ এবং $0 \le x \le 4\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।



$0 < x \le 4$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একাধিক (দুইটি) বিন্দু আছে । অতএব , প্রদত্ত অন্বয় ফাংশন নয় ।

15(c) নিচের তালিকায় $x \in [0\ \ ,\ 4\ ]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y^2 = x \Rightarrow y = \sqrt{x}\ \ (\quad y \ge 0)$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

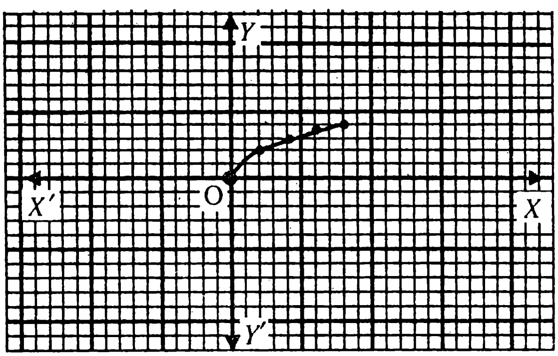
x	0	1	2	3	4
$y = \sqrt{x}$	0	1	1.42	1.73	2

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

স্কেল নিধারণ ঃ

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক ।

y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক ।

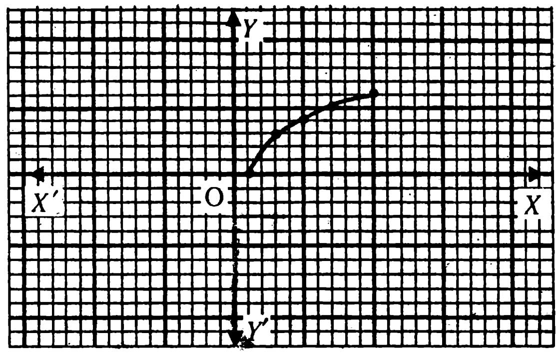


এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $R=\{(x\ ,\ y){:}\ y^2 = x\ ,0 \le x \le 4$ এবং $y \ge 0\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

$0 \le x \le 4$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে । অতএব , প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন ।

15(d) নিচের তালিকায় $x \in [0\ \ ,\ 10\ ]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = \sqrt{x-1}$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি

x	1	3	5	7	10
$y = \sqrt{x-1}$	0	1.42	2	2.45	3



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি । স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $R = \{(x\ ,\ y) \quad y = \sqrt{x-1}$ এবং $1 \le x \le 10\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

$1 \le x \le 10$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে । অতএব, প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন ।

15(e) প্রদত্ত অন্বয় R এর বর্ণনাকারী সমীকরণ

$(x-1)^2 + (\ y\ \ + 2\ )^2 = 9$ একটি বৃত্ত , যার কেন্দ্রের স্থানাংক $(\ 1\ ,\ -2\ )$ এবং ব্যাসার্ধ 3

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

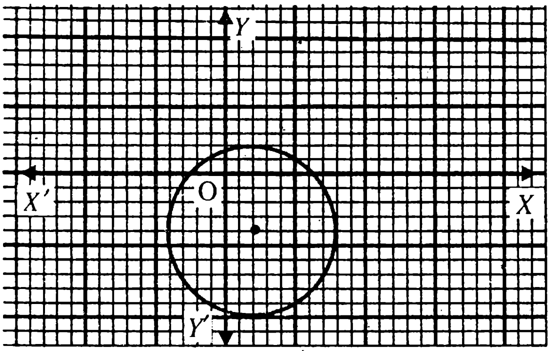
স্কেল নিধারণ ঃ

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক ।

y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক ।

$(1\ ,\ -2)$ বিন্দুকে কেন্দ্র করে 3 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি ।

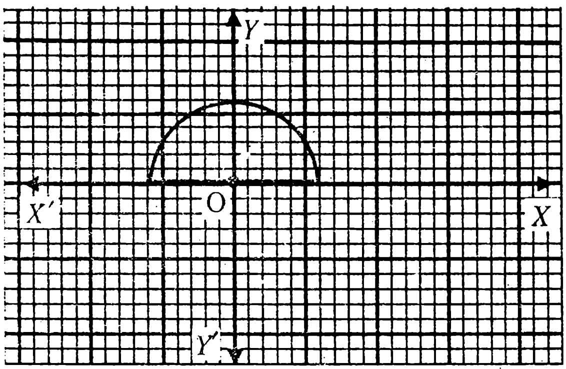
$R = \{(x\ ,\ y) \quad (x-1)^2 + (\ y + 2\ )^2 = 9\ \}$এর লেখ অঙ্কন করা হল ।



$2 < x < 4$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একাধিক (দুইটি) বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় ফাংশন নয়।

15(f) প্রদত্ত অন্বয় R এর বর্ণনাকারী শর্ত $x^2 + y^2 = 9$ এবং $y \geq 0$ একটি অর্ধবৃত্ত যার কেন্দ্রের স্থানাংক $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ 3

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি।



স্কেল নিধারণ ঃ

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

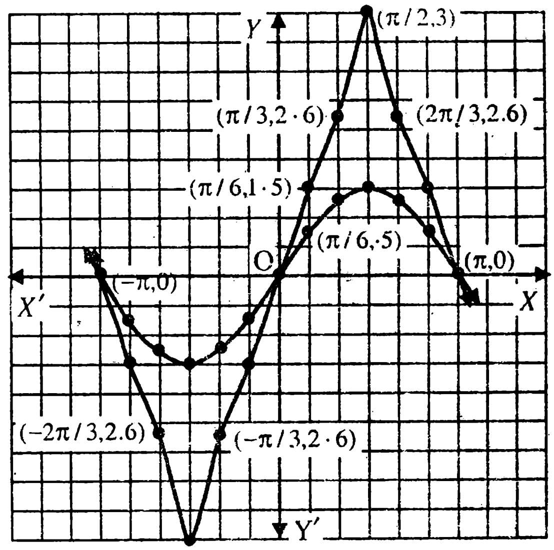
y-অক্ষের সমান্তরাল কোন সরললেখা প্রদত্ত অন্বয়ের লেখকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করেনা। অতএব প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন।

$y \geq 0$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন।

16. (a) $y = \sin x, \ -\pi \leq x \leq \pi$ এর গ্রাফ হতে $y = 3 \sin x$ এর গ্রাফ অঙ্কন কর।

সমাধান: x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু $= 30°$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 3 বাহু = 1 ধরে $y = \sin x, \ -\pi \leq x \leq \pi$ লেখচিত্র অঙ্কন করি।

$y = \sin x$ এর রূপান্তরিত ফাংশন $y = 3 \sin x$, y অক্ষের দিকে সংকুচিত হয়। $y = \sin x$ লেখের প্রতিটি বিন্দুর y –স্থানাঙ্ককে 3 গুণ বৃদ্ধি করে বিন্দুটিকে উপরের দিকে সরিয়ে $y = 3 \sin x$ লেখ নিচে অঙ্কন করা হলো।।



(b) $y = e^x$ এর লেখ হতে $y = ln\ x$ এর লেখ অঙ্কন কর।

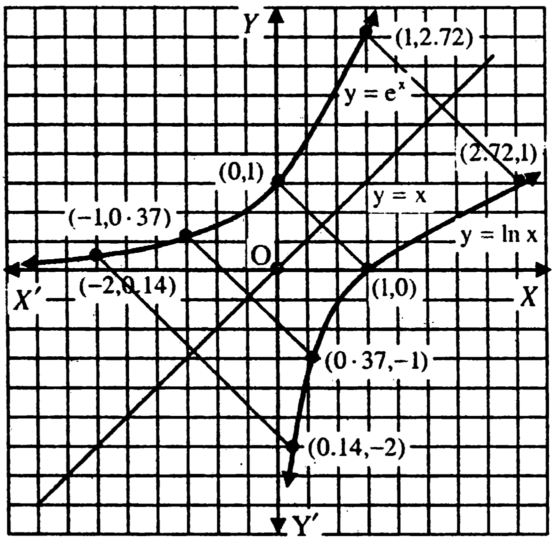
নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = e^x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	−2	−1	0	1	2
$y = e^x$	0·14	0·37	1	2.72	7·39

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 3 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = e^x$ এর লেখ অঙ্কন করি।

$f(x) = e^x$ ফাংশনের লেখের উপরস্থ $(-2, 0·14)$, $(-1, 0·37)$, $(0,1)$ ও $(1, 2·72)$ বিন্দুগুলির x স্থানাঙ্ক ও y স্থানাঙ্কের স্থান বিনিময় করে যথাক্রমে $(0·14, -2)$ $(0·37, -1)$, $(1,0)$ ও $(2·72,1)$ বিন্দুগুলি ছক

কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = e^x$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \ln x$ এর লেখ অঙ্কন করা হলো। (অন্যভাবে, $y = x$ সরলরেখা হতে $(-2, 0\cdot14)$ $(-1, 0\cdot37)$, $(0,1)$ ও $(1, 2\cdot72)$ বিন্দুগুলির সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সাহায্যে $f^{-1}(x) = \ln x$ এর লেখ অঙ্কন করা যায়।)



17. ফাংশনগুলির পর্যায় নির্ণয় কর: (a) $\sin(5\theta + \frac{\pi}{4})$ **(b)** $7\tan(-3\theta)$ **(c)** $\cos\frac{1}{2}\theta\tan\theta$

সমাধান: (a) ধরি, $f(\theta) = \sin(5\theta + \frac{\pi}{4})$

$$f(\theta) = \sin(5\theta + \frac{\pi}{4} + 2\pi)$$

[$\because \sin\theta$ এর পর্যায় 2π]

$$= \sin 5(\theta + \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}) = f(\theta + \frac{2\pi}{5})$$

$\sin(5\theta + \frac{\pi}{4})$ এর পর্যায় $\frac{2\pi}{5}$.

(b) ধরি, $f(\theta) = 7\tan(-3\theta)$

$$f(\theta) = 7\tan(-3\theta + \pi)$$

[$\because \tan\theta$ এর পর্যায় π]

$$= 7\tan 3(-\theta + \frac{\pi}{3}) = f(\theta + \frac{\pi}{3})$$

$7\tan(-3\theta)$ এর পর্যায় $\frac{\pi}{3}$.

(c) ধরি, $f(\theta) = \cos\frac{1}{2}\theta\tan\theta$

$$\cos\frac{1}{2}\theta = \cos(\frac{1}{2}\theta + 2\pi) = \cos\frac{1}{2}(\theta + 4\pi)$$

[$\because \sin\theta$ এর পর্যায় 2π]

এবং $\tan\theta = \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta + 2\pi)$

$$= \tan(\theta + 3\pi) = \tan(\theta + 4\pi)$$

[$\because \tan\theta$ এর পর্যায় π]

$$f(\theta) = \cos\frac{1}{2}(\theta + 4\pi)\tan(\theta + 4\pi)$$

$$= f(\theta + 4\pi)$$

$\cos\frac{1}{2}\theta\tan\theta$ এর পর্যায় 4π.

18. দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $g(x) = 2x - 3$.

(a) $g(\frac{1}{2})$ এর মান নির্ণয় কর। $f(x) = 19$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

(b) (g o f) (2) এবং (f o g) (2) নির্ণয় কর।

[চ.'০৭; ব.'১২; দি.'১৩]

(c) f(x) ফাংশনের এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $f(x + 4)$ ও $f(x - 4)$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।

সমাধান: (a) দেওয়া আছে, $g(x) = 2x - 3$

$$g(\frac{1}{2}) = 2\times\frac{1}{2} - 3 = 1 - 3 = -2$$

$f(x) = 19 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 19$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$

$\Rightarrow (x + 6)(x - 3) = 0$

$x + 6 = 0$ হলে, $x = -6$

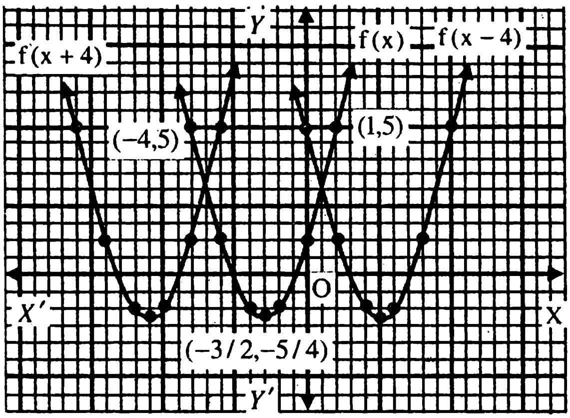
$x - 3 = 0$ হলে, $x = 3$.

(b) 8(c) দ্রষ্টব্য।

(c) নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	-1	−2	−3	1	−4	$-\frac{3}{2}$
$f(x) = x^2 + 3x + 1$	1	-1	−1	1	5	5	$-\frac{5}{4}$

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এর স্কেচ অঙ্কন করি ।



$f(x)$ ফাংশনের লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 4 একক অর্থাৎ 8 ঘর বামে সরিয়ে $f(x)$ এর রূপান্তরিত ফাংশন $f(x + 4)$ এর এবং 4 একক অর্থাৎ 8 ঘর ডানে সরিয়ে $f(x - 4)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো ।

19. দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$.

(a) $g^{-1}(\{-1, 8\})$ এর মান নির্ণয় কর ।

(b) $(fog)(x)$ এবং $(gof)(x)$ নির্ণয় কর । প্রথম

[চ.'০৯ ; সি.'০৫; ব.'০৯]

(c) $g(x)$ ফাংশনের এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $g(2x)$ ও $f(0·5x)$ এর স্কেচ অঙ্কন কর ।

সমাধান : ধরি, $y = g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = y + 1$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1}$

$g^{-1}(y) = \pm\sqrt{y+1}$

$[\quad y = g(x) \text{ iff } x = g^{-1}(y)]$

এখন , $g^{-1}(-1) = \pm\sqrt{-1+1} = 0$ এবং

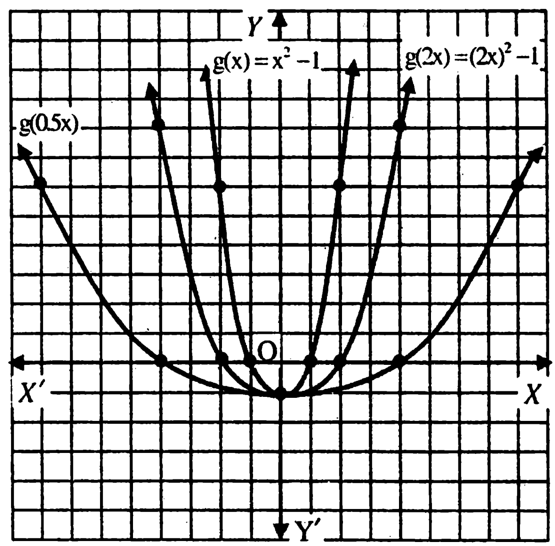
$g^{-1}(8) = \pm\sqrt{8+1} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$g^{-1}(\{-1, 8\}) = \{-3, 0, 3\}$

(b) 9(e) দ্রষ্টব্য ।

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$

(c) x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে $g(x)$ ফাংশনের এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $g(2x)$ ও $g(0·5x)$ এর নিচে স্কেচ অঙ্কন করা হলো ।



20. f $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে ,

সমাধান : (a) $x = 0$ হলে $f(0) = 0 + 1 = 1$, যা $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান এবং $x > 0$ হলে $f(x) > 1$.

$f(x)$ এর রেঞ্জ $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

(b) মনে করি, $y = f(x) = x^2 + 1$

$\Rightarrow x^2 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y-1}$, $[\because x \geq 0]$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$

$[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

$f^{-1}(1) = \sqrt{1-1} = 0$ এবং

$f^{-1}(10) = \sqrt{10-1} = 3$

$f^{-1}([1,10]) = [0\ ,3]$ এবং

$f^{-1}(\{1,10\}) = \{0,3\}$

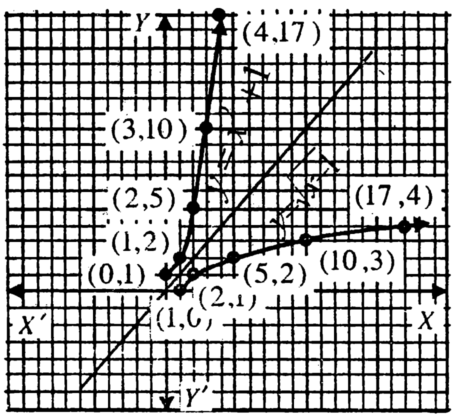
(c) f(x) এর লেখচিত্র থেকে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

2. সংযুক্ত তালিকায় $x \geq 0$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = x^2 + 1$ এর প্রতিবূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	1	2	3	4
f (x)	1	2	5	10	17

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = x^2 + 1$ এর লেখ অঙ্কন করি ।



y = x সরলরেখার লেখ অঙ্কন করি। y = x রেখা হতে (0, 1) (1, 2), (2,5), (3,10), (4, 17) ইত্যাদি বিন্দুগুলির সমদূরবর্তী যথাক্রমে (1,0), (2,1), (5,2), (10,3), (17,4) ইত্যাদি বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে f(x) এর লেখ থেকে $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$ এর লেখ অঙ্কন করা হলো।

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. $y = -x^2$ ফাংশনের এবং রূপান্তরিত $y = -(x+3)^2$ ও $y = (x-3)^2$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = -x^2$ ফাংশনের ও রূপান্তরিত $y = -(x+3)^2$ ও $y = (x-3)^2$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

মূলতত্ত্ব ঃ $y = -x^2$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে এবং অক্ষ y -অক্ষ। $y = -x^2$ এর লেখ নিজের সমান্তরালে 3 একক বামে সরিয়ে দিয়ে $y = -(x+3)^2$ পরাবৃত্তের লেখ পাওয়া যায় যার শীর্ষবিন্দু (–3, 0) । আবার, x অক্ষের সাপেক্ষে $y = -x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y = x^2$ এর লেখকে 3 একক ডানে সরিয়ে দিয়ে $y = (x-3)^2$ পরাবৃত্তের লেখ পাওয়া যায় যার শীর্ষবিন্দু (3, 0) .

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

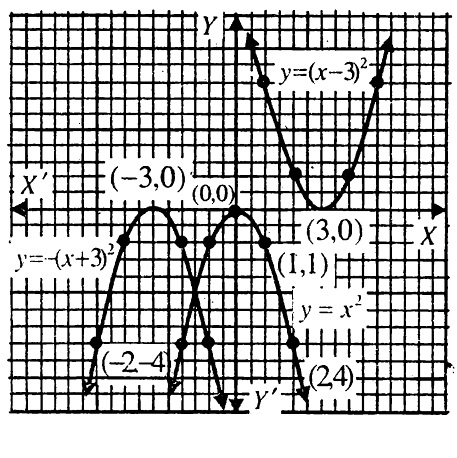
কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = -x^2$ এর প্রতিবূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	–2	–1	0	1	2
f (x)	–4	– 1	0	–1	–4

3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = -x^2$ এর লেখ অঙ্কন করি ।



4. লেখটির প্রতিটি বিন্দুকে 2×3 বা 6 বর্গের বাহুর সমান অর্থাৎ 3 একক বাম দিকে সরিয়ে $y = -(x+3)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি ।

5. আবার, x অক্ষের সাপেক্ষে $y = -x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y = x^2$ এর লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 2×3 বা 6 বর্গের বাহুর সমান অর্থাৎ 3 একক ডানে সরিয়ে দিয়ে $y = (x-3)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি ।

বৈশিষ্ট্য ঃ (i) লেখচিত্র তিনটি পরাবৃত্ত। $y = -x^2$ এর শীর্ষবিন্দু (0, 0), $y = -(x+3)^2$ এর শীর্ষবিন্দু (−3,0) এবং $y = (x-3)^2$ এর শীর্ষবিন্দু (3, 0) ।
(ii) $y = -x^2$ এর লেখ y অক্ষের সাপেক্ষে, $y = -(x+3)^2$ এর লেখ $x = -3$ রেখার সাপেক্ষে ও $y = (x-3)^2$ এর লেখ $x = 3$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

2. $y = x^2$ ফাংশনের ও রূপান্তরিত $y = -2x^2 + 4x - 5$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = x^2$ ফাংশনের ও রূপান্তরিত $y = -2x^2 + 4x - 5$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

মূলতত্ত্ব ঃ $y = x^2$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে এবং অক্ষ y -অক্ষ। $y = x^2$ এর লেখ থেকে $y = -2x^2 + 4x - 5 = -2(x^2 - 2x + 1) - 3 = -2(x-1)^2 - 3$ এর লেখ অঙ্কন করা যায়।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

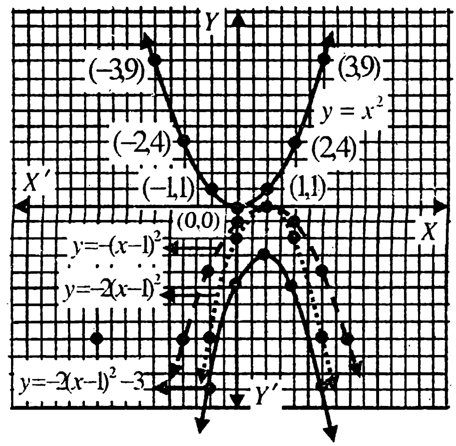
1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = x^2$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	±1	±2	±3
$f(x)$	0	1	4	9

3. x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = x^2$ এর লেখ অঙ্কন করি ।

4. x অক্ষের সাপেক্ষে $y = x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y = -x^2$ এর লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 2×1 বা 2 বর্গের বাহুর সমান অর্থাৎ 1 একক ডানে সরিয়ে দিয়ে $y = -(x-1)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি । এ লেখকে y অক্ষের দিকে 2 গুণ সংকুচিত করে $y = -2(x-1)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি। সর্বশেষে এ লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 3 একক নিচে স্থানান্তরিত করে $y = -2(x-1)^2 - 3$ এর লেখ অঙ্কন করা হলো।



বৈশিষ্ট্য ঃ (i) লেখচিত্র দুইটি পরাবৃত্ত। $y = x^2$ এর শীর্ষবিন্দু (0, 0), এবং $y = -2(x-1)^2 - 3$ এর শীর্ষবিন্দু (1, −3) ।

(ii) $y = x^2$ এর লেখ y অক্ষের সাপেক্ষে, $y = y = -2(x-1)^2 - 3$ এর লেখ $x = 1$ রেখার সাপেক্ষে সাপেক্ষে প্রতিসম।

3. একই লেখচিত্রে $y = 2x + 5$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ একই লেখচিত্রে $f(x) = y = 2x + 5$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$ এর লেখচিত্র অঙ্কন

মূলতত্ত্ব ঃ $f(x) = 2x + 5$ লেখের উপরস্থ বিন্দুগুলির ভুজ ও কোটির স্থান বিনিময় করে $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করা যায় অথবা $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x) = 2x + 5$ এর প্রতিচ্ছবি অঙ্কন করে $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$ এর লেখ পাওয়া যায়।

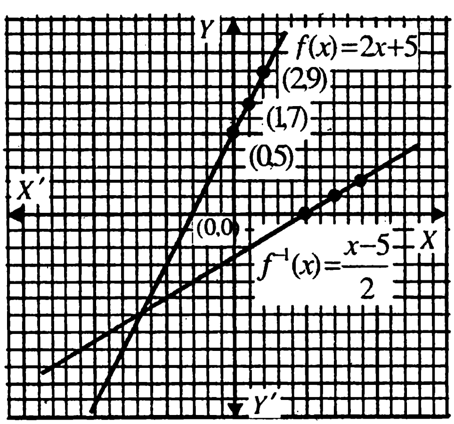
প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।
2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = 2x + 5$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	1	2
y	5	7	9

3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = 2x + 5$ এর লেখ অঙ্কন করি ।
4. একই স্কেলে (5, 0), (7, 1) , (9, 2) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$ এর লেখ অঙ্কন করি ।



4. $y = 5^x$ সূচক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = 5^x$ ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট নির্ণয় ।

মূলতত্ত্ব ঃ x এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য $f(x) = 5^x$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে এবং লেখের বৈশিষ্ট নির্ণয় করতে হবে।

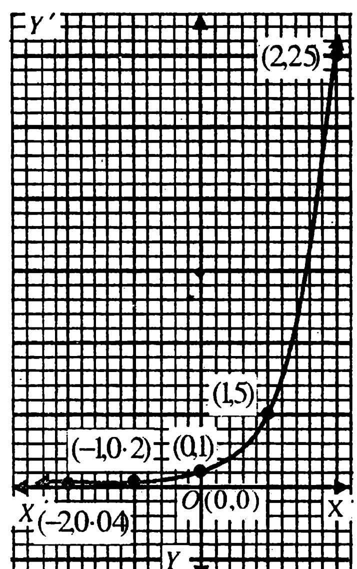
প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।
2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = 5^x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	−2	−1	0	1	2
y	0·04	0·2	1	5	25

3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = 5^x$ এর লেখ অঙ্কন করি।



বৈশিষ্ট্য ঃ (1) লেখচিত্রটি x অক্ষের নিচে আসবে না (2) x অক্ষটি লেখটির একটি অসীমতট রেখা।

(3) লেখচিত্রটি y অক্ষকে (0, 1) বিন্দুতে ছেদ করে।
(4) x অক্ষ বা y অক্ষের সাপেক্ষে লেখচিত্রটি প্রতিসম নয়।
(v) লেখচিত্রটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিদ্যমান।

5. $y = \log_{10} x$ লগারিদমিক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় ।

পরীক্ষণের নাম : $y = \log_{10} x$ লগারিদমিক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় ।

মূলতত্ত্ব : $y = \log_{10} x$ সমীকরণটি $x \le 0$ এর জন্য অসংজ্ঞায়িত হয় বিধায় $x > 0$ এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য $y = \log_{10} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে এবং লেখের বৈশিষ্ট নির্ণয় করতে হবে।

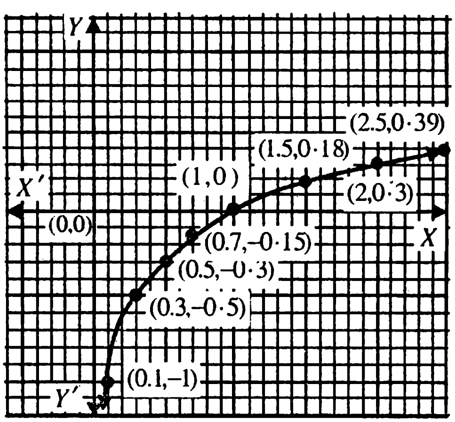
প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি :

1. একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = \log_{10} x$ এর প্রতিবূপী মান নির্ণয় করি :

x	0.1	0.3	0.5	0·7
$\log_{10} x$	−1	−0·5	−0.3	−0.15
x	1	1·5	2	2.5
$\log_{10} x$	0	0·18	0·3	0·39



3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = \log_{10} x$ এর লেখ অঙ্কন করি।

বৈশিষ্ট্য : (i) লেখচিত্রটি x অক্ষ বা y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম নয়।
(ii) লেখচিত্রটি ১ম চতুর্ভাগ ও ৪র্থ চতুর্ভাগে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।
(iii) লেখচিত্রটি x অক্ষকে (1,0) বিন্দুতে ছেদ করে।
(iv) y অক্ষ লেখটির একটি অসীমতট রেখা।
(v) লেখচিত্রটি y অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিদ্যমান।

6. $y = \cos^{-1} x$ ত্রিকোণমিতিক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় ।

পরীক্ষণের নাম : $y = \cos^{-1} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়, যখন $-1 \le x \le 1$.

মূলতত্ত্ব: $x \in [-1, 1]$ এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য $y = \cos^{-1} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে এবং লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় করতে হবে ।

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

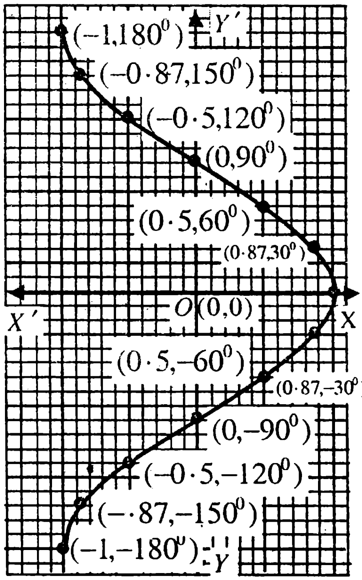
1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

2. নিচের তালিকায় $x \in [-1, 1]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = \cos^{-1} x$ এর প্রতিবূপী মান নির্ণয় করি :

x	−1	−0·87	−0·5	0
y	± 180°	± 150°	± 120°	± 90°
x	0·5	0·87	1	
y	± 60°	± 30°	90°	

3. x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 10° একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত

হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = \cos^{-1} x$ এর লেখ অঙ্কন করি।



বৈশিষ্ট্য ঃ (i) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন। (ii) লেখচিত্রটি ঢেউয়ের আকৃতি। (iii) লেখচিত্রটি মূলবিন্দুগামী নয়।

7. y = | 2x – 1| পরমমান ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়।

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = | x |$ পরমমান ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব ঃ $y = | 2x - 1 |$ সমীকরণে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান অঋণাত্মক।

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, \text{ যখন } 2x - 1 \geq 0 \\ -(2x - 1)x, \text{ যখন } 2x - 1 < 0 \end{cases}$$

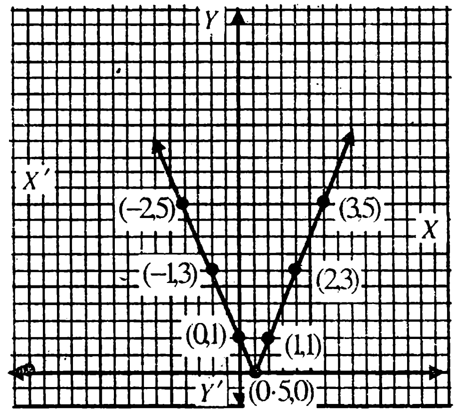
প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থান... অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি।
2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = | 2x - 1 |$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	–2	–1	1	2	3	0·5
y	1	5	3	1	3	5	0

3. x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিলের সাহায্যে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = | x |$ এর লেখ অঙ্কন করি।



বৈশিষ্ট্য ঃ (i) লেখচিত্রটি $x = \frac{1}{2}$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। (ii) লেখচিত্রটি ১ম চতুর্ভাগ ও ২য় চতুর্ভাগে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত। (iii) লেখচিত্রটি মূলবিন্দুতে ছেদ করে না। (iv) লেখচিত্রটি y অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিদ্যমান।

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1(a) $4f(x) + 2x\, f(\frac{1}{x}) = 10x + 17$ হলে, $f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$$4\,f(x) + 2x\, f(\frac{1}{x}) = 10x + 17 \qquad (i)$$

x কে $\frac{1}{x}$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$$4\,f(\frac{1}{x}) + 2\frac{1}{x}\, f(x) = 10\frac{1}{x} + 17$$

$$\Rightarrow 4x\, f(\frac{1}{x}) + 2\,f(x) = 10 + 17x$$

$$\Rightarrow 2\,f(x) + 4x\, f(\frac{1}{x}) = 17x + 10 \cdots \qquad (ii)$$

$(i) \times 2 - (ii) \Rightarrow$

$$(8 - 2)\, f(x) = (20 - 17)x + 34 - 10$$

$$\Rightarrow 6\,f(x) = 3x + 24$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4 \quad \text{(Ans.)}$$

1(b) $2f(x) + 3f(-x) = x^2 - x + 1$ হলে, f(x) এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$2f(x) + 3f(-x) = x^2 - x + 1 \quad \cdots (i)$

x কে $(-x)$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$2f(-x) + 3f(x) = (-x)^2 - (-x) + 1$

$\Rightarrow 3f(x) + 2f(-x) = x^2 + x + 1 \quad \cdots (ii)$

$(ii)\times 3 - (i)\times 2 \Rightarrow$

$(9-4)f(x) = (3-2)x^2 + (3+2)x + 3 - 2$

$\Rightarrow 5f(x) = x^2 + 5x + 1$

$f(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 5x + 1)$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ ঃ

1. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ হলে f(cosθ) এর মান নির্ণয় কর। [RU 07-08; JU 09-10]

Sol^n.: $f(\cos\theta) = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$= \tan^2\frac{\theta}{2}$

2. $f(x) = \frac{x}{1+x}$ হলে f(2/3) + f(3/2) সমান– [DU 04-05]

Sol^n.: $f(2/3) + f(3/2) = \frac{2}{3}\times\frac{3}{5} + \frac{3}{2}\times\frac{2}{5} = 1$

3. $f(a) = \ln(a)$ হলে $f(\frac{1}{a})$ = কত? [KUET 05-06; JU 09-10]

Sol^n.: $f(\frac{1}{a}) = \ln(\frac{1}{a}) = \ln(a^{-1}) = -\ln(a)$

4. $g(\theta) = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ হলে $g(\frac{\pi}{4} - \theta) = ?$ [KUET 08-09]

Sol^n.: $g(\theta) = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \tan(\frac{\pi}{4} - \theta)$

$g(\frac{\pi}{4} - \theta) = \tan\{\frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4} - \theta)\} = \tan\theta$

5. $f(x) = x^2 + 4$ এবং $g(x) = 2x - 1$ হলে $(gof)(x) = ?$ [DU 07-08, 05-06; Jt.U 05-06; JU, CU 09-10]

Sol^n.: $(gof)(x) = g(x^2 + 4)$

$= 2(x^2 + 4) - 1 = 2x^2 + 7$

6. f(x) = sinx, g(x) = x^2 হলে $f(g(\frac{\sqrt{\pi}}{2})) = ?$ [DU 09-10]

Sol^n.: $f(g(\frac{\sqrt{\pi}}{2})) = f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

7. $f(x) = 3x^3 + 2$, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{2}}$ হলে (fog)(5) এর মান হবে– [BUET 08-09]

Sol^n.: $(fog)(5) = f(\sqrt[3]{\frac{5-2}{2}}) = f(1) = 3.1^3 + 2$

8. $f(x) = x^2 + 3$ হলে $f(f(-3)) = ?$ [KUET 07-08]

Sol^n.: $f(f(-3)) = f((-3)^2 + 3) = f(12)$

$= 12^2 + 3 = 147$

9. $f(x) = x^3 + 5$ এর বিপরীত ফাংশন [JU 09-10]

Sol^n.: $f(f^{-1}(x)) = \{f^{-1}(x)\}^3 + 5$

$\Rightarrow x = \{f^{-1}(x)\}^3 + 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$

10. একটি ফাংশন $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = 2x + 1 দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(2)$ এর মান হবে– [BUET 06-07; JU, RU 09-10]

Sol^n.: $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ $\therefore f^{-1}(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

11. যদি $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $f(x) = x^2$ হয় তবে $f^{-1}(4)$ = কত? [CU 04-05; JU,Jt.U,RU 09-10]

Sol^n.: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$

12. f(x) = $\frac{5x+3}{4x-5}$ হলে $f^{-1}(x)$ = ? [DU10- 11]

Sol^n.: $f^{-1}(x) = \frac{5x+3}{4x-5}$ [সূত্র ব্যবহার করে।]

13. একটি ফাংশন $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(0)$ সমান– **[BUET 08-09]**

$Sol^n.:$ $f^{-1}(x) = \dfrac{+3x-2}{x-1}$ $\quad f^{-1}(0) = 2$

14. $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$ এবং $x \neq -\dfrac{1}{2}$ হলে $f^{-1}(-2)$ এর মান– **[DU,RU 08-09]**

$Sol^n.:$ $f^{-1}(x) = \dfrac{-x-3}{2x-1}$

$$f^{-1}(-2) = \frac{-(-2)-3}{2(-2)-1} = \frac{2-3}{-4-1} = \frac{1}{5}$$

15. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$ ফাংশনের ডোমেন , রেঞ্জ এবং বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর।**[IU, SU 07-08; CU 05-06, 08-09; JU 09-10]**

$Sol^n.:$ ডোমেন $= \mathbb{R} - \{2$, রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{\dfrac{2}{1}\} = \mathbb{R} - \{2\}$

এবং $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{x-(-2)} = \dfrac{-2x-1}{x+2}$

16. $\log(5x^2 - 7)$ **ফাংশনের ডোমেন হবে–** **[CU 07-08]**

$Sol^n.:$ $5x^2 - 7 > 0 \Rightarrow x^2 - \dfrac{7}{5} > 0$

$\Rightarrow (x - \sqrt{7/5})(x + \sqrt{7/5}) > 0$

ডোমেন$=\{x \in \mathbb{R}: x > \sqrt{7/5}$ অথবা $x < -\sqrt{7/5}\}$

17. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ ফাংশনের ডোমেন ও বিস্তার হবে– **[CU 04-05, 06,07]**

$Sol^n.:$ ডোমেন $f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, \infty) - \{0\}$

বিস্তার $f = \{-1, 1\}$

18. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ ফাংশনটির ডোমেন কত? **[SU 05-06]**

A. (0,1) **B.** [0,1) **C.** (0,1] **D.** [0,1]

$Sol^n.:$ $f(x) \in \mathbb{R}$ iff $(1-x)x \geq 0$ but $x \neq 0$

$\Rightarrow (x-0)(x-1) \leq 0$ but $x \neq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 1$

19. $f(x) = x^2 - 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশন f এর ডোমেন $[-1,1]$ হলে রেঞ্জ কত ? **[IU 04-05]**

$Sol^n.:$ $f(0) = 0^2 - 1 = -1$; যা $x \in [-1,1]$ এর জন্য $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$f(\pm 1) = (\pm 1)^2 - 1 = 0$; যা $x \in [-1,1]$ এর জন্য $f(x)$ এর বৃহত্তম মান । $\therefore$ f এর রেঞ্জ $= [-1,0]$

20. $f(x) = \sqrt{x} + 1$ **হলে এর ডোমেন এবং রেঞ্জ কত?** **[CU '03-04]**

$Sol^n.:$ এখানে ডোমেন হল সকল অঋণাত্মক সংখ্যার সেট অর্থাৎ $[0,\infty)$ । $f(0) = \sqrt{0}+1 = 1$; য $x \in [0,\infty)$ এর জন্য $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

রেঞ্জ $f = [1, \infty)$

21. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ **ফাংশনের ডোমেন কত?** **[CU 03-04, 08-09]**

$Sol^n.:$ $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$

22. $f(x) = \sqrt{x-2}$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ হয় ...og এর ডোমেন হবে– **[BUET 10 -11]**

$Sol^n.:$ $fog = f(g(x)) = f(x^2+1)$

$= \sqrt{x^2+1-2} = \sqrt{x^2-1} = \sqrt{(x-1)(x+1)}$

For Dom, $(x-1)(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \leq -1$ or, $x \geq 1$

Dom (fog) $= (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

ফাংশনে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার ঃ

$f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ হলে **f(2/5) ÷ f(5/2) সমান–**

ALPHA X) ÷ (1 + ALPHA X))

SOLVE=

CALC Screen এ দেখাবে x?

Press 2 ab/c 5 = মান আসে 2 / 7

Again, press = Screen এ দেখাবে x?

Press 5 ab/c 2 = মান আসে 5 / 7

Press 2 / 7 ÷ 5 /7 = Screen এ আসে 2/5. Ans. 2/5.

নিম্নের সীমাগুলির মান নির্ণয় কর ঃ

১। $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

সমাধান ঃ ধরি $x = 2 + h$. $\therefore$ $h \to 0$, যখন $x \to 2$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2-4}{(2+h)^2-5(2+h)+6}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{4+4h+h^2-10-5h+6}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+4)}{h(h-1)} = \lim_{h \to 0} \frac{h+4}{h-1}$

$= \frac{0+4}{0-1} = -4$ (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-3}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{2+2}{2-3} = -4$ (Ans.)

1(b) $\lim_{x \to 0} \frac{(x+4)^3-(x-8)^2}{x(x-3)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3+12x^2+48x+64-x^2+16x-64}{x(x-3)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3+12x^2+48x+64-x^2+16x-64}{x(x-3)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3+11x^2+64x}{x(x-3)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x(x^2+11x+64)}{x(x-3)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2+11x+64}{x-3} = \frac{0^2+11.0+64}{0-3}$

$= \frac{64}{-3} = -21\frac{1}{3}$ (Ans.)

2(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x}}{x}$ [সি.'০৩]

$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x})(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+3x})^2-(\sqrt{1-4x})^2}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1+3x-1+4x}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{7x}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{7}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x}}$

$= \frac{7}{\sqrt{1+3.0}+\sqrt{1-4.0}} = \frac{7}{1+1} = \frac{7}{2}$

2(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$ [ব. '০৯,'১৩]

$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x})(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+2x})^2-(\sqrt{1-3x})^2}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1+2x-1+3x}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{5x}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{5}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}}$

$= \frac{5}{\sqrt{1+2.0}+\sqrt{1-3.0}} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}$ (Ans.)

2(c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\{\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x}}\times\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}\times\frac{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x}}\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2-1-x)(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x})}{(1+x^3-1-x)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x})}{x(x^2-1)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x})}{(x^2-1)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}$$

$$=\frac{(0-1)(\sqrt{1+0^3}+\sqrt{1+0})}{(0^2-1)(\sqrt{1+0^2}+\sqrt{1+0})}=\frac{2}{2}=1$$

3(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^2+1}{6x^4+x^3-3x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4})}{x^4(6+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{6+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{2-0+0}{6+0-0}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

3(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ [চ.'০০]

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3^x(1-\frac{1}{3^{2x}})}{3^x(1+\frac{1}{3^{2x}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3^{2x}}}{1+\frac{1}{3^{2x}}}$$

$$=\frac{1-0}{1+0}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

3(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\ln(2x-1)-\ln(x+5)\}$ [প্র.ভ.প.'০৪]

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{2x-1}{x+5}=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x(2-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{5}{x})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}}=\ln\frac{2-0}{1+0}$$

$= \ln 2$ (Ans.)

3.(d) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x\sin\dfrac{b}{2^x}$ [সি.'০৫]

ধরি, $\dfrac{b}{2^x}=\theta$. এখানে $x\to\infty$ বলে $2^x\to\infty$

$$\theta=\frac{b}{2^x}\to 0$$

$$\lim_{x\to\infty}2^x\sin\frac{b}{2^x}=\lim_{\theta\to 0}\frac{b}{\theta}\sin\theta$$

$$=b\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\text{b . 1}=\text{b}$$

4.(a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{7/2}-a^{7/2}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ [ঢা.'০৩]

$$=\frac{\lim\limits_{x\to a}(x^{7/2}-a^{7/2})}{\lim\limits_{x\to a}(x^{1/2}-a^{1/2})}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{7/2}-a^{7/2}}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{1/2}-a^{1/2}}{x-a}}$$

$$=\frac{\frac{7}{2}a^{\frac{7}{2}-1}}{\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}-1}}\quad[\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}]$$

$$=(\frac{7}{2}\times\frac{2}{1})a^{\frac{7}{2}-1-\frac{1}{2}+1}=7a^{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}=7a^3\text{ (Ans.)}$$

4(b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{5/2}-a^{5/2}}{x^{3/5}-a^{3/5}}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to a}(x^{5/2}-a^{5/2})}{\lim\limits_{x\to a}(x^{3/5}-a^{3/5})}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{5/2}-a^{5/2}}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{3/5}-a^{3/5}}{x-a}}$$

$$= \frac{\frac{5}{2}a^{\frac{5}{2}-1}}{\frac{3}{5}a^{\frac{3}{5}-1}} \qquad [\because \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}]$$

$$= (\frac{5}{2}\times\frac{5}{3})\, a^{\frac{5}{2}-1-\frac{3}{5}+1} = \frac{25}{6}\, a^{\frac{5}{2}-\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{25}{6}\, a^{\frac{25-6}{10}} = \frac{25}{6}\, a^{\frac{19}{10}} \text{ (Ans.)}$$

5(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{3x^2}$ [প্র.ভ.প.'৮৫]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{\frac{9x^2}{4}.\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{2.3}{4}\lim_{x\to 0} \left\{\frac{\sin(3x/2)}{3x/2}\right\}^2 = \frac{3}{2}.1 = \frac{3}{2}$$

5.(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 7x}{3x^2}$ [সি.'০৮,'১২;কু.'১১; রা.'০৭,'১০; চ.'০৬; য.'০৮,'১২; ব.'০৮; ঢা.'১০; দি.'১১]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{7x}{2}}{3.\frac{49x^2}{4}.\frac{4}{49}}$$

$$= (\frac{2}{3}\times\frac{49}{4})\lim_{x\to 0} \left\{\frac{\sin(7x/2)}{7x/2}\right\}^2$$

$$= \frac{49}{6}.1 = \frac{49}{6} \text{ (Ans.)}$$

6. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$

[ব.'০১; মা.'০৫ সি.'০৪]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{1}{2}(2x+3x)\sin\frac{1}{2}(3x-2x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$= 2\times 1\times\frac{5}{4} = \frac{5}{2} \text{(Ans.)}$$

6(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$ [কু.'০৩]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{1}{2}(2x+4x)\sin\frac{1}{2}(4x-2x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 3x\sin x}{x^2}$$

$$= 2.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times 3$$

$$= 2\times 1\times 1\times 3 = 6 \text{ (Ans.)}$$

6. (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$ [ব'১২; য.'১৩]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{1}{2}(ax+bx)\sin\frac{1}{2}(bx-ax)}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}}\times\frac{a+b}{2}\times$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{(b-a)x}{2}}{\frac{(b-a)x}{2}}\times\frac{b-a}{2}$$

$$= 2\times 1\times\frac{a+b}{2}\times 1\times\frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

6(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}$

[য.'০৫; কু.'১৪]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-2\cos x+2\cos^2 x-1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x(\cos x-1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x(-2\sin^2 \frac{x}{2})}{x^2}$$

$$= -4\lim_{x\to 0} \left\{\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right\}\times\frac{1}{4}\times\lim_{x\to 0} \cos x$$

$$= -4\times1\times\frac{1}{4}\times\cos 0 = -1\times1 = -1$$

6(e) $\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$ [য.'০৯; রা.'১১; চ,'১৩]

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\times\lim_{x\to 0}(\cos x+\cos 2x)$$

$$= 1\times(\cos 0+\cos 0)$$

$$= 1+1 = 1 \text{ (Ans.)}$$

7.(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ **[রা.'০৯; ব.'১১, '১৪; কু.'১০; সি.'০৯; মা.'১৩]**

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x.2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\times\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right\}^2\times\frac{1}{4}$$

$$= 2\times1\times1\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

7(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x-\sin 2x}{x^3}$ **[মা.'০৪,'০৭]**

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x(1-\cos 2x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x.2\sin^2 x}{x^3}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}\times2\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$= 2\times1\times2\times1 = 4 \text{ (Ans.)}$$

7(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cosec}x-\cot x}{x}$ **[ঢা.'০৯]**

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x.2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$= 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

7(d) $\lim_{x\to y}\frac{\sin x-\sin y}{x-y}$ **[কু.'০৫]**

$$= \lim_{x\to y}\frac{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{x-y}$$

$$= 2.\lim_{x\to y}\frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}}\times\frac{1}{2}\times\lim_{x\to y}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$= 2\times1\times\frac{1}{2}\cos\frac{y+y}{2} = \cos y \text{ (Ans.)}$$

7(e) $\lim_{x\to\alpha}\frac{\tan x-\tan\alpha}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{x-\alpha}$

$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{\sin x\cos\alpha-\cos x\sin\alpha}{(x-\alpha)\cos x\cos\alpha}$$

$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{\sin(x-\alpha)}{(x-\alpha)\cos x\cos\alpha}$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\lim_{(x-\alpha)\to 0}\frac{\sin(x-\alpha)}{x-\alpha}\times\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\times1\times\frac{1}{\cos\alpha} = \sec^2\alpha \text{ (Ans.)}$$

8.(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx}$ **[ঢা.'০৬]**

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{\lim_{ax\to 0}\frac{\tan ax}{ax}\times a}{\lim_{bx\to 0}\frac{\sin bx}{bx}\times b}$$

$$= \frac{1\times a}{1\times b} = \frac{a}{b} \text{ (Ans.)}$$

8(b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$ [চ.'০১]

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{ax}{2}}{2\sin^2 \frac{bx}{2}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(ax/2)}{ax/2}\right\}^2 \times \frac{a^2}{4}}{\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(bx/2)}{bx/2}\right\}^2 \times \frac{b^2}{4}} = \frac{1\times\frac{a^2}{4}}{1\times\frac{b^2}{4}} = \frac{a^2}{b^2}$$

8(c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos 7x - \cos 9x}{\cos 3x - \cos 5x}$ [ঢা.'০৫; কু.'০৭]

$$= \lim_{x\to0} \frac{2\sin\frac{1}{2}(7x+9x)\sin\frac{1}{2}(9x-7x)}{2\sin\frac{1}{2}(3x+5x)\sin\frac{1}{2}(5x-3x)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin 8x \sin x}{\sin 4x \sin x} = \lim_{x\to0}\frac{2\sin 4x\cos 4x}{\sin 4x}$$

$$= 2\lim_{x\to0}\cos 4x = 2\cos 0 = 2 \,.\, 1 = 2$$

8(d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x}$ [চ.,মা.'০৩; দি.'১২]

$$= \lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{1}{2}(7x-x)\cos\frac{1}{2}(7x+x)}{\sin 6x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{2\sin 3x\cos 4x}{2\sin 3x\cos 3x} = \lim_{x\to0}\frac{\cos 4x}{\cos 3x}$$

$$= \frac{\cos 0}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1 \text{ (Ans.)}$$

8(e) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \{\sec x(\sec x - \tan x)\}$ [ঢা.'০৭]

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

8. (f) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$

[চ.'০৯; ব.'১০; সি.'১৪; প্র.ভ.প.'০৪]

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to0}\tan\frac{x}{2}$$

$$= \tan\frac{0}{2} = \tan 0 = 0 \text{ (Ans.)}$$

8(g) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{1}{\theta}\left(\dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\tan\theta}\right)$ [ঢা.'০১; রা.'১৩]

$$= \lim_{\theta\to0}\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta\sin\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to0}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta . 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \lim_{x\to0}\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to0}\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

8(h) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ [রা.'০৪]

$$= \frac{1+\sin 0}{\cos 0} = \frac{1+0}{1} = 1 \text{ (Ans.)}$$

9(a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x^2 + x}$ [চ.'০২]

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x(2x+1)} = \frac{\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times 2}{\lim_{x\to0}(2x+1)}$$

$= \dfrac{1\times 2}{2\times 0+1} = 2$ (Ans.)

9(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x} = \lim\limits_{x^2\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^2} \times \lim\limits_{x\to 0} x$

$= 1\times 0 = 0$ (Ans.)

10.(a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

[য. '০৪; ব. '০৬; ঢা.'১৩ রা.'১৪]

ধরি, $x = \dfrac{\pi}{2} + h$. $\quad x \to \dfrac{\pi}{2} \quad h \to 0$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\sin(\frac{\pi}{2}+h)}{\cos(\frac{\pi}{2}+h)}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\cos h}{-\sin h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{-2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}}$

$= -\lim\limits_{h\to 0} \tan\dfrac{h}{2} = -\tan\dfrac{0}{2} = -\tan 0 = 0$

10(b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\dfrac{\pi}{2} - x)\tan x$ [চ.'১০]

ধরি, $\dfrac{\pi}{2} - x = h$. $\quad x \to \dfrac{\pi}{2} \quad h \to 0$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\dfrac{\pi}{2} - x)\tan x$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} h\tan(\dfrac{\pi}{2} - h) = \lim\limits_{h\to 0} h\cot h$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{\tan h} = 1$

10(c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sec x - \tan x}{\frac{\pi}{2} - x}$ [ব.'০২]

ধরি, $\dfrac{\pi}{2} - x = h$. $\quad x \to \dfrac{\pi}{2} \quad h \to 0$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sec x - \tan x}{\frac{\pi}{2} - x}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sec(\frac{\pi}{2} - h) - \tan(\frac{\pi}{2} - h)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{cosec} h - \cot h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{\sin h} - \frac{\cos h}{\sin h}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\cos h}{h\sin h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h.2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\tan\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \dfrac{1}{2} = 1\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ (Ans.)

10(d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$ [য.'০৬,'১০; কু.'০৮]

ধরি, $\dfrac{\pi}{2} - x = h$. $\quad x \to \dfrac{\pi}{2} \quad h \to 0$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\sin(\frac{\pi}{2} - h)}{h^2}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\cos h}{h^2} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2\sin^2 (h/2)}{(h/2)^2\times 4}$

$= \dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0} \left\{\dfrac{\sin(h/2)}{h/2}\right\}^2 = \dfrac{1}{2}\times 1 = \dfrac{1}{2}$ (Ans.)

11.(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^{-1} x}{x}$

ধরি, $\sin^{-1} x = \theta \Rightarrow \sin\theta = x$

$x\to 0 \quad \theta\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^{-1} x}{x} = \lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\theta}{\sin\theta} = 1$

11(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^{-1}(3x)}{4x}$

ধরি, $\sin^{-1}(3x) = \Theta \Rightarrow \sin\Theta = 3x$

$x \to 0 \quad \theta \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}(3x)}{4x} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\frac{4}{3}\sin\theta}$$

$$= \frac{3}{4}\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta} = \frac{3}{4}\times 1 = \frac{3}{4} \text{ (Ans.)}$$

12. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-(1+x)^7}{\ln(1+x)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\{1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}\cdots\}-(1+7x+21x^2+\cdots)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(2-7)x+(2-21)x^2+\cdots}{x(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-5-19x+\cdots}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots}$$

$$= \frac{-5-19\times 0+0+\cdots}{1-\frac{0}{2}+\frac{0^2}{3}-0+\cdots}$$

$$= \frac{-5}{1} = -5 \text{ (Ans.)}$$

12(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\{1+x\ln a+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+\cdots\}-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\{\ln a+\frac{x(\ln a)^2}{2!}+\frac{x^2(\ln a)^3}{3!}+\cdots\}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\{\ln a+\frac{x(\ln a)^2}{2!}+\frac{x^2(\ln a)^3}{3!}+\cdots\}$$

$$= \ln a+\frac{0\times(\ln a)^2}{2!}+\frac{0^2(\ln a)^3}{3!}+\cdots\cdots\}$$

$$= \ln a$$

12(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$ [কু.'০১; মা.বো.'০৯; রা.'১২]

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\{1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^3 x}{3!}+\cdots)-1}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^3 x}{3!}+\cdots}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+\frac{\sin x}{2!}+\frac{\sin^2 x}{3!}+\cdots)$$

$$= 1+\frac{\sin 0}{2!}+\frac{\sin^2 0}{2!}+\cdots = 1+0+0\cdots$$

$$= 1$$

12(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{-x}}{x}$ [প্র.ভ.প.'০৬]

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}[\{1+x\ln a+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+\frac{(x\ln a)^3}{3!}+\cdots\}$$
$$-\{1-x\ln a+\frac{(x\ln a)^2}{2!}-\frac{(x\ln a)^3}{3!}+\cdots\}]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\{2x\ln a+2\frac{(x\ln a)^3}{3!}+\cdots\cdots\}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\{\ln a+\frac{x^2(\ln a)^3}{3!}+\frac{x^4(\ln a)^5}{5!}+\cdots\}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\{\ln a+\frac{0^2(\ln a)^3}{3!}+\frac{0^4(\ln a)^5}{5!}+\cdots\}$$

$$= 2\ln a \text{ (Ans.)}$$

12(e) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{b}{x})^{\frac{x}{a}}, a>0, b>0$

$$= \lim_{x\to\infty}(1+\frac{b}{x})^{\frac{x}{a}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\{1+\frac{\frac{x}{a}}{1!}.\frac{b}{x}+\frac{\frac{x}{a}(\frac{x}{a}-1)}{2!}(\frac{b}{x})^2+$$

$$+\frac{\frac{x}{a}(\frac{x}{a}-1)(\frac{x}{a}-2)}{3!}(\frac{x}{a})^3+\cdots\cdots\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\{1+\frac{b}{a}+\frac{\frac{x^2}{a^2}(1-\frac{a}{x})}{2!}\frac{b^2}{x^2}+\frac{\frac{x^3}{a^3}(1-\frac{a}{x})(1-\frac{2a}{x})}{3!}\frac{b^3}{x^3}+\cdots\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\{1+\frac{b}{a}+\frac{1-\frac{a}{x}}{2!}\frac{b^2}{a^2}+\frac{(1-\frac{a}{x})(1-\frac{2a}{x})}{3!}\frac{b^3}{a^3}+\cdots\}$$

$$=1+\frac{b}{a}+\frac{1-0}{2!}\frac{b^2}{a^2}+\frac{(1-0)(1-0)}{3!}\frac{b^3}{a^3}+\cdots$$

$$=1+\frac{b}{a}+\frac{1}{2!}(\frac{b}{a})^2+\frac{1}{3!}(\frac{b}{a})^3+\cdots\cdots=e^{\frac{b}{a}}$$

12(i) $f(x) = \sin x$ হলে, $\lim_{h\to0}\frac{f(x+nh)-f(x)}{h}$ এর মান নির্ণয় কর। **[প্র.ভ.প.'০০]**

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+nh)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+nh)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2\sin\frac{nh}{2}\cos\frac{1}{2}(2x+nh)}{h}$$

$$=2\lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}}\times\frac{n}{2}\lim_{h\to0}\cos\frac{1}{2}(2x+nh)$$

$$=2\times1\times\frac{n}{2}\times\cos\frac{1}{2}(2x+n\times0)$$

$$=n\cos x \text{ (Ans.)}$$

13. (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}=\frac{(1+0)(2+0)}{6}$$

$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\text{ (Ans.)}$$

13(b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{r=1}^{n}r^3$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4(1+\frac{1}{n})^2}{4n^4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^2}{4}=\frac{(1+0)^2}{4}=\frac{1}{4}\text{(Ans.)}$$

13(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1.3+2.4+\cdots\cdots+n(n+2)}{n^3}$

সমাধান : মনে করি, $1.3+2.4+\cdots+n(n+2)$ ধারার nতম পদ u_n.

$$u_n=n(n+2)=n^2+2n$$

$$1.3+2.4+\cdots+n(n+2)=\sum_{n=1}^{n}n^2+2\sum_{n=1}^{n}n$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=n(n+1)(\frac{2n+1}{6}+1)$$

$$=n(n+1)\frac{2n+1+6}{6}=\frac{n(n+1)(n+7)}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1.3+2.4+\cdots\cdots+n(n+2)}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+7)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(1+\frac{1}{n})(1+\frac{6}{n})}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}{6} = \frac{(1+0)(1+0)}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \text{ (Ans.)}$$

14. যদি $f(x) = \dfrac{2x}{1-x}$ হয়, তবে (i) $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $x = 1 + h$

$$\therefore \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{2(1+h)}{1-(1+h)} = \lim_{h\to 0+} \frac{2+2h}{1-1-h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{2+2h}{-h} = \lim_{h\to 0+} (-\frac{2}{h} - 2)$$

$$= -\infty - 2 = -\infty \text{ (Ans.)}$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{h\to 0-} \frac{2(1+h)}{1-(1+h)} = \lim_{h\to 0-} \frac{2+2h}{1-1-h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{2+2h}{-h} = \lim_{h\to 0-} (-\frac{2}{h} - 2)$$

$$= +\infty - 2 = +\infty \text{ (Ans.)}$$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{1-x}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x(\frac{1}{x}-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\frac{1}{x}-1}$$

$$= \frac{2}{0-1} = -2 \text{ (Ans.)}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{x(\frac{1}{x}-1)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{\frac{1}{x}-1}$$

$$= \frac{2}{-0-1} = -2 \text{ (Ans.)}$$

15. স্যান্ডউইচ উপপাদ্যের সাহায্যে মান নির্ণয় কর:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x})$

সমাধান: আমরা পাই, $-1 \le \sin(\frac{1}{x}) \le 1, x \ne 0$

এবং $x^2 \ge 0$

$$-x^2 \le x^2 \sin(\frac{1}{x}) \le x^2$$

এখন, $\lim\limits_{x\to 0} (-x^2) = -0^2 = 0$ অদ্রূপ, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

স্যান্ডউইচ এর উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin(\frac{1}{x})$

$x \ne 0$ এর জন্য আমরা পাই, $-1 \le \sin(\frac{1}{x}) \le 1$

$x>0$ এর জন্য, $-x \le x \sin(\frac{1}{x}) \le x$ এবং

$x < 0$ এর জন্য, $-x \ge x \sin(\frac{1}{x}) \ge x$

$$\Rightarrow x \le x \sin(\frac{1}{x}) \le -x$$

যেহেতু, $\lim\limits_{x\to 0} (-x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} x$, সুতরাং স্যান্ডউইচ এর উপপাদ্য অনুসারে পাই, $\lim\limits_{x\to 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

সমাধান ঃ আমরা পাই, $-1 \le \sin x \le 1$

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}, [\because x \to \infty, \therefore x>0]$$

এখন, $\lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{x})=0$ এবং $\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x})=0$

স্যান্ডউইচ এর উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

15. (d) $\lim_{x\to\infty}\frac{2-\cos x}{x+3}$

সমাধান : আমরা পাই, $-1\le\cos x\le+1$

$\Rightarrow +1\ge-\cos x\ge-1$, [উভয় পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে।]

$\Rightarrow -1\le-\cos x\le+1$

$\Rightarrow 2-1\le 2-\cos x\le 2+1$

$\Rightarrow \frac{1}{x+3}\le\frac{2-\cos x}{x+3}\le\frac{3}{x+3}$

[$\because x\to\infty, \therefore x+3>0$]

যেহেতু $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+3}=0=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x+3}$, স্যান্ডউইচ এর উপপাদ্য অনুসারে পাই, $\lim_{x\to\infty}\frac{2-\cos x}{x+3}=0$

15. (e) $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos^2(2x)}{3-2x}$

সমাধান : আমরা পাই, $-1\le\cos(2x)\le+1$

$\Rightarrow 0\le\cos^2(2x)\le1$

$\Rightarrow \frac{0}{3-2x}\ge\frac{\cos^2(2x)}{3-2x}\ge\frac{1}{3-2x}$

[$\because x\to\infty, \therefore 3-2x>0$]

$\Rightarrow \frac{1}{3-2x}\le\frac{\cos^2(2x)}{3-2x}\le\frac{0}{3-2x}$

যেহেতু $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3-2x}=0=\lim_{x\to\infty}0$, স্যান্ডউইচ এর উপপাদ্য অনুসারে পাই, $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos^2(2x)}{3-2x}=0$

15. (f) $\lim_{x\to0^-}x^3\cos(\frac{2}{x})$

সমাধান : আমরা পাই, $-1\le\cos(\frac{2}{x})\le+1$

$\Rightarrow -x^3\ge x^3\cos(\frac{2}{x})\ge+x^3$

[$\because x\to0^-, \therefore x^3<0$]

$\Rightarrow x^3\le x^3\cos(\frac{2}{x})\le-x^3$

যেহেতু $\lim_{x\to0^-}x^3=0=\lim_{x\to0^-}(-x^3)$, স্যান্ডউইচ এর উপপাদ্য অনুসারে পাই, $\lim_{x\to0^-}x^3\cos(\frac{2}{x})=0$

15. (g) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2+\sin^2x)}{x+100}$

সমাধান : আমরা পাই, $-1\le\sin x\le+1$

$\Rightarrow 0\le\sin^2x\le1 \Rightarrow 2\le2+\sin^2x\le3$

$\Rightarrow 2x^2\le x^2(2+\sin^2x)\le3x^2$

$\Rightarrow \frac{2x^2}{x+100}\le\frac{x^2(2+\sin^2x)}{x+100}\le\frac{3x^2}{x+100}$

[$\because x\to\infty, \therefore x+100>0$]

এখন, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x+100}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x(1+\frac{100}{x})}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+\frac{100}{x}}=\frac{2\times\infty}{1+0}=\infty$

তদ্রূপ, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x+100}=\infty$

স্যান্ডউইচ এর উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2+\sin^2x)}{x+100}=\infty$ (বিদ্যমান নাই)

15. (h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2-\sin(3x)}{x^2+10}$

সমাধান ঃ আমরা পাই, $-1\le\sin(3x)\le+1$

$\Rightarrow +1\ge-\sin(3x)\ge-1$

$\Rightarrow -1\le-\sin(3x)\le+1$

$\Rightarrow 5x^2-1\le5x^2-\sin(3x)\le5x^2+1$

$\Rightarrow \dfrac{5x^2-1}{x^2+10}\ge\dfrac{5x^2-\sin(3x)}{x^2+10}\ge\dfrac{5x^2+1}{x^2+10}$

$[\because x\to-\infty, x^2+10<0]$

$\Rightarrow \dfrac{5x^2+1}{x^2+10}\le\dfrac{5x^2-\sin(3x)}{x^2+10}\le\dfrac{5x^2-1}{x^2+10}$.

এখন, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+1}{x^2+100}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(5+1/x^2)}{x^2(1+100/x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+1/x^2}{1+100/x^2}=\dfrac{5+0}{1+0}=5$

তদ্রূপ, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-1}{x^2+100}=5$

স্যান্ডউইচ এর উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-\sin(3x)}{x^2+10}=5$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{3x+5}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x+5-2x-6}{(x-1)(x+3)(3x+5)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+3)(3x+5)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x+3)(3x+5)}=\dfrac{1}{(1+3)(3.1+5)}$

$=\dfrac{1}{4.8}=\dfrac{1}{32}$ (Ans.)

2.(a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{3^2-(x^2+5)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$

$=\lim\limits_{x\to2}(3+\sqrt{x^2+5})=3+\sqrt{2^2+5}$

$=3+3=6$ (Ans.)

2(b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}$ [প্র.ভ.প.'৮৩]

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1})}{(x^2-1)-(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1})}{x^2-1-x+1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1})}{x(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}}{x}$

$=\dfrac{\sqrt{1^2-1}-\sqrt{1-1}}{1}=\dfrac{0}{1}=0$ (Ans.)

2(c) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^{1/2}-x^{1/2}}{h}$ [সি.'০১]

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{(x+h)^{1/2}-x^{1/2}\}\{(x+h)^{1/2}+x^{1/2}\}}{h\{(x+h)^{1/2}+x^{1/2}\}}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{(x+h)^{1/2}\}^2-\{x^{1/2}\}^2}{h\{(x+h)^{1/2}+x^{1/2}\}}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\{(x+h)^{1/2}+x^{1/2}\}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\{(x+h)^{1/2}+x^{1/2}\}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^{1/2}+x^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{(x+0)^{1/2}+x^{1/2}} = \frac{1}{x^{1/2}+x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2.(d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(a-\sqrt{a^2-x^2})(a+\sqrt{a^2+x^2})}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a^2-(\sqrt{a^2-x^2})^2}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a^2-a^2+x^2}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{a+\sqrt{a^2-0^2}} = \frac{1}{a+a} = \frac{1}{2a}$$

3. $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{6+x-3x^2}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2+\frac{1}{x^2})}{x^2(\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x}-3)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}}{\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x}-3} = \frac{2+0}{0+0-3} = -\frac{2}{3}$$

4.(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2.\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

4(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \lim_{x\to 0} \sin\frac{x}{2} = 1.\ \sin\frac{0}{2}$$

$$= \quad 1.\ 0 = 0 \text{ (Ans.)}$$

5. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{3\sin\pi x-\sin 3\pi x}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin^3\pi x}{x^3} = 4\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^3.\pi^3$$

$$= 4\times 1\times\pi^3 = 4\pi^3$$

6.(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\times 5}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times 3}$

$$= \frac{1\times 5}{1\times 3} = \frac{5}{3} \text{ (Ans.)}$$

6(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{6x-\sin 2x}{2x+3\sin 4x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(6-\frac{\sin 2x}{x})}{x(2+3\frac{\sin 4x}{x})} = \frac{6-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\times 2}{2+3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\times 4}$$

$$= \frac{6-1\times 2}{2+3\times 1\times 4} = \frac{6-2}{2+12} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \text{ (Ans.)}$$

7(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sin 2x}{\cos 2x}$ [প্র.ভ.প. ৮৬]

ধরি, $x = \frac{\pi}{4} + h$. $x \to \frac{\pi}{4}$ $h \to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{\cos 2x} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\sin 2(\frac{\pi}{4}+h)}{\cos 2(\frac{\pi}{4}+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}+2h)}{\cos(\frac{\pi}{2}+2h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos 2h}{-\sin 2h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin^2 h}{-2\sin h\cos h} = -\lim_{h\to 0} \tan h$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{\tan h}{h} \times h = -1\times 0 = 0 \quad \text{(Ans.)}$$

7(b) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x}$

ধরি, $\pi - x = h$. $x \to \pi$ $h \to 0$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\pi - h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \text{ (Ans.)}$$

8(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{1+x-e^x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots)}{1+x-(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \cdots}{1+x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\cdots}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \cdots\cdots)}{x^2(-\frac{1}{2!} - \frac{x}{3!} - \cdots\cdots)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \cdots\cdots}{-\frac{1}{2!} - \frac{x}{3!} - \cdots\cdots}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{0}{3} + \frac{0^2}{4} - \cdots}{-\frac{1}{2!} - \frac{0}{3!} - \cdots} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$$

8(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+5x)}{\ln(1-5x)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5x - \frac{(5x)^2}{2} + \frac{(5x)^3}{3} - \frac{(5x)^4}{4} + \cdots}{-5x - \frac{(5x)^2}{2} - \frac{(5x)^3}{3} - \frac{(5x)^4}{4} - \cdots}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5 - \frac{5^2 x}{2} + \frac{5^3 x^2}{3} - \frac{5^4 x^3}{4} + \cdots}{-5 - \frac{5^2 x}{2} - \frac{5^3 x^2}{3} - \frac{5^4 x^3}{4} - \cdots}$$

$$= \frac{5 - \frac{5^2.0}{2} + \frac{5^3 0^2}{3} - \frac{5^4 0^3}{4} + \cdots}{-5 - \frac{5^2.0}{2} - \frac{5^3 0^2}{3} - \frac{5^4 0^3}{4} - \cdots}$$

$$= \frac{5}{-5} = -1 \text{ (Ans.)}$$

8(c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{(2x+5)/x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{2+5/x}$

$$= \lim_{x\to 0}(1+2x)^2 \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}$$

$$= (1+2.0)^2 \times \{\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^{10}$$

$$= e^{10} \quad \text{(Ans.)}$$

9. (a) $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|/2}, & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2, & \text{যখন } 0 < x < 2 \end{cases}$ হলে

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান আছে?

সমাধান : $x = 0$ বিন্দুতে

ডানদিকবর্তী লিমিট $= \lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} x^2 = 0^2 = 0$

বামদিকবর্তী লিমিট $= \lim_{x\to 0_-} f(x)$

$$= \lim_{x\to 0_-} e^{-|x|/2} = e^{-|0|/2} = e^0 = 1$$

বামদিকবর্তী লিমিট ও ডানদিকবর্তী লিমিট বিদ্যমান আছে কিন্তু সমান নয়।

$\lim_{x\to 0} f(x)$ বিদ্যমান নাই।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র :

L'Hospital's rule : কার্যপ্রণালী ঃ যদি x = a এর জন্য $\frac{f(x)}{g(x)}$ ভগ্নাংশটি অনির্ণেয় আকার যেমন $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ হয়, তবে অনির্ণেয় আকার শেষ না হওয়া পর্যন্ত ভগ্নাংশের লব এবং হরকে পৃথকভাবে অন্তরীকরণ (differentiation) করতে হবে। অতঃপর নতুন ভগ্নাংশে পদত্ত x = a স্থাপন করে ফাংশনের সীমায়িত মান নির্ণয় করতে হয়।

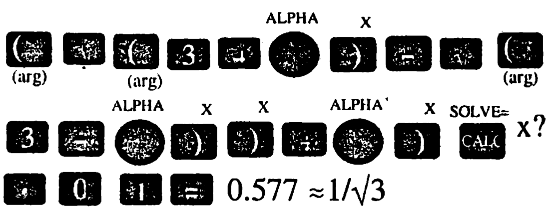
1. যখন $x \to 0$, লিমিট $\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{x}$ কত? **[DU 04-05, NU 08-09, 05-06]**

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{3+x}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}(-1)}{1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

By Calculator : (Mode Radian এ নিতে হবে)



x? 0.577 ≈ $1/\sqrt{3}$

2. যখন $x \to 0$, লিমিট $\frac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$ কত? **[DU 03-04, RU 06-07, 04-05; KU 03-04]**

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x+\cos 2x).1+x(-\sin x-2\sin x)}{\cos x}$$

$$=\frac{(\cos.0+\cos 2.0).1+0.(-\sin 0-2\sin 0)}{\cos 0}$$

$$=2$$

3. যখন $x \to 0$, লিমিট $\frac{\sin 3x}{x}$ কত?

[DU 99-00, RU 06-07]

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{1}$

$= 3\cos 0 = 3$

4. যখন $x \to 0$, লিমিট $\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ কত?

[KU 03-04]

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-\cos x}{3x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x+\sin x}{6x}$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\{2(\sec^2 x.\sec^2 x + \tan x.2\sec^2 x\tan x) + \cos x\}$$

$$= \frac{1}{6}\{2(1+0)+1\}=\frac{1}{2}$$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)^2}{x} = ?$ **[DU 08-09]**

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(4x^2).8x}{1}$

$= \cos(4.0).8.0 = 0$

6. যখন $x \to \frac{\pi}{2}$, লিমিট $\frac{1-\sin x}{\cos x}$ কত?

[DU 00-01 , RU 06-07]

Sol^n : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{0}{1}=0$

7. যখন $x \to 2$, লিমিট $\frac{\sin(x-2)}{x-2}$ কত?

[CU 07-08]

Sol^n : $\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cos(x-2)}{1}$

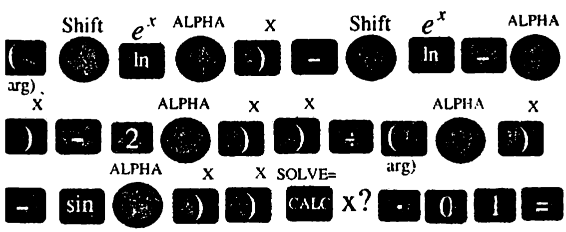
$=\cos(2-2)=\cos 0=1$

8. যখন $x \to 0$, লিমিট $\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ কত?

[SU 04-05]

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2$



$1.99 \approx 2$

9. যখন $x \to 0$, লিমিট $\frac{a^x-1}{x}$ কত? **[CU 08-09; RU 02-03]**

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a}{1}=a^0\log_e a$

$=\log_e a$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-2x}}{\ln(1+x)}$, $0<x<1$ এর মান কত?

[SU 04-05, KU 03-04]

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-2x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-2x}}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-2x}}{\frac{1}{1+x}}$

$=2$

11. যখন $x \to 0$, লিমিট $\frac{\sin^{-1}x}{x}$ কত? **[CU 08-09; RU 07-08; IU 04-05]**

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=1$

12. যখন $x \to 0$, লিমিট $\frac{\tan^{-1}x}{x}$ কত? **[DU 06-07]**

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=\frac{1}{1+0^2}=1$

13. যখন $x \to 0$, লিমিট $\frac{\tan^{-1}(2x)}{x}$ কত?

[DU 07-08; CU 07-08; NU 06-07]

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+4x^2}}{1}=\frac{2}{1+4.0^2}$

$=2$

14. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=?$ **[BUET 03-04]**

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^0+e^{-0}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2}=?$ **[BUET 07-08]**

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0+7\sin 7x}{6x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{0+49\cos 7x}{6}=\frac{49}{6}$

16. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=?$ **[KUET 05-06]**

Sol^n : $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2}{2x}=\lim_{x\to 3}\frac{3x}{2}$

$=\frac{3.3}{2}=\frac{9}{2}$

অন্তরীকরণ (প্রশ্নমালা IXB)

1. যদি $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{যখন } x \le 0 \\ x, & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 1-x, & \text{যখন } x \ge 1 \end{cases}$ **হয়, তবে দেখাও যে x = 0 বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন এবং x = 1 বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।**

সমাধানঃ x = 0 বিন্দুতে, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0,$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$ এবং f(0) =−0=0

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$ f(0) সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে f(x) অবিচ্ছিন্ন।

x =1 বিন্দুতে, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (1-x) = 1-1=0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, সুতরাং x = 1 বিন্দুতে f(x) বিচ্ছিন্ন।

2. যদি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2}, & \text{যখন } x \ne 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ **হয়, তবে প্রমাণ কর যে a = 1 না হলে x = 0 বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিচ্ছিন্ন হবে।**

প্রমাণঃ x = 0 বিন্দুতে,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 .a^2$$

$$= 1 \times a^2 = a^2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 .a^2$$

$= 1 \times a^2 = a^2$ এবং f(0) = 1

$a \ne 1$ হলে, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \ne f(0)$

এবং $a = 1$ হলে, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

কাজেই, a = 1 না হলে x = 0 বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিচ্ছিন্ন হবে।

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{যখন } x \ne 2 \\ 3 & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$ **দ্বারা প্রদত্ত একটি বাস্তব ফাংশন। দেখাও যে, f ফাংশনটি x = 2 বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। f ফাংশনটিকে এরূপে সংজ্ঞায়িত কর যেন তা x = 2 বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়।**

প্রমাণঃ x = 2 বিন্দুতে, f(2) = 3,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x+2)$$

$$= 2 + 2 = 4$$

এবং $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (x+2)$$

$$= 2 + 2 = 4$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \ne$ f(2) সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে f(x) বিচ্ছিন্ন।

(দ্বিতীয় অংশ): x = 2 বিন্দুতে f(x) ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার জন্য নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হলো-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{যখন } x \ne 2 \\ 4 & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$$

প্রশ্নমালা IX C

1. (a)]0, 4[ব্যবধিতে f(x) = (x − 1)(x − 2)(x− 3) ফাংশনের জন্য ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান: এখানে, f(x) = (x − 1)(x − 2) (x−3)

$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x^2-5x+6)$

$= x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6$

$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$$Rf'(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}[(x+h)^3 - 6(x+h)^2 + 11(x+h) - 6 - x^3 + 6x^2 - 11x + 6]$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}[x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 6x^2 - 12xh - 6h^2 + 11x + 11h - x^3 + 6x^2 - 11x]$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}[3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 12xh - 6h^2 + 11h]$$

$$= \lim_{h\to 0+}[3x^2 + 3xh + h^2 - 12x - 6h + 11]$$

$= 3x^2 - 12x + 11$

তদ্রূপ, $Lf'(x) = \lim_{h\to 0-} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0-}[3x^2 + 3xh + h^2 - 12x - 6h + 11]$$

$= 3x^2 - 12x + 11$

যেহেতু $Rf'(x) = Lf'(x)$, কাজেই x এর সকল মানের জন্য f(x) ফাংশন [0, 4] বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং] 0, 4[খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য।

f(x) ফাংশন ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের সকল শর্ত পালন করে। অতএব ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের শর্তানুসারে অন্তত:পক্ষে একটি বিন্দু $c \in]0, 4[$ এর জন্য $f(4) - f(0) = (4-0)f'(c) \cdots (1)$ হবে।

এখন, $f(4) = (4-1)(4-2)(4-3) = 6$

এবং $f(0) = (0-1)(0-2)(0-3) = -6$

প্রদত্ত সমীকরণকে অন্তরীকরণ করে পাই,

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$f'(c) = 3c^2 - 12c + 11$

(1) হতে পাই, $6 + 6 = 4(3c^2 - 12c + 11)$

$\Rightarrow 3 = 3c^2 - 12c + 11$

$\Rightarrow 3c^2 - 12c + 8 = 0$

$$c = \frac{12 \pm \sqrt{144-96}}{2\times 3} = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{2\times 3}$$

$$= \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{2\times 3} = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$c = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \in]0, 4[$$

$\therefore$]0, 4[ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশনে ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণিত হলো।

(b)]−1, 1[ব্যবধিতে $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ফাংশনের জন্য ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

সমাধান: প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(0) = \dfrac{1}{0}$, বিদ্যমান নয়।

অর্থাৎ $x = 0$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নয়।

]−1, 1[ব্যবধিতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন নয়।

সুতরাং প্রদত্ত ব্যবধিতে ফাংশনটির জন্য ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য নয়।

(c) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{যখন } -1 \le x < 0 \\ x, & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \end{cases}$ ফাংশনের জন্য [−1, 1] ব্যবধিতে ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

সমাধান: প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{যখন } -1 \le x < 0 \\ x, & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0+}(1) = 1$$

$$Lf'(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{-h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+}(-1) = -1$$

যেহেতু $Rf'(0) \neq Lf'(0)$, সেহেতু $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

∴ প্রদত্ত ব্যবধিতে ফাংশনটির জন্য ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য নয়।

2. x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

2(a) $(2x)^n - b^n$ [চ.'০২]

ধরি, $y = (2x)^n - b^n = 2^n x^n - b^n$

$$\frac{dy}{dx} = 2^n \frac{d}{dx}(x^n) - \frac{d}{dx}(b^n)$$
$$= 2^n(nx^{n-1}) - 0$$
$$\frac{d}{dx}\{(2x)^n - b^n\} = 2^n nx^{n-1} \text{ (Ans.)}$$

2(b) $\frac{d}{dx}(x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x} + \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})$

$$= \frac{d}{dx}(x^{1+\frac{1}{2}} + x^{2+\frac{1}{2}} + x^{2-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$$
$$= \frac{d}{dx}(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$$
$$= \frac{d}{dx}(2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$$
$$= 2.\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} + \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}$$
$$= 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \text{ (Ans.)}$$

2(c) $\frac{d}{dx}(a^x + x^n - e^x)$

$$= \frac{d}{dx}(a^x) + \frac{d}{dx}(x^a) - \frac{d}{dx}(e^x)$$
$$= a^x \ln a + \mathrm{a}\, x^{a-1} - e^x \text{ (Ans.)}$$

2(d) $\frac{d}{dx}(\log_a x + \log x^a + e^{\ln x} + \ln x + e^x)$

$$= \frac{d}{dx}(\log_a x + a\log x + x + \ln x + e^x)$$
$$= \frac{1}{x\ln a} + a\frac{1}{x\ln 10} + 1 + \frac{1}{x} + e^x$$

(e) $\frac{d}{dx}(3\sin x + 4\ln x - 2a^x + \ln x^a)$

$$= \frac{d}{dx}(3\sin x + 4\ln x - 2a^x + a\ln x)$$
$$= 3\cos x + 4.\frac{1}{x} - 2a^x \ln x + a\frac{1}{x}$$

3. মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

(a) $\sin 2x$ [ঢা.'০৫; ব.'১৩]

মনে করি, $f(x) = \sin 2x$

$f(x+h) = \sin 2(x+h) = \sin(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$\frac{d}{dx}(\sin 2x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(2x+2h)-\sin 2x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[2\cos\frac{2x+2h+2x}{2}\sin\frac{2x+2h-2x}{2}]$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos(2x+h)\sin h$$
$$= 2\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\cos(2x+h)$$
$$= 2.1.\cos(2x+0) = 2\cos 2x$$

3.(b) $\cos 3x$ [ঢা.'০২; রা.'১১]

মনে করি, $f(x) = \cos 3x$.

$f(x+h) = \cos 3(x+h) = \cos(3x+3h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$\frac{d}{dx}(\cos 3x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(3x+3h)-\cos 3x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[2\sin\frac{3x+3h+3x}{2}\sin\frac{3x-3h-3x}{2}]$$
$$= 2\lim_{h\to 0}\sin(3x+\frac{3h}{2}) \times -\lim_{\frac{3h}{2}\to 0}\frac{\sin(3h/2)}{3h/2}\times\frac{3}{2}$$
$$[\because h\to 0 \therefore \frac{3h}{2}\to 0]$$

$= 2\sin(3x+0).(-1.\frac{3}{2}) = -3\sin 3x$

3(c) cos ax [রা.'০১]

মনে করি, $f(x) = \cos ax$.

$f(x+h) = \cos a(x+h) = \cos(ax+ah)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos ax) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(ax+ah)-\cos ax}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[2\sin\frac{ax+ah+ax}{2}\sin\frac{ax-ah-ax}{2}]$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\sin(ax+\frac{ah}{2})\times -\lim_{h\to 0}\frac{\sin(ah/2)}{ah/2}\times\frac{a}{2}$$

$$= 2\sin(ax+0).(-1.\frac{a}{2}) = -a\sin ax$$

3(d) tan $2x$ [চ.'০১]

মনে করি, $f(x) = \tan 2x$.

$f(x+h) = \tan 2(x+h) = \tan(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan 2x) = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(2x+2h)-\tan 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{\sin(2x+2h)}{\cos(2x+2h)}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{\sin(2x+2h)\cos 2x-\sin 2x\cos(2x+2h)}{\cos(2x+2h)\cos 2x}]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{\sin(2x+2h-2x)}{\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}\times 2\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= 1\times 2\times\frac{1}{\cos(2x+0)\cos 2x} = \frac{2}{\cos^2 x}$$

$$= 2\sec^2 2x$$

3(e) sec $2x$ [য. '০২,'০৭; চ.'০৭,'১০]

মনে করি, $f(x) = \sec 2x$.

$f(x+h) = \sec 2(x+h) = \sec(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec 2x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sec(2x+2h)-\sec 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{1}{\cos(2x+2h)}-\frac{1}{\cos 2x}]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x-\cos(2x+2h)}{h\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2x+2x+2h}{2}\sin\frac{2x+2h-2x}{2}}{h\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2x+h)}{\cos(2x+2h)\cos 2x}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$= 2\frac{\sin(2x+0)}{\cos(2x+0)\cos 2x}\times 1$$

$$= \frac{2\sin 2x}{\cos 2x\cos 2x} = 2\tan 2x\ \sec 2x$$

3(f) e^{2x} [রা.'০৩]

মনে করি, $f(x) = e^{2x}$.

$f(x+h) = e^{2(x+h)} = e^{2x+2h}$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{2x+2h}-e^{2x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{2x}.e^{2h}-e^{2x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{2x}}{h}(e^{2h}-1)$$

$$= e^{2x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{2h}\times 2$$

$$= e^{2x}\times 1\times 2 = 2e^{2x},\ [\because \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1\ ]$$

3. (g) cosec ax

মনে করি, $f(x) = \text{cosec } ax$.

$f(x+h) = \text{cosec}(ax+ah)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{ f(x) \} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{cosec } ax) = \lim_{h\to 0}\frac{\text{cosec}(ax+ah)-\text{cosec}\,ax}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{\sin(ax+ah)}-\frac{1}{\sin ax}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin ax-\sin(ax+ah)}{h\sin(ax+ah)\sin ax}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{ax-ax-ah}{2}\cos\frac{ax+ax+ah}{2}}{h\sin(ax+ah)\sin ax}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin(-h)\cos(ax+h)}{h\sin(ax+ah)\sin ax}$$

$$= -2\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{\cos(ax+h)}{\sin(ax+ah)\sin ax}$$

$$= -2\times1\times\frac{\cos(ax+0)}{\sin(ax+0)\sin ax}$$

$$= -2\times\frac{\cos ax}{\sin ax\sin ax}$$

$$= -2\cot ax\ \text{cosec } ax$$

3(h) $\cos 2x$ [মা.বো.'০৪; ব.'১১]

মনে করি, $f(x) = \cos 2x$.

$f(x+h) = \cos2(x+h) = \cos(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{ f(x) \} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos2x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(2x+2h)-\cos 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[2\sin\frac{2x+2h+2x}{2}\sin\frac{2x-2h-2x}{2}\right]$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\sin(2x+h)\times-\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$= 2\sin(2x+0).(-1) = -2\sin 2x$$

3(i) e^{ax} [ব'০৫,'০৯; ঢা.'০৬; য., দি.'১১; কু.'১৩]

মনে করিে, $f(x) = e^{ax}$.

$f(x+h) = e^{a(x+h)} = e^{ax+ah}$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{ f(x) \} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{ax+ah}-e^{ax}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{ax}.e^{ah}-e^{ax}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{ax}}{h}(e^{ah}-1)$$

$$= e^{ax}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\left\{\left(1+ah+\frac{(ah)^2}{2!}+\frac{(ah)^3}{3!}+\cdots\right\}-1\right]\right. =$$

$$e^{ax}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(ah+\frac{a^2h^2}{2!}+\frac{a^3h^3}{3!}+\cdots\cdots\right)$$

$= e^{ax}\lim_{h\to 0}\left(a+\frac{a^2h}{2!}+\frac{a^3h^2}{3!}+\right.$ h- এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদসমূহ)

$$= e^{ax}(a+0+0+\cdots\cdots) = ae^{ax}$$

3(j) $\log_a x$ [চ.'০৮; ঢা.'১১; য.'১২,'১৪; দি.'১৪]

ধরি, $f(x) = \log_a x = \log_a e\times\log_e x$

$$= \frac{\ln x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$f(x+h) = \frac{\ln(x+h)}{\ln a}$$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\ln(x+h)}{\ln a}-\frac{\ln x}{\ln a}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h\ln a}\ln\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h\ln a}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln a}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3}-\cdots\cdots\right]$$

$= \frac{1}{\ln a}\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{h}{x^2}+\right.$ h-এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদসমূহ]

$$= \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}-0 = \frac{1}{x\ln a}$$

4.(a) মূল নিয়মে $x = 2$ -তে x^5 এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = x^5$. $f(2) = 2^5$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^5-2^5}{x-2}$$

$$= 5\times (2)^4 \quad [\because \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}]$$

$$= 5\times 16 = 80$$

4(b) মূল নিয়মে $x = a$ -তে e^{mx} এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = e^{mx}$ $\quad f(a) = e^{ma}$

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{e^{mx}-e^{ma}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{e^{ma}(e^{mx-ma}-1)}{x-a}$$

$$= e^{ma}\lim_{x-a\to 0}\frac{e^{m(x-a)}-1}{m(x-a)}\times m$$

$$= me^{ma}.1 \qquad [\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1]$$

$$= me^{ma}$$

4(c) মূল নিয়মে $x = \frac{\pi}{4}$-তে $\tan x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = \tan x.$ $\quad f(\frac{\pi}{4}) = \tan\frac{\pi}{4}$

$$f'(\frac{\pi}{4}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}}{(x-\frac{\pi}{4})\cos x\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{(x-\frac{\pi}{4})\cos x\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x-\frac{\pi}{4}\to 0}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= 1.\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{(1/\sqrt{2})^2} = 2$$

প্রশ্নমালা IX D

x এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

1(a) $\frac{d}{dx}\{x^2\ln(x)\}$

$$= x^2\frac{d}{dx}\{ln(x)\} + ln(x)\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2\frac{1}{x} + ln(x).(2x) = x + 2x\,ln(x)$$

1(b) $5e^x\log_a x$ [ব.'০৮;দি.'১৩]

মনে করি, $y = 5e^x\log_a x$

$$\frac{dy}{dx} = 5\{e^x\frac{d}{dx}(\log_a x) + \log_a x\frac{d}{dx}(e^x)\}$$

$$= 5\{e^x\frac{1}{x\ln a} + \log_a x.\,e^x\}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{5e^x\log_a x\} = 5e^x\{\frac{1}{x\ln a} + \log_a x\}$$

1(c) $\log_{10} x$ [দি.'১১,'১৩]

মনে করি, $y = \log_{10} x = \log_{10} e\times\log_e x$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\log_e 10}\times\ln x = \frac{1}{\ln 10}\times\ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{\ln 10}\times\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_{10} x) = \frac{1}{x\ln 10} \text{ (Ans.)}$$

1(d) $\log_a x$ [ঢা.'১৩]

মনে করি, $y = \log_a x = \log_a e\times\log_e x$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\log_e a}\times\ln x = \frac{1}{\ln a}\times\ln x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{\ln a}\times\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}\text{ (Ans.)}$$

2. (a) $a^x\ln(x)+be^x\sin x$

$$\frac{d}{dx}\{a^x\ln(x)+be^x\sin x\}=a^x\frac{d}{dx}\{\ln(x)\}+\ln(x)\frac{d}{dx}(a^x)+\text{b}\{e^x\frac{d}{dx}(\sin x)+\sin x\frac{d}{dx}(e^x)\}$$

$$=a^x\frac{1}{x}+\ln(x)(a^x lna)+\text{b}\{e^x(\cos x)+\sin x(e^x)\}$$

$$=a^x\{\frac{1}{x}+lna\ \ln(x)\}+\text{b}e^x(\cos x+\sin x)$$

2(b) $x^2\log_a x-x^3\ln a^x+6x\,e^x\ln x$

ধরি, $y=x^2\log_a x-x^3\ln a^x+6x\,e^x\ln x$

$$=x^2\log_a x-x^4\ln a+6x\,e^x\ln x$$

$$\frac{dy}{dx}=x^2\frac{d}{dx}(\log_a x)+\log_a x\frac{d}{dx}(x^2)-\ln a\frac{d}{dx}(x^4)+6\{x\,e^x\frac{d}{dx}(\ln x)+x\ \ln x\frac{d}{dx}(e^x)+e^x\ln x\frac{d}{dx}(x)\}$$

$$=x^2\frac{1}{x\ln a}+\log_a x.(2x)-\ln a.(4x^3)+6\{x\,e^x.\frac{1}{x}+x\ \ln x.e^x+e^x\ln x.1\}$$

$$=x(\frac{1}{\ln a}+2\log_a x-4x^2\ln a)+6\,e^x(1+x\ \ln x+\ln x)$$

3. (a) মনে করি, $y=\dfrac{x}{x^2+a^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+a^2)\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^2}$$

$$=\frac{(x^2+a^2).1-x(2x+0)}{(x^2+a^2)^2}=\frac{x^2+a^2-2x^2}{(x^2+a^2)^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{x}{x^2+a^2})=\frac{a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}$$

3(b) $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x})$ [দি.'১০; ব.'১৩]

$$=\frac{(1+\tan x)\frac{d}{dx}(1-\tan x)-(1-\tan x)\frac{d}{dx}(1+\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$=\frac{(1+\tan x)(-\sec^2 x)-(1-\tan x)(\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$=\frac{(-1-\tan x-1+\tan x)\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$=\frac{-2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}\text{ (Ans.)}$$

3(c) $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x})=$ [কু.'০৪]

$$\frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(1+\sin x)-(1+\sin x)\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}=$$

$$\frac{(1+\cos x)(\cos x)-(1+\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x+\sin x+1}{(1+\cos x)^2}\text{ (Ans.)}$$

3(d) $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

[ঢা.'১৩; ব. '০৭; রা.'০৯; চ.'১২; দি.'১৪]

$$\frac{d}{dx}(\frac{1+\sin x}{1-\sin x})=$$

$$\frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}(1+\sin x)-(1+\sin x)\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x)(\cos x)-(1+\sin x)\frac{d}{dx}(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x+1+\sin x)\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2} \text{ (Ans.)}$$

3(e) $\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$

[ব.'১০; রা., কু.'০৮; য.'১৩; ঢা.'১৪]

$$\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x} = \frac{\cos x-(2\cos^2 x-1)}{1-\cos x}$$

$$= \frac{1+\cos x-2\cos^2 x}{1-\cos x}$$

$$= \frac{(1-\cos x)(1+2\cos x)}{1-\cos x} = 1+2\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}\right) = -2\sin x$$

3(f) $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ [ঢা.'০৯; ব.'০৯,'১১; য.'১৪]

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}}$$

$$= \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}} = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x} = 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\right) = 0 \text{ (Ans.)}$$

3(g) ধরি, $y = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$ [প্র.ভ.প.'০৫]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+x^2}\frac{d}{dx}(x\ln x)-x\ln x\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2})}{(\sqrt{1+x^2})^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\left[\sqrt{1+x^2}(x.\frac{1}{x}+\ln x)-x\ln x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\left[\frac{(1+x^2)(1+\ln x)-x^2\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1+x^2+\ln x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ ধরি, $y = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x)+\frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2})\right]$$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right]$$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\ \frac{\ln x(1+x^2)+1+x^2-x^2\ln x}{x(1+x^2)\ln x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1+x^2+\ln x}{(\sqrt{1+x^2})^3} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্নমালা IX E

1.(a) $(1+\sin 2x)^2$ [চ.'০৪]

ধরি, $y = (1+\sin 2x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2(1+\sin 2x)\frac{d}{dx}(1+\sin 2x)$$

$$= 2(1+\sin 2x)(0+\cos 2x)\frac{d}{dx}(2x)$$

$$= 2(1+\sin 2x)\cos 2x\ (2.1)$$

$$\frac{d}{dx}\{(1+\sin 2x)^2\} = 4\cos 2x(1+\sin 2x)$$

1(b) a^{px+q} [চ.'০১]

ধরি, $y = a^{px+q}$

$$\frac{dy}{dx} = a^{px+q}.\ln a\frac{d}{dx}(px+q)$$

$$[\because \frac{d}{dx}(a^x) = a^x\ln a]$$

$$= a^{px+q}.\ln a\ (p.1+0)$$

$$\frac{d}{dx}(a^{px+q}) = pa^{px+q}.\ln a \text{ (Ans.)}$$

1(c) $a^{\cos x}$ [চ.'০০]

$$\frac{d}{dx}(a^{\cos x}) = a^{\cos x}.\,lna.\,\frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$= a^{\cos x}.\,lna.(-\sin x)$$
$$= -a^{\cos x}\sin x.\,lna$$

1(d) $10^{\ln(\sin x)}$ [সি.'০২ '০৫; চ.'০৭]

ধরি, $y = 10^{\ln(\sin x)}$

$$\frac{dy}{dx} = 10^{\ln(\sin x)}.ln10\,\frac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\}$$
$$= 10^{\ln(\sin x)}.ln10\,\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$= 10^{\ln(\sin x)}.ln10\,\frac{1}{\sin x}(\cos x)$$
$$\frac{d}{dx}\{10^{\ln(\sin x)}\} = 10^{\ln(\sin x)}.\,ln10.\cot x$$

1(e) $10^{ln(\tan x)}$

ধরি, $y = 10^{\ln(\tan x)}$

$$\frac{dy}{dx} = 10^{\ln(\tan x)}.ln10\,\frac{d}{dx}\{\ln(\tan x)\}$$
$$= 10^{\ln(\tan x)}.ln10\,\frac{1}{\tan x}\frac{d}{dx}(\tan x)$$
$$= 10^{\ln(\sin x)}.ln10\,\frac{\cos x}{\sin x}(\sec^2 x)$$
$$= 10^{\ln(\sin x)}.ln10\,\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= 10^{\ln(\sin x)}.ln10\,\frac{2}{2\sin x\cos x}$$
$$= 10^{\ln(\sin x)}.ln10\,\frac{2}{\sin 2x}$$
$$= 2\,\mathrm{cosec}\,2x.10^{\ln(\sin x)}.ln10$$

1(f) $a^{ln(\cos x)}$ [রা.'০৫]

ধরি, $y = a^{\ln(\cos x)}$

$$\frac{dy}{dx} = a^{\ln(\cos x)}.lna\,\frac{d}{dx}\{\ln(\cos x)\}$$
$$= a^{\ln(\cos x)}.lna\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$= a^{\ln(\cos x)}.ln\,a\,\frac{1}{\cos x}(-\sin x)$$
$$\frac{d}{dx}\{a^{\ln(\cos x)}\} = -\tan x\,a^{\ln(\cos x)}\,lna$$

1(g) $e^{2\ln(\tan 5x)}$ [ব.'০৬,'১১; কু.'০৭; সি.'১০,'১৩]

$$e^{2\ln(\tan 5x)} = e^{\ln(\tan 5x)^2} = (\tan 5x)^2$$
$$\frac{d}{dx}\{e^{2\ln(\tan 5x)}\} = 2\tan 5x\,\frac{d}{dx}(\tan 5x)$$
$$= 2\tan 5x(\sec^2 5x)\frac{d}{dx}(5x)$$
$$= 2\tan 5x\sec^2 5x(5)$$
$$= 10\tan 5x\sec^2 5x$$

1(h) $(ln\sin x^2)^n$ [সি.'০৬; রা.'০৯]

ধরি, $y = (ln\sin x^2)^n$

$$\frac{dy}{dx} = n(ln\sin x^2)^{n-1}\frac{d}{dx}(ln\sin x^2)$$
$$= n(ln\sin x^2)^{n-1}.\frac{1}{\sin x^2}\frac{d}{dx}(\sin x^2)$$
$$= n(ln\sin x^2)^{n-1}.\frac{1}{\sin x^2}(\cos x^2)(2x)$$
$$\frac{d}{dx}\{(ln\sin x^2)^n\} = nx\cot x^2(ln\sin x^2)^{n-1}$$

1(i) $\cos(e^{\tan^2 2x})$

$$\frac{d}{dx}\{\cos(e^{\tan^2 2x})\} = \frac{d\{\cos(e^{\tan^2 2x})\}}{d(e^{\tan^2 2x})}$$
$$\frac{d(e^{\tan^2 2x})}{d(\tan^2 2x)}\frac{d(\tan^2 2x)}{d(\tan 2x)}\frac{d(\tan 2x)}{d(2x)}\frac{d(2x)}{dx}$$
$$= -\sin(e^{\tan^2 2x}).e^{\tan^2 2x}.2\tan 2x.\sec^2 2x.2$$
$$= -4\tan 2x\sec^2 2x\sin(e^{\tan^2 2x})\,e^{\tan^2 2x}$$

1(j) $\frac{d}{dx}(\sin^3 x^2)$ [চ.'০৯]

$$= \frac{d(\sin x^2)^3}{d(\sin x^2)}\frac{d(\sin x^2)}{d(x^2)}\frac{d(x^2)}{dx}$$
$$= 3(\sin x^2)^2.\cos x^2.2x$$
$$= 6x\sin^2 x^2\cos x^2 \quad \text{(Ans.)}$$

1(k) $e^{5\ln(\tan x)}$ [চ.'১২]

$$= e^{\ln(\tan x)^5} = (\tan x)^5$$

$$\frac{d}{dx}\{e^{5\ln(\tan x)}\} = 5\tan^4 x \frac{d}{dx}(\tan x)$$
$$= 5\tan^4 x \sec^2 x$$

1(l) $x^n \ln(2x)$ [চ.'০৭]

মনে করি, $y = x^n \ln(2x)$

$$\frac{dy}{dx} = x^n \frac{d}{dx}\{ln(2x)\} + ln(2x)\frac{d}{dx}(x^n)$$
$$= x^n \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(2x) + ln(2x).nx^{n-1}$$
$$= x^{n-1}\frac{1}{2}.(2) + nx^{n-1} ln(2x)$$
$$\frac{d}{dx}\{x^n \ln(2x)\} = x^{n-1}\{1 + n\, ln(2x)\}$$

1(m) $x\sqrt{\sin x}$ [ঢা.'০৮]

মনে করি, $y = x\sqrt{\sin x} = x(\sin x)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}\{(\sin x)^{\frac{1}{2}}\} + (\sin x)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x)$$
$$= x.\frac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(\sin x) + \sqrt{\sin x}.1$$
$$= \frac{1}{2}x\frac{1}{\sqrt{\sin x}}(\cos x) + \sqrt{\sin x}$$
$$\frac{d}{dx}(x\sqrt{\sin x}) = \frac{x\cos x + 2\sin x}{2\sqrt{\sin x}}$$

1(n) $e^{ax}\tan^2 x$ [ঢা.'০৯]

মনে করি, $y = e^{ax}\tan^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}\frac{d}{dx}(\tan^2 x) + \tan^2 x\frac{d}{dx}(e^{ax})$$
$$= e^{ax}(2\tan x)\frac{d}{dx}(\tan x) + \tan^2 x.e^{ax}(a)$$
$$= e^{ax}\tan x(2\sec^2 x + a\tan x) \text{ (Ans.)}$$

2.(a) $ln(\cos x)$ [রা.'০৩,'০৫,'১০]

$$\frac{d}{dx}\{ln(\cos x)\} = \frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$= \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x \text{ (Ans.)}$$

$$\frac{d}{dx}\{ln(e^x + e^{-x})\} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x})$$
$$= \frac{1}{e^x + e^{-x}}(e^x - e^{-x}) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

2(c) $\log_x a$ [রা.'০১; চ.'০৬;'০৮]

$$\log_x a = \log_x e \times \log_e a = ln\, a\frac{1}{\log_e x}$$
$$= ln\, a\frac{1}{\ln x} = ln\, a\,(ln\, x)^{-1}$$
$$\therefore \frac{d}{dx}(\log_x a) = ln\, a\{-1(ln\, x)^{-2}\frac{d}{dx}(ln\, x)\}$$
$$= -ln\, a\frac{1}{(\ln x)^2}.\frac{1}{x} = -\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$$

2(d) $\log_{10} 3x$ [য.'০৬,'১৩]

$$\log_{10} 3x = \log_{10} e \times \log_e 3x = \frac{1}{\log_e 10}\ln(3x)$$
$$\frac{d}{dx}(\log_{10} 3x) = \frac{1}{\ln 10}\frac{1}{3x}\frac{d}{dx}(3x)$$
$$= \frac{1}{\ln 10}\frac{1}{3x}(3.1) = \frac{1}{x\ln 10} \text{ (Ans.)}$$

2(e) $\log_a x + \log_x a$

$$= \log_a e \times \log_e x + \log_x e \times \log_e a$$
$$= \frac{1}{\log_e a}\times \ln x + \frac{1}{\log_e x}\times \ln a$$
$$= \frac{1}{\ln a}\times \ln x + \ln a \times (\ln x)^{-1}$$
$$\frac{d}{dx}(\log_a x + \log_x a)$$
$$= \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x} + \ln a \times \{-1(\ln x)^{-2}\frac{1}{x}\}$$
$$= \frac{1}{x\ln a} - \frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$$

2(f) ধরি, $y = \log_x \tan x = \log_x e \times \log_e \tan x$

$$= \frac{1}{\log_e x}\times \ln(\tan x) = \frac{\ln(\tan x)}{\ln x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\ln x \frac{d}{dx}\{\ln(\tan x)\} - \ln(\tan x)\frac{d}{dx}(\ln x)}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x \frac{1}{\tan x}\sec^2 x - \ln(\tan x).\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x \frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x}\ln(\tan x)}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x \frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{x}\ln(\tan x)}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{2x \ln x \operatorname{cosec} 2x - \ln(\tan x)}{x(\ln x)^2} \text{ (Ans.)}$$

2(g) $ln(\sin 2x)$ [ঢা.'১১; সি.'১৩]

$$\frac{d}{dx}\{ln(\sin 2x)\} = \frac{1}{\sin 2x}\frac{d}{dx}(\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{\sin 2x}(\cos 2x)\frac{d}{dx}(2x) = 2\cot 2x$$

(h) $\ln(\sin x^2)$ [রা.'১২]

$$\frac{d}{dx}\{\ln(\sin x^2)\} = \frac{1}{\sin x^2}\frac{d}{dx}(\sin x^2)$$

$$= \frac{1}{\sin x^2}(\cos x^2)\frac{d}{dx}(x^2) = 2x\cot x^2$$

3(a) $ln\,[x - \sqrt{x^2-1}]$ [রা. '০২; কু. '০৩; চ.'০৫]

$$\frac{d}{dx}\{ ln\,(x - \sqrt{x^2-1}) \}$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\frac{d}{dx}(x - \sqrt{x^2-1})$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\{1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(2x)\}$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\{\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ (Ans.)}$$

3(b) $ln\,[x - \sqrt{x^2+1}]$ [রা. '০২; কু. '০৩,'১০]

$$\frac{d}{dx}\{ ln\,(x - \sqrt{x^2+1}) \}$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\frac{d}{dx}(x - \sqrt{x^2+1})$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\{1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)\}$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\{\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ (Ans.)}$$

3(c) $ln\,(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b})$ [কু.'০১]

$$\frac{d}{dx}\{ ln\,(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}) \}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}\{\frac{1}{2\sqrt{x-a}} + \frac{1}{2\sqrt{x-b}}\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}\{\frac{\sqrt{x-b}+\sqrt{x-a}}{2\sqrt{x-a}\sqrt{x-b}}\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}} \text{ (Ans.)}$$

3(d) $ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3/2}\right\}$ [চ.'০০]

ধরি, $y = ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3/2}\right\}$

$$= ln\, e^x + \frac{3}{2}\{ ln\,(x-1) - ln\,(x+1)\}$$

$$= x + \frac{3}{2}\{ ln\,(x-1) - ln\,(x+1)\}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{3}{2}\{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\}$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\{\frac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)}\}$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\{\frac{2}{x^2-1}\} = \frac{x^2-1+3}{x^2-1}$$

$$= \frac{x^2+2}{x^2-1} \text{ (Ans.)}$$

4. (a) $\dfrac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$ [চ.'০৭; য.'০৬]

$$\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{-\cos 2x}{1} = -\cos 2x$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}) = \sin 2x.2 = 2\sin 2x$$

4(b) $\left(\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2$ [কু.'০৩]

$$= \left(\frac{2\sin x \cos x}{2\cos^2 x}\right)^2 = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2 = 2\tan x \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= 2\tan x \sec^2 x$$

4(c) $ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ [ঢা.'০৭,'১৩; রা.'১১; কু.'১৪]

$$= ln\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = ln\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}} = ln\tan\frac{x}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\{ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\} = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sin x} = \text{cosec } x \text{ (Ans.)}$$

4(d) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ [প্র.ভ.প.'৮৩; রা.'১১]

ধরি, $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x}\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x}) - \sqrt{1+x}\frac{d}{dx}(\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1-x})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}.1 - \sqrt{1+x}\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1)}{1-x}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}.1 - \sqrt{1+x}\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1)}{1-x}$$

$$= \frac{1-x+1+x}{2(1-x)\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \frac{2}{2(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

4.(e) $\ln\sqrt[3]{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ [দি.'১২; প্র.ভ.প.'০৫]

$$= \ln\left(\frac{2\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)}\right)^{1/3} = \frac{1}{3}\ln\tan^2\frac{x}{2}$$

$$= \frac{2}{3}\ln\tan\frac{x}{2}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln\sqrt[3]{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}) = \frac{2}{3}\frac{\sec^2(x/2)}{\tan(x/2)}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = \frac{2}{3}\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{\sin x} = \frac{2}{3}\cos ecx$$

5. (a) $\sin^2[ln(\sec x)]$ [রা.'০৭,'১৩; কু.,সি., মা.বো.'০৯; চ.'১১; ঢা.'১২; য., দি.'১৩]

ধরি, $y = \sin^2[ln(\sec x)]$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d\{\sin[\ln(\sec x)]\}^2}{d\{\sin[\ln(\sec x)]\}}\frac{d\{\sin[\ln(\sec x)]\}}{d\{\ln(\sec x)\}}$$

$$\frac{d\{\ln(\sec x)\}}{d(\sec x)}\frac{d(\sec x)}{dx}$$

$$= 2\sin[\ln(\sec x)]\cos[\ln(\sec x)]\frac{1}{\sec x}\sec x\tan x$$

$$= \tan x\ \sin[2\ln(\sec x)]$$

5(b) $\sin^2\{ln(x^2)\}$

[য.'০৭,'০৮; চ.'০৬,'১৩; ঢা.,সি,'১৪]

$$\frac{d}{dx}[\sin^2\{ln(x^2)\}] = \frac{d[\sin\{\ln(x^2)\}]^2}{d[\sin\{\ln(x^2)\}]}\frac{d[\sin\{\ln(x^2)\}]}{d[\ln(x^2)]}\frac{d[\ln(x^2)]}{d(x^2)}\frac{d(x^2)}{dx}$$

$$= 2\sin\{\ln(x^2)\}\cos\{\ln(x^2)\}\frac{1}{x^2}.2x$$

$$= \frac{2}{x}\sin\{2\ln(x^2)\} = \frac{2}{x}\sin\{4\ln(x)\}$$

5(c) $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ [চ.'০১; ঢা.'০৫,'০৭]

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{\sin\sqrt{x}})$$

$$= \frac{d(\sqrt{\sin\sqrt{x}})}{d(\sin\sqrt{x})}\frac{d(\sin\sqrt{x})}{d(\sqrt{x})}\frac{d(\sqrt{x})}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}\cos\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}} \text{ (Ans.)}$$

5(d) $\cos(lnx) + ln(\tan x)$

[ব.'০৩; সি.'০৬]

$$\frac{d}{dx}\{\cos(lnx) + ln(\tan x)\}$$

$$= \frac{d}{dx}\{\cos(lnx)\} + \frac{d}{dx}\{ln(\tan x)\}$$

$$= -\sin(lnx).\frac{1}{x} + \frac{1}{\tan x}.\sec^2 x$$

$$= -\frac{1}{x}\sin(lnx) + \frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{2}{2\sin x\cos x} - \frac{1}{x}\sin(lnx)$$

$$= 2\,\text{cesec}\,2x - \frac{1}{x}\sin(lnx)$$

5(e) 2cosec2x cos (ln tan$x$) [রা.'০৬]

$$\frac{d}{dx}\{2\,\text{cosec}\,2x\cos(ln\tan x)\}$$

$$= 2\left[\text{cosec}\,2x\frac{d}{dx}\{\cos(ln\tan x)\} + \cos(ln\tan x)\frac{d}{dx}(\text{cosec}\,2x)\right]$$

$$= 2\left[\text{cosec}\,2x\{-\sin(ln\tan x)\}.\frac{1}{\tan x}.\sec^2 x + \cos(ln\tan x)(-\text{cosec}2x\cot 2x.\,.2)\right]$$

$$= 2\left[-\text{cosec}\,2x\ \sin(ln\tan x)\}.\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\cos^2 x} - 2\text{cosec}2x\cot 2x\cos(ln\tan x)\right]$$

$$= 2[-\text{cosec}\,2x\ \sin(ln\tan x)\}\frac{2}{2\sin x\cos x} - 2\text{cosec}2x\cot 2x\cos(ln\tan x)]$$

$$= -4[\text{cosec}^2 2x\ \sin(ln\tan x)\} + \text{cosec}\,2x\cot 2x\cos(ln\tan x)]$$

5(f) $\frac{d}{dx}\{1+\tan(1+\sqrt{x})\}^{1/3}$

$$= \frac{1}{3}\{1+\tan(1+\sqrt{x})\}^{\frac{1}{3}-1}\{0+\sec^2(1+\sqrt{x})\}\left(0+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{x}}\{1+\tan(1+\sqrt{x})\}^{-\frac{2}{3}}\sec^2(1+\sqrt{x})$$

5(g) $\frac{d}{dx}(\sqrt{\tan e^{x^2}})$ [য.'০৯]

$$= \frac{d(\sqrt{\tan e^{x^2}})}{d(\tan e^{x^2})}\frac{d(\tan e^{x^2})}{d(e^{x^2})}\frac{d(e^{x^2})}{d(x^2)}\frac{d(x^2)}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tan e^{x^2}}} \sec^2 e^x \cdot e^x .2x = \frac{xe^x \sec^2 e^x}{\sqrt{\tan e^x}}$$

5(h) $\frac{d}{dx}\{ \sin^2 \log(\sec x) \}$ [সি.'১২]

$= 2\sin\{\log(\sec x)\}.\cos\{\log(\sec x)\} \times \frac{d}{dx}\{ \log(\sec x)\}$

$= \sin\{2\log(\sec x)\} \times \frac{1}{\sec x \ln 10} \frac{d}{dx}(\sec x)$

$= \frac{\sin\{2\log(\sec x)\}}{\sec x \ln 10} \sec x \,.\, \tan x$

$= \frac{\sin\{2\log(\sec x)\}.\tan x}{\ln 10}$

5(i) $\frac{d}{dx}(\sin\sqrt{x})$ [সি.'১২; কু.'১৩]

$= \cos\sqrt{x} \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= \cos\sqrt{x} \,.\, \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

6.(a) ধরি, $y = x^2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ [রা.'০১]

$\therefore \ln y = 2 \ln x + \frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]$

ইহাকে এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{x} + \frac{1}{2}[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}(-1)]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y[\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\{\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\}]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}[\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\{\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\}]$

$= 2x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{x^2}{\sqrt{(1+x)(1-x)^{3/2}}}$

6(b) $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$ [কু.'০৪; ঢা.'০৬,'০৯; য.'১৩]

$\frac{d}{dx}(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}) = \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}})$

$= \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= \frac{(e^{\sqrt{x}})^{1-\frac{1}{2}}}{2} . \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}}$ (Ans.)

6.(c) $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$ [চ.'০০]

$= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}$

$= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{x+1-x-2} = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$= -\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{(x+2)(x+1)}}$ (Ans.)

6(d) $\frac{d}{dx}\{\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}\}$ [কু.'০৯]

$= \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}[\frac{1}{(x+1)^2}\frac{d}{dx}(x+1)^2 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x-1}) - \frac{1}{(x+4)^3}\frac{d}{dx}(x+4)^3 - \frac{1}{e^x}\frac{d}{dx}(e^x)]$

$= \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}[\frac{2(x+1)}{(x+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{3(x+4)^2}{(x+4)^3} - \frac{1}{e^x}(e^x)]$

$= \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1]$

7.(a) $\frac{\ln(\cos x)}{x}$ [ঢা.'০৬; সি.'০৭;'০৯,'১১; ব.'১০]

$\frac{d}{dx}\{\frac{\ln(\cos x)}{x}\}$

$$= \frac{x\frac{d}{dx}\{\ln(\cos x) - \ln(\cos x)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x\frac{1}{\cos x}(-\sin x) - \ln(\cos x).1}{x^2}$$

$$= \frac{\{x\tan x + \ln(\cos x)}{x^2}$$

7(b) ধরি , $y = \dfrac{e^{-3x}(3x+5)}{7x-1}$ [য.'০৫]

$\ln y = \ln e^{-3x} + \ln(3x+5) - \ln(7x-1)$

$= -3x + \ln(3x+5) - \ln(7x-1)$

ইহাকে এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -3 + \frac{1}{3x+5}(3) - \frac{1}{7x-1}(7)$$

$$= \frac{-3(21x^2+32x-5)+21x-3-21x-35}{(3x+5)(7x-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\frac{-63x^2-96x+15-38}{(3x+5)(7x-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-3x}(3x+5)}{7x-1}\cdot\frac{-(63x^2+96x+23)}{(3x+5)(7x-1)}$$

$$= \frac{-(63x^2+96x+23)e^{-3x}}{(7x-1)^2}$$

7. (c) $\dfrac{x^4}{\ln x}$ [ঢা.'০৪]

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{\ln x}\right) = \frac{\ln x\frac{d}{dx}(x^4) - x^4\frac{d}{dx}(\ln x)}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x(4x^3) - x^4\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x^3(4\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

8. (a) $\cos x°$ [রা.'০৪]

$$\cos x° = \cos\frac{\pi x}{180}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x°) = -\sin\frac{\pi x}{180}.\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{180}\right)$$

$$= -\sin x°.\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180}\sin x°$$

8(b) $e^{5x}\sin x°$ [সি.'০২]

$$= e^{5x}\sin\frac{\pi x}{180}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{5x}\sin\frac{\pi x}{180}\right) = e^{5x}.\cos\frac{\pi x}{180}\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{180}\right) + \sin\frac{\pi x}{180}.e^{5x}\frac{d}{dx}(5x)$$

$$= e^{5x}.\cos x°.\left(\frac{\pi}{180}\right) + \sin x°.e^{5x}.5$$

$$= e^{5x}\left(\frac{\pi}{180}\cos x° + 5\sin x°\right)$$

8(c) $2x°\cos 3x°$ [চ.'০৩; য.'০৫; কু.'১০,'১৩; সি. '০৬,'০৮,'১১; ব., রা.'০৭,'১৪; দি.'০৯,'১১]

$$2x°\cos 3x° = 2\frac{\pi x}{180}\cos\frac{3\pi x}{180}$$

$$\frac{d}{dx}(2x°\cos 3x°) = \frac{\pi}{90}\left[x\left(-\sin\frac{3\pi x}{180}\right).\frac{d}{dx}\left(\frac{3\pi x}{180}\right) + \cos\frac{3\pi x}{180}\frac{d}{dx}(x)\right]$$

$$= \frac{\pi}{90}\left[x(-\sin 3x°).\left(\frac{3\pi}{180}\right) + \cos 3x°.1\right]$$

$$= \frac{\pi}{90}\left(\cos 3x° - \frac{\pi}{60}x\sin 3x°\right)$$

প্রশ্নমালা IX F

1. (a) $\sqrt{\sin^{-1}x^5}$ [র.'০৪, '০৬]

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\sin^{-1}x^5}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}}\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x^5)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}}\frac{1}{\sqrt{1-(x^5)^2}}\frac{d}{dx}(x^5)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}\sqrt{1-x^{10}}}(5x^4)$$

$$= \frac{5x^4}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}\sqrt{1-x^{10}}}$$

1.(b) $\tan^{-1}(\sin e^x)$ [চ. '০৫; ব. '০৫;য.'০৯]

$$\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\sin e^x)\} = \frac{d\{\tan^{-1}(\sin e^x)\}}{d(\sin e^x)}$$

$$\frac{d(\sin e^x)}{d(e^x)}\frac{d(e^x)}{dx}$$

$$= \frac{1}{1+(\sin e^x)^2}(\cos e^x).e^x = \frac{e^x \cos e^x}{1+\sin^2 e^x}$$

1(c) $\sin^{-1}(\sin e^x) = e^x$ **[চ.'০৪]**

$$\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\sin e^x)\} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

1(d) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}\sqrt{xe^x})$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{xe^x})^2}}\frac{d}{dx}(\sqrt{xe^x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-xe^x}}\frac{1}{2\sqrt{xe^x}}\frac{d}{dx}(xe^x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{xe^x(1-xe^x)}}(xe^x+e^x)$$

$$= \frac{e^x(1+x)}{2\sqrt{xe^x(1-xe^x)}} \text{ (Ans.)}$$

1(e) $\sin^{-1}(\tan^{-1}x)$ **[সি.'০১]**

$$\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\tan^{-1}x)\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}$$

1(f) $\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2})\}$

$$= \frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\frac{d}{dx}(\tan\frac{x}{2})$$

$$= \frac{1}{1+\frac{(a-b)\sin^2(x/2)}{(a+b)\cos^2(x/2)}}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{(a+b)\cos^2(x/2)}{a(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2})+b(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})}.\frac{1}{2}\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\frac{1}{\cos^2(x/2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{2(a+b\cos x)} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b\cos x)}$$

1.(g) $\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x})\}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x})^2}}\frac{(b+a\cos x)(-b\sin x)-(a+b\cos x)(-a\sin x)}{(b+a\cos x)^2}$$

$$= \frac{b+a\cos x}{\sqrt{(b+a\cos x)^2-(a+b\cos x)^2}}\frac{(-b^2+a^2)\sin x}{(b+a\cos x)^2}$$

$$= \frac{(a^2-b^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{b^2+a^2\cos^2 x-a^2-b^2\cos^2 x}}$$

$$= \frac{-(b^2-a^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{(b^2-a^2)(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{-(b^2-a^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{(b^2-a^2)\sin^2 x}}$$

$$= \frac{-\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x}$$

1(h) ধরি, $y = \sec^{-1}(\frac{x^2+1}{x^2-1}) = -\sec^{-1}\frac{1+x^2}{1-x^2}$

$$= -\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = -2\tan^{-1}x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{-2}{1+x^2}$$

2. (a) $x\sin^{-1}x$ [সি.'০১]

$$\frac{d}{dx}(x\sin^{-1}x) = x\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) + \sin^{-1}x\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x.1$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x$$

2(b) $x^2\sin^{-1}(1-x)$ [রা.'০৬; ব.'০৮; ঢা.'১৪]

$$\frac{d}{dx}\{x^2\sin^{-1}(1-x)\}$$

$$= x^2\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(1-x)\} + \sin^{-1}(1-x)\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}(-1) + \sin^{-1}(1-x).2x$$

$$= -\frac{x^2}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} + 2x\sin^{-1}(1-x)$$

$$= 2x\sin^{-1}(1-x) - \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

2(c) $\frac{d}{dx}\{e^x\sin^{-1}x\}$ [য.'০৪]

$$= e^x\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) + \sin^{-1}x\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= e^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x.\ e^x$$

$$= e^x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x\right)$$

2.(d) $\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{x^2}{e^x}+\frac{e^x}{x^2}}{1-\frac{x^2}{e^x}.\frac{e^x}{x^2}} = \tan^{-1}\frac{\frac{x^2}{e^x}+\frac{e^x}{x^2}}{1-1}$$

$$= \cot^{-1}\frac{1-1}{\frac{x^2}{e^x}+\frac{e^x}{x^2}} = \cot^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)\right\} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

2(e) $\frac{d}{dx}(\tan x\sin^{-1}x)$ [ঢা.'০৫]

$$= \tan x\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) + \sin^{-1}x\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= \tan x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x.(\sec^2 x)$$

$$= \frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}} + \sec^2 x\sin^{-1}x$$

2(f) $(x^2+1)\tan^{-1}x - x$ **[ঢা.,য.'১১; কু.,দি.'১২]**

মনে করি, $y = (x^2+1)\tan^{-1}x - x$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) + \tan^{-1}x\frac{d}{dx}(x^2+1) - \frac{d}{dx}(x)$$

$$= (x^2+1)\frac{1}{1+x^2} + \tan^{-1}x\times(2x) - 1$$

$$= 1 + 2x\tan^{-1}x - 1$$

$$\frac{d}{dx}\{(x^2+1)\tan^{-1}x - x\} = 2x\tan^{-1}x$$

3.(a) $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ [কু.'০৩]

$$= \tan^{-1}\frac{1-x}{1+1.x} = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}x$$

$$= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}x\right)$$

$$= 0 - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} \text{ (Ans.)}$$

3(b) $\cot^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ [চ.'০১,'১০; য.'০৫]

$= \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-1.x}$

$= \tan^{-1}(1)+\tan^{-1}x = \frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x$

$\therefore \frac{d}{dx}\{\cot^{-1}\frac{1-x}{1+x}\} = \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x)$

$= 0+\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$

3(c) $\tan^{-1}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ [কু.'০০]

$= \tan^{-1}\frac{1-\sqrt{x}}{1+1.\sqrt{x}} = \tan^{-1}(1)-\tan^{-1}\sqrt{x}$

$= \frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\sqrt{x}$

$\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\} = \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\sqrt{x})$

$= 0-\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= -\frac{1}{1+x}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

3(d) $\tan^{-1}\frac{a+bx}{a-bx}$ [য.'০২,'১১; ঢা.'০৯,'১১; ব.'০৯; চ.'১২; কু.'১৩ প্র.ভ.প. '০৬]

$= \tan^{-1}\frac{a(1+\frac{b}{a}x)}{a(1-\frac{b}{a}x)} = \tan^{-1}\frac{1+\frac{b}{a}x}{1-1.\frac{b}{a}x}$

$= \tan^{-1}(1)-\tan^{-1}(\frac{b}{a}x) = \frac{\pi}{4}-\tan^{-1}(\frac{b}{a}x)$

$\therefore \frac{d}{dx}\{\tan^{-1}\frac{a+bx}{a-bx}\} = \frac{d}{dx}\{\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}(\frac{b}{a}x)\}$

$= 0-\frac{1}{1+(\frac{b}{a}x)^2}\frac{d}{dx}(\frac{b}{a}x)$

$= \frac{a^2}{a^2+b^2x^2}.\frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2+b^2x^2}$

3(e) $\tan^{-1}\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}$ [প্র.ভ.প. '১৬]

$= \tan^{-1}\frac{\frac{a\cos x}{b\cos x}-\frac{b\sin x}{b\cos x}}{\frac{b\cos x}{b\cos x}+\frac{a\sin x}{b\cos x}} = \tan^{-1}\frac{\frac{a}{b}-\tan x}{1+\frac{a}{b}.\tan x}$

$= \tan^{-1}\frac{a}{b}-\tan^{-1}\tan x = \tan^{-1}\frac{a}{b}-x$

$\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}\frac{a\cos x-b\sin x}{b\cos x+a\sin x}\} = 0-1 = -1$

3(f) $\cot^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ [চ. '০৬; সি. '০৪; রা. য. ০৭]

$= \tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \tan^{-1}\frac{1-x}{1+1.x}$

$= \tan^{-1}(1)-\tan^{-1}x = \frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x$

$\frac{d}{dx}\{\cot^{-1}\frac{1+x}{1-x}\} = \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x)$

$= 0-\frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$ ((Ans.)

3(g) ধরি, $y = \cos^{-1}(\frac{1+x}{2})^{1/2}$ [চ.'০৯]

এবং $x = \cos\theta$. তাহলে, $\theta = \cos^{-1}x$ এবং

$y = \cos^{-1}\{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\}^{1/2} = \cos^{-1}(\cos^2\frac{\theta}{2})^{1/2}$

$= \cos^{-1}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\cos^{-1}x$

$\frac{d}{dx}\{\cos^{-1}(\frac{1+x}{2})^{1/2}\} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}\cos^{-1}x)$

$= \frac{1}{-2\sqrt{1-x^2}}$

3(h) $\tan^{-1}\frac{a+bx}{b-ax}$ [ব.'১৩; বুয়েট.'০৯]

$= \tan^{-1}\frac{b(\frac{a}{b}+x)}{b(1-\frac{a}{b}.x)} = \tan^{-1}(\frac{a}{b})+\tan^{-1}(x)$

$\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}\frac{a+bx}{b-ax}\} = \frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\frac{a}{b})\} + \frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(x)\}$

$$= 0 + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

4.(a) ধরি, $y = \sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ [য.'০২,'১২,'১৪]

এবং $x = \tan\theta$. তাহলে, $\theta = \tan^{-1}x$ এবং

$$y = \sin^{-1}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin^{-1}\cos 2\theta$$

$$= \sin^{-1}\sin(\frac{\pi}{2}-2\theta) = \frac{\pi}{2}-2\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x) = 0 - 2\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}) = \frac{-2}{1+x^2}$$

4(b) $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x$ [য.'০৬; চ.'০৭]

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}) = \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x)$$

$$= 2\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \text{ (Ans.)}$$

4(c) $\sec^{-1}\frac{1+x^2}{1-x^2}$ [য.'০৬; কু. ০৯; সি.'১০]

$$= \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}\frac{1+x^2}{1-x^2}) = \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x)$$

$$= 2\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \text{ (Ans.)}$$

4(d) $\tan^{-1}\frac{4x}{1-4x^2}$ [ব.'০৪]

$$= \tan^{-1}\frac{2.2x}{1-(2x)^2} = 2\tan^{-1}(2x)$$

$$[\quad \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = 2\tan^{-1}x]$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\frac{4x}{1-4x^2}) = \frac{d}{dx}\{2\tan^{-1}(2x)\}$$

$$= 2\frac{1}{1+(2x)^2}.2 = \frac{4}{1+4x^2} \text{ (Ans.)}$$

4(e) $\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$

[চ.'০৯; রা.'০৬; সি.'০৯,'১২; ব.'১১; দি.'১৩]

$$= \tan^{-1}\frac{2.2\sqrt{x}}{1-(2\sqrt{x})^2} = 2\tan^{-1}(2\sqrt{x})$$

$$[\because \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = 2\tan^{-1}x]$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}) = \frac{d}{dx}\{2\tan^{-1}(2\sqrt{x})\}$$

$$= 2\frac{1}{1+(2\sqrt{x})^2}\frac{d}{dx}(2\sqrt{x})$$

$$= \frac{2}{1+4x}.2.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)} \text{ (Ans.)}$$

4(f) $\sin^{-1}\frac{4x}{1+4x^2}$ [সি.'০২]

$$= \sin^{-1}\frac{2.2x}{1+(2x)^2} = 2\tan^{-1}(2x).$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}\frac{4x}{1+4x^2}) = \frac{d}{dx}\{2\tan^{-1}(2x)\}$$

$$= 2\frac{1}{1+(2x)^2}\frac{d}{dx}(2x) = \frac{4}{1+4x^2} \text{ (Ans.)}$$

4(g) $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}) = \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x)$$

$$= \frac{2}{1+x^2} \text{ (Ans.)}$$

4(h) $\sin^{-1}\frac{6x}{1+9x^2}$ [ঢা.'০১]

$$= \sin^{-1}\frac{2.3x}{1+(3x)^2} = 2\tan^{-1}(3x)$$

$$[\because \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x]$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}\frac{6x}{1+9x^2}) = \frac{d}{dx}\{2\tan^{-1}(3x)\}$$

$$= 2\frac{1}{1+(3x)^2}\frac{d}{dx}(3x) = \frac{2}{1+9x^2}.3$$

$$= \frac{9}{1+9x^2} \text{ (Ans.)}$$

4.(i) $\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}$ [চ'০৬,'১১; ঢা.'০৭; সি.'১১]

$$= \tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-(\sqrt{x})^2} = 2\tan^{-1}\sqrt{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}) = \frac{d}{dx}\{2\tan^{-1}(\sqrt{x})\}$$

$$= 2\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{2}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \text{ (Ans.)}$$

5.(a) ধরি, $y = \cos^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}\}$

[য.'০১,'১০; কু.'১০]

এবং $x = \sin\theta$. তাহলে, $\theta = \sin^{-1}x$ এবং

$$y = \cos^{-1}(2\cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}\}$$

$$= \cos^{-1}(2\cos\theta\sin\theta) = \cos^{-1}\sin 2\theta$$

$$= \cos^{-1}\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta) = \frac{\pi}{2}-2\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\sin^{-1}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2} - 2\sin^{-1}x)$$

$$= 0 - 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} \text{ (Ans.)}$$

5(b) ধরি, $y = \sin^{-1}\{2ax\sqrt{1-a^2x^2}\}$ [কু.'০৮; সি.'১৩]

এবং $ax = \sin\theta$. তাহলে, $\theta = \sin^{-1}(ax)$ এবং

$$y = \sin^{-1}\{2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\}$$

$$= \sin^{-1}\{2\sin\theta\cos\theta\} = \sin^{-1}\sin 2\theta$$

$$= 2\theta = 2\sin^{-1}(ax)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{\sqrt{1-(ax)^2}}\frac{d}{dx}(ax)$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$$

5(c)) ধরি, $y = \tan^{-1}\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$ [রা.'০২]

এবং $2x = \sin\theta$.

$$y = \tan^{-1}\frac{2\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \tan^{-1}\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \tan^{-1}(2\tan\theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(2\tan\theta)^2}\frac{d}{dx}(2\tan\theta)$$

$$= \frac{2\sec^2\theta}{1+4\tan^2\theta} = \frac{2/\cos^2\theta}{1+\frac{4\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{2}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta} = \frac{2}{1+3\sin^2\theta}$$

$$= \frac{2}{1+3(2x)^2} = \frac{2}{1+12x^2}$$

5(d) ধরি, $y = \sin^{-1}\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}$ এবং

$x = \sin\theta$. তাহলে, $\theta = \sin^{-1}x$ এবং

$$y = \sin^{-1}\frac{\sin\theta+\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sin^{-1}(\sin\theta.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)$$

$$= \sin^{-1}(\sin\theta.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\theta)$$

$$= \sin^{-1}\sin(\theta+\frac{\pi}{4}) = \theta + \frac{\pi}{4} = \sin^{-1}x + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ (Ans.)}$$

6.(a) ধরি, $y = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ [রা.'০৩]

এবং $x = \sec\theta$. তাহলে, $\theta = \sec^{-1}x$ এবং

$$y=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta}}$$

$$=\tan^{-1}\frac{1}{\tan\theta}=\tan^{-1}\cot\theta=\tan^{-1}\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=$$

$$\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}x)=0-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}})=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

6.(b) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ **[সি.'০৫,'০৭; প্র.ভ.প.'১০]**

ধরি, $y=\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ এবং $x=\cos\theta$.

তাহলে, $\theta=\cos^{-1}x$ এবং

$$y=\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}}$$

$$=\tan^{-1}\sqrt{\tan^2\frac{\theta}{2}}=\tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\cos^{-1}x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}})=\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

6(e) $\sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ **[বুয়েট,'০৯]**

ধরি, $y=\sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ এবং $x=\cos\theta$

$$y=\sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\right)$$

$$=\sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\sin^2(\theta/2)}}\right)$$

$$=\sin^4(\cot^{-1}\cot\frac{\theta}{2})=\sin^4\frac{\theta}{2}=\{\frac{1}{2}(2\sin^2\frac{\theta}{2})\}^2$$

$$=\{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\}^2=\frac{1}{4}(1-x)^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}\times2(1-x)\times(-1)=-\frac{1}{2}(1-x)$$

6(f) $\tan(\sin^{-1}x)$ **[চ.'০২,'০৯;কু.'০৮,'১১; রা.'০৮; ব.'০৯,'১২; ঢা.,য.,সি.'১০; ঢা.'১২; দি.'১৩]**

$$\frac{d}{dx}\{\tan(\sin^{-1}x)\}=\sec^2(\sin^{-1}x).\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$$

$$=\frac{1}{\cos^2(\sin^{-1}x)}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{1-\{\sin(\sin^{-1}x)\}^2}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{1-x^2}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\text{ (Ans.)}$$

7.(a) $\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$ **[সি.'১৪;য.'০৭; চ.'১৩]**

$$=\tan^{-1}(\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x})=\tan^{-1}(\frac{1+\sin x}{\cos x})$$

$$=\tan^{-1}\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\tan^{-1}\frac{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2}{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\cos\frac{x}{2}(1+\tan\frac{x}{2})}{\cos\frac{x}{2}(1-\tan\frac{x}{2})}=\tan^{-1}\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$$

$$=\tan^{-1}(1)+\tan^{-1}\tan(\frac{x}{2})=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\sec x+\tan x)\} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

7(b) $\tan^{-1}\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ [ঢা.'০৫,'১৩]

$$= \tan^{-1}\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})}{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\cos\frac{x}{2}(1-\tan\frac{x}{2})}{\cos\frac{x}{2}(1+\tan\frac{x}{2})} = \tan^{-1}\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}$$

$$= \tan^{-1}(1)-\tan^{-1}\tan(\frac{x}{2}) = \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{\cos x}{1+\sin x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$
$$=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

7(c) $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ [রা.'১০; কু.'১১; ব.'১২]

$$= \tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)}} = \tan^{-1}\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \tan^{-1}\tan\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

7(d) $\sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

[ব.'০২; চ. '০৮; রা. '০৯,'১১; দি.'০৯,'১১]

ধরি, $y = \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ এবং $x = \cos\theta$

তাহলে, $\theta = \cos^{-1}x$ এবং

$$y = \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)$$

$$= \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}}\right)$$

$$= \sin(2\tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}) = \sin(2.\frac{\theta}{2}) = \sin\theta$$

$$= \sin(\cos^{-1}x) = \sin\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$$

$$= \sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.(-2x)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right\} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

প্রশ্নমালা IX G

$\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর ঃ **1. (a)** $x=\sqrt{t},\ y=t-\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \text{ এবং}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t-\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{d}{dt}\left(t-t^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 1-\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-\frac{1}{2}-1} = 1+\frac{1}{2t\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(2\sqrt{t}+\frac{1}{t}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(2\sqrt{t}+\frac{1}{t}\right)\times\frac{2\sqrt{t}}{1}$$
$$= 2\sqrt{t}+\frac{1}{t}$$

1.(b) $x=\dfrac{3at}{1+t^3}\cdots\cdots(1),\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\cdots(2)$

$(2)\div(1) \Rightarrow \dfrac{y}{x}=t$

(1) হতে পাই, $x=\dfrac{3a\dfrac{y}{x}}{1+(\dfrac{y}{x})^3}=\dfrac{3ay}{x}\times\dfrac{x^3}{x^3+y^3}$

$\Rightarrow x=\dfrac{3ax^2y}{x^3+y^3}\Rightarrow x^3+y^3=3axy$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$3x^2+3y^2\dfrac{dy}{dx}=3a(x\dfrac{dy}{dx}+y)$

$\Rightarrow (y^2-ax)\dfrac{dy}{dx}=ay-x^2 \ \therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$

1(c) $x=a(\cos\phi+\phi\sin\phi)$, $y=a(\sin\phi-\phi\cos\phi)$

$\dfrac{dx}{d\phi}=\dfrac{d}{d\phi}\{a(\cos\phi+\phi\sin\phi)\}$

$=a(-\sin\phi+\phi\cos\phi+\sin\phi)=a\phi\cos\phi$

$\dfrac{dy}{d\phi}=\dfrac{d}{d\phi}\{a(\sin\phi-\phi\cos\phi)\}$

$=a(\cos\phi+\phi\sin\phi-\cos\phi)=a\phi\sin\phi$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{d\phi}}{\dfrac{dx}{d\phi}}=\dfrac{a\phi\sin\phi}{a\phi\cos\phi}=\tan\phi$

1(d) $x=\sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$, $y=\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{a^{\sin^{-1}t}}}a^{\sin^{-1}t}\ln a\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$=\dfrac{\ln a\sqrt{a^{\sin^{-1}t}}}{2\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{x\ln a}{2\sqrt{1-t^2}}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}(\sqrt{a^{\cos^{-1}t}})$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}}a^{\cos^{-1}t}\ln a\dfrac{1}{-\sqrt{1-t^2}}$

$=-\dfrac{\ln a\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}}{2\sqrt{1-t^2}}=-\dfrac{y\ln a}{2\sqrt{1-t^2}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\times\dfrac{dt}{dx}=-\dfrac{y\ln a}{2\sqrt{1-t^2}}\times\dfrac{2\sqrt{1-t^2}}{x\ln a}$

$=-\dfrac{y}{x}$

2. (a) $x^{\frac{1}{x}}$ [ব.'০৪; চ.'১৩;সি.'০৭,'০৯; ঢা., য.'০৮]

$\dfrac{d}{dx}(x^{\frac{1}{x}})=x^{\frac{1}{x}}[\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\dfrac{d}{dx}(\dfrac{1}{x})]$

$[\quad \dfrac{d}{dx}(u^v)=u^v\{v\dfrac{d}{dx}(\ln u)+\ln u\dfrac{dv}{dx}\}]$

$=x^{\frac{1}{x}}[\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{x}+\ln x\dfrac{d}{dx}(x^{-1})]$

$=x^{\frac{1}{x}}[\dfrac{1}{x^2}+\ln x.(-x^{-2})]=x^{\frac{1}{x}}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln x}{x^2})$

$=x^{\frac{1}{x}}.\dfrac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$ (Ans.)

2. (b) $\dfrac{d}{dx}(1+x)^x$ [ব.'১৩]

$=(1+x)^x[x\dfrac{d}{dx}\{\ln(1+x)\}+\ln(1+x)\dfrac{d}{dx}(x)]$

$[\because \dfrac{d}{dx}(u^v)=u^v\{v\dfrac{d}{dx}(\ln u)+\ln u\dfrac{dv}{dx}\}]$

$=(1+x)^x[x\dfrac{1}{1+x}+\ln(1+x).1]$

$=(1+x)^x\{\dfrac{x}{1+x}+\ln(1+x)\}$

2(c) $(1+x^2)^{2x}$ [য.'০৬]

$\dfrac{d}{dx}\{(1+x^2)^{2x}\}=(1+x^2)^{2x}$

$[2x\dfrac{d}{dx}\{\ln(1+x^2)\}+\ln(1+x^2)\dfrac{d}{dx}(2x)]$

$=(1+x^2)^{2x}[\dfrac{2x}{1+x^2}(2x)+\ln(1+x^2).(2)]$

$=2(1+x^2)^{2x}[\dfrac{2x^2}{1+x^2}+\ln(1+x^2)]$

2(d) $(1+x^2)^{x^2}$ [সি.'০১]

$\dfrac{d}{dx}(1+x^2)^{x^2}=(1+x^2)^{x^2}$

$[x^2 \frac{d}{dx}\{\ln(1+x^2)\} + \ln(1+x^2)\frac{d}{dx}(x^2)]$

$= (1+x^2)^{x^2}[\frac{x^2}{1+x^2}(2x) + \ln(1+x^2).(2x)]$

$= 2x(1+x^2)^{x^2}[\frac{x^2}{1+x^2} + \ln(1+x^2)]$

2(e) $(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$ [ব.'১২;চ.'১০; কু.'১১; প্র.ভ.প.'০৫]

$\frac{d}{dx}\{(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\}$

$= (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}[\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x}) + \ln\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})]$

$= (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}[\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}} + \ln\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}]$

$= (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}[\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\sqrt{x}]$

$= (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}[\frac{1+\ln\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}]$ (Ans.)

2(f) ধরি, $y = x^{\ln x}$ [রা.'০২; কু.'০৮; সি.'১১]

$\frac{dy}{dx} = x^{\ln x}[\ln x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(\ln x)]$

$[\ \frac{d}{dx}(u^v) = u^v[v\frac{d}{dx}(\ln u) + \ln u\frac{dv}{dx}]$

$= x^{\ln x}\ [2\ln x.\frac{1}{x}] = \frac{2\ln x}{x}x^{\ln x}$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(x^{\ln x}) = \frac{2\ln x}{x}x^{\ln x}$

2(g) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)^x = (\sin^{-1}x)^x$

$[x\frac{d}{dx}\{\ln(\sin^{-1}x)\} + \ln(\sin^{-1}x)\frac{d}{dx}(x)]$

$= (\sin^{-1}x)^x[x\frac{1}{\sin^{-1}x.}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \ln(\sin^{-1}x).1]$

$= (\sin^{-1}x)^x[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x.} + \ln(\sin^{-1}x)]$

2(h) $\frac{d}{dx}(\sin x)^x$ [য.'০৭]

$= (\sin x)^x[x\frac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\} + \ln(\sin x)\frac{d}{dx}(x)]$

$= (\sin x)^x[x\frac{1}{\sin x}.\cos x + \ln(\sin x).1]$

$= (\sin x)^x[x\cot x + \ln(\sin x)]$

2(i) $\frac{d}{dx}(lnx)^x$

$= (lnx)^x[x\frac{d}{dx}\{\ln(\ln x)\} + \ln(\ln x)\frac{d}{dx}(x)]$

$= (lnx)^x[x\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x} + \ln(\ln x).1]$

$= (lnx)^x[\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)]$

2 (j) $\frac{d}{dx}(\log x)^x = (\log x)^x$

$[x\frac{d}{dx}\{\ln(\log x)\} + \ln(\log x)\frac{d}{dx}(x)]$

$= (\log x)^x[x\frac{1}{\log x}.\frac{1}{x\ln 10} + \ln(\log x).1]$

$= (\log x)^x[\frac{1}{\ln 10\log x} + \ln(\log x)]$

2(k) $x^{\cos^{-1}x}$ [কু.'১০,'১৩; সি. ' ০৬,'০৮; ঢা. '১০, '১৩; রা. '০৫, '০৭; ব.'০৬,'১০; দি.'০৯; য.'১০]

$\frac{d}{dx}(x^{\cos^{-1}x})$

$= x^{\cos^{-1}x}[\cos^{-1}x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)]$

$= x^{\cos^{-1}x}[\cos^{-1}x.\frac{1}{x} + \ln x\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}]$

$= x^{\cos^{-1}x}[\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}]$

2(*l*) $\frac{d}{dx}(x^{-1/x})$ [বুয়েট''০৭]

$= x^{-1/x}[-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(-\frac{1}{x})]$

$= x^{-1/x}[-\frac{1}{x}.\frac{1}{x} + \ln x\{-(-\frac{1}{x^2})\}]$

$$= x^{-1/x} \times \frac{1}{x^2} (\ln x - 1) = \frac{1}{x^{2+1/x}} (\ln x - 1)$$

3(a) $\frac{d}{dx}(e^{x^x}) = e^{x^x} \frac{d}{dx}(x^x)$

$= e^{x^x} x^x [x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x)]$

$= e^{x^x} . x^x \{x.\frac{1}{x} + \ln x.1\}$

$= e^{x^x} . x^x (1 + \ln x)$

3(b) $\frac{d}{dx}(x^{e^x})$

$= x^{e^x} [e^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(e^x)]$

$= x^{e^x} [e^x \frac{1}{x} + \ln x.e^x]$

$= x^{e^x} e^x (\frac{1}{x} + \ln x)$

(c) $\frac{d}{dx}(a^{a^x})$ [দি.'১২]

$= a^{a^x} .lna. \frac{d}{dx}(a^x)$

$= a^{a^x} lna. a^x . lna = a^{a^x} a^x (lna)^2$

3(d) $(\cot x)^{\tan x}$ [চ.'০৫; ব., দি.'০৯; য.'১২]

$\frac{d}{dx}(\cot x)^{\tan x} = (\cot x)^{\tan x}$

$[\tan x \frac{d}{dx}\{\ln(\cot x)\} + \ln(\cot x) \frac{d}{dx}(\tan x)]$

$= (\cot x)^{\tan x} [\frac{\tan x}{\cot x}(-\cos ec^2 x) +$

$\ln(\cot x).(\sec^2 x)]$

$= (\cot x)^{\tan x} [-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\frac{1}{\sin^2 x} +$

$\ln(\cot x).(\sec^2 x)]$

$= (\cot x)^{\tan x} [-\sec^2 x + \ln(\cot x).(\sec^2 x)]$

$= (\cot x)^{\tan x} . \sec^2 x [\ln(\cot x) - 1]$

4. (a) x^{x^x} [রা.'০৬,'০৮; য.'১১; প্র.ভ.প.'০৫]

$\frac{d}{dx}(x^{x^x}) = x^{x^x} [x^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x^x)]$

$= x^{x^x} [x^x.\frac{1}{x} + \ln x. x^x \{x \frac{d}{dx}(\ln x) +$

$\ln x \frac{d}{dx}(x)\}]$

$= x^{x^x} \quad x^x [\frac{1}{x} + \ln x. \{x.\frac{1}{x} + \ln x.1\}]$

$= x^{x^x} . x^x [\frac{1}{x} + \ln x.(1 + \ln x\}]$

4(b) $(x^x)^x$ [য.,মা.'০৯; কু.'০৫; ঢা.,ব.,দি.'১১; রা.'১২]

$(x^x)^x = x^{x^2}$

$\frac{d}{dx}(x^x)^x = x^{x^2} [x^2 \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x^2)]$

$= x^{x^2} [x^2.\frac{1}{x} + \ln x.(2x)]$

$= x^{x^2} [x + 2x \ln x] = (x^x)^x . x[1 + 2\ln x]$

4(c) $\frac{d}{dx}(\sec x)^{x^x} = (\sec x)^{x^x}$

$[x^x \frac{d}{dx}\{\ln(\sec x)\} + \ln(\sec x) \frac{d}{dx}(x^x)]$

$= (\sec x)^{x^x} [x^x \frac{1}{\sec x}.\sec x \tan x +$

$\ln(\sec x) .x^x \{x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x)\}]$

$= (\sec x)^{x^x} . x^x [\tan x + \ln(\sec x)\{x.\frac{1}{x} + \ln x.1\}]$

$= (\sec x)^{x^x} . x^x [\tan x + (1 + \ln x) \ln(\sec x)]$

5.(a) $\frac{d}{dx}(x^x ln\, x)$ [কু. '০৪; দি.'১০; ব.'১২]

$= x^x \frac{d}{dx}(lnx) + lnx \frac{d}{dx}(x^x)$

$= x^x . \frac{1}{x} + lnx. \ x^x \{ x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x)\}$

$= x^x [\frac{1}{x} + lnx. \{ x.\frac{1}{x} + \ln x.1\}]$

$= x^x \{ \frac{1}{x} + lnx. (1 + \ln x)\}$

$= x^{-1/x} \times \frac{1}{x^2}(\ln x - 1) = \frac{1}{x^{2+1/x}}(\ln x - 1)$

3(a) $\frac{d}{dx}(e^{x^x}) = e^{x^x}\frac{d}{dx}(x^x)$

$= e^{x^x} x^x[x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x)]$

$= e^{x^x}.x^x\{x.\frac{1}{x} + \ln x.1\}$

$= e^{x^x}.x^x(1+\ln x)$

3(b) $\frac{d}{dx}(x^{e^x})$

$= x^{e^x}[e^x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(e^x)]$

$= x^{e^x}[e^x\frac{1}{x} + \ln x.e^x]$

$= x^{e^x} e^x(\frac{1}{x} + \ln x)$

(c) $\frac{d}{dx}(a^{a^x})$ [দি.'১২]

$= a^{a^x}.lna.\frac{d}{dx}(a^x)$

$= a^{a^x} lna.a^x.lna = a^{a^x} a^x(lna)^2$

3(d) $(\cot x)^{\tan x}$ [চ.'০৫; ব., দি.'০৯; য.'১২]

$\frac{d}{dx}(\cot x)^{\tan x} = (\cot x)^{\tan x}$

$[\tan x\frac{d}{dx}\{\ln(\cot x)\} + \ln(\cot x)\frac{d}{dx}(\tan x)]$

$= (\cot x)^{\tan x}[\frac{\tan x}{\cot x}(-\operatorname{cosec}^2 x) +$

$\ln(\cot x).(\sec^2 x)]$

$= (\cot x)^{\tan x}[-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\frac{1}{\sin^2 x} +$

$\ln(\cot x).(\sec^2 x)]$

$= (\cot x)^{\tan x}[-\sec^2 x + \ln(\cot x).(\sec^2 x)]$

$= (\cot x)^{\tan x}.\sec^2 x[\ln(\cot x) - 1]$

4. (a) x^{x^x} [রা.'০৬,'০৮; য.'১১; প্র.ভ.প.'০৫]

$\frac{d}{dx}(x^{x^x}) = x^{x^x}[x^x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x^x)]$

$= x^{x^x}[x^x.\frac{1}{x} + \ln x.x^x\{x\frac{d}{dx}(\ln x) +$

$\ln x\frac{d}{dx}(x)\}]$

$= x^{x^x} \quad x^x[\frac{1}{x} + \ln x.\{x.\frac{1}{x} + \ln x.1\}]$

$= x^{x^x}.x^x[\frac{1}{x} + \ln x.(1+\ln x\}]$

4(b) $(x^x)^x$ [য.,মা.'০৯; কু.'০৫; ঢা.,ব.,দি.'১১; রা.'১২]

$(x^x)^x = x^{x^2}$

$\frac{d}{dx}(x^x)^x = x^{x^2}[x^2\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x^2)]$

$= x^{x^2}[x^2.\frac{1}{x} + \ln x.(2x)]$

$= x^{x^2}[x + 2x\ln x] = (x^x)^x.x[1+2\ln x]$

4(c) $\frac{d}{dx}(\sec x)^{x^x} = (\sec x)^{x^x}$

$[x^x\frac{d}{dx}\{\ln(\sec x)\} + \ln(\sec x)\frac{d}{dx}(x^x)]$

$= (\sec x)^{x^x}[x^x\frac{1}{\sec x}.\sec x\tan x +$

$\ln(\sec x).x^x\{x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x)\}]$

$= (\sec x)^{x^x}.x^x[\tan x + \ln(\sec x)\{x.\frac{1}{x} + \ln x.1\}]$

$= (\sec x)^{x^x}.x^x[\tan x + (1+\ln x)\ln(\sec x)]$

5.(a) $\frac{d}{dx}(x^x ln x)$ [কু. '০৪; দি.'১০; ব.'১২]

$= x^x\frac{d}{dx}(lnx) + lnx\frac{d}{dx}(x^x)$

$= x^x.\frac{1}{x} + lnx.\ x^x\{x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x)\}$

$= x^x[\frac{1}{x} + lnx.\ \{x.\frac{1}{x} + \ln x.1\}]$

$= x^x\{\frac{1}{x} + lnx.\ (1+\ln x)\}$

5(b) $\frac{d}{dx}(ax)^{bx}$

$= (ax)^{bx}[\,bx\frac{d}{dx}\{\ln(ax)\} + \ln(ax)\frac{d}{dx}(bx)]$

$= (ax)^{bx}[\,bx.\frac{1}{ax}.a + \ln(ax).b]$

$= (ax)^{bx}.\text{b}\,[\,1 + ln\,(ax)\,]$

5(c) ধরি, y = $(xe^x)^{\sin x}$

$\ln y = \ln(xe^x)^{\sin x} = \sin x\,(\ln x + \ln e^x)$

$= \sin x\,(\ln x + x)$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x\,(\frac{1}{x}+1) + (\ln x + x)\cos x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y[(\frac{1}{x}+1)\,\sin x + (\ln x + x)\cos x]$

$= (xe^x)^{\sin x}[\sin x.(\frac{1}{x}+1) + (\ln x + x)\cos x]$

5(d) $\frac{d}{dx}(e^{x^2} + x^{x^2})$ [ঢা.'০৬,'১২]

$= \frac{d}{dx}(e^{x^2}) + \frac{d}{dx}(x^{x^2})$

$= e^{x^2}(2x) + x^{x^2}[x^2\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x^2)]$

$= 2x\,e^{x^2} + x^{x^2}[\frac{x^2}{x} + \ln x.(2x)]$

$= 2x\,e^{x^2} + x^{x^2}[x + 2x\ln x]$

5(e) $\frac{d}{dx}\{(\tan x)^x + x^{\tan x}\}$

$= \frac{d}{dx}(\tan x)^x + \frac{d}{dx}(x^{\tan x})$

$= (\tan x)^x[x\frac{d}{dx}\{\ln(\tan x)\} + \ln(\tan x)\frac{d}{dx}(x)]$

$+ x^{\tan x}[\tan x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(\tan x)]$

$= (\tan x)^x[x\frac{1}{\tan x}.\sec^2 x + \ln(\tan x).1]$

$+ x^{\tan x}[\tan x.\frac{1}{x} + \ln x.\sec^2 x]$

$= (\tan x)^x[x\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\cos^2 x} + \ln(\tan x)]$

$+ x^{\tan x}[\frac{1}{x}\tan x + \sec^2 x\ln x]$

$= (\tan x)^x[2x\,\mathrm{cosec}\,2x + \ln(\tan x)]$

$+ x^{\tan x}[\frac{1}{x}\tan x + \sec^2 x\ln x]$

5.(f) $\frac{d}{dx}(x^{\ln x} + x^{\log x})$

$= \frac{d}{dx}(x^{\ln x}) + \frac{d}{dx}(x^{\ln x})$

$= x^{\ln x}[\ln x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(\ln x)]$

$+ x^{\log x}[\log x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(\log x)]$

$= x^{\ln x}\,2\ln x.\frac{1}{x} + x^{\log x}[\log x.\frac{1}{x} + \ln x.\frac{1}{x\ln 10}]$

$= \frac{2\ln x}{x}.x^{\ln x} + x^{\log x}[\frac{\log x}{x} + \frac{\ln x}{x\ln 10}]$

5(g) $\frac{d}{dx}\{(\ln x)^x + (\log x)^x\}$

$= \frac{d}{dx}(\ln x)^x + \frac{d}{dx}(\log x)^x$

$= (\ln x)^x[x\frac{d}{dx}\{\ln(\ln x)\} + \ln(\ln x)\frac{d}{dx}(x)] +$

$(\log x)^x[x\frac{d}{dx}\{\ln(\log x)\} + \ln(\log x)\frac{d}{dx}(x)]$

$= (\ln x)^x[x\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x} + \ln(\ln x).1] +$

$(\log x)^x[x\frac{1}{\log x}.\frac{1}{x\ln 10} + \ln(\log x).1]$

$= (\ln x)^x[\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)] +$

$(\log x)^x[\frac{1}{\ln 10\log x} + \ln(\log x)]$

5(h) $\frac{d}{dx}\{(\tan x)^{\cot x} + (\cot x)^{\tan x}\}$

$= \frac{d}{dx}(\tan x)^{\cot x} + \frac{d}{dx}(\cot x)^{\tan x}$

$= (\tan x)^{\cot x}[\cot x \frac{d}{dx}\{\ln(\tan x)\} + \ln(\tan x)$

$\frac{d}{dx}(\cot x)] + (\cot x)^{\tan x}\ [\tan x \frac{d}{dx}\{\ln(\cot x)\}$

$+ \ln(\cot x)\frac{d}{dx}(\tan x)]$

$= (\tan x)^{\cot x}[\frac{\cot x}{\tan x}\sec^2 x + \ln(\tan x).$

$(-\operatorname{cosec}^2 x)] + (\cot x)^{\tan x}\ [\frac{\tan x}{\cot x}$

$(-\operatorname{cosec}^2 x) + \ln(\cot x).(\sec^2 x)]$

$= (\tan x)^{\cot x}[\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\frac{1}{\cos^2 x} - \ln(\tan x).$

$\operatorname{cosec}^2 x] + (\cot x)^{\tan x}[-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\frac{1}{\sin^2 x}$

$+ \ln(\cot x).(\sec^2 x)]$

$= (\tan x)^{\cot x}.\operatorname{cosec}^2 x[1 - \ln(\tan x)]$

$+ (\cot x)^{\tan x}.\sec^2 x\ [\ln(\cot x) - 1]$

5(i) $\frac{d}{dx}(x^x \log x)$ [চ.'১২]

$= x^x \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(x^x)$

$= x^x \frac{1}{x\ln 10} + \log x\,[x^x\{x\frac{d}{dx}(\ln x)$

$+ \ln x\frac{d}{dx}(x)\}]$

$= \frac{x^x}{x\ln 10} + x^x \log x\{x\frac{1}{x} + \ln x\}$

$= \frac{x^x}{x\ln 10} + x^x \log x\{1 + \ln x\}$

প্রশ্নমালা IX H

1. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর ঃ

(a) $x^a y^b = (x-y)^{a+b}$ [প্র.ভ.প. '০৬]

$\ln(x^a y^b) = \ln(x-y)^{a+b}$

$\Rightarrow \ln(x^a) + \ln(y^b) = (a+b)\ln(x-y)$

$\Rightarrow a\ln x + b\ln y = (a+b)\ln(x-y)$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$a.\frac{1}{x} + b.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (a+b)\frac{1}{x-y}(1-\frac{dy}{dx})$

or, $(\frac{b}{y} + \frac{a+b}{x-y})\frac{dy}{dx} = \frac{a+b}{x-y} - \frac{a}{x}$

or, $\frac{bx-by+ay+by}{y(x-y)}.\frac{dy}{dx} = \frac{ax+bx-ax+ay}{x(x-y)}$

or, $\frac{bx+ay}{y(x-y)}.\frac{dy}{dx} = \frac{bx+ay}{x(x-y)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

1(b) $y = \sin(x+y)^2$ [রা.'০৪; কু.'০৭; য.'১১]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y)^2\frac{d}{dx}(x+y)^2$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x+y)^2.2(x+y)(1+\frac{dy}{dx})$

$\Rightarrow \{1 - 2(x+y)\cos(x+y)^2\}\frac{dy}{dx}$

$= 2(x+y)\cos(x+y)^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+y)\cos(x+y)^2}{1-2(x+y)\cos(x+y)^2}$

1(c) $x + y = \sin^{-1}(y/x)$

$\Rightarrow \sin(x+y) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\sin(x+y)$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = x\cos(x+y)(1+\frac{dy}{dx}) + \sin(x+y)$

$\Rightarrow \{1 - x\cos(x+y)\}\frac{dy}{dx} = x\cos(x+y) +$

$\sin(x+y)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x\cos(x+y) + \sin(x+y)}{1 - x\cos(x+y)}$

1. (d) $x^2 = 5y^2 + \sin y$ [প্র.ভ.প.'০৬]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x = 10y\frac{dy}{dx} + \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y + \cos y} \text{ (Ans.)}$$

1(e) $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ [প্র.ভ.প.'০৩]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(\cos x)^y [\, y\frac{d}{dx}\{\ln(\cos x)\} + \ln(\cos x)\frac{dy}{dx}]$$

$$= (\sin y)^x \;[\, x\frac{d}{dx}\{\ln(\sin y)\} + \ln(\sin y)\frac{d}{dx}(x)]$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\cos x}(-\sin x) + \ln(\cos x)\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{x}{\sin y}(\cos y)\frac{dy}{dx} + \ln(\sin y).1$$

$$[\because (\cos x)^y = (\sin y)^x\,]$$

$$\Rightarrow \{\ln(\cos x) - x\cot y\}\frac{dy}{dx} = \ln(\sin y) + y\tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(\sin y) + y\tan x}{\ln(\cos x) - x\cot y}$$

1(f) $\sqrt{x/y} + \sqrt{y/x} = 1$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x + y = \sqrt{xy}$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}(x\frac{dy}{dx} + y.1)$$

$$\Rightarrow (1 - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}})\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{y} - \sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y} - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}(\sqrt{y} - 2\sqrt{x})}{\sqrt{x}(2\sqrt{y} - \sqrt{x})} \text{ (Ans.)}$$

2. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর ঃ

2(a) $x^y = e^{x-y}$ [য.বো.'০৫]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$x^y[\, y\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{dy}{dx}] = e^{x-y}(1 - \frac{dy}{dx})$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \quad [\quad x^y = e^{x-y}\,]$$

$$\Rightarrow (1 + \ln x)\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x} = \frac{x-y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x(1+\ln x)}$$

2(b) $y + x = x^{-y}$ [রা.'১১; য.'১৩; প্র.ভ.প. '১৫]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} + 1 = x^{-y}\,[-y\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(-y)]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + 1 = x^{-y}\,[\frac{-y}{x} - \ln x\frac{dy}{dx}]$$

$$\Rightarrow (\,1 + x^{-y}\; ln\, x\,)\frac{dy}{dx} = -1 - y.\,x^{-y-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + yx^{-y-1}}{1 + x^{-y}\ln x} \text{ (Ans.)}$$

2(c) $x^y + y^x = 1$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$x^y[\, y\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{dy}{dx}] +$$

$$y^x[x\frac{d}{dx}(\ln y) + \ln y\frac{d}{dx}(x)] = 0$$

$$\Rightarrow x^y[\frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx}] + y^x[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \ln y.1] = 0$$

$$\Rightarrow (x^y\ln x + xy^{x-1})\frac{dy}{dx} = -\,(\,x^{y-1}y + y^x\ln y\,)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{y-1}y + y^x\ln y}{x^y\ln x + xy^{x-1}}$$

2(d) $x^p y^p = (x+y)^{p+q}$

$$p\ln x + q\ln y = (p+q)\ln(x+y)$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y}(1 + \frac{dy}{dx})$$

$$\Rightarrow (\frac{q}{y} - \frac{p+q}{x+y})\frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y} - \frac{p}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{qx+qy-py-qy}{y(x+y)}\frac{dy}{dx} = \frac{px+qx-px-py}{(x+y)x}$$

$$\Rightarrow \frac{qx-py}{y(x+y)}\frac{dy}{dx} = \frac{qx-py}{(x+y)x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \text{ (Ans.)}$$

2(e) $y = x^{y^x} \therefore \ln y = y^x \ln x \cdots (1)$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(y^x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y^x \frac{1}{x} + \ln x \,.\, y^x \{\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \ln y\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\ln y}{x \ln x} + \ln y \{\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \ln y\}$$

[(1) দ্বারা]

$$\Rightarrow (\frac{1}{y} - \frac{x}{y}\ln y)\frac{dy}{dx} = \ln y(\frac{1}{x\ln x} + \ln y)$$

$$\Rightarrow (\frac{1 - x\ln y}{y})\frac{dy}{dx} = \ln y(\frac{1 + x\ln x \ln y}{x \ln x})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\ln y(1 + x\ln x\ln y)}{x\ln x(1 - x\ln y)}$$

(f) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x.......\infty}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x.......\infty}}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{xy} \Rightarrow y^2 = xy \Rightarrow y = x$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = 1 \text{ (Ans.)}$$

2.(g) $\ln(xy) = x + y$ **[রা.'০৫; কু. '০৬]**

$\Rightarrow \ln x + \ln y = x + y$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y + x\frac{dy}{dx} = xy + xy\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow x(1-y)\frac{dy}{dx} = y(x-1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)} \text{ (Ans.)}$$

2(h) $\log(x^n y^n) = x^n + y^n$ **[বুয়েট ০৭-০৮]**

$\Rightarrow n\log x + n\log y = x^n + y^n$

$\Rightarrow n \log_{10} e \times \log_e x + n\log_{10} e \times \log_e y = x^n + y^n$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$n\frac{\log_{10} e}{x} + n\frac{\log_{10} e}{y}\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} + ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow (\frac{\log_{10} e}{y} - y^{n-1})\frac{dy}{dx} = x^{n-1} - \frac{\log_{10} e}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\log_{10} e - y^n}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x^n - \log_{10} e}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x^n - \log_{10} e)}{x(\log_{10} e - y^n)}$$

3. (a) $\tan y = \sin x$ **হলে, দেখাও যে,**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$ **[প্র.ভ.প.'৮৪]**

প্রমাণ : $\tan y = \sin x$

$\Rightarrow y = \tan^{-1}\sin x$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1}\tan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2})}{(\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}.1 - x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2}$$

$$= \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

3(b) $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0$ **হলে, দেখাও যে,** $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(1+x)^2}$ **[প্র.ভ.প. '০২, '০৪]**

প্রমাণ : $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0$

$\Rightarrow x\sqrt{1+y}=-y\sqrt{1+x}$

$\Rightarrow x^2(1+y)=y^2(1+x)$ [বর্গ করে।]

$\Rightarrow x^2+x^2y=y^2+xy^2$

$\Rightarrow x^2-y^2+xy(x-y)=0$

$\Rightarrow (x-y)(x+y+xy)=0$

$x+y+xy=0$ হলে, $(1+x)\,y=-x$

$\Rightarrow y=\frac{-x}{1+x}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{(1+x)(-1)+x(1)}{(1+x)^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1-x+x}{(1+x)^2}=-\frac{1}{(1+x)^2}$

3.(c) $x=a(t-\sin t)$ **এবং** $y=a(1+\cos t)$ **হলে, দেখাও যে,** $t=\frac{5\pi}{3}$ **যখন** $\frac{dy}{dx}=\sqrt{3}$.

[প্র.ভ.প. '৮৫]

প্রমাণ : $\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$, $\frac{dy}{dt}=a(0-\sin t)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{-a\sin t}{a(1-\cos t)}$$

$$=\frac{-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=-\cot\frac{t}{2}$$

এখন, $\frac{dy}{dx}=\sqrt{3}$ হলে, $\cot\frac{t}{2}=-\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\frac{t}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\tan\frac{\pi}{6}=\tan(\pi-\frac{\pi}{6})$

$\Rightarrow \tan\frac{t}{2}=\tan\frac{5\pi}{6}$ $\quad \frac{t}{2}=\frac{5\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{5\pi}{3}$

3(d) $f(x)=\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$ **হলে, প্রমাণ কর যে,**

$$f'(0)=(2\ln\frac{a}{b}+\frac{b^2-a^2}{ab})(\frac{a}{b})^{a+b}$$

প্রমাণ: $f(x)=\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$ $\quad f(0)=(\frac{a}{b})^{a+b}$

এবং $\ln\{f(x)\}=$

$(a+b+2x)\{\ln(a+x)-\ln(b+x)\}$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{f(x)}f'(x)=(a+b+2x)\{\frac{1}{a+x}-\frac{1}{b+x}\}+\{\ln(a+x)-\ln(b+x)\}2$$

$$f'(0)=f(0)\,[(a+b)(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})+2(\ln a-\ln b)]$$

$$\Rightarrow f'(0)=(\frac{a}{b})^{a+b}[(a+b)(\frac{b-a}{ab})+2\ln\frac{a}{b}]$$

$$f'(0)=(2\ln\frac{a}{b}+\frac{b^2-a^2}{ab})(\frac{a}{b})^{a+b}$$

(e) $y=\sqrt{\cos x+\sqrt{\cos x+\sqrt{\cos x\ldots\ldots\infty}}}$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $(2y-1)\frac{dy}{dx}+\sin x=0$.

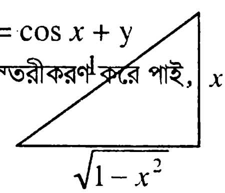
প্রমাণ : $y=\sqrt{\cos x+\sqrt{\cos x+\sqrt{\cos x\ldots\ldots\infty}}}$

$\Rightarrow y=\sqrt{\cos x+\sqrt{\cos x+\sqrt{\cos x+\sqrt{\cos x\cdots\infty}}}}$

$\Rightarrow y=\sqrt{\cos x+y}\Rightarrow y^2=\cos x+y$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2y\frac{dy}{dx}=-\sin x+\frac{dy}{dx}$



$\Rightarrow (2y-1)\frac{dy}{dx}+\sin x=0$

3(f) $x^{y}=y^{x^n}$ **হলে দেখাও যে,**

$\frac{dy}{dx}=\frac{y^{n+1}(n\ln x-1)}{x^{n+1}(n\ln y-1)}$ **[বুয়েট ০৮−০৯]**

প্রমাণ : $x^{y}=y^{x^n}$ $\therefore y^n\ln x=x^n\ln y\cdots(1)$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{y^n}{x}+\ln x.(ny^{n-1})\frac{dy}{dx}=\frac{x^n}{y}\frac{dy}{dx}+\ln y.nx^{n-1}$$

$$\Rightarrow y^{n+1}+x\ln x.ny^n\frac{dy}{dx}=x^{n+1}\frac{dy}{dx}+y\ln y.nx^n$$

$$\Rightarrow (nx\ln x.y^n - x^{n+1})\frac{dy}{dx} = y\ln y.nx^n - y^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{nyx^n \ln y - y^{n+1}}{nxy^n \ln x - x^{n+1}}$$

$$= \frac{ny.y^n \ln x - y^{n+1}}{nx.x^n \ln y - x^{n+1}} \quad [(1) \text{ দ্বারা }]$$

$$= \frac{y^{n+1}(n\ln x - 1)}{x^{n+1}(n\ln y - 1)}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

1. $\frac{d}{dx}(5x^3 + 3x^2 - 4x - 9)$

$= 5\frac{d}{dx}(x^3) + 3\frac{d}{dx}(x^2) - 4\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(9)$

$= 5(3x^2) + 3(2x) - 4 - 0$

$= 15x^2 + 6x - 4$ (Ans.)

2. $\frac{d}{dx}(2x^3 - 4x^{\frac{5}{2}} + \frac{7}{2}x^{-\frac{2}{3}} + 7)$

$= 2(3x^2) - 4(\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}) + \frac{7}{2}(-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}) + 0$

$= 6x^2 - 10x^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{3}x^{-\frac{5}{3}}$ (Ans.)

3(a) মূল নিয়মে $x = 2$ -তে $\sqrt[3]{x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$\therefore f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^{1/3} - 2^{1/3}}{x-2}$

$= \frac{1}{3}\times 2^{\frac{1}{3}-1} \quad [\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}]$

$= \frac{1}{3}\times 2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\times 4^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

3(b) মূল নিয়মে $x = a$ -তে $\cos^2 x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = \cos^2 x.$ $\quad f(a) = \cos^2 a$

$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a}\frac{\cos^2 x - \cos^2 a}{x-a}$

$= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x+a)\sin(a-x)}{x-a}$

$[\because \cos^2 B - \cos^2 A = \sin(A+B)\sin(A-B)]$

$= -\lim_{x-a\to 0}\frac{\sin(x-a)}{x-a}.\lim_{x\to a}\sin(x+a)$

$= -1.\sin(a+a) = -\sin 2a$ (Ans.)

4. $(2x)^n - b^n$ **[চ.'০২]**

$(2x)^n - b^n = 2^n x^n - b^n$

$\therefore \frac{d}{dx}\{(2x)^n - b^n\} = 2^n\frac{d}{dx}(x^n) - \frac{d}{dx}(b^n)$

$= 2^n n x^{n-1} - 0 = 2^n n x^{n-1}$

5(a) $x^2\log_a x + 7e^x\cos x$ **[সি.'০৪]**

$\frac{d}{dx}(x^2\log_a x + 7e^x\cos x) = x^2\frac{d}{dx}(\log_a x)$

$+ \log_a x\frac{d}{dx}(x^2) + 7\{e^x\frac{d}{dx}(\cos x) +$

$\cos x\frac{d}{dx}(e^x)\}$

$= x^2\frac{1}{x\ln a} + \log_a x(2x) +$

$7\{e^x(-\sin x) + \cos x.e^x\}$

$= x(\frac{1}{\ln a} + 2\log_a x) + 7e^x(\cos x - \sin x)$

5(b) $\sin^2 2x + e^{2\ln(\cos 2x)}$ **[প্র.ভ.প.'৯৩]**

$\sin^2 2x + e^{2\ln(\cos 2x)} = \sin^2 2x + e^{\ln(\cos 2x)^2}$

$= \sin^2 2x + (\cos 2x)^2$

$= \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$

$\frac{d}{dx}\{\sin^2 2x + e^{2\ln(\cos 2x)}\} = \frac{d}{dx}(1) = 0$

5(c) $5e^x \ln x$ **[য.'০৪]**

মনে করি, $y = 5e^x \ln x$

$$\frac{dy}{dx} = 5\{\, e^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(e^x)\,\}$$

$$= 5\{e^x.\frac{1}{x} + \ln x\,(e^x)\}$$

$$\frac{d}{dx}(5e^x \ln x) = 5e^x(\frac{1}{x} + \ln x)$$

6.(a) $\frac{d}{dx}(\frac{x^n + \tan x}{e^x - \cot x}) =$

$$\frac{(e^x - \cot x)\frac{d}{dx}(x^n + \tan x) - (x^n + \tan x)\frac{d}{dx}(e^x - \cot x)}{(e^x - \cot x)^2}$$

$$= \frac{(e^x - \cot x)(nx^{n-1} + \sec^2 x) - (x^n + \tan x)\frac{d}{dx}(e^x + \operatorname{cosec}^2 x)}{(e^x - \cot x)^2}$$

6(b) $\frac{d}{dx}(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x})$

$$= \frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(1-\cos x) - (1-\cos x)\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{(1+\cos x)(\sin x) - (1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x(1+\cos x+1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

6(c) $\frac{x\sin x}{x+\cos x}$ **[রা.'০০]**

$$\frac{d}{dx}(\frac{x\sin x}{x+\cos x}) = \frac{1}{(x+\cos x)^2}[(x+\cos x)$$

$$\frac{d}{dx}(x\sin x) - x\sin x\frac{d}{dx}(x+\cos x)]$$

$$= \frac{1}{(x+\cos x)^2}[(x+\cos x)(x\cos x + \sin x.1)$$

$$- x\sin x\,(1 - \sin x)]$$

$$= \frac{1}{(x+\cos x)^2}[(x^2\cos x + x\sin x + x\cos^2 x +$$

$$\cos x\sin x - x\sin x + x\sin^2 x\,]$$

$$= \frac{x(\sin^2 x + \cos^2 x) + x^2\cos x + \cos x\sin x}{(x+\cos x)^2}$$

$$= \frac{x + (x^2 + \sin x)\cos x}{(x+\cos x)^2} \text{ (Ans.)}$$

6.(d) $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ **[সি.'০১]**

$$\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}$$

$$= 1 - \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}) = \sin x$$

6(e) $\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$ **[য.'০৯]**

$$\frac{d}{dx}(\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}) =$$

$$\frac{(1+\sin^2 x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}(1+\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{(1+\sin^2 x)(-\sin x) - \cos x(2\sin x\cos x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x(1+\sin^2 x + 2\cos^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x(2+\cos^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

7(a) ধরি, $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = n(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}\frac{d}{dx}(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$= n(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}\{1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}.2x\}$$

$$= n(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}((x+\sqrt{1+x^2})^n) = \frac{n(x+\sqrt{1+x^2})^n}{\sqrt{1+x^2}}$$

7(b) $\frac{d}{dx}\{\text{cosec}(e^{x^2})\}$

$= \frac{d\{\text{cosec}(e^{x^2})\}}{d(e^{x^2})}\frac{d(e^{x^2})}{d(x^2)}\frac{d(x^2)}{dx}$

$= -\text{cosec}(e^{x^2})\cot(e^{x^2}).(e^{x^2}).2x$

$= -2x\, e^{x^2}\,\text{cosec}(e^{x^2})\cot(e^{x^2})$ (Ans.)

8(a) $\log_x 5$ [প্র.ভ.প. '৮৮]

$\log_x 5 = \log_x e \times \log_e 5 = ln\, 5\frac{1}{\log_e x}$

$= ln\, 5\frac{1}{\ln x} = ln\, 5\,(ln\, x)^{-1}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\log_x a) = ln5\,\{-1(ln\, x)^{-2}\frac{d}{dx}(ln\, x)\}$

$= -ln\, 5\,\frac{1}{(\ln x)^2}.\frac{1}{x} = -\frac{\ln 5}{x(\ln x)^2}$

8(b) $\ln(\sin e^{x^2})$ [প্র.ভ.প. '৯৫]

$\frac{d}{dx}\{\ln(\sin e^{x^2})\}$

$= \frac{1}{\sin(e^{x^2})}\{\cos(e^{x^2})\}e^{x^2}.2x$

$= 2xe^{x^2}\cot(e^{x^2})$

8(c) $\frac{d}{dx}\{ln\,(\tan\frac{x}{2})\}$

$= \frac{d\{\ln(\tan\frac{x}{2})\}}{d(\tan\frac{x}{2})}\frac{d(\tan\frac{x}{2})}{d(\frac{x}{2})}\frac{d(\frac{x}{2})}{dx}$

$= \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\frac{1}{\cos^2(x/2)}$

$= \frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \frac{1}{\sin x} = \cos ecx$

9. (a) $\frac{d}{dx}\{ln\,(ax^2+bx+c)\}$

$= \frac{1}{ax^2+bx+c}\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)$

$= \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$ (Ans.)

9(b) $\frac{d}{dx}\{ln\,(x+\sqrt{x^2\pm a^2})\}$

$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$

$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\{1+\frac{1}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}(2x)\}$

$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\{\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}+x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\}$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$ (Ans.)

9.(c) $ln\,\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$

$= ln\,(\sqrt{x+1}-1) - ln\,(\sqrt{x+1}+1)$

$\frac{d}{dx}\{ln\,\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\}$

$= \frac{1}{\sqrt{x+1}-1}\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$= \frac{\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+1}{2\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$= \frac{2}{2\sqrt{x+1}(x+1-1)} = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$ (Ans.)

10(a) $\left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2 = \left(\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}\right)^2$

$= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2 = 2\,\tan x\frac{d}{dx}(\tan x)$

$= 2\,\tan x.\,\sec^2 x$

10(b) $[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}]^n$ [প্র.ভ.প.'০৫]

$$\frac{d}{dx}[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}]^n = n[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}]^{n-1}\frac{\sqrt{1-x^2}.1 - x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{(\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$= n[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}]^{n-1}\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= n[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}]^{n-1}\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

10(c) $\frac{d}{dx}\{x\, lnx\, ln(lnx)\}$

$$= x\, lnx \frac{d}{dx}\{ln(lnx)\} + x\, ln(lnx)\frac{d}{dx}(lnx) + lnx\, ln(lnx)\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\, lnx \frac{1}{lnx}.\frac{1}{x} + x\, ln(lnx)\frac{1}{x} + lnx\, ln(lnx).1$$

$$= 1 + ln(lnx)(1 + lnx)$$

10(d) $\frac{d}{dx}(\sin x \ \sin 2x \ \sin 3x)$

$$= \sin x \ \sin 2x\frac{d}{dx}(\sin 3x) + \sin x \ \sin 3x \frac{d}{dx}(\sin 2x) + \sin 2x \ \sin 3x \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$= \sin x \ \sin 2x\ (\cos 3x).3 + \sin x \sin 3x\ (\cos 2x).2 + \sin 2x\ \sin 3x\ (\cos x).\ 1$

$= 3\sin x \sin 2x \cos 3x + 2\sin x \sin 3x \cos 2x + \sin 2x\ \sin 3x \cos x$

11(a) $\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}})$

$$= e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) + e^{-\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(-\sqrt{x})$$

$$= e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

11(a) $\frac{d}{dx}(e^{-x} + e^{\frac{1}{x}})$

$$= e^{-x}\frac{d}{dx}(-x) + e^{\frac{1}{x}}\frac{d}{dx}(\frac{1}{x})$$

$$= - e^{-x}.1 + e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}) = -(e^{-x} + \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}})$$

12(a) ধরি, $y = ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

$$= \frac{1}{2}\{\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x)\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\{\frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{(-\cos x)}{1-\sin x}\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\cos x(1-\sin x+1+\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x$$

12(b) ধরি, $y = \cos\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x}$ [প্র.ভ.প.৮৯]

$$\frac{dy}{dx} = -\sin\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x}\frac{d}{dx}(\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x})$$

$$= -\sin\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x}\frac{d}{dx}(\frac{1-x^2}{1+x^2})$$

$$= -\sin\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x}\frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= -\sin\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x}\frac{2x(-1-x^2-1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{4x}{(1+x^2)^2}\sin\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x}$$

12(c) $e^{3x}\cos x° = e^{3x}\cos\frac{\pi x}{180}$

$$\frac{d}{dx}(e^{3x}\cos x°) = e^{3x}(-\sin\frac{\pi x}{180})\frac{d}{dx}(\frac{\pi x}{180}) + \cos\frac{\pi x}{180}.e^{3x}\frac{d}{dx}(3x)$$

$$= -e^{3x}.\sin x°.(\frac{\pi}{180}) + \cos x°.e^{3x}.3$$

$$= e^{3x}\left(3\cos x^\circ - \frac{\pi}{180}\sin x^\circ\right)$$

13(a) $\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(e^{\tan^{-1}x})\}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(e^{\tan^{-1}x})^2}}\frac{d}{dx}(e^{\tan^{-1}x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-e^{2\tan^{-1}x}}}e^{\tan^{-1}x}\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{e^{\tan^{-1}x}}{(1+x^2)\sqrt{1-e^{2\tan^{-1}x}}}$$

13(b) $\frac{d}{dx}\{\cos^{-1}(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x})\}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x})^2}}$$

$$\frac{(b+a\cos x)(-b\sin x)-(a+b\cos x)(-a\sin x)}{(b+a\cos x)^2}$$

$$= -\frac{b+a\cos x}{\sqrt{(b+a\cos x)^2-(a+b\cos x)^2}}$$

$$\frac{(-b^2+a^2)\sin x}{(b+a\cos x)^2}$$

$$= \frac{-(a^2-b^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{b^2+a^2\cos^2 x-a^2-b^2\cos^2 x}}$$

$$= \frac{(b^2-a^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{(b^2-a^2)(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{(b^2-a^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{(b^2-a^2)\sin^2 x}}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x}$$

13(c) $\sin^{-1}(\frac{2x^{-1}}{x+x^{-1}}) = \sin^{-1}(\frac{2/x}{x+1/x})$

$$= \sin^{-1}(\frac{2}{x^2+1})$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\frac{2x^{-1}}{x+x^{-1}})\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{(x^2+1)^2}}}2\frac{d}{dx}(x^2+1)^{-1}$$

$$= \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+2x^2+1-4}}2(-1)(x^2+1)^{-2}.2x$$

$$= \frac{-4x(x^2+1)^{-1}}{\sqrt{x^4+2x^2-3}} = \frac{-4x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2-3}}$$

13(d) $\frac{d}{dx}\{\cos^{-1}x\ \ln(\sin^{-1}x)\}$ [প্র.ভ.প.'০৪]

$$= \cos^{-1}x\frac{d}{dx}\{\ln(\sin^{-1}x)\} + \ln(\sin^{-1}x)\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)$$

$$= \cos^{-1}x\frac{1}{\sin^{-1}x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\ln(\sin^{-1}x)}{-\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{\frac{\cos^{-1}x}{\sin^{-1}x} - \ln(\sin^{-1}x)\right\}$$

13(e) $\cot^{-1}(\frac{x^2}{e^x}) + \cot^{-1}(\frac{e^x}{x^2})$ [প্র.ভ.প.'০৫]

$$= \tan^{-1}(\frac{e^x}{x^2}) + \tan^{-1}(\frac{x^2}{e^x})$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{e^x}{x^2}+\frac{x^2}{e^x}}{1-\frac{e^x}{x^2}.\frac{x^2}{e^x}} = \tan^{-1}\frac{\frac{e^x}{x^2}+\frac{x^2}{e^x}}{1-1}$$

$$= \cot^{-1}\frac{1-1}{\frac{e^x}{x^2}+\frac{x^2}{e^x}} = \cot^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{\cot^{-1}(\frac{x^2}{e^x}) + \cot^{-1}(\frac{e^x}{x^2})\} = \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2}) = 0$$

13(f) $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{1-\sqrt{ax}}$ [প্র.ভ.প. '১৬]

$= \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{1-\sqrt{x}\sqrt{a}} = \tan^{-1}\sqrt{x}+\tan^{-1}\sqrt{a}$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\{\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{1-\sqrt{ax}}\}$

$= \dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}\sqrt{x}) + \dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}\sqrt{a})$

$= \dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x})+0$

$= \dfrac{1}{1+x}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

14(a) ধরি, $y=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ এবং

$x^2=\cos\theta$. তাহলে, $\theta=\cos^{-1}x^2$ এবং

$y = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+\cos\theta}-\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}}$

$= \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{2\cos^2(\theta/2)}-\sqrt{2\sin^2(\theta/2)}}{\sqrt{2\cos^2(\theta/2)}+\sqrt{2\sin^2(\theta/2)}}$

$= \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{2}\{\cos(\theta/2)-\sin(\theta/2)\}}{\sqrt{2}\{\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2)\}}$

$= \tan^{-1}\dfrac{\cos(\theta/2)\{1-\tan(\theta/2)\}}{\cos(\theta/2)\{1+\tan(\theta/2)\}}$

$=\tan^{-1}\dfrac{1-\tan(\theta/2)}{1+\tan(\theta/2)} = \tan^{-1}(1)-\tan^{-1}\tan\dfrac{\theta}{2}$

$= \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\tan^{-1}x^2$

$\dfrac{dy}{dx} = 0-\dfrac{1}{2}\{-\dfrac{1}{1+(x^2)^2}\}(2x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

14(b) ধরি, $y=\sec^{-1}\dfrac{1}{2x^2-1}$ এবং $x=\cos\Theta$

তাহলে, $\theta=\cos^{-1}x$ এবং

$y = \sec^{-1}\dfrac{1}{2\cos^2\theta-1} = \sec^{-1}\dfrac{1}{\cos 2\theta}$

$= \sec^{-1}\sec 2\theta = 2\Theta = 2\cos^{-1}x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(2\cos^{-1}x) = \dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

14(c) $\dfrac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\tan^{-1}x)\}$ [সি.'০১]

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}\dfrac{1}{1+x^2}$

$= \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}$ (Ans.)

14(d) $\tan^{-1}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ [প্র.ভ.প. '০৫]

$= \tan^{-1}\dfrac{\cos x(1-\tan x)}{\cos x(1+\tan x)} = \tan^{-1}\dfrac{1-\tan x}{1+1.\tan x}$

$= \tan^{-1}1-\tan^{-1}(\tan x) = \dfrac{\pi}{4}-x$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\{\tan^{-1}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{\pi}{4}-x)$

$= 0-1 = -1$ ((Ans.)

$\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

15(a) $x = a(\theta-\sin\theta), y = a(1+\cos\theta)$ [প্র.ভ.প. '০৬]

$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}\{a(\theta-\sin\theta)\} = a(1-\cos\theta)$

$\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}\{a(1+\cos\theta)\} = a(0-\sin\theta)$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{-a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}$

$= \dfrac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\cot\dfrac{\theta}{2}$

15(b) $\dfrac{d}{dx}(\sin x)^{\ln x} = (\sin x)^{\ln x}$

$[\ln x\frac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\}+\ln(\sin x)\frac{d}{dx}(\ln x)]$

$=(\sin x)^{\ln x}[\ln x\frac{1}{\sin x}.\cos x+\ln(\sin x).\frac{1}{x}]$

$=(\sin x)^{\ln x}[\ln x.\cot x+\frac{\ln(\sin x)}{x}]$

15(c) $\frac{d}{dx}(\sin x)^{\tan x}=(\sin x)^{\tan x}$

$[\tan x\frac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\}+\ln(\sin x)\frac{d}{dx}(\tan x)]$

$=(\sin x)^{\tan x}[\frac{\sin x}{\cos x}\frac{\cos x}{\sin x}+\ln(\sin x).\sec^2 x]$

$=(\sin x)^{\tan x}[1+\sec^2 x.\ln(\sin x)]$

15(d) $\frac{d}{dx}(\tan x)^{\ln x}=(\tan x)^{\ln x}$

$[\ln x\frac{d}{dx}\{\ln(\tan x)\}+\ln(\tan x)\frac{d}{dx}(\ln x)]$

$=(\tan x)^{\ln x}[\ln x\frac{1}{\tan x}\sec^2 x+\ln(\tan x).\frac{1}{x}]$

$=(\tan x)^{\ln x}[\ln x\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\ln(\tan x)}{x}]$

$=(\tan x)^{\ln x}[\ln x\frac{2}{2\sin x\cos x}+\frac{\ln(\tan x)}{x}]$

$=(\tan x)^{\ln x}[2\ln x.\cos ec2x+\frac{\ln(\tan x)}{x}]$

15(e) $\frac{d}{dx}(\ln x)^{\ln x}=(\ln x)^{\ln x}$

$[\ln x\frac{d}{dx}\{\ln(\ln x)\}+\ln(\ln x)\frac{d}{dx}(\ln x)]$

$=(\ln x)^{\ln x}[\ln x\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x}+\ln(\ln x).\frac{1}{x}]$

$=\frac{1}{x}(\ln x)^{\ln x}[1+\ln(\ln x)]$

15.(f) $\frac{d}{dx}(\ln x)^{\tan^{-1}x}=(\ln x)^{\tan^{-1}x}$

$[\tan^{-1}x\frac{d}{dx}\{\ln(\ln x)\}+\ln(\ln x)\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)]$

$=(\ln x)^{\tan^{-1}x}[\tan^{-1}x\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x}+\frac{\ln(\ln x)}{1+x^2}]$

$=(\ln x)^{\tan^{-1}x}[\frac{\tan^{-1}x}{x\ln x}+\frac{\ln(\ln x)}{1+x^2}]$

(g) $\frac{d}{dx}(\tan x)^{\cos^{-1}x}=(\tan x)^{\cos^{-1}x}$

$[\cos^{-1}x\frac{d}{dx}\{\ln(\tan x)\}+\ln(\tan x)\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)]$

$=(\tan x)^{\cos^{-1}x}[\frac{\sec^2 x.\cos^{-1}x}{\tan x}-\frac{\ln(\tan x)}{\sqrt{1-x^2}}]$

(h) $(\sin^{-1}x)^{\ln x}$ **[প্র.ভ.প. '১৬]**

$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)^{\ln x}=(\sin^{-1}x)^{\ln x}$

$[\ln x\frac{d}{dx}\{\ln(\sin^{-1}x)\}+\ln(\sin^{-1}x)\frac{d}{dx}(\ln x)]$

$=(\sin^{-1}x)^{\ln x}[\frac{\ln x}{\sin^{-1}x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\ln(\sin^{-1}x)}{x}]$

$=(\sin^{-1}x)^{\ln x}[\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}+\frac{\ln(\sin^{-1}x)}{x}]$

16.(a) $\frac{d}{dx}(x^x+x^{1/x})=\frac{d}{dx}(x^x)+\frac{d}{dx}(x^{1/x})$

$=x^x\{x\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}(x)\}+$

$x^{1/x}\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}(\frac{1}{x})\}$

$=x^x\{x.\frac{1}{x}+\ln x.1\}+x^{1/x}\{\frac{1}{x}.\frac{1}{x}+\ln x.(-\frac{1}{x^2})\}$

$=x^x(1+\ln x)+x^{1/x}.\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$

$=x^x(1+\ln x)+x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

16(b) $\frac{d}{dx}(x^x.\ x^{\cos^{-1}x})$

$=x^x\frac{d}{dx}(x^{\cos^{-1}x})+x^{\cos^{-1}x}\frac{d}{dx}(x^x)$

$=x^x.x^{\cos^{-1}x}[\cos^{-1}x\frac{d}{dx}(\ln x)$

$+\ln x\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x)]+x^{\cos^{-1}x}.x^{x}[x\dfrac{d}{dx}(\ln x)$

$+\ln x\dfrac{d}{dx}(x)]$

$= x^{x}.x^{\cos^{-1}x}[\dfrac{\cos^{-1}x}{x}+\dfrac{-\ln x}{\sqrt{1-x^2}}]$

$+x^{\cos^{-1}x}.x^{x}[x.\dfrac{1}{x}+\ln x.1]$

$= x^{x}.x^{\cos^{-1}x}[\dfrac{\cos^{-1}x}{x}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+1+lnx]$

17(a) $x=y.\ln(xy)\Rightarrow \dfrac{x}{y}=\ln x+\ln y$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{y.1-x.\frac{dy}{dx}}{y^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow xy-x^2\frac{dy}{dx}=y^2+xy\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y(x-y)=x(x+y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(x-y)}{x(x+y)}$$

17(b) $y=\cot(x+y)\Rightarrow \cot^{-1}y=x+y$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$-\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow (-\frac{1}{1+y^2}-1)\frac{dy}{dx}=1$$

$$\Rightarrow -\frac{1+1+y^2}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+y^2}{2+y^2}\quad \text{(Ans.)}$$

17(c) $y=\tan(x+y)$ **[প্র.ভ.প. '৮১]**

$\Rightarrow \tan^{-1}y=x+y$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{1+y^2}-1)\frac{dy}{dx}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1-1-y^2}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=1\ \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{1+y^2}{y^2}$$

17(d) $x^2+y^2=\sin(xy)$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=\cos(xy)\ (x\frac{dy}{dx}+y)$$

$$\Rightarrow \{2y-x\cos(xy)\}\frac{dy}{dx}=y\cos(xy)-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos(xy)-2x}{2y-x\cos(xy)}$$

(e) $\cos y=x\cos(a+y)\Rightarrow x=\dfrac{\cos y}{\cos(a+y)}$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$1=\frac{\cos(a+y)(-\sin y)\frac{dy}{dx}-\cos y\{-\sin(a+y)\}\frac{dy}{dx}}{\cos^2(a+y)}$$

$$1=\frac{\{\sin(a+y)\cos y-\cos(a+y)\sin y\}\frac{dy}{dx}}{\cos^2(a+y)}$$

$$\cos^2(a+y)=\sin(a+y-y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}\quad \text{(Ans.)}$$

17(f) $e^{2x}+5y^3=3\cos(xy)$ **[প্র.ভ.প. '৯৫]**

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$e^{2x}.2+15y^2\frac{dy}{dx}=3\ \{-\sin(xy)\}\frac{d}{dx}(xy)$$

$$\Rightarrow 2e^{2x}+15y^2\frac{dy}{dx}=-3\sin(xy)(x\frac{dy}{dx}+y)$$

$$\Rightarrow \{15y^2+3x\sin(xy)\}\frac{dy}{dx}$$

$$=2e^{2x}+3y\sin(xy)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2e^{2x}+3y\sin(xy)}{15y^2+3x\sin(xy)}$$

18(a) $y=x^y$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx}=x^y[y\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{dy}{dx}]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y[\frac{y}{x}+\ln x\frac{dy}{dx}] \quad [\because x^y=y]$$

$$\Rightarrow (1-y\ln x)\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x(1-y\ln x)} \text{ (Ans.)}$$

18(b) $x^y y^x=1$ [প্র.ভ.প. '০২]

$y\ln x + x\ln y=0$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y\frac{1}{x}+\ln x\frac{dy}{dx}+x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\ln y=0$$

$$\Rightarrow y^2+xy\ln x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{dy}{dx}+xy\ln y=0$$

$$\Rightarrow (xy\ln x+x^2)\frac{dy}{dx}=-(xy\ln y+y^2)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y(x\ln y+y)}{x(y\ln x+x)}$$

18(c) $(\sin x)^{\cos y}+(\cos x)^{\sin y}=a$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(\sin x)^{\cos y}[\cos y\frac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\}+\ln(\sin x)$$

$$\frac{d}{dx}(\cos y)]+(\cos x)^{\sin y}[\sin y\frac{d}{dx}\{\ln(\cos x)\}$$

$$+\ln(\cos x)\frac{d}{dx}(\sin y)]=0$$

$$\Rightarrow (\sin x)^{\cos y}[\cos y\cot x+\ln(\sin x)$$

$$(-\sin y)\frac{dy}{dx}]+(\cos x)^{\sin y}[\sin y(-\tan x)+$$

$$\ln(\cos x).\cos y\frac{dy}{dx}]=0$$

$$\Rightarrow \{(\cos x)^{\sin y}\ln(\cos x).\cos y$$

$$-(\sin x)^{\cos y}\ln(\sin x)\sin y\}\frac{dy}{dx}=(\cos x)^{\sin y}$$

$$\sin y\tan x-(\sin x)^{\cos y}\cos y\cot x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=$$

$$\frac{(\cos x)^{\sin y}\sin y\tan x-(\sin x)^{\cos y}\cos y\cot x}{(\cos x)^{\sin y}\ln(\cos x)\cos y-(\sin x)^{\cos y}\ln(\sin x)\sin y}$$

19. $y=\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ **হলে, দেখাও যে,**

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

প্রমাণ : ধরি, $x=\cos\theta\Rightarrow\theta=\cos^{-1}x$

$$y=\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\cos^{-1}x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

20. $x=1$ বিন্দুতে $y=x^2$ ফাংশনের অন্তরক আকার সমীকরণ থেকে dy এবং δy নির্ণয় কর যখন $dx=\delta x=2$.

সমাধান : ধরি, $f(x)=y=x^2$

$$\frac{dy}{dx}=2x\Rightarrow dy=2x\,dx$$

$\Rightarrow dy=2\times1\times2$, $[\because x=1, dx=2]$

$\Rightarrow dy=4$

আবার, $\delta y=f(x+\delta x)-f(x)$

$=f(1+2)-f(1)=f(3)-f(1)$

$=3^2-1^2=9-1=8.$

21. $x=3$ বিন্দুতে $y=\frac{x^2}{3}+1$ ফাংশনের অন্তরক আকার সমীকরণ থেকে dy এবং δy নির্ণয় কর যখন $dx=\delta x=3.$

সমাধান : ধরি, $f(x) = y = \frac{x^2}{3} + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x \Rightarrow dy = \frac{2}{3}x \ dx$$

$$\Rightarrow dy = \frac{2}{3} \times 3 \times 3 , [\because x = 3, dx = 3]$$

$$dy = 6$$

আবার, $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$

$$= f(3 + 3) - f(3) = f(6) - f(3)$$

$$= (\frac{6^2}{3} + 1) - (\frac{3^2}{3} + 1)$$

$$= 12 - 3 = 9$$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $y = x^{-\frac{1}{x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান- **[BUET 07-08]**

Sol^n : $\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{1}{x}}[-\frac{1}{x}.\frac{1}{x} + \ln x(+\frac{1}{x^2})]$

$$= x^{-\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2}(\ln x - 1) = \frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(\ln x - 1)$$

SHIFT d/dx ALPHA X

[SHIFT] [∫dx] [ALPHA] [)] [^] [-] [1] [ab/c] [ALPHA] [)] X

[÷] [1] [ab/c] [2] [)] [=] 27.09

Option গুলোতে x = ½ বসালে $\frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(\ln x - 1)$

= 27.09 হয়।

2. $\frac{d}{dx}(\log_x e) = ?$ **[DU 08-09]**

Sol^n : $\frac{d}{dx}(\log_x e) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{\ln x}) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$

3. $\frac{d}{dx}\{\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) = ?$ **[DU 07-08]**

Sol^n : $\frac{d}{dx}\{\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}.(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

4. $y = \sqrt{\sec x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[DU 00-01]**

Sol^n : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\sec x}}.\sec x \tan x$

$$= \frac{\sqrt{\sec x}\tan x}{2} = \frac{y}{2}\tan x$$

5. $y = \cos\sqrt{x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[DU 03-04]**

Sol^n : $\frac{dy}{dx} = -\sin\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

6. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ হলে, $\frac{df}{dx} = ?$ **[DU 01-02]**

Sol^n : $\frac{df}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sqrt{x}}}\frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{4\sqrt{x}\sqrt{1 - \sqrt{x}}}$

7. $y = \log_e(2x)^{1/3}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[DU 98-99]**

Sol^n : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\{\log_e(2x)\} = \frac{1}{3.2x}(2) = \frac{1}{3x}$

8. $y = \sin^{-1}\sin(x + 1)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

[DU 97-98 ; SU 06-07]

Sol^n : $y = \sin^{-1}\sin(x + 1) = x + 1 \therefore \frac{dy}{dx} = 1$

9. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[NU 07-08]**

Sol^n : $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}.1 - x\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}.2x}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

10. $\frac{d}{dx}(a^x) = ?$ **[KU,RU07-08;IU 02-03]**

Sol^n : $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

11. $\frac{d}{dx}(\log_a m^2) = ?$ **[CU 07-08]**

Sol^n : $\frac{d}{dx}(\log_a m^2) = \theta$

12. $x=\frac{1}{2}$ হলে, $\frac{d}{dx}(x^2e^{2x}\log_e 2x)=?$ **[RU 07-08]**

$Sol^n: \frac{d}{dx}(x^2e^{2x}\log_e 2x)$

$= x^2e^{2x}.\frac{1}{2x}(2)+x^2(e^{2x}.2)\log_e 2x$

$+(2x).e^{2x}\log_e 2x$

$x=\frac{1}{2}$ হলে, $\frac{d}{dx}(x^2e^{2x}\log_e 2x)$

$=\frac{1}{4}e.2+0+0=\frac{1}{2}e$

13. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots\infty}}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$
[SU 06-07, 05-06; RU 03-04; IU 06-07]

$Sol^n: y=\sqrt{x+y} \Rightarrow y^2=x+y$

$2y\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y-1}$

14. $y=\cos^{-1}\frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$ **[RU 06-07]**

$Sol^n: y=\cos^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}=-2\tan^{-1}x$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{1+x^2}$

15. $y=(\log_a x)(\log x)$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$ **[RU 05-06]**

$Sol^n: \frac{dy}{dx}=(\log_a x)\frac{1}{x\ln 10}+\frac{1}{x\ln a}(\log x)$

ie. $\frac{dy}{dx}=(\log_a x)\frac{\log_a e}{x}+\frac{\log_{10}a}{x}(\log x)$

16. $y=\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$ **[IU 05-06; CU 02-03]**

$Sol^n: y=\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}=\tan^{-1}(1)+\tan^{-1}x$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$

17. $\tan y=\frac{2t}{1-t^2}, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$ **[SU 04-05; JU 06-07]**

$Sol^n: y=\tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2}=2\tan^{-1}t$,

$x=\sin^{-1}\frac{2t}{1+t^2}=2\tan^{-1}t \therefore y=x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=1$

18. $x^y=e^{x-y}$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$ **[SU 06-07]**

$Sol^n: y\ln x=x-y\Rightarrow y=\frac{x}{1+\ln x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\ln x).1-x.\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}=\frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$

19. $y=f(x)$ হলে, $\frac{d}{dx}(e^y)=?$ **[CU 07-08]**

$Sol^n: \frac{d}{dx}(e^y)=e^y\frac{dy}{dx}$

20. $x^2+3xy+5y^2=1$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$ **[DU 07-08]**

$Sol^n: 2x+3(x\frac{dy}{dx}+y.1)+10y\frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow (3x+10y)\frac{dy}{dx}=-(2x+3y)$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+3y}{3x+10y}$

21. $y=x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$ হলে, $3(y^2-1)\frac{dy}{dx}=?$ **[DU 04-05]**

$Sol^n: y^3=x+x^{-1}+3.x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})$

$\Rightarrow y^3=x+\frac{1}{x}+3y$

$3y^2\frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{x^2}+3\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow 3(y^2-1)\frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{x^2}$ (Ans.)

প্রশ্নমালা IX I

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী :

1. $D^n(x^n) = n!$ 2. $D^n(e^{ax}) = a^n e^{ax}$

3. $D^n\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \frac{(-1)^n n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

4. $D^n\{\ln(ax+b)\} = \frac{(-1)^{n-1}.(n-1)!.a^n}{(ax+b)^n}$

5. $D^n\{\sin(ax+b)\} = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$

6. $D^n(\cos ax) = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}+ax\right)$

7. $D^n[e^{ax}\cos(bx+c)] = (a^2+b^2)^{n/2}\, e^{ax}\cos\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

1 $y = 4x^{\frac{3}{2}} - 3 + 2x^{\frac{1}{2}}$ **হলে, y_2 নির্ণয় কর এবং $x = 4$ হলে, y_2 এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান: এখানে, $y = 4x^{\frac{3}{2}} - 3 + 2x^{\frac{1}{2}}$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = 4\times\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - 0 + 2\times\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 6x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y_2 = 6\times\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = 3x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$x = 4$ হলে, $y_2 = 3.4^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}.4^{-\frac{3}{2}}$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{8} = \frac{24-1}{16} = \frac{23}{16}$$

2. $y = \sin x$ **হলে, দেখাও যে, $y_4 - y = 0$** [রা.'০৪; ব.'০৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sin x$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \cos x$, $y_2 = -\sin x$, $y_3 = -\cos x$,

$y_4 = \sin x = y$

$y_4 - y = 0$ (Showed)

3.(a) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ **হলে, দেখাও যে,** $2x\frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{x}$ [ঢা.'০৭; য.'০৭; কু.'০৮; প্র.ভ.প.'০৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x}y = x+1$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\sqrt{x}\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x+1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}\frac{dy}{dx} + y.\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$$

উভয় পক্ষকে $2\sqrt{x}$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$2x\frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{x}$ (Showed)

3(b) $y = \sqrt{(1-x)(1+x)}$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$ [য.'০৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sqrt{(1-x)(1+x)} = \sqrt{1-x^2}$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{dy}{dx} = -x\sqrt{1-x^2} = -xy$$

$(1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$ (Showed)

3(c) $y = px + \frac{q}{x}$ **হলে, দেখাও যে,** $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 2p$ [কু. '০২; চ. '০৫; য.,ঢা.'০৯]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = px + \frac{q}{x} \Rightarrow xy = px^2 + q$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$x\frac{dy}{dx} + y.1 = p(2x) + 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 2px$$

পুনরায় x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}.1+\frac{dy}{dx}=2p$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=2p \text{ (Showed)}$$

4.(a) $y=ax^2+\dfrac{b}{\sqrt{x}}$ **হলে, দেখাও যে,** $2x^2y_2-xy_1-2y=0$

[ব. '০২; ঢা. '০৬; কু. '০৯; সি.'১৩; য.,দি.'১৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=ax^2+\dfrac{b}{\sqrt{x}}=ax^2+bx^{-\frac{1}{2}}$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1=2ax-\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}-1}=2ax-\frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}$$

$$y_2=2a+\frac{3}{4}bx^{-\frac{3}{2}-1}=2a+\frac{3}{4}bx^{-\frac{5}{2}}$$

এখন, $2x^2y_2-xy_1-2y=4ax^2+\dfrac{3}{2}bx^{-\frac{1}{2}}$

$$-(2ax^2-\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}})-(2ax^2+2bx^{-\frac{1}{2}})$$

$$=4ax^2+\frac{3}{2}bx^{-\frac{1}{2}}-2ax^2+\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}}$$

$$-2ax^2-2bx^{-\frac{1}{2}}$$

$$=4ax^2-4ax^2+2bx^{-\frac{1}{2}}-2bx^{-\frac{1}{2}}=0$$

$$2x^2y_2-xy_1-2y=0 \text{ (Showed)}$$

4(b) $y=px^2+qx^{-\frac{1}{2}}$ **হলে, দেখাও যে,** $2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}=2y$ [রা.'০৬; য.'১২; কু. '১৬; সি. '০৮, '১০; মা.'০৯; চ.'১১,'১৩; দি.'১১; ঢা.'১৩]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=px^2+qx^{-\frac{1}{2}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=2px-\frac{1}{2}qx^{-\frac{3}{2}},\ \frac{d^2y}{dx^2}=2p+\frac{3}{4}qx^{-\frac{5}{2}}$$

এখন, $2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}=4px^2+\dfrac{3}{2}qx^{-\frac{1}{2}}$

$$-(2px^2-\frac{1}{2}qx^{-\frac{1}{2}})$$

$$=4px^2+\frac{3}{2}qx^{-\frac{1}{2}}-2px^2+\frac{1}{2}qx^{-\frac{1}{2}}$$

$$=2px^2+2qx^{-\frac{1}{2}}=2(px^2+qx^{-\frac{1}{2}})=2y$$

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2y \text{ (Showed)}$$

5.(a) $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ **হলে, দেখাও যে,** $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+1=y^2$ [চ.'০৩]

প্রমাণঃ $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})\Rightarrow 2y=e^x+e^{-x}\cdots(1)$

$$2\frac{dy}{dx}=e^x-e^{-x}$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(e^x-e^{-x})^2 \quad \text{[বর্গ করে।]}$$

$$=(e^x+e^{-x})^2-4e^xe^{-x}$$

$$=(2y)^2-4 \quad [\because e^x+e^{-x}=2y]$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=y^2 \text{ (Showed)}$$

5(b) $y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$ **হলে, দেখাও যে,** $y_2-m^2y=0$ [য.'০৭; ব.'০৮,'১৩; দি.'১০; সি.'১১]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$

$$y_1=\frac{d}{dx}(Ae^{mx}+Be^{-mx})=Ame^{mx}-Bme^{-mx}$$

$$y_2=Am^2e^{mx}+Bm^2e^{-mx}$$

$$=m^2(Ae^{mx}+Be^{-mx})$$

$$=m^2y \quad [\because y=Ae^{mx}+Be^{-mx}]$$

$$y_2-m^2y=0 \text{ (Showed)}$$

6(a) $y=\sec x$ **হলে, দেখাও যে,** $y_2=y(2y^2-1)$

[রা. '০৭; চ. '০৬, ০৮,'১৪; সি. '০৭; ব. '০৬; য. '০৮, '১১; কু.'১০; মি.'১২,'১৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\sec x$

$y_1 = \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$y_2 = \sec x.\sec^2 x + \tan x.\sec x \tan x$

$= \sec x(\sec^2 x + \tan^2 x)$

$= \sec x(\sec^2 x + \sec^2 x - 1)$

$y_2 = y(2y^2 - 1)$ [$\because y = \sec x$]

6(b) $y = \tan x + \sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$

[রা. '১০,'১৪; কু. '০৩; সি.'১৩; ব.,ঢা.'১৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \tan x + \sec x \cdots (1)$

(1) -এর উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \sec x \tan x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

$= \frac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1}{1-\sin x} \cdots (2)$

(2) -এর উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{(1-\sin x)^2}\frac{d}{dx}(1-\sin x)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x(\cos^2 x + 2\sin x + 2\sin^2 x)}{\cos^4 x}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ (Showed)

6(c) $y = \sin(\sin x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 + y_1 \tan x + y\cos^2 x = 0$

[য.'০৫; সি.'০৬,'১১; কু.'০৭; ব.'০৯]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sin(\sin x) \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \cos(\sin x).\cos x \cdots (2)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_2 = \cos(\sin x).(-\sin x) + \cos x.\{-\sin(\sin x)\}.\cos x$

$= -\sin x \cos(\sin x) - \cos^2 x.\sin(\sin x)$

$= -\sin x.\frac{y_1}{\cos x} - \cos^2 x.y$ [(1) ও (2) হতে।]

$= -y_1 \tan x - y\cos^2 x$

$y_2 + y_1 \tan x + y\cos^2 x = 0$ (Showed)

7. (a) $y = (p+qx)e^{-2x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ [য. '০২; ব'০৯; দি.'১৩]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = (p+qx)e^{-2x} \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = (p+qx).e^{-2x}(-2) + e^{-2x}(0+q)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2y + qe^{-2x}$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + 2y = qe^{-2x} \cdots (2)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = -2qe^{-2x}$

$= -2(\frac{dy}{dx} + 2y)$ [(2) দ্বারা।]

$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ (Showed)

7(b) $y = (e^x + e^{-x})\sin x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_4 + 4y = 0$ [ঢা.'০৪; রা.'০৬; দি.'১২]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = (e^x + e^{-x})\sin x \cdots (1)$

$y_1 = (e^x + e^{-x})\cos x + (e^x - e^{-x})\sin x$

$y_2 = (e^x + e^{-x})(-\sin x) + (e^x - e^{-x})\cos x$
$+ (e^x - e^{-x})\cos x + (e^x + e^{-x})\sin x$

$= 2(e^x - e^{-x})\cos x$

$y_3 = 2\{(e^x + e^{-x})\cos x - (e^x - e^{-x})\sin x\}$

$y_4 = 2[\{(e^x - e^{-x})\cos x - (e^x + e^{-x})\sin x\}$
$-\{(e^x + e^{-x})\sin x + (e^x - e^{-x})\cos x\}]$

$= 2\{(e^x - e^{-x})\cos x - (e^x + e^{-x})\sin x$
$-(e^x + e^{-x})\sin x - (e^x - e^{-x})\cos x\}$

$= 2\{-2(e^x + e^{-x})\sin x\}$

$= -4y$ [(1) দ্বারা।]

$y_4 + 4y = 0$ (Showed)

7(c) $y = e^x \cos x$ **হলে, দেখাও যে, $y_2 - 2y_1 + 2y = 0$ [দি.'১০;চ.'১২;ব.'১৩; মা.'১৪]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = e^x \cos x \quad \cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = e^x \cos x + e^x(-\sin x)$

$\Rightarrow y_1 = y - e^x \sin x$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow y_1 - y = -e^x \sin x \cdots(2)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_2 - y_1 = -e^x \sin x - e^x \cos x$

$= y_1 - y - y$ [(1) ও (2) দ্বারা।]

$y_2 - 2y_1 + 2y = 0$ (Showed)

7(d) $y = e^{ax} \sin bx$ **হলে, দেখাও যে,**

$y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$ **[সি.'০২]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = e^{ax} \sin bx \cdots \cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = e^{ax}.\cos bx.b + \sin bx\,.\,e^{ax}.a$

$= b\,e^{ax}\cos bx + ay$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow y_1 - ay = b\,e^{ax}\cos bx \cdots \cdots(2)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_2 - a\,y_1 = b\{ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx\}$

$\Rightarrow y_2 - a\,y_1 = a(be^{ax}\cos bx) - b^2 e^{ax}\sin bx$

$= a(y_1 - ay) - b^2 y$ [(1) ও (2) দ্বারা।]

$y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$

8.(a) $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$ **হলে, দেখাও যে, $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$**

[চ.'০৭'; ঢা.'০৯; রা.'১৩;সি.'১৪]

প্রমাণ ঃ $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x) \cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = a\{-\sin(\ln x).\frac{1}{x}\} + b\cos(\ln x).\frac{1}{x}$

$\Rightarrow xy_1 = -a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$xy_2 + y_1.1 = -a\cos(\ln x).\frac{1}{x} - b\sin(\ln x).\frac{1}{x}$

$\Rightarrow x^2 y_2 + xy_1 = -\{a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)\}$

$\Rightarrow x^2 y_2 + xy_1 = -y$ [(1) দ্বারা।]

$x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$ (Showed)

8(b) $y = x^2 \ln(x)$ **হলে, দেখাও যে, $y_3 x = 2$**

[প্র.ভ.প.'০৬]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = x^2 \ln(x)$

$y_1 = x^2 \frac{1}{x} + \ln(x).2x = x + 2x\ln(x)$

$y_2 = 1 + 2\{x\frac{1}{x} + \ln(x).1\} = 1 + 2 + 2\ln(x)$

$y_3 = 0 + 2.\frac{1}{x}$ $\quad y_3 x = 2$ (Showed)

8(c) $y = \ln(\sin x)$ **হলে, দেখাও যে,** $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \ln(\sin x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\} = \frac{1}{\sin x}(\cos x)$

$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec}^2 x)$

$= -2\operatorname{cosec}x(-\operatorname{cosec}x\cot x$

$= 2\operatorname{cosec}^2 x\cot x = 2\frac{1}{\sin^2 x}.\frac{\cos x}{\sin x}$

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$ (Showed)

9.(a) $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m$ **হলে, প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2 y = 0$**

[য.'১০;ব.'১০,'১৪;সি.'১২]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m \cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})$$

$$= m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}})$$

$$=\frac{m(x+\sqrt{1+x^2})^m}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{my}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\ \ y_1 = my$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1{}^2 = m^2y^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2).2y_1y_2 + y_1{}^2(0+2x) = m^2 2yy_1$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1x = m^2y$

$(1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$ (Showed)

9(b) $\boldsymbol{y = \sqrt{(4+3\sin x)}}$ **হলে, দেখাও যে,** $\boldsymbol{2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4}$ **[য.'১৩;কু.'১১,'১৪; চ.'১০; ঢা. '০৮; রা.'১২; সি.'১২;দি.'১১]**

প্রমাণ ঃ $y = \sqrt{(4+3\sin x)} \Rightarrow y^2 = 4+3\sin x$

$\Rightarrow y^2 - 4 = 3\sin x \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y\frac{dy}{dx} = 3\cos x$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}.\frac{dy}{dx} = 3(-\sin x)$$

$\Rightarrow 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2(\frac{dy}{dx})^2 = -(y^2-4)$ [(1) দ্বারা।]

$$2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2(\frac{dy}{dx})^2 + y^2 = 4$$

9(c) $\boldsymbol{y = \ln[x+\sqrt{a^2+x^2}]}$ **হলে, দেখাও যে,** $\boldsymbol{(a^2+x^2)y_2 + xy_1 = 0}$ **[চ.'১০,'১৪; য.'১৪]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \ln[x+\sqrt{a^2+x^2}] \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}})$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$\Rightarrow y_1\sqrt{a^2+x^2} = 1 \Rightarrow y_1{}^2(a^2+x^2) = 1$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1{}^2(0+2x) + (a^2+x^2)\ 2y_1y_2 = 0$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(a^2+x^2)y_2 + xy_1 = 0$ (Showed)

10.(a) $\boldsymbol{y = e^{a\sin^{-1}x}}$ **হলে, দেখাও যে,** $\boldsymbol{(1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2y}$

[য.'০৯; ঢা.'১১,'১৪; সি.'০৯; ব.'১১; কু'১২; রা.'১৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = e^{a\sin^{-1}x} \quad \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = e^{a\sin^{-1}x}.\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\ \ y_1 = ay$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow (1-x^2)\ y_1{}^2 = a^2y^2$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)\,2y_1y_2 + y_1{}^2(0-2x) = a^2(2yy_1)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)\ y_2 - xy_1 = a^2y$ (Showed)

10(b) $\boldsymbol{y = e^{4\sin^{-1}x}}$ **হলে, দেখাও যে,** $\boldsymbol{(1-x^2)y_2 - xy_1 = 16y}$ **[চ.'০২]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = e^{4\sin^{-1}x} \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = e^{4\sin^{-1}x}.\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\ \ y_1 = 4y$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow (1-x^2)\ y_1{}^2 = 16y^2$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)\,2y_1y_2 + y_1{}^2(0-2x) = 16(2yy_1)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 16y$ (Showed)

10(c) $y = e^{\tan^{-1}x}$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$ **[য.'০৪;কু.'০৬;ব.'০৭; দি.'০৯]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = e^{\tan^{-1}x} \quad \cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = e^{\tan^{-1}x}.\dfrac{1}{1+x^2} = y.\dfrac{1}{1+x^2}$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = y$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1(0+2x) = y_1$

$(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$ (Showed)

10.(d) $y = \tan^{-1}x$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $(1+x_2)y_2 + 2xy_1 = 0$ **[রা.'০২;ঢা.'০৫; কু.'০৫]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \tan^{-1}x \quad \cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)y_1 = 1$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1(0+2x) = 0$

$(1+x_2)y_2 + 2xy_1 = 0$ (Showed)

10(e) $ln\ y = a\sin^{-1}x$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - x\ y_1 - a^2y = 0$ **[ঢা.'০৭]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $ln\ y = a\sin^{-1}x$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\dfrac{1}{y}y_1 = a\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\ y_1 = ax$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = a^2y^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = a^2.2yy_1$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2y$

$(1-x^2)y_2 - x\ y_1 - a^2y = 0$

10(f) $\ln(y) = \tan^{-1}x$ **হলে, দেখাও যে,** $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$

[রা.'০৫,'০৮,'১০;য.'১০;কু.'১১; ঢা.,ব.'১২]

প্রমাণ ঃ এখানে, $\ln(y) = \tan^{-1}x$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\dfrac{1}{y}y_1 = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)y_1 = y$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1(0+2x) = y_1$

$(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$

10(g) $y = \sin^{-1}x$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$ **[সি.'০১,'০৫]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sin^{-1}x$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y_1\sqrt{1-x^2} = 1$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = 1$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1(-2x) = 0$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$ (Showed)

11.(a) $y = \tan(m\tan^{-1}x)$ **হলে, দেখাও যে,** $(1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$

[কু.'১২; য.'১১; চ.'১২; ঢা.'১৩]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \tan(m\tan^{-1}x) \cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \sec^2(m\tan^{-1}x).\dfrac{m}{1+x^2}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m\{1+\tan^2(m\tan^{-1}x)\}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$ [(1) দ্বারা।]

11(b) $y = \tan(m\tan^{-1}x)$ **হলে, দেখাও যে,** $(1+x^2)y_2 - 2(my-x)y_1 = 0$ **[সি.'০৬]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \tan(m\tan^{-1}x) \cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \sec^2(m\tan^{-1}x).\dfrac{m}{1+x^2}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m\{1+\tan^2(m\tan^{-1}x)\}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$ [(1) দ্বারা।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1(2x) = m.2yy_1$

$(1+x^2)y_2 - 2(my-x)y_1 = 0$

11(c) $y=\sin(m\sin^{-1}x)$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ **[ব.'১১;ঢা.'১০;রা.'০৯; কু.'১৩; দি.'১৪]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\sin(m\sin^{-1}x)\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \cos(m\sin^{-1}x).\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y_1\sqrt{1-x^2} = m\cos(m\sin^{-1}x)$$

$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = m^2\cos^2(m\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = m^2\{1-\sin^2(m\sin^{-1}x)\}$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = m^2(1-y^2)$ [(1) দ্বারা।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1(-2x) = m^2(-2yy_1)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-\quad)y_2 - xy_1 = -m^2y$

$(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ (Showed)

11(d) $y=\cos(2\sin^{-1}x)$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 + 4y = 0$ **[প্র.ভ.প.'০৬]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\cos(2\sin^{-1}x)\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = -\sin(2\sin^{-1}x).\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow y_1\sqrt{1-x^2} = -2\sin(2\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = 4\sin^2(2\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = 4\{1-\cos^2(2\sin^{-1}x)\}$

$(1-x^2)y_1^2 = 4(1-y^2)$ [(1) দ্বারা।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2).2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 4(-2yy_1)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = -4y$

$(1-x^2)y_2 - xy_1 + 4y = 0$ (Showed)

11(e) $y=(\sin^{-1}x)^2$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ **[ব.'০৮; রা.'১১]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=(\sin^{-1}x)^2$ (1)

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = 2(\sin^{-1}x).\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_1 = 2(\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = 4(\sin^{-1}x)^2 = 4y$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2).2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 4y_1$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 2$

$(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ (Showed)

11(f) $y=\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 1 = 0$ **[প্র.ভ.প.'০৫]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $2y=(\sin^{-1}x)^2\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y_1 = 2(\sin^{-1}x).\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_1 = (\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = (\sin^{-1}x)^2 = 2y$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2).2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 2y_1$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 1$

$(1-x^2)y_2 - xy_1 - 1 = 0$ (Showed)

12(a) $\cos\sqrt{y} = x$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ **[য.'০৬,'০৮,'১২; চ.'০৬; রা. '০৭,'০৯; সি.'১০; ব.'১০; ঢা.'১১]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $\cos\sqrt{y} = x \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$-\sin\sqrt{y}\,.\frac{1}{2\sqrt{y}}\,y_1 = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y} = -y_1 \sin\sqrt{y}$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$$4y = y_1^2 \sin^2\sqrt{y} = y_1^2(1-\cos^2\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow 4y = y_1^2(1-x^2) \qquad [(1) \text{ দ্বারা।}]$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$4y_1 = 2y_1 y_2(1-x^2) + y_1^2(-2x)$$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$2 = y_2(1-x^2) - xy_1$$

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0 \text{ (Showed)}$$

12(b) $x = \sin\sqrt{y}$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ [ব.'১২; ঢা. '০৮; কু.'০৮; চ.'১১]

প্রমাণ ঃ এখানে, $x = \sin\sqrt{y} \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\cos\sqrt{y}\,.\frac{1}{2\sqrt{y}}\,y_1 = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y} = y_1 \cos\sqrt{y}$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$$4y = y_1^2 \cos^2\sqrt{y} = y_1^2(1-\sin^2\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow 4y = y_1^2(1-x^2) \qquad [(1) \text{ দ্বারা।}]$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$4y_1 = 2y_1 y_2(1-x^2) + y_1^2(-2x)$$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$2 = y_2(1-x^2) - xy_1$$

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0 \text{ (Showed)}$$

12(c) $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ হলে, দেখাও যে, $x^2y_2 + xy_1 + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ [প্র.ভ.প.'০৪]

প্রমাণ ঃ $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sin x = \sqrt{x}\,y \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\cos x = \sqrt{x}\;y_1 + y.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow 2\cos x = \frac{2xy_1 + y}{\sqrt{x}}$$

$$-2\sin x = \frac{\sqrt{x}(2xy_2 + 2y_1 + y_1) - (2xy_1 + y)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{x}\,y = \frac{1}{2x\sqrt{x}}[2x(2xy_2 + 2y_1 + y_1) - 2xy_1 - y]$$

$$\Rightarrow -4x^2 y = 4x^2 y_2 + 6xy_1 - 2xy_1 - y$$

$$\Rightarrow -4x^2 y = 4x^2 y_2 + 4xy_1 - y$$

$$\Rightarrow 4(x^2 y_2 + xy_1 + x^2 y) = y$$

$$\Rightarrow x^2 y_2 + xy_1 + x^2 y = \frac{y}{4}$$

$$x^2 y_2 + xy_1 + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

13.(a) $x = a(\theta + \sin\theta)$ ও $y = a(1-\cos\theta)$ হলে, $\dfrac{\theta}{2}$ এর মাধ্যমে $\dfrac{dy}{dx}$ ও $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta),\; \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\tan\frac{\theta}{2}) = \frac{d}{d\theta}(\tan\frac{\theta}{2}).\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \sec^2\frac{\theta}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{a(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}.\frac{1}{a.2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}.\frac{1}{2a}\sec^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4a}\sec^4\frac{\theta}{2}$$

13(b) $2x = t + t^{-1}$ এবং $2y = t - t^{-1}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{t^2+1}{t^2-1}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8t^3}{(t^2-1)^3}$

প্রমাণ ঃ এখানে, $2x = t + t^{-1} = t + \frac{1}{t} = \frac{t^2+1}{t}$

$$2\frac{dx}{dt} = \frac{t(2t+0)-(t^2+1).1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}$$

এবং $2y = t - t^{-1} = t - \frac{1}{t} = \frac{t^2-1}{t} = \frac{t^2-1}{t}$

$$2\frac{dy}{dt} = \frac{t(2t-0)-(t^2-1).1}{t^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx} = \frac{t^2+1}{t^2}\times\frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$

এখন, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right).\frac{dt}{dx}$

$$= \frac{(t^2-1).2t-(t^2+1).2t}{(t^2-1)^2}\times\frac{2t^2}{t^2-1}$$

$$= \frac{2t(t^2-1-t^2-1)}{(t^2-1)^2}\times\frac{2t^2}{t^2-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8t^2}{(t^2-1)^3}$$

14. নিচের ফাংশনগুলোর nতম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

(a) মনে করি, $y = \ln x$

$$y_1 = \frac{1}{x} = x^{-1} = (-1)^{1-1}x^{-1}$$

$$y_2 = (-1)x^{-2} = (-1)^{2-1}x^{-2}$$

$$y_3 = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2(1.2)x^{-3}$$

$$= (-1)^{3-1}\{1.(3-1)\}x^{-3}$$

$$y_4 = (-1)(-2)(-3)x^{-2} = (-1)^3(1.2.3)x^{-4}$$

$$= (-1)^3\{1.2.(4-1)\}x^{-4}$$

অনুরূপভাবে,

$$y_n = (-1)^{n-1}\{1.2.3.\cdots\cdots(n-1)\}x^{-n}$$

$\therefore \ln x$ এর nতম অন্তরক সহগ $= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

14(b) মনে করি, $y = \frac{1}{a-x} = (a-x)^{-1}$

$$y_1 = (-1)(a-x)^{-2}(-1) = 1.(a-x)^{-1-1}$$

$$y_2 = (-2)(a-x)^{-3}(-1) = (1.2)(a-x)^{-2-1}$$

$$y_3 = (1.2)(-3)(x-a)^{-4}(-1)$$

$$= (1.2.3)(a-x)^{-3-1}$$

অনুরূপভাবে, $y_n = (1.2.3.\cdots\cdots n)(x-a)^{-n-1}$

$\frac{1}{a-x}$ এর nতম অন্তরক সহগ $= \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$

14 (c) $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

$$\frac{d^n}{dx^n}(\cos^3 x) = \frac{1}{4}\left\{\frac{d^n}{dx^n}(3\cos x) + \frac{d^n}{dx^n}(\cos 3x)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{3\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right) + 3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}+3x\right)\right\}$$

14(d) $e^{3x}\sin^2 x$ [প্র.ভ.প '০১]

$$= e^{3x}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}\{e^{3x} - e^{3x}\cos 2x\}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{3x}\sin^2 x) = \frac{1}{2}\left\{\frac{d^n}{dx^n}(e^{3x}) - \frac{d^n}{dx^n}(e^{3x}\cos 2x)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{3^n e^{3x} - (3^2+2^2)^{\frac{n}{2}}e^{3x}\cos\left(2x + n\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{e^{3x}}{2}\{3^n - (\sqrt{13})^n \cos(2x + n\tan^{-1}\frac{2}{3})\}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1 $y = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}$ এবং $\frac{d^3y}{dx^3}$ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $y = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + x^{-2}$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 0 + (-2)x^{-3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 + (-2)(-3)x^{-4} = 2 + \frac{6}{x^4}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (-2)(-3)(-4)x^{-5} = -\frac{24}{x^5}$$

2. $y = a\cos x + b\sin x$ **হলে, দেখাও যে,** $y_4 - y = 0$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = a\cos x + b\sin x$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = a(-\sin x) + b\cos x$

$y_2 = a(-\cos x) + b(-\sin x)$

$y_3 = a\sin x + b(-\cos x)$

$y_4 = a\cos x + b\sin x = y$

$y_4 - y = 0$ (Showed)

3. $y = \frac{x}{x+2}$ **হলে, দেখাও যে,** $x y_1 = y(1-y)$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \frac{x}{x+2} \Rightarrow x + 2 = \frac{x}{y}$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$1 = \frac{y.1 - xy_1}{y^2} \Rightarrow y^2 = y - xy_1$$

$\Rightarrow xy_1 = y - y^2 \therefore x y_1 = y(1-y)$ (Showed)

4.(a) $y = a x^{n+1} + bx^{-n}$ **হলে, দেখাও যে,** $x^2 y_2 = n(n+1)y$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = a x^{n+1} + bx^{-n}$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = a(n+1)x^n + b(-n)x^{-n-1}$

$y_2 = a(n+1)nx^{n-1} + b(-n)(-n-1)x$

এখন, $x^2 y_2 = n(n+1)ax^{n+1} + n(n+1)bx^{-n}$

$\Rightarrow x^2 y_2 = n(n+1)(ax^{n+1} + bx^{-n})$

$x^2 y_2 = n(n+1)y$ (Showed)

4(b) $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ **হলে, দেখাও যে,** $4y^3 y_2 = 4ac - b^2$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \frac{1}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}(2ax + b)$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}.(2a) - \frac{(2ax+b)^2}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}}{(2\sqrt{ax^2 + bx + c})^2}$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{4a(ax^2 + bx + c) - 4ax^2 - 4abx - b^2}{4(\sqrt{ax^2 + bx + c})^3}$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{4a^2x^2 + 4abx + 4ac - 4ax^2 - 4abx - b^2}{4y^3}$$

$4y^3 y_2 = 4ac - b^2$ (Showed)

5(a) $y = \sqrt{\cos 2x}$ **হলে, দেখাও যে,** $(y\, y_1)^2 = 1 - y^4$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sqrt{\cos 2x} \Rightarrow y^2 = \cos 2x$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2yy_1 = -\sin 2x.2 \Rightarrow yy_1 = -\sin 2x$

$\Rightarrow (yy_1)^2 = \sin^2 2x$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

$\Rightarrow (yy_1)^2 = 1 - \cos^2 2x$

$= 1 - (y^2)^2$ [$\because y^2 = \cos 2x$]

$(y\, y_1)^2 = 1 - y^4$ (Showed)

5(b) $y = \tan\sqrt{1-x}$ **হলে, দেখাও যে,** $2y_1\sqrt{1-x^2} + (1 + y^2) = 0$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \tan\sqrt{1-x}$ $\cdots(1)$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \sec^2\sqrt{1-x}.\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1)$$

$$\Rightarrow 2y_1\sqrt{1-x} = -(1+\tan^2\sqrt{1-x})$$

$$\Rightarrow 2y_1\sqrt{1-x} = -(1+y^2) \quad [(1) \text{ দ্বারা }]$$

$$2y_1\sqrt{1-x} + (1+y^2) = 0 \quad \text{(Showed)}$$

5(c) $y = \dfrac{4}{\sqrt{\sec x}}$ **হলে, দেখাও যে,** $2\cot x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \dfrac{4}{\sqrt{\sec x}} \Rightarrow y^2\sec x = 16$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y^2\sec x\tan x + \sec x.2y\frac{dy}{dx} = 0$$

উভয় পক্ষকে $y\sec x$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$y\tan x + 2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{y}{\cot x} + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2\cot x\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{(Showed)}$$

6. $y = (a+bx)e^{2x}$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $y_2 - 2y_1 - 2be^{2x} = 0$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = (a+bx)e^{2x} \cdots\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = (a+bx).e^{2x}(2) + e^{2x}(0+b)$$

$$\Rightarrow y_1 = 2y + be^{2x} \quad (2) \quad [(1) \text{ দ্বারা।}]$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_2 = -2y_1 + be^{2x}.2$$

$$y_2 - 2y_1 - 2be^{2x} = 0 \quad \text{(Showed)}$$

7(a) $y = x^n \ln x$ **হলে, দেখাও যে,** $xy_1 = ny + x^n$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = x^n \ln x \cdots\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$= x^n\frac{1}{x} + \ln x.nx^{n-1}$$

উভয় পক্ষকে x দ্বারা গুণ করে পাই,

$$y_1 = x^n + nx^n\ln x = x^n + ny \quad [(1) \text{ দ্বারা }]$$

$$xy_1 = ny + x^n \quad \text{(Showed)}$$

7(b) $y = \sqrt{1+x^2}\ \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ **হলে, দেখাও যে,** $(1+x^2)(y_1-1) = xy$

প্রমাণ ঃ $y = \sqrt{1+x^2}\ \ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \sqrt{1+x^2}\ \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\} +$$

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}).\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x)$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} +$$

$$\sqrt{1+x^2}\ \ln(x+\sqrt{1+x^2}).\frac{x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + y.\frac{x}{1+x^2} \quad [(1) \text{ দ্বারা।}]$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = (1+x^2) + xy$$

$$(1+x^2)(y_1-1) = xy \quad \text{(Showed)}$$

8. $y = \sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - x$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - x(y_1-2) + y = 0$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - x\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1}x}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) - 1$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 - \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 = -\frac{x\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1 = -x(y+x) \quad [(1) \text{ দ্বারা।}]$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1 + xy + x^2 = 0$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1-x^2)y_2 + y_1(-2x) + xy_1 + y + 2x = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 + y + 2x = 0$$

$$(1-x^2)y_2 - x(y_1-2) + y = 0$$

9(a) $y = \sin\sqrt{x}$ **হলে, দেখাও যে,**

$$4x(y_1)^2 + y^2 = 1$$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sin\sqrt{x}$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \cos\sqrt{x}\,.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\Rightarrow\ 2\sqrt{x}\ y_1 = \cos\sqrt{x}$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$$4x\ {y_1}^2 = \cos^2\sqrt{x} = 1-\sin^2\sqrt{x} = 1-y^2$$

$$4x\ {y_1}^2 + y^2 = 1 \qquad \text{(Showed)}$$

9(b) $y = \cos\sqrt{x}$ **হলে, দেখাও যে,** $4x(y_1)^2 + y^2 = 1$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \cos\sqrt{x}$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = -\sin\sqrt{x}\,.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\Rightarrow\ 2\sqrt{x}\ y_1 = -\sin\sqrt{x}$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$$4x\ {y_1}^2 = \sin^2\sqrt{x} = 1-\cos^2\sqrt{x} = 1-y^2$$

$$4x\ {y_1}^2 + y^2 = 1 \qquad \text{(Showed)}$$

10. $y = (1-x^2)^n$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_1 + 2nxy = 0$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = (1-x^2)^n$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = n(1-x^2)^{n-1}(-2x)$$

উভয় পক্ষকে $(1-x^2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$y_1(1-x^2) = -2nx(1-x^2)^n = -2nxy$$

$$(1-x^2)y_1 + 2nxy = 0 \quad \text{(Showed)}$$

11. $y = \tan x$ **হলে, দেখাও যে,** $y_2 = 2y(1+y^2)$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \tan x$

$$y_1 = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$y_2 = \frac{d}{dx}(\sec^2 x) = 2\sec x.\sec x\tan x$$

$$= 2\tan x\sec^2 x = 2\tan x(1+\tan^2 x)$$

$$y_2 = 2y(1+y^2) \qquad \text{(Showed)}$$

12. $y = ax\sin x$ **হলে, দেখাও যে,** $x^2y_2 - 2xy_1 + (x^2+2)y = 0$

প্রমাণ ঃ $y = ax\sin x \Rightarrow \dfrac{y}{x} = a\sin x \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{xy_1 - y.1}{x^2} = a\cos x$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{x^2(xy_2 + y_1.1 - y_1) - (xy_1 - y).2x}{x^4} = -a\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{x(x^2y_2 - 2xy_1 + 2y)}{x^4} = -\frac{y}{x} \qquad [(1) \text{ দ্বারা।}]$$

$$\Rightarrow x^2y_2 - 2xy_1 + 2y = -x^2y$$

$$x^2y_2 - 2xy_1 + (x^2+2)y = 0$$

(Showed)

13. $x = \sin t$ **এবং** $y = \sin pt$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - x\ y_1 + p^2y = 0.$

প্রমাণ ঃ এখানে, $x = \sin t$ এবং $y = \sin pt$

$t = \sin^{-1}x$ এবং $pt = \sin^{-1}y$

$p\sin^{-1}x = \sin^{-1}y$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$p\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}y_1$$

$$\Rightarrow p^2(1-y^2) = (1-x^2){y_1}^2$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$p^2(-2yy_1) = (1-x^2)2y_1y_2 + (-2x){y_1}^2$$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$-p^2y = (1-x^2)y_2 - xy_1$$

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 + p^2y = 0.$$

14. নিচের ফাংশনগুলির n তম অন্তরজ (y_n) নির্ণয় কর।

(a) $\dfrac{1}{x}$ [চ.'০২] **(b)** $\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

(c) $\sin x\sin 3x$

(a) মনে করি, $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$

$$y_1 = (-1)x^{-2} = (-1)\ x^{-1-1}$$

$$y_2 = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2(1.2)x^{-2-1}$$

$y_3 = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = (-1)^3(1.2.3)x^{-3-1}$

অনুরূপভাবে, $y_n = (-1)^n(1.2.3.\cdots\cdots n)x^{-n-1}$

$\frac{1}{x}$ এর nতম অন্তরক সহগ $= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ (Ans.)

14(b) ধরি, $y = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$= \frac{1^2+1}{(x-1)(1-2)(1-3)} + \frac{2^2+1}{(2-1)(x-2)(2-3)} + \frac{3^2+1}{(3-1)(3-2)(x-3)}$

$= \frac{2}{(x-1)(-1)(-2)} + \frac{5}{(1)(x-2)(-1)} + \frac{10}{(2)(1)(x-3)}$

$= \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$

$y_n = \frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-1}) - 5\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-2}) + 5\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-3})$

$= \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{5(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{5(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$

(c) $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$

$\frac{d^n}{dx^n}(\sin x \sin 3x) = \frac{1}{2}\{\frac{d^n}{dx^n}(\cos 2x) - \frac{d^n}{dx^n}(\cos 4x)\}$

$= \frac{1}{2}\{2^n \cos(\frac{n\pi}{2} + 2x) - 4^n \cos(\frac{n\pi}{2} + 3x)\}$

প্রশ্নমালা IX J

1. $y = x^3 - 2x^2 + 2$ বক্ররেখার (2, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০১; ঢা.'০৭]

সমাধান ঃ $y = x^3 - 2x^2 + 2$ $\quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

(2, 2) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 3.2^2 - 4(2) = 12 - 8 = 4$

প্রদত্ত বক্ররেখার (2, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 2 = 4(x-2) \Rightarrow 4x - y - 6 = 0$

2. $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার (4,–3) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'১২; সি.'১৩]

সমাধান ঃ $x^2 - y^2 = 7$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$(4, -3)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{-3}$

প্রদত্ত বক্ররেখার $(4 \quad -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y + 3 = \frac{4}{-3}(x-4)$

$\Rightarrow 4x - 16 = -3y - 9 \therefore 4x + 3y - 7 = 0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y + 3 = \frac{3}{4}(x-4)$

$\Rightarrow 4y + 12 = 3x - 12 \therefore 3x - 4y - 24 = 0$

3(a) $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি যে সমস্ত বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে , ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢা.'০৯; য.'১০; চ.'১০; দি.'১১; কু.'১৪]

সমাধান ঃ $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$

$\Rightarrow y(x^2 - 5x + 6) - x + 7 = 0 \cdots(1)$

বক্ররেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি $y = 0$. (1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই $x = 7$

বক্ররেখাটি x-অক্ষকে (7,0) বিন্দুতে ছেদ করে।

(1) বক্ররেখাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $(x^2 - 5x + 6)\frac{dy}{dx} + y(2x-5) - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - y(2x-5)}{x^2 - 5x + 6}$

$(7, 0)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{49 - 35 + 6} = \frac{1}{20}$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y = \frac{1}{20}(x-7)$

$\Rightarrow x - 20y - 7 = 0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y = -20(x-7)$

$\Rightarrow 20x + y \quad 140 = 0$

3(b) দেখাও যে, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ বক্ররেখার যেকোন স্পর্শক দ্বারা স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের যোগফল একটি ধ্রুবক। [ব. '০২; কু.'০৯; রা.'১৪]

সমাধান ঃ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} \qquad (1)$

(1) কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

বক্ররেখার উপর (x_1, y_1) যেকোন বিন্দুতে

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}=\sqrt{a} \quad (2) \text{ এবং } \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

(x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y\sqrt{x_1} - \sqrt{x_1}\,y_1 = -x\sqrt{y_1} + x_1\sqrt{y_1}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{y_1} + y\sqrt{x_1} = \sqrt{x_1}\,y_1 + x_1\sqrt{y_1}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{y_1} + y\sqrt{x_1} = \sqrt{x_1 y_1}(\sqrt{y_1}+\sqrt{x_1})$$

$$\Rightarrow x\sqrt{y_1} + y\sqrt{x_1} = \sqrt{x_1 y_1}\sqrt{a} \qquad [(2) \text{ দ্বারা}]$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{a}\sqrt{x_1}} + \frac{y}{\sqrt{a}\sqrt{y_1}} = 1$$

অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের যোগফল

$= \sqrt{a}\sqrt{x_1} + \sqrt{a}\sqrt{y_1} = \sqrt{a}(\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1})$

$= \sqrt{a}\sqrt{a} = a$

যেকোন স্পর্শকের ক্ষেত্রে কর্তিত অংশের যোগফল $= a$, যা একটি ধ্রুবক।

4. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা.'০২; রা.'০৫,'১০; য.'০৯; দি.'১২]

সমাধান ঃ $y = x^3 - 3x^2 + 2$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad 6x$$

স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$3x \quad - 6x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 0, 2$

$x = 0$ হলে, $y = 2$

$x = 2$ হলে, $y = 8 - 12 + 2 = -2$

নির্ণেয় বিন্দু $(0, 2)$, $(2, -2)$

5.(a) $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব.'০৪, '০৭; য.'০৮; চ. '০৬; কু. '০৬; ঢা.'১৩]

সমাধান ঃ $x^2 + 2ax + y^2 = 0 \cdots \quad (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 2a + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+a}{y}$$

স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

$$-\frac{y}{x+a} = 0 \Rightarrow y = 0$$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x^2 + 2ax = 0$

$\Rightarrow x(x+2a) = 0 \therefore x = 0, -2a$

নির্ণেয় বিন্দু $(0, 0)$, $(-2a, 0)$

5(b) $x^2 + 4y^2 = 8$ উপবৃত্তের যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কু., রা., চ.'০৪; ব. '০৫; য.'০৬; সি.'০৭; দি.'০৯; কু.'১১]

সমাধান ঃ $x^2 + 4y^2 = 8 \quad \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{8y} = -\frac{x}{4y}$$

স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

$$-\frac{4y}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x^2 = 8 \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

নির্ণেয় বিন্দু $(2\sqrt{2}, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$

5(c) $y = x^2 + \sqrt{1-x^2}$ **বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।** [ঢা.'০৬,'১০; চ. '০৭,'১১; ব. '০৯,'১৪; সি.'০৯,'১২; রা.'১৩; য.'১৩]

সমাধান : $y = x^2 + \sqrt{1-x^2} \quad \cdots (1)$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)$$

$$= \frac{x(2\sqrt{1-x^2}-1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x(2\sqrt{1-x^2}-1)} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 0$$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = 1$ হলে, $y = 1^2 + \sqrt{1-1} = 1$

$x = -1$ হলে, $y = (-1)^2 + \sqrt{1-1} = 1$

নির্ণেয় বিন্দু $(1, 1)$, $(-1, 1)$

(d) $x^2 + 4x + y^2 = 0$ **বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।** [কু.'০৩]

সমাধান : $x^2 + 4x + y^2 = 0 \quad \cdots (1)$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 4 + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+2}{y}$$

স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

$$-\frac{y}{x+2} = 0 \Rightarrow y = 0$$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x^2 + 4x = 0$

$\Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow x = 0, -4$

নির্ণেয় বিন্দু $(0, 0)$, $(-4, 0)$

5(e) $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ **বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো অক্ষ দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে তাদের ভুজ নির্ণয় কর।** [সি.'০৮; কু.'০৭, '১৩; রা.'০৮,'১২; দি.'১০; ঢা.'১১; চ.'১৩; য.'১২]

সমাধান : $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1 \cdots \cdots (1)$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 2$$

স্পর্শক অক্ষ দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করলে, $\frac{dy}{dx} = \pm 1 \qquad 3x^2 - 6x - 2 = \pm 1$

'+' নিয়ে, $3x^2 - 6x - 2 = 1$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

'–' নিয়ে, $3x^2 - 6x - 2 = -1$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.3.(-1)}}{2.3} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6}$$

$$= \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

বিন্দুর ভুজ $1 \pm \sqrt{2}$, $\frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$

6. $y = (x+1)(x-1)(x-3)$ **বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।** [কু., ঢা.'১০; সি.'১১; দি.'১৩]

সমাধান : $y = (x+1)(x-1)(x-3) \cdots (1)$

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(x-1)\frac{d}{dx}(x-3) + (x+1)(x-3)\frac{d}{dx}(x-1) + (x-1)(x+3)\frac{d}{dx}(x+1)$$

$= (x+1)(x-1) + (x+1)(x-3) + (x-1)(x-3)$

যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষকে ছেদ করে ঐ সব বিন্দুর y –স্থানাঙ্ক $= 0$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x = -1, 1, 3$

বিন্দুগুলো $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$

$(-1, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= (-2)(-4) = 8$

$(1, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= (2)(-2) = -4$

$(3, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= (4)(2) = 8$

7.(a) a**-এর মান কত হলে,** $y = ax(1-x)$ **বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে।** [সি.'০৬,'১০,'১৪ ; ব.'০৪,'০৮,'১২ ; চ.'০৬ ;

য.'০৪,'০৮ ; রা.'০৪,'০৭,'০৯ ; ঢা.'০৮; কু.'১২,'১৪]

সমাধান ঃ $y = ax(1-x) = a(x - x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = c(1-2x)$$

মূলবিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = a(1+0) = a$

কিন্তু মূলবিন্দুতে ঢাল , $\frac{dy}{dx} = \tan(\pm 60^0)$

$$a = \tan(\pm 60^0) = \pm\sqrt{3}$$

(b) c-এর মান কত হলে, $y = cx(1+x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে। [কু.'০৬; ব.'০৬; য.'০৭; চ.'১২; ঢা.'১৪]

সমাধান ঃ $y = cx(1+x) = c(x + x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = c(1+2x)$$

মূলবিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = c(1+0) = c$

কিন্তু মূলবিন্দুতে ঢাল , $\frac{dy}{dx} = \tan(\pm 30^0)$

$$c = \tan(\pm 30^0) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

8(a) কোন সরলরেখায় একটি গতিশীল কণা t সময়ে $s = at^2 + bt + c$ দূরত্ব অতিক্রম করে। a, b, c ধ্রুবক এবং t সময় পরে কণাটির বেগ v হলে, দেখাও যে, $4a(s-c) = v^2 - b^2$ [য., চ.'০৫; দি.'০৯; কু.'১৪]

সমাধান ঃ এখানে $s = at^2 + bt + c \quad \cdots\cdots(1)$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{ds}{dt} = 2at + b$$

t সেকেন্ডে পর কণাটির বেগ $v = 2at + b$

$\Rightarrow v^2 = 4a^2t^2 + 4abt + b^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow v^2 - b^2 = 4a(at^2 + bt)$

$\Rightarrow v^2 - b^2 = 4a(s-c)$ [(1) দ্বারা]

$$4a(s-c) = v^2 - b^2$$

8(b) যদি কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায় , তবে দেখাও যে, তার ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার তার ব্যাসার্ধের সাথে সমানুপাতিক হবে। [ব. '০৬; চ.'০৮;দি.'১১; রা.'১৪]

প্রমাণ মনে করি, t সময়ে প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং ক্ষেত্রফল A . তাহলে , $A = \pi r^2$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = 2r\pi\frac{dr}{dt}$$

প্রশ্নমতে, $\frac{dr}{dt} =$ ধ্রুবক [∵ ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায়।]

$\frac{dA}{dt} =$ ধ্রুবক $\times r$ [∵ $2\pi\frac{dr}{dt}$ একটি ধ্রুবক]

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} \propto r$$

ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার তার ব্যাসার্ধের সমানুপাতিক।

9(c) যদি একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলো প্রতি সেকেন্ডে $\sqrt{3}$ সে.মি. এবং এর ক্ষেত্রফল প্রতি সেকেন্ডে 12 বর্গ সে.মি. পরিমাণ বৃদ্ধি পায়, তাহলে সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [বুয়েট.'০৮]

সমাধান ঃ ধরি, সমবাহু ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য x সে.মি. এবং এর ক্ষেত্রফল A বর্গ সে.মি.। তাহলে,

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}\times 2x\frac{dx}{dt} \quad \cdots (i)$$

প্রশ্নমতে, $\frac{dx}{dt} = \sqrt{3}$ এবং $\frac{dA}{dt} = 12$

(i) হতে পাই, $12 = \frac{\sqrt{3}}{4}\times 2x \times \sqrt{3}$

$\Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$ বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সে.মি.।

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1(a) $y = x^3 - 2x^2 + 4x$ বক্ররেখার (2 , 5) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৩]

সমাধান ঃ $y = x^3 - 2x^2 + 4x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 4$$

(2, 5) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 3.2^2 - 4(2) + 4$

$$= 12 - 8 + 4 = 8$$

প্রদত্ত বক্ররেখার (2,5) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 5 = 8(x - 2) \Rightarrow 8x - y - 11 = 0$

(b) $x^2 - 5xy + y^2 - 5x + 6y + 9 = 0$ বক্ররেখার (2,1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি.'০২]

সমাধান : $x^2 - 5xy + y^2 - 5x + 6y + 9 = 0$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x - 5x\frac{dy}{dx} - 5y + 2y\frac{dy}{dx} - 5 + 6\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow -(5x - 2y - 6)\frac{dy}{dx} = -(2x - 5y - 5)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 5y - 5}{5x - 2y - 6}$$

(2, 1) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 5 - 5}{10 - 2 - 6} = \frac{-6}{2} = -3$

প্রদত্ত বক্ররেখার (2,1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$y - 1 = -\frac{1}{-3}(x - 2)$$

$$\Rightarrow 3y - 3 = x - 2 \qquad x - 3y + 1 = 0$$

1(c) $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ অধিবৃত্তের (1,–1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'০৩]

সমাধান : $x^3 - 3xy + y^3 = 3$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$3x^2 - 3x\frac{dy}{dx} - 3y + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 3(y^2 - x)\frac{dy}{dx} = 3(y - x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

(1, –1) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{-1 - 1}{1 - 1}$

অর্থাৎ $\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(1,-1)} = \frac{0}{-2} = 0$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (1,–1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(1,-1)} (y + 1) = x - 1$$

$$\Rightarrow 0.(y + 1) = x - 1 \quad \therefore x - 1 = 0$$

1(d) $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০০]

সমাধান : $x^3 - 3axy + y^3 = 0$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$3x^2 - 3ax\frac{dy}{dx} - 3ay + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 3(y^2 - ax)\frac{dy}{dx} = 3(ay - x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

(x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{ay_1 - x_1^2}{y_1^2 - ax_1}$

প্রদত্ত বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y - y_1 = -\frac{y_1^2 - ax_1}{ay_1 - x_1^2}(x - x_1)$

$$\Rightarrow (y - y_1)(ay_1 - x_1^2) + (x - x_1)(y_1^2 - ax_1)$$

1(e) দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1 = 2a(x + x_1)$ [ব.'০১]

প্রমাণ : $y^2 = 4ax$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

(x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y_1}$

প্রদত্ত পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$

$$\Rightarrow yy_1 - y_1^2 = 2a(x - x_1)$$

$\Rightarrow \quad yy_1 - 4ax_1 = 2a(x - x_1)$ যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দু $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত।

$yy_1 = 2a(x + x_1)$ (Showed)

1(f) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}-1}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$$

(x_1, y_1) বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{y_1^{-\frac{1}{3}}}$

প্রদত্ত বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = -\dfrac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{y_1^{-\frac{1}{3}}}(x - x_1)$

$$\Rightarrow yy_1^{-\frac{1}{3}} - y_1^{\frac{2}{3}} = -xx_1^{-\frac{1}{3}} + x_1^{\frac{2}{3}}$$

$\Rightarrow xx_1^{-\frac{1}{3}} + yy_1^{-\frac{1}{3}} = x_1^{\frac{2}{3}} + y_1^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দু (1) বক্ররেখার উপর অবস্থিত।

$$xx_1^{-\frac{1}{3}} + yy_1^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \text{ (Ans.)}$$

2(a) $y^2 - 4x - 6y + 20 = 0$ বক্ররেখার (3,2) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০২]

সমাধান : $y^2 - 4x - 6y + 20 = 0$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y\frac{dy}{dx} - 4 - 6\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-3}$$

(3 , 2) বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{2-3} = -2$

প্রদত্ত বক্ররেখার (3 , 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 2 = -2(x-3) \Rightarrow 2x + y = 8$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x-3)$

$\Rightarrow 2y - 4 = x - 3 \quad \therefore x - 2y + 1 = 0$

2(b) $y = x^3 - 2x^2 + 4$ বক্ররেখার (2 , 4) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৮,'১১]

সমাধান : $y = x^3 - 2x^2 + 4$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$$

(2 , 4) বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = 3\times4 - 8 = 4$

প্রদত্ত বক্ররেখার (2 , 4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 4 = 4(x-2)$

$\Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \quad \therefore 4x - y - 4 = 0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y - 4 = -\dfrac{1}{4}(x-2)$

$\Rightarrow 4y - 16 = -x + 2 \quad \therefore x + 4y - 18 = 0$

2(c) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$ বৃত্তের (1 , 2) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[য.'০৩; রা.'১১]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 6 - 10\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2(y-5)\frac{dy}{dx} = -2(x-3)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x-3}{y-5}$$

(1 , 2) বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1-3}{2-5} = -\dfrac{2}{3}$

প্রদত্ত বক্ররেখার (1 , 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 2 = -\dfrac{2}{3}(x-1)$

$\Rightarrow 3y - 6 = -2x + 2 \quad \therefore 2x + 3y - 8 = 0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y - 2 = \dfrac{3}{2}(x-1)$

$\Rightarrow 2y - 4 = 3x - 3 \quad \therefore 3x - 2y + 1 = 0$

2(d) $y = x^3 - 3x + 2$ বক্ররেখার (2, – 2) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৭]

সমাধান ঃ $y = x^3 - 3x + 2$ $\quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$

$(2, -2)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 3\times4 - 3 = 9$

প্রদত্ত বক্ররেখার $(2, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y + 2 = 9(x-2)$

$\Rightarrow y + 2 = 9x - 18 \therefore 9x - y - 20 = 0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y + 2 = -\frac{1}{9}(x-2)$

$\Rightarrow 9y + 18 = -x + 2 \therefore x - 9y - 16 = 0$

3(a) $y(x-2)(x-3) - x + 3 = 0$ বক্ররেখাটি যে সমস্ত বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৫]

সমাধান ঃ $y(x-1)(x-2) - x + 3 = 0$

$\Rightarrow y(x^2 - 3x + 2) - x + 3 = 0 \cdots(1)$

বক্ররেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি $y = 0$. (1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই $x = 3$.

বক্ররেখাটি x-অক্ষকে $(3,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(1) বক্ররেখাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $(x^2 - 3x + 2)\frac{dy}{dx} + y(2x-3) - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - y(2x-3)}{x^2 - 3x + 2}$

$(3,0)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{9-9+2} = \frac{1}{2}$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y = \frac{1}{2}(x-3)$

$\Rightarrow x - 2y - 3 = 0$

3(b) প্রমাণ কর যে, $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 4 = 0$ বক্ররেখাটি যে সমস্ত বিন্দুতে $3x + 2y = 0$ ও $2x + 5y = 0$ রেখাকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুগুলোতে অঙ্কিত স্পর্শক স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল।

প্রমাণ ঃ $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 4 = 0 \cdots(1)$

$3x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x$ হতে y-এর মান (1) এ বসিয়ে পাই, $3x^2 + 4x(\frac{-3}{2}x) + 5(\frac{-3}{2}x)^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x^2 + \frac{45x^2}{4} - 4 = 0$

$\Rightarrow -12x^2 + 45x^2 = 16 \quad x = \pm\frac{4}{\sqrt{33}}$

$x = \frac{4}{\sqrt{33}}$ হলে, $y = -\frac{3}{2}\times(\frac{4}{\sqrt{33}}) = -\frac{6}{\sqrt{33}}$

$x = -\frac{4}{\sqrt{33}}$ হলে, $y = -\frac{3}{2}\times(-\frac{4}{\sqrt{33}}) = \frac{6}{\sqrt{33}}$

(1) বক্ররেখাটি $3x + 2y = 0$ রেখাকে $(\frac{4}{\sqrt{33}}, -\frac{6}{\sqrt{33}})$ ও $(-\frac{4}{\sqrt{33}}, \frac{6}{\sqrt{33}})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(1) কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$3x^2 + 4xy + 5y^2 - 4 = 0$

$6x + 4x\frac{dy}{dx} + 4y + 10y\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 2(2x + 5y)\frac{dy}{dx} = -2(3x + 2y)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3x+2y}{2x+5y}$

$(\frac{4}{\sqrt{33}}, -\frac{6}{\sqrt{33}})$ ও $(-\frac{4}{\sqrt{33}}, \frac{6}{\sqrt{33}})$ উভয় বিন্দুতে $3x + 2y = 0$ অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x+2y}{2x+5y} = 0$

$\therefore$ এ বিন্দু দুইটিতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল।

আবার, $2x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x$ হতে y- এর মান (1) সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$3x^2 + 4xy + 5y^2 - 4 = 0$

$3x^2 + 4x(-\frac{2}{5}x) + 5(-\frac{2}{5}x)^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow 15x^2 - 8x^2 + 4x^2 - 20 = 0$

$\Rightarrow 11x^2 = 20 \Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$

$x = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$ হলে, $y = -\frac{2}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}} = -\frac{4}{\sqrt{55}}$

$x = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$ হলে, $y = -\frac{2}{5}\times(-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}) = \frac{4}{\sqrt{55}}$

(1) বক্ররেখাটি $2x+5y=0$ রেখাকে $(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, -\frac{4}{\sqrt{55}})$ ও $(-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, \frac{4}{\sqrt{55}})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, -\frac{4}{\sqrt{55}})$ ও $(-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, \frac{4}{\sqrt{55}})$ উভয় বিন্দুতে

$2x + 5y = 0$ অর্থাৎ $\frac{dx}{dy} = -\frac{2x+5y}{3x+2y} = 0$

এ বিন্দু দুইটিতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের লম্ব অর্থাৎ y-অক্ষের সমান্তরাল।

4(a) $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা.'০০]

সমাধান : $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 6x - 6$$

স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$12x^2 + 6x - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2x - x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x(x+1) - 1(x+1) = 0$

$\Rightarrow (x+1)(2x-1) = 0 \therefore x = -1, \frac{1}{2}$

$x = -1$ হলে, $y = -4 + 3 + 6 + 1 = 6$

$x = \frac{1}{2}$ হলে, $y = 4.\frac{1}{8} + 3.\frac{1}{4} - 6.\frac{1}{2} + 1$

$= \frac{2+3-8}{4} = -\frac{3}{4}$

বিন্দু দুইটি $(-1, 6)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$

4(b) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৯; ব.'১৩]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \cdots\cdots(1)$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$$

স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{1-x}{y} = 0 \Rightarrow x = 1$

(1) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $1 + y^2 - 2.1 - 3 = 0$

$\Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

নির্ণেয় বিন্দু $(1, 2)$, $(1, -2)$

4(c) $y = (x-3)^2(x-2)$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা.'০৫]

সমাধান : $y = (x-3)^2(x-2)$

$$\frac{dy}{dx} = (x-3)^2.1 + 2(x-3)(x-2)$$
$$= (x-3)(x-3+2x-4)$$
$$= (x-3)(3x-7)$$

স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$(x-3)(3x-7) = 0 \Rightarrow x = 3, \frac{7}{3}$

$x = 3$ হলে, $y = (3-3)^2(3-2) = 0$

$x = \frac{7}{3}$ হলে, $y = (\frac{7}{3}-3)^2(\frac{7}{3}-2)$

$= \frac{4}{9}\times\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

নির্ণেয় বিন্দু $(3, 0)$, $(\frac{7}{3}, \frac{4}{27})$

4(d) $y^3 = x^2(2a-x)$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ.'০৯]

সমাধান : $y^3 = x^2(2a-x)$

$$3y^2\frac{dy}{dx} = x^2(-1) + 2x(2a-x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x(-x+4a-2x)}{3y^2} = \frac{x(4a-3x)}{2y}$$

স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{x(4a-3x)}{2y} = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{4a}{3}$$

$x = 0$ হলে, $y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = \frac{4a}{3}$ হলে, $y^3 = \frac{16a^2}{9}(2a - \frac{4a}{3})$

$$\Rightarrow y^3 = \frac{16a^2}{9} \times \frac{2a}{3} \therefore y = \frac{2a\sqrt[3]{4}}{3}$$

নির্ণেয় বিন্দু $(0, 0)$, $(\frac{4}{3}a, \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}a)$

5(a) $y = 3x^2 + 2x - 1$ বক্ররেখার $(1, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [রা.'০১]

সমাধান ঃ $y = 3x^2 + 2x - 1$ $\quad \frac{dy}{dx} = 6x + 2$

$(1, 0)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 6 \times 1 + 2 = 8$

প্রদত্ত বক্ররেখার $(1, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল 8

5(b) $x^2 + xy + y^2 = 4$ বক্ররেখার $(2, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [সি.'০৩]

সমাধান ঃ $x^2 + xy + y^2 = 4$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2y)\frac{dy}{dx} = -(2x + y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

$(2, -2)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = -\frac{4-2}{2-4} = 1$

প্রদত্ত বক্ররেখার $(2,-2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল 1.

5(c) $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ বক্ররেখাটি $(2, 1)$ দিয়ে অতিক্রম করে। ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [চ.'০৩]

সমাধান ঃ $x^3 - 3xy + y^3 = 3$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$3x^2 - 3x\frac{dy}{dx} - 3y.1 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow -3(x - y^2)\frac{dy}{dx} = -3(x^2 - y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

$(2, 1)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{4-1}{2-1} = 3$

স্পর্শকের ঢাল 3

6(a) a-এর মান কত হলে, $y = ax(1-x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে। [ঢা.'০৪]

সমাধান ঃ $y = ax(1-x) = a(x - x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = c(1 - 2x)$$

মূলবিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = a(1 + 0) = a$

কিন্তু মূলবিন্দুতে ঢাল, $\frac{dy}{dx} = \tan(\pm 30^0)$

$$a = \tan(\pm 30^0) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

6(b) $y = ax^2 + bx + c$ বক্ররেখাটি মূলবিন্দু এবং $(1, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায়। যদি মূলবিন্দুতে বক্ররেখাটির ঢাল 2 হয়, তবে a, b, c এর মান নির্ণয়। [ঢা.'০১]

সমাধান ঃ $y = ax^2 + bx + c$

$\frac{dy}{dx} = 2ax + b \therefore$ মূলবিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = b$

কিন্তু মূলবিন্দুতে ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 2$ $\quad b = 2$

বক্ররেখাটি মূলবিন্দু এবং $(1, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

$0 = a.0 + b.0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$ এবং

$1 = a + b + c \Rightarrow 1 = a + 2 + 0 \Rightarrow a = -1$

$a = -1, b = 2, c = 0$

7 (a) একটি গতিশীল কণার কোন সরলরেখায় t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 63t - 6t^2 - t^3$ দ্বারা প্রকাশিত হয়। 2 সেকেন্ড শেষে তার বেগ এবং থামার পূর্বে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [চ.'০২; সি.'০৪]

সমাধান ঃ এখানে $s = 63t - 6t^2 - t^3$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{ds}{dt} = 63 - 12t - 3t^2$$

t সময় পর কণাটির বেগ $= 63 - 12t - 3t^2$

2 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ $= (63 - 24 - 12)$ একক/সেকেন্ড $= 27$ একক/সেকেন্ড (Ans.)

আবার কণাটির থেমে যাবে যখন বেগ $\frac{ds}{dt} = 0$

$$63 - 12t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t^2 + 4t - 21 = 0$$

$$\Rightarrow (t-3)(t+7) = 0 \ \therefore t = 3 \quad [\because t \neq -7]$$

থামার পূর্বে কণাটি 3 সেকেন্ড চলেছিল এবং 3 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = (189 - 54 - 27)$

$= 108$ একক।

7(b) একটি কণা সরলরেখায় এমনভাবে চলে যেন $s = \sqrt{t}$ হয়। দেখাও যে কণাটির ত্বরণ ঋণাত্মক এবং বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক। **[সি.'০২]**

প্রমাণ : $s = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$

এবং $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})t^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}$

$\therefore$ কণাটির বেগ $= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$ এবং

ত্বরণ $= -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}} = -2(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}})^3 = -2\times$ (বেগ)^3

ত্বরণ ঋণাত্মক এবং তা বেগের ঘনফলের সমানুপাতিক।

7(c) একটি বস্তুর গতির সমীকরণ $s = t^3 + \frac{1}{t^3}$ হলে দেখাও যে, এর ত্বরণ সর্বদাই ধনাত্মক এবং $t = 10$ হলে এর গতিবেগ নির্ণয় কর। **[চ.'০১]**

প্রমাণ : গতির সমীকরণ $s = t^3 + \frac{1}{t^3}$

t সময়ে গতিবেগ, $\frac{ds}{dt} = 3t^2 - \frac{3}{t^4}$

যখন $t = 10$, গতিবেগ $= 300 - \frac{3}{10^4}$

$= 299.99$ একক (প্রায়)

$t = 10$ হলে,

আবার t সময়ে ত্বরণ, $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t + \frac{12}{t^5} > 0$

$[\because t > 0]$

ত্বরণের মান সব সময় ধনাত্মক।

7(d) একটি কণা সরলপথে এমনভাবে চলে যেন t সময়ে তার অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = \sqrt{2t}$ হয়। দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক। **[ঢা.'০১]**

প্রমাণ : এখানে $s = \sqrt{2t} = \sqrt{2}\ t^{\frac{1}{2}}$

কণাটির বেগ $= \frac{ds}{dt} = \sqrt{2}.\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}t^{-\frac{1}{2}}$

ত্বরণ $= \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}t^{-\frac{3}{2}} = -(\frac{1}{\sqrt{2}}t^{-\frac{1}{2}})^3$

$= -$ (বেগ)^3

কণাটির ত্বরণ বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক।

7(e) একটি পুকুরের একটি বৃত্তাকার ঢেউ এর পরিধির বৃদ্ধির হার 'a' ফুট/সেকেন্ড। দেখাও যে, এর ব্যাসার্ধের বৃদ্ধির হার $a/2\pi$ ফুট / সেকেন্ড। **[প্র.ভ.প.'১৭]**

প্রমাণ মনে করি, t সেকেন্ডে প্রদত্ত বৃত্তাকার ঢেউ এর ব্যাসার্ধ r ফুট এবং পরিধির S ফুট

তাহলে, $S = 2\pi r$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(2\pi r) = 2\pi\frac{dr}{dt}$$

প্রশ্নমতে, $\frac{dS}{dt} = a$ $\qquad [\because$ পরিধির বৃদ্ধির হার 'a']

$$a = 2\pi\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{a}{2\pi}$$

ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার $\frac{a}{2\pi}$ ফুট/সেকেন্ড।

7(f) একটি গতিশীল কণার t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয় যেখানে u এবং f ধ্রুবক। দেখাও যে, t সময়ে তার বেগ $u + ft$ এবং ত্বরণ f.

প্রমাণ : এখানে $s = ut + \frac{1}{2} ft^2$

t সময়ে কণাটির বেগ, $\frac{ds}{dt} = u + ft$ এবং

t সময়ে কণাটির ত্বরণ, $\frac{d^2s}{dt^2} = f$

7. (g) একটি গতিশীল কণার কোন সরলরেখায় t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব s=$\frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$ মিটার। 5 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। [সি.'০৫]

সমাধান ঃ এখানে $s = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$

t সেকেন্ডে কণাটির বেগ, $\frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}t^2 + 2t + 4$

এবং t সময়ে কণাটির ত্বরণ, $\frac{d^2s}{dt^2} = 3t + 2$

$\therefore$ 5 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ $= \frac{3}{2}.25 + 10 + 4$

$= 51.5 \text{ ms}^{-1}$

এবং ত্বরণ $= (3 \times 5 + 2) \text{ ms}^{-2} = 17 \text{ ms}^{-2}$

প্রশ্নমালা IX K

1. (a) Sol^n : $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2.1} = \frac{-\cos 0}{2} = \frac{-1}{2}$

(b) Sol^n : উপরের সবগুলি তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. D

(c) Sol^n : $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$ $\therefore$ Ans. A

(d) Sol^n : বক্ররেখাটি পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।

(e) Sol^n : $f(x) = y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = x$

$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{1}{2} + 1(x-1)$

$= x - \frac{1}{2} = x - 0{\cdot}5$ $\therefore$ Ans. D

(f) Sol^n : $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$
$= f(2+1) - f(2)$

$= \frac{1}{2}(3^2 - 2^2) = \frac{1}{2}(9-4) = \frac{5}{2} = 2{\cdot}5$

(g) Sol^n : $dx = \delta x = 1$

$f'(x) = x$ $\therefore f'(1) = 1$

$dy = f'(1)\,dx = 1 \times 1 = 1$ $\therefore$ Ans. A

(h) Sol^n : $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$

চরমবিন্দুর জন্য, $f'(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

এখন, $f(1) = 3 - 6 + 4 = 1$ $\therefore$ চরমবিন্দু (1, 1)

(i) Sol^n : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x^2)}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(4x^2) \times 8x}{1} = \cos 0 \times 8 \times 0 = 0$

Ans. B

(j) Sol^n : $\frac{d}{dx}(x^x) = x^x [x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x)]$

$= x^x [x \times \frac{1}{x} + \ln x.1] = x^x(1 + \ln x)$

Ans. D.

(k) Sol^n : $f(x) = x + x^{-1}$ $\therefore f'(x) = 1 - x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = -1$ এর জন্য $f''(x) < 0$ এবং $f(x) = -2$

Ans. A.

(*l*) Sol^n : $y = x^3 - 5x$ হলে $\frac{d^3y}{dx^3} = 3! = 6.$

(m) Sol^n : $y = x + x^{-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$

রেখাটির ঢাল শূন্য হলে, $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$\Rightarrow x = \pm 1$ $\therefore$ Ans. B

2. (a) দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 18$

$= 3(x^2 - 2x + 1) + 15$

$= 3(x-1)^2 + 15 > 0$, সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য।

প্রদত্ত ফাংশনটি একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

(b) দেখাও যে, $x = 1$ বিন্দুতে $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ ফাংশনটি হ্রাস পায়।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

$\therefore f'(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1$

$= -2 < 0$

$x = 2$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনটি হ্রাস পায়।

3. নিম্নের ফাংশনগুলি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় ও কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর।

(a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4, -1 \leq x \leq 2$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$

$f'(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$

এখানে, $x = 1$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$ এবং বিন্দুটি $-1 \leq x \leq 2$ ব্যবধিকে $-1 \leq x < 1$ এবং $1 < x \leq 2$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-1 \leq x < 1$ এর জন্য $6(x-1) < 0$, কাজেই $f'(x) < 0$.

$-1 \leq x < 1$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন হ্রাস পায়।

আবার, $1 < x \leq 2$ এর জন্য $6(x-1) > 0$, কাজেই $f'(x) > 0$.

$1 < x \leq 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

(b) $f(x) = (x-2)^3 (x+1)^2, -1 \leq x \leq 3$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = (x-2)^3(x+1)^2$

$f'(x) = (x-2)^3 \times 2(x+1)$

$+ (x+1)^2 \times 3(x-2)^2$

$= (x-2)^2 (x+1) \{2(x-3) + 3(x+1)$

$= (x-2)^2 (x+1)(2x - 6 + 3x + 3)$

$= (x-2)^2 (x+1)(5x-3)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, 3/5, 2$

$x = -1, 3/5, 2$ বিন্দুগুলি $-1 \leq x \leq 3$ ব্যবধিকে $-1 < x < 3/5$, $3/5 < x < 2$ এবং $2 < x < 3$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-1 < x < 3/5$ এর জন্য $f'(x) < 0$.

$-1 < x < 3/5$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন হ্রাস পায়।

$3/5 < x < 2$ এর জন্য $f'(x) > 0$.

$3/5 < x < 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

$2 < x < 3$ এর জন্য $f'(x) > 0$.

$3/5 < x < 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

4. (a) x এর কোন মানের জন্য নিচের ফাংশনগুলো গুরুমান অথবা লঘুমান পাওয়া যায়?

(i) ধরি, $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$ [য.'০৭]

$\therefore f'(x) = \dfrac{(x-10)(2x-7) - (x^2 - 7x + 6).1}{(x-10)^2}$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\dfrac{(x-10)(2x-7) - (x^2 - 7x + 6).1}{(x-10)^2} = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 27x + 70 - x^2 + 7x - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 20x + 64 = 0$

$\Rightarrow (x-4)(x-16) = 0 \Rightarrow x = 4, 16$

$x = 4$ ও 16 এর জন্য প্রদত্ত ফাংশনের গুরুমান অথবা লঘুমান থাকবে।

(ii) $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$ [কু.'০৪]

ধরি, $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$

$\therefore f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0$

$x = 1, 2, 3$

$x = 1, 2$ ও 3 এর জন্য প্রদত্ত ফাংশনের গুরুমান অথবা লঘুমান থাকবে।

4(b) $f(x) = x - x^2 - x^3$ এর সন্ধিবিন্দু নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $f(x) = x - x^2 - x^3$

$f'(x) = 1 - 2x - 3x^2$

সন্ধিবিন্দুতে, $f'(x) = 0$

$1 - 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 3x - x - 1 = 0$

$\Rightarrow 3x(x+1) - 1(x+1) = 0$

$\Rightarrow (x+1)(3x-1) = 0$

$x = -1, \frac{1}{3}$

$x = -1$ হলে, $f(x) = -1 - 1 + 1 = -1$

$x = \frac{1}{3}$ হলে, $f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27}$

$= \frac{9-3-1}{27} = \frac{5}{27}$

নির্ণেয় সন্ধিবিন্দু $(-1, -1)$, $(\frac{1}{3}, \frac{5}{27})$

5. নিচের ফাংশনগুলো গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর ঃ

(a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ [চ.'০৪; রা.'১১]

সমাধান ঃ $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$ এবং

$f''(x) = 12x - 18$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \therefore x = 1, 2$

এখন, $f''(1) = 12\times1 - 18 = -6 < 0$

$f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = 1$ এবং

এর মান $= f(1) = 2 - 9 + 12 + 5 = 19 - 9 = 10$

আবার, $f''(2) = 12\times2 - 18 = 24 - 18 = 6 > 0$

$f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x = 2$ এবং

এর মান $= f(2) = 2\times2^3 - 9\times2^2 + 12\times2 + 5$

$= 16 - 36 + 24 + 5 = 45 - 36 = 9$

5(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

[রা.'০৫,'১০; ব.'০৮; সি.'০৮; চ.'০৯,'১১]

সমাধান ঃ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$ এবং

$f''(x) = 6x - 6$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \therefore x = 5, -3$

এখন, $f''(-3) = 6\times-3 - 6 = -24 < 0$

$f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = -3$ এবং

এর মান $= f(-3) = -27 - 27 + 135 + 13$

$= 148 - 54 = 94$

আবার, $f''(5) = 6\times5 - 6 = 24 > 0$

$f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x = 5$ এবং

এর মান $= f(5) = 125 - 75 - 225 + 13$

$= 138 - 300 = -162$

5(c) $x(12-2x)^2$ **[ব.'০৫]**

সমাধান ঃ ধরি, $f(x) = x(12-2x)^2$

$= 4x(6-x)^2$

$f'(x) = 4x.2(6-x)(-1) + 4(6-x)^2.1$

$= 4(6-x)(-2x + 6 - x)$

$= 4(6-x)(6-3x) = 12(6-x)(2-x)$

এবং $f''(x) = 12\{(6-x)(-1) + (2-x)(-1)\}$

$12(-6 + x - 2 + x) = 24(x-4)$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 12(6-x)(2-x) = 0 \therefore x = 2, 6$

এখন $f''(2) = 24(2-4) = -48 < 0$

$f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = 2$ এবং

এর মান $= f(2) = 8(6-2)^2 = 128$

আবার $f''(6) = 24(6-4) > 0$

$f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x = 6$ এবং

এর মান $= f(6) = 8(6-6)^2 = 0$

5(d) $1 + 2\sin x + 3\cos^2 x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

[ব.'০১; ঢা.'০৮]

সমাধান ঃ ধরি, $y = 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$

$\frac{dy}{dx} = 2\cos x + 6\cos x(-\sin x)$

$= 2\cos x(1 - 3\sin x)$ এবং

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\cos x(-3\cos x) + 2(1-3\sin x)(-\sin x)$$
$$= -6\cos^2 x - 2\sin x + 6\sin^2 x$$

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 2\cos x(1-3\sin x) = 0$

$\cos x = 0, \sin x = \frac{1}{3}$

$\cos x = 0$ হলে $\sin x = 1$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = -2 + 6 > 0$

প্রদত্ত ফাংশন লঘুমান হবে যখন $\cos x = 0$ এবং এর মান $= 1 + 2(1) + 3(0)^2 = 3$

আবার, $\sin x = \frac{1}{3}$ হলে $\cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -6 \cdot \frac{8}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{9} < 0$$

প্রদত্ত ফাংশন গুরুমান হবে যখন $\sin x = \frac{1}{3}$ এবং এর মান $= 1 + 2.\frac{1}{3} + 3.\frac{8}{9} = \frac{3+2+8}{3} = \frac{13}{3}$

5(e) $u = \frac{4}{x} + \frac{36}{y}$, **যখন** $x + y = 2$

সমাধান ঃ $u = \frac{4}{x} + \frac{36}{2-x}$ $\quad [\ x + y = 2]$

$$\therefore \frac{du}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{36}{(2-x)^2}(-1)$$
$$= -\frac{4}{x^2} + \frac{36}{(2-x)^2}$$

এবং $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{8}{x^3} + \frac{72}{(2-x)^3}$

চরম মানের জন্য, $\frac{du}{dx} = 0$

$\Rightarrow -\frac{4}{x^2} + \frac{36}{(2-x)^2} = 0$

$\Rightarrow -4(4 - 4x + x^2) + 36x^2 = 0$

$\Rightarrow -16 + 16x - 4x^2 + 36x^2 = 0$

$\Rightarrow 32x^2 + 16x - 16 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Rightarrow (2x+1)(x-1) = 0 \therefore x = 1, -\frac{1}{2}$

$x = 1$ এর জন্য, $\frac{d^2u}{dx^2} = 8 + 72 > 0$

$x = 1$ এর জন্য, u এর লঘুমান আছে।

লঘুমান $= \frac{4}{x} + \frac{36}{2-x} = \frac{4}{1} + \frac{36}{2-1} = 40$

আবার $x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -64 + \frac{72}{(2+\frac{1}{2})^3} = -64 + \frac{72\times 8}{125} < 0$$

$x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য, u এর গুরুমান আছে।

গুরুমান $= \frac{4}{-\frac{1}{2}} + \frac{36}{2+\frac{1}{2}} = -8 + \frac{72}{5} = \frac{32}{5}$

6.(a) দেখাও যে, $x + \frac{1}{x}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [রা.'০৬; কু.'০৮; ঢা.'০৫,'১১; য.'০৯; য.,চ., সি.'১০,'১৪]

প্রমাণ : মনে করি, $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ এবং $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, 1$

এখন, $f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} < 0$

$x = -1$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

গুরুমান $= f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$

আবার, $f''(1) = \frac{2}{1^3} > 0$

1 এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

লঘুমান = $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

$x + \frac{1}{x}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

6(b) দেখাও যে, $4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান 12.
[রা.'০৩,'০৮; ব.'০৫,'১০; কু.'১০; চ.,দি.'১৪]

প্রমাণ : মনে করি, y = $4e^x + 9e^{-x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4e^x - 9e^{-x}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^x + 9e^{-x}$

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0 \therefore 4e^x - 9e^{-x} = 0$

$\Rightarrow 4e^x = \frac{9}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 = \frac{9}{4} \quad e^x = \pm\frac{3}{2}$

$e^x = \frac{3}{2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4.\frac{3}{2} + 9\times\frac{2}{3} > 0$

$\therefore e^x = \frac{3}{2}$ এর জন্য $4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান আছে।

লঘুমান = $4.\frac{3}{2} + 9\times\frac{2}{3} = 6 + 6 = 12$

6(c) দেখাও যে, $\frac{x}{\ln(x)}$ এর লঘুমান e. [ঢা.'০৭; কু.'০৯]

প্রমাণ : মনে করি, $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

$$f'(x) = \frac{\ln(x).1 - x\frac{1}{x}}{\{\ln(x)\}^2} = \frac{\ln(x) - 1}{\{\ln(x)\}^2} \text{ এবং}$$

$$f''(x) = \frac{\{\ln(x)\}^2.\frac{1}{x} - \{\ln(x) - 1\}2\ln(x).\frac{1}{x}}{\{\ln(x)\}^4}$$

$$= \frac{\ln(x)\{\ln(x) - 2\ln(x) + 2\}}{x\{\ln(x)\}^4} = \frac{-\ln(x) + 2}{x\{\ln(x)\}^3}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\frac{\ln(x) - 1}{\{\ln(x)\}^2} = 0 \Rightarrow \ln(x) = 1 \;\therefore x = e$$

এখন, $f''(e) = \frac{-1+2}{e(1)^3} = \frac{1}{e} > 0$

$x = e$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

$\frac{x}{\ln(x)}$ এর লঘুমান = $f(e) = \frac{e}{1} = e$

6(d) দেখাও যে, $\frac{\ln x}{x}$ এর লঘুমান $\frac{1}{e}$.

প্রমাণ মনে করি, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{x\frac{1}{x} - \ln x.1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ এবং}$$

$$f''(x) = \frac{x^2(-\frac{1}{x}) - (1 - \ln x).2x}{x^4}$$

$$= \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \;\therefore x = e$$

এখন, $f''(e) = \frac{-3 + 2.1}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0$

$x = e$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\frac{x}{\ln(x)}$ এর গুরুমান = $f(e) = \frac{1}{e}$

6. (e) দেখাও যে, $(x)^{\frac{1}{x}}$ এর গুরুমান $(e)^{\frac{1}{e}}$.

প্রমাণ ধরি, $f(x) = (x)^{\frac{1}{x}}$

$$f'(x) = (x)^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(\frac{1}{x})]$$

$$= (x)^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x}.\frac{1}{x} + \ln x(-\frac{1}{x^2})]$$

$$= (x)^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ln x] = (x)^{\frac{1}{x}}(\frac{1 - \ln x}{x^2})$$

এবং $f''(x) = (x)^{\frac{1}{x}}\frac{d}{dx}(\frac{1 - \ln x}{x^2})$

$$= (x)^{\frac{1}{x}} \frac{x^2(-\frac{1}{x}) - (1-\ln x).2x}{x^4}$$
$$+ (\frac{1-\ln x}{x^2})\, (x)^{\frac{1}{x}} (\frac{1-\ln x}{x^2})$$
$$= (x)^{\frac{1}{x}} \frac{-x(1+2-2\ln x)}{x^4} + (x)^{\frac{1}{x}} \frac{(1-\ln x)^2}{x^4}$$
$$= (x)^{\frac{1}{x}} \frac{-3+2\ln x}{x^3} + (x)^{\frac{1}{x}} \frac{(1-\ln x)^2}{x^4}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x)=0$

$$(x)^{\frac{1}{x}} (\frac{1-\ln x}{x^2}) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \quad \therefore x = e$$

এখন, $f''(e) = (e)^{\frac{1}{e}} \frac{-3+2.1}{e^3} + 0 = (e)^{\frac{1}{e}} \frac{-1}{e^3} < 0$

$x = e$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$(x)^{\frac{1}{x}}$ এর গুরুমান $= f(e) = (e)^{\frac{1}{e}}$

7. দেখাও যে, $\sin x(1+\cos x)$ গরিষ্ঠ হবে যখন $x = \frac{\pi}{3}$.

প্রমাণ : মনে করি, $f(x) = \sin x(1+\cos x)$

$$f'(x) = \sin x(-\sin x) + (1+\cos x)\cos x$$
$$= -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x$$
$$= \cos x + \cos 2x$$

এবং $f''(x) = -\sin x - 2\sin 2x$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\cos x + \cos 2x = 0$$
$$\Rightarrow \cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4.2.(-1)}}{2.2} = \frac{-1\pm 3}{4}$$
$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

এখন, $f''(\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{2\pi}{3}$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

$\sin x(1+\cos x)$ গরিষ্ঠ হবে যখন $x = \frac{\pi}{3}$

8.(a) দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$ এর কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই। **[য.'০১,'১১]**

প্রমাণ ঃ এখানে $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 24 = 3(x^2 - 4x + 8) = 3\{(x-2)^2 + 4\}$, যা x এর কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

8(b) দেখাও যে, $f(x) = \frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$ এর কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

প্রমাণ ঃ এখানে $f(x) = \frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$

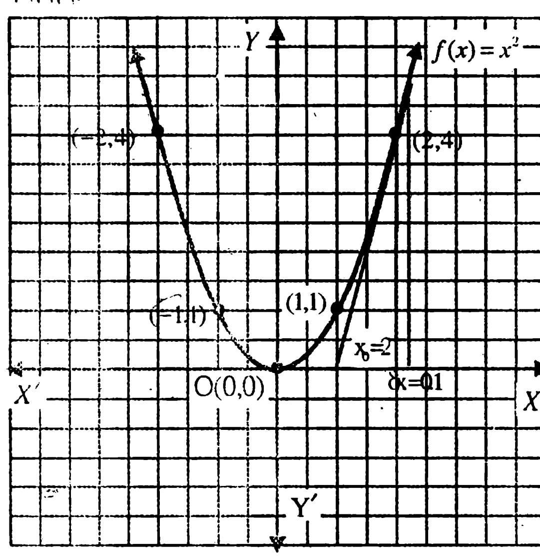
$$\therefore f'(x) = \frac{1}{\sin^2(x+b)}[\sin(x+b).\cos(x+a) - \sin(x+a)\cos(x+b)]$$

$= \frac{\sin(x+b-x-a)}{\sin^2(x+b)} = \frac{\cos(b-a)}{\sin^2(x+b)}$, যা x এর কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

9. (a) $f(x) = x^2$ এর লেখচিত্র ব্যবহার করে $(2{\cdot}1)^2$ এর আসন্নমান নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, $x_0 = 2$ এবং $x_0 + \delta x = 2{\cdot}1$

$\delta x = 0{\cdot}1$

এখন, $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$f'(2) = 2\times 2 = 4.$

$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\delta x$

$\Rightarrow f(2{\cdot}1) \approx f(2) + f'(2)\times 0{\cdot}1$

$\Rightarrow (2{\cdot}1)^2 \approx 2^2 + 4\times 0{\cdot}1$

$\Rightarrow (2{\cdot}1)^2 \approx 4 + 0{\cdot}4$

$(2{\cdot}1)^2 \approx 4{\cdot}4$ (Ans.)

(b) $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sqrt{1+x}$ ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন করে $\sqrt{0{\cdot}9}$ এবং $\sqrt{1{\cdot}1}$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$f(0) = \sqrt{1+0} = 1$ এবং $f(0) = \dfrac{1}{2}$

$x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sqrt{1+x}$ ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন কওে পাই,

$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - 0)$

[$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ সূত্র দ্বারা]

$\Rightarrow \sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x \cdots\cdots (1)$

(1) এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$\sqrt{1-0{\cdot}1} \approx 1 + \dfrac{1}{2}(-0{\cdot}1)$

$\Rightarrow \sqrt{0{\cdot}9} \approx 1 - 0{\cdot}05 \Rightarrow \sqrt{0{\cdot}9} \approx 0{\cdot}95$

আবার, (1) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

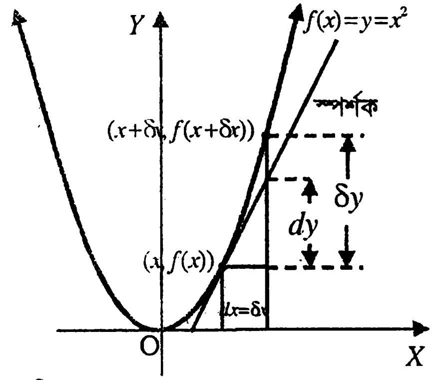
$\sqrt{1+0{\cdot}1} \approx 1 + \dfrac{1}{2}(0{\cdot}1)$

$\Rightarrow \sqrt{1{\cdot}1} \approx 1 + 0{\cdot}05 \Rightarrow \sqrt{1{\cdot}1} \approx 1{\cdot}05$

$\sqrt{0{\cdot}9}$ এবং $\sqrt{1{\cdot}1}$ এর আসন্ন মান যথাক্রমে $0{\cdot}95$ এবং $1{\cdot}05$.

10. (a) $y = x^2$ স্কেচ অঙ্কন কর এবং তাতে δy ও dy চিহ্নিত কর। $x = 2$ ও $\delta x = dx = 1$ হলে δy ও dy নির্ণয় কর।

সমাধানঃ নিম্নে $f(x) = y = x^2$ স্কেচ অঙ্কন করে তাতে δy ও dy চিহ্নিত করা হলো।



$x = 2$ ও $\delta x = dx = 1$ হলে,

$\delta y = f(x + \delta x) - f(x) = f(2+1) - f(2)$

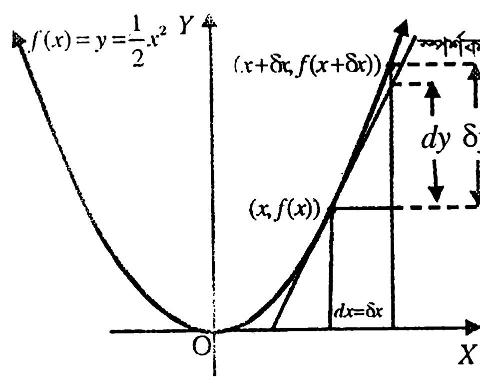
$= f(3) - f(2) = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$

এখন, $f(x) = y = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$dy = f'(x)\,dx = f'(2)\times 1 = 2\times 2 = 4$

(b) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ স্কেচ অঙ্কন কর এবং তাতে δy ও dy চিহ্নিত কর। $x = 3$ ও $\delta x = dx = 3$ হলে δy ও dy নির্ণয় কর।

সমাধানঃ নিম্নে $f(x) = y = x^2$ স্কেচ অঙ্কন করে তাতে δy ও dy চিহ্নিত করা হলো।



$x =$ ও $\delta x = dx = 3$ হলে,

$\delta y = f(x + \delta x) - f(x) = f(3+3) - f(3)$

$= f(6) - f(3) = \frac{1}{2}(6^2 - 3^2) = \frac{1}{2}(36 - 9)$

$= 13\cdot5$

এখন, $f(x) = y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = x$

$dy = f'(x)\,dx = f'(3) \times 3 = 3\times3 = 9$

11. দেওয়া আছে, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

(a) $x^{\cos^{-1}x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।[কু.'১৩; য. '১০,'১৪; সি.'০৮; ঢা.'১৩; রা.'১০,'১৪; ব.'১০;চ.'১৪]

(b) দেখাও যে, f(x) এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [কু.'০৮; ব.'০৯;য. '১০,'১২; চ. '১০;সি.'১০,'১৪]

(c) x = 1 বিন্দুর সন্নিকটে f(x) এর যোগাশ্রয়ী অসন্নমান নির্ণয় কর। x = 1 ও $\delta x = dx = 1$ হলে δy ও dy নির্ণয় কর।

সমাধান: (c) দেওয়া আছে, $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$f(1) = 1 + 1 = 2,\ f'(1) = 1 - 1 = 0$

x = 1 বিন্দুর সন্নিকটে f(x) এর যোগাশ্রয়ী অসন্নমান,

$f(x) \approx 2 + f'(1)(x - 1)$

[$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ সূত্র দ্বারা]

$\Rightarrow f(x) \approx 2$ (Ans.)

এখন, x = 1 ও $\delta x = dx = 1$ হলে,

$\delta y = f(x + \delta x) - f(x) = f(1 + 1) - f(1)$

$= f(2) - f(1) = 2 + \frac{1}{2} - (1 + \frac{1}{1})$

$= 2 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ (Ans.)

এবং $dy = f'(x)\,dx = f'(1) \times 1 = 0\times1 = 0$

12 $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ।

(a) মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য ও ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্য বর্ণনা কর।

(b) $y = \sqrt{(4 + 3\sin x)}$ হলে, দেখাও যে, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$ [য.'১৩;কু.'১১,'১৪; চ.'১০; ঢা. '০৮; রা.'১২; সি.'১২;দি.'১১]

(c) প্রদত্ত বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৯; য.'১০; চ.'১০; দি.'১১; কু.'১৪]

সমাধান: (a) মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য (Intermediate Value Theorem): যদি f(x) ফাংশন [a, b] বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং $d \in [f(a), f(b)]$ হয়, তবে অন্ততঃপক্ষে একটি বিন্দু $x = c \in [a, b]$ এর জন্য $f(c) = d$ হবে।

ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্য (Lagrange's Mean Value Theorem) : যদি f(x) ফাংশন [a, b] বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হয় এবং]a, b[খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য হয়, তবে অন্ততঃপক্ষে একটি বিন্দু c∈]a, b[এর জন্য $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$

(b) **প্রশ্নমালা IX I এর 9(b) দ্রষ্টব্য।**

(c) প্রশ্নমালা **IX J** এর **3 দ্রষ্টব্য।**

13. স্যান্ডউইচ উপপাদ্য (Sandwich or Princing Theorem) : যদি f(x), g(x) এবং h(x) ফাংশনত্রয় $g(x) \le f(x) \le h(x)$ সিদ্ধ করে এবং $\lim_{x\to a} g(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$ হয়, তবে $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

(a) $x^2 \sin^{-1}(1 - x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [ব.'০৮;দি.'১২; ঢা.'১৪]

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। [রা.'০৯; ব.'১১,'১৪; কু.'১০; সি.'০৯; মা.'১৩]

(c) স্যান্ডউইচ উপপাদ্যের সাহায্যে মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2 + \sin^2 x)}{x + 100}$

সমাধান: (a) **প্রশ্নমালা IX F এর 2(b) দ্রষ্টব্য।**

b) প্রশ্নমালা IX A এর উদাহরণ দ্রষ্টব্য।

(c) প্রশ্নমালা IX A এর 15(g) দ্রষ্টব্য।

14. $f(x) = 17-15x+9x^2-x^3$ একটি ফাংশন। **(a)** ইহার চরমবিন্দু নির্ণয় কর। **(b)** ইহা কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর। **(c)** ইহার সর্বোচ্চ ও সর্বোনিম্ন মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ প্রশ্নমালা IX K এর উদাহরণ -3 দ্রষ্টব্য।

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. x এর কোন মানের জন্য, $x\,(12-2x)^2$ এর গুরুমান অথবা লঘুমান পাওয়া যায়?

মনে করি, $f(x) = x\,(12-2x)^2$

$f'(x) = x\,.2(12-2x)(-2) + (12-2x)^2 .1$

$= (12-2x)(-4x+12-2x)$

$= 12\,(6-x)(2-x)$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$12\,(6-x)(2-x) = 0 \Rightarrow x = 2, 6$

$x = 2$ ও 6 এর জন্য প্রদত্ত ফাংশনের গুরুমান অথবা লঘুমান থাকবে।

2. নিচের ফাংশনগুলির গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর ঃ

(a) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$ **[ব.'০৩]**

সমাধান ঃ ধরি, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

$f'(x) = x^2 + x - 6$ এবং $f''(x) = 2x+1$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0$

$x = -3, 2$

এখন, $f''(-3) = -6+1 = -5 < 0$

$f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = -3$ এবং

এর মান $= f(-3) = -9 + \frac{9}{2} + 18 + 8 = \frac{43}{2}$

আবার, $f''(2) = 4+1 = 5 > 0$

$f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x = 2$ এবং

এর মান $= f(2) = \frac{8}{3} + 2 - 12 + 8 = \frac{2}{3}$

2. (b) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ **[কু.'০১]**

সমাধান ঃ ধরি, $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$

এবং $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$

$\Rightarrow 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$

$\Rightarrow x^2(x-1)(x-3) = 0 \;\therefore x = 0, 1, 3$

এখন, $f''(0) = 0, f''(1) = 20 - 60 + 30 < 0$

এবং $f''(3) = 540 - 540 + 90 > 0$

$f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = 1$ এবং

এর মান $f(1) = 1 - 5 + 5 - 1 = 0$

আবার, $f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x = 3$ এবং

এর মান $= f(3) = 243 - 405 + 135 - 1 = -28$

3. দেখাও যে, $(1/x)^x$ **এর গুরুমান** $(e)^{\frac{1}{e}}$।

প্রমাণ : ধরি, $f(x) = (\frac{1}{x})^x$

$f'(x) = (\frac{1}{x})^x [x\frac{d}{dx}(\ln\frac{1}{x}) + \ln\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x)]$

$= (\frac{1}{x})^x [x\frac{d}{dx}(-\ln x) - \ln x\frac{d}{dx}(x)]$

$= (\frac{1}{x})^x [x(-\frac{1}{x}) - \ln x.1] = -(\frac{1}{x})^x(1+\ln x)$

এবং $f''(x) = -(\frac{1}{x})^x \frac{d}{dx}(1+\ln x) - (1+\ln x)\frac{d}{dx}\{(\frac{1}{x})^x\}$

$= -(\frac{1}{x})\;\frac{1}{x} - (1+\ln x)\{-(\frac{1}{x})^x(1+\ln x)\}$

$= (\frac{1}{x})\;\{-\frac{1}{x} + (1+\ln x)^2\}$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$(\frac{1}{x})^x(1+\ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$f''(\frac{1}{e}) = (e)^{\frac{1}{e}}(-e+0) = -e.(e)^{\frac{1}{e}} < 0$

$x = \frac{1}{e}$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$(1/x)^x$ এর গুরুমান $= f(\frac{1}{e}) = (e)^{\frac{1}{e}}$

4. দেখাও যে, x^x লঘিষ্ঠ হবে যখন $x = \frac{1}{e}$

প্রমাণ : ধরি, $f(x) = x^x$

$\therefore f'(x) = x^x\ [x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x)]$

$= x^x\ [x.\frac{1}{x} + \ln x.1] = x^x(1 + \ln x)$

এবং $f''(x) = x^x \frac{d}{dx}(1+\ln x) -$

$(1+\ln x)\frac{d}{dx}(x^x)$

$= x^x.\frac{1}{x} + (1+\ln x)\{x^x(1 + \ln x)\}$

$= x^x\{\frac{1}{x} + (1+\ln x)^2\}$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$x^x(1 + \ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

এখন, $f''(\frac{1}{e}) = (e)^{\frac{1}{e}}(e+0) = e.(e)^{\frac{1}{e}} > 0$

x^x লঘিষ্ঠ হবে যখন $x = \frac{1}{e}$

5. দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 27x + 5$ এর কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

প্রমাণ ঃ এখানে $f(x) = x^3 - 6x^2 + 27x + 5$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 27 = 3(x^2 - 4x + 9) = 3\{(x-2)^2 + 5\}$, যা x এর কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

6. দেখাও যে, $f(x) = \frac{ax+b}{ax+c}$ এর কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

প্রমাণ ঃ এখানে $f(x) = \frac{ax+b}{ax+c}$

$f'(x) = \frac{(ax+c).a - (ax+b).a}{(ax+c)^2}$

$= \frac{(ax+c-ax-b)a}{(ax+c)^2} = \frac{(c-b)a}{(ax+c)^2}$, যা x এর কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

7. u বেগে উর্ধ্বমুখী দিকে নিক্ষিপ্ত কোনো কণা t সময়ে $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ উচ্চতায় অবস্থান করে। বৃহত্তম উচ্চতা এবং সেখানে পৌছার সময় নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$

$\frac{dh}{dt} = u - \frac{1}{2}g.2t = u - gt$ এবং

$\frac{d^2h}{dt^2} = 0 - g = -g$

চরম মানের জন্য, $\frac{dh}{dt} = 0$

$\Rightarrow u - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{u}{g}$

এখন, $t = \frac{u}{g}$ এর জন্য, $\frac{d^2h}{dt^2} = -g < 0$

$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ বৃহত্তম হবে যখন $t = \frac{u}{g}$

বৃহত্তম উচ্চতা $= u.\frac{u}{g} - \frac{1}{2}g(\frac{u}{g})^2$

$= \frac{u^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{u^2}{g} = \frac{u^2}{2g}$

এবং সেখানে পৌছার সময় $= \frac{u}{g}$

৪. u বেগে ভূমির সাথে α কোণে নিক্ষিপ্ত কোন কণা t সময়ে $u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}g\,t^2$ উচ্চতায় অবস্থান করে। বৃহত্তম উচ্চতা এবং সেখানে পৌছার সময় নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $h = u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}g\,t^2$

$$\frac{dh}{dt} = u\sin\alpha - \frac{1}{2}g.2t = u\sin\alpha - gt \text{ এবং}$$

$$\frac{d^2h}{dt^2} = 0 - g = -g$$

চরম মানের জন্য, $\frac{dh}{dt} = 0$

$$\Rightarrow u\sin\alpha - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{u\sin\alpha}{g}$$

এখন, $t = \frac{u\sin\alpha}{g}$ এর জন্য, $\frac{d^2h}{dt^2} = -g < 0$

$u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$ বৃহত্তম হবে যখন $t = \frac{u\sin\alpha}{g}$

$\therefore$ বৃহত্তম উচ্চতা $= u\sin\alpha.\frac{u\sin\alpha}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{u\sin\alpha}{g}\right)^2$

$$= \frac{u^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2}\frac{u^2\sin^2\alpha}{g} = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$$

এবং সেখানে পৌঁছার সময় $= \frac{u\sin\alpha}{g}$

9. $y = x^2 + 2$ বক্ররেখা হতে (3, 2) বিন্দুর ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y = x^2 + 2$ বক্ররেখার (x,y) বিন্দু হতে (3, 2) বিন্দুর দূরত্ব, $s = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$

$$\Rightarrow s = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}, [\because y - 2 = x^2]$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2 + x^4}\{2(x-3) + 4x^3\}$$

$$= (2x^3 + x - 3)\sqrt{(x-3)^2 + x^4} \text{ এবং}$$

$$\frac{d^2s}{dx^2} = (2x^3 + x - 3)^2\sqrt{(x-3)^2 + x^4} + (6x + 1)\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$$

$x = 1$ এর জন্য, $\frac{ds}{dx} = 0$ এবং $\frac{d^2s}{dx^2} = 7\sqrt{5} > 0$

নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম দূরত্ব $= \sqrt{(1-3)^2 + 1^4} = \sqrt{5}$ একক

বিকল্প পদ্ধতি $y = x^2 + 2$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 2x$ এবং (x, y) ও $(3, 2)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= \frac{y-2}{x-3}$.

$\therefore$ (3,2) বিন্দু হতে $y = x^2 + 2$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুটি ক্ষুদ্রতম দূরত্বে অবস্থিত হলে,

$$2x \times \frac{y-2}{x-3} = -1 \Rightarrow 2x.x^2 = -(x-3)$$

$$\Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0$$

$x = 1$ ও $y = 1^2 + 2 = 3$

নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম দূরত্ব = (1, 3) ও (3, 2) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(1-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$ একক।

10. জনৈক কৃষক 800 ফুট দীর্ঘ্য তারের বেড়ার সাহায্যে বৃহত্তম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র ঘিরে ফেলতে পারে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত হওয়া দরকার।

সমাধান ঃ মনে করি, ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x ফুট ও প্রস্থ y ফুট তাহলে,

$$2(x + y) = 800 \Rightarrow x + y = 400$$

$$\Rightarrow y = 400 - x$$

এখন, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $A = xy = x(400 - x)$
$= 400x - x^2$

$$\frac{dA}{dx} = 400 - 2x \text{ এবং } \frac{d^2A}{dx^2} = -2$$

বৃহত্তম ক্ষেত্রফলের জন্য, $\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 400 - 2x = 0$

$$\Rightarrow x = 200$$

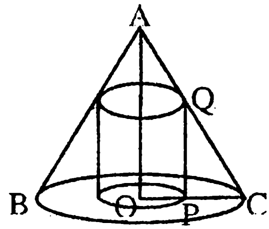
এক্ষেত্রে, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, $y = 400 - 200 = 200$

$x = 200$, $y = 200$ এর জন্য A এর মান বৃহত্তম হয়।

কৃষক তারের বেড়া দ্বারা যে বৃহত্তম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্র ঘিরে ফেলে তার দৈর্ঘ্য 200 ফুট এবং প্রস্থ 200 ফুট

11. একটি সমবৃত্তভূমিক কোণের মধ্যে একটি খাড়া বৃত্তাকার সিলিন্ডার স্থাপন করা আছে। সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহত্তম হলে দেখাও যে, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ কোণের ব্যাসার্ধের অর্ধেক।

সমাধান ঃ মনে করি কোণের উচ্চতা OA = h, ভূমির ব্যাসার্ধ OC = r এ কোণের মধ্যে একটি সিলিন্ডার স্থাপন করা আছে যার ভূমির ব্যাসার্ধ OP = x.



এখন, ΔPQC ও ΔAOC সদৃশকোণী ত্রিভূজদ্বয় হতে

পাই, $\frac{PQ}{OA} = \frac{PC}{OC} \Rightarrow \frac{PQ}{OA} = \frac{OC - OP}{OC}$

$\Rightarrow \frac{PQ}{h} = \frac{r - x}{r} \Rightarrow PQ = \frac{h(r - x)}{r}$

সিলিন্ডারের বক্রতল S হলে, $S = 2\pi x \times PQ$

$\Rightarrow S = 2\pi x \frac{h(r - x)}{r} = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2)$

$\frac{dS}{dx} = \frac{2\pi h}{r}(r - 2x), \frac{d^2S}{dx^2} = \frac{2\pi h}{r}(0 - 2)$

এখন গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মানের জন্য, $\frac{dS}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{2\pi h}{r}(r - 2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{r}{2}$

অর্থাৎ সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}$ (কোণের ভূমির ব্যাসার্ধ)

এক্ষেত্রে, $\frac{d^2S}{dx^2} = -\frac{4\pi h}{r} < 0$

সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহত্তম হলে, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ কোণের ব্যাসার্ধের অর্ধেক।

12. **একটি আম বাগানে প্রতি একরে 30টি গাছ আছে এবং প্রতি গাছে গড়ে 400টি আম ধরে। প্রতি একরে অতিরিক্ত একটি গাছের জন্য মোটামোটি 10টি আমের ফলন কমে। আমের সর্বোচ্চ ফলন পাওয়ার জন্য প্রতি একরে কতটি গাছ থাকা উচিত?**

সমাধান ঃ মনে করি, সর্বোচ্চ ফলনের জন্য প্রতি একরে গাছের সংখ্যা (30 + x) থাকা প্রয়োজন। তাহলে, প্রতি গাছে আমের সংখ্যা = (400 – 10x).

আমের ফলন y হলে, $y = (30 + x)(400 - 10x)$

$\Rightarrow y = 1200 + 100x - 10x^2$

$\frac{dy}{dx} = 100 - 20x$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = -20$

সর্বোচ্চ ফলনের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 100 - 20x = 0$

$\Rightarrow x = 5$

এক্ষেত্রে, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0.$

x = 5 হলে ফলন সর্বোচ্চ হবে। অর্থাৎ আমের সর্বোচ্চ ফলন পাওয়ার জন্য প্রতি একরে (30 + 5) = 35 টি গাছ থাকা উচিত।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ

1. $y = \cos x + \sin x$ হলে $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$ **[CU 07-08]**

Sol^n. $\frac{dy}{dx} = -\sin x + \cos x$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x - \sin x$

2. কি শর্তে $\frac{d^n}{dx^n}(ax + b)^m = 0$

[SU 08-09; CU 03-04]

Sol^n $n > m$

3. $y = x^n$ **ফাংশনের (n + 1) তম অন্তরক সহগ কত?** **[CU 07-08]**

Sol^n $y_n = n!$ $y_{n+1} = 0$

4. $y = e^{ax}$ **ফাংশনের** y_n **কত হবে? [CU 06-07]**

Sol^n $y_n = a^n e^{ax}$

5. $y = (2x - 5)^3$ হলে $\frac{d^3y}{dx^3}$ **কত? [IU 02-03]**

Sol^n $\frac{d^3y}{dx^3} = {}^3P_3 . 2^3 (2x - 5)^{3-3} = 6.8 = 48$

6. $x^2 + y^2 = 25$ **হলে (3, – 4) বিন্দুতে** $\frac{dy}{dx}$ **কত?** **[DU 01-02; NU 06-07]**

Sol^n. $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$(3, -4)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$

7. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে নতির পরিমাণ কত? [DU 00-01]

Sol^n. $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 12 = -12$ (মূলবিন্দুতে)

8. $3x^2 - 7y^2 + 4xy - 8x = 0$ বক্ররেখাটির $(-1, 1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল কত? [DU 02-03]

Sol^n. $6x - 14y\frac{dy}{dx} + 4x\frac{dy}{dx} + 4y - 8 = 0$

$\Rightarrow -6 - 14\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} + 4 - 8 = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{10}{-18} = -\frac{5}{9}$

9. $y = x^{\frac{1}{2}}$ বক্ররেখার যেবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের যোগবোধক দিকের সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে তা হল– [CU 07-08, 04-05]

Sol^n. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\therefore \frac{1}{2\sqrt{x}} = \tan 45^0 = 1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$ এবং $y = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ বিন্দু $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

10. $y = x^2 + 1$ হলে কোন বিন্দুতে y ও $\frac{dy}{dx}$ এর মান সমান? [IU 07-08]

Sol^n. $\frac{dy}{dx} = 2x$ $y = \frac{dy}{dx} \Rightarrow x^2 + 1 = 2x$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1 + 1 = 2$

বিন্দুটি $(1, 2)$

11. কোন গতিশীল বস্তু t সেকেন্ডে $5t + 2t^2$ ফুট দূরত্ব অতিক্রম করলে 3 সেকেন্ড পর তার গতিবেগ কত হবে? [KU 06- 08]

Sol^n. $S = 5t + 2t^2 \Rightarrow \frac{ds}{dt} = v = 5 + 4t$

3 সেকেন্ড পর গতিবেগ $= 5 + 12 = 17$ ft/sec

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sin x$ ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sin x$ ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন ।

মূলতত্ত্ব ঃ $x = x_0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x)$ ফাংশনকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শক দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন করার সূত্র, $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

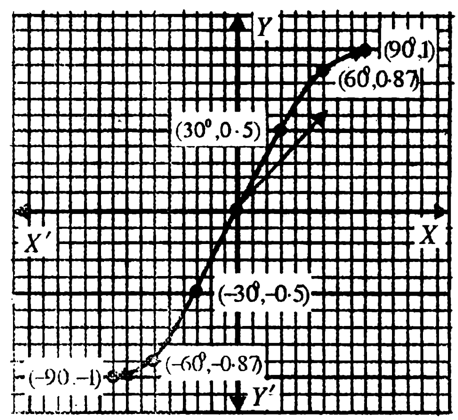
প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = \sin x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	$0°$	$\pm 30°$	$\pm 60°$	$\pm 90°$
y	0	$\pm \cdot 5$	$\pm \cdot 87$	± 1



3. x অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু $= 10^0$ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু $= 1$ একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিলের সাহায্যে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = f(x) = \sin x$ এর লেখ অঙ্কন করি।

4. $= 0$ বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করি।

হিসাব ঃ $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$f(0) = \sin 0 = 0,\ f'(0) = \cos 0 = 1$

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ হতে পাই,

$\sin x \approx 0 + 1(x - 0) = x$

ফলাফল ঃ $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $y = f(x) = \sin x$ ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শক $y = x$ এর লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন করা হল। অন্যভাবে বলা যায়, x এর মান 0 এর সন্নিকটে হলে $\sin x$ এর পরিমাণ x এর কাছাকাছি হবে।

2. $x = 2$ তে $y = x^2$ ফাংশনের লেখ অঙ্কন করে dy ও δy নির্ণয় করে লেখচিত্রে প্রদর্শন কর, যেখানে $dx = \delta x = 1$.

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = x^2$ ফাংশনের জন্য, $x = 2$ বিন্দুতে dy ও δy নির্ণয়, যেখানে $dx = \delta x = 1$ এবং লেখচিত্রে dy ও δy প্রদর্শন।

মূলতত্ত্ব ঃ স্বাধীন চলক ও অধীন চলকের অন্তরকের মধ্যকার সম্পর্ক $dy = f'(x)dx$ এবং স্বাধীন চলকের অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তন δx এর জন্য অধীন চলকের অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তন $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

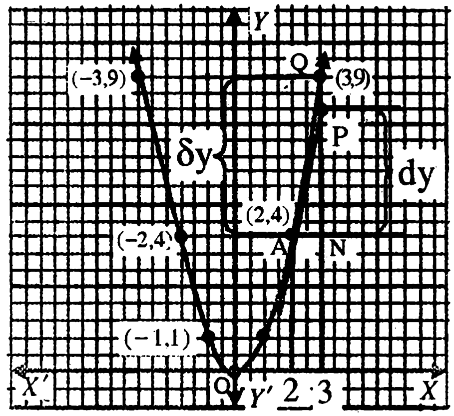
কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি।

2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = x^2$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	± 1	± 2	± 3
$f(x) = x^2$	0	1	4	9

3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিলের সাহায্যে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = f(x) = x^2$ এর লেখ অঙ্কন করি।



4. A(2, 4) বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করি। $x = 3$ সরলরেখাকে স্পর্শকটি ও ফাংশনটি যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।

হিসাব ঃ $y = x^2$ হতে পাই, $\frac{dy}{dx} = 2x$.

সুতরাং $dy = 2x\,dx = 2 \times 2 \times 1 = 4$

এবং $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$

$= (x + \delta x)^2 - (x)^2 = (2+1)^2 - 2^2$

$= 9 - 4 = 5$

চিত্র হতে পাই, $AN = dx = \delta x = 1$, $PN = dy$ ও $QN = \delta y$

ফলাফল ঃ $PN = dy = 4$ ও $QN = \delta y = 5$ লেখচিত্রে পদর্শন করা হলো।

নিচের যোগজগুলির মান নির্ণয় কর ঃ

1.(a) $\int \frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})\, dx$ [ঢা.'০৫]

$= \int (1+x^{-2})\, dx = x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c$

$= x - \frac{1}{x} + c$

1(b) $\int \frac{(e^x+1)^2}{\sqrt{e^x}} dx$ [ঢা.'০২]

$= \int \frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^{\frac{x}{2}}} dx$

$= \int (e^{2x-\frac{x}{2}} + 2e^{x-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) dx$

$= \int (e^{\frac{3x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) dx$

$= \frac{e^{\frac{3x}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}e^{\frac{3x}{2}} + 4e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}} + c$

1(c) $\int (1+x^{-1}+x^{-2}) dx$ [রা.'০৯]

$= \int (1+\frac{1}{x}+x^{-2}) dx$

$= x + \ln x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = x + \ln x - x^{-1} + c$

নিয়ম ঃ হরের অনুবন্ধি রাশি দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে হরকে $\sqrt{\ }$ মুক্ত করতে হয়।

2.(a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} dx$

$= \int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})} dx$

$= \int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-(x-1)} dx = \int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-x+1} dx$

$= \int \{x^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}\} dx$

$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$

$= \frac{2}{3}[x^{3/2} + (x-1)^{3/2}] + c$

2(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ [রা.'০২; দি.'১০]

$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} dx$

$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)} dx$

$= \frac{1}{2}\int [(x \quad 1)^{1/2} - (x+1)^{1/2}]\, dx$

$= \frac{1}{2}[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}] + c$

$= \frac{1}{2}[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}] + c$

$= \frac{1}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}] + c$ (Ans.)

3.(a) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$ [ঢা.'০৭]

$= \int \frac{(1+\sin x)dx}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$= \int \frac{(1+\sin x)dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1+\sin x)dx}{\cos^2 x}$

$= \int (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}) dx$

$= \int (\sec^2 x + \sec x \tan x)dx$

$= \tan x + \sec x + c$

3(b) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ [য.'০৭,'১৩; চ.'১০ প্র.ভ.প.'০৩]

$= \int \frac{(1-\sin x)dx}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$= \int \frac{(1-\sin x)dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)dx}{\cos^2 x}$

$= \int (\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x})dx$

$= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x)dx$

$= \tan x - \sec x + c$

3. (c) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$ [কু.'০৮]

$= \int \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \sec^2 x dx = \frac{1}{2}\tan x + c$

3(d) $\int \sqrt{1+\cos x}\, dx$ [প্র.ভ.প.'০৪]

$= \int \sqrt{2\cos^2 \frac{x}{2}}\, dx = \int \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\, dx$

$= 2\sqrt{2}\int \cos\frac{x}{2}\, d(\frac{x}{2})$ [$d(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}dx$]

$= 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} + c$

3(e) $\int \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$ [চ.'০৫,'০৯;সি.'০৬; ব.'০৮]

$= \int \sqrt{2\sin^2 x}\, dx = \int \sqrt{2}\sin x\, dx$

$= \sqrt{2}(-\cos x) + c = -\sqrt{2}\cos x + c$

3(f) $\int \sqrt{1-\cos 4x}\, dx$ [চ.'০৭]

$= \int \sqrt{2\sin^2 2x}\, dx = \int \sqrt{2}\sin 2x\, dx$

$= \sqrt{2}(-\frac{\cos 2x}{2}) + c = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x + c$

3(g) $\int \sec x(\sec x - \tan x)dx$ [ব.'১৩]

$= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x)dx$

$= \tan x - \sec x + c$

4.(a) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$

$= \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x}\, dx$

$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\, dx$

$= \int (\sin x - \cos x)\, dx$ বা $\int (\cos x - \sin x)\, dx$

$= -\cos x - \sin x + c$ বা $\sin x + \cos x + c$

4.(b) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-\sin 2x}} dx$

$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x}} dx$

$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}} dx$

$= \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} dx$

বা, $\int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x} dx$

$= \int (\cos x + \sin x)dx$ বা, $-\int (\cos x + \sin x)dx$

$= \sin x - \cos x$ বা, $-(\sin x - \cos x)$

4(c) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$ [প্র.ভ.প. '৯০]

$= \int (\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x)dx$

$= \int (1+\sin 2x)dx = x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$

5(a) $\int \sin 5x \sin 3x\, dx$ [দি.'০৮,'১২;য.'১০; চ.'১২]

$= \int \frac{1}{2}\{\cos(5x-3x) - \cos(5x+3x)\}\, dx$

$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x)\, dx$

$= \frac{1}{2}(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 8x}{8}) + c$

$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + c$

5(b) $\int \sin 4x \sin 2x \, dx$ [য.'০৪; রা.'০৫; দি.'১১]

$= \int \frac{1}{2}\{\cos(4x-2x) - \cos(4x+2x)\} \, dx$

$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 6x) \, dx$

$= \frac{1}{2}(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 6x}{6}) + c$

$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$

5(c) $\int 3\sin 3x \cos 4x \, dx$ [সি'০২,'০৩; ব.'০৬,'১০]

$= \int \frac{3}{2}\{\sin(4x+3x) - \sin(4x-3x)\} \, dx$

$= \frac{3}{2}\int (\sin 7x - \sin x) \, dx$

$= \frac{3}{2}(-\frac{1}{7}\cos 7x + \cos x) + c$

$= \frac{3}{14}(7\cos x - \cos 7x) + c$

5.(d) $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$ [কু.'০৬; সি.,দি.'১২]

$= \int \frac{1}{2}\{\sin(5x+3x) - \sin(5x-3x)\} \, dx$

$= \int \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x) dx$

$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{8}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 2x) + c$

$= \frac{1}{16}(4\cos 2x - \cos 8x) + c$

5(e) $\int 4\cos 4x \sin 5x dx$ [রা.'০৩]

$= \int 2\{\sin(5x+4x) + \sin(5x-4x)\} \, dx$

$= \int 2(\sin 9x + \sin x) dx$

$= 2(-\frac{1}{9}\cos 9x - \cos x) + c$

$= -\frac{2}{9}(\cos 9x + 9\cos x) + c$

5(f) $\int 5\cos 5x \sin 4x \, dx$ [ঢা.'০৬; দি.,সি.'১৪]

$= \int \frac{5}{2}\{\sin(5x+4x) - \sin(5x-4x)\} \, dx$

$= \int \frac{5}{2}(\sin 9x - \sin x) \, dx$

$= \frac{5}{2}(-\frac{1}{9}\cos 9x + \cos x) + c$

$= \frac{5}{18}(9\cos x - \cos 9x) + c$

5(g) $\int \sin px \cos qx \, dx$, $(p > q)$ [ঢা.'০৩; সি.'০৭]

$= \int \frac{1}{2}\{\sin(p+q)x + \sin(p-q)x\} dx$

$= \frac{1}{2}\{-\frac{\cos(p+q)x}{p+q} - \frac{\cos(p-q)x}{p-q}\} + c$

$= -\frac{1}{2}\{\frac{\cos(p+q)x}{p+q} + \frac{\cos(p-q)x}{p-q}\} + c$

6.(a) $\int \cos^2 x \, dx$ [য.'০৮]

$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}\{\int dx + \int \cos 2x \, dx\}$

$= \frac{1}{2}(x + \frac{\sin 2x}{2}) + c$

6(b) $\int \cos^2 2x dx$ [ঢা.'০০]

$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 4x) dx = \frac{1}{2}(x + \frac{\sin 4x}{4}) + c$

6(c) $\int (2\cos x + \sin x)\cos x \, dx$ [ঢা '০৫]

$= \int (2\cos^2 x + \sin x \cos x) \, dx$

$= \int (1 + \cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x) \, dx$

$= x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}.(-\frac{1}{2}\cos 2x) + c$

$= x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + c$

6(d). $\int \sin^3 2x\,dx$ [ঢা.'০১]

$= \int \frac{1}{4}(3\sin 2x - \sin 6x)\,dx$

$= \frac{1}{4}\{3.(-\frac{1}{2}\cos 2x) + \frac{1}{6}\cos 6x\} + c$

$= \frac{1}{8}(-3\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 6x) + c$

6.(e) $\int \sin^4 x\,dx$ [কু.'০৯]

$\sin^4 x\,dx = (\sin^2 x)^2 = \{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\}^2$

$= \frac{1}{4}\{1 - 2\cos x + \cos^2 2x\}$

$= \frac{1}{4}\{1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\}$

$= \frac{1}{4}[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x]$

$= \frac{1}{4}[\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x]$

$\int \sin^4 x\,dx$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x - 2.\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\sin 4x) + c$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x) + c$

6(f) $\int \cos^4 x\,dx$ [রা.'০৭,'১৪; সি.'০৮; দি.'১৩; য.'১৪]

$\cos^4 x\,dx = (\cos^2 x)^2 = \{\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\}^2$

$= \frac{1}{4}\{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\}$

$= \frac{1}{4}\{1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\}$

$= \frac{1}{4}[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x]$

$= \frac{1}{4}[\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x]$

$\int \cos^4 x\,dx$

$= \int \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x)\,dx$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x + 2.\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\sin 4x) + c$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x) + c$ (Ans.)

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

নিচের যোগজগুলি মান নির্ণয় কর ঃ

1(a) $\int \frac{4(\sqrt[3]{x^2}+4)^2}{3\sqrt[3]{x}}dx = \frac{4}{3}\int \frac{(x^{\frac{2}{3}}+4)^2}{x^{\frac{1}{3}}}dx$

$= \frac{4}{3}\int \frac{x^{\frac{4}{3}} + 8x^{\frac{2}{3}} + 16}{x^{\frac{1}{3}}}dx$

$= \frac{4}{3}\int (x^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} + 8x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} + 16x^{-\frac{1}{3}})dx$

$= \frac{4}{3}\int (x + 8x^{\frac{1}{3}} + 16x^{-\frac{1}{3}})dx$

$= \frac{4}{3}(\frac{x^2}{2} + 8\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + 16\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}) + c$

$= \frac{4}{3}(\frac{x^2}{2} + 8\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 16\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}) + c$

$= \frac{2}{3}(x^2 + 12x^{4/3} + 48x^{2/3}) + c$

1(b) $\int \frac{a\cot x + b\tan^2 x - c\sin^2 x}{\sin x}dx$

$= \int (a\frac{\cot x}{\sin x} + b\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin x} - c\sin x)dx$

$= \int (a\cot x\,\mathrm{cosec}\,x + b\tan x\sec x$

$- c\sin x)dx$

$= -a\,\mathrm{cosec}\,x + b\sec x + c\cos x + c_1$

2(a) $\int \frac{\cos 2x - \cos 2\theta}{\cos x - \cos\theta} dx$

$= \int \frac{2\cos^2 x - 1 - (2\cos^2\theta - 1)}{\cos x - \cos\theta} dx$

$= 2\int \frac{\cos^2 x - \cos^2\theta}{\cos x - \cos\theta} dx$

$= 2\int \frac{(\cos x + \cos\theta)(\cos x - \cos\theta)}{\cos x - \cos\theta} dx$

$= 2\int (\cos x + \cos\theta) dx$

$= 2(\int \cos x dx + \cos\theta \int dx)$

$= 2(\sin x + \cos\theta . x) + c$

$= 2(\sin x + x\cos\theta) + c$

2(b) $\int (\sec x + \tan x)^2 dx$

$= \int (\sec^2 x + \tan^2 x + 2\sec x \tan x) dx$

$= \int (\sec^2 x + \sec^2 x - 1 + 2\sec x \tan x) dx$

$= \int (2\sec^2 x - 1 + 2\sec x \tan x) dx$

$= 2\tan x - x + 2\sec x + c$

3(a) $\int \sqrt{1 \pm \sin x}\, dx$

$= \int \sqrt{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} \pm 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, dx$

$= \int \sqrt{(\sin\frac{x}{2} \pm \cos\frac{x}{2})^2}\, dx$

$= \int (\sin\frac{x}{2} \pm \cos\frac{x}{2}) dx$ ev $\int (\cos\frac{x}{2} \pm \sin\frac{x}{2}) dx$

$= 2(-\cos\frac{x}{2} \pm \sin\frac{x}{2}) + c$

বা $2(\sin\frac{x}{2} \mp \cos\frac{x}{2}) + c$

3(b) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$

$= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}} dx$

$= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}} dx$

$= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + c$

3(c) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}(1 - \sin 2x)\, dx$

$= \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}(\cos x - \sin x)^2\, dx$

$= \int (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)\, dx$

$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx = \int \cos 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}\sin 2x + c$

3(d) $\int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx$

$= \int (\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}) dx$

$= \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + c$

4 $\int \cos^3 x\, dx = \int \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)\, dx$

$= \frac{1}{4}(3\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x) + c$

প্রশ্নমালা X B

নিচের যোগজগুলি নির্ণয় কর ঃ

1.(a) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-4x)}} dx = \int \frac{1}{(1-4x)^{1/3}} dx$

$= \int (1-4x)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{(1-4x)^{-\frac{1}{3}+1}}{(-\frac{1}{3}+1)(-4)} + c$

$= \frac{(1-4x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}(-4)} + c = -\frac{3}{8}(1-4x)^{\frac{2}{3}} + c$

1(b) $\int \frac{e^{5x} + e^{3x}}{e^x + e^{-x}} dx$ [প্র.ভ.প. '১২]

$= \int \frac{e^{4x}(e^x + e^{-x})}{e^x + e^{-x}} dx = \int e^{4x} dx = \frac{e^{4x}}{4} + c$

1(c) ধরি, $I = \int \sin x^0 dx$ [চ.'০৪]

এবং $x^\circ = \frac{\pi x}{180} = z$

তাহলে $\frac{\pi}{180}dx = dz \Rightarrow dx = \frac{180}{\pi}dz$ এবং

$I = \frac{180}{\pi}\int \sin z\, dz = \frac{180}{\pi}(-\cos z) + c$

$\int \sin x^\circ dx = -\frac{180}{\pi}\cos x^\circ + c$

2(a) ধরি, $I = \int \sin 5x\, dx$ [সি.'০৫]

এবং $5x = z$ তাহলে $5dx = dz \Rightarrow dx = \frac{1}{5}dz$

এবং $I = \frac{1}{5}\int \sin z\, dz = -\frac{1}{5}\cos z + c$

$\therefore \int \sin 5x\, dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + c$

2(b) ধরি, $I = \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ [কু.'০০]

এবং $\sqrt{x} = z$. তাহলে $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dz \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dz$

এবং $I = 2\int \cos z\, dz = 2\sin z + c$

$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\sin\sqrt{x} + c$

2(c) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$ [ঢা.'০৪; য.'০৭]

ধরি, $\frac{1}{x} = z$ $\quad -x^{-2}dx = dz \Rightarrow \frac{1}{x^2}dx = -dz$

$\therefore \int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \int \frac{\sin(1/x)}{x^2}dx$

$= -\int \sin z\, dz = -(-\cos z) + c = \cos\frac{1}{x} + c$

3. (a) ধরি, $I = \int x e^{x^2}dx$ [ব.'০৩]

এবং $x^2 = z$. তাহলে, $2xdx = dz \Rightarrow xdx = \frac{dz}{2}$

এবং $I = \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{1}{2}e^z + c = e^{x^2} + c$

3(b) ধরি, $I = \int x^2 a^{x^3}dx$ [মা.'০৯]

এবং $x^3 = z$. তাহলে, $3xdx = dz \Rightarrow xdx = \frac{dz}{3}$

এবং $I = \frac{1}{3}\int a^z dz = \frac{a^z}{3\ln a} + c = \frac{a^{x^3}}{3\ln a} + c$

3.(c) $\int e^x \tan e^x \sec e^x dx$

$= \int \sec e^x \tan e^x d(e^x)$ $\quad [\because d(e^x) = e^x dx]$

$= \sec e^x + c$

3(d) ধরি, $I = \int e^{2x}\tan e^{2x}\sec e^{2x}dx$ [চ.'০৭]

এবং $e^{2x} = z$. তাহলে, $2e^{2x}dx = dz$ এবং

$I = \frac{1}{2}\int \sec z \tan z\, dz = \frac{1}{2}\sec z + c$

$\therefore \int e^{2x}\tan e^{2x}\sec e^{2x}dx = \frac{1}{2}\sec e^{2x} + c$

4. (a) ধরি, $I = \int \sin^2 x\cos x\, dx$ [ঢা.'০২]

এবং $\sin x = z$. তাহলে, $\cos x\, dx = dz$ এবং

$I = \int z^2\, dz = \frac{1}{3}z^3 + c = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

4(b) ধরি, $I = \int (1+\cos x)^3 \sin x\, dx$ [কু.'০৩]

এবং $1 + \cos x = z$. তাহলে, $-\sin x\, dx = dz$ এবং

$I = -\int z^3 dz = -\frac{z^4}{4} + c = -\frac{(1+\cos x)^4}{4} + c$

4(c) ধরি, $I = \int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$ [চ.'০৩]

এবং $\sin\frac{x}{2} = z$. তাহলে, $\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx = dz$ এবং

$I = 2\int z^2 dz = 2.\frac{1}{3}z^3 + c = \frac{2}{3}\sin^3\frac{x}{2} + c$

4(d) ধরি, $I = \int \sqrt{1-\sin x}\cos x\, dx$ [সি.'০১]

এবং $1 - \sin x = z$. তাহলে, $-\cos dx = dz$ এবং

$$I = -\int z^{\frac{1}{2}}\, dz = -\frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\therefore \int \sqrt{1-\sin x}\cos x\, dx = -\frac{2}{3}(1-\sin x)^{\frac{3}{2}} + c$$

4(e) $\int \frac{\cos x dx}{(1-\sin x)^2}$ [রা.'০৪,কু.'০৬;ব.'১১]

ধরি, $1-\sin x = z$. তাহলে, $-\cos dx = dz$ এবং

$$\int \frac{\cos x dx}{(1-\sin x)^2} = -\int \frac{dz}{z^2} = -\int z^{-2} dz$$

$$= -\frac{z^{-2+1}}{-2+1} + c = z^{-1} + c = \frac{1}{1-\sin x} + c$$

4(f) $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx$ [চ. '০৭; কু. '০৮; রা.'১১]

ধরি, $\tan^{-1} x^3 = z$

$$\frac{1}{1+(x^3)^2}.3x^2\, dx = dz$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{1}{3} dz$$

$$\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx = \frac{1}{3}\int z dz$$

$$= \frac{1}{3}\frac{z^2}{2} + c = \frac{1}{6}(\tan^{-1} x^3)^2 + c \text{ (Ans.)}$$

5(a) ধরি, $I = \int \frac{1}{x(1+\ln x)^3} dx$ [ঢা.'০১]

এবং $1+\ln x = z$. তাহলে, $\frac{1}{x} dx = dz$ এবং

$$I = \int \frac{1}{z^3} dz = \int z^{-3} dz = \frac{z^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2z^2} + c$$

$$\therefore \int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = -\frac{1}{2(1+\ln x)^2} + c$$

5(b) ধরি, $I = \int \frac{(\log_{10} x)^2}{x} dx$ [প্র.ভ.প.'৮৩]

এবং $\log_{10} x = z$. তাহলে, $\frac{1}{x\ln 10} dx = dz$ এবং

$$I = \ln 10 \int z^2 dz = \ln 10.\frac{1}{3} z^3 + c$$

$$\therefore \int \frac{(\log_{10} x)^2}{x} dx = \frac{\ln 10}{3}(\log_{10} x)^3$$

6.(a) ধরি, $I = \int e^{\tan^{-1} x}.\frac{1}{1+x^2} dx$

[ঢা.'০৯; মা.'১২,'১৪]

এবং $\tan^{-1} x = z$. তাহলে, $\frac{1}{1+x^2} dx = dz$ এবং

$$I = \int e^z\, dz = e^z + c = e^{\tan^{-1} x} + c$$

6(b) $\int e^{\sin^{-1} x}.\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ [চ.'০১; প্র.ভ.প.'০৬]

ধরি, $\sin^{-1} x = z$. তাহলে, $\frac{1}{1-x^2} dx = dz$ এবং

$$\int e^{\sin^{-1} x}.\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int e^z dz = e^z + c$$

$$= e^{\sin^{-1} x} + c$$

6(c) ধরি, $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ [য.'০৬; দি.'১১; ঢা.'১৪]

এবং $1-x^2 = z$. তাহলে, $-2x dx = dz$ এবং

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{z} + c$$

$$\therefore \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + c$$

6(d) ধরি, $I = \int \frac{\tan(\sin^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ এবং

$\sin^{-1} x = z$ [কু. '০৭; ব. '১১,'১৪; য.'০৯,'১৩; ঢা.'১৩]

তাহলে, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dz$ এবং

$$\therefore I = \int \tan z\, dz = \ln|\sec z| + c$$

$$= \ln|\sec(\sin^{-1} x)| + c$$

7(a) ধরি, $I=\int\frac{\sin x}{3+4\cos x}dx$ [ঢা.'০৭, ব.'১৩]

এবং $3+4\cos x=z$. তাহলে, $-4\sin x dx = dz$

এবং $I=-\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z}=-\frac{1}{4}\ln|3+4\cos x|+c$

7(b) ধরি, $I=\int\frac{\sin x}{1+2\cos x}dx$ [রা.'০৩]

এবং $1+2\cos x=z$. তাহলে, $-2\sin x dx = dz$

এবং $I=-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=-\frac{1}{2}\ln|1+2\cos x|+c$

7(c) $\int\frac{\sec^2 x}{3-4\tan x}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{-4\sec^2 x dx}{3-4\tan x}$

$=-\frac{1}{4}\ln|3-4\tan x|+c$

7(d) ধরি, $I=\int\frac{dx}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$

[ব.'০৪; ঢা.'১০; সি.'১১; কু.'১৩]

এবং $\tan^{-1}x=z$. তাহলে, $\frac{1}{1+x^2}dx=dz$ এবং

$I=\int\frac{dz}{z}=\ln|z\}+c=\ln|\tan^{-1}x|+c$

8 $\int\frac{1}{x(1+\ln x)}dx$ [ব.'০৯; কু.'১২]

ধরি, $1+\ln x=z$. তাহলে, $\frac{1}{x}dx=dz$ এবং

$\int\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+c$

$=\ln(1+\ln x)+c$

9.(a) $\int\frac{e^{3x}}{e^{3x}-1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{(e^{3x}-0)dx}{e^{3x}-1}$

$=\frac{1}{3}\ln|e^{3x}-1|+c$

9(b) $\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{d(e^x-e^{-x})}{e^x+e^{-x}}$ [দি.'১০]

$=\ln|e^x+e^{-x}|+c$

9(c) $\int\frac{1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)}dx$ [য.'১০]

$=\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=-\int\frac{(0-e^{-x})dx}{1+e^{-x}}$

$=-\ln|1+e^{-x}|+c$

10. (a) ধরি, $I=\int\frac{1}{\sqrt[3]{1-6x}}dx$ [প্র.ভ.প.'০৫]

এবং $1-6x=z$. তাহলে, $-6dx=dz$

$I=-\frac{1}{6}\int\frac{1}{\sqrt[3]{z}}dz=-\frac{1}{6}\int\frac{dz}{z^{1/3}}=-\frac{1}{6}\int z^{-\frac{1}{3}}dz$

$=-\frac{1}{6}\frac{z^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+c=-\frac{1}{6}\frac{z^{2/3}}{\frac{2}{3}}+c$

$=-\frac{1}{4}(1-6x)^{2/3}+c$

10(b) ধরি, $I=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-2x^4)}}$ [চ.'০১]

এবং $1-2x^4=z$. তাহলে, $-8x^3dx=dz$ এবং

$I=-\frac{1}{8}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=-\frac{1}{8}.2\sqrt{z}+c=-\frac{1}{4}\sqrt{z}+c$

$\therefore\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-2x^4)}}=-\frac{1}{4}\sqrt{1-2x^4}+c$

10(c) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x-1}}$ [সি.'০২]

$=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{\tan x-1}}=\int\frac{(\sec^2 x-0)dx}{\sqrt{\tan x-1}}$

$=2\sqrt{\tan x-1}+c$ $[\because\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}]$

10 (d) ধরি, $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$ [কু.'০৫; রা.'১০]

এবং $\sin x=z$. তাহলে, $\cos x\,dx=dz$ এবং

$I=\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}+c=2\sqrt{\sin x}+c$

10(e) ধরি, $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ [কু.'০৩]

এবং $1+\ln x = z$. তাহলে, $\frac{1}{x}dx$ এবং

$$I=\int\frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}+c = 2\sqrt{1+\ln x}+c$$

11(a) $\int\frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{(2x)^2+3^2}$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{2x}{3}+c = \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{2x}{3}+c$$

11(b) $\int\frac{xdx}{x^4+1}dx$ [রা.'০৮; ব.'১১]

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}.\tan^{-1}(x^2)+c$$

11(c) ধরি, $I=\int\frac{3x^2}{1+x^6}dx$ [রা.'০১, চ.'০৮]

এবং $x^3 = z$. তাহলে, $3x^2dx = dz$ এবং

$$I=\int\frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1}z+c$$

$$\int\frac{3x^2}{1+x^6}dx = \tan^{-1}(x^3)+c$$

11(d) ধরি, $I=\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ [সি.'০৪]

এবং $e^x = z$. তাহলে, $e^x dx = dz$ এবং

$$I=\int\frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1}z+c = \tan^{-1}(e^x)+c.$$

11(e) $\int\frac{5e^{2x}}{1+e^{4x}}dx = \frac{5}{2}\int\frac{2e^{2x}dx}{1+(e^{2x})^2}$ [চ.'০১,'১১]

$$=\frac{5}{2}\tan^{-1}(e^{2x})+c$$

11(f) $\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$ [ঢা. '০৬; য. '০৫,'১২; রা. '০৭, '১৪; ব. '০৫,'০৭,'০৯; চ. '০৮;কু.'১২,'১৪; দি.'১৩; মা.'১৪]

$$=\int\frac{e^x}{e^x(e^x+e^{-x})}dx = \int\frac{e^x}{(e^x)^2+1}dx$$

ধরি, $e^x = z$. তাহলে, $e^x dx = dz$ এবং

$$\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int\frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1}z+c$$

$$=\tan^{-1}(e^x)+c$$

12. (a) $\int\frac{dx}{x^2-x+1}$ [চ.'০৩]

$$=\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x-\frac{1}{2})^2}\quad[\because d(x-\frac{1}{2})=dx]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}/2}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}+c$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$$

12(b) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$ [রা.'০২]

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+13-4}}$$

$$=\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+3^2}}$$

$$=\ln|\sqrt{(x+2)^2+3^2}+x+2|+c$$

$$=\ln|\sqrt{x^2+4x+13}+x+2|+c$$

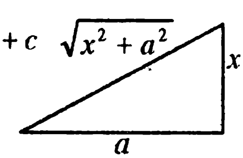
12. (c) $\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$ [য.'০২; প্র.ভ.প.'০৬]

ধরি, $x = a\tan\theta$. তাহলে $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

$$\therefore\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \int\frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{(a^2+a^2\tan^2\theta)^{3/2}}$$

$$=\int\frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^3(1+\tan^2\theta)^{3/2}} = \int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\sec^3\theta}$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{a^2}\sin\theta+c$$



$= \dfrac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + c$

[চিত্র হতে $\tan\theta = \dfrac{x}{a}$ এবং $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$]

12(d) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

ধরি, $x = \sin\theta$. তাহলে $dx = \cos\theta\, d\theta$

$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

$= \int \sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta$

$= \int \sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = \int \frac{1}{4}(2\sin\theta\cos\theta)^2\, d\theta$

$= \int \frac{1}{4}\sin^2 2\theta\, d\theta = \int \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)\, d\theta$

$= \frac{1}{8}(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}) + c = \frac{1}{8}(\theta - \frac{2\sin 2\theta\cos 2\theta}{4}) + c$

$= \frac{1}{8}(\theta - \frac{2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta}{2}) + c$

$= \frac{1}{8}\{\theta - \frac{2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}(1-2\sin^2\theta)}{2}\} + c$

$= \frac{1}{8}\{\sin^{-1}x - x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2)\} + c$

13.(a) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{1^2-x^2}$ [ব.'০৩]

$= \frac{1}{2.1}\ln|\frac{1+x}{1-x}| + c$ [সূত্র প্রয়োগ করে।]

$= \frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}| + c$

13(b) $\int \frac{dx}{9-4x^2} = \int \frac{dx}{3^2-(2x)^2}$ [সি.'১১]

$= \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{3^2-(2x)^2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2.3}\ln|\frac{3+2x}{3-2x}| + c$

$= \frac{1}{12}\ln|\frac{3+2x}{3-2x}| + c$

13(c) ধরি, $I = \int \frac{dx}{9x^2-16}$ [ঢা.'০৩]

$= \int \frac{dx}{(3x)^2-4^2}$ এবং $3x = z$.তাহলে, $3dx = dz$ এবং

$I = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^2-4^2} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2.4}\ln|\frac{z-4}{z+4}| + c$

$\therefore \int \frac{dx}{9x^2-16} = \frac{1}{24}\ln|\frac{3x-4}{3x+4}| + c$

13(d) $\int \frac{dx}{16-4x^2}$ [ক.'০০; সি.'০১]

$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{2^2-x^2}$

$= \frac{1}{4}.\frac{1}{2.2}\ln|\frac{2+x}{2-x}| + c = \frac{1}{16}\ln|\frac{2+x}{2-x}| + c$

13(e) $\int \frac{\cos x\, dx}{3+\cos^2 x}$ [প্র.ভ.প.'০৫]

$= \int \frac{\cos x\, dx}{3+1-\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{2^2-(\sin x)^2}$

$= \frac{1}{2.2}\ln|\frac{2+\sin x}{2-\sin x}| + c = \frac{1}{4}\ln|\frac{2+\sin x}{2-\sin x}| + c$

13.(f) $\int \frac{1}{e^x-e^{-x}}dx$ [রা.'০১; য.'০২]

$= \int \frac{1}{e^x-e^{-x}}dx = \int \frac{e^x}{e^x(e^x-e^{-x})}dx$

$= \int \frac{e^x}{(e^x)^2-1}dx = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2-1^2}$

$= \frac{1}{2.1}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + c$

14.(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5^2-x^2}}$ [দি.'১০; চ.'১৩]

$= \sin^{-1}\frac{x}{5} + c$

14(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$

[য.'০৫; কু.'০৭,'১০,'১৪; ঢা.,ব.'১২; সি.'১৩]

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}\,dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} + c$

14(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$

[ব.'০৬,'০৯; রা.'০৮;ঢা.'০৯; চ.'য.'১১]

$= \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-(2x)^2}}$

ধরি, $2x = z$. তাহলে $2dx = dz$

$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - z^2}}$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{z}{\sqrt{5}} + c = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{5}} + c$

14(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$ [সি.'০৪]

$= \frac{1}{4}\int \frac{d(4x)}{\sqrt{5^2-(4x)^2}}$ [$\because d(4x) = 4dx$]

$= \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{5} + c.$

14(e) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5-\cos^2 x}}dx$ [কু.'০৪]

$= -\int \frac{-\sin x dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\cos x)^2}} = -\cos^{-1}(\frac{\cos x}{\sqrt{5}}) + c$

14(f) ধরি, $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$

[ব.'০৮; য.'১১;দি.'১২]

এবং $x^3 = z$. তাহলে, $3x^2 dx = dz$

$I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{3}\sin^{-1} z + c$

$= \frac{1}{3}\sin^{-1} x^3 + c$

14.(g) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ [য.'০৯]

$= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x^2-2ax+a^2)}}$

$= \int \frac{(1-0)dx}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} = \sin^{-1}(\frac{x-a}{a}) + c$

14(h) ধরি, $I = \int \sqrt{1-9x^2}\, dx$ [ব.'০১]

এবং $3x = z$ তাহলে, $3dx = dz$ এবং

$I = \int \sqrt{1-(3x)^2}\, dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{1-z^2}\, dz$

$= \frac{1}{3}[\frac{z\sqrt{1-z^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} z] + c$

$= \frac{1}{3}[\frac{3x\sqrt{1-(3x)^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(3x)] + c$

$= \frac{1}{6}[3x\sqrt{1-9x^2} + \sin^{-1}(3x)] + c$

15. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{3+2x-4x^2}}dx$

$= \int \frac{-\frac{3}{8}(-8x+2) + \frac{3}{4} - 2}{\sqrt{3+2x-4x^2}}dx$

$= -\frac{3}{8}\int \frac{(-8x+2)dx}{\sqrt{3+2x-4x^2}}$

$-\frac{5}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{-\{(2x)^2 - 2.2x.\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2\} + 3 + \frac{1}{4}}}$

$= -\frac{3}{8}\int \frac{d(3+2x-4x^2)}{\sqrt{3+2x-4x^2}}$

$-\frac{5}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{\sqrt{13}}{2})^2 - (2x-\frac{1}{2})^2}}$

$= -\frac{3}{8}\cdot 2\sqrt{3+2x-4x^2}$

$-\frac{5}{4}\int \frac{\frac{1}{2}d(2x-\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{\sqrt{13}}{2})^2 + (2x-\frac{1}{2})^2}}$

$= -\frac{3}{4}\sqrt{3+2x-4x^2} - \frac{5}{8}\sin^{-1}\frac{2x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2}} + c$

$= -\frac{3}{4}\sqrt{3+2x-4x^2} - \frac{5}{8}\sin^{-1}\frac{4x-1}{\sqrt{13}} + c$

16.(a) $\int \frac{x+25}{x-25}dx$ [সি.'০৭]

$= \int \frac{x-25+50}{x-25}dx = \int (\frac{x-25}{x-25} + \frac{50}{x-25})dx$

$= \int (1+\frac{50}{x-25})dx = \int dx + 50\int \frac{1}{x-25}dx$

$= x + 50\ln|x-25| + c$

16(b) $\int \frac{x^2 dx}{x^2-4}$ [সি.'০৮; ব.'০৪; রা.'০৪,'১১]

$= \int \frac{x^2-4+4}{x^2-4}dx = \int (\frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-4})dx$

$= \int (1+\frac{4}{x^2-2^2})dx$

$= x + \frac{4}{2.2}\ln|\frac{x-2}{x+2}| + c = x + \ln|\frac{x-2}{x+2}| + c$

16(c) $\int \frac{x^2-1}{x^2-4}dx$

[কু. '০৯; সি.'০৫,'১২; য.'০৯; ঢা.'১১; ব.'১৩]

$= \int \frac{x^2-4+3}{x^2-4}dx = \int (\frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{3}{x^2-4})dx$

$= \int (1+\frac{3}{x^2-2^2})dx = x + \frac{3}{2.2}\ln|\frac{x-2}{x+2}| + c$

$= x + \frac{3}{4}\ln|\frac{x-2}{x+2}| + c$

16(d) $\int \frac{xdx}{(1-x)^2} = -\int \frac{1-x-1}{(1-x)^2}dx$

$= -\int \{\frac{1-x}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}\}dx$

$= -\int \frac{1}{1-x}dx + \int \frac{1}{(1-x)^2}dx$

$= -\int \frac{-d(1-x)}{1-x} - \int \frac{d(1-x)}{(1-x)^2}$

$= \ln|1-x| - (-\frac{1}{1-x}) + c$

$= \ln|1-x| + \frac{1}{1-x} + c$

17(a) $\int \sqrt{\frac{5-x}{5+x}}dx = \int \frac{5-x}{\sqrt{5^2-x^2}}dx$

$= \int \frac{5}{\sqrt{5^2-x^2}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}dx$

$= \int \frac{5}{\sqrt{5^2-x^2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{d(25-x^2)}{\sqrt{25-x^2}}$

$= 5\sin^{-1}\frac{x}{5} + \frac{1}{2}.2\sqrt{25-x^2} + c$

$= 5\sin^{-1}\frac{x}{5} + \sqrt{25-x^2} + c$

17(b) $\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int x\frac{\sqrt{1-x}\times\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}\times\sqrt{1-x}}dx$

$= \int x\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \int \frac{(1-x^2)-\frac{1}{2}(-2x)-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \int \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2} - \sin^{-1}x$

$= \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} - \sin^{-1}x + c$

$= \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{1}{2}\sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$ (Ans.)

নিয়ম ঃ $\int \frac{1}{g(x)\sqrt{\varphi(x)}}dx$ **আকারের জন্য,**

(a) $g(x)$ ও $\varphi(x)$ উভয়ে একঘাত হলে, $\varphi(x) = z^2$ ধরতে হয়।

(b) $g(x)$ একঘাত ও $\varphi(x)$ দ্বিঘাত হলে, $g(x) = \frac{1}{z}$ ধরতে হয়।

(c) $g(x)$ দ্বিঘাত ও $\varphi(x)$ একঘাত হলে, $\varphi(x) = z^2$ ধরতে হয়।

(d) $g(x)$ ও $\varphi(x)$ উভয়ে দ্বিঘাত হলে, $x = \frac{1}{z}$ ধরতে হয়।

(e) $\int \frac{x}{g(x)\sqrt{\varphi(x)}}dx$ এবং $g(x)$ ও $\varphi(x)$ উভয়ে দ্বিঘাত হলে, $\varphi(x) = z^2$ ধরতে হয়।

18.(a) ধরি, $I = \int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}$ এবং [ঢা.'১০; ব.'১৩]

$x+1 = z^2$. তাহলে $dx = 2zdz$ এবং

$$I = \int \frac{2zdz}{(z^2-1-3)\sqrt{z^2}}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{2zdz}{(z^2-4)z} = 2\int \frac{dz}{z^2-2^2}$$

$$= 2.\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}+2}\right| + c$$

18(b) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-1}}$

$= \sec^{-1}(x-1) + c$

নিয়ম ঃ (a) যদি কোন যোগাজ $\int \frac{a+bx^l}{p+qx^m}dx$ আকারে থাকে, যেখানে l ও m উভয়ে ভগ্নাংশ এবং তাদের হরের ল.সা.গু n হয়, তবে $x = z^n$ ধরতে হয়।

(b) $\int \frac{dx}{x(a+bx^n)}$ আকারের যোগজের জন্য, $x^n = \frac{1}{z}$ ধরতে হয়।

(c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^n}}$ আকারের যোগজের জন্য, $x^n = \frac{1}{z^2}$ ধরতে হয়।

(d) $\int \frac{dx}{x^m(a+bx)^n}$ আকারের যোগজের জন্য, $a + bx = zx$ ধরতে হয়।

(e) $\int \frac{dx}{(x-a)^m(x-b)^n}$ আকারের যোগজের জন্য, $z = \frac{x-b}{x-a}$ ধরতে হয়।

19.(a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/3}}dx$ [চ.'০০]

ধরি, $x = z^6$. তাহলে, $dx = 6z^5dz$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{\sqrt{z^6}\,6z^5dz}{1+\sqrt[3]{z^6}}$$

$$= \int \frac{z^3.6z^5dz}{1+z^2} = 6\int \frac{z^8\,dz}{1+z^2}$$

$$= 6\int \frac{1}{z^2+1}\{z^6(z^2+1) - z^4(z^2+1) + z^2(z^2+1) - (z^2+1) + 1\}dz$$

$$= 6\int (z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{1+z^2})dz$$

$$= 6(\frac{z^7}{7} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} - z + \tan^{-1}z) + c$$

$$= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{6}{3}x^{\frac{3}{6}} - 6x^{\frac{1}{6}} + \tan^{-1}x^{\frac{1}{6}} + c$$

19(b) ধরি, $I = \int \frac{dx}{x(4+5x^{20})}$ এবং $x^{20} = \frac{1}{z}$

তাহলে, $20x^{19}dx = -\frac{dz}{z^2} \Rightarrow x^{19}dx = -\frac{dz}{20z^2}$

এবং $I = \int \frac{x^{19}dx}{x^{20}(4+5x^{20})} = \int \frac{-\frac{dz}{20z^2}}{\frac{1}{z}(4+5\frac{1}{z})}$

$$= -\frac{1}{20}\int \frac{dz}{4z+5} = -\frac{1}{20}.\frac{1}{4}\int \frac{d(4z+5)}{4z+5}$$

$$= -\frac{1}{80}\ln|4z+5| + c = -\frac{1}{80}\ln\left|\frac{4}{x^{20}} + 5\right| + c$$

19. (c) ধরি, $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$ [ক.'০১; রা.'১১]

এবং $x^4 = \frac{1}{z^2}$. তাহলে, $4x^3dx = -\frac{2dz}{z^3}$ এবং

$$I = \int \frac{x^3dx}{x^4\sqrt{x^4-1}} = \int \frac{-\frac{dz}{2z^3}}{\frac{1}{z^2}\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2}\cos^{-1}z + c$$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-1}(\frac{1}{x^2}) + c = \frac{1}{2}\sec^{-1}(x^2) + c$$

(d) ধরি, $I = \int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)^3}$ এবং $z = \frac{x-1}{x-2}$

$$\Rightarrow zx - 2z = x - 1 \Rightarrow x(1-z) = 1-2z$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-2z}{1-z} \Rightarrow x - 2 = \frac{1-2z}{1-z} - 2$$

$$\Rightarrow x - 2 = \frac{1-2z-2+2z}{1-z} = -\frac{1}{1-z}$$

$$\Rightarrow dx = -\frac{dz}{(1-z)^2}$$

$$\therefore I = \int\frac{dx}{(\frac{x-1}{x-2})^2(x-2)^5} = \int\frac{-\frac{dz}{(1-z)^2}}{z^2 \cdot \frac{-1}{(1-z)^5}}$$

$$= \int\frac{(1-z)^3dz}{z^2} = \int\frac{(1-3z+3z^2-z^3)dz}{z^2}$$

$$= \int(\frac{1}{z^2} - 3\frac{1}{z} + 3 - z)dz$$

$$= -\frac{1}{z} - 3\ln|z| + 3z - \frac{z^2}{2} + c$$

$$= -\frac{x-2}{x-1} - 3\ln|\frac{x-1}{x-2}| + 3(\frac{x-1}{x-2}) - \frac{1}{2}(\frac{x-1}{x-2})^2$$

20. (a) $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int\frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(x^2+\frac{1}{x^2})}dx$

$$= \int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{(x-\frac{1}{x})^2+2}dx = \int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + c$$

20(b) $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int\frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(x^2+\frac{1}{x^2})}dx$

$$= \int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{(x+\frac{1}{x})^2-2}dx = \int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}| + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{x^2+1-\sqrt{2}x}{x^2+1+\sqrt{2}x}| + c$$

(c) $\int\frac{x^2dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+a^2)+(x^2-a^2)}{x^4+a^4}dx$

$$= \frac{1}{2}[\int\frac{x^2+a^2}{x^4+a^4}dx + \int\frac{x^2-a^2}{x^4+a^4}dx]$$

$$= \frac{1}{2}[\int\frac{x^2(1+\frac{a^2}{x^2})}{x^2(x^2+\frac{a^4}{x^2})}dx + \int\frac{x^2(1-\frac{a^2}{x^2})}{x^2(x^2+\frac{a^4}{x^2})}dx]$$

$$= \frac{1}{2}[\int\frac{d(x-\frac{a^2}{x})}{(x-\frac{a^2}{x})^2+(\sqrt{2}.a)^2} + \int\frac{d(x+\frac{a^2}{x})}{(x+\frac{a^2}{x})^2-(\sqrt{2}.a)^2}]$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{\sqrt{2}\,a}\tan^{-1}\frac{x-\frac{a^2}{x}}{\sqrt{2}\,a} + \frac{1}{2.\sqrt{2}\,a}\ln|\frac{x+\frac{a^2}{x}-\sqrt{2}\,a}{x+\frac{a^2}{x}+\sqrt{2}\,a}| + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\,a}[\tan^{-1}\frac{x^2-a^2}{\sqrt{2}\,ax} +$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+a^2-\sqrt{2}\,ax}{x^2+a^2+\sqrt{2}\,ax}\right|+c$$

21(a) $\int \sin^2 x\cos^2 x dx$ [য. '০৮; রা.,ঢা.'১৩]

$= \int \frac{1}{4}(2\sin x\cos x)dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2xdx$

$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}(x-\frac{1}{4}\sin 4x)+c$

21(b) ধরি, $I = \int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$ [য.'০৬]

$= \int \sin^3 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$ এবং sinx = z .

তাহলে, cosx dx = dz এবং

$I = \int z^3(1-z^2)\,dz = \int (z^3-z^5)\,dz$

$= \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{6}z^6 + c = \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + c$

21(c) ধরি, $I = \int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$ [রা.'০১]

$= \int (1-\cos^2 x)\cos^4 x\sin x\,dx$ এবং cosx = z

তাহলে, – sinx dx = dz এবং

$I = -\int (1-z^2)z^4\,dz = \int (z^6-z^4)\,dz$

$= \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{5}z^5 + c = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$

21(d) ধরি, $I = \int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$

$\sin^4 x\cos^4 x = \frac{1}{16}(2\sin x\cos x)^4$

$= \frac{1}{16}\sin^4 2x = \frac{1}{16}.\{\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\}^2$

$= \frac{1}{64}(1-2\cos 4x+\cos^2 4x)$

$= \frac{1}{64}\{1-2\cos 4x+\frac{1}{2}(1+\cos 8x)\}$

$= \frac{1}{128}(3-4\cos 4x+\cos 8x)$

$\therefore I = \int \frac{1}{128}(3-4\cos 4x+\cos 8x)dx$

$= \frac{1}{128}(3x-4.\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x)+c$

$= \frac{1}{128}(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x)+c$

21(e) $\int \sin^2 x\cos 2x\,dx$

[চ.'০৯; য.'০৫; কু.'০৭; সি.'১১]

$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\cos 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x-\cos^2 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \{\cos 2x-\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\}\,dx$

$= \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}(x+\frac{1}{4}\sin 4x)\}+c$

$= \frac{1}{4}(\sin 2x-x-\frac{1}{4}\sin 4x)\}+c$

21(f) $\int \sin^2 x\cos 2xdx$ [চ.'০২; য.'০৫; কু.'১১]

$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\cos 2xdx$

$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x-\cos^2 2x)dx$

$= \frac{1}{2}\int \{\cos 2x-\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\}dx$

$= \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}(x+\frac{1}{4}\sin 4x)\}+c$

$= \frac{1}{4}(\sin 2x-x-\frac{1}{4}\sin 4x)+c$

22. (a) $\int \tan^2 xdx$ [ঢা.'০৫,'০৭]

$= \int (\sec^2 x-1)dx = \tan x - x + c$

22(b) ধরি, $I = \int \frac{\tan^2(\ln x)}{x}dx$ [ব.'০২]

এবং lnx = z তাহলে, $\frac{1}{x}dx = dz$ এবং

$I = \int \tan^2 zdz = \int (\sec^2 z-1)dz$

$= \tan z - z + c = \tan(\ln x) - \ln x + c$

22(c) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^3 x}dx$

$$= \int (\tan x \sec^2 x + \frac{2}{2\sin x \cos x})dx$$

$$= \int \tan x \sec^2 x dx + 2\int \frac{dx}{\sin 2x}$$

$$= \int \tan x \, d(\tan x) + \int \sec 2x \, d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\tan\frac{2x}{2}| + c$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\tan x| + c$$

23. $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx$

$$= \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln|\sin x + \cos x| + c$$

24. (a) ধরি, $I = \int \frac{\sin 4x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$ এবং

$z = \sin^4 x + \cos^4 x$ তাহলে,

$$dz = (4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x)dx$$

$$= 4\sin x \cos x(\sin^2 - \cos^2 x)\,dx$$

$$= -2\sin 2x \cos 2x \,dx = -\sin 4x\, dx$$ এবং

$$I = \int \frac{-dz}{z} = -\ln|z| + c$$

$$= -\ln|\sin^4 x + \cos^4 x| + c$$

24(b) ধরি, $I = \int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ [রা.'০৬]

$$= \int \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x(1+\cos^2 x)} = \int \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x + 1}$$

$= \int \frac{\sec^2 x dx}{1+\tan^2 x + 1}$ এবং $z = \tan x \Rightarrow dz = \sec^2 x dx$

$$\therefore I = \int \frac{dz}{(\sqrt{2})^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\frac{z}{\sqrt{2}}) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}) + c$$

24(c) $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}dx$ [য.'০৩]

$$= \int \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}dx = \int \tan^2 x dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)dx = \tan x - x + c$$

24(d) $\int \frac{1-\cos 5x}{1+\cos 5x}$ [য.'০১; সি.'০২]

$$= \int \frac{2\sin^2 \frac{5x}{2}}{2\cos^2 \frac{5x}{2}}dx = \int \tan^2 \frac{5x}{2}dx$$

$$= \int (\sec^2 \frac{5x}{2} - 1)dx = \frac{2}{5}\tan\frac{5x}{2} - x + c$$

25(a) ধরি, $I = \int \frac{dx}{(e^x - 1)^2} = \int \frac{dx}{\{e^x(1-e^{-x})\}^2}$

$= \int \frac{dx}{e^{2x}(1-e^{-x})^2} = \int \frac{e^{-x}.e^{-x}dx}{(1-e^{-x})^2}$ এবং

$e^{-x} = z$. তাহলে $-e^{-x}dx = dz$ এবং

$$I = -\int \frac{zdz}{(1-z)^2} = \int \frac{(1-z)-1}{(1-z)^2}dz$$

$$= \int \{\frac{1}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2}\}dz$$

$$= -\int \{\frac{1}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2}\}d(1-z)$$

$$= -\{\ln|1-z| + \frac{1}{1-z}\} + c$$

$$= -\ln|1-e^{-x}| - \frac{1}{1-e^{-x}} + c$$

25(b) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin(x+a)} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin x \cos a + \cos x \sin a}$

ধরি, sinx = l (sinx cosa + cosx sina) + m(cosx cosa – sinx sina) + n

$\Rightarrow$ sinx = (l cosa – m sina) sinx + ($l$sina m cosa) cosx + n

উভয়পক্ষে sinx , cosx ও ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

n = 0 , $l$sina + m cosa = 0 $\Rightarrow m = -\frac{l\sin a}{\cos a}$

এবং l cosa – m sina = 1

$$\Rightarrow l\cos a + \frac{l\sin a}{\cos a}\sin a = 1$$

$$\Rightarrow l(\sin^2 a + \cos^2 a) = \cos a \Rightarrow l = \cos a$$

$$m = -\frac{\cos a \sin a}{\cos a} = -\sin a$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sin(x+a)} = \int \frac{\cos a \sin(x+a)\, dx}{\sin(x+a)} -$$

$$\int \frac{\sin a\,(\cos x \cos a - \sin x \sin a)}{\sin x \cos a + \sin a \cos x} dx$$

$$= \cos a \int dx \; - \sin a \ln|\sin(x+a)|$$

$$= x\cos a \; - \sin a \ln|\sin(x+a)| + c$$

25(c) $\int (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x})dx$

$$= \int (\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}})dx$$

$$= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}} dx = \sqrt{2}\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2\sin x \cos x}} dx$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}} dx$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}}$$

$$= \sqrt{2}\sin^{-1}(\sin x - \cos x) + c$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

নিচের যোগজগুলি নির্ণয় কর:

1(a) $\int (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})dx = \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}} + \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c$

$$= 2(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) + c$$

1(b) $\int a^{4x}dx = \dfrac{a^{4x}}{\ln a}\dfrac{1}{4} + c = \dfrac{a^{4x}}{4\ln a} + c$

2.(a) ধরি , $I = \int (2x+3)\sqrt{x^2+3x}\, dx$ এবং

$x^2 + 3x = z$. তাহলে $2x+3)dx = dz$

$$\therefore I = \int z^{\frac{1}{2}}\, dz = \frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}z^{3/2} + c$$

$$= \frac{2}{3}(x^2+3x)^{3/2} + c$$

2(b) $\int x^2 \cos x^3 dx = \dfrac{1}{3}\int \cos(x^3)(3x^2 dx)$

$$= \frac{1}{3}\sin x^3 + c$$

2(c) $\displaystyle\int \frac{(1+\tan\frac{3x}{2})^2 dx}{1+\sin 3x}$ [প্র.ভ.প.৮৬]

$$= \int \frac{(1+\tan\frac{3x}{2})^2 dx}{1+\dfrac{2\tan(3x/2)}{1+\tan^2(3x\backslash 2)}}$$

$$= \int \frac{\{1+\tan(3x/2)\}^2\{1+\tan^2(3x\backslash 2)\}dx}{1+\tan^2(3x\backslash 2)+2\tan(3x/2)}$$

$$= \int \frac{\{1+\tan(3x/2)\}^2\{1+\tan^2(3x\backslash 2)\}dx}{\{1+\tan(3x/2)\}^2}$$

$$= \int \{1+\tan^2(3x\backslash 2)\}dx = \int \sec^2(3x\backslash 2)dx$$

$$= \frac{2}{3}\tan\frac{3x}{2} + c$$

3. $\displaystyle\int \frac{2x\sin^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$

ধরি, $\sin^{-1}x^2 = z$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}.2x\, dx = dz$$

$$\Rightarrow \frac{2x\, dx}{\sqrt{1-x^4}} = dz$$

$$\int \frac{2x\sin^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int z\, dz$$

$$= \frac{z^2}{2} + c = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x^2)^2 + c \text{ (Ans.)}$$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \int (\ln x)^{-2} d(\ln x)$

$$= \frac{(\ln x)^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$$

5(a) $\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \sin^{-1}x\, d(\sin^{-1}x)$

$= \frac{(\sin^{-1}x)^2}{2} + c$

5(b) $\int \frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2}dx$ [প্র.ভ.প.'৯৩]

$= \int \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}dx$

$= \int (1+\tan x)^{-2}\, d(1+\tan x)$

$= \frac{(1+\tan x)^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{1+\tan x} + c$

5.(c) ধরি, $I = \int \frac{\cos 2x}{(\sqrt{\sin 2x+3})^3}dx$ [প্র.ভ.প.'৯৫]

এবং $\sin 2x + 3 = z$. তাহলে, $2\cos 2x\, dx = dz$ এবং

$I = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^{3/2}} = \frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}dz$

$= \frac{1}{2}\frac{z^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c = \frac{1}{2}\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}. + c = -\frac{1}{\sqrt{z}} + c$

$= -\frac{1}{\sqrt{\sin 2x+3}} + c$

6. (a) $\int \operatorname{cosec}\frac{x}{2}dx = \frac{1}{1/2}\ln|\tan(\frac{x/2}{2})| + c$

$= 2\ln|\tan\frac{x}{4}| + c$

6(b) $\int \sec\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int \sec(\sqrt{x})(\frac{1}{2\sqrt{x}}dx)$

$= 2\ln|\sec\sqrt{x} + \tan\sqrt{x}| + c$

6(c) $\int (\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x-2})dx$

$= 3\, ln|x-1| - 4\, ln|x-2| + c$

6(d) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = -\int \frac{(-\sin x dx)}{1+\cos x}$

$= -ln|1+\cos x| + c$

7. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

$= \int \frac{d(\ln x)}{\ln x}$ [$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$]

$= \ln(\ln x) + c$

8. (a) $\int \frac{dx}{16+x^2} = \int \frac{dx}{4^2+x^2} = \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x}{4} + c$

8(b) $\int \frac{4}{16a^2+x^2}dx = 4\int \frac{dx}{(4a)^2+x^2}$

$= 4.\frac{1}{4a}\tan^{-1}\frac{x}{4a} + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{4a} + c$

8 (c) $\int \frac{x^2\, dx}{e^{x^3}+e^{-x^3}}$ [প্র.ভ.প. '৮৯,'০১]

$= \int \frac{x^2 e^{x^3} dx}{e^{x^3}(e^{x^3}+e^{-x^3})} = \int \frac{x^2 e^{x^3} dx}{(e^{x^3})^2+1}$

$= \int \frac{d(e^{x^3})}{1+(e^{x^3})^2}.\frac{1}{3}$ [$\because d(e^{x^3}) = e^{x^3}3x^2 dx$]

$= \frac{1}{3}\tan^{-1}(e^{x^3}) + c$

9(a) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+25-9}$

$= \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4^2} = \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x+3}{4} + c$

9(b) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$ [প্র.ভ.প.'০০]

$= \frac{1}{18}\int \frac{(x^2+9)-(x^2-9)}{(x^2+9)^2}dx$

$= \frac{1}{18}\{\int \frac{x^2+9}{(x^2+9)^2}dx - \int \frac{x^2-9}{(x^2+9)^2}dx\}$

$= \frac{1}{18}\{\int \frac{dx}{x^2+9} - \int \frac{x^2(1-\frac{9}{x^2})}{x^2(x+\frac{9}{x})^2}dx$

$$= \frac{1}{18}\{\int\frac{dx}{x^2+3^2} - \int\frac{d(x+\frac{9}{x})}{(x+\frac{9}{x})^2}\}$$

$$= \frac{1}{18}\{\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3} - (-\frac{1}{x+\frac{9}{x}})\} + c$$

$$= \frac{1}{18}(\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3} + \frac{x}{x^2+9}) + c$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ ধরি, $x = 3\tan\theta$. তাহলে

$\theta = \tan^{-1}\frac{x}{3}$ এবং $dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$

$$\int\frac{dx}{(x^2+9)^2} = \int\frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{(9\tan^2\theta+9)^2}$$

$$= \int\frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{81(\tan^2\theta+1)^2} = \int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{27\sec^4\theta}$$

$$= \frac{1}{27}\int\cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{27}\int\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{54}(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta) + c$$

$$= \frac{1}{54}(\theta + \frac{1}{2}\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}) + c$$

$$= \frac{1}{54}(\tan^{-1}\frac{x}{3} + \frac{x/3}{1+x^2/9}) + c$$

$$= \frac{1}{54}(\tan^{-1}\frac{x}{3} + \frac{3x}{9+x^2}) + c$$

10. $\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$ [প্র.ভ.প.'০৪]

$$= \int\frac{dx}{(x-\frac{3}{2})^2+2-\frac{9}{4}} = \int\frac{dx}{(x-\frac{3}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2.\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right| + c = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$$

11(a) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+4}\sqrt{x+3}} = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7x+12}}$

$$= \int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{7}{2})^2+12-\frac{49}{4}}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{7}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}}$$

$$= \ln\left|\sqrt{(x+\frac{7}{2})^2-(\frac{1}{2})} + x + \frac{7}{2}\right| + c$$

$$= \ln\left|\sqrt{x^2+7x+12} + x + \frac{7}{2}\right| + c$$

11(b) $\int\sqrt{16-9x^2}\, dx = \frac{1}{3}\sqrt{(4)^2-(3x)^2}\, d(3x)$

$$= \frac{1}{3}[\frac{3x\sqrt{4^2-(3x)^2}}{2} + \frac{4^2}{2}\sin^{-1}\frac{3x}{4}] + c$$

$$= \frac{x\sqrt{16-9x^2}}{2} + \frac{8}{3}\sin^{-1}\frac{3x}{4} + c \text{ (Ans.)}$$

12 (a) $\int\frac{xdx}{\sqrt{4+x}} = \int\frac{4+x-4}{\sqrt{4+x}}dx$

$$= \int(\frac{4+x}{\sqrt{4+x}} - \frac{4}{\sqrt{4+x}})dx$$

$$= \int\sqrt{4+x}dx - 4\int\frac{1}{\sqrt{4+x}}dx$$

$$= \frac{(4+x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 4.2\sqrt{4+x} + c$$

$$= \frac{2}{3}(4+x)^{3/2} - 8\sqrt{4+x} + c$$

12(b) $\int\frac{6x-10}{(2x+1)^2}dx = \int\frac{3(2x+1)-13}{(2x+1)^2}dx$

$$= \int\frac{3}{2x+1}dx - \int\frac{13}{(2x+1)^2}dx$$

$$= \frac{3}{2}\int\frac{d(2x+1)}{2x+1} - \frac{13}{2}\int(2x+1)^{-2}d(2x+1)$$

$$= \frac{3}{2}\ln|2x+1| - \frac{13}{2}\frac{(2x+1)^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$$= \frac{3}{2}\ln|2x+1| + \frac{13}{2(2x+1)} + c \text{ (Ans.)}$$

12(c) $\int\frac{x\, dx}{4-x} = \int\frac{-(4-x-4)}{4-x}dx$ [প্র.ভ.প'৮৮]

$$= -\int \frac{4-x}{4-x}dx + 4\int \frac{dx}{4-x}$$

$$= -\int dx - 4\int \frac{d(4-x)}{4-x} = -x - 4\ln|4-x| + c$$

13(a) $\int \sqrt{\frac{a+x}{x}}dx = \int \frac{(\sqrt{a+x})^2}{\sqrt{x(a+x)}}dx$

$$= \int \frac{(a+x)dx}{\sqrt{x^2+ax}} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+a)+\frac{a}{2}}{\sqrt{x^2+ax}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+a)}{\sqrt{x^2+ax}}dx + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2}}$$

$$= \frac{1}{2}.2\sqrt{x^2+ax}$$

$$+ \frac{a}{2}\ln\left|\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2} + x + \frac{a}{2}\right| + c$$

$$= \sqrt{x^2+ax} + \frac{a}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+ax} + x + \frac{a}{2}\right| + c$$

13.(b) ধরি, $I = \int \frac{\sqrt{x+3}}{x+2}dx$ এবং $x+3 = z^2$

তাহলে, $dx = 2zdz$ এবং $I = \int \frac{\sqrt{z^2}\, 2zdz}{z^2-3+2}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{2z^2dz}{z^2-1} = 2\int \frac{z^2-1+1}{z^2-1}dz$$

$$= 2\int dz + 2\int \frac{1}{z^2-1}dz$$

$$= 2z + 2.\frac{1}{2.1}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c$$

$$= 2\sqrt{x+3} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}\right| + c$$

14(a) ধরি, $I = \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ এবং $1 - x = \frac{1}{z}$

তাহলে $z = \frac{1}{1-x}$ এবং $-dx = -\frac{1}{z^2}dz$

$$I = \int \frac{dz}{z^2.\frac{1}{z}\sqrt{1-(1-\frac{1}{z})^2}}$$

$$= \int \frac{dz}{z\sqrt{1-1+2\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}}}$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{2z-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2z-1)}{\sqrt{2z-1}}$$

$$= \frac{1}{2}.2\sqrt{2z-1} + c$$

$$= \sqrt{2.\frac{1}{1-x}-1} + c = \sqrt{\frac{2-1+x}{1-x}} + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c \text{ (Ans.)}$$

14 (b) ধরি, $I = \int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x^2+3x+2}}$ এবং

$2x+3 = \frac{1}{z}$ তাহলে $z = \frac{1}{2x+3}$ এবং

$2dx = -\frac{1}{z^2}dz \Rightarrow dx = -\frac{dz}{2z^2}$

$$\therefore I = \int \frac{-dz/2z^2}{\frac{1}{z}\sqrt{(\frac{1-3z}{2z})^2 + 3.\frac{1-3z}{2z} + 2}}$$

$$= -\int \frac{dz}{2z\sqrt{\frac{1-6z+9z^2}{4z^2} + \frac{3-9z}{2z} + 2}}$$

$$= -\int \frac{dz}{2z\sqrt{\frac{1-6z+9z^2+6z-18z^2+8z^2}{4z^2}}}$$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \cos^{-1}z + c$$

$$= \cos^{-1}(\frac{1}{2x+3}) + c = \sec^{-1}(2x+3) + c$$

বিকল্প পদ্ধতি : $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x^2+3x+2}}$

$$= \int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{\frac{1}{4}(4x^2+12x+8)}}$$

$$= \int \frac{dx}{(2x+3)\frac{1}{2}\sqrt{(2x+3)^2-1}}$$

$$= \int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)\sqrt{(2x+3)^2-1}}$$

$$= \sec^{-1}(2x+3)+c$$

15 (a) $\int \frac{x^{-3/4}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

ধরি, $x=z^4$. তাহলে, $dx=4z^3dz$ এবং

$$\int \frac{x^{-3/4}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{(z^4)^{-3/4}}{1+\sqrt{z^4}}\,4z^3dz$$

$$= \int \frac{z^{-3}}{1+z^2}\,4z^3dz = 4\int \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= 4\tan^{-1}z+c = 4\tan^{-1}(x^{1/4})+c \text{ (Ans.)}$$

15(b) ধরি, $I = \int \frac{1+x^{1/4}}{1+x^{1/2}}\,dx$ এবং $x=z^4$.

তাহলে, $dx=4z^3dz$ এবং

$$I = \int \frac{(1+z)4z^3dz}{1+z^2} = 4\int \frac{z^4+z^3}{1+z^2}\,dz$$

$$= 4\int \frac{z^2(z^2+1)-(z^2+1)+z(z^2+1)-z-1}{1+z^2}\,dz$$

$$= 4\{\int (z^2-1+z)dz - \int \frac{zdz}{z^2+1} - \int \frac{dz}{z^2+1}\}$$

$$= 4\{\frac{z^3}{3} - z + \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(z^2+1) - \tan^{-1}z\} + c$$

$$= 4\{\frac{x^{3/4}}{3} - x^{1/4} + \frac{x^{1/2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^{1/2}+1)$$
$$- \tan^{-1}x^{1/4}\} + c$$

15(c) ধরি, $I = \int \frac{dx}{x(x^3+2)}$ এবং $x^3 = \frac{1}{z}$

তাহলে, $3x^2dx = -\frac{1}{z^2}dz \Rightarrow x^2dx = -\frac{dz}{3z^2}$

এবং $I = \int \frac{x^2dx}{x^3(x^3+2)} = \int \frac{-\frac{dz}{3z^2}}{\frac{1}{z}(\frac{1}{z}+2)}$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dz}{1+2z} = -\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\int \frac{d(1+2z)}{1+2z}$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|1+2z|+c = -\frac{1}{6}\ln|1+\frac{2}{x^3}|+c$$

15(d) ধরি, $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2+3\sqrt{x}}}$ এবং $\sqrt{x} = \frac{1}{z^2}$

তাহলে, $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = -\frac{2}{z^3}dz \Rightarrow \frac{z^2}{2}dx = -\frac{2}{z^3}dz$

$\Rightarrow dx = -\frac{4dz}{z^5}$ এবং $I = \int \frac{-\frac{4dz}{z^5}}{\frac{1}{z^4}\sqrt{2+\frac{3}{z^2}}}$

$$= -4\int \frac{dz}{\sqrt{2z^2+3}} = -4\int \frac{dz}{\sqrt{2}\sqrt{z^2+(\sqrt{3/2})^2}}$$

$$= -2\sqrt{2}\ln|z+\sqrt{z^2+\frac{3}{2}}|+c$$

$$= -2\sqrt{2}\ln|\frac{1}{x^{1/4}}+\sqrt{\frac{1}{x^{1/2}}+\frac{3}{2}}|+c$$

15(e) ধরি, $I = \int \frac{dx}{x+x^n}, n \neq 1$ এবং $x^{n-1} = \frac{1}{z}$

তাহলে, $(n-1)x^{n-2}dx = -\frac{dz}{z^2}$

$$\Rightarrow x^{n-2}dx = \frac{-dz}{(n-1)z^2}$$

এবং $I = \int \frac{dx}{x(1+x^{n-1})} = \int \frac{x^{n-2}dx}{x^{n-1}(1+x^{n-1})}$

$$= \int \frac{-\frac{dz}{(n-1)z^2}}{\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z})} = -\frac{1}{n-1}\int \frac{dz}{1+z}$$

$$= -\frac{1}{n-1}\ln|1+z|+c$$

$= -\frac{1}{n-1}\ln|1+\frac{1}{x^{n-1}}|+c$

16(a) ধরি, $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^3+4}}$ এবং $x^3=\frac{1}{z^2}$.

তাহলে, $3x^2dx=-\frac{2dz}{z^3}\Rightarrow x^2dx=-\frac{2dz}{3z^3}$ এবং

$$I=\int\frac{x^2dx}{x^3\sqrt{x^3+4}}=\int\frac{-\frac{2dz}{3z^3}}{\frac{1}{z^2}\sqrt{\frac{1}{z^2}+4}}$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{dz}{\sqrt{1+4z^2}}=-\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2+z^2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|z+\sqrt{\frac{1}{4}+z^2}|+c$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|\frac{1}{x^{3/2}}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{x^3}}|+c$$

16(b) $\int\frac{dx}{x^3(3+5x)^2}$

ধরি, $3+5x=zx\Rightarrow(z-5)x=3$

$\Rightarrow x=\frac{3}{z-5}$. তাহলে, $dx=-\frac{3dz}{(z-5)^2}$ এবং

$$\int\frac{dx}{x^3(3+5x)^2}=\int\frac{\frac{-3dz}{(z-5)^2}}{\frac{27}{(z-5)^3}(3+5\frac{3}{z-5})^2}$$

$$=\int\frac{-3(z-5)^3dz}{27(3z-15+15)^2}$$

$$=-\frac{1}{81}\int\frac{z^3-15z^2+75z-125)dz}{z^2}$$

$$=-\frac{1}{81}\int(z-15+\frac{75}{z}-125\frac{1}{z^2})dz$$

$$=-\frac{1}{81}\{\frac{z^2}{2}-15z+75\ln|z|-125(-\frac{1}{z})\}+c$$

$$=-\frac{1}{81}\{\frac{1}{2}(\frac{3+5x}{x})^2-15(\frac{3+5x}{x})+$$

$$75\ln|\frac{3+5x}{x}|+125(\frac{x}{3+5x})\}+c$$

17(a) $\int\frac{a^2+x^2}{(x^2-a^2)^2}dx=\int\frac{x^2(1+\frac{a^2}{x^2})}{x^2(x-\frac{a^2}{x})^2}dx$

$$=\int\frac{d(x-\frac{a^2}{x})}{(x-\frac{a^2}{x})^2}=-\frac{1}{x-\frac{a^2}{x}}+c=-\frac{x}{x^2-a^2}+c$$

17(b) $\int\frac{(x^2-1)dx}{x^4+6x^3+7x^2+6x+1}$

$$=\int\frac{(1-\frac{1}{x^2})dx}{x^2+\frac{1}{x^2}+6(x+\frac{1}{x})+7}$$

$$=\int\frac{(1-\frac{1}{x^2})dx}{(x+\frac{1}{x})^2+6(x+\frac{1}{x})+5}$$

$$=\int\frac{(1-\frac{1}{x^2})dx}{(x+\frac{1}{x}+3)^2+5-9}=\int\frac{d(x+\frac{1}{x}+3)}{(x+\frac{1}{x}+3)^2-2^2}$$

$$=\frac{1}{2.2}\ln|\frac{x+\frac{1}{x}+3-2}{x+\frac{1}{x}+3-2}|+c$$

$$=\frac{1}{4}\ln|\frac{x^2+1+x}{x^2+1+5x}|+c$$

18(a) $\int\cot^2xdx=\int(\cos ec^2x-1)dx$

$=-\cot x-x+c$

18(b) $\int\tan^2\frac{x}{2}dx=\int(\sec^2\frac{x}{2}-1)dx$

$$=2\int\sec^2\frac{x}{2}d(\frac{x}{2})-\int dx=2\tan\frac{x}{2}-x+c$$

18 (c) $\int\frac{dx}{\sin x\cos^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos^2x}dx$

$= \int \tan x \sec x dx + \int \cos ec x\, dx$

$= \sec x + \ln(\cos ecx - \cot x) + c$

19(a) $\int \frac{dx}{4-5\sin^2 x} = \int \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x(4-5\sin^2 x)}$

$= \int \frac{\sec^2 dx}{4\sec^2 x - 5\tan^2 x}$

$= \int \frac{\sec^2 dx}{4(1+\tan^2 x) - 5\tan^2 x} = \int \frac{\sec^2 dx}{4-\tan^2 x}$

$= \int \frac{d(\tan x)}{2^2 - (\tan x)^2} = \frac{1}{2.2}\ln|\frac{2+\tan x}{2-\tan x}|+c$

$= \frac{1}{4}\ln|\frac{2+\tan x}{2-\tan x}|+c$

19(b) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$

$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x - 1}{\sin x + \cos x} dx$

$= \int \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x + \cos x} dx$

$= \int (\sin x + \cos x - \frac{1}{\sin x + \cos x}) dx$

$= \cos x - \sin x - \int \frac{dx}{\sqrt{2}(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4})}$

$= \cos x - \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}$

$= \cos x - \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \cos ec(x+\frac{\pi}{4})dx$

$= \cos x - \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\tan\frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{4})|+c$

$= \cos x - \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})|+c$

20 ধরি, $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt{1-x}}}$ এবং

$x = \sin^2\theta$. তাহলে $dx = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$,

$\sin\theta = \sqrt{x} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\sqrt{x}$ এবং

$I = \int \frac{2\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \sqrt{1-\sin^2\theta}}}$

$= \int \frac{2\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$

$= \int \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1}{\sin\theta + \cos\theta} d\theta$

$= \int \frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1}{\sin\theta + \cos\theta} d\theta$

$= \int (\sin\theta + \cos\theta - \frac{1}{\sin x + \cos x}) d\theta$

$= \cos\theta - \sin\theta - \int \frac{d\theta}{\sqrt{2}(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{4})}$

$= \cos\theta - \sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\theta}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$

$= \cos\theta - \sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \cos ec(\theta+\frac{\pi}{4})d\theta$

$= \sqrt{1-\sin^2\theta} - \sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\tan\frac{1}{2}(\theta+\frac{\pi}{4})|+c$

$= \sqrt{1-x} - \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\tan(\frac{1}{2}\sin^{1}\sqrt{x} + \frac{\pi}{8})|+c$

প্রশ্নমালা X C

[সূত্র (MCQ এর ক্ষেত্রে) ঃ $\int x^m e^{nx} dx$

$\{\frac{1}{n}x^m - \frac{1}{n^2}\frac{d}{dx}(x^m) + \frac{1}{n^3}\frac{d^2}{dx^2}(x^m) -$

$\frac{1}{n^4}\frac{d^3}{dx^3}(x^m) + \cdots\cdots\} e^{nx}$]

1.(a) $\int xe^x dx$

$= x\int e^x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int e^x dx\}dx$

$= xe^x - \int 1.e^x dx = xe^x - e^x + c$

(b) $\int x^2 e^x dx$ [কু.'০৪; সি.'০৯]

$= x^2\int e^x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x^2)\int e^x dx\}dx$

$= x^2e^x - \int (2x)e^x dx$

$= x^2e^x - 2[x\int e^x - \int \{\frac{d}{dx}(x)\int e^x dx\}dx]$

$= x^2e^x - 2[xe^x - \int 1.e^x dx]$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

$= (x^2 - 2x + 2)e^x + c$

(c) $\int x^2 e^{-3x} dx$

$= x^2 \int e^{-3x}dx - \int \{\frac{d}{dx}(x^2)\int e^{-3x}dx\}dx$

$= x^2(-\frac{1}{3})e^{-3x} - \int (2x)(-\frac{1}{3})e^{-3x}dx$

$= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} + \frac{2}{3}[x\int e^{-3x} - \int \{\frac{d}{dx}(x)\int e^{-3x}dx\}dx]$

$= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} + \frac{2}{3}[x(-\frac{e^{-3x}}{3}) - \int (-\frac{e^{-3x}}{3})dx]$

$= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} + \frac{2}{3}[\frac{xe^{-3x}}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{e^{-3x}}{3})] + c$

$= -\frac{1}{3}(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9})e^{-3x} + c$

(d) ধরি, $I = \int x^3 e^{x^2} dx$ এবং $x^2 = z$. তাহলে

$2xdx = dz \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dz$ এবং

$I = \int x^2 e^{x^2}(xdx) = \frac{1}{2}\int ze^z dz$

$= \frac{1}{2}[z\int e^z dz - \int \{\frac{d}{dz}(z)\int e^z dz\}dz]$

$= \frac{1}{2}[ze^z - \int 1.e^z dz] = \frac{1}{2}(ze^z - e^z) + c$

$= \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + c$

2. সূত্র (MCQ এর জন্য)ঃ $\int x^n \sin x dx$

$= x^n(-\cos x) - (nx^{n-1})(-\sin x) + \cdots$

(a) $\int x \sin 3x dx$

$= x\int \sin 3x dx - \int \{\frac{d}{dx}(x)\int \sin 3x\, dx\}\, dx$

$= x(-\frac{1}{3}\cos 3x) - \int 1.(-\frac{1}{3}\cos 3x)dx$

$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}(\frac{1}{3}\sin 3x) + c$

$= \frac{1}{9}\sin 3x - \frac{1}{3}x\cos 3x + c$

(b) $\int x^3 \sin x\, dx$

$= x^3\int \sin x dx - \int \{\frac{d}{dx}(x^3)\int \sin x\, dx\}\, dx$

$= x^3(-\cos x) - \int 3x^2(-\cos x)dx$

$= -x^3\cos x + 3[x^2\int \cos x - \int \{\frac{d}{dx}(x^2)\int \cos x\, dx\}\, dx]$

$= -x^3\cos x + 3[x^2\sin x - \int 2x\sin x dx]$

$= -x^3\cos x + 3[x^2\sin x - 2\{x(-\cos x) - \int 1(-\cos x)dx\}]$

$= -x^3\cos x + 3[x^2\sin x - 2(-x\cos x + \sin x)] + c$

$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + c$

[MCQ এর ক্ষেত্রে, $\int x^3 \sin x\, dx = x^3(-\cos x) - (3x^2)(-\sin x) + (6x)(\cos x) - 6\sin x$

$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + c$]

(c) ধরি, $I = \int e^{2x}\cos e^x dx$ এবং $e^x = z$.

তাহলে $e^x dx = dz$ এবং

$I = \int e^x \cos e^x\,(e^x dx) = \int z\cos z\, dz$

$= z\int \cos z\, dz - \int \{\frac{d}{dz}(z)\int \cos z\, dz\}dz$

$= z\sin z - \int 1.\sin z\, dz$

$= z\sin z - (-\cos z) + c$

$= e^x \sin e^x + \cos e^x + c$

(d) ধরি, $I = \int \sin\sqrt{x}\, dx$ এবং $\sqrt{x} = z$

তাহলে $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dz \Rightarrow dx = 2z\, dz$ এবং

$I = \int 2z \sin z\, dz$

$= 2[\, z\int \sin z\, dz - \int \{\frac{d}{dz}(z)\int \sin z\, dz\}\, dz\,]$

$= 2[\, z(-\cos z) - \int 1.(-\cos z)dz\,]$

$= -2z\cos z + 2\sin z + c$

$= -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + c$

3 (a) $\int x\sin^2\frac{x}{2}dx$ [য.বো.'০২]

$= \int x\frac{1}{2}(1-\cos x)dx$

$= \frac{1}{2}\int xdx - \frac{1}{2}\int x\cos x\, dx$

$= \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}[x\int \cos x\, dx - \int \{\frac{d}{dx}(x)\int \cos xdx\}dx]$

$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}[x\sin x - \int 1.\sin x\, dx]$

$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}[x\sin x - (-\cos x)] + c$

$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{2}\cos x + c$

(b) $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}dx = \int x^2\frac{1}{2}(1+\cos x)dx$

$= \frac{1}{2}[\int x^2dx + \int x^2\cos xdx]$

$= \frac{1}{2}[\frac{x^3}{3} + x^2(\sin x) - (2x)(-\cos x) + (2)(-\sin x)] + c$

$= \frac{1}{2}[\frac{x^3}{3} + x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x] + c$

(c) $\int x\cos 2x\cos 3xdx$

$= \int x\frac{1}{2}(\cos 5x - \cos x)dx$

$= \frac{1}{2}[x\int \cos 5xdx - \int \{\frac{d}{dx}(x)\int \cos 5xdx\}dx$
$+ x\int \cos xdx - \int \{\frac{d}{dx}(x)\int \cos xdx\}dx]$

$= \frac{1}{2}[x(\frac{\sin 5x}{5}) - \int 1.(\frac{\sin 5x}{5})dx + x\sin x - \int 1.\sin xdx]$

$= \frac{1}{2}[\frac{1}{5}x\sin 5x + \frac{\cos 5x}{25} + x\sin x + \cos x] + c$

4. (a) $\int x\sec^2 xdx$ [ঢা.'০১,'১৪]

$= x\int \sec^2 xdx - \int \{\frac{d}{dx}(x)\int \sec^2 xdx\}dx$

$= x\tan x - \int 1.\tan xdx$

$= x\tan x + \ln|\cos x| + c$

4.(b) $\int x\sec^2 3x\, dx$ [ঢা.'০১]

$= x\int \sec^2 3xdx - \int \{\frac{d}{dx}(x)\int \sec^2 3xdx\}dx$

$= x\frac{\tan 3x}{3} - \int 1.\frac{\tan 3x}{3}dx$

$= \frac{x}{3}\tan 3x + \frac{1}{9}\ln|\cos 3x| + c$

(c) $\int x\tan^2 xdx$ [রা.'০৫; সি.'০৫]

$= \int x(\sec^2 x - 1)dx = \int x\sec^2 xdx - \int xdx$

$= x\int \sec^2 xdx - \int \{\frac{d}{dx}(x)\int \sec^2 xdx\}dx - \frac{x^2}{2}$

$= = x\tan x - \int 1.\tan xdx - \frac{x^2}{2}$

$= x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + c$

(d) ধরি, $I = \int \cos ec^3 x\, dx$

$= \int \cos ec^2 x\cos ecx\, dx$

$= \cos ecx\int \cos ec^2 x\ \ dx - \int \{\frac{d}{dx}(\cos ecx)\int \cos ec^2 xdx\}dx$

$= -\operatorname{cosec}x\cot x - \int(-\operatorname{cosec}x\cot x).(-\cot x)dx =$

$-\operatorname{cosec}x\cot x - \int \operatorname{cosec}x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)dx$

$= -\operatorname{cosec}x\cot x - \int \operatorname{cosec}^3 x dx + \int \operatorname{cosec}x dx$

$\Rightarrow I = -\operatorname{cosec}x\cot x - I + \ln|\tan\frac{x}{2}| + c_1$

$\Rightarrow 2I = -\operatorname{cosec}x\cot x + \ln|\tan\frac{x}{2}| + c_1$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}x\cot x + \frac{1}{2}\ln|\tan\frac{\pi}{2}| + \frac{1}{2}c_1$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}x\cot x + \frac{1}{2}\ln|\tan\frac{\pi}{2}| + c$

5. সূত্র (MCQ এর জন্য):

$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x - \frac{1}{n+1})$

(a) $\int x\ln x dx$ [য.'০৩; ঢা.'০৬; ব.'০৮]

$= \ln x\int x dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int x dx\}dx$

$= \ln x.\frac{x^2}{2} - \int\frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$

(b) $\int x^n \ln x dx$ [প্র.ভ.প.'১৩]

$= \ln x\int x^n dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int x^n dx\}dx$

$= \ln x.\frac{x^{n+1}}{n+1} - \int\frac{1}{x}.\frac{x^{n+1}}{n+1}dx$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}.\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$

(c) $\int x^2(\ln x)^2 dx$ [প্র.ভ.প.'০৫]

$= (\ln x)^2\int x^2 dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)^2\int x^2 dx\}dx$

$= (\ln x)^2\frac{x^3}{3} - \int 2\ln x.\frac{1}{x}.\frac{x^3}{3}dx$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}\int x^2\ln x dx$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 -$

$\frac{2}{3}[\ln x\int x^2 dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int x^2 dx\}dx]$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}[\ln x.\frac{x^3}{3} - \int\frac{1}{x}.\frac{x^3}{3}dx]$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx]$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}.\frac{x^3}{3}] + c$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}] + c$

$= \frac{x^3}{27}[9(\ln x)^2 - 6\ln x + 2] + c$

(d) $\int(\ln x)^2 dx$ [য.'০৫; চ.'০৭; প্র.ভ.প. '১০]

$= (\ln x)^2\int dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)^2\int dx\}dx$

$= (\ln x)^2.x - \int 2\ln x.\frac{1}{x}.x dx$

$= x(\ln x)^2 - 2\int\ln x dx$

$= x(\ln x)^2 - 2[\ln x\int dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int dx\}dx] =$

$x(\ln x)^2 - 2[\ln x.\, x - \int\frac{1}{x}.x dx]$

$= x(\ln x)^2 - 2[x\ln x - \int dx]$

$= x(\ln x)^2 - 2[x\ln x - x] + c$

$= x\{(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\} + c$

(e) ধরি, $I = \int\frac{\ln(\ln x)dx}{x}$ এবং $\ln x = z$.

তাহলে $\frac{1}{x}dx = dz$ এবং $I = \int\ln z\, dz$

$\Rightarrow I = \ln z\int dz - \int\{\frac{d}{dz}(\ln z)\int dz\}dz$

$= \ln z.z - \int\frac{1}{z}.zdz = z\ln z - \int dz$

$= z\ln z - z + c = \ln x\{\ln(\ln x) - 1\} + c$

(f) ধরি, $I = \int\frac{\ln\sec^{-1}x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ [ঢা.'০৮; সি.'১৪]

এবং $\sec^{-1}x = z \Rightarrow \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = dz$

$\therefore I = \int\ln z\,dz$

$= \ln z\int dz - \int\{\frac{d}{dz}(\ln z)\int dz\}dz$

$= \ln z.z - \int\frac{1}{z}.zdz = z\ln z - \int dz$

$= z\ln z - z + c$

$= \{\ln(\sec^{-1}x) - 1\}\sec^{-1}x + c$

6.(a) $\int\tan^{-1}xdx$ [কু.'০২; ঢা.'০৪; ব.'১০]

$= \tan^{-1}x\int dx - \int\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int dx\}dx$

$= x\tan^{-1}x - \int\frac{x}{1+x^2}dx$

$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{(0+2x)dx}{1+x^2}$

$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

(b) $\int x\sin^{-1}xdx$ [ঢা.'০৭]

$= \sin^{-1}x\int xdx - \int\{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)\int xdx\}dx$

$= \sin^{-1}x.\frac{x^2}{2} - \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{x^2}{2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}[\int\sqrt{1-x^2}dx - \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx]$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x -$

$- \sin^{-1}x] + c$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{1}{2}\sin^{-1}x] + c$

(c) $\int\sin^{-1}x\,dx$ [সি.'০৩; য.'১০; ঢা.'১৪]

$= \sin^{-1}x\int dx - \int\{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)\int dx\}dx$

$= x\sin^{-1}x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= x\sin^{-1}x - (-\frac{1}{2})\int\frac{(0-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= x\sin^{-1}x + \frac{1}{2}.2\sqrt{1-x^2} + c$

$= x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

(d) $\int\cos^{-1}xdx$ [কু. '০৫,'১৪; চ.'০৬; য.'০৮; রা.'১০]

$= \cos^{-1}x\int dx - \int\{\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)\int dx\}dx$

$= x\cos^{-1}x + \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= x\cos^{-1}x + (-\frac{1}{2})\int\frac{(0-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= x\cos^{-1}x - \frac{1}{2}.2\sqrt{1-x^2} + c$

$= x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$

(e) $\int x\sin^{-1}x^2dx$

[ঢা.'০৫; রা.'০৬; প্র.ভ.প. '০৪,'০৬]

$= \sin^{-1}x^2\int xdx - \int\{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x^2)\int xdx\}dx$

$= \sin^{-1}x^2.\frac{x^2}{2} - \int\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.\frac{x^2}{2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x^2 - \int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x^2 - (-\frac{1}{4})\int\frac{d(1-x^4)}{\sqrt{1-x^4}}$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x^2 + \frac{1}{4}.2\sqrt{1-x^4} + c$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + c$

6.(f) $\int x\tan^{-1} x dx$

[য.'০৬;সি. '০৪,'০৮; রা.'০৬ ; কু.'১০ ; ব.'১১]

$= \tan^{-1} x\int x\, dx - \int\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)\int x\, dx\}\, dx$

$= \tan^{-1} x.\frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{1+x^2}.\frac{x^2}{2}\, dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\, dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})\, dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1} x - \frac{1}{2}(x - \tan^{-1} x) + c$

$= \frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + c$ (Ans.)

7.(a) $\int e^x \cos x\, dx$ [ঢা.'০২;প্র.ভ.প.'০৪,'০৬]

ধরি, $I = \int e^x \cos x\, dx$

$= e^x\int \cos x\, dx - \int\{\frac{d}{dx}(e^x)\int \cos x\, dx\}\, dx$

$= e^x \sin x - \int e^x \sin dx$

$= e^x \sin x - e^x\int \sin x\, dx + \int\{\frac{d}{dx}(e^x)\int \sin x\, dx\}\, dx$

$= e^x \sin x - e^x(-\cos x) + \int e^x(-\cos x)\, dx$

$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$

$= e^x \sin x + e^x \cos x - I + c_1$

$\Rightarrow 2I = e^x \sin x + e^x \cos x + c_1$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}c_1$

$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + c$

7(b) $\int e^x \sin x dx$ [কু.'০৮,'১৩; মা.'০৯; রা.,দি.'১৪]

ধরি, $I = \int e^x \sin x dx$

$= e^x\int \sin x\, dx - \int\{\frac{d}{dx}(e^x)\int \sin x\, dx\}\, dx$

$= e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\, dx$

$= -e^x \cos x + e^x\int \cos x\, dx - \int\{\frac{d}{dx}(e^x)\int \cos x\, dx\}\, dx$

$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$

$= e^x(\sin x - \cos x) - I + c_1$

$\Rightarrow 2I = e^x(\sin x - \cos x) + c_1$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}c_1$

$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$

7(c) $\int e^{2x} \sin x dx$ [সি.'০২]

ধরি, $I = \int e^{2x} \sin x dx$

$= e^{2x}\int \sin x\, dx - \int\{\frac{d}{dx}(e^{2x})\int \sin x\, dx\}\, dx$

$= e^{2x}(-\cos x) - \int 2e^{2x}(-\cos x)\, dx$

$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\int \cos x\, dx -$

$2\int\{\frac{d}{dx}(e^{2x})\int \cos x\, dx\}\, dx$

$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 2\int 2e^{2x}\sin x dx$

$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x dx$

$= e^{2x}(2\sin x - \cos x) - 4I + c_1$

$\Rightarrow 5I = e^{2x}(2\sin x - \cos x) + c_1$

$\Rightarrow I = \frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + \frac{1}{5}c_1$

$\therefore I = \int e^{2x}\sin x dx = \frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + c$

7(d) $\int e^{2x}\cos^2 x\, dx = \int e^{2x}\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}[\int e^{2x} dx + \int e^{2x}\cos 2x\, dx]$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{e^{2x}}{2^2+2^2}(2\cos 2x+2\sin 2x)]+c$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{e^{2x}}{8}(2\cos 2x+2\sin 2x)]+c$

$=\frac{1}{8}(2+\cos 2x+\sin 2x)e^{2x}+c$

8.(a) $\int e^x(\sin x+\cos x)dx$

[সি.'০৫,'১১; ঢা.'১০; কু.'১১]

$=\int e^x\sin x dx+\int e^x\cos x dx$

$=\int e^x\sin x dx+e^x\int\cos x dx-\int\{\frac{d}{dx}(e^x)\int\cos x dx\}dx$

$=\int e^x\sin x dx+e^x\sin x-\int e^x\sin x dx$

$=e^x\sin x+c$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

ধরি, $f(x)=\sin x$. $f'(x)=\cos x$ এবং

$\int e^x(\sin x+\cos x)dx=\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx$

$=e^x f(x)+c=e^x\sin x+c$

8(b) ধরি, $I=\int e^x\sec x(1+\tan x)dx$

[রা.'০৩; য.'১১;চ.'১৩; প্র.ভ.প.'০৪]

এবং $f(x)=\sec x$. $f'(x)=\sec x\tan x$ এবং

$I=\int e^x(\sec x+\sec x\tan x)dx$

$=\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx=e^x f(x)+c$

$\int e^x\sec x(1+\tan x)dx=e^x\sec x+c$

8.(c) ধরি, $I=\int e^x(\tan^{-1}x+\frac{1}{1+x^2})$ এবং

$f(x)=\tan^{-1}x$ $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ এবং

$I=\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx=e^x f(x)+c$

$\int e^x(\tan^{-1}x+\frac{1}{1+x^2})=e^x\tan^{-1}x+c$

8(d) $\int e^x\{\tan x-\ln(\cos x)\}dx$ [প্র.ভ.প.'৯২]

ধরি, $I=\int e^x\{\tan x-\ln(\cos x)\}dx$ এবং [সূত্র প্রয়োগ করে।]

$f(x)=-\ln(\cos x)$

$\therefore f'(x)=-\frac{-\sin x}{\cos x}=\tan x$ এবং

$I=\int e^x\{-\ln(\cos x)+\tan x\}dx$

$=\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx=e^x f(x)+c$

$\therefore\int e^x\{\tan x+\ln(\sec x)\}dx=-e^x\ln(\cos x)+c$

9.(a) $\int\frac{e^x}{x}(1+x\ln x)dx$ [ব. '০১; য.'০৭; দি.'১৩]

ধরি, $I=\int\frac{e^x}{x}(1+x\ln x)dx=\int e^x(\frac{1}{x}+\ln x)dx$

এবং $f(x)=\ln x$. তাহলে $f'(x)=\frac{1}{x}$ এবং

$I=\int e^x(\ln x+\frac{1}{x})dx=\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx$

$=e^x f(x)+c=e^x\ln x+c$

$\int\frac{e^x}{x}(1+x\ln x)dx=e^x\ln x+c$

9(b) $\int e^{-2x}(\frac{1}{x}-2\ln x)dx$ [কু..'০২]

$=\int e^{-2x}\frac{1}{x}dx-2\int e^{-2x}\ln x dx$

$=e^{-2x}\int\frac{1}{x}dx-\int\{\frac{d}{dx}(e^{-2x})\int\frac{1}{x}dx\}dx-2\int e^{-2x}\ln x dx$

$=e^{-2x}\ln x-\int(-2e^{-2x})\ln x dx-2\int e^{-2x}\ln x dx$

$=e^{-2x}\ln x+2\int e^{-2x}\ln x dx-2\int e^{-2x}\ln x dx$

$\therefore\int e^{-2x}(\frac{1}{x}-2\ln x)dx=e^{-2x}\ln x+c$

9(c) $\int e^{5x}\left\{5\ln x+\frac{1}{x}\right\}dx$ [চ.'০৯; প্র.ভ.প.'৯৯]

$=\int 5e^{5x}\ln x dx+\int e^{5x}\frac{1}{x}dx$

$=\int 5e^{5x}\ln x dx+$

$$e^{5x}\int \frac{1}{x}dx - \int \{\frac{d}{dx}(e^{5x})\int \frac{1}{x}dx\}dx$$

$$= \int 5e^{5x}\ln x dx + e^{5x}\ln x - \int 5e^{5x}\ln x dx$$

$$\int e^{5x}\left\{5\ln x + \frac{1}{x}\right\}dx = e^{5x}\ln x + c$$

10.(a) $\int \frac{dx}{x^2+x}$ [ব.'০৩]

$$= \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \{\frac{1}{x(0+1)} + \frac{1}{(x+1)(-1)}\}dx$$

$$= \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})dx = \ln|x| - \ln|x+1| + c$$

10(b) $\int \frac{x+35}{x^2-25}dx$ [চ.'০৪]

$$= \int \frac{x+35}{(x-5)(x+5)}dx$$

$$= \int \{\frac{5+35}{(x-5)(5+5)} + \frac{-5+35}{(-5-5)(x+5)}\}dx$$

$$= \int \{\frac{40}{10(x-5)} - \frac{30}{10(x+5)}\}dx$$

$$= \int \{\frac{4}{x-5} - \frac{3}{x+5}\}dx$$

$$= 4\ln|x-5| - 3\ln|x+5| + c$$

10(c) $\int \frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}dx$ [ঢা.'০৯]

$$= \int \{\frac{2.0-1}{x(0-1)(0-2)} + \frac{2.1-1}{1(x-1)(1-2)} + \frac{2.2-1}{2(2-1)(x-2)}\}dx$$

$$= \int \{-\frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2(x-2)}\}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x-2| + c$$

10(d) $\int \frac{x^2dx}{x^4-1}$ [রা.'১১; প্র.ভ.প.'৯১]

$$= \int \frac{x^2dx}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$= \int \{\frac{1}{(x^2-1)(1+1)} + \frac{-1}{(-1-1)(x^2+1)}\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-1^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2.1}\ln|\frac{x-1}{x+1}| + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln|\frac{x-1}{x+1}| + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

10(e) ধরি, $I = \int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x}$ [প্র.ভ.প.'০৪]

এবং $e^x = z$. তাহলে $e^x dx = dz \Rightarrow dx = \frac{dz}{z}$ এবং

$$I = \int \frac{1}{z^2-3z}\frac{dz}{z} = \int \frac{dz}{z^2(z-3)}$$

এখন ধরি, $\frac{1}{z^2(z-3)} \equiv \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-3}$

$\therefore\ 1 \equiv Az(z-3) + B(z-3) + Cz^2 \cdots (1)$

(1) এ $z=3$ বসিয়ে পাই, $1 = 9C \Rightarrow C = \frac{1}{9}$

(1) এ $z=0$ বসিয়ে পাই, $1 = -3B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে z^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + C \Rightarrow A = -C = -\frac{1}{9}$

$$\therefore I = \int \{-\frac{1}{9}\frac{1}{z} - \frac{1}{3}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{9(z-3)}\}dz$$

$$= -\frac{1}{9}\ln|z| - \frac{1}{3}(-\frac{1}{z}) + \frac{1}{9}\ln|z-3| + c$$

$$= \frac{1}{9}\ln|\frac{z-3}{z}| + \frac{1}{3z} + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \frac{1}{9}\ln|\frac{e^x-3}{e^x}| + \frac{1}{3e^x} + c$$

11. $\int \frac{1}{x^2(x-1)}dx$ [কু.,রা.'০২; ব.'০৫,'১০]

ধরি, $\frac{1}{x^2(x-1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$

$\Rightarrow 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 \cdots (1)$

(1) এ $x=0$ বসিয়ে পাই, $1 = -B \Rightarrow B = -1$

(1) এ $x=1$ বসিয়ে পাই, $1=C \Rightarrow C=1$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0=A+C \Rightarrow A=-C=-1$

$$\int\frac{1}{x^2(x-1)}dx=\int\{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}\}dz$$

$$=-\ln|x|-(-\frac{1}{x})+\ln|x-1|+c$$

$$=\ln|\frac{x-1}{x}|+\frac{1}{x}+c$$

12 ধরি, $I=\int\frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}dx$ এবং

$$\frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}\equiv\frac{A}{1-x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow x+2=A(x^2+4)+(Bx+C)(1-x)\cdots(1)$$

(1) এ $x=1$ বসিয়ে পাই, $1+2=5A \Rightarrow A=\frac{3}{5}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0=A-B \Rightarrow B=A=\frac{3}{5}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$2=4A+C \Rightarrow C=2-\frac{12}{5}=-\frac{2}{5}$

$$\therefore I=\frac{3}{5}\int\frac{1}{1-x}dx+\int\frac{\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}}{x^2+4}dx$$

$$=-\frac{3}{5}\ln|1-x|+\frac{3}{10}\int\frac{2xdx}{x^2+4}-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x^2+2^2}$$

$$=-\frac{3}{5}\ln|1-x|+\frac{3}{10}\ln(x^2+4)-\frac{2}{5.2}\tan^{-1}\frac{x}{2}+c$$

$$=-\frac{3}{5}\ln|1-x|+\frac{3}{10}\ln(x^2+4)-\frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2}+c$$

13(a) $\int\frac{x^7}{(1-x^4)^2}dx=\int\frac{-x^3(1-x^4)+x^3}{(1-x^4)^2}dx$

$$=\int\{\frac{-x^3}{1-x^4}+\frac{x^3}{(1-x^4)^2}\}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d(1-x^4)}{1-x^4}-\frac{1}{4}\int\frac{d(1-x^4)}{(1-x^4)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln|1-x^4|-\frac{1}{4}(-\frac{1}{1-x^4})+c$$

$$=\frac{1}{4}(\ln|1-x^4|+\frac{1}{1-x^4})+c$$

13(b) ধরি, $I=\int\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}dx=\int\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x+2}dx$

$$=\int\frac{(x^2+2x+2)-6x+2}{x^2+2x+2}dx$$

$$=\int\{1-\frac{6x-2}{(x+1)^2}\}dx \text{ এবং}$$

$$\frac{6x-2}{(x+1)^2}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow 6x-2=A(x+1)+B\cdots(1)$$

(1) এ $x=-1$ বসিয়ে পাই, $B=-6-2=-8$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$6=A \Rightarrow A=6$

$$\therefore I=\int\{1-\frac{6}{x+1}+\frac{8}{(x+1)^2}\}dx$$

$$=x-6\ln|x+1|-\frac{8}{x+1}+c$$

13(c) ধরি, $I=\int\frac{\sin 2x\,dx}{3+5\cos x}=\int\frac{2\sin x\cos x\,dx}{3+5\cos x}$

এবং $\cos x=z$. তাহলে $-\sin xdx=dz$ এবং

$$I=\int\frac{-2z\,dz}{3+5z}=-\frac{2}{5}\int\frac{3+5z-3}{3+5z}dz$$

$$=-\frac{2}{5}\int(1-\frac{3}{3+5z})dz$$

$$=-\frac{2}{5}(z-\frac{3}{5}\ln|3+5z|)+c$$

$$=\frac{2}{25}(3\ln|3+5z|-5z)+c$$

$$=\frac{2}{25}(3\ln|3+5\cos x|-5\cos x)+c$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$

$$=\int\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})dx}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})}$$

$$=\int\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})dx}{(x+a)-(x+b)}$$

$$=\int\frac{(x+a)^{1/2}-(x+b)^{1/2}}{a-b}dx$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{(x+a)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{(x+b)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]+c$$

$$=\frac{2}{3(a-b)}[(x+a)^{3/2}-(x+b)^{3/2}]+c$$

2. $\int 3\sin x\cos x dx$

$$=\int\frac{3}{2}(2\sin x\cos x)dx=\frac{3}{2}\int\sin 2xdx$$

$$=\frac{3}{2}(-\frac{1}{2}\cos 2x)+c=-\frac{3}{4}\cos 2x+c$$

3. (a) $\int 3\cos 3x\cos x\,dx$

$$=\int\frac{3}{2}\{\cos(3x+x)+\cos(3x-x)\}\,dx$$

$$=\int\frac{3}{2}(\cos 4x+\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{3}{2}(\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x)+c$$

$$=\frac{3}{8}(\sin 4x+2\sin 2x)+c$$

3(b) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1}{2}(1+\cos x)dx$

$$=\frac{1}{2}(x+\sin x)+c$$

4(a) $\int\cos x\cos(\sin x)dx$

$$=\int\cos(\sin x)\,d(\sin x)=\cos(\sin x)+c$$

4(b) ধরি, $I=\int(e^x+\frac{1}{x})(e^x+\ln x)\,dx$ **[রা.'০১]**

এবং $e^x+\ln x=z$. তাহলে $(e^x+\frac{1}{x})dx=dz$ এবং

$$I=\int z\,dz=\frac{1}{2}z^2+c=\frac{1}{2}(e^x+\ln x)^2+c$$

5 $\int e^{3\cos 2x}\sin 2x\,dx$

$$=-\frac{1}{6}\int e^{3\cos 2x}(-6\sin 3xdx)$$

$$=-\frac{1}{6}e^{3\cos 2x}+c$$

6(a) ধরি, $I=\int\sin^3 x\cos xdx$

এবং $\sin x=z$. তাহলে, $\cos x\,dx=dz$ এবং

$$I=\int z^3\,dz=\frac{1}{4}z^4+c=\frac{1}{4}\sin^4 x+c$$

6(b) ধরি, $I=\int\tan^3 x\sec^2 xdx$ এবং $\tan x=z$

তাহলে, $\sec^2 x\,dx=dz$ এবং

$$I=\int z^3dz=\frac{z^{3+1}}{3+1}+c=\frac{1}{4}\tan^4 x+c$$

6(c) $\int\sin^2(3x+2)dx$

$$=\int\frac{1}{2}\{1-\cos 2(3x+2)\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\{\int dx-\int\cos(6x+4)dx\}$$

$$=\frac{1}{2}\{x-\frac{\sin(6x+4)}{6}\}+c$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin(6x+4)+c$$

7.(a) $\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int(\ln x)^2d(\ln x)$

$$=\frac{(\ln x)^{2+1}}{2+1}+c=\frac{1}{3}(\ln x)^3+c$$

7(b) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$

$$=\int(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}d(1+\ln x)$$

$$= \frac{(1+\ln x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2} + c$$

7(c) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \cos(\ln x)\, d(\ln x)$

$= \sin(\ln x) + c$

8. $\int \frac{e^{-x} dx}{(5+e^{-x})^2}$

$= \int (5+e^{-x})^{-2}\, d(5+e^{-x}).(-1)$

$= -\frac{(5+e^{-x})^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{1}{5+e^{-x}} + c$

9. $\int \frac{e^x(1+x)dx}{\cos^2(xe^x)}$

ধরি, $xe^x = z \qquad e^x(x+1)dx = dz$

$\int \frac{e^x(1+x)dx}{\cos^2(xe^x)} = \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \int \sec^2 z dz$

$= \tan z + c = \tan(xe^x) + c$

10(a) ধরি, $I = \int \frac{\sin(2+5\ln x)}{x} dx$ এবং

$2+5\ln x = z$. তাহলে, $\frac{5}{x}dx = dz$ এবং

$I = \frac{1}{5}\int \sin z\, dz = \frac{1}{5}(-\cos z) + c$

$= -\frac{1}{5}\cos(2+5\ln x) + c$

10(b) $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$

$= \int \frac{\sin\{(x-b)-(x-a)\}dx}{\sin(a-b)\sin(x-a)\sin(x-b)}$

$= \int \frac{\sin(x-b)\cos(x-a) - \cos(x-b)\sin(x-a)\}dx}{\sin(a-b)\sin(x-a)\sin(x-b)}$

$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \{\cot(x-a) - \cot(x-b)\}dx$

$= \frac{\ln|\sin(x-a)| - \ln|\sin(x-b)|}{\sin(a-b)} + c$

$= \frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right| + c$

11 (a) $\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1+\tan x}} = \int \frac{d(1+\tan x)}{\sqrt{1+\tan x}}$

$= 2\sqrt{1+\tan x} + c$

11(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{(\sin^{-1}x)}\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\sin^{-1}x)}{\sqrt{(\sin^{-1}x)}}$

$[\because d(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx]$

$= 2\sqrt{\sin^{-1}x} + c \qquad [\because \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,]$

11(c) ধরি, $I = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1}x+3}}$

এবং $\tan^{-1}x + 3 = z$. তাহলে, $\frac{dx}{1+x^2} = dz$ এবং

$I = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + c \qquad [\because \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\,]$

$\therefore \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1}x+3}} = 2\sqrt{\tan^{-1}x+3} + c$

11(d) $\int \frac{\tan(\ln|x|)}{x}dx = \int \tan(\ln|x|)\, d(\ln|x|)$

$= \ln\{\sec(\ln|x|)\} + c$

12(a) $\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1-\tan^2 x}} = \int \frac{d(\tan x)}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$

$= \sin^{-1}(\tan x) + c$

12(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{15-4x-4x^2}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{16-\{(2x)^2+2.2x.1+1^2\}}}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{4^2-(2x+1)^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{2x+1}{4}) + c$

12(c) $\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

$=\int\frac{dx}{\sqrt{2^2-(x^2-4x+2^2)}}$

$=\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}}=\sin^{-1}(\frac{x-2}{2})+c$

12(d) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2(1-x)^2}}$

$=-\frac{1}{b}\int\frac{d(b-bx)}{\sqrt{a^2-(b-bx)^2}}$

$=-\frac{1}{b}\sin^{-1}(\frac{b-bx}{a})+c$

12(e) ধরি, $I=\int\sqrt{\tan x}dx$ এবং $\tan x=z^2$

তাহলে, $\sec^2 x\,dx=2z\,dz$

$\Rightarrow dx=\frac{2zdz}{1+\tan^2 x}=\frac{2z}{1+z^4}$ এবং

$I=\int\frac{2z^2dz}{1+z^4}=\int\frac{(z^2+1)-(z^2-1)}{1+z^4}dz$

$=\int[\frac{z^2+1}{z^4+1}+\frac{z^2-1}{z^4+1}]dz$

$=\int[\frac{1+\frac{1}{z^2}}{z^2+\frac{1}{z^2}}+\frac{1-\frac{1}{z^2}}{z^2+\frac{1}{z^2}}]dz$

$=\int[\frac{1+\frac{1}{z^2}}{(z-\frac{1}{z})^2+2}+\frac{1-\frac{1}{z^2}}{(z+\frac{1}{z})^2-2}]dz$

$=\int\frac{d(z-\frac{1}{z})}{(z-\frac{1}{z})^2+(\sqrt{2})^2}+\int\frac{d(z+\frac{1}{z})}{(z+\frac{1}{z})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{z-\frac{1}{z}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{z-\frac{1}{z}-\sqrt{2}}{z-\frac{1}{z}+\sqrt{2}}|+c$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{z^2-1}{\sqrt{2}z}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{z^2-1-\sqrt{2}z}{z^2-1+\sqrt{2}z}|+c$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{\tan x-1}{\sqrt{2\tan x}}+$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}-1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}-1}|+c$

13. ধরি, $I=\int 3\cos^3 x\cos 2x\,dx$

$\cos^3 x\cos 2x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)\cos 2x$

$=\frac{1}{4}[3\cos x\cos 2x+\cos 3x\cos 2x]$

$=\frac{1}{4}[3.\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)+\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos x)]=$

$\frac{1}{8}(3\cos 3x+4\cos x+\cos 5x)$

$\therefore I=\frac{3}{8}\int(3\cos 3x+4\cos x+\cos 5x)\,dx$

$=\frac{3}{8}(3.\frac{1}{3}\sin 3x+4\sin x+\frac{1}{5}\sin 5x)+c$

14(a) ধরি, $I=\int e^{2x}\cos x dx$

$=e^{2x}\int\cos x\,dx-\int\{\frac{d}{dx}(e^{2x})\int\cos x\,dx\}\,dx$

$=e^{2x}\sin x-\int 2e^{2x}\sin x\,dx$

$=e^{2x}\sin x-2e^{2x}\int\sin x dx+$

$2\int\{\frac{d}{dx}(e^{2x})\int\sin x\,dx\}\,dx$

$=e^{2x}\sin x-2e^{2x}(-\cos x)+2\int 2e^{2x}(-\cos x)dx$

$=e^{2x}\sin x+2e^{2x}\cos x-4\int e^{2x}\cos x dx$

$=e^{2x}(\sin x+2\cos x)-4I+c_1$

$\Rightarrow 5I=e^{2x}(\sin x+2\cos x)+c_1$

$\Rightarrow I=\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+\frac{1}{5}c_1$

$\therefore I=\int e^{2x}\sin x dx=\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+c$

14.(b) $\int e^{-3x}\cos 4x\,dx$

$= \frac{e^{-3x}}{3^2+4^2}(-3\cos 4x + 4\sin 4x) + c$

[সূত্র প্রয়োগ করে।]

$= \frac{e^{-3x}}{25}(-3\cos 4x + 4\sin 4x) + c$

15(a) ধরি, $I = \int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

$= \int e^x\{\frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\}dx$

এবং $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$f'(x) = \frac{(1+\cos x)\cos x - \sin x(0-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

$= \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$ এবং

$I = \int e^x\{\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}\}dx$

$= \int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + c$

$\therefore I = \int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = e^x\frac{\sin x}{1+\cos x} + c$

15(b) $\int e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)dx$

$= \int ae^{ax}\sin bx dx + \int be^{ax}\cos bx dx$

$= a\sin bx\int e^{ax}dx - \int\{\frac{d}{dx}(a\sin bx)\int e^{ax}dx\}dx$

$+ \int be^{ax}\cos bx dx$

$= a\sin bx.(\frac{e^{ax}}{a}) - \int(ab\cos bx)(\frac{e^{ax}}{a})dx$

$+ \int be^{ax}\cos bx dx$

$= e^{ax}\sin bx - \int be^{ax}\cos bx dx$

$+ \int be^{ax}\cos bx dx$

$\therefore \int e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)dx = e^{ax}\sin bx + c$

16(a) $\int \frac{x-3}{(1-2x)(1+x)}dx$

$= \int[\frac{\frac{1}{2}-3}{(1-2x)(1+\frac{1}{2})} + \frac{-1-3}{\{1-2(-1)\}(1+x)}]dx$

$= \int[\frac{-\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}(1-2x)} + \frac{-4}{3(1+x)}]dx$

$= -\frac{5}{3}(-\frac{1}{2})\int\frac{d(1-2x)}{(1-2x)} - \frac{4}{3}\int\frac{1}{1+x}dx$

$= \frac{5}{6}\ln|1-2x| - \frac{4}{3}\ln|1+x| + c$

16(b) $\int\frac{dx}{x^4-1} = \int\frac{dx}{(x^2-1)(x^2+1)}$

$= \int\{\frac{1}{(x^2-1)(1+1)} + \frac{1}{(-1-1)(x^2+1)}\}dx$

$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-1^2} - \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2.1}\ln|\frac{x-1}{x+1}| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$

$= \frac{1}{4}\ln|\frac{x-1}{x+1}| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$

17(a) $\int\frac{1}{x(x+1)^2}dx$

ধরি, $\frac{1}{x(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow 1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx \cdots(1)$

(1) এ $x=0$ বসিয়ে পাই, $1 = A \Rightarrow A = 1$

(1) এ $x=-1$ বসিয়ে পাই, $1 = -C \Rightarrow C = -1$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই

$0 = A + B \Rightarrow B = -A = -1$

$\therefore \int\frac{1}{x(x+1)^2}dx = \int\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\}dz$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| - (-\frac{1}{x+1}) + c$$

$$= \ln|\frac{x}{x+1}| + \frac{1}{x+1} + c$$

17(b) $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx = \int \frac{3(x+1)-2}{(x+1)^2}dx$

$$= \int \{\frac{3(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^2}\}dx$$

$$= \int \{\frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\}dx$$

$$= 3\ln|x+1| - 2(-\frac{1}{x+1}) + c$$

$$= 3\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + c$$

18. (a) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)} \int \frac{(x^2+1)-x^2 dx}{x(x^2+1)}$

$$= \int \{\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\}dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{(2x+0)dx}{x^2+1}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

18(b) ধরি, $I = \int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+4)}$ এবং

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow x = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1) \cdots (1)$$

(1) এ $x=1$ বসিয়ে পাই, $1 = 5A \Rightarrow A = \frac{1}{5}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$0 = A + B \Rightarrow B = -A = -\frac{1}{5}$$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$$0 = 4A - C \Rightarrow C = 4A = \frac{4}{5}$$

$$I = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{-\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}}{x^2+4}dx$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\int \frac{2xdx}{x^2+4} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^2+2^2}$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln(x^2+4) + \frac{4}{5}.\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln(x^2+4) + \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

19.(a) $\int xe^{-x}dx$

$$= x\int e^{-x}dx - \int \{\frac{d}{dx}(x)\int e^{-x}dx\}dx$$

$$= -xe^{-x} - \int 1.(-e^{-x})dx = -xe^{x} - e^{-x} + c$$

19(b) $\int xe^{ax}dx$

$$= x\int e^{ax}dx - \int \{\frac{d}{dx}(x)\int e^{ax}dx\}dx$$

$$= x.\frac{1}{a}e^{ax} - \int 1.(\frac{1}{a}e^{ax})dx = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} + c$$

$$= \frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax} + c$$

19(c) $\int x^3e^{2x}dx$

$$= x^3\int e^{2x}dx - \int \{\frac{d}{dx}(x^3)\int e^{2x}dx\}dx$$

$$= x^3(\frac{1}{2}e^{2x}) - \int (3x^2)(\frac{1}{2}e^{2x})dx$$

$$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{2}[x^2\int e^{2x} - \int \{\frac{d}{dx}(x^2)\int e^{2x}dx\}dx]$$

$$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{2}[x^2.\frac{1}{2}e^{2x} - \int (2x).\frac{1}{2}e^{2x}dx]$$

$$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{2}[\frac{x^2e^{2x}}{2} - \{x\int e^{2x} - \int 1.\frac{e^{2x}}{2}dx\}]$$

$$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{2}[\frac{x^2e^{2x}}{2} - \{x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\}] + c$$

$$= (\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8})e^{2x} + c$$

[MCQ এর ক্ষেত্রেঃ

$$\int x^3e^{2x}dx = \{\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2^2}(3x^2) + \frac{1}{2^3}(6x) - \frac{1}{2^4}.6\}e^{2x} = \{\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\}e^{2x}]$$

20. (a) $\int x\sin x dx$

$= x\int \sin x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int \sin x\, dx\}\, dx$

$= x(-\cos x) - \int 1.(-\cos x)dx$

$= -x\cos x + \sin x + c$

20. (b) $\int x\cos x dx$

$= x\int \cos x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int \cos x\, dx\}\, dx$

$= x\sin x - \int 1.\sin x dx$

$= x\sin x + \cos x + c$

20(c) $\int x^2 \sin x dx$

$= x^2\int \sin x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x^2)\int \sin x\, dx\}\, dx$

$= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)dx$

$= -x^2\cos x + 2[x\int \cos x -$

$\int\{\frac{d}{dx}(x)\int \cos x\, dx\}\, dx]$

$= -x^2\cos x + 2[x\sin x - \int 1.\sin x\, dx]$

$= -x^2\cos x + 2[x\sin x - (-\cos x)] + c$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$

20(d) ধরি, $I = \int \cos\sqrt{x}\, dx$ এবং $\sqrt{x} = z$

তাহলে $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dz \Rightarrow dx = 2z\, dz$ এবং

$I = \int 2z\cos z\, dz$

$= 2[\, z\int \cos z\, dz - \int\{\frac{d}{dz}(z)\int \cos z\, dz\}\, dz\,]$

$= 2[\, z\sin z) - \int 1.\sin z dz\,]$

$= 2z\sin z - 2(-\cos z) + c$

$= 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + c$

21.(a) $\int x^2\cos^2 x\, dx$ **[প্র.ভ.প.'৮৫,'১৬]**

$= \int x^2\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}[\int x^2\, dx + \int x^2\cos 2x\, dx]$

$= \frac{1}{2}[\frac{x^3}{3} + x^2(\frac{1}{2}\sin 2x) - (2x)(-\frac{1}{2^2}\cos 2x)$

$+ 2(-\frac{1}{2^3}\sin 2x)] + c$

$= \frac{1}{2}[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x] + c$

21(b) $\int x\sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int x\sin 2x dx$

$= \frac{1}{2}[x\int \sin 2x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int \sin 2x dx\}dx]$

$= \frac{1}{2}[x(-\frac{\cos 2x}{2}) - \int 1.(-\frac{\cos 2x}{2})dx]$

$= \frac{1}{4}[-x\cos 2x + \frac{\sin 2x}{2}] + c$

21(c) $\int x\sin x\sin 2x\, dx$

$= \int x\frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)\, dx$

$= \frac{1}{2}[x\int \cos x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int \cos x dx\}dx$

$-x\int \cos 3x dx + \int\{\frac{d}{dx}(x)\int \cos 3x dx\}dx]$

$= \frac{1}{2}[x\sin x - \int 1.\sin x dx$

$- x\frac{\sin 3x}{3} + \int 1.\frac{\sin 3x}{3}dx]$

$= \frac{1}{2}[x\sin x + \cos x - \frac{x\sin 3x}{3} - \frac{\cos 3x}{9}] + c$

4. **(c)** $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx = \int x\cos ec^2 x\, dx$

$= x\int \cos ec^2 x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int \cos ec^2 x dx\}dx$

$= x(-\cot x) - \int 1.(-\cot x)dx$

$= -x\cot x + \ln|\sin x| + c$

21(d) ধরি, $I=\int \sec^3 x\,dx=\int \sec^2 x \sec x\,dx$

$=\sec x\int \sec^2 x\,dx-\int\{\frac{d}{dx}(\sec x)\int \sec^2 x dx\}dx$

$=\sec x\tan x-\int \sec x\tan x.\tan x dx$

$=\sec x\tan x-\int \sec x(\sec^2 x-1)dx$

$=\sec x\tan x-\int \sec^3 x dx+\int \sec x dx$

$\Rightarrow I=\sec x\tan x-I+\ln|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})+c_1$

$\Rightarrow 2I=\sec x\tan x+\ln|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})+c_1$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})+\frac{1}{2}c_1$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})|+c$

22(a) $\int x^2\ln x dx$

$=\ln x\int x^2dx-\int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int x^2dx\}dx$

$=\ln x.\frac{x^3}{3}-\int\frac{1}{x}.\frac{x^3}{3}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx$

$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}.\frac{x^3}{3}+c=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+c$

22(b) $\int x^3\ln x dx$

$=\ln x\int x^3dx-\int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int x^3dx\}dx$

$=\ln x.\frac{x^4}{4}-\int\frac{1}{x}.\frac{x^4}{4}dx=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx$

$=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}.\frac{x^4}{4}+c=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+c$

22(c) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

$=\ln x\int\frac{1}{x^2}dx-\int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int\frac{1}{x^2}dx\}dx$

$=\ln x.(-\frac{1}{x})-\int\frac{1}{x}.(-\frac{1}{x})dx$

$=-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\ln x+(-\frac{1}{x})+c$

$=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+c$

23(a) $\int 2^x\sin x\,dx=\int e^{x\ln 2}\sin x\,dx$

$=\frac{e^{x\ln 2}}{(\ln 2)^2+1^2}[\ln 2.\sin x-1.\cos x]+c$

[সূত্র প্রয়োগ করে।]

$=\frac{2^x}{(\ln 2)^2+1}[\ln 2.\sin x-\cos x]+c$

23(b) $\int(3^xe^x+\ln x)dx$ **[প্র.ভ.প.৮৪]**

$=\int(3e)^xdx+\int\ln x dx$

$=\frac{(3e)^x}{\ln(3e)}+\frac{1}{x}+c=\frac{3^xe^x}{\ln 3+\ln e}+\frac{1}{x}+c$

$=\frac{3^xe^x}{\ln 3+1}+\frac{1}{x}+c$

8(c) ধরি, $I=\int e^x\left\{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(x-1)^2}\right\}dx$ এবং

$f(x)=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$

$\therefore f'(x)=-(1-x)^{-1-1}(-1)=\frac{1}{(1-x)^2}$ এবং

$I=\int e^x\left\{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}\right\}dx$

$=\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx=e^xf(x)+c$

$\therefore \int e^x\left\{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(x-1)^2}\right\}dx=\frac{e^x}{1-x}+c$

24(a) $\int e^{-x}\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right\}dx=\int\frac{e^{-x}}{x}dx+\int\frac{e^{-x}}{x^2}dx$

$=\frac{1}{x}\int e^{-x}dx-\int\{\frac{d}{dx}(\frac{1}{x})\int e^{-x}dx\}dx+\int\frac{e^{-x}}{x^2}dx$

$=\frac{1}{x}(-e^{-x})-\int(-\frac{1}{x^2})(-e^{-x})dx+\int\frac{e^{-x}}{x^2}dx$

$$= -\frac{e^{-x}}{x} - \int \frac{e^{-x}}{x^2}dx + \int \frac{e^{-x}}{x^2}dx$$

$$\int e^{-x}\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right\}dx = -\frac{e^{-x}}{x} + c$$

24(b) $\int e^x\{\tan x + \ln(\sec x)\}dx$ **[প্র.ভ.প. '১১]**

ধরি, $I = \int e^x\{\tan x + \ln(\sec x)\}dx$ এবং

$f(x) = \ln(\sec x)$

$\therefore f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \tan x$ এবং

$I = \int e^x\{\ln(\sec x) + \tan x\}dx$

$= \int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + c$

$\therefore \int e^x\{\tan x + \ln(\sec x)\}dx = e^x \ln(\sec x) + c$

25(a) ধরি, $I = \int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2}dx$ **[প্র.ভ.প.'০২]**

$= \int e^x \frac{x^2-1+2}{(x+1)^2}dx$

$= \int e^x\{\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2}\}dx$

$= \int e^x\{\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\}dx$ এবং $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$f'(x) = \frac{(x+1).1-(x-1).1}{(x+1)^2}$

$= \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$ এবং

$I = \int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + c$

$\int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2}dx = e^x(\frac{x-1}{x+1}) + c$

25(b) ধরি, $I = \int[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}]dx$ এবং $\ln x = y$.

তাহলে, $x = e^y \Rightarrow dx = e^y dy$ এবং

$I = \int e^y[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}]dy = \int e^y[\frac{1}{y} + D(\frac{1}{y})]dy$

$[\because D(\frac{1}{y}) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{y}) = -\frac{1}{y^2}]$

$= \frac{e^y}{y} + c = \frac{x}{\ln x} + c$

26. $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}dx$

ধরি, $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$

$\Rightarrow x = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2 \cdots(1)$

(1) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $1 = 3B \Rightarrow B = 1/3$

(1) এ $x = -2$ বসিয়ে পাই, $-2 = 9C \Rightarrow C = -2/9$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + C \Rightarrow A = -C = 2/9$

$\therefore \int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}dx$

$= \int\{\frac{2/9}{x-1} + \frac{1/3}{(x-1)^2} + \frac{-2/9}{x+2}\}dz$

$= \frac{2}{9}\ln|x-1| + \frac{1}{3}(-\frac{1}{x-1}) - \frac{2}{9}\ln|x+2| + c$

$= \frac{2}{9}\ln|\frac{x-1}{x+2}| - \frac{1}{3(x-1)} + c$

27(a) ধরি, $I = \int \frac{x^2+1}{(x+2)^2}dx$

$= \int \frac{x^2+4x+4-(4x+3)}{(x+2)^2}dx$

$= \int\{1 - \frac{4x+3}{(x+2)^2}\}dx$ এবং

$\frac{4x+3}{(x+2)^2} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$

$\Rightarrow 4x+3 = A(x+2) + B \cdots(1)$

(1) এ $x = -2$ বসিয়ে পাই, $B = -8+3 = -5$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$4 = A \Rightarrow A = 4$

$\therefore I = \int\{1 - \frac{4}{x+2} + \frac{5}{(x+2)^2}\}dx$

$= x - 4\ln|x+2| - \frac{5}{x+2} + c$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ

1. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}} = ?$ **[DU 07-08; NU06-07]**

$Sol^n: I = \int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{\tan x}} = \int \frac{d(\tan x)}{\sqrt{\tan x}} = 2\sqrt{\tan x}$

2. $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx$ =? **[DU 07-08; NU07-08; KU 03-04]**

$Sol^n: I = \int \sec^2(xe^x)\, d(xe^x) = \tan(xe^x)$

3. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = ?$ **[DU 02-03]**

$Sol^n: I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = 2\int \frac{d(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1})$

$= 2\ln(\sqrt{x}+1)+c$

4. $\int \sin^5 x\cos x dx = ?$ **[DU 98-99]**

$Sol^n: I = \int \sin^5 x d(\sin x) = \frac{1}{6}\sin^6 x + c$

5. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = ?$ **[JU 06-07; CU 04-05]**

$Sol^n: I = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}$

$= \tan^{-1}(e^x) + c$

6. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = ?$ **[DU 95-96; JU 07 08]**

$Sol^n: I = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + (-\frac{1}{2})\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \sin^{-1}x - \frac{1}{2}.2\sqrt{1-x^2} = \sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2}$

7. $\int xe^x dx = ?$ **[JU 07-08]**

$Sol^n: I = (x+1)e^x + c$

8. $\int \frac{dx}{ay-bx} = ?$ **[SU 06-07]**

$Sol^n: I = -\frac{1}{b}\int \frac{d(ay-bx)}{ay-bx}$

$= -\frac{1}{6}\ln|ay-bx|+c$

9. $\int e^x \sec x(1+\tan x)dx = ?$ **[RU 06-07]**

$Sol^n: I = \int e^x(\sec x + \sec x\tan x)dx$

$= \int e^x\{\sec x + D(\sec x)\}dx = e^x\sec x$

10. $\int -\sin\phi\, dt = ?$ **[CU 04-05]**

$Sol^n: I = -\sin\phi\int dt = -t\sin\phi + c$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x}} = ?$ **[KU 03-04]**

$Sol^n: I = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x)}{\sqrt{3^2-(4x)^2}} = \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{3}$

12. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = ?$ **[DU 01-02; CU 02-03; RU 04-05, 05-06; JU 06-07;BUET 06-07]**

$Sol^n: I = \int \frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2}dx$

$= \int e^x\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\}dx$

$= \int e^x\{\frac{1}{x+1} + D(\frac{1}{x+1})\}dx = \frac{e^x}{x+1} + c$

13. $\int x\cos x dx = ?$ **[DU 96 - 97]**

$= x\sin x - (1)(-\cos x) = x\sin x + \cos x + c$

14. $\int x\ln(1+2x)\,dx = ?$ **[SU 96-97]**

$Sol^n: I = \ln(1+2x).\frac{x^2}{2} - \int \frac{2.}{1+2x}.\frac{x^2}{2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln(1+2x) - \int \frac{\frac{1}{2}x(2x+1) - \frac{1}{4}(2x+1) + \frac{1}{4}}{2x+1}dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln(1+2x) - \int (\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{2x+1})dx$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1+2x)-\{\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\ln(2x+1|\}+c$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1+2x)-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\ln(2x+1|+c$$

15. $\int \log_3 x\, dx = ?$ **[CU 06-07]**

Sol^{n}: $I = x\log_3 x-\int\frac{1}{x\ln 3}.x\,dx$

$$=x\log_3 x-\frac{x}{\ln 3}+c$$

অন্তরক ও যোগজের মিশ্রিত সমস্যা

16. $y=x^2$ হলে $\int(\frac{dy}{dx})dx$ এর মান কত?

[CU 02-03; IU 05-06]

Sol^{n}: $\int(\frac{dy}{dx})dx = y+c = x^2+c$

17. যদি $\frac{dy}{dx}=2a$ হয় তাহলে y এর মান কত? **[CU 02-03]**

Sol^{n}: $\frac{dy}{dx}=2a \Rightarrow y=\int 2a dx = 2ax+c$

18. $\int f(x)dx=\cos x+k$ হলে $f(x)$ এর মান কত? **[CU 02-03]**

Sol^{n}: $f(x)=\frac{d}{dx}(\cos x+k)=-\sin x$

19. $\frac{d}{dx}(\int ydx)$ এর মান কত যখন $y=\sin x$

[CU 02-03]

Sol^{n}: $\frac{d}{dx}(\int ydx)= y=\sin x$

আংশিক ভগ্নাংশ

20. $\frac{x+17}{(x-3)(x+2)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+2}$ হলে a ও b এর মান কত? **[DU 08-09; JU, CU 07-08]**

Sol^{n}: $a=\frac{3+17}{3+2}=4$; $b=\frac{-2+17}{-2-3}=-3$

21. $\frac{x+A}{(x+1)(x-3)}\equiv\frac{B}{x+1}+\frac{1}{x-3}$

Sol^{n}: $\frac{3+A}{3+1}=1\Rightarrow A=1$;

$$B=\frac{-1+A}{-1-3}=\frac{-1+1}{-4}=0$$

নির্দিষ্ট যোগজ ও এর প্রয়োগ
প্রশ্নমালা X D

মান নির্ণয় কর :

1(a) $\int_0^3 (3-2x+x^2)dx$ [কু.'০৬,'০৭]

$=\left[3x-2.\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\{(3.3-3^2+\frac{3^3}{3})-0\}$

$=(9-9+9)=9$

(b) $\int_0^{\pi/2}(\sin\theta+\cos\theta)\,dx$ [চ.'০৪]

$=[-\cos\theta+\sin\theta]_0^{\pi/2}=[-\cos\theta+\sin\theta]_0^{\pi/2}$

$=(\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2})-(\sin 0-\cos 0)$

$=(1-0)-(0-1)=2$

(c) $\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\right]_0^{\pi}$

$=\frac{1}{2}\{(\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi)-(0-\frac{1}{2}\sin 2.0)\}=\frac{\pi}{2}$

(d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sec x+1}{\sec x}dx$ [য.'০৬; কু.,'০৯]

$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\frac{1}{\sec x})dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos x)dx$

$=x[1+\sin x)]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$=\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}-\{-\frac{\pi}{2}+\sin(-\frac{\pi}{2})\}$

$=\frac{\pi}{2}+1-(-\frac{\pi}{2}-1)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+2=\pi+2$

(e) $\int_{-1}^{1}|x|\,dx$ [প্র.ভ.প.'০৬]

$=\int_{-1}^{0}|x|\,dx+\int_0^1|x|\,dx=\int_{-1}^{0}(-x)dx+\int_0^1 x dx$

$[\because |x|=x\,,x\geq 0;|x|=-x\,,x\leq 0]$

$=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=-0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0=1$

2.(a) $\int_0^{\pi/3}\frac{1}{1-\sin x}dx$

[ঢা. '০৯,'১৩; য.'০৯; সি.'১০; রা.'১৩]

$=\int_0^{\pi/3}\frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$

$=\int_0^{\pi/3}\frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\pi/3}\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx$

$=\int_0^{\pi/3}\{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\}dx$

$=\int_0^{\pi/3}\{\sec^2 x+\sec x\tan x\}dx$

$=[\tan x+\sec x]_0^{\pi/3}$

$=\tan\frac{\pi}{3}+\sec\frac{\pi}{3}-(\tan 0+\sec 0)$

$=\sqrt{3}+2-0-1=\sqrt{3}+1$

2(b) $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos x}dx$ [ব.'০৮; ঢা.,সি.'১১]

$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sec^2\frac{x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\left[2\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\pi/2}=\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0=1$

3. $\int_0^{\pi/4}\frac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta}d\theta$ [ব.'১১]

$=\int_0^{\pi/4}\frac{2\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\int_0^{\pi/4}(2-\sec^2\theta)dx=[2\theta-\tan\theta]_0^{\pi/4}$

$=2.\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{4}-(2.0-\tan 0)=\frac{\pi}{2}-1$

4(a) $\int_0^{\pi/2}\cos^2 x dx$ [চ. '০৪; রা.'০৫ ,'০৯; সি.'১১]

$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}$

$=\frac{1}{2}\{(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi)-(0+\frac{1}{2}\sin 0)\}=\frac{\pi}{4}$

4 (b) $\int_0^{\pi/2}\cos^3 x dx$ [সি.'০৬,'০৭; য. '০৭,'০৯, '১৩; ব. '০৮; মা.'০৬; দি.'১৩]

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)dx$

$= \frac{1}{4}\left[3\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{4}(3\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} - 3\sin 0 - \frac{1}{3}\sin 0)$

$= \frac{1}{4}(3.1 + \frac{1}{3}(-1) - 0 - 0) = \frac{1}{4}\times\frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

4(c) $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx$ [য.'০৪]

$\cos^4 x = \frac{1}{4}(2\cos^2 x)^2 = \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)^2$

$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$

$= \frac{1}{4}\{1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\}$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x)$

$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x + \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}.\frac{\pi}{2} + \sin\pi + \frac{1}{8}\sin 2\pi - 0)$

$= \frac{1}{4}(\frac{3\pi}{4} + 0) = \frac{3\pi}{16}$

4(d) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\, dx = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1)\, dx$

$= [\tan x - x]_0^{\pi/4} = \tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\tan 0 - 0)$

$= 1 - \frac{\pi}{4}$

4(e) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta\, d\theta$ [মা.বো.'০৯]

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 4\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{2}\{\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} - (0 - \frac{\sin 0}{4})\}$

$= \frac{1}{2}\{\frac{\pi}{2} - 0 - (0 - 0)\} = \frac{\pi}{4}$

5 (a) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin x dx$ [ঢা.'০৩; দি.'১০; য.'১১]

$= -\int_0^{\pi/2} (\cos x)^5 (-\sin x)dx$

$= -\left[\frac{1}{6}(\cos x)^6\right]_0^{\pi/2}$

$= -\frac{1}{6}\{(\cos\frac{\pi}{2})^6 - (\cos 0)^6\}$

$= -\frac{1}{6}\{0 - 1\} = \frac{1}{6}$

5(b) ধরি $I = \int_0^{\pi/4} \sin^4 x \cos^4 x\, dx$ [প্র.ভ.প'৮৯]

$\sin^4 x \cos^4 x = \frac{1}{16}(2\sin x \cos x) = \frac{1}{16}\sin^4 2x$

$= \frac{1}{16}.\{\frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\}^2$

$= \frac{1}{64}(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)$

$= \frac{1}{64}\{1 - 2\cos 4x + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x)\}$

$= \frac{1}{128}(3 - 4\cos 4x + \cos 8x)$

$\therefore I = \frac{1}{128}\left[3x - 4.\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x\right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{128}(\frac{3\pi}{4} - \sin\pi + \frac{1}{8}\sin 2\pi - 0)$

$= \frac{1}{128}\times\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{512}$

5(c) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x\, dx$

[ব.'০৫; মা.'০৪; য.'১৪]

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\sin 3x\, dx$

$= \int_0^{\pi/2} (\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 2x \sin 3x)\, dx$

$= \int_0^{\pi/2} \{\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{4}(\sin 5x + \sin x)\}\, dx$

$$\left[-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{1}{4}(-\frac{1}{5}\cos 5x-\cos x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$=-\frac{1}{6}(\cos\frac{3\pi}{2}-\cos 0)+\frac{1}{20}(\cos\frac{5\pi}{2}-\cos 0)$$

$$+\frac{1}{4}(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0)$$

$$-\frac{1}{6}(0-1)+\frac{1}{20}(0-1)+\frac{1}{4}(0-1)$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{20}-\frac{1}{4}\quad\frac{10-3-15}{60}\quad\frac{-8}{60}=\frac{-2}{15}$$

১(d) ধরি $\int_0^{\pi}3\sqrt{1-\cos x}\sin x\,dx$ [কু.'০৪]

$z=\cos x \qquad dz=-\sin xdx$

$x=0$ হলে $z=1 \quad x=\pi$ হলে $z=-1$

$$-3\int_1^{-1}\sqrt{1-z}dz=-3\left[-\frac{2}{3}(1-z)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{-1}$$

$$2\{(1+1)^{\frac{3}{2}}-(1-1)^{\frac{3}{2}}\}\quad 2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

১(e) $\int_0^{\pi/2}(1+\cos\theta)^2\sin\theta\,d\theta$

[চুয়েট, ১৮-০৯; ঢা.'১১]

$z=1+\cos x \qquad dz=-\sin xdx$

$x=0$ হলে $z=2 \qquad x=\frac{\pi}{2} \qquad z=1$

$$\int_0^{\pi/2}(1+\cos\theta)^2\sin\theta\,d\theta=-\int_2^1 z^2dz$$

$$\left[-\frac{z^3}{3}\right]_2^1=-(\frac{1^3}{3}-\frac{2^3}{3})=-(\frac{1}{3}-\frac{8}{3})=\frac{7}{3}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin x\sin 2x\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi/2}$$

$$\frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}-\sin 0+\frac{1}{3}\sin 0)$$

$$\frac{1}{2}\{1-\frac{1}{3}(-1)-0+0\}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

৬(b) $\int_0^{\pi/2}\cos 2x\cos 3x\,dx$ [কু.

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos x)\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\sin 5x+\sin x\right]_0^{\pi/2}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{5}\sin 0-\sin 0)$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{5}.1+1)=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}=\frac{3}{5}$$

৬(c) $\int_0^{\pi/2}\sin 2x\cos x\,dx$ [ক.'০৫; ব.

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(\sin 3x+\sin x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x-\cos x\right]_0^{\pi/2}$$

$$\frac{1}{2}(-\frac{1}{3}\cos 3\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\cos 0+\cos 0)$$

$$\frac{1}{2}[-\frac{1}{3}(\cos 3\frac{\pi}{2}-\cos 0)-(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0)]$$

$$\frac{1}{2}[-\frac{1}{3}(0-1)-(0-1)]=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+1)=\frac{2}{3}$$

7.(a) ধরি, $I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\sin^3 xdx$

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\sin^2 x\sin xdx$$

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}(1-\cos^2 x)\sin xdx$$

$z=\cos x \qquad dz=-\sin xdx$

$x=0$ হলে $z=1 \qquad x=\frac{\pi}{2}$ হলে $z=0$

$$=-\int_1^0\sqrt{z}(1-z^2)\,dz$$

$$-\int_1^0(\sqrt{z}-z^{5/2})\,dz=-\left[\frac{z^{3/2}}{3/2}-\frac{z^{7/2}}{7/2}\right]_1^0$$

$$-\{\frac{2}{3}(0-1)-\frac{2}{7}(0-1)\}=-(-\frac{2}{3}+\frac{2}{7})$$

$-\frac{-14+6}{21}=\frac{8}{21}$

7(b) ধরি $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3 xdx}{\sqrt{\sin x}}$ [ব.,চ.'১০;

$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x\cos xdx}{\sqrt{\sin x}}$

$\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\sin^2 x)\cos xdx}{\sqrt{\sin x}}$

$z=\sin x \qquad dz=\cos x\,dx$

$x=0$ হলে $z=0 \qquad x=\frac{\pi}{2} \qquad z=1$

I $\int_0^1(\frac{1-z^2}{\sqrt{z}})\,dz \quad \int_0^1(\frac{1}{\sqrt{z}}-z^{3/2})\,dz$

$=\left[2\sqrt{z}-\frac{z^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 \quad 2(1-0)-\frac{2}{5}(1-0)$

$=2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$

8.(a) ধরি $\int_0^1\frac{(\sin^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ '১১]

$z=\sin^{-1}x \qquad dz=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$x=0$ হলে $z=0$ এবং $x=1 \qquad z=\frac{\pi}{2}$

I $\int_0^{\pi/2}z^2dz=\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}\{(\frac{\pi}{2})^3-0\}$

$=\frac{\pi^3}{24}$

8(b) $\int_0^1\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ [দি.'০৪;সি.'০৭;ব.'০৮;

ধরি, $z=\sin^{-1}x \qquad dz=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$x=0$ হলে $z=0$ এবং $x=1 \qquad z=\frac{\pi}{2}$

$\int_0^1\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \int_0^{\pi/2}zdz=\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\pi/2}$

$=\frac{1}{2}\{(\frac{\pi}{2})^2-0\}=\frac{\pi^2}{8}$

8(c) ধরি, $\int_0^1\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx$ [বুয়েট'০৯; ১]

$z=\tan^{-1}x \qquad dz=\frac{1}{1+x^2}dx$

সীমা: $x=0$ হ. $z=0 \qquad x=1$ হলে $z=\frac{\pi}{4}$

$\int_0^{\pi/4}zdz=\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\pi/4} \quad \frac{1}{2}\;\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{32}$

9(a) $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ [দি.'০৭; য.'০৭]

$-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\left[2\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$

$-(\sqrt{1-1^2}-\sqrt{1-0^2})=-(0-1)$

9(b) $\int_4^8\frac{xdx}{\sqrt{x^2-15}}=\frac{1}{2}\int_4^8\frac{d(x^2-15)}{\sqrt{x^2-15}}$

$\frac{1}{2}\left[2\sqrt{x^2-15}\right]_4^8 \quad \sqrt{64-15}-\sqrt{16-15}$

$\sqrt{64-15}-\sqrt{16-15} \quad \sqrt{49}-\sqrt{1} \quad 6$

9(c) $\int_0^2\frac{xdx}{\sqrt{9-2x^2}}$

[বুয়েট'০৯; ব.'১০; রা.'১২; সি.'১৩; দি.,চ.'১৪]

$=-\frac{1}{4}\int_0^2\frac{d(9-2x^2)}{\sqrt{9-2x^2}} \quad -\frac{1}{4}\left[2\sqrt{9-2x^2}\right]_0^2$

$-\frac{1}{2}(\sqrt{9-8}-\sqrt{9-0})=-\frac{1}{2}(1-3)=$

9(d) ধরি, $I=\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$

[রা., কু.'১০; দি.'১৩]

এবং $z=4-x^2 \qquad dz=-2xdx$

$x=0$ হলে $z=4 \qquad x=1 \qquad z=3$

$\therefore\; -\frac{1}{2}\int_4^3 \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{z}\right]_4^3$

$-(\sqrt{3}-\sqrt{4}) = 2-\sqrt{3}$

৯(ঙ) $\int_{-2}^{5} \frac{7x}{\sqrt{x^2+3}}dx$ [সি.বো.'০৪]

$z = x^2+3 \quad dz = 2xdx$

$x=-2$ হলে $z=7 \qquad x=5 \qquad z=28$

$\therefore\; \frac{7}{2}\int_7^{28}\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{7}{2}\left[2\sqrt{z}\right]_7^{28}$

$7(\sqrt{28}-\sqrt{7}) = 7(2\sqrt{7}-\sqrt{7}) = 7\sqrt{7}$

৯(চ) ধরি, $I = \int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}\,dx$ '০৯;

'০৮; সি.'০৫, '০৯]

এবং $z = 1+3x^4 \quad dz = 12x^3dx$

$x=0$ হলে $z=1 \qquad x=1 \qquad z=4$

$\therefore\; \frac{1}{12}\int_1^4 \sqrt{z}dz = \frac{1}{12}\left[\frac{z^{3/2}}{3/2}\right]_1^4$

$\frac{1}{12}\times\frac{2}{3}(4^{3/2}-1) = \frac{1}{18}(8-1) = \frac{7}{18}$

10. $\int_1^2 x^2e^{x^3}dx$ সি.'০৪,'০৬; য.'১০]

$z = x^3 \quad dz = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}dz$

$x=1$ হলে $z=1$ এবং $x=2$ হলে $z=8$

$\int_1^2 x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int_1^8 e^z dz = \frac{1}{3}\left[e^z\right]_1^8$

$= \frac{1}{3}(e^8-e^1) = \frac{1}{3}(e^8-e)$

10(b) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ [

কু.দি.'১২]

$z = x^2 \quad dz = 2xdx \quad xdx = \frac{1}{2}dz$

$x=0$ হলে $z=0 \qquad x=1 \qquad z=1$

$\int_0^1 xe^{x^2}dx \quad \frac{1}{2}\int_0^1 e^z dz = \frac{1}{2}\left[e^z\right]_0^1$

$\frac{1}{2}(e^1-e^0) = \frac{1}{2}(e-1)$

10(c) $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx$ য.'১০;

কু.'১৩;

ধরি $z = 1+e^x \quad dz = e^xdx$

$x=0 \qquad z = 1+e^0 = 1+1 = 2$

$x=\ln 2$ হলে $z = 1+e^{\ln 2} = 1+2 = 3$

$\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx = \int_2^3\frac{dz}{z} = [\ln z]_2^3$

$\ln 3-\ln 2 = \ln\frac{3}{2}$

10(d) $\int_1^3 \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx$ '০৮; য.'০৮,'১৪; ২]

ধরি, $z = \ln x \quad dz = \frac{dx}{x}$

সীমা: $x=1$ হলে $z = \ln 1 = 0$

$x=3 \qquad z=\ln 3$

$\int_1^3 \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx \quad \int_0^{\ln 3}\cos z\,dz$

$[\sin z]_0^{\ln 3} = \sin(\ln 3)-\sin 0 = \sin(\ln 3)$

11.(a) $\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\cos^5 x}{\sin^7 x}dx$

[য. '০৭; য.'০৮; দি.'১১; '১২; বুয়েট'০৯]

$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cot^5 x\,\mathrm{cosec}^2 x\,dx$

ধরি, $\cot x = z \quad -\mathrm{cosec}^2 x\,dx = dz$

সীমা: $x = \frac{\pi}{3} \qquad z = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{\pi}{2}$ হলে $z = \cot\frac{\pi}{2} = 0$

$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\cos^5 x}{\sin^7 x}dx \quad \int_{1/\sqrt{3}}^{0} z^5(-dz)$

$-\left[\frac{1}{6}z^6\right]_{1/\sqrt{3}}^{0} \quad -\frac{1}{6}\{0-(\frac{1}{\sqrt{3}})^6\} = \frac{1}{162}$

11.(b) ধরি, $I = \int_0^{\pi/4} \tan^3 x \sec^2 x\, dx$ [য.'০৬; মা.'০৬,'০৮; কু., সি, দি.'০৯; ঢা.,ব.'১১; সি.'১৩]

এবং $\tan x = z \therefore \sec^2 x\, dx = dz$

সীমা: $x = 0$ হলে $z = \tan 0 = 0$ এবং

$x = \frac{\pi}{4}$ হলে $z = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$$\therefore I = \int_0^1 z^3 dz = \left[\frac{1}{4}z^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}(1^4 - 0^4) = \frac{1}{4}$$

11(c) $\int_0^{\pi/4} (\tan^3 x + \tan x)dx$ [কু.'০৮]

$$= \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x + 1)\tan x dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \tan x dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\tan x) d(\tan x) = \left[\frac{1}{2}(\tan x)^2\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2}\{(\tan\frac{\pi}{4})^2 - (\tan 0)^2\} = \frac{1}{2}\{(1)^2 - 0\} = \frac{1}{2}$$

11(d) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \sec^2 x\, dx$ [ঢা.'০৩,'১৩; কু.'০৪,'০৬; য.'০৪; ঢা.'০৫; রা.'০৫; চ.'১১]

ধরি, $\tan x = z \therefore \sec^2 x\, dx = dz$

সীমা: $x = 0$ হলে $z = \tan 0 = 0$ এবং

$x = \frac{\pi}{4}$ হলে $z = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$$\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \sec^2 x\, dx = \int_0^1 z^2\, dz$$

$$= \left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$$

12. (a) $\int xe^{-3x}dx$ [দি.'১০]

$$= x\int e^{-3x}dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int e^{-3x}dx\}dx$$

$$= x(-\frac{1}{3}e^{-3x}) - \int 1.(-\frac{1}{3}e^{-3x})dx$$

$$= -x\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{3}e^{-3x})$$

$$= -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} = -\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x}$$

$$\therefore \int_0^1 xe^{-3x}dx = \left[-\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{9}\{(3+1)e^{-3} - (0+1)e^{-0}\}$$

$$= -\frac{1}{9}(4e^{-3} - 1) = \frac{1}{9}(1 - 4e^{-3})$$

12(b) $\int \ln(2x)dx$ [য. '০১;ব.'০৯]

$$= \ln(2x)\int dx - \int[\frac{d}{dx}\{\ln(2x)\}\int dx]dx$$

$$= x\ln(2x) - \int\frac{2}{2x}.xdx$$

$$= x\ln(2x) - \int dx = x\ln(2x) - x + c$$

$$\therefore \int_2^4 \ln(2x)\, dx = [x\ln(2x) - x]_2^4$$

$$= 4\ln 8 - 4 - (2\ln 4 - 2)$$

$$= 4\ln 2^3 - 4 - 2\ln 2^2 + 2$$

$$= 12\ln 2 - 2 - 4\ln 2 = 8\ln 2 - 2$$

12(c) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ [প্র.ভ.প'১৬]

$$= \ln x\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx - \int[\frac{d}{dx}(\ln x)\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx]dx$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - \int\frac{1}{x}.2\sqrt{x}dx$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2.2\sqrt{x} + c$$

$$= 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + c$$

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = [2\sqrt{x}(\ln x - 2)]_1^4$$

$$= 2\sqrt{4}(\ln 4 - 2) - 2\sqrt{1}(\ln 1 - 2)$$

$$= 4\ln 2^2 - 8 - 2(0 - 2)$$

$$= 8\ln 2 - 8 + 4 = 8\ln 2 - 4$$

12(d) $\int x^2 \cos x\, dx$ [কু.'০৪]

$= x^2\int\cos x\,dx - \int\{\frac{d}{dx}(x^2)\int\cos x\,dx\}dx$

$= x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx$

$= x^2\sin x - 2[x\int\sin x\,dx - \int 1.(-\cos x)dx]$

$= x^2\sin x - 2[x(-\cos x) + \sin x] + c$

$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

$\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx$

$= \left[x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_0^{\pi/2}$

$= (\frac{\pi}{2})^2\sin\frac{\pi}{2} + 2.\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 2\sin\frac{\pi}{2} - 0$

$= \frac{\pi^2}{4}.1 + 2.\frac{\pi}{2}.0 - 2.1 = \frac{\pi^2}{4} - 2$

12(e) $\int x\tan^{-1}x\,dx$

[রা. '০৮,'১২; চ. '০৮,'১২; য.'১১; দি.'১২; কু.'১৪]

$= \tan^{-1}x\int x dx - \int\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int x dx\}dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \int\frac{1}{1+x^2}.\frac{x^2}{2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}(x - \tan^{-1}x) + c$

$= \frac{1}{2}\{(x^2+1)\tan^{-1}x - x\} + c$

$\int_1^{\sqrt{3}} x\tan^{-1}x\,dx = \left[\frac{(x^2+1)\tan^{-1}x - x}{2}\right]_1^{\sqrt{3}}$

$= \frac{(3+1)\tan^{-1}\sqrt{3} - \sqrt{3} - (1+1)\tan^{-1}1 + 1}{2}$

$= \frac{1}{2}(4.\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} - 2.\frac{\pi}{4} + 1)$

$= \frac{1}{2}(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} + 1)$

$= \frac{1}{2}(\frac{8\pi - 3\pi}{6} - \sqrt{3} + 1) = \frac{1}{12}(5\pi - 6\sqrt{3} + 6)$

12(f) ধরি, $I = \int_0^{\pi/2} e^x(\sin x + \cos x)\,dx$

[কু.'০৫,'১১; রা.'১০]

এবং $f(x) = \sin x \;\therefore\; f'(x) = \cos x$

$\therefore\; I = \int_0^{\pi/2} e^x\{f(x) + f'(x)\}dx$

$= \left[e^x f(x)\right]_0^{\pi/2} = \left[e^x\sin x\right]_0^{\pi/2}$

$= e^{\pi/2}\sin\frac{\pi}{2} - e^0\sin 0 = e^{\pi/2} - 0 = e^{\pi/2}$

12(g) $\int\ln x\,dx$ **[প্র.ভ.প.'০৫]**

$= \ln x\int dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int dx\}dx$

$= x\ln x - \int\frac{1}{x}.x dx = x\ln x - \int dx$

$= x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$

$\therefore\; \int_1^0 \ln x\,dx = [x(\ln x - 1)]_1^0$

$= 0 - 1(\ln 1 - 1) = -1(0-1) = 1$

12(h) $\int x\sin^2 x\,dx$ **[প্র.ভ.প.'০৫]**

$= \int\frac{x}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int(x - x\cos 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}[x\int\cos 2x dx - \int\{1.\frac{1}{2}\sin 2x\,dx\}]$

$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}[x.\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx]$

$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}[x\sin 2x - (-\frac{1}{2}\cos 2x)] + c$

$= \frac{1}{4}(x^2 - x\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x) + c$

$\therefore\; \int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}\left[x^2 - x\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{4}\{(\pi^2 - \pi\sin 2\pi - \frac{1}{2}\cos 2\pi) + \frac{1}{2}\cos 0\}$

$= \frac{1}{4}\{\pi^2 - 0 - \frac{1}{2}.1) + \frac{1}{2}.1\} = \frac{1}{4}\pi^2$

12(i) $\int x\cot^{-1}x\,dx$ [বুয়েট'০১]

$= \cot^{-1}x\int xdx - \int\{\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)\int xdx\}dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}x + \int\frac{1}{1+x^2}.\frac{x^2}{2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}x + \frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}x + \frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}x + \frac{1}{2}(x+\cot^{-1}x)+c$

$=\frac{1}{2}\{(x^2+1)\cot^{-1}x + x\}+c$

$\int_1^{\sqrt{3}} x\cot^{-1}x\,dx = \left[\frac{(x^2+1)\cot^{-1}x + x}{2}\right]_1^{\sqrt{3}}$

$=\frac{(3+1)\cot^{-1}\sqrt{3}+\sqrt{3}-(1+1)\cot^{-1}1-1}{2}$

$= \frac{1}{2}(4.\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2.\frac{\pi}{4}-1)$

$= \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}-1)$

$=\frac{1}{2}(\frac{4\pi-3\pi}{6}+\sqrt{3}-1)=\frac{1}{12}(\pi+6\sqrt{3}-6)$

(j) $\int x\ln x\,dx$ [য.'০৫; রা.'১৪]

$= \ln x\int x\,dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int xdx\}dx$

$= \ln x.\frac{x^2}{2} - \int(\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2})dx$

$= \ln x.\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}+c$

$\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}$

$=\frac{(\sqrt{e})^2}{2}\ln\sqrt{e} - \frac{1}{4}(\sqrt{e})^2 - \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{4}$

$= \frac{e}{2}.\frac{1}{2}\ln e - \frac{1}{4}e - \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{4}$

$= \frac{e}{4}.1 - \frac{1}{4}e - \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

13(a) $\int_0^1\frac{x\,dx}{1+x^4}$ [প্র.ভ.প.'০৬]

$= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x\,dx}{1+(x^2)^2} = \left[\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2)\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}(\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}-0) = \frac{\pi}{8}$

13(b) $\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}dx$

[রা. '০৬, '০৯; ব. '০৭ ; ঢা. '০৯; কু.,সি.'১২,'১৪]

$=\int_0^1(\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2})dx$

$=\int_0^1(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2})dx$

$= \left[\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1$

$= \tan^{-1}1 + \frac{1}{2}\ln 2 - \tan^{-1}0 - \frac{1}{2}\ln 1$

$= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2 - 0 + 0 = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$

13(c) $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ [ঢা.'০৭]

$= -\int_0^{\pi}\frac{(-\sin x)}{1^2+\cos^2 x}dx = -\left[\tan^{-1}(\cos x)\right]_0^{\pi}$

$= -\{\tan^{-1}(\cos\pi) - \tan^{-1}(\cos 0)\}$

$= -\{\tan^{-1}(-1) - \tan^{-1}(1)\}$

$= -(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$

13(d) ধরি, $I=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$ [প্র.ভ.প.'০৭]

$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1-\frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2 = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$= 1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2x) = \frac{1}{2}(1+\cos^2 2x)$$

$$I = 2\int_0^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}dx$$

$$= 2(-\frac{1}{2})\int_0^{\pi/4}\frac{(-2\sin 2x)}{1^2+(\cos 2x)^2}dx$$

$$= -\left[\tan^{-1}(\cos 2x)\right]_0^{\pi/4}$$

$$= -\{\tan^{-1}(\cos\frac{\pi}{2}) - \tan^{-1}(\cos 0)\}$$

$$= -\{\tan^{-1}0 - \tan^{-1}1\} = -\{0-\frac{\pi}{4}\} = \frac{\pi}{4}$$

13(e) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

[রা.'১২; সি. '০৭; কু.'০৮; ব.'১৩; ঢা.'১৪]

$$= \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x(e^x+e^{-x})} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{(e^x)^2+1}$$

ধরি, $e^x = z \quad \therefore e^x dx = dz$

সীমা : $x=0$ হলে, $z=e^0=1$

$x=1$ হলে, $z=e^1=e$

$$\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_1^e \frac{dz}{z^2+1} = \left[\tan^{-1}z\right]_1^e$$

$$= \tan^{-1}e - \tan^{-1}(1) = \tan^{-1}e - \frac{\pi}{4}$$

14(a) $\int_3^4 \frac{dx}{25-x^2}$ [ব.'১৩]

$$= \int_3^4\frac{dx}{5^2-x^2} = \left[\frac{1}{2.5}\ln\left|\frac{5+x}{5-x}\right|\right]_3^4$$

$$= \frac{1}{10}(\ln\left|\frac{5+4}{5-4}\right| - \ln\left|\frac{5+3}{5-3}\right|)$$

$$= \frac{1}{10}(\ln 9 - \ln 4) = \frac{1}{10}\ln\frac{9}{4} = \frac{1}{10}\ln(\frac{3}{2})^2$$

$$= \frac{1}{10}\times 2\ln(\frac{3}{2}) = \frac{1}{5}\ln(\frac{3}{2})$$

(b) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{9-\sin^2 x}dx$ [ঢা.'০৫; মা.'০৮; চ., সি.'০৯]

ধরি, $\sin x = z$. $\quad \cos x dx = dz$

সীমা : $x=0$ হলে $z=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ হলে $z=1$

$$\therefore \int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{9-\sin^2 x}dx = \int_0^1 \frac{dz}{3^2-z^2}$$

$$= \left[\frac{1}{2.3}\ln\left|\frac{3+z}{3-z}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{6}(\ln\left|\frac{3+1}{3-1}\right| - \ln\left|\frac{3+0}{3-0}\right|)$$

$$= \frac{1}{6}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{6}\ln 2$$

15 (a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)}}$

$$= \int_0^1 \frac{d(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \left[\sin^{-1}(x-1)\right]_0^1$$

$$= \sin^{-1}(1-1) - \sin^{-1}(0-1) = \sin^{-1}0 + \sin^{-1}1$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

15 (b) $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$ [প্র.ভ.প. '০৪]

$$= \int_{1/2}^1 \frac{2dx}{2x\sqrt{(2x)^2-1}} = \left[\sec^{-1}(2x)\right]_{1/2}^1$$

$$= \sec^{-1}2 - \sec^{-1}1 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

15(c) ধরি $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ [প্র.ভ.প.'০৪]

এবং $x = 2\cos\theta$. তাহলে $dx = -2\sin\theta\, d\theta$

সীমা : $x=1$ হলে $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ এবং

$x=2$ হলে $\theta = \cos^{-1}1 = 0$

$$\therefore I = \int_{\pi/3}^0 \frac{-2\sin\theta\, d\theta}{4\cos^2\theta\sqrt{4(1-\cos^2\theta)}}$$

$$= \int_{\pi/3}^0 \frac{-2\sin\theta\, d\theta}{4\cos^2\theta . 2\sin\theta} = -\frac{1}{4}\int_{\pi/3}^0 \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\tan\theta\right]_{\pi/3}^0 = -\frac{1}{4}(\tan 0 - \tan\frac{\pi}{3})$$

$$= -\frac{1}{4}(0-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

15 (d) $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1-\tan^2 x}$ [বুয়েট-০৭-০৮]

$= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2 x dx}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

$= \int_0^{\pi/6} \frac{\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (\sec 2x + 1)dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln|\tan 2x + \sec 2x| + x\right]_0^{\pi/6}$

$= \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}\ln|\tan\frac{\pi}{3} + \sec\frac{\pi}{3}| + \frac{\pi}{6} - 0\}$

$= \frac{1}{4}\ln|\sqrt{3}+2| + \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\ln(\sqrt{3}+2) + \frac{\pi}{12}$

16. (a) ধরি $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$ [সি. '০৭; রা. '০৫; কু.'০৯,'১৩; চ. '০৯; য.,ব. '১২, দি.'১২,'১৪]

এবং $x = a\sin\theta$. তাহলে $dx = a\cos\theta\, d\theta$

সীমা : $x = 0$ হলে $\theta = \sin^{-1} 0 = 0$ এবং

$x = a$ হলে $\theta = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$

$\therefore I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\, a\cos\theta\, d\theta$

$= a^2\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\, d\theta$

$= \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{a^2}{2}\{(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi) - (0 + \frac{1}{2}\sin 0)\}$

$= \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\pi a^2$

16(b) ধরি $I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}dx$ [প্র.ভ.প.'৮৫]

এবং $x = 2\sin\theta$. তাহলে $dx = 2\cos\theta\, d\theta$

সীমা : $x = 0$ হলে $\theta = \sin^{-1} 0 = 0$ এবং

$x = \sqrt{2}$ হলে $\theta = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

$\therefore I = \int_0^{\pi/4} \frac{4\sin^2\theta . 2\cos\theta\, d\theta}{\{4(1-\sin^2\theta)\}^{3/2}}$

$= \int_0^{\pi/4} \frac{8\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta}{8\cos^3\theta} = \int_0^{\pi/4}\tan^2\theta\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/4}(\sec^2\theta - 1)\, d\theta = [\tan\theta - \theta]_0^{\pi/4}$

$= \tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\tan 0 - 0) = 1 - \frac{\pi}{4}$

17. ধরি, $I = \int_0^4 y\sqrt{4-y}\, dy$

[ব.'০৫; রা.'০৭;ঢা.'০৯,'১২; রা.'১৩; চ.'১০,'১৪]

এবং $4 - y = z^2$. $\therefore -dy = 2z\, dz$

সীমা : $y = 0$ হলে $z = 2$ এবং $y = 4$ হলে $z = 0$

$\therefore I = \int_2^0 (4-z^2)\sqrt{z^2}.(-2z\, dz)$

$= 2\int_2^0 (z^4 - 4z^2)\, dz = 2\left[\frac{1}{5}z^5 - \frac{4}{3}z^3\right]_2^0$

$= 2(-\frac{1}{5}\times 2^5 + \frac{4}{3}\times 2^3) = 2^6(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}) = \frac{128}{15}$

18. $\int_1^{15} \frac{x+2}{(x+1)(x+3)}dx$ [প্র.ভ.প.'৯৫]

$= \int_1^{15}\{\frac{-1+2}{(x+1)(-1+3)} + \frac{-3+2}{(-3+1)(x+3)}\}dx$

$= \int_1^{15}\{\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+3)}\}dx$

$= \frac{1}{2}[\ln|x+1| + \ln|x+3|]_1^{15}$

$= \frac{1}{2}[\ln|(x+1)(x+3)|]_1^{15}$

$= \frac{1}{2}\{\ln|(15+1)(15+3)| - \ln|(1+1)(1+3)|\}$

$= \frac{1}{2}\{\ln(16\times 18) - \ln(2\times 4)\}$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{16\times 18}{2\times 4} = \frac{1}{2}\ln 6^2 = \frac{2}{2}\ln 6 = \ln 6$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})^2}\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} (\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})\, d\theta$

$= \left[-2\cos\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$

$= 2\{-\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} - (-\cos 0 + \sin 0)\}$

$= 2\{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - (-1+0)\} = 2$

2. $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \operatorname{cosec} x dx$

$= \left[\ln|\tan\frac{x}{2}|\right]_{\pi/2}^{\pi/4}$

$= \ln|\tan\frac{\pi}{8}| - \ln|\tan\frac{\pi}{4}| = \ln(\tan\frac{\pi}{8}) - \ln 1$

$= \ln(\tan\frac{\pi}{8}) - 0 = \ln(\tan\frac{\pi}{8})$

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)dx$

$= \frac{1}{4}\left[-3\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{4}\{-3\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2} - (-3\cos 0 + \frac{1}{3}\cos 0)\}$

$= \frac{1}{4}\{(-0+0) - (-3.1 + \frac{1}{3})\} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

4(a) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos x dx$

$= \int_0^{\pi/2} (\sin x)^5 d(\sin x)$

$= \left[\frac{1}{6}(\sin x)^6\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}\{(\sin\frac{\pi}{2})^6 - (\sin 0)^6\}$

$= \frac{1}{6}\{1-0\} = \frac{1}{6}$

4(b) $\int_0^{\pi/4} \cos x \sin^3 x\, dx$

$= \int_0^{\pi/4} (\sin x)^3 d(\sin x)$

$= \left[\frac{1}{4}(\sin x)^4\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}\{(\sin\frac{\pi}{4})^4 - (\sin 0)^4\}$

$= \frac{1}{4}\{(\frac{1}{\sqrt{2}})^4 - 0\} = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

5. $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos 3x\, dx$

$= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}\sin 6x\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 6x}{6}\right]_0^{\pi/6}$

$= -\frac{1}{12}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{1}{12}(-1-1) = \frac{1}{6}$

6(a) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x})$

$= 2\left[e^{\sqrt{x}}\right]_0^1 = 2(e^{\sqrt{1}} - e^{\sqrt{0}}) = 2(e-1)$

6(b) $\int_0^2 2x\cos(1+x^2)\, dx$

$= \int_0^2 \cos(1+x^2)\, d(1+x^2)$

$= \left[\sin(1+x^2)\right]_0^2 = \sin(1+2^2) - \sin(1+0^2)$

$= \sin(5) - \sin(1)$

7(a) ধরি, $I = \int 2x^3 e^{-x^2} dx$ এবং $x^2 = z$.

তাহলে $2x\, dx = dz$ এবং

$I = \int x^2 e^{-x^2}(2xdx) = \int ze^{-z} dz$

$= z\int e^{-z}dz - \int\{\frac{d}{dz}(z)\int e^{-z}dz\}dz$

$= z(-e^{-z}) - \int 1.(-e^{-z})dz$

$= -ze^{-z} + (-e^{-z}) = -(x^2+1)e^{-x^2}$

$$\int_0^1 2x^3e^{-x^2}dx = \left[-(x^2+1)e^{-x^2}\right]_0^1$$
$$= -(1+1)e^{-1}+(0+1)e^0 = 1-2e^{-1}$$

7(b) $\int \ln(1+x)dx$

$$= \ln(1+x)\int dx - \int[\frac{d}{dx}\{\ln(1+x)\}\int dx]dx$$
$$= x\ln(1+x) - \int\frac{1}{1+x}.xdx$$
$$= x\ln(1+x) - \int\frac{1+x-1}{1+x}dx$$
$$= x\ln(1+x) - \int(1-\frac{1}{1+x})dx$$
$$= x\ln(1+x) - \{x-\ln(1+x)\}+c$$
$$= (x+1)\ln(1+x)-x+c$$
$$\int_0^1 \ln(1+x)dx = [(x+1)\ln(1+x)-x]_0^1$$
$$= 2\ln 2-1-\ln 1 = 2\ln 2-1-0 = 2\ln 2-1$$

8(a) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{3dx}{1+x^2} = 3[\tan^{-1}x]_1^{\sqrt{3}}$

$$= 3(\tan^{-1}\sqrt{3}-\tan^{-1}1) = 3(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$$
$$= 3\times\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

8(b) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4} = \int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+2^2} = \left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_{-2}^{2}$

$$= \frac{1}{2}\{\tan^{-1}1-\tan^{-1}(-1)\} = \frac{1}{2}\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\} = \frac{\pi}{4}$$

8(c) $\int_0^a\frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

$$= \frac{1}{a}(\tan^{-1}1-\tan^{-1}0) = \frac{1}{a}(\frac{\pi}{4}-0) = \frac{\pi}{4a}$$

9. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\sin^{-1}x]_0^1$

$$= \sin^{-1}1-\sin^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$$

10(a) $\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2dx = \int_0^1 x(1-2\sqrt{x}+x)dx$

$$= \int_0^1(x-2x^{\frac{3}{2}}+x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2}-2\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$= (\frac{1}{2}-2\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3})-0 = \frac{15-24+10}{30} = \frac{1}{30}$$

(b) $\int_1^2\frac{(x^2-1)^2}{x^2}dx = \int_1^2\frac{x^4-2x^2+1}{x^2}dx.$

$$= \int_1^2(x^2-2+\frac{1}{x^2})dx = \left[\frac{x^3}{3}-2x-\frac{1}{x}\right]_1^2$$
$$= (\frac{8}{3}-4-\frac{1}{2})-(\frac{1}{3}-2-1)$$
$$= \frac{8}{3}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{16-6-3-2}{6} = \frac{5}{6}$$

(e) $\int_{\pi/2}^{\pi}(1+\sin 2\theta)d\theta = \left[\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_{\pi/2}^{\pi}$

$$= (\pi-\frac{1}{2}\cos 2\pi)-(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cos 2.\frac{\pi}{2})$$
$$= \pi-\frac{1}{2}.1-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(-1) = \frac{\pi}{2}-1$$

11. $\int_{-\pi/4}^{0}\tan(\frac{\pi}{4}+x)dx$

$$= \left[-\ln|\cos(\frac{\pi}{4}+x)|\right]_{-\pi/4}^{0}$$
$$= -\ln|\cos\frac{\pi}{4}|+\ln|\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})|$$
$$= -\ln|\frac{1}{\sqrt{2}}|+\ln|\cos 0| = -\ln 2^{-\frac{1}{2}}+\ln 1$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2+0 = \frac{1}{2}\ln 2$$

12(a) $\int_0^{\pi/2}\sin^2 xdx$ [য.'০১; কু.'০২]

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$=\frac{1}{2}\{(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi)-(0-\frac{1}{2}\sin 0)\}=\frac{\pi}{4}$

12(b) $\int_0^{\pi/2}\sin^5 x\cos^4 x dx$

$=\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\cos^4 x\sin x dx$

$=\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 x)^2\cos^4 x\sin x dx$

মনে করি, $\cos x = z \therefore -\sin x\, dx = dz$.

$x=0$ হলে, $z=\cos 0=1$;

$x=\frac{\pi}{2}$ হলে, $z=\cos\frac{\pi}{2}=0$

$\therefore \int_0^{\pi/2}\sin^5 x\cos^4 x dx = -\int_1^0(1-z^2)^2 z^4 dz$

$=-\int_1^0(1-2z^2+z^4)z^4 dz$

$=-\int_1^0(z^4-2z^6+z^8)dz$

$=-\left[\frac{1}{5}z^5-2.\frac{1}{7}z^7+\frac{1}{9}z^9\right]_1^0$

$=-\{0-(\frac{1}{5}-\frac{2}{7}+\frac{1}{9})\}=\frac{63-90+35}{315}$

$=\frac{98-90}{315}=\frac{8}{315}$

12(c) ধরি, $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{(1+\sin x)^3}dx$

এবং $z=1+\sin x \quad dz=\cos x dx$

সীমা: $x=0$ হলে $z=1$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ হলে $z=2$

$\therefore I=\int_1^2\frac{dz}{z^3}=\int_1^2 z^{-3}dz=\left[\frac{z^{-2}}{-2}\right]_1^2=\left[-\frac{1}{2z^2}\right]_1^2$

$=-\frac{1}{2}(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2})=-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}-1)=\frac{3}{8}$

13. ধরি, $I=\int_0^1\frac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ [প্র.ভ.প.'০৪]

এবং $z=\cos^{-1}x \quad dz=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

সীমা: $x=0$ হলে $z=\frac{\pi}{2}$ এবং $x=1$ হলে $z=0$

$\therefore I=-\int_{\pi/2}^0 z dz=-\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\pi/2}^0$

$=-\frac{1}{2}\{0-(\frac{\pi}{2})^2\}=\frac{\pi^2}{8}$

14(a) $\int_1^3\frac{2x dx}{1+x^2}=\int_1^3\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$

$=[\ln(1+x^2)]_1^3=\ln(1+9)-\ln(1+1)$

$=\ln\frac{10}{2}=\ln 5$

14(b) $\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{(2x+1)}}=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)}}$

$=\frac{1}{2}\left[2\sqrt{2x+1}\right]_0^4=\sqrt{8+1}-\sqrt{0+1}=3-1=2$

15(a) $\int\ln(x^2+1)dx$

$=\ln(x^2+1)\int dx-\int[\frac{d}{dx}\{\ln(x^2+1)\}\int dx]dx$

$=\ln(x^2+1)-\int\frac{2x}{x^2+1}.x dx$

$=x\ln(x^2+1)-2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$

$=x\ln(x^2+1)-2\int(1-\frac{1}{x^2+1})dx$

$=x\ln(x^2+1)-2(x-\tan^{-1}x)+c$

$=x\ln(x^2+1)-2x+2\tan^{-1}x)+c$

$\int_0^1\ln(x^2+1)dx=\left[x\ln(x^2+1)-2x+2\tan^{-1}x\right]_0^1$

$=\ln 2-2+2\tan^{-1}1-0$

$=\ln 2-2+2.\frac{\pi}{4}=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$

15(b) ধরি, $I=\int_2^e\{\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{(\ln x)^2}\}dx$ [প্র.ভ.প'১৪,'০২]

এবং $\ln x=y\Rightarrow x=e^y \quad dx=e^y dy$

$\therefore \int\{\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{(\ln x)^2}\}dx=\int\{\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\}e^y dy$

$=\int e^y\{\frac{1}{y}+D(\frac{1}{y})\}dy=\frac{e^y}{y}+c=\frac{x}{\ln x}$

$\therefore I=\left[\frac{x}{\ln x}\right]_2^e=\frac{e}{\ln e}-\frac{2}{\ln 2}=e-\frac{2}{\ln 2}$

16(a) $\int_0^1\frac{3\,dx}{1+x^2}=3[\tan^{-1}x]_0^1$

$=3(\tan^{-1}1-\tan^{-1}0)=\frac{3\pi}{4}$

16(b) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{d(\sin x)}{1^2+(\sin x)^2}$

$=[\tan^{-1}(\sin x)]_0^{\pi/2}=\tan^{-1}(\sin\frac{\pi}{2})-\tan^{-1}(\sin 0)$

$=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$

17(a) $\int_{-1}^2\frac{dx}{x^2-9}=\int_{-1}^2\frac{dx}{x^2-3^2}$

$=\left[\frac{1}{2.3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\right]_{-1}^2$

$=\frac{1}{6}\{\ln\left|\frac{2-3}{2+3}\right|-\ln\left|\frac{-1-3}{-1+3}\right|\}$

$=\frac{1}{6}(\ln\frac{1}{5}-\ln 2)=\frac{1}{6}\ln\frac{1}{5\times 2}=\frac{1}{6}\ln(0\cdot 1)$

17(b) $\int_0^{a/2}\frac{1}{a^2-x^2}dx=\left[\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right]_0^{a/2}$

$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+\frac{a}{2}}{a-\frac{a}{2}}\right|=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{3a}{a}\right|=\frac{1}{2a}\ln 3$

18(a) $\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left[\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

$=\sin^{-1}\frac{a}{a}-\sin^{-1}\frac{0}{a}=\sin^{-1}1-\sin^{-1}0=\frac{\pi}{2}$

18(b) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ **[কু.বো.'০১; প্র.ভ.প.'৮৩]**

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{\sqrt{3}dx}{\sqrt{2^2-(\sqrt{3}x)^2}}=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]_0^1$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin^{-1}0)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{3}-0)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

18 (c) ধরি, $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$ এবং

$\sin x=z$. তাহলে $\cos x dx=dz$

সীমা : $x=0$ হলে $z=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ হলে $z=1$

$\therefore I=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{2^2-z^2}}=\left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1$

$=\sin^{-1}\frac{1}{2}-\sin^{-1}0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$

18 (d) $\int_2^3\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$ **[প্র.ভ.প.'০১,'০৩]**

$=\int_2^3\frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x^2-2x+1)-1}}$

$=\int_2^3\frac{d(x-1)}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-1}}$

$=[\sec^{-1}(x-1)]_2^3=\sec^{-1}(3-1)-\sec^{-1}(2-1)$

$=\sec^{-1}2-\sec^{-1}1=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}$

19. $\int_0^a\frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$ **[প্র.ভ.প. '০০]**

$=\int_0^a\frac{x^2(\frac{a^2}{x^2}-1)}{\{x(\frac{a^2}{x}+x)\}^2}dx=\int_0^a\frac{(\frac{a^2}{x^2}-1)}{(\frac{a^2}{x}+x)^2}dx$

$=\int_0^a\frac{-(-\frac{a^2}{x^2}+1)}{(\frac{a^2}{x}+x)^2}dx=-\left[-\frac{1}{\frac{a^2}{x}+x}\right]_0^a$

$=\left[\frac{x}{a^2+x^2}\right]_0^a=\frac{a}{a^2+a^2}-0=\frac{1}{2a}$

20. $\int_8^{27}\frac{dx}{x-x^{1/3}}=\int_8^{27}\frac{dx}{x(1-x^{-2/3})}$

ধরি $x^{-\frac{2}{3}}=z$. তাহলে $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}dx=dz$

$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\frac{dx}{x}=dz \Rightarrow -\frac{2}{3}z\frac{dx}{x}=dz$

$\Rightarrow \frac{dx}{x}=-\frac{3}{2}\frac{dz}{z}$

সীমা : $x=8$ হলে $z=2^{-2}=\frac{1}{4}$ এবং

$x=27$ হলে $z=3^{-2}=\frac{1}{9}$

$\therefore \int_8^{27}\frac{dx}{x-x^{1/3}}=-\frac{3}{2}\int_{1/4}^{1/9}\frac{dz}{z(1-z)}$

$=\frac{3}{2}\int_{1/4}^{1/9}\{\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\}dz$

$=\frac{3}{2}\left[\ln|z-1|-\ln|z|\right]_{1/4}^{1/9}=\frac{3}{2}\left[\ln|\frac{z-1}{z}|\right]_{1/4}^{1/9}$

$=\frac{3}{2}\{\ln|\frac{\frac{1}{9}-1}{\frac{1}{9}}|-\ln|\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}}|\}$

$=\frac{3}{2}\{\ln|-8|-\ln|-3|\}=\frac{3}{2}(\ln 8-\ln 3)$

$=\frac{3}{2}\ln\frac{8}{3}$

21. $\int_{-1}^{1}\frac{1-x}{1+x}dx$ **[প্র.ভ.প.'৮৪]**

$=\int_{-1}^{1}\frac{-(1+x)+2}{1+x}dx=\int_{-1}^{1}(-1+\frac{2}{1+x})dx$

$=\left[-x+2\ln|1+x|\right]_{-1}^{1}$

$=-1+2\ln|1+1|-(1+2\ln|1-1|)$

$=-1+2\ln 2-1-2\ln 0$

$=2(\ln 2-1)$

প্রশ্নমালা X E

1(a) Sol^n : $\int\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+c$

Ans. **A**

(b) Sol^n : $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$

$\therefore$ Ans. **B**

(c) Sol^n : : ক্যালকুলেটরের সাহায্যে

$\int_0^{\pi/2}\cos^5 x dx=0.533$,যা 8/15 এর সমান।

Ans. D.

(d) Sol^n : ন্যূনতম হতে হলে, $\frac{d}{dx}\{F(x)\}=0$ হতে হবে।

এখানে, $\frac{d}{dx}\{F(x)\}=\frac{t-3}{t^2+7}=0\Rightarrow t=3$

$\therefore$ Ans. D.

(e) $y=\frac{1}{2}x^2+1$ পরাবৃত্ত ও তার উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

$Sol^n.: x^2=2y-2=2(y-1)=4\times\frac{1}{2}(y-1)$

পরাবৃত্তের শীর্ষ $(0,1)$, উপকেন্দ্রিক লম্ব, $y-1=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y=\frac{3}{2}$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\int_1^{3/2}xdy$

$=\int_1^{3/2}\sqrt{2(y-1)}dy=0.666=\frac{2}{3}$ Ans. C

(f) Sol^n : সবগুলি তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. D

(g) Sol^n : $\int\frac{dx}{ay-bx}=-\frac{1}{b}\int\frac{d(ay-bx)}{ay-bx}$

$=-\frac{1}{b}\ln(ay-bx)+c$ $\therefore$ Ans. **A**

(h) Sol^n : $\int\frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x)}{\sqrt{3^2-(4x)^2}}$

$=\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{3}+c$ $\therefore$ Ans. **B**

(i) Sol^n : $\int_0^{1/a}d(\tan^{-1}ax)=\left[\tan^{-1}ax\right]_0^{1/a}$

(j) Sol^n : কৌশল : $\int_a^b f(x)=\int_{a+c}^{b+c}f(x-c)$

এখানে, $\int_0^4 f(x)dx = \int_{0-1}^{4-1} f(x+1)dx$

$$= \int_{-1}^{3} f(x+1)dx = 6$$

(k) Sol^n : $pv = 5 \Rightarrow p = \frac{5}{v}$

$$\int_1^2 pdv = \int_1^2 \frac{5}{v}dv = 5\int_1^2 \frac{1}{v}dv$$
$$= 5(\ln 2 - \ln 1) = 5\ ln2$$

(*l*) Sol^n : ধনাত্মক x এর জন্য $F(x) = \int_1^x \ln t dt$ হলে

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \ln t dt\right) = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

(m) Sol^n : $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ৰেত্রফল $= \pi a^2$

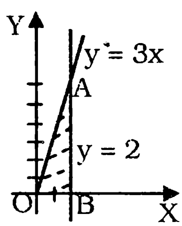
$y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ ও $y = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ৰেত্রের ৰেত্রফল = অর্ধবৃত্তের ৰেত্রফল $= \frac{1}{2}\pi a^2$

(n) Sol^n : রেখাঙ্কিত জায়গার ৰেত্রফল $= \int_2^5 ydx$

$$= \int_2^5 x^2 dx == \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \frac{1}{3}(125 - 8) = 39$$

2.(a) $y = 3x$ সরলরেখা , x-অক্ষ এবং কোটি $x = 2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $y = 3x$ সরলরেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 2$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



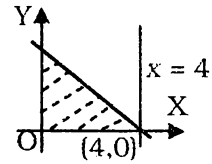
$= \int_0^2 y\,dx = \int_0^2 3x\,dx$

$= 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(2^2 - 0) = 6$ বর্গ একক।

2(b) $3x + 4y = 12$ সরলরেখা এবং স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৩]

সমাধান: $3x + 4y = 12$ অর্থাৎ $y = 3 - \frac{3}{4}x$ সরলরেখা x অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = প্রদত্ত রেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



$= \int_0^4 y\,dx$

$= \int_0^4 (3 - \frac{3}{4}x)dx$

$= \left[3x - \frac{3}{4}.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 12 - \frac{3}{8}.16 = 6$ বর্গ একক।

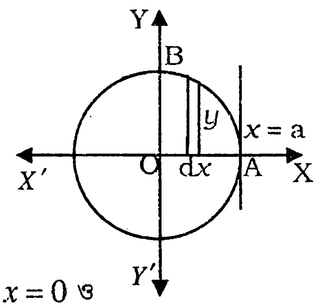
3.(a) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'০৬,'০৯;ব.'১৩; প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ a ।

$x^2 + y^2 = a^2$

$\Rightarrow y^2 = a^2 - x^2$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$



ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল = $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = a$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \int_0^a y\,dx$

$= \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

$= \left[\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 = \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{a^2\pi}{4}$

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = 4 × ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

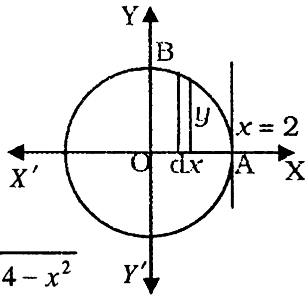
$= 4 \times \frac{a^2\pi}{4}$ বর্গ একক $= a^2\pi$ বর্গ একক ।

3(b) $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০৭]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 2

$x^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow y^2 = 4 - x^2$



$\Rightarrow y = \pm\sqrt{4-x^2}$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $= y = \sqrt{4-x^2}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 2$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^2 y\,dx = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{2^2-x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{2^2-x^2}}{2} + \frac{2^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{2}\sin^{-1}1 = 2.\frac{\pi}{2} = \pi$$

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= 4 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $= 4\pi$ বর্গ একক

3(c) $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

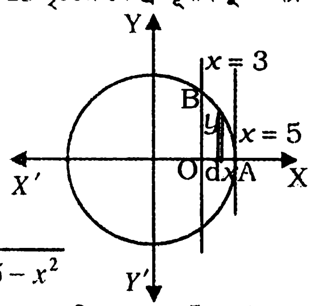
[ঢা.'০৫,'০৯,'১৪; রা.'০৯,'১৪; য.'১৩; কু.,চ.'১৪]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 5।

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\Rightarrow y^2 = 25 - x^2$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{25-x^2}$$



ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $= y = \sqrt{25-x^2}$

বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 3$ ও $x = 5$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_3^5 y\,dx$

$$= \int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = \int_3^5 \sqrt{5^2-x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{5^2-x^2}}{2} + \frac{5^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}\right]_3^5$$

$$= (0 + \frac{25}{2}\sin^{-1}1) - (\frac{3\sqrt{25-9}}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5})$$

$$= \frac{25}{2}.\frac{\pi}{2} - \frac{3\times4}{2} - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$$= \frac{25\pi}{4} - 6 - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\times(\frac{25\pi}{4} - 6 - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5})$

$= (\frac{25\pi}{2} - 12 - 25\sin^{-1}\frac{3}{5})$ বর্গ একক।

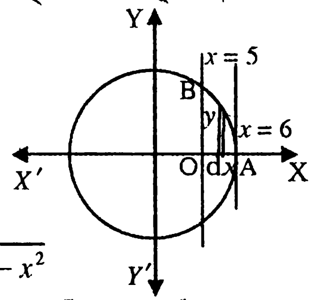
3(d) $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্ত এবং $x = 5$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 6।

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$\Rightarrow y^2 = 36 - x^2$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{36-x^2}$$



ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $= y = \sqrt{36-x^2}$

বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 5$ ও $x = 6$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_5^6 y\,dx$

$$= \int_5^6 \sqrt{36-x^2}\,dx = \int_5^6 \sqrt{6^2-x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{6^2-x^2}}{2} + \frac{6^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{6}\right]_5^6$$

$$= (0 + \frac{36}{2}\sin^{-1}1) - (\frac{5\sqrt{36-25}}{2} + \frac{36}{2}\sin^{-1}\frac{5}{6})$$

$$= 18.\frac{\pi}{2} - \frac{5\sqrt{11}}{2} - 18\sin^{-1}\frac{5}{6}$$

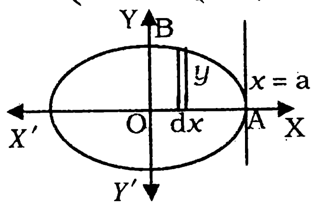
$$= 9\pi - \frac{5\sqrt{11}}{2} - 18\sin^{-1}\frac{5}{6}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2[9\pi - \frac{5\sqrt{11}}{2} - 18\sin^{-1}\frac{5}{6}]$

$= (18\pi - 5\sqrt{11} - 36\sin^{-1}\frac{5}{6})$ বর্গ একক।

4. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ **উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০২; রা.'০৮; সি.'০৮; দি.'১৪]**

সমাধান ঃ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ।



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow \dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2}$

$\Rightarrow y^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) \Rightarrow y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল =

$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x=0$ ও x = a রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$=\int_0^3 y\,dx=\int_0^a \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

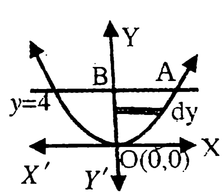
$=\dfrac{b}{a}\left[\dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right]_0^a$

$=\dfrac{b}{a}(\dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}1)=\dfrac{ab}{2}.\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{ab\pi}{4}$ বর্গ একক।

প্রদত্ত উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল = 4 × ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $=4\times\dfrac{ab\pi}{4}=ab\pi$ বর্গ একক ।

5. (a) $y=4x^2$ **পরাবৃত্ত এবং** $y=4$ **সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু.'০১]**

সমাধান ঃ $y=4x^2$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $O(0,0)$.



$y=4x^2 \Rightarrow x^2=\dfrac{1}{4}y$

$\Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{y}$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল =

$x=\dfrac{1}{2}\sqrt{y}$ বক্ররেখা, y-অক্ষ এবং $y=0$ ও $y=4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\int_0^4 x\,dy=\dfrac{1}{2}\int_0^4\sqrt{y}dy$

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^4=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}\times 8=\dfrac{8}{3}$ বর্গএকক

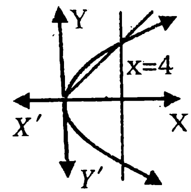
$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = 2 × ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$=\dfrac{16}{3}$ বর্গএকক ।

5(b) $y^2=4x$ **পরাবৃত্ত এবং** $y=x$ **সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

[ঢা.'০৩,'১৩; সি.'০৯; '১১; ব.'১০; চ.,কু.'১৩]

সমাধান ঃ $y=x$ হতে y এর মান



$y^2=4x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2=4x \Rightarrow x=0, 4$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল =

$y_1=2\sqrt{x}$ বক্ররেখা ও $y_2=x$ সরলরেখা এবং $x=0$ ও $x=4$ রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

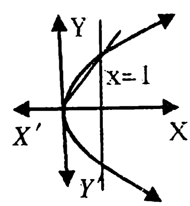
$=\int_0^4(y_1-y_2)\,dx=\int_0^4(2\sqrt{x}-x)\,dx$

$=\left[2\dfrac{x^{3/2}}{3/2}-\dfrac{x^2}{2}\right]_0^4=2\times\dfrac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{4^2}{2}$

$=\dfrac{32}{3}-8=\dfrac{32-24}{3}=\dfrac{8}{3}$ বর্গ একক ।

5(c) $y^2=4x$ **পরাবৃত্ত এবং** $y=2x$ **সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'০২; চ.'১০]**

সমাধান ঃ $y=2x$ হতে y এর মান



$y^2=4x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$4x^2=4x \Rightarrow x=0, 1$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল =

$y_1=2\sqrt{x}$ বক্ররেখা ও $y_2=2x$ সরলরেখা এবং $x=0$ ও $x=1$ রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

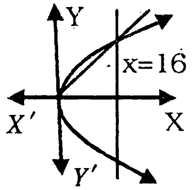
$=\int_0^1(y_1-y_2)\,dx=\int_0^2(2\sqrt{x}-2x)\,dx$

$=\left[2\times\dfrac{x^{3/2}}{3/2}-2.\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1=2\times\dfrac{2}{3}-1$

$=\dfrac{4}{3}-1=\dfrac{4-3}{3}=\dfrac{1}{3}$ বর্গ একক ।

5(d) $y^2 = 16x$ **পরাবৃত্ত এবং** $y = x$ **সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [সি.'০২]

সমাধান ঃ $y = x$ হতে y এর মান $y^2 = 16x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,



$x^2 = 16x \Rightarrow x = 0, 16$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $y_1 = 4\sqrt{x}$ বক্ররেখা ও $y_2 = x$ সরলরেখা এবং $x = 0$ ও $x = 16$ রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^{16} (y_1 - y_2)\, dx = \int_0^{16} (4\sqrt{x} - x)\, dx$$

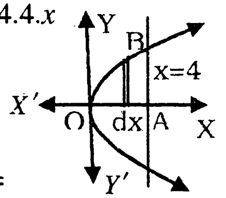
$$= \left[4 \times \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{16} = 4 \times \frac{2}{3}(16)^{\frac{3}{2}} - \frac{16^2}{2}$$

$$= \frac{512}{3} - 128 = \frac{512 - 384}{3} = \frac{128}{3}$$ বর্গ একক ।

5(e) $y^2 = 16x$ **পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [সি.'০৫]

সমাধান ঃ $y^2 = 16x \Rightarrow y^2 = 4.4.x$

পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x = 4$.



$y^2 = 16x \Rightarrow y = \pm 4\sqrt{x}$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল = $y = 4\sqrt{x}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^4 y\, dx = \int_0^4 4\sqrt{x} dx$$

$$= 4\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = 4 \times \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} \times 8 = \frac{64}{3}$$ বর্গএকক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $2 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{128}{3}$$ বর্গএকক ।

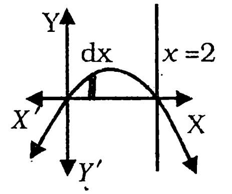
6.(a) $y = 2x - x^2$ **বক্ররেখা এবং** x**-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [রা.'০১]

সমাধান ঃ $y = 2x - x^2 \cdots (1)$

x-অক্ষের সমীকরণ $y = 0 \cdots (2)$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই,

$0 = 2x - x^2 \Rightarrow x = 0, 2$



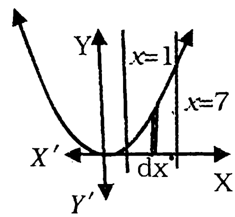
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = প্রদত্ত বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 2$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^2 y\, dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx$$

$$= \left[2.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$ বর্গ একক

5(b) $y = x^2$ **বক্ররেখা,** x**-অক্ষ এবং** $x = 1$ **ও** $x = 7$ **রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [কু.'০২]

সমাধান ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $x = \sqrt{y}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



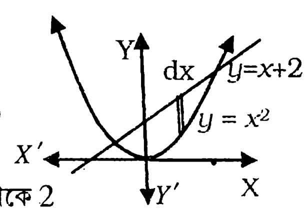
$$= \int_1^7 y\, dx = \int_1^7 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^7$$

$$= \frac{1}{3}(343 - 1) = 144$$ বর্গ একক

6(c) $y = x^2$ **বক্ররেখা এবং** $x - y + 2 = 0$ **সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [সি.'০৩]

সমাধান ঃ $y = x^2 \cdots\cdots (1)$ হতে y এর মান $x - y + 2 = 0$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x - x^2 + 2 = 0$



$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$

$\Rightarrow x = -1, 2$

এখানে x এর সীমা -1 থেকে 2

এবং $y_1 = x + 2$, $y_1 = x^2$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $\int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)\, dx$

$$= \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$= \frac{48-16-3-2}{6} = \frac{48-21}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$ বর্গএকক

7.(a) $x^2+y^2=1$ ও $y^2=1-x$ বক্ররেখা দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০১]

সমাধান ঃ $y^2=1-x=-(x-1)$ হতে y^2 এর মান $x^2+y^2=1$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

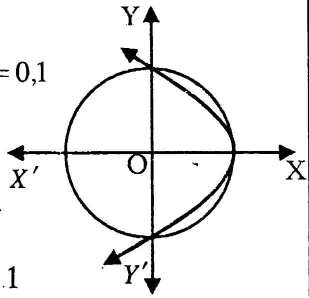
$x^2+1-x=1$

$\Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0,1$

$x=1$ হলে $y=0$ এবং

$x=0$ হলে $y=\pm1$

বক্ররেখা দুইটির ছেদবিন্দু (1,0), (0,1), (0,–1)



এখানে x এর সীমা 0 থেকে 1

এবং $y_1=\sqrt{1-x^2}$ $y_1=\sqrt{1-x}$.

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^1 (y_1-y_2)\,dx$

$=2\int_0^1 (\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x})\,dx$

$= 2\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}x+\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1$

$= 2(\frac{1}{2}\sin^{-1}1-\frac{2}{3})=2(\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$

$= 2(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3})$ বর্গ একক

7(b) দেখাও যে, $y^2=4ax$ এবং $x^2=4ay$ পরাবৃত্ত দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}a^2$

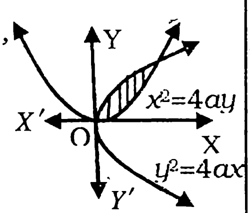
[সি. '০৪; ঢা. '০৮; কু. '০৮; দি.'০৯; প্র.ভ.প.'০৫]

প্রমাণ ঃ $x^2=4ay \Rightarrow y=\frac{x^2}{4a}$ হতে y এর মান $y^2=4ax$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$(\frac{x^2}{4a})^2=4ax \Rightarrow x^4=64a^3x$

$\Rightarrow x(x^3-64a^3)=0$

$\Rightarrow x=0,4a$



এখানে x এর সীমা 0 থেকে $4a$ এবং

$y_1=2\sqrt{a}\sqrt{x}$, $y_2=\frac{1}{4a}x^2$.

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^1 (y_1-y_2)\,dx$

$= \int_0^{4a} (2\sqrt{a}\sqrt{x}-\frac{1}{4a}x^2)\,dx$

$= \left[2\sqrt{a}\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{4a}.\frac{x^3}{3}\right]_0^{4a}$

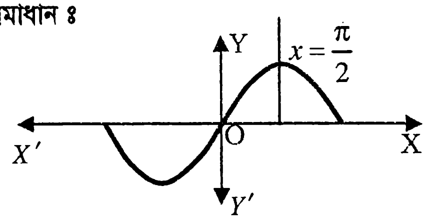
$= \frac{4\sqrt{a}}{3}(4a)^{3/2}-\frac{1}{12a}.64a^3$

$= \frac{4\sqrt{a}}{3}\times 8a\sqrt{a}-\frac{16}{3}a^2$

$= \frac{32}{3}a^2-\frac{16}{3}a^2 = \frac{16}{3}a^2$ বর্গ একক।

8.(a) $y=\sin x$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [চ.'০৫]

সমাধান ঃ



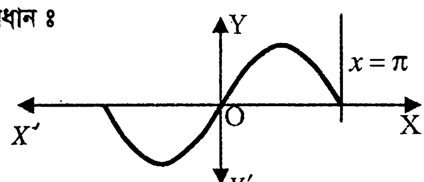
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $y=\sin x$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=\frac{\pi}{2}$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \int_0^{\pi/2} y\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$

$= [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0 = 1$ বর্গ একক।

8(b) x- অক্ষ এবং $y=\sin x$ বক্ররেখার একটি চাপ দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ



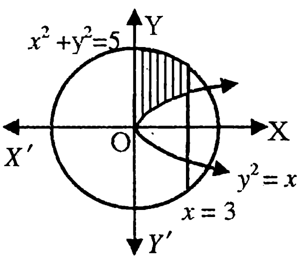
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $y=\sin x$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=\pi$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের

ক্ষেত্রফল $= \int_0^{\pi} y\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx$

$= [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0$

$= 1 + 1 = 2$ বর্গ একক।

9.



চিত্রে, x = 3 সরলরেখা $x^2+y^2=25$ বৃত্তকে এবং $y^2=x$ পরাবৃত্তকে ছেদ করেছে।

(a) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

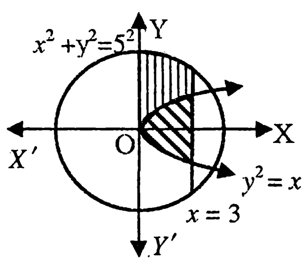
[সি.'০৯; কু.'১১; রা.'১১,'১৪; ঢা.'১১; য.'১০]

(b) প্রদত্ত বৃত্ত ও সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[য,'১৩; ঢা.'১৪; কু., রা.,চ.,'১৪]**

(c) প্রদত্ত পরাবৃত্ত ও সরলরেখার সাথে y = 0 সরলরেখা যে ক্ষেত্র তৈরি করে তার এবং রেখাঙ্কিত এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

সমাধানঃ (a) প্রশ্নমালা XD এর উদাহরণ 5 দ্রষ্টব্য।

(b) প্রশ্নমালা XE এর 3(c) দ্রষ্টব্য।



(c) নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^3 \sqrt{x}\,dx = 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^3$

$= 2\times\frac{2}{3}(3)^{3/2} = \frac{4}{3}\times 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ বর্গ একক।

রেখাঙ্কিত এলাকার ক্ষেত্রফল $= \int_0^3 (y_1 - y_2)dx$, যেখানে

$y_1 = \sqrt{5^2 - x^2}, y_1 = \sqrt{x}$

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^3 (\sqrt{5^2-x^2} - \sqrt{x})dx$

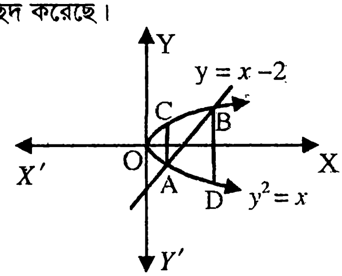
$= \left[\frac{x\sqrt{25-x^2}}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5} - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^3$

$= \frac{3\sqrt{25-3^2}}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} - 2\sqrt{3}$

$= \frac{3\times 4}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} - 2\sqrt{3}$

$= 6 - 2\sqrt{3} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$

10. চিত্রে $y = x - 2$ সরলরেখা $y^2 = x$ পরাবৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে।



(a) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[সি.'০৯; ঢা.,রা.,কু.'১০; দি.'১৩]

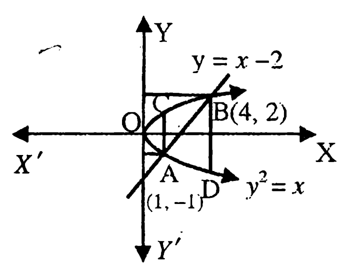
(b) $y = x - 2$ সরলরেখা ও $y^2 = x$ পরাবৃত্ত দ্বারা অবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[DU 12-13, BUET 13-14]

(c) A ও B বিন্দুগামী y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা পরাবৃত্তটিকে যথাক্রমে D ও C বিন্দুতে ছেদ করে। ABC ও ADBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ (a) প্রশ্নমালা XD এর 9(d) দ্রষ্টব্য।

(b)



$y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2$ হতে x এর মান $y^2 = x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই, $y^2 = y + 2 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0$

$\Rightarrow (y-2)(y+1) = 0$

$y = -1, 2$ এবং $x = 1, 4$

এখানে y এর সীমা -1 থেকে 2 এবং $x_1 = y + 2$, $x_2 = y^2$.

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_{-1}^{2}(x_1 - x_2)dy$

$= \int_{-1}^{2}(y + 2 - y^2)dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2}$

$= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - (\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3})$

$= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3}$

$= \frac{12 + 24 - 16 - 3 + 12 - 2}{6}$

$= \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$ বর্গ একক।

(c) এখানে, A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, -1)$ ও $(2, 4)$.

AOC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $y = \sqrt{x}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 1$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ $= 2\int_0^1 y\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{x}dx$

$= 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ বর্গ একক

এখন, ABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AOB ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল − AOC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{9}{2} - \frac{4}{3} = \frac{27 - 8}{6} = \frac{19}{6}$ বর্গ একক।

এবং ADBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $y = \sqrt{x}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ

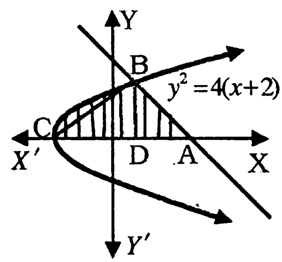
$= 2\int_1^4 ydx = 2\int_1^4 \sqrt{x}dx = 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4$

$= 2 \times \frac{2}{3}(4^{3/2} - 1) = \frac{4}{3} \times (8 - 1)$

$= \frac{28}{3}$ বর্গ একক

11. পাশের চিত্রে, $y^2 = 4(x+2)$ বক্ররেখাটি x অক্ষকে C বিন্দুতে ও AB রেখাকে B বিন্দুতে ছেদ করে। AB রেখার ঢাল −1 ও B বিন্দুর y স্থানাঙ্ক 6।

সমাধান ঃ



(a) ধরি, AB রেখার সমীকরণ $y = -x + c$ (i)

এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha \quad 6)$ যা (i) রেখা ও $y^2 = 4(x+2)$ বক্ররেখার ছেদবিন্দু।

$\therefore\ 6 = -\alpha + c \Rightarrow c = \alpha + 6$ এবং

$6^2 = 4(\alpha + 2) \Rightarrow \alpha + 2 = 9 \Rightarrow \alpha = 7$

$\therefore\ c = 7 + 6 = 13$

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (7, 6) এবং AB রেখার সমীকরণ

$y = -x + 13 \Rightarrow x + y = 13 \Rightarrow \frac{x}{13} + \frac{y}{13} = 1$

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (13,0)

(b) প্রদত্ত বক্ররেখা x অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ C বিন্দুর y স্থানাঙ্ক 0

$y^2 = 4(x+2)$ এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x = -2$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, 0)$

এখন, ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 13 & 7 & -2 & 13 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right|$

$= \frac{1}{2}|78+12| = \frac{90}{2} = 45$ বর্গ একক।

(c) B হতে AC এর উপর BD লম্ব টানি।

ΔBCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(CA \times BD)$

$= \frac{1}{2} \times |-2-7| \times 6 = 27$ বর্গ একক।

$y = 2\sqrt{x+2}$ বক্ররেখা, x = 7 সরলরেখা ও x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_{-2}^{7} 2\sqrt{x+2}dx$

$= 2\left[\frac{(x+2)^{3/2}}{3/2}\right]_{-2}^{7}$

$= \frac{4}{3}\{(7+2)^{3/2} - (-2+2)^{3/2}\}$

$= \frac{4}{3} \times 27 = 36$ বর্গ একক।

দাগাঙ্কিত ABC সম্পূর্ণ এলাকার ক্ষেত্রফল

$= 45 + (36-27) = 54$ বর্গ একক।

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $y = x^3$ **বক্ররেখা,** x**-অক্ষ এবং** $y = 0$, $x = 1$ **ও** $x = 3$ **সরলরেখা তিনটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_1^3 y\,dx = \int_1^3 x^3\,dx$

$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{1}{4}(81-1) = \frac{80}{4} = 20$ বর্গ একক।

2. $xy = c^2$ **অধিবৃত্ত,** x**-অক্ষ এবং** $x = a$ **ও** $x = b$ **রেখা দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_a^b y\,dx = \int_a^b \frac{c^2}{x}dx$

$= c^2[\ln x]_a^b = c^2(\ln b - \ln a) = c^2 \ln\frac{b}{a}$

3. দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $a^2/6$.

প্রমাণ ঃ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x}$

$\Rightarrow y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x$

এখানে x এর সীমা 0 হতে a

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^a y\,dx$

$= \int_0^a (a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x)\,dx$

$= \left[ax - 2\sqrt{a}.\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{x^2}{2}\right]_0^a$

$= a^2 - 2\sqrt{a}.\frac{2}{3}a^{3/2} + \frac{a^2}{2}$

$= a^2 - \frac{4}{3}a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{6a^2 - 8a^2 + 3a^2}{6} = \frac{a^2}{6}$

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. পাঁচটি কোটি ব্যবহার করে মান নির্ণয় কর $\int_{1.5}^{3.5} \ln x\,dx$, $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$

পরীক্ষণের নাম ঃ ছয়টি কোটি ব্যবহার করে $\int_{1.5}^{3.5} \ln x\,dx$ এর মান নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ক্ষেত্রফল $A = \int_{1.5}^{3.5} \ln x\,dx$

পাঁচটি কোটির জন্য $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2})$ ব্যবহার করে $\int_{1.5}^{3.5} \ln x\,dx$ এর মান নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. $1.5 \leq x \leq 3.5$ ব্যবধিতে সমদূরবর্তী 5টি কোটি y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর জন্য এই জন্য ব্যবধির নিম্নপ্রান্ত ও উর্ধ্বপ্রান্তের বিয়োগফলকে (5 − 1) = 4 দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

$\therefore \quad h = \frac{3.5-1.5}{4} = 0.5$

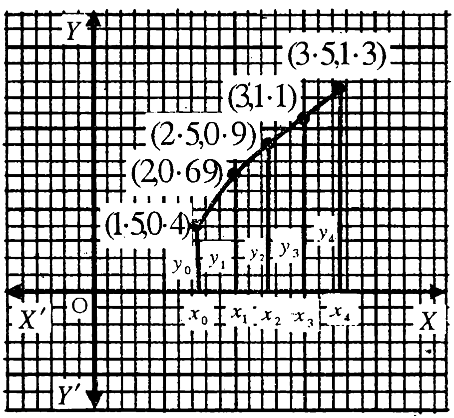
2. h এর মান হতে $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র ব্যবহার করে x_1, x_2, x_3, x_4 নির্ণয় করি যেখানে $x_0 = 1 \cdot 5$.

3. $y = f(x) = \ln x$ থেকে y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর মান নির্ণয় করি:

$x_0 = 1 \cdot 5$	$y_0 = \ln 1 \cdot 5 = 0 \cdot 405$
$x_1 = x_0 + h = 2$	$y_1 = \ln 2 = 0 \cdot 693$
$x_2 = x_1 + h = 2 \cdot 5$	$y_2 = \ln 2 \cdot 5 = 0 \cdot 916$
$x_3 = x_2 + h = 3$	$y_3 = \ln 3 = 1 \cdot 09$
$x_4 = x_3 + h = 3 \cdot 5$	$y_4 = \ln 3 \cdot 5 = 1 \cdot 25$

4. x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 5 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।

5. প্রাপ্ত পাঁচটি কোটিকে x অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 4টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।



হিসাব ঃ $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2})$

$= 0 \cdot 5(\frac{0 \cdot 405}{2} + 0 \cdot 693 + 0 \cdot 916 + 1 \cdot 09$

$+ \frac{1 \cdot 25}{2}) = 1 \cdot 76325$ বর্গ একক (প্রায়)।

ফলাফল ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$A = \int_{1 \cdot 5}^{3 \cdot 5} \ln x \, dx = 1 \cdot 76325$ বর্গ একক (প্রায়)।

মন্তব্য : n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত ক্ষুদ্র হবে এবং A এর মান অধিকতর শুদ্ধ হবে।

পরীক্ষণের নাম পাঁচটি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ এর মান নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ক্ষেত্রফল $A = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

পাঁচটি কোটির জন্য $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2})$ ব্যবহার করে $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ এর মান নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. $0 \le x \le 1$ ব্যবধিতে সমদূরবর্তী 5টি কোটি y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর জন্য এই জন্য ব্যবধির নিম্নপ্রান্ত ও ঊর্ধ্বপ্রান্তের বিয়োগফলকে (5 – 1) = 4 দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

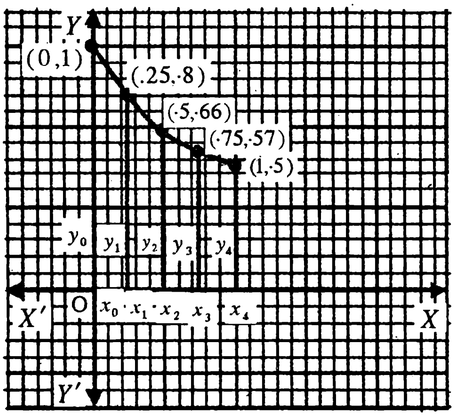
$$h = \frac{1-0}{4} = 0 \cdot 25$$

2. h এর মান হতে $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র ব্যবহার করে x_1, x_2, x_3, x_4 নির্ণয় করি যেখানে $x_0 = 0$.

3. $y = f(x) = \frac{1}{1+x}$ থেকে y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর মান নির্ণয় করি:

$x_0 = 0$	$y_0 = \frac{1}{1+0} = 1$
$x_1 = x_0 + h = 0 \cdot 25$	$y_1 = \frac{1}{1+0 \cdot 25} = 0 \cdot 8$
$x_2 = x_1 + h = 0 \cdot 5$	$y_2 = \frac{1}{1+0 \cdot 5} = 0 \cdot 66$
$x_3 = x_2 + h = 0 \cdot 75$	$y_3 = \frac{1}{1+0 \cdot 75} = 0 \cdot 57$
$x_4 = x_3 + h = 1$	$y_4 = \frac{1}{1+1} = 0 \cdot 5$

x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 15 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।



5. প্রাপ্ত পাঁচটি কোটিকে x অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 4টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।

হিসাব ঃ $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2})$

$= 0{\cdot}25(\frac{1}{2} + 0{\cdot}8 + 0{\cdot}66 + 0{\cdot}57$

$+ \frac{0{\cdot}5}{2}) = 0{\cdot}695$ বর্গ একক (প্রায়)।

ফলাফল ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$A = \int_{1\cdot5}^{3.5} \ln x\, dx = 0{\cdot}695$ বর্গ একক (প্রায়)।

মন্তব্য : n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত ক্ষুদ্র হবে এবং A এর মান অধিকতর শুদ্ধ হবে।

2. ছয়টি কোটি ব্যবহার করে মান নির্ণয় কর $\int_1^2 x^2 dx$

পরীক্ষণের নাম ঃ ছয়টি কোটি ব্যবহার করে $\int_1^2 x^2dx$ **এর মান নির্ণয়।**

মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ক্ষেত্রফল $A = \int_1^2 x^2dx$

পাঁচটি কোটির জন্য $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2})$ ব্যবহার করে $\int_1^2 x^2dx$ এর মান নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. $1 \le x \le 2$ ব্যবধিতে সমদূরবর্তী 5টি কোটি $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর জন্য এই জন্য ব্যবধির নিম্নপ্রান্ত ও উর্ধ্বপ্রান্তের বিয়োগফলকে (6 – 1) = 5 দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

$\therefore \quad h = \frac{2-1}{5} = 0{\cdot}2$

2. h এর মান হতে $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র ব্যবহার করে x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 নির্ণয় করি যেখানে $x_0 = 1$.

3. $y = f(x) = x^2$ থেকে $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর মান নির্ণয় করি:

$x_0 = 1$	$y_0 = 1^2 = 1$
$x_1 = x_0 + h = 1{\cdot}2$	$y_1 = (1{\cdot}2)^2 = 1{\cdot}44$
$x_2 = x_1 + h = 1{\cdot}4$	$y_2 = (1{\cdot}4)^2 = 1{\cdot}96$
$x_3 = x_2 + h = 1{\cdot}6$	$y_3 = (1{\cdot}6)^2 = 2{\cdot}56$
$x_4 = x_3 + h = 1{\cdot}8$	$y_4 = (1{\cdot}8)^2 = 3{\cdot}24$
$x_4 = x_3 + h = 2$	$y_5 = (2)^2 = 4$

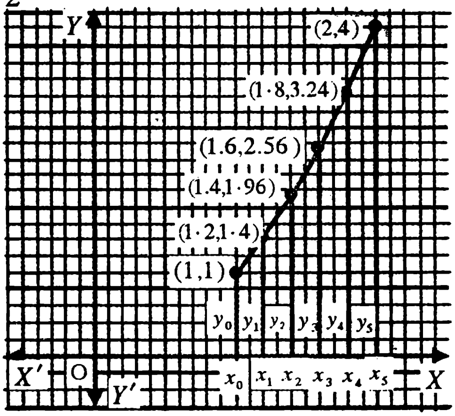
x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 5 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।

5. প্রাপ্ত ছয়টি কোটিকে x অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 5টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।

হিসাব ঃ $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2})$

$= 0{\cdot}2(\frac{1}{2} + 1{\cdot}44 + 1{\cdot}96 + 2{\cdot}56 + 3.24$

$+\frac{4}{2}) = 2{\cdot}34$ বর্গ একক (প্রায়)।



ফলাফল ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$A = \int_1^2 x^2 dx = 2{\cdot}34$ বর্গ একক (প্রায়)।

মন্তব্য : n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত ক্ষুদ্র হবে এবং A এর মান অধিকতর শুদ্ধ হবে।

ছয়টি কোটি ব্যবহার করে মান নির্ণয় কর : $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

পরীক্ষণের নাম ছয়টি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ এর মান নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ক্ষেত্রফল $A = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

পাঁচটি কোটির জন্য $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2})$ ব্যবহার করে $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ এর মান নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. $0 \le x \le 1$ ব্যবধিতে সমদূরবর্তী 5টি কোটি $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর জন্য এই জন্য ব্যবধির নিম্নপ্রান্ত ও ঊর্ধ্বপ্রান্তের বিয়োগফলকে (6 − 1) = 5 দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

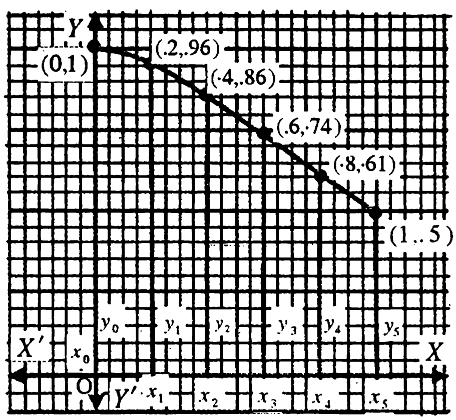
$\therefore \quad h = \frac{1-0}{5} = 0{\cdot}2$

2. h এর মান হতে $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র ব্যবহার করে x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 নির্ণয় করি যেখানে $x_0 = 0$.

3. $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ থেকে $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর মান নির্ণয় করি:

$x_0 = 0$	$y_0 = \frac{1}{1+0^2} = 1$
$x_1 = x_0 + h = 0{\cdot}2$	$y_1 = \frac{1}{1+(0.2)^2} = 0{\cdot}96$
$x_2 = x_1 + h = 0{\cdot}4$	$y_2 = \frac{1}{1+(0.4)^2} = 0{\cdot}86$
$x_3 = x_2 + h = 0{\cdot}6$	$y_3 = \frac{1}{1+(0.6)^2} = 0{\cdot}74$
$x_4 = x_3 + h = 0{\cdot}8$	$y_4 = \frac{1}{1+(0.8)^2} = 0{\cdot}61$
$x_4 = x_3 + h = 1$	$y_5 = \frac{1}{1+(1)^2} = 0{\cdot}5$

x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 20 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 20 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।



5. প্রাপ্ত ছয়টি কোটিকে x অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 5টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।

হিসাব ঃ $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2})$

$= 0{\cdot}2(\frac{1}{2} + 0{\cdot}96 + 0{\cdot}86 + 0{\cdot}74 + 0{\cdot}61$

$+ \frac{0{\cdot}5}{2}) = 0{\cdot}784$ বর্গ একক (প্রায়)।

ফলাফল ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$A = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 0{\cdot}784$ বর্গ একক (প্রায়)।

মন্তব্য : n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত ক্ষুদ্র হবে এবং A এর মান অধিকতর শুদ্ধ হবে।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$ **এর মান কত হবে? [DU 06-07,08-09;NU 06-07; KU 03-04]**

A. $\frac{\pi}{2}$ B. 1 C. 0 D. $\frac{\pi}{4}$

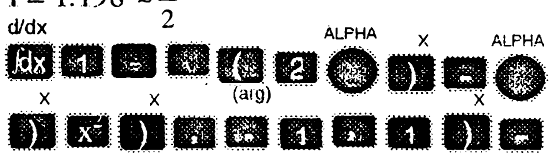
$Sol^n.\ I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = [\sin^{-1}(x-1)]_0^1 = \frac{\pi}{2}$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে Mode radian- এ নিতে হবে। অত:পর ধারাবাহিকভাবে নিম্নোক্ত Button গুলো Press করতে হবে।

$\boxed{\int dx}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{Integrand}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{UpperLt}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{Lower Lt}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

Lower Limit বা Upper Limit এর জন্য Integrand সরাসরি অসংজ্ঞায়িত হলে Lower Limit বা Upper Limit এর নিকটবর্তী মান নিতে হয়। যেমন – 0 এর পরিবর্তে 0.01 এবং 1 এর পরিবর্তে 0.99 বসানো যেতে পারে। Calculator অনেক problem calculation করতে বেশ সময় নেয়।

$I = 1.198 \approx \frac{\pi}{2}$



$1.4293 \approx \pi/2$

2. $\int_0^1 \frac{\cos^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$ **[DU,NU 05-06]**

$Sol^n.\ I = -\left[\frac{1}{2}(\cos^{-1} x)^2\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\{0 - (\frac{\pi}{2})^2\}$

$= \frac{\pi^2}{8}.\quad I = 1.2237 \approx \frac{\pi^2}{8}$ (By Calculator)

[এখানে Upper Limit 0.99 ধরা হয়েছে।]

3. $\int_0^{\pi/2} (1+\cos x)^2 \sin x dx = ?$ **[DU 03-04; RU 06-07, 07-08; BUET 08-09]**

$Sol^n\ \ I = -\left[\frac{1}{3}(1+\cos x)^3\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(1-8)$

$= \frac{7}{3}\quad I = 2.333 \approx \frac{7}{3}$ (By Calculator)

4. $\int_1^e \log_e x dx = ?$ **[DU 02-03; NU 04-05; 02-03; JU 05-06; BUET 05-06]**

$Sol^n.\ I = [(\log_e x - 1)x]_1^e = [(\log_e x - 1)x]_1^e = 1$

5. $\int_0^1 \frac{\cos^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$ **[CDU 06-07,02-03; RU 02-03; 06-07; IU 04-05]**

$Sol^n.\ I = \left[\frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\{(\frac{\pi}{2})^2 - 0\}$

$= \frac{\pi^2}{8}.\quad I = 1.02 \approx \frac{\pi^2}{8}$ (By Calculator)

[এখানে Upper Limit 0.99 ধরা হয়েছে।]

6. $\int_1^2 \frac{(x^2-1)^2 dx}{x^2} = ?$ **[JU 06-07; SU 04-05; CU 05-06]**

$Sol^n.\ I = 0.833 \approx \frac{5}{6}$ (By Calculator)

7. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx = ?$ **[CU 05-06]**

$Sol^n.\ I = 0.3809 \approx \frac{8}{21}$ (By Calculator)

8. $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4} = ?$ **[BUET 06-07]**

A. $\frac{\pi}{4}$ **B.** $\frac{\pi}{3}$ **C.** $\frac{\pi}{8}$ **D.** $\frac{2\pi}{3}$

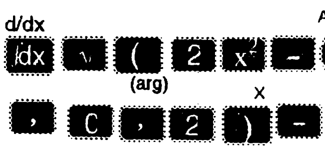
Sol^n. $I = .392699 = \frac{\pi}{8}$ (By Calculator)

9. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = ?$ **[JU 07-08; RU 06-07; KU 06-07]**

Sol^n $I = \left[\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

$= \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}a^2$ a = 2 ধরে, I = 3.1416

(By Calculator) এবং $\frac{\pi}{4}a^2 = 3.1416$



3.1416

10. $y^2 = 4x$ ও $y = x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? **[DU 05-06, 08-09]**

Sol^n $x^2 = 4x \Rightarrow x = 0,4$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)\, dx = \frac{8}{3}$ (By Calculator)

11. $y = 3x$ সরলরেখা , x অক্ষ এবং $x = 2$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? **[IU 07-08;SU 06-07]**

Sol^n. ক্ষেত্রফল $= \int_0^2 3x\, dx = \left[3.\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 6$

12. $x^2 + y^2 = a$ এর ক্ষেত্রফল কত? **[SU 04-05;CU 02-03]**

Sol^n. $x^2 + y^2 = (\sqrt{a})^2$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi(\sqrt{a})^2 = \pi a$