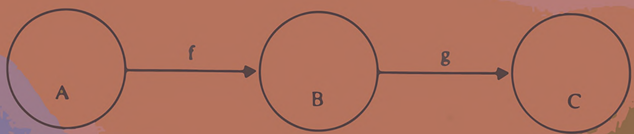
উচ্চতর গণিত

প্রথম পত্র

এস ইউ আহাম্মদ
এম এ জব্বার



জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক অনুমোদিত

আল্‌ফা প্রকাশনী - ঢাকা

পরিমার্জিত শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যসূচি অনুযায়ী প্রণীত এবং জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক
২০১৩– ২০১৪ শিক্ষাবর্ষ থেকে পাঠ্যপুস্তক হিসেবে অনুমোদিত।
স্মারক নং : শিশা : ২৮৫/১৭ (পার্ট)/ ৫৬১ তারিখ : ২৪/ ০৬/ ২০১৩

উচ্চতর গণিত

প্রথম পত্র

[একাদশ –দ্বাদশ শ্রেণির জন্য]

মোঃ সুরুজউদ্দিন আহাম্মদ, এম, এস–সি; বি, সি, এস (শিক্ষা)

অবসরপ্রাপ্ত প্রফেসর, এম, সি, কলেজ, সিলেট।

প্রাক্তন অধ্যাপক, গণিত বিভাগ ঃ এম, এম, আলি কলেজ, কাগমারী, টাংগাইল; বঙ্গবন্ধু কলেজ, গোপালগঞ্জ; জগন্নাথ কলেজ, ঢাকা; চট্টগ্রাম কলেজ; ঢাকা কলেজ; রাজশাহী কলেজ; হরগঙ্গা কলেজ, মুন্সীগঞ্জ; ফেনী কলেজ, ফেনী।

মোঃ আব্দুল জব্বার, এম, এস–সি, (ফার্স্ট ক্লাস); বি, সি, এস (শিক্ষা)

প্রাক্তন ভারপ্রাপ্ত অধ্যক্ষ, সরকারি বিজ্ঞান কলেজ, ঢাকা

প্রাক্তন সহযোগী অধ্যাপক, কুষ্টিয়া সরকারী কলেজ; ইডেন কলেজ, ঢাকা; সা'দত কলেজ, টাংগাইল; এম, এম, কলেজ, যশোর; ভিক্টোরিয়া কলেজ, নড়াইল; ইঞ্জিনিয়ারিং কলেজ, চট্টগ্রাম ও খুলনা; সাতক্ষীরা কলেজ; মনিরামপুর কলেজ, যশোর।

প্রকাশনায় ঃ

আলফা প্রকাশনী

ঢাকা।

প্রকাশক :

মোঃ কদ্দুস

আম্বিকা প্রকাশনী

৩৮/৮, বাংলাবাজার,

ঢাকা – ১১০০।

প্রথম সংস্করণ : জুন, ২০১৩ সাল।
দ্বিতীয় সংস্করণ : মার্চ, ২০১৪ সাল।

মূল্য : সাদা : ১২৫·০০ টাকা
নিউজ : ১০১·০০ টাকা
(বোর্ড কর্তৃক নির্ধারিত)

কম্পিউটার কম্পোজ :

কমিটমেন্ট কম্পিউটার

৩৮, বাংলাবাজার (৩য় তলা), ঢাকা।

মুদ্রণে :

অনিন্দ্য প্রিন্টিং প্রেস

শ্রীশ দাস লেন, ঢাকা – ১১০০।

ভূমিকা

নতুন সৃজনশীল পাঠ্যসূচি অনুযায়ী এ বইটি প্রণীত হয়েছে। গণিতের প্রতি শিক্ষার্থীদেরকে আকর্ষণীয় করার উদ্দেশ্যে আমরা নির্ধারিত বিষয়বস্তু সহজ ও সাবলীল ভাষায় উপস্থাপন করার চেষ্টা করেছি। প্রশ্নমালা ও উদাহরণমালার অঙ্কের সংখ্যা সীমিত রাখার ফলে বইটির কলেবর অযথা বৃদ্ধি করা হয়নি।

আমাদের শিক্ষকতা জীবনের দীর্ঘ অভিজ্ঞতা এ বইটি রচনায় যথেষ্ট সাহায্য করেছে বলে আমরা মনে করি। তদুপরি আমাদের রচিত "Modern plane Trigonometry", "উচ্চ মাধ্যমিক ত্রিকোণমিতি ", "উচ্চ মাধ্যমিক বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি ", "উচ্চ মাধ্যমিক জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস ", "বলবিদ্যা ও বিচ্ছিন্ন গণিত " এবং "ব্যবহারিক গণিত" অধ্যাপক অধ্যাপিকাবৃন্দ এবং শিক্ষার্থীদের মধ্যে সমাদৃত হয়েছিল বিধায় এ বইটি রচনায় আমরা যথেষ্ট উৎসাহ ও উদ্দীপনা পেয়েছি। পাঠ্যসূচিতে যে সকল বিষয়বস্তু নতুনভাবে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে তা সহজভাবে বুঝানোর জন্য চিত্র ও উদাহরণের সাহায্য নেয়া হয়েছে। আশা করি এর ফলে শিক্ষার্থীরা কঠিন বিষয়বস্তুও সহজে আয়ত্ত করতে পারবে।

বইটিকে নির্ভুল রাখার উদ্দেশ্যে সব ধরনের সতর্কতা অবলম্বন করা হয়েছে। তবু যদি কোন ত্রুটি বিচ্যুতি পরিলক্ষিত হয়, তবে তা কেহ আমাদেরকে অবগত করে পরবর্তী সংস্করণে ঐগুলি সংশোধন করার সুযোগ দিলে আমরা তাঁদের নিকট চির কৃতজ্ঞ থাকব।

যে কোন ধরনের গঠনমূলক সমালোচনা সমাদরে গ্রহণ করা হবে।

ঢাকা,
জুন, ২০১৩ সাল।

নিবেদক
এস, ইউ, আহাম্মদ।
মোঃ আব্দুল জব্বার

দ্বিতীয় সংস্করণ সম্পর্কে বক্তব্য

বহু বিজ্ঞ অধ্যাপক/অধ্যাপিকাবৃন্দের পরামর্শক্রমে এই সংস্করণে অনেক বিষয়বস্তু, উদাহরণ এবং সমস্যা (বিশেষ করে ত্রিকোণমিতিতে) সংযোজন এবং ছোট-খাটো ভুল ত্রুটি সংশোধন করা হয়েছে। যাদের সহানুভূতি এবং সহযোগিতার ফলে এই সংস্করণ বের করা সম্ভব হয়েছে তাঁদের নিকট আমরা কৃতজ্ঞতা প্রকাশ করছি। উল্লেখ্য যে, শিক্ষার্থীদের অনুশীলনের সুবিধার্থে প্রশ্নমালাতে (বিশেষ করে জ্যামিতি অংশে) একজাতীয় সমস্যাগুলি পরপর রাখার চেষ্টা করেছি।

বইটির মানোন্নয়নের জন্য যেকোনো ধরনের গঠনমূলক সমালোচনা সমাদরে গ্রহণ করা হবে।

ঢাকা,
মার্চ, ২০১৪ সাল।

নিবেদক
এস, ইউ, আহাম্মদ।
মোঃ আব্দুল জব্বার

সূচিপত্র

পাঠ্যসূচি

প্রথম অধ্যায় – ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক :

ম্যাট্রিক্স ও ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ; ম্যাট্রিক্সের সমতা, যোগ, বিয়োগ ও গুণ; নির্ণায়ক; নির্ণায়কের মান নির্ণয় (2×2এবং 3×3 আকারের); নির্ণায়কের অনুরাশি ও সহগুণক; নির্ণায়কের ধর্মাবলি; ব্যতিক্রমী (Singular) ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স; বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স; একঘাত সমীকরণ জোট (Cramer's Rule).

দ্বিতীয় অধ্যায় – ভেক্টর :

সদিক রাশির প্রতিরূপ হিসেবে ভেক্টর; জ্যামিতিক ভেক্টরের ধারক, সমতা, বিপরীত ভেক্টর, শূন্য ভেক্টর; দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতক; দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকের বিধি; সমতলে ভেক্টরের অংশক; একক ভেক্টর $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$; ভেক্টরকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ; অবস্থান ভেক্টর; দ্বিমাত্রিক জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে ভেক্টর; ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের অংশক নির্ণয়; ত্রিমাত্রিক জগতে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$; ভেক্টরকে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ; ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের যোগফল ও স্কেলার গুণিতককে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ এর মাধমে প্রকাশ, সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ; ভেক্টরের স্কেলার গুণন; স্কেলার গুণজের ধর্ম; স্কেলার গুণজ; ভেক্টরের ভেক্টর গুণন; ভেক্টর গুণজের ধর্ম; ভেক্টর গুণজ।

তৃতীয় অধ্যায়– সরলরেখা :

সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক; কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক; দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব; রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল; সঞ্চারপথ; সরলরেখার ঢাল; দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখার ঢাল; অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ; সরলরেখার সমীকরণ : (i) $y = mx + c$, (ii) $y - y_1 = m(x - x_1)$, $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, (iv) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, (v) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$; $ax + by + c = 0$ সমীকরণটি একটি সরলরেখা প্রকাশ করে; লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন; দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু; দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ; দুইটি সরলরেখার পরস্পর সমান্তরাল বা লম্ব হওয়ার শর্ত; বিভিন্ন শর্তাধীনে সরলরেখার সমীকরণ; কোন বিন্দু থেকে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব; দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ।

ব্যবহারিক : রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক; শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল; সরলরেখার সমীকরণের লেখচিত্র; লেখচিত্র হতে সরলরেখার সমীকরণ; অক্ষরেখা সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি; নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি।

চতুর্থ অধ্যায়– বৃত্ত :

মূলবিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ; মূলবিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ অঙ্কন ও অক্ষদ্বয়ের সাথে ছেদ বিন্দু নির্ধারণ; নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ; পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়; বৃত্তের স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ; বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ; স্পর্শকের দৈর্ঘ্য, দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয়।

ব্যবহারিক : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ সমীকরণের লেখচিত্র (মুক্তহস্তে ও গ্রাফ পেপারে)।

পঞ্চম অধ্যায় – বিন্যাস ও সমাবেশ :

গণনার যোজন ও গুণন বিধি; বিন্যাস; n ! এর ব্যাখ্যা; বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়ের বিভিন্ন সূত্র; সমাবেশ; সমাবেশ সংখ্যা; সম্পূরক সমাবেশ; ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ সূত্র; শর্তাধীন সমাবেশ।

ষষ্ঠ অধ্যায় – ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :

ত্রিকোণমিতিক কোণ; কোণের ডিগ্রি ও রেডিয়ান পরিমাপ; রেডিয়ান পরিমাপে বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য ও বৃত্তকলার ক্ষেত্রফলের সূত্র; ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাত; চতুর্ভাগ অনুযায়ী ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন; ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাতসমূহের মধ্যে সম্পর্ক; ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মানের পরিবর্তন; ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র।

সপ্তম অধ্যায়– সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত; যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত; ত্রিভুজের সাইন (sine) সূত্র, ত্রিভুজের কোসাইন (cosine) সূত্র।

ব্যবহারিক : ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য দেওয়া হলে ইপ্সিত কোণের মান; ত্রিভুজের কোণের পরিমাপ দেওয়া থাকলে বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত; ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি কোণের মান ও এক বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে, ইপ্সিত বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়; ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্য এবং একটি কোণের মান দেওয়া আছে, ইপ্সিত কোণের মান নির্ণয়।

অষ্টম অধ্যায় – ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র :

অন্বয় ও ফাংশন; ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ; ফাংশনের প্রকারভেদ : (১) এক–এক ফাংশন, (২) সার্বিক ফাংশন, (৩) সংযোজিত ফাংশন, (৪) অভেদক ফাংশন, (৫) ধ্রুবক ফাংশন, (৬) বিপরীত ফাংশন; সর্বদা প্রয়োজনীয় ফাংশনের স্কেচ : (১) দ্বিঘাত ফাংশন, (২) সূচক ফাংশন, (৩) লগারিদমিক ফাংশন, (৪) ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, (৫) পরমমান ফাংশন; ফাংশন ও রূপান্তরিত ফাংশনের স্কেচ; ফাংশন ও তার বিপরীত ফাংশনের স্কেচ; ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায় নির্ণয়।

ব্যবহারিক : অক্ষরেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয়, নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয়; ফাংশনের এবং রূপান্তরিত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন; একই লেখচিত্রে ফাংশন ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন; দ্বিঘাত ফাংশন, সূচক ফাংশন, লগারিদমিক ফাংশন, ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, পরমমান ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।

নবম অধ্যায় – অন্তরীকরণ :

লিমিট; ঢাল; ফাংশনের লিমিট (উদাহরণ ও লেখচিত্রের মাধ্যমে), এক দিকবর্তী লিমিট; লিমিটের মৌলিক ধর্মাবলি; অসীম লিমিট; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ এবং অনুরূপ লিমিট, অবিচ্ছিন্ন ফাংশন ও এর ধর্মাবলি; মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য (*Lagrange's Mean Value Theorem*) এর বর্ণনা; লিমিট হিসেবে অন্তরজ; মূল নিয়মে x^n এর অন্তরজ; বহুপদী ফাংশনের অন্তরজ; মূল নিয়মে e^x, a^x, $ln\ x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ এবং $\operatorname{cosec} x$ এর অন্তরজ নির্ণয়, স্পর্শকের নতি হিসেবে অন্তরজ; ফাংশনের যোগফলের অন্তরজ; ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ; দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরজ; সংযোজিত ফাংশনের এবং বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ; পর্যায়ক্রমিক অন্তরজ; অন্তরজের আদর্শ প্রতীক হিসেবে $f'(x)$, $f''(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ইত্যাদির ব্যবহার; স্বাধীন ও অধীন চলকের অন্তরক; ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন, ফাংশনের চরম বিন্দু; ফাংশনের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান।

ব্যবহারিক : নির্দিষ্ট বিন্দুর সন্নিকটে ফাংশনের লেখকে আসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন, ফাংশনের লেখকে আসন্নভাবে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশের সমন্বয়ে গঠিত লেখ দ্বারা প্রতিস্থাপন, স্বাধীন চলক ও অধীন চলকের মধ্যকার সম্পর্ক ব্যবহার করে আসন্ন মান নির্ণয়।

দশম অধ্যায় – যোগজীকরণ :

নির্দিষ্ট যোগজ (ক্ষেত্রফল হিসাবে নির্দিষ্ট যোগজ); প্রতিঅন্তরজ; নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য; নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল; অনির্দিষ্ট যোগজ ; অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়ের বিভিন্ন কৌশল; অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়(প্রতিস্থাপন, আংশিক ভগ্নাংশ, অংশায়ন সূত্রের সাহায্যে)।

ব্যবহারিক : $y = f(x)$ সমীকরণের লেখ ও x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয়।

প্রশ্নে নম্বর বিভাজন

উচ্চতর গণিত প্রথম পত্র

পূর্ণমান : ১০০

তত্ত্বীয় : ৭৫ নম্বর ও ব্যবহারিক : ২৫ নম্বর

তত্ত্বীয় :

বীজগণিত – ১৫ নম্বর

(ক) ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক (৩টি থেকে ২টি)	৫ × ২ = ১০ নম্বর
(খ) বিন্যাস ও সমাবেশ (২টি থেকে ১টি)	৫ × ১ = ৫ নম্বর

জ্যামিতি ও ভেক্টর – ২০ নম্বর

(ক) ভেক্টর (২টি থেকে ১টি)	৫ × ১ = ৫ নম্বর
(খ) সরলরেখা এবং বৃত্ত (৪টি থেকে ৩টি)	৫ × ৩ = ১৫ নম্বর

ত্রিকোণমিতি – ২০ নম্বর

(ক) ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (৩টি থেকে ২টি)	৫ × ২ = ১০ নম্বর
(খ) সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (৩টি থেকে ২টি)	৫ × ২ = ১০ নম্বর

ক্যালকুলাস – ২০ নম্বর

(ক) ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র (২টি থেকে ১টি)	৫ × ১ = ৫ নম্বর
(খ) অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণ (৪টি থেকে ৩টি)	৫ × ৩ = ১৫ নম্বর

ব্যবহারিক :

(ক) ৫টি কার্যক্রম থেকে ২টি (প্রত্যেক কার্যক্রমে তত্ত্ব : ২ নম্বর, লেখচিত্র অঙ্কন ও বিশ্লেষণ : ৪ নম্বর)	৬ × ২ = ১২ নম্বর
এবং ব্যাখ্যাসহ ফলাফল উপস্থাপন	২.৫ × ২ = ৫ নম্বর
(খ) ব্যবহারিক খাতা (নোট বুক) উপস্থাপন	০৩ নম্বর
(গ) মৌখিক পরীক্ষা	০৫ নম্বর
	১০০ নম্বর

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

1. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধানের সূত্র : $\frac{x}{\Delta x} = \frac{y}{\Delta y} = \frac{z}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta}$, যেখানে $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ এবং Δ দ্বারা নির্ণায়ক নির্দেশ করে।

2. **(i)** সব জিনিসগুলি ভিন্ন ভিন্ন হলে, ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, ${}^nP_n = n!$, যেখানে $n \in \boldsymbol{N}$ এবং $r \le n$;

   (ii) $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$ ইত্যাদি, $0! = 1$;

   (iii) সবগুলো ভিন্ন নয় এরূপ ক্ষেত্রে সবগুলো একবারে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{n!}{p!\,q!\,r!}$;

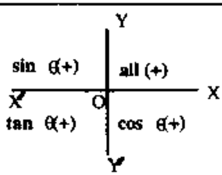
   (iv) ${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$, সম্পূরক সমাবেশ : ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$; ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$.

3.

$\sin\theta$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	
মান	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sin 180° = 0$ $\cos 180° = -1$
$\cos\theta$	$90°$	$60°$	$45°$	$30°$	$0°$	

লক্ষণীয় : $\sin\alpha = \cos\beta$, যখন $(\alpha + \beta) = 90°$

4. চৌকন–বিধি :



$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

5. নিচে চিহ্ন ছাড়া মান দেয়া হলো :

$n \in z$	$\sin(90° \times n \pm \theta)$	$\cos(90° \times n \pm \theta)$	$\tan(90° \times n \pm \theta)$	$\cot(90° \times n \pm \theta)$	
n জোড়	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	No Change
n বিজোড়	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\cot\theta$	$\tan\theta$	Change

* চিহ্ন চৌকন–বিধি অনুযায়ী নির্ধারিত হবে।

যেমন, (i) $\sin 150° = \sin(90° \times 2 - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$ ($n = 2$ জোড়)

(ii) $\sin 300° = \sin(90° \times 3 + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($n = 3$ বিজোড়)

6. (i) $\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$, $\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$;

(ii) $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$, $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

(iii) $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$; $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$, $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$.

(iv) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$, $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$;

$2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$, $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$;

$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$, $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$, $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$.

(v) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$. $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$. $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

7. (i) সাইন সূত্র : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$;

(ii) কোসাইনসূত্র : $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

(iii) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

8. (i) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$$

(ii) উপরোক্ত ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

(iii) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের ঢাল, $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

(iv) $y = m_1x + c_1$ ও $y = m_2x + c_2$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$
এ রেখা দুইটি সমান্তরাল হলে, $m_1 = m_2$ এবং এরা পরস্পর লম্ব হলে, $m_1 \times m_2 = -1$

(v) $ax + by + c_1 = 0$, $ax + by + c_2 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

(vi) (x_1, y_1) বিন্দু থেকে $ax + by + c = 0$ রেখার উপর অংকিত লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

(vii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$
রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

9. অন্তরজ সম্পর্কিত কয়েকটি সূত্র :

(i) $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{d}{dx}(u) \pm \frac{d}{dx}(v)$ (ii) $\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{d}{dx}(u) + u\frac{d}{dx}(v)$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ (iv) $z = f(x) \Rightarrow dz = f'(x)\,dx$

10. কয়েকটি আদর্শ যোগজ (Standard Integral) :

(i) $\int \tan x\,dx = -\ln\cos x = \ln\sec x$ (ii) $\int \cot x\,dx = \ln\sin x = -\ln\text{cosec}\, x$

(iii) $\int \text{cosec}\, x\,dx = \ln\tan\frac{x}{2}$ (iv) $\int \sec x\,dx = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \ln(\sec x + \tan x)$

(v) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ (vi) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}$, $(a > x)$

(vii) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$, $(x > a)$ (viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

(ix) $\int uv\,dx = u\int v dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v dx\right\}dx$.

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক (*Matrics and Determinants*)

1.1.1. ম্যাট্রিক্সের ধারণা

মনে করি, $x' = a_1x + b_1y$ এবং $y' = a_2x + b_2y$ দুইটি প্রদত্ত সমীকরণ, যেখানে a_1, b_1, a_2, b_2 ধ্রুবক (Constant). এই দুইটি প্রদত্ত সমীকরণকে বিভিন্ন ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা হয়।

ধরি, A তার দৈনিক কাজে 12 টাকার মালামাল ব্যবহার করলে তাকে দৈনিক 15 টাকা মজুরি দেয়া হয়। আবার B তার দৈনিক কাজে 10 টাকার মালামাল ব্যবহার করলে তাকে দৈনিক 14 টাকা মজুরি দেয়া হয়। এভাবে A ও B যথাক্রমে x সংখ্যক ও y সংখ্যক দিন কাজ করল। যদি তারা দুইজনে একত্রে x' টাকা মজুরি পায় এবং সর্বমোট y' টাকার মালামাল ব্যবহার করা হয়, তবে আমরা পাই

$$\begin{aligned} x' &= 15x + 14y \\ y' &= 12x + 10y \end{aligned} \quad \text{.............(i)}$$

উপরের দুইটি সমীকরণ থেকে আমরা বলতে পারি : যদি A ও B যথাক্রমে 7 দিন ও 5 দিন কাজ করে, তাহলে দুই জনের মোট মজুরি অর্থাৎ $x' = 175$ এবং মালামালের জন্য মোট ব্যয়, অর্থাৎ $y' = 134$.

প্রদত্ত সমীকরণের ধ্রুবকগুলিকে, অর্থাৎ সংখ্যাগুলিকে সারি *(Row)* এবং স্তম্ভ *(Column)* এ সাজালে একটি **আয়তাকার বিন্যাস *(Rectangular array)*** পাওয়া যায়। এ আয়তাকার বিন্যাসকে বলা হয় **ম্যাট্রিক্স *(Matrix)***. ম্যাট্রিক্স বোঝাতে দুইটি তৃতীয় বন্ধনী [ ] বা দুইটি প্রথম বন্ধনী ( ) ব্যবহার করা হয়। কখনও কখনও '|| ||' প্রতীকের সাহায্যেও ম্যাট্রিক্স বোঝানো হয়।

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় থেকে ম্যাট্রিক্স হলো: $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$

(i) থেকে ম্যাট্রিক্স হলো: $\begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$.

ম্যাট্রিক্স গঠনকারী সংখ্যা a_1, b_1, a_2, b_2 ইত্যাদিকে এর ভুক্তি *(Entry)* বলা হয়। ভুক্তিগুলির আনুভূমিক *(horizontal)* এবং উল্লম্ব *(Vertical)* বিন্যাসকে যথাক্রমে সারি *(Row)* এবং স্তম্ভ *(column)* বলা হয়। যেমন :

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স।

উপরের ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা 3 এবং কলামের সংখ্যা 4. এ ম্যাট্রিক্সকে 3×4 আকারের ম্যাট্রিক্স বা সংক্ষেপে 3×4 ম্যাট্রিক্স বলা হয়। সাধারণভাবে ম্যাট্রিক্স লেখার সময় প্রত্যেক ভুক্তিতে *'Double subscript'* ব্যবহার করা হয়। প্রথমটি সারি এবং দ্বিতীয়টি কলাম নির্দেশ করে।

নিচে কয়েকটি ম্যাট্রিক্স লেখা হলো :

(i) $\left\| \begin{matrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \end{matrix} \right\|$, যা 2×3 ম্যাট্রিক্স।

(ii) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 10 \end{pmatrix}$, যা 3×3 ম্যাট্রিক্স। (iii) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, যা 3×2 ম্যাট্রিক্স।

সাধারণভাবে, একটি ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলামের সংখ্যা যথাক্রমে m ও n হলে, ঐ ম্যাট্রিক্সকে $m \times n$ আকারের ম্যাট্রিক্স বলা হয়। অর্থাৎ ম্যাট্রিক্সের আকার বোঝাতে প্রথমে সারি এবং পরে কলাম উল্লেখ করা হয়।

সংক্ষেপে, $A = [\, a_{ij} \,]\, m \times n$, যেখানে $i = 1, 2, \ldots m$ এবং $j = 1, 2, \ldots n$; দ্বারা $m \times n$ আকারের ম্যাট্রিক্স বোঝানো হয়।

1.1.2. ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ

(i) আয়তাকার ম্যাট্রিক্স (*Rectangular Matrix*) : যদি কোনো $m \times n$ আকারের ম্যাট্রিক্সে $m \neq n$ হয়, তবে তাকে **আয়তাকার ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। যেমন : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ একটি আয়তাকার ম্যাট্রিক্স।

(ii) সারি ম্যাট্রিক্স (*Row Matrix*) **এবং কলাম ম্যাট্রিক্স** (*Column Matrix*) : কেবল একটি সারি সম্বলিত ম্যাট্রিক্সকে সারি ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন : $[\,a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \dots a_{1n}]_{1 \times n}$ একটি সারি ম্যাট্রিক্স ।

কেবল একটি কলাম সম্বলিত ম্যাট্রিক্সকে **কলাম ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। যেমন,

$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1}$ একটি **কলাম ম্যাট্রিক্স** ।

(iii) বর্গ ম্যাট্রিক্স : কোন ম্যাট্রিক্সের কলাম ও সারি সংখ্যা পরস্পর সমান হলে, তাকে **বর্গ ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। যেমন : $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স।

(iv) মূখ্য কর্ণ : কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের ১ম সারি ও ১ম কলামে অবস্থিত সাধারণ ভুক্তিগামী কর্ণকে মূখ্য কর্ণ বলা হয়।

(v) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (*Diagonal Matrix*) : কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলি ব্যতীত অবশিষ্ট সব ভুক্তিগুলি শূন্য হলে, তাকে **কর্ণ ম্যাট্রিক্স** বলে। যেমন : $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স।

(vi) স্কেলার ম্যাট্রিক্স (*Scalar Matrix*) : যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের অশূন্য ভুক্তিগুলি সমান, তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন : $\begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix}_{n \times n}$ একটি $n \times n$ স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

(vii) অভেদক ম্যাট্রিক্স বা ইউনিট ম্যাট্রিক্স (*Identity Matrix or Unit Matrix*) : স্কেলার ম্যাট্রিক্সের অশূন্য ভুক্তিগুলির প্রত্যেকটি একক (1) হলে, ম্যাট্রিক্সটিকে **অভেদক ম্যাট্রিক্স বা ইউনিট ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। n-পর্যায়ের ইউনিট ম্যাট্রিক্সকে I_n দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

(viii) শূন্য ম্যাট্রিক্স (*Null Matrix*) : শূন্য ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেকটি সারি এবং প্রত্যেকটি কলামের প্রতিটি ভুক্তি শূন্য। যেমন : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$ একটি $n \times n$ আকারের শূন্য ম্যাট্রিক্স।

(ix) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (*Symmetric Matrix*) : যে বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ এর ক্ষেত্রে $a_{ij} = a_{ji}$, সব i এবং j এর জন্য, তাকে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন : $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 3×3 একটি প্রতিসম বর্গ ম্যাট্রিক্স।

(x) রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স (*Transpose of a matrix*) : কোনো ম্যাট্রিক্সের সারিগুলিকে কলামে এবং কলামগুলিকে সারিতে পরিবর্তন করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন : $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 2×2 এর রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ 2×2.

(xi) বক্র প্রতিসম বর্গ ম্যাট্রিক্স (*Skew symmetric square matrix*) : যদি A এর রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স = – A হয়, তবে A কে বক্র প্রতিসম বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হয় । যেমন : $\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ একটি বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

1.2.1. ম্যাট্রিক্সের সমতা (*Equality of matrices*)

যদি এবং কেবল যদি দুইটি ম্যাট্রিক্সের আকার সমান হয় এবং একটির ভুক্তি অপরটির অনুরূপ ভুক্তির সমান হয়, তবে ম্যাট্রিক্স দুইটি সমান হবে। যেমন, দুইটি সমান মাত্রার ম্যাট্রিক্স

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \varphi & \psi \end{bmatrix}$, যখন $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$, $d = \delta$, $e = \varphi$ এবং $f = \psi$.

কিন্তু $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 6 & 9 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$, কারণ এদের আকার সমান নয়।

যদি $4x - 6y = 5$ এবং $7x + 9y = 13$ হয়, তবে ম্যাট্রিক্স আকারে আমরা লেখতে পারি $\begin{bmatrix} 4x - 6y \\ 7x + 9y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$

1.2.2. ম্যাট্রিক্স এর যোগ

দুইটি ম্যাট্রিক্স যদি একই আকারের হয়, তবে তাদের যোগ করা যায়। A এবং B এর উভয়ে $m \times n$ আকারের ম্যাট্রিক্স হলে,

$(A + B)$ ও হবে $m \times n$ ম্যাট্রিক্স যার ভুক্তি হবে $m \times n$ সংখ্যক।

নিয়ম : A এবং B যোগ করতে হলে, A এর প্রত্যেক ভুক্তির সাথে B এর অনুরূপ ভুক্তি যোগ করতে হবে।

উদাহরণ। $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, $A + B$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 & -1+0 & 3+(-4) \\ 3+5 & 6+3 & -4+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 8 & 9 & -5 \end{bmatrix}$.

মন্তব্য: A ও B এর উভয়ে 2×3 আকারের ম্যাট্রিক্স। সুতরাং $A + B$ হলো 2×3 ম্যাট্রিক্স এবং এর ভুক্তির সংখ্যা 2×3.

1.2.3. ম্যাট্রিক্স এর বিয়োগ

যদি দুইটি ম্যাট্রিক্স একই আকারের হয়, তবে একটি থেকে অপরটি বিয়োগ করা যায়। যদি A ও B দুইটি ম্যাট্রিক্স হয়, তবে $A - B$ নির্ণয় করতে হলে, A এর প্রত্যেকটি ভুক্তি থেকে B এর প্রত্যেকটি অনুরূপ ভুক্তি বিয়োগ করতে হবে।

1.2.4. ধ্রুব সংখ্যা দ্বারা ম্যাট্রিক্সের গুণন

একটি ধ্রুব সংখ্যা K দ্বারা A ম্যাট্রিক্সকে গুণ করতে হলে, A এর প্রত্যেকটি ভুক্তিকে K দ্বারা গুণ করতে হবে।

1.2.5. ম্যাট্রিক্সের গুণন *(Multiplication of matrices)*

দুইটি ম্যাট্রিক্স A ও B থেকে AB কেবল তখনই নির্ণয় করা যায়, যখন A এর কলামের সংখ্যা B এর সারি সংখ্যার সমান হয়। অর্থাৎ, $m \times p$ ম্যাট্রিক্স ও $p \times n$ ম্যাট্রিক্সের গুণফল নির্ণয় করা সম্ভব।

নিয়ম : (i) A ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির প্রত্যেকটি ভুক্তিকে B ম্যাট্রিক্সের প্রথম কলামের অনুরূপ প্রত্যেকটি ভুক্তি দিয়ে গুণ করতে হবে। এ গুণফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি AB ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির প্রথম ভুক্তি। অনুরূপভাবে প্রথম ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির ভুক্তিগুলিকে যথাক্রমে দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের দ্বিতীয় কলামের অনুরূপ ভুক্তিগুলি দ্বারা গুণ করে AB এর প্রথম সারির দ্বিতীয় ভুক্তি বের করতে হবে। এভাবে অগ্রসর হয়ে AB এর প্রথম সারির সব ভুক্তি নির্ণয় করা যায়।

(ii) নিয়ম (i) এর প্রক্রিয়ায় AB এর সব সারি নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ। $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ হলে, AB ও BA নির্ণয় কর।

প্রমাণ কর যে, $AB \neq BA$.

সমাধান : $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0-4 & 3+0-12 \\ -3-8-2 & 9+0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ -13 & 3 \end{bmatrix}$.

আবার $BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1+9 & 0-6 & 2-3 \\ 4+0 & 0+0 & -8+0 \\ 2+18 & 0-12 & -4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 & -1 \\ 4 & 0 & -8 \\ 20 & -12 & -10 \end{bmatrix}. \quad \therefore AB \neq BA.$$

মন্তব্য : ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে গুণনের বিনিময় বিধি প্রযোজ্য নয়।

প্রশ্নমালা 1.1

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ হলে, $2A$ ও $A + B$ এর মান নির্ণয় কর।

2. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ হয়, তবে, $3A + 4B$ নির্ণয় কর। [ব. '০৪]

3. $A = [20 \;\; 17 \;\; 11]$ এবং $B = [32 \;\; 57 \;\; 23]$ হলে, $A + B$ এর মান নির্ণয় কর।

4. $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $3A - 5B$ নির্ণয় কর। [কু. '০৫]

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ হলে, $A + B$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $A + B$, $A - B$ এবং AB. [রা. '০৫]

7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ হলে, AB নির্ণয় কর।

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে, $AB \neq BA$. [দি. '১০]

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, AB ও BA নির্ণয় কর।

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, (i) AB এবং BC নির্ণয় কর। [য. '১৩]

(ii) দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ হলে, BA এর মান নির্ণয় কর।

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ও $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, AB এবং BC নির্ণয় কর।

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে, $AB \neq BA$. [ঢা'০৮; সি. য. '১২; দি. '১৩]

14. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $AB \neq BA$.

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, AB ও CA নির্ণয় কর।

16. যদি $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & -16 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে AB এর মান বের কর।

17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ হলে, দেখাও যে, $AB = BA$. [ঢা. '০৫; চ. '০৮]

18. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $AB \neq BA$.

19. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \;\; 2 \;\; -5 \;\; 6]$ হলে, $(AB)C$ নির্ণয় কর।

[দি. কু. '১২; য. ব. '১০; রা. '১১; রা. ঢা. '১৩]

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(AB)C = A(BC)$.

[য. চ. '১১; কু '১০; ব. সি. '১৩]

20. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $AB = AC$, (ii) $A(BC) = (AB)C$,

(iii) $A(B + C) = AB + AC$, (iv) $(A + B)C = AC + BC$.

22. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে A^2 এবং A^3 নির্ণয় কর।

23. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 - 5A + 6.I$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [ঢা. '০৭; ব. '১২; কু. '১৩]

24. ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $A^3 - 2A^2 - I$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. [সি. '০৬]

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $A^3 - 2A^2 + A - 2.I$ এর মান নির্ণয় কর। [রা. '১২]

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 - 4A - 5.I$ নির্ণয় কর, যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. [চ. '১৩]

27. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ হলে, দেখাও যে, $AB = BA = I_3$.
[ব. '০৮; কু. '০৯; ঢা. '১০]

নির্ণায়ক :

1.3.1. নির্ণায়কের ধারণা

মনে করি, $a_1x + b_1 = 0$....... (i) এবং $a_2x + b_2 = 0$ ...... (ii), যেখানে a_1, b_1, a_2, b_2 ধ্রুবক।

(i) সমীকরণ থেকে আমরা পাই $x = -\frac{b_1}{a_1}$.

এখন x এর মান (ii) সমীকরণকে সিদ্ধ করলে আমরা পাই $a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}\right) + b_2 = 0$

অর্থাৎ, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ...... (iii)

তাহলে, (iii) হলো ঐ শর্ত যার সাপেক্ষে x এর একই মান দ্বারা (i) এবং (ii) সমীকরণ দুইটির উভয়ে সিদ্ধ হয়।

(iii) এর বামপক্ষের রাশিকে বলা হয় নির্ণায়ক এবং সাধারণত $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ আকারে লেখা হয়।

a_1, a_2, b_1, b_2 কে উপরের নির্ণায়কের ভুক্তি বলা হয়।

ভুক্তিগুলির আনুভূমিক *(horizontal)* বিন্যাসকে সারি ও উলম্ব বিন্যাসকে স্তম্ভ বা, কলাম (*column*) বলে।

আমরা জানি, একটি ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলামের সংখ্যা সমান হলে, ঐ ম্যাট্রিক্সকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

মনে করি, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স। ভুক্তিগুলি একই রেখে এবং তাদের অবস্থান পরিবর্তন না করে $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ আকারে লেখলে এটিকে প্রদত্ত বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক বা, সংক্ষেপে নির্ণায়ক বলা হয়।

একটি নির্ণায়কের সারি *(Row)* সংখ্যা এবং স্তম্ভ বা কলাম *(Column)* সংখ্যার উভয়ে 2 হলে, ঐ নির্ণায়ককে দ্বিতীয় আকারের ***(Second order)*** নির্ণায়ক বলে।

নির্ণায়ক হচ্ছে একটি বিশেষ আকারে লিখিত বর্গ ম্যাট্রিক্সের সংখ্যা রাশি।

আবার নিচের তিনটি সমীকরণ (x ও y সম্বলিত) বিবেচনা করি :

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ .... (iii)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ .... (iv)

$a_3x + b_3y + c_3 = 0$ .... (v)

(iv) এবং (v) সমীকরণদ্বয় সমাধান করে আমরা পাই

$$\frac{x}{b_2c_3 - b_3c_2} = \frac{-y}{a_2c_3 - a_3c_2} = \frac{1}{a_2b_3 - a_3b_2}$$

$$\therefore x = \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2}, \quad y = \frac{-(a_2c_3 - a_3c_2)}{a_2b_3 - a_3b_2}$$

তাহলে, x ও y এর জন্য প্রাপ্ত মান দ্বারা যদি (iii) সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, তবে আমরা পাই

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$$

বা, $a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ ...... (vi)

[দ্বিতীয় আকারের নির্ণায়কের সাহায্যে]

(vi) এর বামপক্ষকে $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ বা, $(a_1b_2c_3)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এটি **তৃতীয় আকারের *(Third order)* নির্ণায়ক।**

মন্তব্য : তৃতীয় আকারের নির্ণায়ককে 3×3 বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক বলা হয়।

1.3.2. নির্ণায়কের পদ *(terms)*, মুখ্য কর্ণ *(Principal or leading diagonal)* এবং মাধ্যমিক কর্ণ *(Secondary diagonal)*

তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের ভুক্তি a_1, b_1, c_1 ইত্যাদি থেকে প্রাপ্ত $a_1\, b_2\, c_3$, $a_1\, b_3\, c_2$ ইত্যাদি গুণফলকে **নির্ণায়কের পদ *(terms)*** বলা হয়।

তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়ক লক্ষ করলে দেখা যাবে a_1, b_2, c_3 ভুক্তিগুলি একটি কর্ণ এবং a_3, b_2, c_1 ভুক্তিগুলি অপর একটি কর্ণ গঠন করে। প্রথম কর্ণকে মুখ্য কর্ণ এবং এর ভুক্তিগুলির গুণফল, অর্থাৎ $a_1b_2c_3$ কে মুখ্য পদ বলা হয়। দ্বিতীয় কর্ণকে মাধ্যমিক কর্ণ এবং এর ভুক্তিগুলির গুণফল, অর্থাৎ $a_3b_2c_1$ কে মাধ্যমিক পদ বলে।

1.4. নির্ণায়কের বিস্তৃতি *(Expansion of determinant)*

তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$ [অনু : 5.8 থেকে]

$= (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1)$.

তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের বিস্তৃতিতে আমরা লক্ষ করেছি :

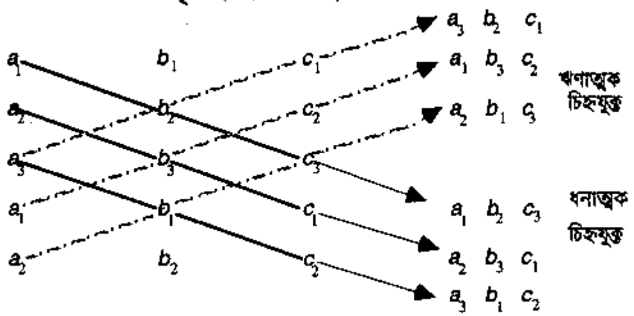
(i) প্রথম সারির ভুক্তি 3টি দ্বারা যথাক্রমে তিনটি দ্বিতীয় মাত্রার নির্ণায়ককে গুণ করা হয়েছে। এ গুণফলগুলির আগে পর্যায়ক্রমে যোগ ও বিয়োগ চিহ্ন বসিয়ে [প্রথম গুণফল থেকে শুরু করে] বীজগণিতীয় সমষ্টি নেয়া হয়েছে। এ বীজগণিতীয় সমষ্টিই প্রদত্ত নির্ণায়কের মান।

(ii) প্রথম সারির ভুক্তি দ্বারা ঐ দ্বিতীয় মাত্রার নির্ণায়ককে গুণ করা হয়েছে যার মধ্যে প্রথম সারির সংশ্লিষ্ট ভুক্তিটি নেই, অর্থাৎ সংশ্লিষ্ট ভুক্তিটি যে সারি ও কলামে অবস্থিত ঐ সারি ও কলাম বাদ দিয়ে যে দ্বিতীয় মাত্রার নির্ণায়ক গঠিত হয়েছে।

উপরের নিয়ম বার বার প্রয়োগ করে যে কোনো পর্যায়ের নির্ণায়কের মান পাওয়া যায়।

মন্তব্য : কলামের ভুক্তিগুলি দ্বারা গুণ করেও একই প্রক্রিয়ায় নির্ণায়কের মান বের করা যায়।

তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের বিস্তৃতি (সহজ পদ্ধতি) ঃ



নিয়ম : নির্ণায়কের তিনটি সারি পর পর লিখে এরপর আবার প্রথম ও দ্বিতীয় সারি লেখা হয়েছে। তিনটি ভুক্তির ভিতর দিয়ে যায় এরূপ রেখাগুলি নিচ থেকে উপরে এবং উপর থেকে নিচে টানা হলো (চিত্র অনুযায়ী)। প্রত্যেকটি রেখায় যে ভুক্তিগুলি আছে তার গুণফল নির্ণয় করা হয়েছে। উপর থেকে নিচে টানা রেখার ক্ষেত্রে গুণফলগুলি (+) চিহ্নযুক্ত এবং নিচ থেকে উপরে টানা রেখার ক্ষেত্রে গুণফলগুলি (–) চিহ্নযুক্ত করতে হবে। যেমন, কোনো গুণফল ঋণাত্মক হলে, তা (–) চিহ্নযুক্ত করলে ধনাত্মক হবে। এরপর গুণফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি হলো প্রদত্ত নির্ণায়কের মান। যেমনঃ

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এর মান D দ্বারা সূচিত করা হলে,

$D = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3)$, যখন a_1, b_1, c_1 ইত্যাদির প্রত্যেকে ধনাত্মক।

1.5.1. নির্ণায়কের অনুরাশি (*Minor*) ও সহগুণক(*Cofactor*)

নির্ণায়কের অনুরাশি (*Minor*) ঃ

মনে করি, $D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, যা একটি দ্বিতীয় আকারের অর্থাৎ 2×2 আকারের নির্ণায়ক।

এখন a_1 ভুক্তিটি যে সারি ও কলামে অবস্থিত তা বাদ দিয়ে নির্ণায়কে একটিমাত্র ভুক্তি b_2 থাকে যাকে বলা হয় a_1 এর অনুরাশি (*Minor*)। তদ্রূপ b_1, a_2, b_2 এর অনুরাশি যথাক্রমে a_2, b_1, a_1. অর্থাৎ, 2×2 আকারের নির্ণায়কের 2×2 বা, 4টি ভুক্তির জন্য 4টি অনুরাশি পাওয়া যায়।

আবার যদি $D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ হয়, তাহলে, ভুক্তি a_1 যে রাশি ও কলামে অবস্থিত ঐ রাশি ও কলামের ভুক্তিগুলি বাদ দিয়ে বাকি ভুক্তিগুলি (ভুক্তির অবস্থান পরিবর্তন না করে) নিয়ে গঠিত নির্ণায়ককে a_1 এর অনুরাশি বলে।

$\therefore a_1$ এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

তদ্রূপ, c_1, b_2, a_3 ইত্যাদির অনুরাশি যথাক্রমে $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ ইত্যাদি।

এক্ষেত্রেও 3×3 আকারের নির্ণায়ক থেকে 9টি ভুক্তির জন্য 9টি অনুরাশি পাওয়া যায়। তবে, এক্ষেত্রে অনুরাশিগুলি $(3-1) \times (3-1)$ বা, 2×2 আকারের নির্ণায়ক হবে। অর্থাৎ 3×3 আকারের (তৃতীয় মাত্রার) নির্ণায়ক থেকে প্রত্যেক ভুক্তির জন্য কেবল একটি অনুরাশি [দ্বিতীয় মাত্রার নির্ণায়ক] পাই।

একটি $m \times m$ আকারের নির্ণায়কের একটি ভুক্তি a_{ij} যদি i তম সারি ও j তম কলামে অবস্থান করে, তবে i তম সারি ও j তম কলামের সব ভুক্তি বাদ দিয়ে নির্ণায়কের বাকি ভুক্তিগুলি (অবস্থান পরিবর্তন না করে) দ্বারা গঠিত $(m-1) \times (m-1)$ আকারের নির্ণায়ককে (i, j)- তম অনুরাশি *(Minor)* বলা হয়।

প্রদত্ত নির্ণায়ক, D এর ভুক্তি a_1, b_1, c_1 এর অনুরাশি যথাক্রমে

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ এবং } \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

1.5.2. নির্ণায়কের সহগুণক *(Co–factor)* :

নির্ণায়কের কোনো ভুক্তির অনুরাশির আগে যথাযথ চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) বসালে তাকে ঐ ভুক্তির **সহগুণক** *(Co–factor)* বলা হয়।

যথাযথ চিহ্ন নির্ণয়ের উপায় : মনে করি, যে ভুক্তির সহগুণক নির্ণয় করতে হবে তা প্রদত্ত নির্ণায়কের 2 তম সারি ও 3 তম কলামে অবস্থান করে। এদের যোগফল $= 2+3 = 5$ বিধায় সহগুণকের যথাযথ চিহ্ন হবে $(-1)^5$ চিহ্নযুক্ত।

আবার ভুক্তিটি নির্ণায়কের 2 তম সারি ও 2 তম কলামে অবস্থান করলে এর সহগুণকের চিহ্ন হবে $(-1)^{2+2}$ অর্থাৎ, $(-1)^4$ এর চিহ্ন, বা $(+)$ চিহ্নযুক্ত।

কোনো ভুক্তি নির্ণায়কের i-তম সারি ও j-তম কলামে থাকলে ঐ ভুক্তির সহগুণকের চিহ্ন $(-1)^{j+k}$ হবে।

মন্তব্য : n তম আকারের নির্ণায়কের যে কোনো ভুক্তির অনুরাশি ও সহগুণকের উভয়ে $(n-1)$ তম মাত্রার নির্ণায়ক।

উদাহরণ। $D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ থেকে b_3 এর অনুরাশি ও সহগুণক নির্ণয় কর।

সমাধান : b_3 ভুক্তিটি নির্ণায়কের 3 তম সারি ও 2 তম কলামে আছে। 3 তম সারি ও 2 তম কলামের ভুক্তিগুলি বাদ দিয়ে আমরা পাই

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$ আবার $3 + 2 = 5$, যা বিজোড় সংখ্যা।

$\therefore b_3$ এর অনুরাশি ও সহগুণক যথাক্রমে

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

1.5.3. তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের বিস্তৃতিকে সহগুণক দ্বারা প্রকাশ করা :

মনে করি, $D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এখানে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক যথাক্রমে $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

সাধারণত a_1, b_1, c_1 এর সহগুণককে যথাক্রমে A_1, B_1, C_1 দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\therefore D = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$. ....(i) [অনুচ্ছেদ 1.4 থেকে]

অনুরূপভাবে, দেখানো যায়

$D = a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2$ (সারি বরাবর বিস্তৃত করে)

$= a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3$ (" " " ")

$= a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$ (কলাম বরাবর বিস্তৃত করে)

$= b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3$ (" " " ")

$= c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3$ (" " " ")

1.6. নির্ণায়কের ধর্মাবলি

(i) যদি একটি তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়ককে পুনরায় এমনভাবে লেখা হয় যে এর প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সারি যথাক্রমে নির্ণীত নির্ণায়কের প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় কলাম হয়, তবে প্রদত্ত নির্ণায়কের মান অপরিবর্তিত থাকে। অর্থাৎ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্রমাণ : মনে করি, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং $D' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

এখন অনুচ্ছেদ 1.4 অনুযায়ী বিস্তৃত করে,

$D = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2)$

$= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) = D'$ [পদগুলি পুনর্বিন্যাস করে]

$\therefore D = D'$ [প্রমাণিত]

মন্তব্য : একটি প্রদত্ত নির্ণায়কের কলামকে নির্ণীত নির্ণায়কের সারিতে পরিণত করলেও উপপাদ্যটি সত্য হবে।

(ii) একটি নির্ণায়কের পাশাপাশি দুইটি সারি বা দুইটি কলাম পরস্পর স্থান বিনিময় করলে যে নতুন নির্ণায়ক পাওয়া যায় তার মান প্রদত্ত নির্ণায়কের সংখ্যা–সূচক মানের সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে। অর্থাৎ প্রদত্ত নির্ণায়কের মান D হলে, নতুন নির্ণায়কের মান $-D$ হবে।

প্রমাণ : মনে করি, প্রদত্ত নির্ণায়ক, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D$ এবং নতুন নির্ণায়ক,

$D' = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ [পাশাপাশি ১ম ও ২য় কলামের স্থান বিনিময় করে]

এখন $D = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= -\{ b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + c_1(a_3b_2 - a_2b_3)\}$ [পদগুলিকে পুনর্বিন্যাস করে]

$= -D'$ $\quad \therefore D' = -D$. [প্রমাণিত]

মন্তব্য : এ ধর্মের পর্যায়ক্রমিক প্রয়োগের দ্বারা একটি কলাম বা সারিকে এক অবস্থান থেকে অন্য যে কোনো অবস্থানে নেয়া যায়। একবারে এ প্রক্রিয়া কেবল দুইটি সারি বা কলামে প্রয়োগ করতে হবে।

(iii) কোনো নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম সদৃশ হলে ঐ নির্ণায়কের মান 0 (শূন্য) হবে। অর্থাৎ,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$ [এখানে দুইটি কলাম সদৃশ]

প্রমাণ : মনে করি, প্রদত্ত নির্ণায়কের পাশাপাশি ১ম ও ২য় কলামের স্থান বিনিময় করা হলো। তাহলে,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -D$$ [(ii) এ বর্ণিত গুণাবলী অনুসারে]

দেখা যাচ্ছে নির্ণায়ক দুইটি একই।

$\therefore D = -D$, বা $2D = 0$, অর্থাৎ $D = 0$. [প্রমাণিত]

(iv) কোনো নির্ণায়কের যে কোনো সারি বা কলামের প্রত্যেকটি ভুক্তিকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে ঐ নির্ণায়কের মানকেও একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হবে। অর্থাৎ,

$$\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

প্রমাণ : মনে করি, D ও D' যথাক্রমে ডানপক্ষ ও বামপক্ষের নির্ণায়কের মান। সহগুণকের সংজ্ঞা থেকে দেখানো যায় বামদিকের নির্ণায়কের ভুক্তি ma_1, mb_1, mc_1 এর সহগুণক যথাক্রমে ডানপক্ষের নির্ণায়কের ভুক্তি a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক।

এখন $D' = ma_1A_1 + mb_1B_1 + mc_1C_1$ এবং $D = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$ [অনুচ্ছেদ 1.5.3 থেকে]

$\therefore D' = m(a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) = mD$. (প্রমাণিত)

(v) কোনো নির্ণায়কের যে কোনো দুইটি সারি বা কলামের অনুরূপ ভুক্তিগুলি পরস্পরের সমানুপাতিক হলে, ঐ নির্ণায়কের মান 0 (শূন্য) হবে।

অর্থাৎ,
$$\begin{vmatrix} ma_2 & mb_2 & mc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0;$$ যেখানে m ধ্রুবক।

প্রমাণ : মনে করি, $\begin{vmatrix} m\,a_2 & m\,b_2 & m\,c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D.$

$$\therefore D = m\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ [ধর্ম (iv) থেকে]

$= m \times 0$ [ধর্ম (iii) থেকে]

$= 0$. (প্রমাণিত)

(vi) কোনো নির্ণায়কের একটি সারি বা কলামের ভুক্তিগুলির প্রত্যেকটি দুইটি ভুক্তির সমষ্টিরূপে গঠিত হলে ঐ নির্ণায়ককে দুইটি নির্ণায়কের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ,

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্রমাণ : মনে করি, $\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং $\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ – কে যথাক্রমে D_1, D_2, D_3 দ্বারা সূচিত করা হলো।

তাহলে, প্রত্যেকটি নির্ণায়কের প্রথম কলামের ভুক্তিগুলির সহগুণকগুলি একই হবে। এখন প্রথম কলামের সহগুণকগুলিকে যথাক্রমে A_1, A_2, A_3 দ্বারা সূচিত করলে

$$D_1 = (a_1+\alpha_1)A_1 + (a_2+\alpha_2)A_2 + (a_3+\alpha_3)A_3$$

$$D_2 = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \quad D_3 = \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3$$

$$\therefore D_1 = (a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3) + (\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3)$$

$$= D_2 + D_3.$$ (প্রমাণিত)

(vii) কোনো নির্ণায়কের একটি সারি বা কলামের ভুক্তিগুলিকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করে ঐ নির্ণায়কের অপর একটি সারি বা কলামের অনুরূপ ভুক্তিগুলির সাথে যোগ বা বিয়োগ করলে প্রদত্ত নির্ণায়কের মানের পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্রমাণ : $\begin{vmatrix} a_1 \pm mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \pm mb_1 & b_1 & c_1 \\ \pm mb_2 & b_2 & c_2 \\ \pm mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ [ধর্ম (vi) থেকে]

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm m \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ [প্রমাণিত]

[ধর্ম (iii) থেকে]

মন্তব্য : প্রদত্ত নির্ণায়কের সারিগুলিকে r_1, r_2, r_3 দ্বারা সূচিত করে উপরের ধর্ম প্রয়োগ করলে তাদেরকে যথাক্রমে r_1', r_2', r_3' লেখা হয়। কলামের ক্ষেত্রে c_1', c_2', c_3' ইত্যাদি ব্যবহার করা হয়।

1.7. ব্যতিক্রমী (Singular) ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

মনে করি, $A = [\, a_{ij}]_{m \times m}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স। এখন বর্গ ম্যাট্রিক্সের ভুক্তিগুলির ক্রম ও অবস্থান পরিবর্তন না করে যে নির্ণায়ক গঠন করা যায়, তা $| \, a_{ij} |_{m \times m}$.

অর্থাৎ, $| \, A \, | = | \, a_{ij} |_{m \times m}$

এখন $| \, A \, | = 0$ হলে, $[\, a_{ij}]_{m \times m}$ ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় ব্যতিক্রমী।

আবার, $| \, A \, | \neq 0$ হলে, $[\, a_{ij}]_{m \times m}$ ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় অব্যতিক্রমী।

যেমন : $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ একটি ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স, কারণ $| \, A \, | = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = 12 - 12 = 0$

আবার, $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ একটি অব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স, কারণ $|A| = 15 - 8 = 7$; অর্থাৎ, $|A| \neq 0$.

1.8.1. বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স

মনে করি, $A = [\, a_{ij}]_{m \times m}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স, যেখানে $| \, A \, | \neq 0$.

এখন B যদি এমন একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় যেন $AB = BA = I$, যেখানে I একটি ইউনিট ম্যাট্রিক্স, তাহলে B কে বলা হয় A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স। এটিকে A^{-1} দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\therefore AA^{-1} = I$, যেখানে I একটি ইউনিট ম্যাট্রিক্স।

1.8.2. বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করা

সহগুণক প্রক্রিয়ায় বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করতে হলে "Transpose ম্যাট্রিক্স এবং Adjoint ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে ধারনা থাকতে হবে।

Transpose ম্যাট্রিক্স : কোনো ম্যাট্রিক্স A এর সারিগুলিকে কলামে এবং কলামগুলিকে সারিতে পরিবর্তন করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে A ম্যাট্রিক্সের Transpose ম্যাট্রিক্স বলা হয়। A ম্যাট্রিক্সের Transpose ম্যাট্রিক্সকে A^T দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ এর $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

Adjoint ম্যাট্রিক্স : কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর নির্ণায়ক $|A|$ এর সহগুণকগুলি দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সের (ভুক্তিগুলির ক্রম অনুসারে) Transpose ম্যাট্রিক্সকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A এর Adjoint Matrix বলা হয় এবং এটিকে **Adj** A দ্বারা সূচিত করা হয়।

বিপরীত ম্যাট্রিক্স : যেকোনো অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করা যায় যে,

$A.(\text{Adj } A) = |A| . I$, যেখানে I ইউনিট ম্যাট্রিক্স

$\Rightarrow A.(\text{Adj } A) = |A| . AA^{-1}$ [বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা থেকে]

$\therefore A^{-1} = \dfrac{\text{Adj A}}{|A|}$ $[\, |A| \neq 0 \,]$

উদাহরণ 1. একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স থেকে $|A| = ad - bc$, $A_{11} = d, A_{12} = -c, A_{21} = -b, A_{22} = a$

আমরা জানি, $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{|A|}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad-bc}$$

লক্ষ করি : A ম্যাট্রিক্সের A^{-1} নির্ণয় করতে b ও c এর অবস্থান ঠিক রেখে কেবল চিহ্ন বিপরীত করে এবং a ও d এর অবস্থান বিনিময় করে প্রাপ্ত ম্যাট্রিক্সকে $(ad-bc)$ দ্বারা ভাগ করা হয়। এটি শুধুমাত্র 2×2 আকারের ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

উদাহরণ 2. যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান : $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(1-9) + 2(1-6) = 8 - 10 = -2$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি নিম্নরূপ :

$A_{11} = 2-3 = -1, \quad A_{12} = -(1-9) = 8, \quad A_{13} = 1-6 = -5$

$A_{21} = -(1-2) = 1, \quad A_{22} = 0-6 = -6, \quad A_{23} = -(0-3) = 3$

$A_{31} = 3-4 = -1, \quad A_{32} = -(0-2) = 2, \quad A_{33} = 0-1 = -1$

$|A|$ এর সহগুণক ম্যাট্রিক্স $= \begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{Adj\,A}{|A|} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.8.3. নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান

নির্ণায়কের সাহায্যে যে কোনো সংখ্যক চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান করা যায়। আমরা এখানে দ্বিচলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান করার প্রক্রিয়া বিশ্লেষণ করব।

মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণ জোটঃ

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ ..... } (i)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \text{ ..... } (ii)$$

x ও y এর সহগগুলি দ্বারা গঠিত নির্ণায়ককে Δ দ্বারা সূচিত করা হলো। অর্থাৎ, $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

আবার Δx ও Δy দ্বারা যথাক্রমে $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ এবং $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কদ্বয়কে সূচিত করি।

$$\therefore \Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y & b_1 \\ a_2x + b_2y & b_2 \end{vmatrix} \qquad [(i) \text{ ও } (ii) \text{ থেকে}]$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x & b_1 \\ a_2x & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1y & b_1 \\ b_2y & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix} = x.\Delta \quad [\because \text{ দ্বিতীয় নির্ণায়কের মান } 0]$$

$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ বা, $\frac{x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta}$ অনুরূপভাবে, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ বা, $\frac{y}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta}$

সুতরাং $\frac{x}{\Delta x} = \frac{y}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta}$ ... (iii)

$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ এবং $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ অর্থাৎ, (iii) থেকে x ও y এর মান নির্ণয় করা যায়।

মন্তব্য : Δx নির্ণায়কটি গঠন করতে Δ নির্ণায়কের ভুক্তিগুলি (x এর সহগ) এর পরিবর্তে ক্রম অনুসারে ধ্রুবকগুলি বসাতে হবে। আবার Δy গঠন করার সময় Δ নির্ণায়কের ভুক্তিগুলি (y এর সহগ) এর পরিবর্তে ক্রম অনুসারে ধ্রুবকগুলি বসাতে হয়। $\Delta \neq 0$ হলেই সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করা যায়। $\Delta = 0$ হলে, সমীকরণ জোটের কোনো অনন্য সমাধান পাওয়া যায় না।

1.8.4. তিনটি চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান

প্রদত্ত সমীকরণ হলো :

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

অনুচ্ছেদ 5.13 এ উল্লেখিত প্রক্রিয়ায় $\Delta, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ হবে যথাক্রমে

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

এবং $\frac{x}{\Delta x} = \frac{y}{\Delta y} = \frac{z}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta}$, যা থেকে x, y, z এর মান নির্ণয় করা যায়।

মন্তব্য : সমীকরণ জোটের সমাধানের জন্য উপরে বর্ণিত প্রক্রিয়াকে "ক্রেমারের প্রক্রিয়া" *(Cramer's Rule)* বলা হয়।

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর :

$$\begin{vmatrix} a+b & a & b \\ a & a+c & c \\ b & c & b+c \end{vmatrix}$$

সমাধান : প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} a+b-a-b & a & b \\ a-a-c-c & a+c & c \\ b-c-b-c & c & b+c \end{vmatrix}$ [$c_1' = c_1 - c_2 - c_3$ ব্যবহার করে]

$$= \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -2c & a+c & c \\ -2c & c & b+c \end{vmatrix} = (-2c)\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & a+c & c \\ 1 & c & b+c \end{vmatrix}$$

[অনুচ্ছেদ 1.6 থেকে]

$$= (-2c)\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & a & -b \\ 1 & c & b+c \end{vmatrix}$$ [$r_2' = r_2 - r_3$ ব্যবহার করে।]

$$= -2c\begin{vmatrix} a & b \\ a & -b \end{vmatrix} = -2c(-ab - ab) = 4abc.$$

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca).$$

সমাধান : $$\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & abc & abc \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

[১ম, ২য়, ৩য় কলামকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা গুণ করা হয়েছে। এতে অনুচ্ছেদ 1.6 (iv) অনুযায়ী নির্ণায়কটি abc দ্বারা গুণ করা হলো। ফলে মান একই রাখতে নির্ণায়ককে abc দ্বারা ভাগ করতে হয়েছে]

$$= \frac{1}{abc}\cdot(abc)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 - c_2 \text{ এবং } c_2' = c_2 - c_3\ ]$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a+b & b+c \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a+b & b+c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad [r_2' = r_2 - b\cdot r_1]$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a+b & c-a \\ a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad [c_2' = c_2 - c_1\ ]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ a^2 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

মন্তব্য : 1.6 অনুচ্ছেদের (vii) এর ধর্ম একই সঙ্গে একাধিক সারি বা কলামে ব্যবহার করা যায়। তবে কমপক্ষে একটি কলাম বা সারি অপরিবর্তিত রাখতে হবে।

উদাহরণ 3. $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং A_1, B_1, C_1 যথাক্রমে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক হলে, প্রমাণ কর যে,

$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0.$

সমাধান : সহগুণকের সংজ্ঞানুসারে,

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2,\quad B_1 = -(a_2c_3 - a_3c_2),\quad C_1 = a_2b_3 - a_3b_2$$

$$\therefore a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = a_2(b_2c_3 - b_3c_2) - b_2(a_2c_3 - a_3c_2) + c_2(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2 - a_2b_2c_3 + a_3b_2c_2 + a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2$$

$= 0.$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 4. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর : $5x + 2y - 11 = 0$
$3x + 4y - 1 = 0.$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ হলো : $5x + 2y = 11$
$3x + 4y = 1.$

এখানে $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14$

$\Delta x = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 42, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -28$

$\therefore x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{42}{14} = 3, \; y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-28}{14} = -2. \qquad \therefore (x, y) = (3, -2)$

প্রশ্নমালা 1.2

1. মান নির্ণয় কর : (প্রশ্ন 1 – 2)

(i) $\begin{vmatrix} 16 & 5 & 9 \\ 12 & 4 & 7 \\ 17 & 6 & 10 \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} 13 & 3 & 23 \\ 30 & 7 & 53 \\ 39 & 9 & 70 \end{vmatrix}$. **(iii)** $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$.

2. (i) $\begin{vmatrix} a+12b & a+13b & a+14b \\ a+14b & a+15b & a+16b \\ a+16b & a+17b & a+18b \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5+p & 1 \\ 1 & 1 & 5+q \end{vmatrix}$.

(iii) $\begin{vmatrix} 1 & -\omega & \omega^2 \\ -\omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix}$; যেখানে ω এককের যে–কোন একটি জটিল ঘনমূল।

প্রমাণ কর : (প্রশ্ন 3 – 21)

3. (a) $\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ **(b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy.$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$ [ব. '১০]

4. $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1).$ [ঢা. '১২, ব. ব. '০৯, রা. '১০, '১১]

6. (a) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + x_3.$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ [চ. '১০]

7. (a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} = a^2(a-1)^2(a^2-1).$ **(b)** $\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2x & x+y & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)^3.$

8. $\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y).$

9. $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = (ax^2+2bxy+cy^2)(b^2-ac).$ [চ. '১৩; য. দা. '১০; ব. সি. দি. বা. '১২]

10. $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$ [কু. '১২]

11. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$zx+z^2$

12. $\begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+x^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2.$ [রা. '১৩; ব. '০৮]

13. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$ [য. '১২; ঢা. কু. '১৩]

14. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a).$ [সি. '০৮; ব. '১২]

15. $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a).$ [ব. '১১]

16. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = -2(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b).$ [চ. '০৬]

17. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$ [সি. '০৯; রা. '০৮]

18. $\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ [সি. '০৭]

19. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix} = (xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x).$ [ঢা. চ. সি. '১১; সি. '১০, '১৩]

20. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3.$ [সি. '০৯, '১১]

21. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$ [কু. '০৩]

22. $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3.$ [রা. '০৯; সি. '১০, '১৩]

23. $\begin{vmatrix} q+r & p-q & p \\ r+p & q-r & q \\ p+q & r-p & r \end{vmatrix} = 3\,pqr - p^3 - q^3 - r^3.$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

24. (a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & a+b \\ b+c & a-c & a \\ b-c & a+c & b \end{vmatrix}$ **(b)** $\begin{vmatrix} a & a & a \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}.$

25. x, y, z এর যে কোনো দুইটি সমান না হলে এবং

$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $1 + xyz = 0.$

26. k এর মান কত হলে, $\begin{bmatrix} 5+k & -2 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হবে?

27. প্রমাণ কর যে, $\begin{bmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স।

28. যদি $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}.$

29. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $AA^{-1} = I_2$

30. নিচের বর্গ ম্যাট্রিক্সগুলির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

31. সমাধান কর: (i) $\begin{vmatrix} x+4 & 3 & 3 \\ 3 & x+4 & 5 \\ 5 & 5 & x+4 \end{vmatrix} = 0$ (ii) $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0.$

(iii) $\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$

32. A_1, B_1, C_1 যথাক্রমে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক হলে,

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ থেকে প্রমাণ কর যে, $a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0$.

33. সম্প্রসারণ না করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0.$$ [ঢা. '০৯; ব. '১৩]

34. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর :

(i) $4x + 3y - 2 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$;

(ii) $2x + 3y = 4$, $x - y = 7$.

(iii) $2x + y - z = -4$, $x - y + 3z = 3$, $x + 2y - 4z = 1$;

(iv) $2x + y + z = 0$, $x + y - 3z = 0$, $3x + 2y - 3z = 1$;

(v) $2x - 3y + 4z = 3$, $x + 4y - 5z = 0$, $5x - y + z = 5$.

(vi) $2x + y - 2z = 10$, $3x + 2y + 2z = 1$, $5x + 4y + 3z = 4$.

প্রশ্নমালা 1.3

সৃজনশীল প্রশ্ন

1. দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

(a) A^2 এর মান নির্ণয় কর।

(b) $A^2 + 2A - 11I$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. [রা. '১২]

(c) $A^2.A$ এবং $A.A^2$ এর সাহায্যে A^3 এর মান নির্ণয় কর। মান দুইটি কী পরস্পর সমান? যদি না হয়, তবে কেন?

2. (a) ম্যাট্রিক্সের *Adjoint* বলতে কি বোঝায় ?

(b) A এর (1, 1) তম, (1, 2) তম এবং (1, 3) তম সহগুণক যথাক্রমে A_1, A_2, A_3 হলে, সহগুণকগুলির মান নির্ণয় কর।

(c) দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$. $|A|$ এর মান নির্ণয় কর।

3. (a) বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলতে কি বোঝায় ?

(b) দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $|A|$ এর মান নির্ণয় কর।

(c) A^{-1} নির্ণয় করে দেখাও যে, $AA^{-1} = I_3$.

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন :

4. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ হলে, $A + B$ এর সমান —

(a) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 8 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

5. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে AB হলো :

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

6. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে AB এর সমান —

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -15 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} a-5 & 3 \\ -3 & a+5 \end{vmatrix}$ এর মান 0 হলে, a এর মান —

(a) $4, -4$ (b) $\sqrt{37}, -\sqrt{37}$
(c) $5, 3$ (d) $0, 4.$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ এর মান —

(a) -5 (b) 10 (c) 0 (d) 8.

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$, যখন x এর সমান —

(a) 2 (b) 5 (c) 1 (d) 0.

10. $\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$ এর মান —

(a) $abc(a+b)(b+c)(c+a)$ (b) $(a+b)(b+c)(c+a)$
(c) 0 (d) $abc.$

11. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, নিচে A ও B এর গুণফল দেওয়া আছে। কোনটি সঠিক —

(a) $\begin{bmatrix} -19 & -6 \\ 23 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 19 & 6 \\ -23 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 15 & -10 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} x+4 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হবে, যদি x এর মান —

(a) 4 (b) 0 (c) 12 (d) -4

13. $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ হলে, Adj. A হবে —

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ হলে, A^{-1} হবে —

(a) $\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1.1

1. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 10 & 2 & -8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 6 & 5 & -6 \end{bmatrix}$. **2.** $\begin{bmatrix} 10 & -23 & -9 \\ 9 & -4 & 8 \end{bmatrix}$. **3.** [52 74 34]. **4.** $\begin{bmatrix} 44 & -18 & -13 \\ -5 & -12 & -26 \\ -10 & -8 & 19 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 11 & 15 \end{bmatrix}$. **6.** $\begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 12 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -33 & 56 & 43 \\ 16 & 15 & 10 \\ 24 & 74 & 46 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ এবং $\begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$. **10.** $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$. **11.** $\begin{bmatrix} 15 & 15 & -2 \\ 25 & -4 & 11 \\ -7 & -15 & 2 \end{bmatrix}$.

12. $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$. **15.** $\begin{bmatrix} 0 & -11 & 0 \\ 0 & 33 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **16.** $\begin{bmatrix} 2 & -6 & -8 \\ -2 & -11 & 0 \\ -8 & -78 & -16 \end{bmatrix}$.

19.(b) $\begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$. **22.** $\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$. **23.** $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -15 & 22 \end{bmatrix}$.

24. $\begin{bmatrix} 5 & 12 & 8 \\ 8 & 1 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$. **25.** $\begin{bmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 10 & 0 & 15 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$. **26.** [0]

প্রশ্নমালা 1.2

1. (i) -1, **(ii)** 1, **(iii)** $4xyz$. **2 (i)** 0, **(ii)** $16 + 4(p + q) + pq$, **(iii)** -4.
24. (a) $-2(a + b)(a - b)^2$; **(b)** $a(a- b)(b - c)(c- a)$. **26.** -6; **30. (i)** $\frac{1}{21}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -13 \\ -3 & 6 & 9 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ **31. (i)** $1, -1, -12$; **(ii)** 4.

(iii) $x = -9, \pm\sqrt{3}$. **34. (i)** $x = -1, y = 2$; **(ii)** $x = 5, y = -2$; **(iii)** সমাধান নেই।

(iv) $x = 4, y = -7, z = -1$; **(v)** $x = y = z = 1$. (vi) $x = 1, y = 2, z = -3$.

প্রশ্নমালা 1.3

1. (a) $\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -4 & 17 \end{bmatrix}$ (b) 0. **2. (a)** -48 (b) $-40, 30, -4$. **3. (a)** 36 **(b)** $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 20 \\ 8 & 0 & -4 \\ 1 & 9 & -15 \end{bmatrix}$

4. *c*. **5.** *b*. **6.** *a*. **7.** *a*. . **8.** *c*. **9.** *c*. **10.** *c*. **11.** *b* ও *d*. **12.** *a*. **13.** *b*. **14.** 0.

দ্বিতীয় অধ্যায়

ভেক্টর Vectors

2.1. সদিক রাশির প্রতিরূপ হিসেবে ভেক্টর

আমরা যা কিছু পরিমাপ করতে পারি তাকেই রাশি বলি। যেমন 10 সে. মি., 2 কেজি, 5 মিনিট, 6 সে. মি./সে., (cms^{-1}), 2 ডাইন ইত্যাদি। এদের মধ্যে কতকগুলি শুধুমাত্র পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়। আবার কতকগুলি শুধু পরিমাণ দ্বারা প্রকাশ করা যায় না। উদাহরণস্বরূপ, যদি একটি বস্তুর প্রথম সেকেন্ডে সরণ 7 সে. মি. এবং দ্বিতীয় সেকেন্ডে সরণ 5 সে. মি. হয়, তবে একই সরলরেখায় একই দিকে সরণ হলে দুই সেকেন্ডে বস্তুটির সরণ (7 + 5) বা, 12 সে. মি.। পক্ষান্তরে একই সরলরেখায় ১ম সেকেন্ডের পর ২য় সেকেন্ডে বিপরীত দিকে সরণ হলে দুই সেকেন্ডে সরণ (7 – 5) বা, 2 সে. মি.। তাহলে স্পষ্টভাবে বলা যায় সরণের পরিমাণ জানার সাথে সাথে এর দিকও জানার প্রয়োজন হয়। অর্থাৎ পরিমাণ ও দিক ছাড়া সরণ সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায় না। সুতরাং প্রকৃতির সকল রাশিকে দুই ভাগে ভাগ করা যায়। যথা :

(*i*) **অদিক রাশি বা স্কেলার রাশি** (*Scalar*)।

(*ii*) **সদিক রাশি বা ভেক্টর রাশি** (Vector)।

(*i*) **অদিক রাশি বা স্কেলার রাশি :** যে সকল রাশি শুধুমাত্র পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায় ঐ সকল রাশিকে স্কেলার রাশি বলে। অর্থাৎ স্কেলার রাশির শুধু মান আছে, কোন দিক নেই। যেমন, দৈর্ঘ্য, দূরত্ব, সময়, ভর, আয়তন, ঘনত্ব, জনসংখ্যা, জন্মহার, তাপমাত্রা, কাজ, শক্তি ইত্যাদির প্রত্যেকেই স্কেলার রাশি।

(*ii*) **সদিক রাশি বা ভেক্টর রাশি :** যে সকল রাশি সম্পূর্ণভাবে প্রকাশের জন্য রাশির পরিমাণ ও নির্দিষ্ট দিক প্রয়োজন হয়, ঐ সকল রাশিকে ভেক্টর রাশি (সংক্ষেপে ভেক্টর) বা সদিক রাশি বলে। অর্থাৎ ভেক্টর রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে। যেমন– সরন, বল, বেগ, ত্বরণ, মন্দন, ভরবেগ ইত্যাদি প্রত্যেকেই ভেক্টর রাশি।

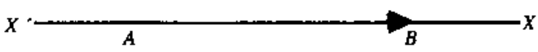
সদিক নির্দেশিত রেখাংশ : কোনো সরলরেখার এক প্রান্তকে আদি বিন্দু (Initial point) এবং অপর প্রান্তকে অন্তবিন্দু (Terminal Point) হিসেবে চিহ্নিত করলেই ঐ সরল রেখাটি একটি দিক নির্দেশিত রেখাংশ (directed line segment) হবে। যদি কোন সরলরেখার আদি বিন্দু A এবং অন্তবিন্দু B হয়, তাহলে AB রেখাংশটি দিক নির্দেশিত রেখাংশ হবে এবং একে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

2.2. জ্যামিতিক ভেক্টরের ধারক, সমতা, বিপরীত ভেক্টর, শূন্য ভেক্টর

প্রত্যেক রেখাংশের তিনটি পরিচয় আছে। যথা :

(*i*) **ধারক রেখা** (Support) (*ii*) **দৈর্ঘ্য** এবং (*iii*) **দিক**।

(*i*) **ধারক রেখা :** কোন সরলরেখার একটি অংশকে কোন দিক নির্দেশিত রেখাংশ সূচিত করা হলে, উক্ত সরলরেখাটিকে ঐ রেখাংশের ধারক রেখা বলে। অর্থাৎ ধারক রেখাটি অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত এবং দিক নির্দেশিত রেখাংশটি ধারক রেখার একটি অংশ। যেমন : AB রেখাংশের ধারক রেখা $X'X$.



(*ii*) **দৈর্ঘ্য:** $\overrightarrow{AB}$ রেখাংশের দৈর্ঘ্য হল A ও B বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্বের সমান, যা $|\overrightarrow{AB}|$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

(*iii*) দিক : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ এর দিক A বিন্দু হতে B বিন্দুর দিকে। অপর পক্ষে $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ এর দিক B বিন্দু হতে A বিন্দুর দিকে। অর্থাৎ উভয়ের ধারক রেখা এবং দৈর্ঘ্য (বা পরিমাণ) অভিন্ন, কিন্তু দিক ভিন্ন।

অতএব প্রত্যেক সদিক নির্দেশিত রেখাংশের (directed line segment) ধারক রেখা, দৈর্ঘ্য এবং দিক থাকে।

মন্তব্য : প্রত্যেক সদিক নির্দেশিত রেখাংশ একটি ভেক্টর।

ভেক্টর রাশিকে একটি অক্ষর অথবা একটি সদিক রেখাংশ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং ভেক্টরের প্রতীকের উপরে (→) চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। এ পুস্তকে মোটা করে ছাপা অক্ষরগুলিও ভেক্টর নির্দেশ করে। যেমন ভেক্টর $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$.

আবার $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{P}$ হলে, $\overrightarrow{BA} = -\boldsymbol{P}$ এবং $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$ = ভেক্টরের পরম মান।

(2) ভেক্টরের সমতা *(Equal vector)* : দুইটি ভেক্টর পরস্পর সমান হবে, যদি তাদের দৈর্ঘ্য ও দিক একই হয় এবং ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হয়।

(3) সদৃশ ভেক্টর *(Parallel vector)* : যদি দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল এবং এদের দিক একই হয়, তবে ভেক্টর দুইটিকে সদৃশ ভেক্টর বলে। সদৃশ ভেক্টর দুইটির মান (দৈর্ঘ্য) অসমানও হতে পারে।

(4) বিপরীত ভেক্টর : যদি দুইটি ভেক্টরের দৈর্ঘ্য সমান হয় এবং ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল হয় কিন্তু দিক বিপরীত হয়, তবে একটিকে অপরটির বিপরীত ভেক্টর বলা হয়। যেমন, ভেক্টর $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ হলে, এর বিপরীত ভেক্টর $\overrightarrow{BA} = -\boldsymbol{a}$ হবে।

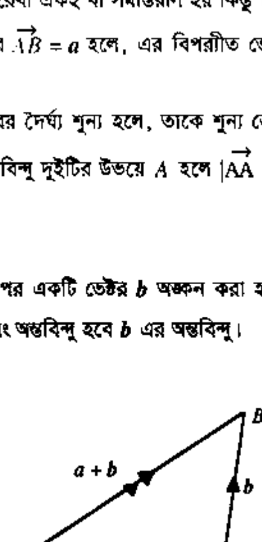
(5) শূন্য ভেক্টর *(Null vector or Zero Vector)* : কোন ভেক্টরের দৈর্ঘ্য শূন্য হলে, তাকে শূন্য ভেক্টর বলে। শূন্য ভেক্টরের আদিবিন্দু এবং অন্তবিন্দু একই। অর্থাৎ আদি বিন্দু ও অন্তবিন্দু দুইটির উভয়ে A হলে $|\overrightarrow{\mathrm{AA}}| = 0$. শূন্য ভেক্টরকে $\mathbf{0}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

2.3. দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতক

ভেক্টর যোগের সংজ্ঞা : কোনো একটি ভেক্টর $\boldsymbol{a}$ এর অন্তবিন্দু থেকে অপর একটি ভেক্টর $\boldsymbol{b}$ অঙ্কন করা হলে, ভেক্টর দুইটির যোগফল ভেক্টর $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ এর আরম্ভবিন্দু $\boldsymbol{a}$ এর আরম্ভবিন্দু এবং অন্তবিন্দু হবে $\boldsymbol{b}$ এর অন্তবিন্দু।

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র

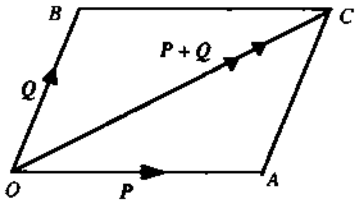
মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$ এমন দুইটি ভেক্টর যেন $\boldsymbol{a}$ এর অন্তবিন্দু এবং $\boldsymbol{b}$ এর আদিবিন্দু একই। তাহলে, $\boldsymbol{a}$ এর আদিবিন্দু O এবং $\boldsymbol{b}$ এর অন্তবিন্দু B সংযোগ রেখাংশ $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরকে $\boldsymbol{a}$ এবং $\boldsymbol{b}$ ভেক্টর দুইটির সমষ্টি (বা লব্ধি) বলা হয় এবং $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।



অর্থাৎ $\Delta\, OAB$ থেকে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.

দ্রষ্টব্য : $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ সমান্তরাল না হলে $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ এবং $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ ভেক্টর তিনটি দ্বারা ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় বলে ভেক্টর যোগের এই পদ্ধতিকে ত্রিভুজ সূত্র বলে।

ভেক্টর যোগের সামান্তরিক–সূত্র



সংজ্ঞা : কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি ভেক্টর P ও Q এর মান ও দিক সূচিত করা হলে, P ও Q ভেক্টর দুইটির সূচক রেখার ছেদবিন্দুগামী সামান্তরিকের কর্ণ $P + Q$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত করবে।

প্রমাণ : মনে করি, যে কোন বিন্দু O থেকে অংকিত P ও Q ভেক্টর দুইটি যথাক্রমে OA এবং OB দ্বারা সূচিত করা হল। $OACB$ সামান্তরিকটি অঙ্কন করি এবং OC যোগ করি। তাহলে, O বিন্দুগামী সামান্তরিকের OC কর্ণ দ্বারা P ও Q ভেক্টর দুইটির যোগফল (লব্ধি) সূচিত করবে। অর্থাৎ $\overrightarrow{OC} = P + Q$.

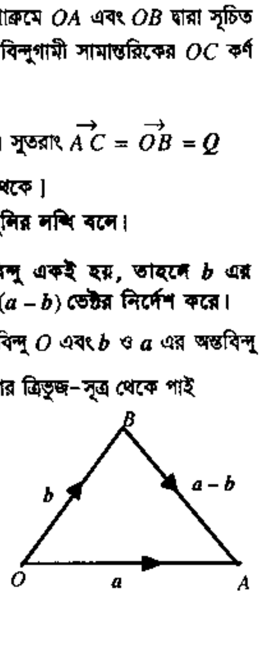
এখানে OB এবং AC সমান ও সমান্তরাল বলে তারা একই ভেক্টর সূচিত করে। সুতরাং $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = Q$

অতএব $P + Q = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ [ত্রিভুজ সূত্র থেকে]

মন্তব্য : দুই বা ততোধিক (সসীম সংখ্যক) ভেক্টরের যোগফলকে ভেক্টরগুলির লব্ধি বলে।

2.3.1. ভেক্টর বিয়োগ : যদি দুইটি ভেক্টর a এবং b এর আরম্ভ বিন্দু একই হয়, তাহলে b এর অন্তবিন্দু এবং a এর অন্তবিন্দুর সংযোগ রেখাংশ দ্বারা a ও b এর বিয়োগফল $(a - b)$ ভেক্টর নির্দেশ করে।

মনে করি $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, এখানে a ও b ভেক্টর দুইটির উভয়ের আদিবিন্দু O এবং b ও a এর অন্তবিন্দু যথাক্রমে B ও A| সুতরাং $\overrightarrow{BA}$ রেখাংশটি $a - b$ ভেক্টর সূচিত করবে। ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ–সূত্র থেকে পাই



$\Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ [উভয় দিকে $\overrightarrow{BO}$ যোগ করে]

$\Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + (- \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OB} = a - b$ [$\because$ $\overrightarrow{OB} = b$ হলে $\overrightarrow{BO} = - b$]

$\therefore \overrightarrow{BA} = a - b$.

স্পষ্টতঃ $\overrightarrow{BA} = a - b = a + (- b$.

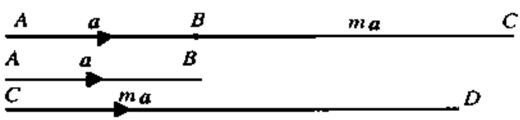
2.3.2. ভেক্টরের স্কেলার গুণিতক

কোন ভেক্টরকে একটি বাস্তব সংখ্যা বা স্কেলার দ্বারা গুণ করলে গুণফল একটি ভেক্টর হয়। মনে করি a যেকোনো একটি ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যা বা স্কেলার। তাহলে a ভেক্টরের m $(m > 0)$ গুণিতক ma দ্বারা একটি ভেক্টর বোঝায়, যার মান $|ma|$ এবং দিক হবে a ভেক্টরের দিকে। যদি m–এর মান ঋণাত্মক হয় অর্থাৎ $m < 0$, তাহলে ma ভেক্টরের দিক হবে a ভেক্টরের বিপরীত দিকে। $m = 0$ হলে ma একটি শূন্য ভেক্টর হবে এবং এর কোন নির্দিষ্ট দিক নেই। আবার a এবং ma ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখা এক অথবা সমান্তরাল হতে পারে।

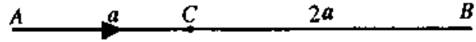
ধারক রেখা এক বা অভিন্ন :

ধারক রেখা সমান্তরাল :

যখন $AB \parallel CD$ এবং $CD = m\,(AB)$



লক্ষণীয় : যদি দুইটি ভেক্টরের ধারকরেখা অভিন্ন অথবা সমান্তরাল হয়, তাহলে যেকোনো একটি ভেক্টরকে অন্যটির স্কেলার গুণিতক আকারে প্রকাশ করা যায়।



যেমন, $CB = 2\,AC$ এবং $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}$ হলে, $\overrightarrow{CB} = 2\boldsymbol{a}$ এবং $\overrightarrow{BC} = -2\,\boldsymbol{a}$.

2.4. দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকের বিধি

:$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ তিনটি ভেক্টর রাশি এবং m ও n দুইটি স্কেলার রাশি বা বাস্তব সংখ্যার জন্য

(*i*) $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}$ [ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি]

(*ii*) $(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})+\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}+(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R})$, [সহযোজন বিধি]

(*iii*) $m\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}m$ [স্কেলার গুণিতকের বিনিময় বিধি]

(*iv*) $m(n\boldsymbol{P})=mn\boldsymbol{P}$ [স্কেলার গুণিতকের সহযোজন বিধি]

(*v*) $(m+n)\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{P}+n\boldsymbol{P}$ [স্কেলার গুণনের বন্টন বিধি]

(*vi*) $m(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})=m\boldsymbol{P}+m\boldsymbol{Q}$ [স্কেলার গুণনের বন্টন বিধি]

প্রমাণ : (*i*) **ভেক্টরের যোগের বিনিময় বিধি** (Commutative law of addition) :

মনে করি, ΔOAC–এর $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}$ দ্বারা যথাক্রমে $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ দুইটি ভেক্টর সূচিত করা হল। ভেক্টরের যোগের ত্রিভুজের–সূত্রানুসারে, $\overrightarrow{OC}$ এদের লব্ধির মান ও দিক সূচিত করবে। ধরি, লব্ধি, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{R}$.

$\therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ ... (*i*) অর্থাৎ $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$

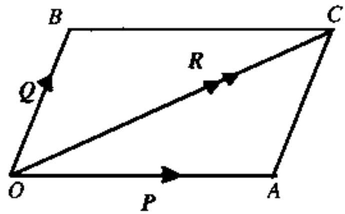
এখন $OACB$ সামান্তরিকটি অংকন করি। তাহলে $OA = BC$ এবং $OA \parallel BC$. আবার $AC = OB$ এবং $AC \parallel OB$.

সুতরাং $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$ ... (*ii*)

(*i*) ও (*ii*) থেকে আমরা পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}$

$\therefore$ ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি প্রমাণিত।



(*ii*) **ভেক্টর যোগের সহযোজন বিধি** (Associative law of addition) :

মনে করি, $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ ও $\boldsymbol{R}$ ভেক্টরকে যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{CD}$ দ্বারা সূচিত করা হল। এখন AD, BD ও AC যোগ করি। ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র থেকে পাই,

ΔABC–এ, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$

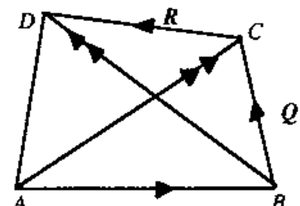
ΔACD–এ, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})+\boldsymbol{R}$ ... (*i*)

আবার, ΔBCD–এ, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R}$

এবং ΔABD–এ, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \boldsymbol{P}+(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R})$ ... (*ii*)

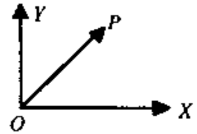
(*i*) ও (*ii*) থেকে আমরা পাই, $(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})+\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}+(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R})$.

অর্থাৎ ভেক্টর যোগের সহযোজন বিধি প্রমাণিত।



2.5. সমতলে ভেক্টরের অংশক

অবস্থান ভেক্টর : কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে অন্য যেকোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দ্বারা নির্দেশ করা হয়, তাকে ঐ বিন্দুর **অবস্থান ভেক্টর** বলা হয়।



মনে করি, x–অক্ষ ও y–অক্ষ O বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করেছে। তাহলে, O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। O বিন্দুর সাপেক্ষে যেকোনো বিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টর হল $\overrightarrow{OP}$. এখানে O বিন্দুকে **ভেক্টর–মূলবিন্দু** (vector origin) বলা হয়।

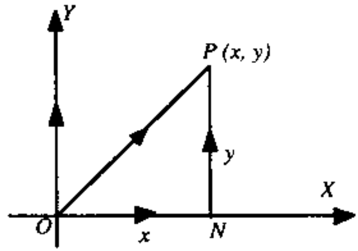
(1) একক ভেক্টর (Uni t Vector) : যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য (পরম মান) একক, তাকে একক ভেক্টর বলা হয়।

যদি $|\overrightarrow{OP}| \neq 0$ হয়, তবে একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{a}$ (ধরি), যেখানে $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$.

অর্থাৎ, কোন ভেক্টরকে তার দৈর্ঘ্য (পরম মান) দ্বারা ভাগ করলেই ঐ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর পাওয়া যায়।

একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a ও b এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য r হলে, আমরা জানি ভেক্টর, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. সুতরাং $\boldsymbol{r}$ এর অংশক $\boldsymbol{a}$ এবং $\boldsymbol{b}$. কিন্তু $\boldsymbol{r}$ কে কর্ণ ধরে অসংখ্যক সামান্তরিক অঙ্কন করা যায়। ফলে $\boldsymbol{a}$ ও $\boldsymbol{b}$ এর অসংখ্য মান পাওয়া যায়।

মনে করি, x–অক্ষ এবং y–অক্ষ পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। $P(x, y)$ একটি বিন্দু হলে, O এর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$. P বিন্দু থেকে OX এর উপর লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP}$. [ত্রিভুজ সূত্র থেকে]

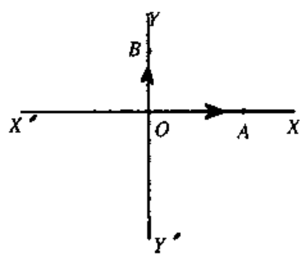


কিন্তু $\overrightarrow{ON} = x\,\boldsymbol{i}$ এবং $\overrightarrow{NP} = y\,\boldsymbol{j}$, যেখানে $\boldsymbol{i}$ এবং $\boldsymbol{j}$ যথাক্রমে x এবং y এর একক ভেক্টর।

সুতরাং, $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$ এর অংশক $x\,\boldsymbol{i}$ এবং $y\,\boldsymbol{j}$. অর্থাৎ অংশক অনন্যভাবে নির্ণয় করা যায়।

2.6. একক ভেক্টর $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$.

মনে করি, পরস্পর দণ্ডায়মান দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' যথাক্রমে x–অক্ষ এবং y–অক্ষ। x–অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টরকে $\mathbf{i}$ এবং y–অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টরকে $\mathbf{j}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।



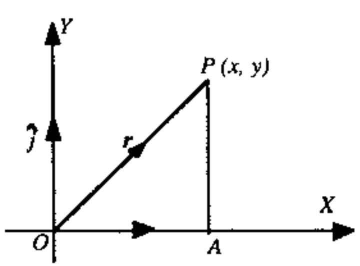
যেমন, $\mathbf{i} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{x}$, যেখানে $|\overrightarrow{OA}| = x$

এবং $\mathbf{j} = \dfrac{\overrightarrow{OB}}{y}$, যেখানে $|\overrightarrow{OB}| = y$

সুতরাং, দ্বিমাত্রিক জগতে যেকোনো বিন্দুর অবস্থান, ভেক্টরকে বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ করা যায়।

2.7. ভেক্টরকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ

মনে করি, OX ও OY রেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। তাহলে O মূলবিন্দু এবং OX ও OY রেখাদ্বয় যথাক্রমে x ও y–অক্ষ নির্দেশ করে। x ও y- অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\mathbf{i}$ ও $\mathbf{j}$ নেয়া হল। ধরি XY সমতলে অবস্থিত কোন একটি বিন্দু P এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y). P থেকে x–অক্ষের উপর PA লম্ব টানি এবং OP যোগ করি। সুতরাং $OA = x$ এবং $AP = y$. ধরি $OP = r$.



একক ভেক্টরের সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি, যে কোন ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{\text{ঐ ভেক্টর}}{\text{ঐ ভেক্টরের পরম মান}}$

অতএব x–অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টর, $\mathbf{i} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{OA} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{x}$ এবং

y– " " " " " $\mathbf{j} = \dfrac{\overrightarrow{AP}}{AP} = \dfrac{\overrightarrow{AP}}{y}$

$\therefore \overrightarrow{OA} = x\,\mathbf{i}$ এবং $\overrightarrow{AP} = y\,\mathbf{j}$.

এখন দুইটি ভেক্টরের যোগের ত্রিভুজ–সূত্রানুসারে $\Delta\, OAP$ থেকে আমরা পাই

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

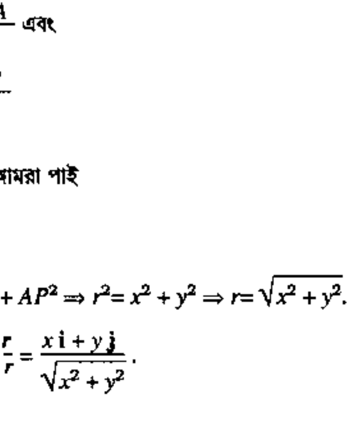
$$\therefore \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}.$$

আবার OAP সমকোণী ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই, $OP^2 = OA^2 + AP^2 \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

সুতরাং $\overrightarrow{OP}$, অর্থাৎ $\mathbf{r}$ ভেক্টর দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{OP}}{OP} = \dfrac{\mathbf{r}}{r} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

2.8. অবস্থান ভেক্টর

মনে করি, অক্ষদ্বয়ের মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ দ্বারা সূচিত হলো। তাহলে, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ কে যথাক্রমে P, Q, R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়। $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ কে যথাক্রমে $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। । x–অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টরকে $\mathbf{i}$ এবং y–অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টরকে $\mathbf{j}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। পাশের ছবি থেকে,



$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$ [ত্রিভুজ সূত্র]

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$

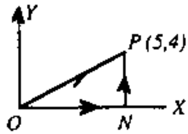
অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{PR} = \mathbf{r} - \mathbf{p}$.

$\overrightarrow{QR} = \mathbf{r} - \mathbf{q}$.

সাধারণভাবে, A ও B বিন্দুর মধ্যবর্তী ভেক্টরকে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ : $P(5, 4)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর।

মনে করি, OX এবং OY যথাক্রমে x- অক্ষ এবং y-অক্ষ। $P(x, y)$ বিন্দুটি স্থাপন করে OP যোগ করি। OX এর উপর PN লম্ব আঁকি। সুতরাং $ON = 5$ এবং $NP = 4$. এখন OPN ত্রিভুজ থেকে P-এর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{OP} = \vec{ON} + \vec{NP}$ [ত্রিভুজ সূত্র থেকে]

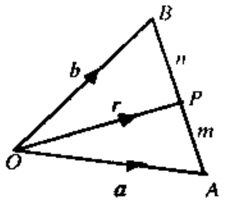


$\Rightarrow \vec{OP} = 5i + 4\mathbf{j}$.

2.9. দ্বিমাত্রিক জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে ভেক্টর

(a) বিভক্তিকরণ সূত্র : A ও B বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে a ও b এবং P বিন্দুটি AB রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। P বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি O মূলবিন্দু এবং P বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$. OA, OB এবং OP যোগ করি।



তাহলে, $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$ এবং $\vec{OP} = r$.

শর্তানুসারে, $AP : PB = m : n$

অর্থাৎ $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n} \Rightarrow \vec{AP} = \left(\frac{m}{n}\right) \vec{PB}$

$$\Rightarrow \vec{OP} - \vec{OA} = \left(\frac{m}{n}\right)(\vec{OB} - \vec{OP})$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{a} = \frac{m}{n}(\mathbf{b} - \mathbf{r})$$

$$\Rightarrow n\,\mathbf{r} - n\,\mathbf{a} = m\,\mathbf{b} - m\,\mathbf{r} \Rightarrow (m + n)\mathbf{r} = m\,\mathbf{b} + n\,\mathbf{a} \quad \therefore \mathbf{r} = \frac{m\,\mathbf{b} + n\,\mathbf{a}}{m + n}.$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. P বিন্দুটি AB এর মধ্যবিন্দু হলে, $m = n$ হবে এবং মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$$\mathbf{r} = \frac{m\,\mathbf{b} + m\,\mathbf{a}}{m + m} = \frac{m\,(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{2m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

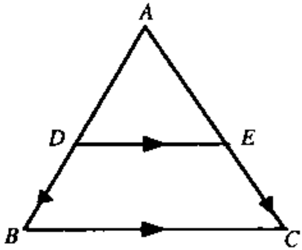
অর্থাৎ $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{r}$

$\Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} = 2\,\vec{OP}$ যেখানে OP হলো OAB ত্রিভুজের একটি মধ্যমা।

অনুসিদ্ধান্ত 2. P বিন্দুটি AB কে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে, $\mathbf{r} = \frac{m\,\mathbf{b} - n\,\mathbf{a}}{m - n}$.

(b) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর অর্ধেক ও সমান্তরাল। [ঢা. '০৫, '০৯; রা. য. ব. '০৮; সি. য. '১২

সমাধান : মনে করি, ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখাংশ DE. প্রমাণ করতে হবে $DE = \frac{1}{2} BC$ এবং $DE \parallel BC$.



ADE ত্রিভুজে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র থেকে পাই, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$ .....(i)

তদ্রূপ, ABC ত্রিভুজে, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ......(ii)

কিন্তু $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$

এখন (ii) থেকে $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ বা, $2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$ [(i) দ্বারা]

অতএব, $\left|\overrightarrow{DE}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|$

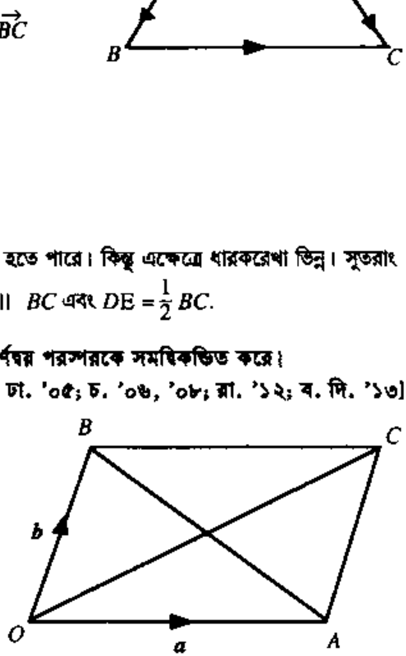
অর্থাৎ $DE = \frac{1}{2}BC$.

$\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{DE}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখা এক অথবা সমান্তরাল হতে পারে। কিন্তু এক্ষেত্রে ধারকরেখা ভিন্ন। সুতরাং $\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{DE}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখা সমান্তরাল। সুতরাং $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$.

(c) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[রা. কু. ঢা. '০৫; চ. '০৬, '০৮; রা. '১২; ব. দি. '১৩]

সমাধান : মনে করি, $OACB$ সামন্তরিকের OC এবং AB দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে এরা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরি এবং $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$.

যেহেতু OA এবং BC সমান ও সমান্তরাল।

সুতরাং $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}$, তদ্রূপ, $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$.

এখন A ও B বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\boldsymbol{a}$ ও $\boldsymbol{b}$.

তাহলে AB কর্ণের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$.

আবার ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র থেকে আমরা পাই,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OC}$

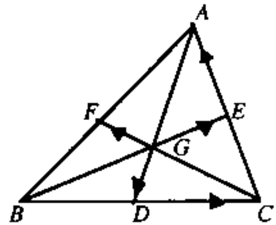
অর্থাৎ C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, তাহলে

OC কর্ণের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$.

যেহেতু AB ও OC কর্ণ দুইটির মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর অভিন্ন। সুতরাং সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(d) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

[ব. য. কু. '১০; ঢা. '০৮, '১০; কু. চ. রা. '১২]



সমাধান : মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ এবং D, E, F বিন্দু তিনটি যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে D এর অবস্থান ভেক্টর $\dfrac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}$

E " " " $\dfrac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}}{2}$

এবং F " " " $\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$

G বিন্দুটি AD মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে G এর অবস্থান ভেক্টর

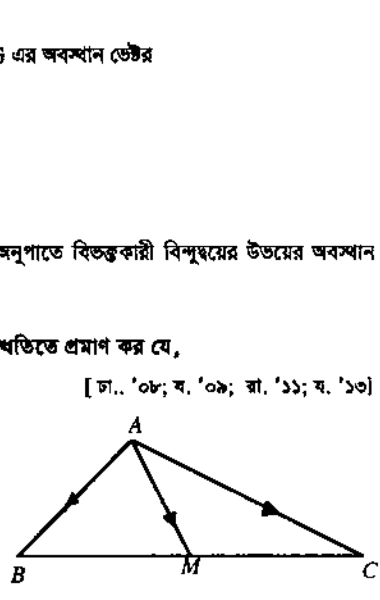
$$= \frac{1\boldsymbol{a} + 2\left(\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}\right)}{1+2}$$

$$= \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}$$

অনুরূপভাবে দেখান যায় যে, BE এবং CF মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্তকারী বিন্দুদ্বয়ের উভয়ের অবস্থান ভেক্টর $\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}$. সুতরাং ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

(e) ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু M হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে,

$\boldsymbol{AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)}$ [ঢা., '০৮; য. '০৯; রা. '১১; য. '১৩]



সমাধান : ABM ত্রিভুজে,

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র]

$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$

[স্ব–স্ব পক্ষের সাথে ডট গুণন করে]

$[\because \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a^2]$

$\Rightarrow AB^2 = AM^2 + MB^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB}$ ....(i)

তদ্রূপ ACM ত্রিভুজে, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$

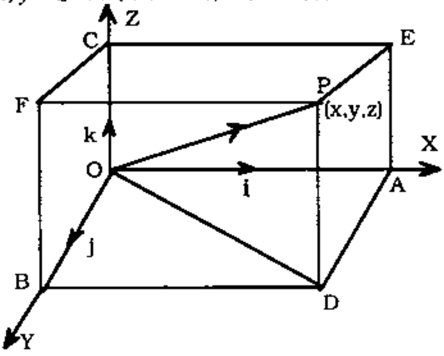
$\Rightarrow AC^2 = AM^2 + MB^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC}$ ....(ii) যেহেতু $MC^2 = MB^2$

$(i) + (ii) \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + MB^2) + 2\overrightarrow{AM}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + MB^2)$ $[\because \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0]$

2.10. ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের অংশক নির্ণয়

মনে করি, OX, OY ও OZ রেখাত্রয় পরস্পর O বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে এবং এ রেখাত্রয় যথাক্রমে x, y ও z–অক্ষ (আয়ত–অক্ষ) নির্দেশ করে।



ধরি x, y ও z–অক্ষের দিকে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ এবং যেকোনো বিন্দু P এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y, z)।

তাহলে, চিত্র থেকে আমরা পাই, $OA = x, OB = y$ এবং $OC = z$.

আবার একক ভেক্টরের সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি,

$$\mathbf{i} = \frac{\overrightarrow{OA}}{OA} = \frac{\overrightarrow{OA}}{x} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = x\mathbf{i}$$

তদ্রূপ $\overrightarrow{OB} = y\,\mathbf{j}$ এবং $\overrightarrow{OC} = z\,\mathbf{k}$

মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$

যার আদিবিন্দু (initial point) O এবং শীর্ষবিন্দু (terminal point) P.

এখন OP এর দৈর্ঘ্য $= r$ হলে,

ΔOPD এ, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP}$ ... (*i*) এবং ΔOBD এ, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$ ... (*ii*)

অতএব, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DP}$

$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OC}$ এবং যখন x, y ও z অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

$\therefore \boxed{\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}$

সুতরাং, $\overrightarrow{OP}$ এর অংশক যথাক্রমে $x\,\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$, $z\,\mathbf{k}$.

2.11. ত্রিমাত্রিক জগতে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ [অনুচ্ছেদ 2.10 এর চিত্র দ্রষ্টব্য]

মনে করি, OX, OY ও OZ রেখাত্রয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। তাহলে, এ রেখাত্রয় যথাক্রমে x, y ও z–অক্ষ (আয়ত–অক্ষ) নির্দেশ করে।

x, y ও z–অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টরকে যথাক্রমে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন,

$\mathbf{i} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{x}$, যেখানে $|\overrightarrow{OA}| = x$,

$\mathbf{j} = \dfrac{\overrightarrow{OB}}{y}$, যেখানে $|\overrightarrow{OB}| = y$

$\mathbf{k} = \dfrac{\overrightarrow{OC}}{z}$, যেখানে $|\overrightarrow{OC}| = z$

সুতরাং ত্রিমাত্রিক জগতে যেকোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরকে বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ করা যায়।

2.12. ভেক্টরকে i , j, k এর মাধ্যমে প্রকাশ

মনে করি, P(2, 3, – 4) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরকে **i** , **j**, **k** এর মাধ্যমে নির্ণয় করতে হবে।

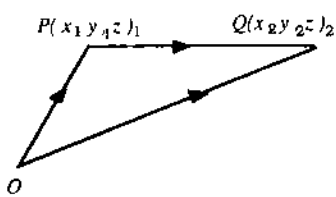
সমাধান : P(2, 3, – 4) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OP} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ [অনুচ্ছেদ 2.10 থেকে]

ভেক্টরের মান বা দৈর্ঘ্য নির্ণয় :

$$OP^2 = OD^2 + DP^2 \ [\because DP \perp OD] = OB^2 + BD^2 + DP^2 \ [\because BD \perp OB]$$

$$= OA^2 + OB^2 + OC^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ভেক্টরের মান বা দৈর্ঘ্য $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



সুতরাং OP বরাবর একক ভেক্টর, $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|r|} = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

দ্রষ্টব্য : $P(x_1, y_1, z_1)$ ও $Q(x_2, y_2, z_2)$ দুইটি বিন্দু হলে

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})$$

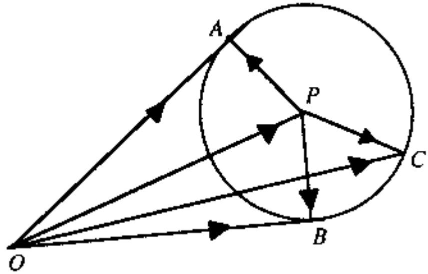
$$= (x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\,\mathbf{k}.$$

P ও Q এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \dfrac{P + Q}{|P + Q|}$.

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে $A(1, -1, -1)$, $B(3, 3, 1)$ এবং $C(-1, 4, 4)$ বিন্দু তিনটি একটি গোলকের (Sphere) উপর অবস্থিত, যার কেন্দ্র $P(0, 1, 2)$.

সমাধান : মনে করি O মূলবিন্দু।



তাহলে, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

$\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\overrightarrow{OC} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

$\overrightarrow{OP} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

এখন $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) - (\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$
$= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = (3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) - (\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{OP} = (-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) - (\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$\therefore \left|\overrightarrow{PA}\right| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}, \left|\overrightarrow{PB}\right| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

$\left|\overrightarrow{PC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{14}$

$\therefore PA = PB = PC = \sqrt{14}$ = গোলকের ব্যাসার্ধ। সুতরাং প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি গোলকের উপর অবস্থিত।

উদাহরণ 2. $P(1, 1, 1)$ এবং $Q(3, 2, -1)$ দুইটি বিন্দু হলে, $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর ও এর সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, O মূলবিন্দু। সুতরাং $\overrightarrow{OP} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) - (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

এবং $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

সুতরাং $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর $\eta = \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|} = \dfrac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{3} = \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right).$

2.13. ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের যোগফল ও স্কেলার গুণিতককে $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ মাধ্যমে প্রকাশ

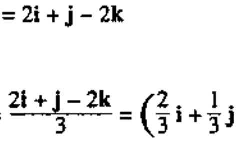
মনে করি, $\boldsymbol{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$

যোগফল : $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_1 + B_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2)\mathbf{j} + (A_3 + B_3)\mathbf{k}$

ভেক্টর গুণিতক : $\lambda\boldsymbol{A} = \lambda A_1\mathbf{i} + \lambda A_2\mathbf{j} + \lambda A_3\mathbf{k}$, যখন λ একটি স্কেলার। দ্বিমাত্রিক জগতে (XY কাঠামো) শুধু $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ এর সংশ্লিষ্ট রাশিগুলি থাকবে।

2.14. সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

(i) একটি সরলরেখা A বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং একটি ভেক্টর $\boldsymbol{b}$ এর সমান্তরাল রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।



মনে করি, O মূলবিন্দু এবং A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ এবং রেখাটির উপর P যেকোনো একটি বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$.

OAP ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}$

বা, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$

$= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$ .... (i)

কিন্তু $\overrightarrow{AP}$ ভেক্টরটি $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল। কাজেই, $\overrightarrow{AP} = \lambda\, \boldsymbol{b}$, যখন λ একটি স্কেলার।

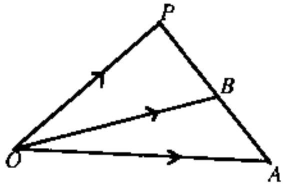
(i) থেকে, $\overrightarrow{AP} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$

বা, $\lambda\, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$ বা, $\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}}$ যা নির্ণেয় সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ।

অনু : সরলরেখাটি যদি মূলবিন্দুগামী হয়, তাহলে $\boldsymbol{a} = 0$, সুতরাং মূলবিন্দুগামী এবং $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $\boxed{\boldsymbol{r} = \lambda\, \boldsymbol{b}}$

(ii) দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ :

মনে করি, O মূলবিন্দু, রেখাটি A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং রেখাটির উপর P যে কোনো একটি বিন্দু। ধরি, A, B ও P বিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ এবং $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$,.



পাশের চিত্র থেকে পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$

এখন $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই। সুতরাং

$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, যখন λ স্কেলার।

$= \lambda(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$

আবার, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow \lambda(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \mathbf{r} - \boldsymbol{a}$

$\therefore \mathbf{r} = (1 - \lambda)\, \boldsymbol{a} + \lambda\, \boldsymbol{b}$, যা দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ।

2.15. ভেক্টরের স্কেলার গুণন

একটি সংখ্যার সাথে অপর একটি সংখ্যার গুণনের মত একটি ভেক্টরের সাথে অন্য একটি ভেক্টরের গুণন হয়। ভেক্টর গুণন দুই প্রকার : (*i*) স্কেলার বা ডট (.) গুণন এবং (*ii*) ভেক্টর গুণন বা ক্রস (×) গুণন।

স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা : দুইটি ভেক্টরের মান (দৈর্ঘ্য) এবং এদের অন্তর্গত কোণের কোসাইন এর গুণফলকে ভেক্টর দুইটির **স্কেলার গুণন** বলে। এ গুণফল একটি স্কেলার রাশি। এজন্য একে স্কেলার গুণন বলে। আবার এ প্রকার গুণন বোঝাতে ভেক্টরদ্বয়ের মাঝে ডট (.) দেয়া হয়। এজন্য একে ডট গুণন বলে।

$\boldsymbol{a}$ এবং $\boldsymbol{b}$ দুইটি ভেক্টর এবং এদের অন্তর্গত কোণ θ হলে $\boldsymbol{a}$ ও $\boldsymbol{b}$ –এর স্কেলার বা ডট গুণন

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|.|\boldsymbol{b}|\cos\theta = ab\cos\theta$. যখন $0 \le \theta \le \pi$ এবং $|\boldsymbol{a}| = a$, $|\boldsymbol{b}| = b$

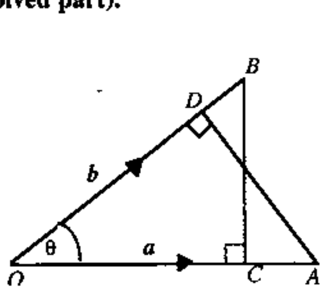
2.15.1. ভেক্টরের অভিক্ষেপ (*Projecti on*) ও উপাংশ (Resolved part).

(*i*) একটি ভেক্টরের উপর অন্য একটি ভেক্টরের অভিক্ষেপ :

মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ এবং ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ, $\angle AOB = \theta$. B বিন্দু থেকে OA এর উপর BC লম্ব অংকন করি। তাহলে, $\boldsymbol{a}$ ভেক্টরের উপর $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ বা সংক্ষেপে অভিক্ষেপ,

$OC = |\boldsymbol{b}|\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$, $\quad [\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta]$

তদ্রূপ $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের উপর $\boldsymbol{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $OD = |\boldsymbol{a}|\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$



(ii) একটি ভেক্টরের দিক বরাবর অপর একটি ভেক্টরের উপাংশ বা অংশক :

উপরের চিত্র থেকে $\boldsymbol{a}$ ভেক্টরের উপর $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ, $OC = |\boldsymbol{b}| \cos\theta$.

ধরি $\boldsymbol{a}$ ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর $\hat{a} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

এখন অভিক্ষেপ $OC = |\boldsymbol{b}| \cos\theta$ কে একক ভেক্টর $\hat{a}$ দ্বারা গুণ করলে গুণফল $\overrightarrow{OC}$,একটি ভেক্টর হবে, যা $\boldsymbol{a}$ ভেক্টর বরাবর $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের উপাংশ বা অংশক।

অর্থাৎ $\boldsymbol{a}$ ভেক্টর বরাবর $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের উপাংশ $\overrightarrow{OC} = |\boldsymbol{b}| \cos\theta\ \hat{a} = \frac{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\hat{a}$

তদ্রূপ $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের দিকে $\boldsymbol{a}$ ভেক্টরের উপাংশ বা অংশক $= \frac{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\hat{b}$.

দ্রষ্টব্য : কোন ভেক্টরের উপাংশ একটি ভেক্টর রাশি এবং অভিক্ষেপ স্কেলার রাশি। উপাংশ এবং অভিক্ষেপের পরম মান (দৈর্ঘ্য) সমান।

2.16. স্কেলার গুণজের ধর্ম

বিনিময় বিধি : (i) $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = ab\cos\theta = ba\cos\theta = \boldsymbol{b}.\boldsymbol{a}$

সুতরাং $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.\boldsymbol{a}$ অর্থাৎ স্কেলার গুণজ বিনিময় বিধি (Commutative law) মেনে চলে।

(ii) বণ্টন বিধি : $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}$

(iii) θ সূক্ষ্মকোণ হলে, স্কেলার গুণন ধনাত্মক হবে এবং স্থূলকোণ হলে ঋণাত্মক হবে।

(iv) $\theta = 90^\circ$ হলে, $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = ab\cos 90^\circ = 0$.

সুতরাং দুইটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হবার শর্ত হলো ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণজ শূন্য।

সুতরাং আয়ত অক্ষ পদ্ধতির ক্ষেত্রে $\mathbf{i}.\mathbf{j} = 1.1\cos 90^\circ = 0$ তদ্রূপ $\mathbf{j}.\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{k}.\mathbf{i} = 0$

আবার $\mathbf{i}.\mathbf{i} = 1.1\cos 0 = 1$; তদ্রূপ $\mathbf{j}.\mathbf{j} = 1$, $\mathbf{k}.\mathbf{k} = 1$

অতএব $\mathbf{i}.\mathbf{j} = \mathbf{j}.\mathbf{k} = \mathbf{k}.\mathbf{i} = 0$, যেহেতু $\theta = 90^\circ$ এবং $\mathbf{i}.\mathbf{i} = \mathbf{j}.\mathbf{j} = \mathbf{k}.\mathbf{k} = 1$, যেহেতু এখানে $\theta = 0$.

অনুসিদ্ধান্ত : $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0 = a.a = a^2$ অর্থাৎ $a^2 = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}$.

দুইটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় :

$A = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ এবং $B = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta. \Rightarrow \cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{\Sigma x_1^2}\sqrt{\Sigma x_2^2}},$$

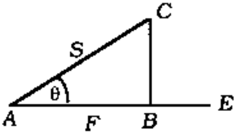
যেহেতু $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}).(x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

যখন $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{\Sigma x_1^2}$ এবং $|\boldsymbol{B}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{\Sigma x_2^2}$

2.16.1. স্কেলার গুণজের ধর্মের প্রয়োগ

মনে করি, একটি বস্তুর উপর **F** বলের ক্রিয়ার ফলে বস্তুটির সরণ $\mathbf{S} = \overrightarrow{AC}$, যখন F বলটি AE বরাবর ক্রিয়াশীল।

F বলের দিকে সরণ S এর মান $= AB = AC \cos\theta$
আমরা জানি, কাজ = বলের মান × বলের দিকে সরণের মান।



$$\therefore W = F \times AB$$
$$= F \times AC \cos\theta$$
$$= FS \cos\theta$$
$$= \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে, কাজ = $\mathbf{F}$ এবং $\mathbf{S}$ এর স্কেলার গুণন। কাজেই, কাজ একটি স্কেলার রাশি।

উদাহরণ : একটি কণার উপর $F = (5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})N$ বল প্রয়োগে কণাটির সরণ $r = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$মি. প্রযুক্ত বলটি কর্তৃক কাজের পরিমাণ কত?

সমাধান : আমরা জানি,

কাজ = বল এবং সরণের স্কেলার গুণজ

$$\therefore W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$$
$$= (5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) . (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \; [\because \mathbf{i.i} = \mathbf{j.j} = \mathbf{k.k} = 1; \mathbf{j.k} = \mathbf{k.i} = \mathbf{i.j} = 0]$$
$$= 10 + 9 - 8 = 11 \text{ Joule}$$

2.17. স্কেলার গুণজ

দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণজকে ভেক্টর দুইটির অংশকের মাধ্যমে প্রকাশ :

মনে করি, $\boldsymbol{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$

তাহলে, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \{ \because \mathbf{i.i} = \mathbf{j.j} = \mathbf{k.k} = 1; \mathbf{i.j} = \mathbf{j.k} = \mathbf{k.i} = 0\}$$

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. $A = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ ভেক্টরটির মান নির্ণয় কর।

সমাধান : ভেক্টর A এর মান, $|A| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7.$

উদাহরণ 2. যদি $A = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ এবং $B = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ হয়, তাহলে (i) $|A + B|$ (ii) $2A + B$ নির্ণয় কর।

সমাধান : (i) $A + B = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) + (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = (3 - 2)\mathbf{i} + (-1 + 4)\mathbf{j} + (-4 - 3)\mathbf{k}$

$$= \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

$$\therefore |A + B| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-7)^2} = \sqrt{1 + 9 + 49} = \sqrt{59}$$

(ii) $2A + B = 2(3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) + (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

$$= 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k} - 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

উদাহরণ 3. $A = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ এবং $B = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ দুইটি ভেক্টর। দেখাও যে, তারা পরস্পর লম্ব।

সমাধান : মনে করি, A ও B ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ.

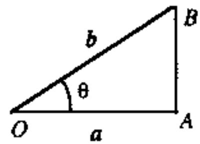
এখন $A \cdot B = (3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

$\Rightarrow |A|\,|B| \cos\theta = 15 - 21 + 6 = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 = \cos 90° \Rightarrow \theta = 90°$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

উদাহরণ 4. যদি $a = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ এবং $b = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \mathbf{k}$ দুইটি ভেক্টর হয়, তবে a ভেক্টরের উপর b ভেক্টরের অভিক্ষেপ ও a ভেক্টর বরাবর b ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

সমাধান : a ভেক্টরের উপর b ভেক্টরের অভিক্ষেপ



$$OA = b\cos\theta = \frac{ab\cos\theta}{a} = \frac{a \cdot b}{a} = \frac{(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot (4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \mathbf{k})}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2}}$$

$$= \frac{4 + 16 - 2}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{18}{\sqrt{9}} = \frac{18}{3} = 6.$$

২য় অংশ : a ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর $\hat{a} = \frac{a}{|a|} = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{3}$

$\therefore$ a ভেক্টর বরাবর b এর উপাংশ $= \frac{a.b}{|a|}(\hat{a}) = \frac{6}{3}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$

উদাহরণ 5. λ এর মান নির্ণয় কর যেন $a = 2\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + \mathbf{k}$, এবং $b = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ পরস্পর লম্ব হয়।

সমাধান : আমরা জানি, দুইটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হলে এদের ডট বা স্কেলার গুণফল শূন্য অর্থাৎ ভেক্টর দুইটি লম্ব হলে $a.b = 0$

বা, $2\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + \mathbf{k}).(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 0$

বা, $8 - 2\lambda - 1 = 0$ [$\because \mathbf{i}.\mathbf{i} = \mathbf{j}.\mathbf{j} = \mathbf{k}.\mathbf{k} = 1;\ \mathbf{j}.\mathbf{k} = \mathbf{k}.\mathbf{i} = \mathbf{i}.\mathbf{j} = 0$]

বা, $2\lambda = 7 \Rightarrow \lambda = \frac{7}{2}.$

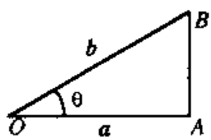
উদাহরণ 6. $a = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ভেক্টর বরাবর $b = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

[রা. য. '১১]

সমাধান : a ভেক্টর বরাবর b ভেক্টরের উপাংশ

$=$ (a ভেক্টরের উপর b ভেক্টরের অভিক্ষেপ) (a ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর)

$= OA\,(\hat{a}) = (\mathrm{b}\cos\theta)(\hat{a})$, যখন a এবং b ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ θ



$$= \frac{\mathrm{abcos}\theta}{a}(a) = \frac{a \cdot b}{|a|}(a)$$

$$= \frac{(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \cdot (5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})\,(\hat{a})}{\sqrt{4 + 1 + 4}}$$

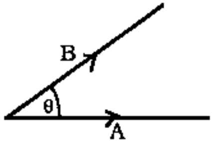
$$= \frac{10 - 3 - 4}{3}(a) = 1\,\frac{(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}).$$

উদাহরণ 7. $A = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ **এবং** $B = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ **হলে,** A **ও** B **এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।**

সমাধান : মনে করি, A ও B এর অন্তর্গত কোণ θ.

অতএব $A \cdot B = |A||B|\cos\theta$ ....((i)

যখন $|A| = \sqrt{4+4+1} = 3$, $|B| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$



$(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = 3\sqrt{35}\cos\theta$

$\Rightarrow 2 - 6 - 5 = 3\sqrt{35}\cos\theta$

$\Rightarrow -9 = 3\sqrt{35}\cos\theta.$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{-3}{\sqrt{35}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{-3}{\sqrt{35}}\right).$

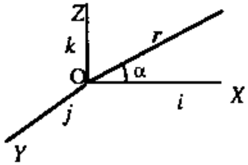
উদাহরণ 8. দেখাও যে, $r = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ **ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে সমান কোণে আনত।**

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত r ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যথাক্রমে α, β, γ কোণ উৎপন্ন করে এবং x, y ও z-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

ধরি, $a = \mathbf{i}$, $b = \mathbf{j}$ এবং $c = \mathbf{k}$.

এখন $|r| = |\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$. এবং $|a| = |\mathbf{i}| = \sqrt{1^2} = 1.$

ডট বা স্কেলার গুণন করে আমরা পাই,



$r \cdot a = |r||a|\cos\alpha$

বা, $(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = (\sqrt{3})\, 1 \cos\alpha$ বা, $1 = \sqrt{3}\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

তদ্রূপ, $r \cdot b = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = \sqrt{3}\cos\beta$ বা, $\beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

এবং $r \cdot c = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = \sqrt{3}\cos\gamma$

বা, $1 = \sqrt{3}\cos\gamma$ বা, $\gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\therefore \alpha = \beta = \gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$

সুতরাং, r ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে সমান কোণে আনত।

উদাহরণ 9. $3i + 5j$ **বিন্দুগামী এবং** $2i + 4\mathbf{j}$ **ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান: আমরা জানি, a বিন্দুগামী এবং b ভেক্টরের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ,

$\mathbf{r} = a + \lambda b$ .... (i)

যেখানে, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $a = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ এবং $b = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

(i) থেকে পাই, $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \lambda(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$

বা, $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (3 + 2\lambda)\mathbf{i} + (5 + 4\lambda j)$ যা নির্ণেয় রেখার সমীকরণ।

প্রশ্নমালা 2.1

1. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F হলে, $\vec{AD}$, $\vec{BE}$ এবং $\vec{CF}$ ভেক্টরগুলিকে $\vec{AB}$ এবং $\vec{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

2. $ABCD$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD হলে, $\vec{AB}$ ও $\vec{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\vec{AD}$ ও $\vec{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং দেখাও যে, $\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{BC}$ এবং $\vec{AC} - \vec{BD} = 2\vec{AB}$.

3. (*i*) $ABCDE$ একটি পঞ্চভুজ। $\vec{AB} = \boldsymbol{a}$, $\vec{BC} = \boldsymbol{b}$, $\vec{CD} = \boldsymbol{c}$, এবং $\vec{DE} = \boldsymbol{d}$ হলে, দেখাও যে,

$$\vec{AE} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}.$$

(*ii*) $ABCDE$ পঞ্চভুজ হলে, প্রমাণ কর যে, $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EA} = 0$.

(*iii*) OAC ত্রিভুজে AC বাহুর মধ্যবিন্দু B. যদি $\vec{OA} = \boldsymbol{a}$ এবং $\vec{OB} = \boldsymbol{b}$ হয়, তবে $\vec{OC}$ কে $\boldsymbol{a}$ ও $\boldsymbol{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [দি. '১২; ঢা. '১৩]

4. (*i*) $\vec{OA} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{OB} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. হলে $\vec{AB}$ এবং $\left|\vec{AB}\right|$ নির্ণয় কর।
[রা. য. চ. '১২; ঢা. '১৩] উ: $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, 7$

(*ii*) $\boldsymbol{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ হলে, $(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c}.\boldsymbol{a})$ এর মান নির্ণয় কর। [য. '০৯] উ: 1.

5. (*i*) তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ এবং $-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ হলে, দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে। [সি. চ. '১০; ঢা. চ. '১৩]

(*ii*) প্রমাণ কর যে, $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{i} - 3j - 5\mathbf{k}$ এবং $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ভেক্টরত্রয় একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

(*iii*) দেখাও যে, $\boldsymbol{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\boldsymbol{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ভেক্টরগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে। [ঢা. '০৪; ব. '১২]

6. (*i*) $\boldsymbol{P} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{Q} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ হলে, $\boldsymbol{P}$ ও $\boldsymbol{Q}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [রা. '০৬; য. '১১, '১৩; ঢা. '১২] উ: $\left(\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}\right)$.

(*ii*) $P(1, 1, 1)$ এবং $Q(3, 2, -1)$ দুইটি বিন্দু হলে, $\vec{PQ}$ ভেক্টর এবং এর সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [য. '০৯] উ: $\vec{PQ} = 2\mathbf{i} + \hat{j} - 2\mathbf{k}, \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$.

(*iii*) $U = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ এবং $V = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ হলে, U এবং V এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। উ: $\frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}}{5}$.

(*iv*) $2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$ ভেক্টরটির সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

7. (*i*) দেখাও যে, $A = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ এবং $B = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ পরস্পরের উপর লম্ব।

(*ii*) $A = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $B = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$ হলে ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।
[সি. '১০; ঢা. '১২] উ: $\cos^{-1}\left(\frac{13}{45}\right)$

8. (*i*) a এর মান কত হলে $a\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $2a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ পরস্পর লম্ব হবে। উ: 1, − 2.
[ঢা. '০৮; সি. রা. '১২; কু. য. '১৩]

(*ii*) যদি $2\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ও $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হয়, তবে λ এর মান নির্ণয় কর।
[সি. '০৬] উ: $\lambda = \frac{5}{2}$.

9. (*i*) $A = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ এবং $\overrightarrow{B} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ হলে, A ও B এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। উ: 90^0

(*ii*) $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।
[রা. য. দি. '১০; ঢা. চ. '১১; চ. ব. দি. সি. রা. '১৩] উ: $\cos^{-1} 2/3, \cos^{-1} 1/3, \cos^{-1} (-2/3)$

(*iii*) $3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।
[ব. '০৮] উ: $\cos^{-1} 3/7, \cos^{-1} (-6/7), \cos^{-1} 2/7$

10. (*i*) $A = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $\overrightarrow{B} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $A.B$ এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।
[সি. '০৬; চ. '১০] উ: $\cos^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$

(*ii*) $A = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $B = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ হলে, $A.B$ এবং এদের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।
[রা. ব. '১১; য. '১৩] উ: $\cos^{-1}\left(\frac{-4\sqrt{6}}{21}\right)$

(*iii*) $A = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $B = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ হলে, A এবং B এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।
[সি. '০৮] উ: $\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}\right)$

11. (ক) কোন একটি বস্তু কণার উপর নিম্নোক্ত চারটি ভেক্টর ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।
$A = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, B = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, C = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, D = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. উ: $\sqrt{5}$.

(খ) $a = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $b = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ এবং $c = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ হলে, নিম্ন লিখিত ভেক্টরগুলি নির্ণয় কর :
(*i*) $a - 2b$; (*ii*) $3b + a$; (*iii*) $2a - 3c$ উ: (*i*) $5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ (*ii*) $17\mathbf{j}$ (*iii*) $13\mathbf{j}$.

(গ) $A = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ এবং $B = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ হলে, দেখাও যে, $(A + B)$ এবং $(A - B)$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব। [ঢা. '০৮; দি. ব. '১০; চ. ব. '১২]

12. যদি $a = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $b = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ হয়, তবে $2a + b$ এবং $a + 2b$ এর অন্তঃস্থ কোণ নির্ণয় কর।
উ: $\cos^{-1}\left(\frac{31}{50}\right)$

13. (*i*) $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 3, 0)$, $C(1, -1, 1)$ বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর লিখ এবং $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ ও $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ নির্ণয় কর। উ: $A = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $B = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $C = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $3, \sqrt{6}$

(*ii*) মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে $A(2, -1, 7)$, $B(-4, 5, 0)$ হলে $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ নির্ণয় কর। উ: 11

(*iii*) (2, 3, 1) এবং (3, 1, − 2) ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর। উ: 7.

14. দেখাও যে, $A = 9\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ এবং $B = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

15. দেখাও যে, $A = 8\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ এবং $B = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [য. '১২]

16. ধ্রুবক a এর মান নির্ণয় কর যে, $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব। উ: $-\frac{9}{4}$

17. $2\mathbf{i} + a\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর। [কু. রা. '০৫] উ: 3.

18. $A = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $B = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ হলে, A ও B এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। উ: $\cos^{-1}\frac{4}{21}$.

19. (*i*) দেখাও যে, $a = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ এবং $b = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

(*ii*) দেখাও যে, $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ এবং $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।

20. $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। উ: $\cos^{-1}\sqrt{\frac{6}{7}}$

21. $A = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ এবং $B = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। উ: $\cos^{-1}\left(\frac{-18}{7\sqrt{61}}\right)$

22. $a = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $b = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [কু. '১৩] উ: $\cos^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$

23. $A = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ও $B = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ হলে $(2A + B)$ এবং $(6A - 3B)$ এর মান নির্ণয় কর।

উ: $6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $-6\mathbf{i} + 24\mathbf{j} - 24\mathbf{k}$

24. $A = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $B = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\vec{C} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ হলে $(B + 2A)$, $\left(\vec{C} - A\right)$ নির্ণয় কর।

উ: $8\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

25. $A = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $B = \sqrt{3}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; A ভেক্টরের উপর B ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

[কু. '০৪, '০৬; সি. '১১; চ. কু. '১২] উ: $\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} + 1)$.

26. $a = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ভেক্টর বরাবর $b = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর। উ: $\frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$

[ব. চ. '১১; ঢা. '১২]

27. $a = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ এবং $b = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$ দুইটি ভেক্টর হলে, a ভেক্টরের উপর b ভেক্টরের অভিক্ষেপ ও a ভেক্টর বরাবর b ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর। উ: $4, \frac{8}{7}\mathbf{i} - \frac{12}{7}\mathbf{j} + \frac{24}{7}\mathbf{k}$

28. $A = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ভেক্টর বরাবর $B = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ ভেক্টরের অংশক এবং B এর উপর A এর অভিক্ষেপ নির্ণয়। উ: $\frac{20}{9}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2)$, $\frac{20}{11}$

29. (i) $A = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ এবং $B = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ হলে, A ভেক্টরের উপর B ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ কত?

[সি. '০৬] উ: $\frac{8}{3}$

(ii) $B = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ভেক্টরের উপর $A = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

[কু. '১১; সি. '১২; রা. '১৩] উ: $\frac{8}{7}$

30. যদি $a = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $b = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \mathbf{k}$ দুইটি ভেক্টর হয়, তবে a ভেক্টরের উপর b ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। উ: $19/\sqrt{6}$ বর্গ একক

31. $A = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $B = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$ হলে, B এর দিক বরাবর A এর অংশক নির্ণয় কর।

[দি. কু. '১০; সি. '১১] উ: $\frac{13}{225}(2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 11\mathbf{k})$

32. $a = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $b = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ হলে b ভেক্টরের উপর a এর অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। উ: $\frac{9}{\sqrt{14}}$.

[য. '০৬]

2.18. ভেক্টরের ভেক্টর গুণন

সংজ্ঞা : দুইটি ভেক্টরের মানের গুণফল এবং এদের মধ্যবর্তী কোণের সাইন এর গুনফলকে ভেক্টর দুইটির ভেক্টর গুণন বলে। এ গুণফল একটি ভেক্টর যার দিক হবে ভেক্টর দুইটির সমতলে লম্বভাবে স্থাপিত ডানহাতের স্ক্রুকে প্রথম ভেক্টর থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যেদিকে অগ্রসর হয় সেদিকে।

$\boldsymbol{a}$ এবং $\boldsymbol{b}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, এদের ভেক্টর গুণফল একটি ভেক্টর $\boldsymbol{c}$ হলে,

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ (পড়তে হবে a ক্রস b)

$$= |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\theta\, \boldsymbol{n} = ab \sin\theta\, \boldsymbol{n}$$

যখন $(0 \le \theta \le \pi)$ এবং $\boldsymbol{n}$ একটি $\boldsymbol{c}$–এর দিক নির্দেশক একক ভেক্টর, যা $\boldsymbol{a}$ ও $\boldsymbol{b}$ এর সমতলের উপর লম্ব।

মন্তব্য : ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যে $(\times)$ ক্রস ব্যবহার করা হয় এজন্য ভেক্টর গুণনকে ক্রসগুণনও বলা হয়।

2.18.1. ভেক্টর গুণনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

$OACB$ সামান্তরিকের OA এবং OB সন্নিহিত বাহু দুইটি দ্বারা যথাক্রমে $\boldsymbol{a}$ এবং $\boldsymbol{b}$ ভেক্টর দুইটি সূচিত করা হল। যদি $\angle AOB = \theta$ হয়, তাহলে

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right| \left|\overrightarrow{OB}\right| \sin\theta\, \hat{n}$$

যেখানে $\boldsymbol{a}$ এবং $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর। উল্লেখ ডানহাতি স্ক্রু $\boldsymbol{a}$ থেকে $\boldsymbol{b}$ এর দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘূর্ণন হলে $\hat{n}$ এর দিক OD বরাবর এবং $\boldsymbol{b}$ থেকে $\boldsymbol{a}$ এর দিকে ঘূর্ণন হলে $\hat{n}$ এর দিক DO বরাবর হবে।

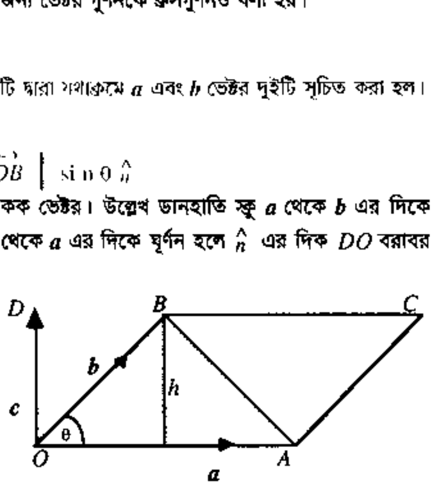
আবার $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = (OA)\,(OB) \sin\theta$

$= (OA)\,h$, যখন $h = OB \sin\theta$

$= 2.\frac{1}{2}\, OA.h$

$= 2 \times \Delta OAB$

$= OACB$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।



> সুতরাং দুইটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের পরম মান সংশ্লিষ্ট সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

2.19. ভেক্টর গুণজের ধর্ম

(i) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ অর্থাৎ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \ne \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$, কারণ এদের মান ও ধারক রেখা অভিন্ন কিন্তু দিক ভিন্ন। সুতরাং ভেক্টর গুণন বিনিময় নিয়ম (Commutative law) মেনে চলে না।

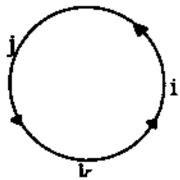
(ii) $\theta = 0$ বা, π হলে, $\sin\theta = 0$

$\therefore \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ অর্থাৎ দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের ভেক্টর গুণজ শুন্য হবে।

> সুতরাং দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হবার শর্ত তাদের ভেক্টর গুণজ শুন্য।

(iii) $\theta = 90°$ হলে, $\sin\theta = 1$

$\therefore \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = ab \sin\theta\, \boldsymbol{n} = ab\, \boldsymbol{n}$, যেখানে $\boldsymbol{n}$ হলো c এর দিক নির্দেশক একক ভেক্টর, যা $\boldsymbol{a}$ ও $\boldsymbol{b}$ এর সমতলের উপর লম্ব।



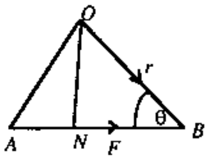
(ri) আয়ত অক্ষ পদ্ধতির ক্ষেত্রে $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$, যেহেতু $\theta = 0$

এবং $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

কিন্তু $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$

অর্থাৎ তীর চিহ্ন বরাবর ক্রম ঠিক রাখলে ভেক্টর গুণজ ধনাত্মক এবং এর বিপরীত ক্রম হলে ভেক্টর গুণজ ঋণাত্মক।

2.19.1. ভেক্টর গুণজের প্রয়োগ



মনে করি, একটি বস্তু O বিন্দুতে আটকানো আছে। বস্তুটির উপর F বল প্রয়োগ করা হলো। F বলটির মান ও দিক $\overrightarrow{AB}$ রেখাংশ দ্বারা সূচিত হলো। B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{r}$, $ON \perp AB$ এবং $\angle OBN = \theta$, কাজেই $ON = r \sin \theta$. তাহলে, O বিন্দুর সাপেক্ষে F বলের মোমেন্ট ভেক্টর $= \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r}$

$= Fr \sin \theta \, \hat{n}$ [$\hat{n}$ হলো $\boldsymbol{F}$ ও $\boldsymbol{r}$ এর সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর]

এবং মোমেন্টের পরিমান $= |\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r}| = Fr \sin \theta$

$= F \times$ ($\boldsymbol{F}$ ভেক্টরের উপর $\boldsymbol{r}$ ভেক্টরের উল্লম্ব অংশক)

$\therefore$ বলের মোমেন্ট একটি ভেক্টর রাশি।

2.20. ভেক্টর গুণজ

ভেক্টর গুণজকে ভেক্টর দুইটির অংশকের মাধ্যমে প্রকাশ : [ঢা. '০১; সি. '০২]

মনে করি $\boldsymbol{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$.

তাহলে, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_1\mathbf{i} \times a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$

$$= 0 + a_1b_2\,\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j} - a_2b_1\,\mathbf{k} + 0 + a_2b_3 i + a_3b_1 j - a_3b_2 i + 0$$

$$[\, i \times i = j \times j = k \times k = 0;\ i \times j = \mathbf{k};\ j \times k = i;\ i \times k = j \,]$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\,\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$ [ভেক্টর গুণজকে নির্ণায়কের মাধ্যমে প্রকাশ করে]

অনুসিদ্ধান্ত : a, b, c ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হলে, $(a \times b).\, c = 0$ যখন $c = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$

$$\Rightarrow (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\, c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_3 = 0$$

$$\Rightarrow a_1\,(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2\,(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3\,(b_1c_2 - b_2c_1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$ যা তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্ত।

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. দুইটি ভেক্টর $A = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ এবং, $B = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি একক লম্ব ভেক্টর নির্ণয় কর। [ঢা. '০৬, '০৯; ব. দি. সি. '১৩]

সমাধান : আমরা জানি, $A \times B$ একটি ভেক্টর, যা A ও B উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব।

$$A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (6+9)\,\mathbf{i} + (-12+2)\,\mathbf{j} + (6+24)\,\mathbf{k} = 15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}.$$

এবং $|A \times B| = \sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2} = \sqrt{225 + 100 + 900} = \sqrt{1225} = 35$

সুতরাং A ও B ভেক্টর দুটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একক লম্ব ভেক্টর

$$\eta = \frac{A \times B}{|A \times B|} = \frac{15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}}{35} = \frac{5}{35}(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \frac{1}{7}(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}).$$

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ভেক্টরটি A ও B উভয়ের উপর লম্ব।

$\Rightarrow A.r = 0$ এবং $B.r = 0 \Rightarrow 2x - 6y - 3z = 0$ এবং $4x + 3y - z = 0$

বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় পাই, $\frac{x}{6+9} = \frac{y}{-12+2} = \frac{z}{6+24} = c$ (ধরি) $\Rightarrow x = 15c,\ y = -10c,\ z = 30c$

$\therefore r = 15c\mathbf{i} - 10c\mathbf{j} + 30c\mathbf{k} \Rightarrow |r| = \sqrt{225c^2 + 100c^2 + 900c^2} = \sqrt{1225c^2} = 35c$

$\therefore A$ ও B উভয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর, $\frac{r}{|r|} = \frac{(15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k})\,c}{35c} = \frac{1}{7}(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$

প্রশ্নমালা 2.2

1. (i) $A = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $B = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ দুইটি ভেক্টর হলে নিম্নলিখিত ভেক্টরগুলি নির্ণয় কর :

   (a) $A \times B$ (b) $(A + B) \times (A - B)$ উঃ (a) $10\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$. (b) $-20\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 22\mathbf{k}$

   (ii) $A = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $B = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $C = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ হলে,

   (a) $A \times (B \times C)$ নির্ণয় কর। উঃ $20\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 19\mathbf{k}$.

   (b) $A.(B + C) = A.B + A.C$ প্রমাণ কর।

   (c) $|2A - B + C|$ নির্ণয় কর। উঃ 11.

2. $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ এবং $\overrightarrow{AC} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ দুইটি ভেক্টর। AB ও AC কে সন্নিহিত বাহু ধরে অংকিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উঃ $5\sqrt{6}$ বর্গ একক

3. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু এর যথাক্রমে D, E, F হলে, প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$ [রা. ব. '১১; ব. সি. '১২ ; রা. দি. '১৩]

4. ABC ত্রিভুজে BC এর মধ্যবিন্দু D হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ [সি. '১৩]

5. (*i*) ধ্রুবক a এর মান নির্ণয় কর যেন $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ এ তিনটি ভেক্টর একই সমতলে থাকে। [ঢা. '০৪, '১০; ব. চ. কু. '০৬; সি. দি. '১১; কু. '১২] উ: $a = 5$.

(*ii*) ধ্রুবক λ এর মান নির্ণয় কর যেন $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $\lambda\mathbf{i} - \mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$ এ তিনটি ভেক্টর একই সমতলে থাকে। [য. '০৮] উ: $\lambda = 1$.

6. A ও B কে দুইটি ভেক্টর ধরে প্রমাণ কর যে, $A.B = B.A$ কিন্তু $A \times B = -B \times A$.

7. যদি $a = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $b = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ হয় তাহলে (*i*) $5a \times b$ (*ii*) $\dfrac{b}{|a|}$ নির্ণয় কর।

উ: (*i*) $55\mathbf{i} + 45\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ (*ii*) $\dfrac{1}{\sqrt{38}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k})$

8. (*i*) একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $a = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ এবং $b = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এর সমতলের উপর লম্ব। [কু. '১৩] উ: $\frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$

(*ii*) yz সমতলের সমান্তরাল এবং $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ভেক্টরের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

উ: $\frac{1}{5}(4\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$

(*iii*) $a = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ এবং $b = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ভেক্টর দুটির উপর লম্ব হয় এরূপ একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [কু. '০৫; রা. '১০] উ : $(-16\mathbf{i} - 27\mathbf{j} - 17\mathbf{k})/9\sqrt{14}$

9 (*i*) $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ভেক্টর দুটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।উ : $\dfrac{1}{5\sqrt{2}}(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$

(*ii*) $2i + j + k$ এবং $i - 2j + k$ ভেক্টর দুটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। উ: $\dfrac{1}{\sqrt{35}}(3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 5\mathbf{k})$
[সি. চ. '১০; ঢা. '১১]

10 (*i*) a এর মান কত হলে $P = 2\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ এবং $Q = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ পরস্পরের সমান্তরাল হবে।
উ: $a = -1$

(*ii*) m এর মান কত হলে $A = 2\mathbf{i} + m\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $B = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ সমান্তরাল হবে। উ: $m = 2$

11. ABC ত্রিভুজে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ [সি. '০৫]

12. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজ ABC তে $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. [ঢা. রা. ব. '১০; ব. কু. '১২; চ. '১৩]

13. (*i*) ভেক্টর পদ্ধতিতে ABC ত্রিভুজে দেখাও যে, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. [য. '০৫]

(*ii*) ভেক্টর পদ্ধতিতে ABC ত্রিভুজে দেখাও যে, $c = a \cos B + b \cos A$. [কু. চ. '১১]

14. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। [কু. ব. '১১; সি. '১২; ঢা. চ. '১৩]

15. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের বিয়োগফলের অর্ধেক।

16. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

17. ABC ত্রিভুজে $A = 90°$ হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

18. ABC ত্রিভুজের BC এর মধ্যবিন্দু D হলে, দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.
[দি. চ. সি. কু. '১০; ঢা. '১২; ব. '১৩]

19 ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখন্ডিত করে।
[ঢা. '১০; য. দি. '১১; রা. সি. কু. '১৩]

20. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর, যে কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু পর্যায়ক্রমে যোগ করলে উৎপন্ন চর্তুভুজটি একটি সামান্তরিক হবে। [য. '০৪]

21. (*i*) $2i - 4j + 3k$ বিন্দুগামী এবং $3i + j - 5k$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ : $xi + yj + 2k = (2 - 3\lambda)i - (4 - \lambda)j + (3 - 5\lambda)\, j + (3 - 4\lambda)k$

22. $3i + j + k$ এবং $2i + 2j - k$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ : $xi + yj + zk = (3 - \lambda)i + (1 + \lambda)j + (1 - 2\lambda)k$

প্রশ্নমালা 2.3

সৃজনশীল প্রশ্ন

1. নিচে দুইটি ভেক্টর রাশি $\boldsymbol{A}$ ও $\boldsymbol{B}$ দেওয়া হলো, যেখানে $\boldsymbol{A} = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{B} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$.

   (*a*) $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ এবং $\mathbf{k}$ এর ব্যাখ্যা দাও।

   (*b*) $\boldsymbol{A} . \boldsymbol{B}$ নির্ণয় কর এবং $\boldsymbol{A}$ ও $\boldsymbol{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, θ এর মান কত? উ : $90°$

   (*c*) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ নির্ণয় কর।

2. তিনটি ভেক্টর রাশি নিম্নরূপ :
   $\boldsymbol{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \boldsymbol{B} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{C} = \mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + a\mathbf{k}$

   (*a*) তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্ত কী?

   (*b*) a এর মান কত হলে প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে? উ : 5.

   (*c*) প্রদত্ত ভেক্টরত্রয়ের সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। উ : $\dfrac{2\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 7\mathbf{k}}{\sqrt{174}}$.

3. $\boldsymbol{P} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{Q} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ দুইটি ভেক্টর।

   (*a*) প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি ভেক্টর $\boldsymbol{R}$ হলে, $\boldsymbol{R}$ এর মান নির্ণয় কর। উ : 7.

   (*b*) লব্ধি ভেক্টরটির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। উ : $\dfrac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{7}$.

   (*c*) প্রমাণ কর যে, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ ভেক্টরত্রয় সমতলীয়।

4. $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\overrightarrow{AC} = 2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটি এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

   (*a*) ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাণ কত? উ : $90°$

   (*b*) এদের লব্ধি ভেক্টরটি নির্ণয় কর। উ : $4\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

   (*c*) প্রমাণ কর যে, লব্ধি ভেক্টরটি প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

5. দেওয়া আছে $P = 3\,\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

(a) ভেক্টরটি কোন সমতলে অবস্থিত? প্রদত্ত ভেক্টরের সমান্তরালে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

উ : yz সমতলে, $\frac{3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{5}$.

(b) P ভেক্টরটি যে সমতলে অবস্থিত তা গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

(c) ভেক্টর পদ্ধতিতে যেকোনো ABC ত্রিভুজে দেখাও যে, $c = a \cos B + b \cos A$.

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন :

1. λ এর কোন মানের জন্য $2\mathbf{i} + \lambda\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হবে?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{5}{2}$ (d) 1

2. $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $6\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটি সমান্তরাল হলে a এর মান কত ?

(a) 2 (b) 4 (c) -4 (d) 6

3. $P.Q = 4\sqrt{3}$ এবং $|P \times Q| = 4$ হলে, P ও Q ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ কত ?

(a) 30° (b) 60° (c) 120° (d) 150°

4. $\vec{AB} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ এবং $\vec{AC} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ভেক্টর দুইটি যে সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু তার ক্ষেত্রফল : (বর্গএককে)

(a) $3\sqrt{5}$ (b) $4\sqrt{6}$ (c) $5\sqrt{6}$ (d) 6

5. $P = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $Q = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ হলে, $P \times Q =$ কত?

(a) $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (b) $2\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ (c) 0 (d) $6\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

6. $B = 6\,\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ ভেক্টরের উপর $A = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ :

(a) $\frac{5}{7}$ (b) $\frac{7}{8}$ (c) $\frac{8}{7}$ (d) $\frac{6}{7}$

7. $2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ কত?

(a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) 120°

8. $2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $3\,\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হলে a এর মান কত?

(a) 2 (b) 3 (c) -4 (d) 5

(a) (i) ও (ii) (b) (ii) ও (iii) (c) (i) ও (iii) (d) (i), (ii) ও (iii)

তৃতীয় অধ্যায়

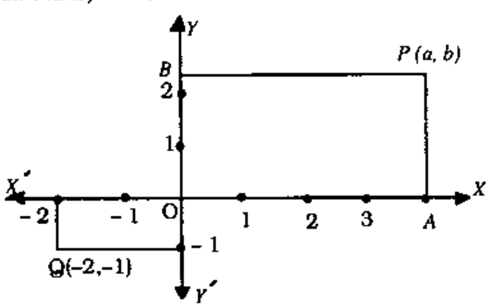
সরলরেখা

3.1. সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক *(Cartesian Plane)*

সমতলে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

বিখ্যাত ফরাসি গণিতবিদ রেনে দেকার্তে *(Rene Descartes)* একটি সমতলে লম্বভাবে পরস্পরছেদী দুইটি স্থির সরলরেখাকে অক্ষরেখা *(Axes of co-ordinates)* বিবেচনা করেন। রেখাদ্বয়কে আয়ত–অক্ষ *(Rectangular axes)* এবং ছেদবিন্দুকে মূলবিন্দু *(Origin)* নামকরণ করা হয়। XOX' আনুভূমিক *(Horizontal)* রেখাকে x-অক্ষ এবং YOY' উল্লম্ব *(Vertical)* রেখাকে y –অক্ষ ধরা হয়। গণিতবিদ দেকার্ত–এর নামানুসারে এ সমতলকে কার্তেসীয় সমতল *(Cartesian Plane)* বলা হয়।

আমরা সহজেই বুঝতে পারি অক্ষরেখাদ্বয় দ্বারা সমগ্র সমতলটি চারটি ভাগে বিভক্ত হয়েছে। এর এক এক ভাগকে একটি চতুর্ভাগ *(Quadrant)* বলা হয়। XOY, YOX', $X'OY'$, $Y'OX$ চতুর্ভাগকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ বলে।



মনে করি, সমতলের একটি বিন্দু P। P বিন্দু দিয়ে উল্লম্ব রেখা অঙ্কন করায় উহা x- অক্ষকে A বিন্দুতে এবং P বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত আনুভূমিক রেখা y- অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করল, যেখানে $OA = a$ এবং $OB = b$. এখানে, a ও b, P বিন্দুটির অবস্থান নির্দেশ করে। অতএব, a ও b এর মান জানলে অতি সহজে P বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

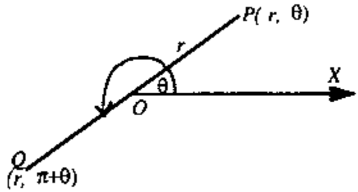
তাহলে, (a, b) দ্বারা P বিন্দুর স্থানাংকে নির্দেশ করে। এখানে a এবং b কে যথাক্রমে x- স্থানাঙ্ক বা ভুজ এবং y-স্থানাঙ্ক বা কোটি বলা হয়। সুতরাং, মূলবিন্দু O এর স্থানাংক $(0, 0)$.

y- অক্ষের ডানদিকে সকলবিন্দুর ভুজ ধনাত্মক এবং বামদিকে সকল বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক ধরা হয়। আবার x- অক্ষের উপরের দিকে অবস্থিত সকল বিন্দুর কোটি ধনাত্মক এবং নিচে অবস্থিত সকল বিন্দুর কোটি ঋণাত্মক ধরা হয়। এভাবে চিত্রে Q বিন্দুর স্থানাংক $(-2, -1)$. এক্ষেত্রে Q এর ভুজ $x = -2$ এবং কোটি $y = -1$.

$\boldsymbol{R}$ দ্বারা বাস্তব সংখ্যার সেট সূচিত করলে $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ (গুণজ সেট) ক্রমজোড়ের সেট প্রকাশ করে। সুতরাং ক্রমজোড়ের সেটটি অসীম সেট, কারণ বাস্তব সংখ্যা অসংখ্য। এখন ক্রমজোড় (a, b) এর প্রথম উপাদান 'a' দ্বারা কার্তেসীয় সমতলের কোনো বিন্দুর x -স্থানাংকে এবং দ্বিতীয় উপাদান 'b' দ্বারা ঐ বিন্দুর y -স্থানাংক নির্দেশ করলে ক্রমজোড়ের সেট দ্বারা সমতলের সব বিন্দুর সেট সূচিত করবে। অর্থাৎ কার্তেসীয় সমতলটি হল গুণজ সেট, $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$.

অনুসিদ্ধান্ত : কোনো বিন্দু x–অক্ষের উপর থাকলে ঐ বিন্দু দিয়ে আনুভূমিক রেখা অঙ্কন করলে তা y–অক্ষকে O বিন্দুতে ছেদ করবে। অর্থাৎ ঐ সব বিন্দুর y–স্থানাঙ্ক বা কোটি $= 0$. অনুরূপভাবে y–অক্ষের উপরিস্থিত সব বিন্দুর x–স্থানাঙ্ক বা ভুজ $= 0$.

সমতলে পোলার স্থানাঙ্ক



মনে করি, O একটি স্থির বিন্দু এবং OX একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

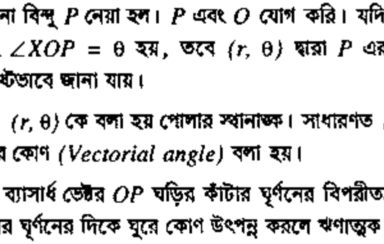
পোলার স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে O কে মেরু *(Pole)* এবং OX কে মূল রেখা বা মেরু রেখা *(Polar axis)* ধরা হয়। সমতলে যে কোনো বিন্দু P নেয়া হল। P এবং O যোগ করি। যদি $OP = r$ এবং $\angle XOP = \theta$ হয়, তবে (r, θ) দ্বারা P এর অবস্থান নির্দিষ্টভাবে জানা যায়।

(r, θ) কে বলা হয় পোলার স্থানাঙ্ক। সাধারণত r ও θ কে যথাক্রমে ব্যাসার্ধ ভেক্টর *(Radius Vector)* এবং ভেক্টর কোণ *(Vectorial angle)* বলা হয়।

ব্যাসার্ধ ভেক্টর OP ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে θ কোণ উৎপন্ন করলে তাকে ধনাত্মক এবং ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে ঘুরে কোণ উৎপন্ন করলে ঋণাত্মক ধরা হয়।

3.2. কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক

মনে করি, XOX' এবং YOY' কার্তেসীয় অক্ষদ্বয়। আবার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতির মূলবিন্দু O হল পোলার স্থানাঙ্ক পদ্ধতির মেরু *(Pole)* এবং OX মেরুরেখা। এখন P থেকে OX এর উপর লম্ব PN আঁকি। ধরি, P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) এবং পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).



যেহেতু $\dfrac{PN}{OP} = \sin\theta$

বা $\dfrac{y}{r} = \sin\theta, \quad \therefore y = r\sin\theta \ldots (i)$

আবার $\dfrac{ON}{OP} = \cos\theta$

বা $\dfrac{x}{r} = \cos\theta, \quad \therefore x = r\cos\theta \ldots (ii)$

এখন (i) এবং (ii) এর বর্গের সমষ্টি নিয়ে, $r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = x^2 + y^2$, বা $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\text{বা } r = \sqrt{x^2 + y^2} \ldots (iii)$$

$$\text{এবং } \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{y}{x}, \text{ বা, } \tan\theta = \frac{y}{x} \ldots (iv)$$

সুতরাং (iii) এবং (iv) দ্বারা কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের সম্পর্ক প্রকাশ করে।

উদাহরণ 1. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানঙ্ক $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$ হলে, ঐ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y). তাহলে, $x = r\cos\theta = 2\cos\dfrac{\pi}{3} = 2.\dfrac{1}{2} = 1$

এবং $y = r\sin\theta = 2\sin\dfrac{\pi}{3} = 2.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(1, \sqrt{3})$.

উদাহরণ 2. কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(-3, \sqrt{3})$ হলে, ঐ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$\therefore\ r^2 = x^2 + y^2 = (-3)^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 + 3 = 12$ বা, $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

এবং $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{-3} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = \tan\dfrac{5\pi}{6}$, $\therefore\ \theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

$\therefore$ নির্ণেয় পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2\sqrt{3},\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

উদাহরণ 3. $r = 6\cos\theta - 2\sin\theta$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর।

সমাধান : $r = 6\cos\theta - 2\sin\theta \Rightarrow r^2 = 6r\cos\theta - 2r\sin\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 6x - 2y$ যেহেতু $x = r\cos\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ $y = r\sin\theta$ এবং

যা একটি বৃত্তের কার্তেসীয় সমীকরণ নির্দেশ করে। $x^2 + y^2 = r^2$

উদাহরণ 4. $y^2 = 1 - 2x$ কে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর :

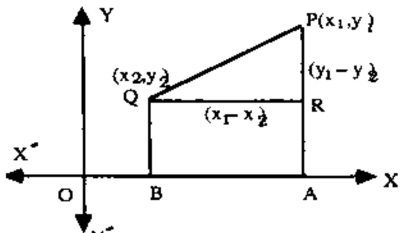
সমাধান : $y^2 = 1 - 2x \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - 2x + x^2$

$\Rightarrow r^2 = (1 - x)^2\ [\because r^2 = x^2 + y^2]$

$\Rightarrow r = 1 - x \Rightarrow r + x = 1 \Rightarrow r + r\cos\theta = 1 \Rightarrow r(1 + \cos\theta) = 1$

যা নির্ণেয় পোলার সমীকরণ।

3. 3. দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব



ধরি, একই সমতলে $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

P এবং Q থেকে x–অক্ষের উপর যথাক্রমে PA এবং QB লম্ব আঁকি।

আবার Q থেকে PA এর উপর QR লম্ব আঁকি।

$\therefore\ OA = x_1$, $OB = x_2$, $PA = y_1$ এবং $QB = y_2$.

সুতরাং, $QR = BA = OA - OB = x_1 - x_2$

এবং $PR = PA - RA = PA - QB = y_1 - y_2$

এখন PQR সমকোণী ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই,

$\boxed{PQ^2 = QR^2 + PR^2} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$\therefore\ PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, যা দুইটি বিন্দুর দূরত্ব প্রকাশ করে।

$$\boxed{\text{দুইটি বিন্দুর দূরত্ব} = \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের বিয়োগফল})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের বিয়োগফল})^2}}$$

অনুসিদ্ধান্ত : মূলবিন্দু $O(0, 0)$ এবং যে কোনো বিন্দু $P(x, y)$ এর দূরত্ব $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$.

সমস্যা ও সমাধান :

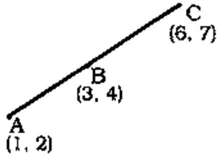
উদাহরণ 1. $(4, -3)$ এবং $(-2, 5)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $P(4, -3)$ এবং $Q(-2, 5)$

$$\therefore PQ = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$$

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $(1, 2), (3, 4), (6, 7)$ বিন্দুত্রয় একই সরলরেখার উপর অবস্থিত।

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় যথাক্রমে $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ ও $C(6, 7)$



এখন $AB = \sqrt{(1-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

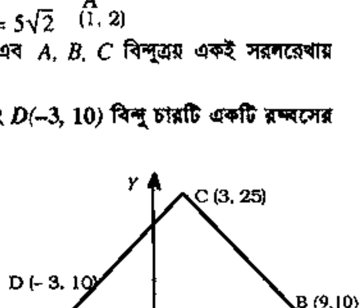
$BC = \sqrt{(3-6)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

এবং $AC = \sqrt{(1-6)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

যেহেতু $AB + BC = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$. অতএব A, B, C বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $A(3, -5)$, $B(9, 10)$, $C(3, 25)$ এবং $D(-3, 10)$ বিন্দু চারটি একটি রম্বসের শীর্ষবিন্দু।

সমাধান : প্রদত্ত বিন্দুগুলি xy সমতলে স্থাপন করে $ABCD$ চতুর্ভুজটি অঙ্কন করি।



এখন $AB^2 = (3-9)^2 + (-5-10)^2 = 36 + 225 = 261$

$BC^2 = (9-3)^2 + (10-25)^2 = 36 + 225 = 261$

$CD^2 = (3+3)^2 + (25-10)^2 = 36 + 225 = 261$

$DA^2 = (-3-3)^2 + (10+5)^2 = 36 + 225 = 261$

$\therefore AB = BC = CD = DA$. সুতরাং $ABCD$ একটি বর্গ বা রম্বস হতে পারে।

আবার $BD^2 = (9+3)^2 + (10-10)^2 = 144 \Rightarrow BD = 12$

এবং $AC^2 = (3-3)^2 + (-5-25)^2 = 900 \Rightarrow AC = 30$

যেহেতু কর্ণ $BD \neq$ কর্ণ AC. সুতরাং $ABCD$ একটি রম্বস।

প্রশ্নমালা 3.1

1. (i) $(1, -\sqrt{3}), (1, 1), (\sqrt{3}, 1)$ বিন্দুগুলির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(ii) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right), \left(4, \frac{\pi}{4}\right), (3, 150^\circ)$ বিন্দুগুলির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উ: (i) $\left(2, \frac{-\pi}{3}\right), \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right), \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$; (ii) $(1, \sqrt{3}), (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর :

(iii) $r = 4\sin\theta$ উ: $x^2 + y^2 - 4y = 0$

(iv) $r = b\cos\theta$ উ: $x^2 + y^2 - bx = 0$

(v) $r(1 + \cos\theta) = 2$ সমীকরণটি কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর। সমীকরণটি কি নির্দেশ করে?

[কু. '০৮] উ: $y^2 = -4(x-1)$

2. পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর :

(a) $x^2 + y^2 = 16$ (b) $x^2 + y^2 - 6x = 0$ (c) $y^2 = 4(x + 1)$ (d) $x^2 = 1 - 2y$

উ: (a) $r = 4$; (b) $r = 6\cos\theta$; (c) $r(1 - \cos\theta) = 2$; (d) $r(1 + \sin\theta) = 1$;

3. নিচের বিন্দুগুলির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর :

(i) $(4, 5)$ এবং $(-2, -3)$, (ii) $(7, 7)$ এবং $(-5, 2)$ উ: (i) 10, (ii) 13.

4. x–অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দুটি $(0, 3)$ এবং $(5, -2)$ বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী। P–এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(2, 0)$

5. P, Q, R তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-7, -1)$, $(-3, 2)$ $(x, 5)$ এবং $PQ = QR$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। উ: 1 অথবা -7.

6. দেখাও যে, $(1, 2)$, $(-4, 2)$ এবং $(-4, 7)$ বিন্দু তিনটি একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: 12·5 বর্গ একক

7. দেখাও যে $A(3,4)$, $B(-4,3)$ এবং $C(4,-3)$ বিন্দুত্রয় একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: 25 বর্গ একক।

8. দেখাও যে, $(4, -1)$, $(2, 1)$ এবং $(1, 2)$ বিন্দুত্রয় একই সরলরেখার উপর অবস্থিত।

9. দেখাও যে $(-6, -3)$ এবং $(8,4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে যায়।

10. $(1, 2)$, $(3, -4)$ এবং $(5, -6)$ বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে, ঐ ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর। উ: $(11, 2)$

11. দেখাও যে, $(1, 1)$, $(-4, 13)$, $(8, 8)$ এবং $(13, -4)$ বিন্দু চারটি একটি রম্বসের শীর্ষ বিন্দু। [দি. '১১]

12. প্রমাণ কর যে, $P(3,3)$, $Q(-3,1)$, $R(-1,-5)$ এবং $S(5,-3)$ বিন্দু চারটি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু।

13. প্রমাণ কর যে, $(-5,1)$, $(3,-3)$, $(1,-7)$ ও $(-7,-3)$ বিন্দু চারটি একটি আয়তের শীর্ষবিন্দু। আয়তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: 40 বর্গএকক;

14. দেখাও যে, $A(6, 1)$, $B(-3, 4)$, $C(-7, 0)$ এবং $D(2,-3)$ বিন্দু চারটি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।

15. যে বর্গের একটি কর্ণের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(6,3)$ ও $(-2,-3)$ ঐ বর্গের ক্ষেত্রফল এবং অপর দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: 50 বর্গ একক; $(5, -4)$, $(-1,4)$

16. (x, y) বিন্দুটি $(a + b, b - a)$ এবং $(a - b, a + b)$ বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে, প্রমাণ কর যে, $bx = ay$.

17. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, কেন্দ্রের স্থানাংক $(5,3)$; এর যে জ্যা $(3, 2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু. '১০; চ. '১৩] উ: $4\sqrt{5}$ একক

18. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10, কেন্দ্রের স্থানাংক $(11, 2)$. এর যে জ্যা $(2, -1)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ব. '১১] উ : $2\sqrt{10}$ একক

19. একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কোটি ভুজের দ্বিগুণ এবং তা $(4, 3)$ বিন্দু থেকে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত। [ব. '০৭; দি. '১৩] উ: $(3, 6)$ বা $(1, 2)$

20. কোনো বিন্দুর কোটি 3 এবং $(5, 3)$ হতে বিন্দুটির দূরত্ব 4 একক হলে, বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর।উ: 1অথবা 9.

[কু. '১১]

21. কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(5, 2)$ এবং $(-3, -4)$ হলে, এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। উ: 5

22. একটি সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -4)$, $(0, 4)$ হলে, এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [সি. '০৯, '১৩] উ: $(\pm 4\sqrt{3}, 0)$

23. ABC সমবাহু ত্রিভুজের A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3,4)$ ও $(3, 6)$; AB বাহুর যে পার্শ্বে মূল বিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বে C বিন্দু অবস্থিত। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(3+\sqrt{3}, 5)$

24. y-অক্ষ ও $(7, 2)$ থেকে $(a, 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান নির্ণয় কর। উ : $\frac{29}{7}$
[কু. '০৭; রা. য. চ. '১০; ঢা. '১৩]

25. x-অক্ষ ও $(-5, -7)$ থেকে $(4, k)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর। [কু. '০৯] উ: $-\frac{65}{7}$

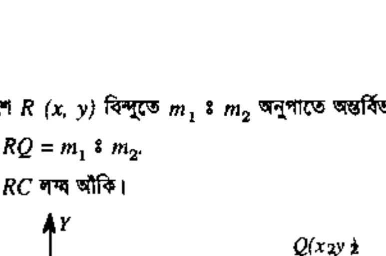
3. 4. রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক

(a) অন্তর্বিভাগের ক্ষেত্রে

$P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশ $R(x, y)$ বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে। R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। এখানে $PR : RQ = m_1 : m_2$.

P, Q, R বিন্দু থেকে OX এর উপর যথাক্রমে PA, QB, RC লম্ব আঁকি।

আবার $PS \perp RC$ এবং $RT \perp QB$ অঙ্কন করি।



এখন ΔPRS ও ΔQRT সদৃশ বলে

$$\frac{PS}{RT} = \frac{RS}{QT} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m_1}{m_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

আবার $PS = AC = OC - OA = x - x_1$

এবং $RT = CB = OB - OC = x_2 - x$

$\therefore$ (1) থেকে $\frac{PS}{RT} = \frac{m_1}{m_2}$ বা, $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m_1}{m_2}$

বা, $m_2 x - m_2 x_1 = m_1 x_2 - m_1 x$

বা, $(m_1 + m_2)x = m_1 x_2 + m_2 x_1$, $\quad \therefore x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$.

$RS = RC - CS = y - y_1$ এবং $QT = BQ - BT = y_2 - y$

তদ্রূপ (1) থেকে $\frac{RS}{QT} = \frac{m_1}{m_2}$ বা, $\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m_1}{m_2}$, বা $m_2 y - m_2 y_1 = m_1 y_2 - m_1 y$

বা, $(m_1 + m_2)y = m_1 y_2 + m_2 y_1$, $\quad \therefore y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$

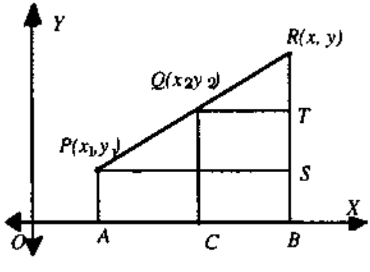
$\therefore$ অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right)$.

অনুসিদ্ধান্ত 1 : যদি R, PQ এর মধ্যবিন্দু হয়, তবে $m_1 = m_2$

$\therefore P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

অনুসিদ্ধান্ত 2 : যদি R বিন্দুটি PQ কে $k : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে অর্থাৎ $PR : RQ = k : 1$ হয় তাহলে, $x = \frac{kx_2 + x_1}{k+1}$ এবং $y = \frac{ky_2 + y_1}{k+1}$. এক্ষেত্রে শুধু k এর মান জানলে অনুপাত জানা যায়।

(b) বহির্বিভক্তির ক্ষেত্রে



মনে করি, R বিন্দুটি PQ কে $m_1 : m_2$ এ বহির্বিভক্ত করেছে।

অর্থাৎ $PR : QR = m_1 : m_2$, বা $\frac{PR}{QR} = \frac{m_1}{m_2}$

এখানে ΔPRS এবং ΔQRT সদৃশ।

$\therefore \frac{PS}{QT} = \frac{RS}{RT} = \frac{PR}{QR} = \frac{m_1}{m_2} \ldots (i)$

(i) থেকে $\frac{PS}{QT} = \frac{m_1}{m_2}$ বা, $\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{m_1}{m_2}$

বা, $m_1x - m_1x_2 = m_2x - m_2x_1$ বা, $(m_1 - m_2)x = m_1x_2 - m_2x_1$ $\therefore x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$.

আবার (i) থেকে $\frac{RS}{RT} = \frac{m_1}{m_2}$ বা, $\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{m_1}{m_2}$ বা, $m_1y - m_1y_2 = m_2y - m_2y_1$

বা, $(m_1 - m_2)y = m_1y_2 - m_2y_1$, $\therefore y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$.

$\therefore$ বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$.

3.4.1. ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র নির্ণয় [ঢা. '০৪]

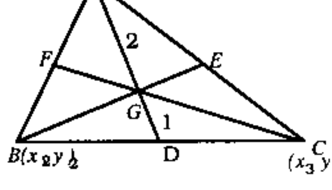
মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$; BC, CA এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F. এখন AD, BE, CF মধ্যমাত্রয় অঙ্কন করলে তারা পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করবে। G বিন্দুটিকে ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলা হয় এবং তা প্রত্যেক মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

এখন BC এর মধ্যবিন্দু D এর স্থানাংক $\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$.

ধরি G এর স্থানাংক (x, y). $\because AG : GD = 2 : 1$

$$\therefore x = \frac{2.\frac{x_2 + x_3}{2} + 1.x_1}{2+1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\text{এবং } y = \frac{2.\frac{y_2 + y_3}{2} + 1.y_1}{2+1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

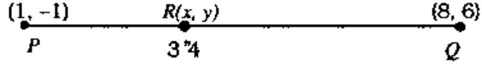


সুতরাং, ΔABC এর ভরকেন্দ্র $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. $P(1, -1)$ এবং $Q(8, 6)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি $3 : 4$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, নির্ণেয় বিন্দুটির স্থানাংক $R(x, y)$.

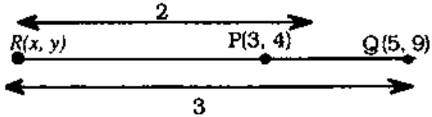


$\therefore x = \dfrac{3 \times 8 + 4 \times 1}{3 + 4} = \dfrac{28}{7} = 4$ এবং $y = \dfrac{3 \times 6 + 4 \times (-1)}{3 + 4} = \dfrac{14}{7} = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, 2)$.

উদাহরণ 2. $P(3, 4)$ এবং $Q(5, 9)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি $2 : 3$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, নির্ণেয় বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $R(x, y)$।



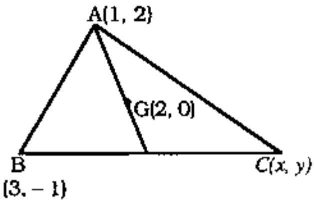
তাহলে, $x = \dfrac{2 \times 5 - 3 \times 3}{2 - 3} = \dfrac{1}{-1} = -1$

এবং $y = \dfrac{2 \times 9 - 3 \times 4}{2 - 3} = \dfrac{6}{-1} = -6$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(-1, -6)$

উদাহরণ 3. একটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $(2, 0)$। এর দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $(1, 2)$ ও $(3, -1)$ হলে, তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাংকে নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক (x, y).



আমরা জানি, ভরকেন্দ্র $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

অতএব $\dfrac{1 + 3 + x}{3} = 2$, বা $x + 4 = 6$ $\therefore x = 2$

এবং $\dfrac{2 - 1 + y}{3} = 0$, বা $y + 1 = 0$ $\therefore y = -1$

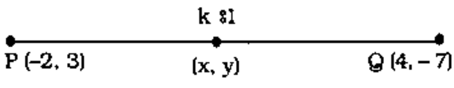
সুতরাং, ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $(2, -1)$.

উদাহরণ 4. $P(-2, 3)$ ও $Q(4, -7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x–অক্ষ এবং y–অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [চ. '০৭]

সমাধান : PQ কে $k : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(x, y) = \left(\dfrac{4k - 2}{k + 1}, \dfrac{-7k + 3}{k + 1}\right)$.

এ বিন্দুটি x–অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি $y = 0$ হবে।

অর্থাৎ $\dfrac{-7k + 3}{k + 1} = 0$, বা, $-7k + 3 = 0$ $\therefore k = \dfrac{3}{7}$.



অতএব x– অক্ষ PQ কে $3 : 7$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

আবার বিন্দুটি y–অক্ষের উপর অবস্থিত হলে, ছেদবিন্দুটির ভুজ $x = 0$ হবে।

অর্থাৎ $\dfrac{4k - 2}{k + 1} = 0$, বা $4k - 2 = 0$ বা, $k = \dfrac{1}{2}$.

সুতরাং y-অক্ষ PQ কে $1 : 2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

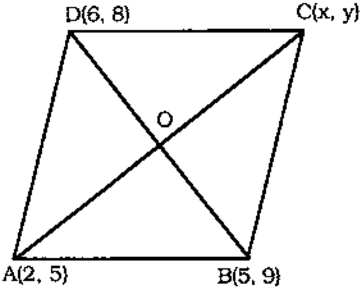
উদাহরণ 5. যদি $A(2, 5)$, $B(5, 9)$ এবং $D(6, 8)$ বিন্দুত্রয় $ABCD$ রম্বসের শীর্ষবিন্দু হয়, তাহলে C এর স্থানাংক এবং রম্বসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি. '১০; ঢা. '১১]

সমাধান : মনে করি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)। তাহলে, AC কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+5}{2}\right)$ এবং BD কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{5+6}{2}, \frac{9+8}{2}\right)$ বা, $\left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right)$.

$ABCD$ একটি রম্বস বলে AC এবং BD কর্ণের মধ্যবিন্দু অভিন্ন ।

$\therefore \frac{x+2}{2} = \frac{11}{2}$ অর্থাৎ $x = 9$ এবং $\frac{y+5}{2} = \frac{17}{2}$ অর্থাৎ $y = 12$

অতএব C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(9, 12)$.



$$BD = \sqrt{(5-6)^2 + (9-8)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(2-9)^2 + (5-12)^2} = \sqrt{49+49}$$

$$= \sqrt{2 \times 49} = 7\sqrt{2}$$

$\therefore$ রম্বস $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times \Delta ABD$

$$= 2 \times \tfrac{1}{2} BD \times \tfrac{1}{2} AC$$

[$\because$ রম্বসের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$= \frac{1}{2}(BD \times AC) = \frac{1}{2} . \sqrt{2} . 7\sqrt{2}$ বর্গ একক $= 7$ বর্গ একক।

প্রশ্নমালা 3.2

1. নিম্নলিখিত বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

   (i) $(-3, 4)$ এবং $(7,6)$ (ii) $(-2,-8)$ এবং $(2,8)$ (iii) $(t+2, -t+4)$ এবং $(t, 3t)$ (iv) $(a+b, -a-b)$ এবং $(a-b, a+b)$ উ: (i) $(2,5)$, (ii) $(0,0)$ (iii) $(t+1, t+2)$ (iv) $(a, 0)$

2. $(2, 0)$ এবং $(7, 5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাংক নির্ণয় কর। উ: $(4, 2)$

3. (i) একটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর, যা $(-2, 3)$ ও $(6, -8)$, বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $1 : 2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে। উ: $(-10, 14)$

   (ii) PQ রেখাংশের মধ্যবিন্দু $(2,3)$ এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1,6)$ হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(5,0)$

4. AB সরলরেখাটি $P(3, 3)$ এবং $Q(8, 5)$ বিন্দু দুইটি দ্বারা সমত্রিখণ্ডিত হয়। A ও B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. '১১] উ: $A(-2, 1)$, $B(13, 7)$

5. $(3,1)$ বিন্দুটি $(1, -3)$ ও $(6,7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। উ: $2 : 3$

6. $(7, -8)$ বিন্দুটি $(3,-2)$ এবং $(-3,7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। উ: $2 : 5$

7. এমন বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর, যা $(-3, 4)$ ও $(7, 9)$, বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $3 : 2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে। উ: $(3, 7)$, $(27, 19)$

8. $A(8,3)$ ও $B(2,-9)$ বিন্দু দুইটি যে বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু তার কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।
উ: কেন্দ্র $(5,-3)$; ব্যাসার্ধ $3\sqrt{5}$

9. A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ এবং $(4, -5)$। AB রেখা C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হ'ল যেন $AB = 3BC$ হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ. '১১; দি. '১২; রা. '১৩] উত্তর: $(6, -8)$

10. A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(7,3)$ ও $(-1,-5)$। AB কে C পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হল যেন $AC = 2AB$ হয়। C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(-9, -13)$

11. $(7, 5)$ ও $(-2, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
[রা. '১১] উত্তর: $(4, 3)$ এবং $(1, 1)$

12. মূলবিন্দুটি (x,y) এবং $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = r^2$.

13. $ABCD$ রম্বসের A, B ও C বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, -1)$, $(1, 3)$ ও $(5, 6)$। D এর স্থানাঙ্ক এবং রম্বসটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: $(2, 2)$; 7 বর্গ একক

14. $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দু $A(8, 8)$, $B(9, -5)$ এবং $C(-4, -6)$ এর চতুর্থ শীর্ষবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক এবং বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু. '১৩] উ: $(-5, 7)$; 170 বর্গ একক

15. কোনো সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(3,-4)$ এবং $(-6,5)$; এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দু $(-2, -1)$ হলে, চতুর্থ শীর্ষবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. য. '১১] উ: $(-1, 2)$

16. $ABCD$ সামান্তরিকের A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 1)$, $(1, 3)$ ও $(1, 6)$ হলে, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(-2, 2)$

17. $ABCD$ আয়তের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে $A(3, 2)$, $B(2, -1)$, $C(8, -3)$। এর চতুর্থ শীর্ষবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [চ. '০৬] উ: $(9, 0)$, 20 বর্গ একক।

18. $(1,2)$ এ $(6, 7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে $(3,4)$ বিন্দুটি যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।
উ: 2 : 3

19. দেখাও যে, $(2, -2)$ এবং $(-1, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশে অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত হয়।
[সি. '১৩]

20. $(7, 7)$ এবং $(-5, -10)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে x–অক্ষ যে অনুপাতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর। ছেদবিন্দুর ভুজ কত? [সি. '১১; রা. ঢা. '১২, ব. '১৩] উ: 7 : 10; $\frac{35}{17}$

21. $(2, -4)$ ও $(-3, 6)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখাকে x-অক্ষ এবং y-অক্ষরেখা যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [রা. '০৮] উ: 2 : 3, 2 : 3.

22. $(2, -4)$ ও $(-4, 6)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে x–অক্ষ ও y–অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। উ: 2 : 3 ও 1 : 2

23. x-অক্ষ $A(2, -5)B(2, 3)$ রেখাংশকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর। উ: 5 : 3; $(2, 0)$

24. প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দুটি $(-3, -2)$ এবং $(6, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের একটি সমত্রিখণ্ডক বিন্দু। অপর সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [য. '১৩] উ: $(3, 2)$

25. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3,-5)$, $(5,-2)$ এবং $(-2, -1)$। হলে, A, B, C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $A(0,2)$, $B(-4,-4)$, $C(10,-6)$

26. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, 4)$, $(5, 0)$ এবং $(4, -2)$। হলে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(\frac{11}{3}, \frac{2}{3})$

27. ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(7, 2)$। A ও B শীর্ষ দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 5)$ ও $(7, -1)$ হলে, C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. '০৬] উঃ $(11, 2)$

28. একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $(2, 7)$ ও $(6, 1)$ এবং ভরকেন্দ্র $(6, 4)$; তৃতীয় শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর। [ব. সি. চ. '১২] উঃ $(10, 4)$

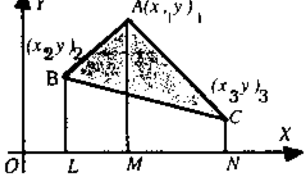
29. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at_1^2, 2at_1)$ $(at_2^2, 2at_2)$ এবং $(at_3^2, 2at_3)$। যদি এর ভরকেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, তাহলে দেখাও যে, $t_1 + t_2 + t_3 = 0$. [কু. '০৬]

30. $A(8, 10)$ এবং $B(18, 20)$ বিন্দুর সংযোগ রেখাংশকে Q এবং R বিন্দুদ্বয় 2ঃ 3 অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত এবং বহির্বিভক্ত করে এবং P বিন্দু AB এর মধ্য বিন্দু Q এবং R বিন্দুদ্বয়ের স্থানাংকে নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, $PQ \times PR = PB^2$. উঃ $(12, 14)$, $(-12, -10)$

3.5. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক দেয়া আছে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি, ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগুলি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.



A, B, C বিন্দু থেকে x – অক্ষের উপর যথাক্রমে AM, BL, CN লম্ব আঁকি। তাহলে, $LN = ON - OL = x_3 - x_2$

$LM = OM - OL = x_1 - x_2$ এবং $MN = ON - OM = x_3 - x_1$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল

= ট্রাপিজিয়াম AB L Mএর ক্ষেত্রফল+ ট্রাপিজিয়াম $AMNC$ এর ক্ষেত্রফল– ট্রাপিজিয়াম $BLNC$ এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AM + BL).\ LM + \frac{1}{2}(AM + CN).\ MN - \frac{1}{2}(BL + CN).\ LN$

$= \frac{1}{2}\{(y_1+y_2)(x_1-x_2) + (y_1+y_3)(x_3-x_1) - (y_2+y_3)(x_3-x_2)\}$

$= \frac{1}{2}\{x_1(y_1+y_2-y_1-y_3) + x_2(y_2+y_3-y_1-y_2) + x_3(y_1+y_3-y_2-y_3)\}$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\}$ ....(i)

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$ [নির্ণায়কের সাহায্যে প্রকাশ করে] ......(ii)

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$$ ....(iii)

নির্ণায়কের সাহায্যে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সময় শীর্ষবিন্দুগুলি ঘড়ির কাটার উল্টা দিকে বা ঘড়ির কাটার দিকে নিলে ক্ষেত্রফল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত হবে।

> ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের জন্য (iii) সূত্রটি প্রয়োগ করা সুবিধাজনক।
> চিহ্ন নিরপেক্ষ (ধনাত্মক) মানই হবে ত্রিভুজের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল।

অনুসিদ্ধান্ত : A, B, C ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বিন্দু সমরেখ হবার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল

(i) ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= 0$ অথবা $AB + BC = AC$.

(ii) **বিন্দু তিনটির স্থানাংক দ্বারা গঠিত নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।**

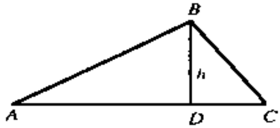
প্রমাণ : যথেষ্ট শর্ত : মনে করি, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ অর্থাৎ একই সরল রেখার উপর অবস্থিত। তাহলে, বিন্দু তিনটি কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু বিবেচনা করা হলে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে অর্থাৎ $\Delta\, ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= 0$ অথবা $AB + BC = AC.$

প্রয়োজনীয় শর্ত : ধরা যাক বিন্দু তিনটি একই সমতলে এরূপভাবে অবস্থান করে যেন $\Delta\, ABC = 0$ এবং $AB + BC = AC.$ প্রমাণ করতে হবে বিন্দুত্রয় সমরেখ।

মনে করি, $\Delta\, ABC$ এর ভূমি $AC \neq 0$ এবং উচ্চতা $B\,D = h.$

$\therefore \;\frac{1}{2}\;AC \times \;h = \Delta\, ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= 0.$

যেহেতু $AC \neq 0$, অতএব $h = 0$ অর্থাৎ B বিন্দুটি AC এর উপর অবস্থিত। সুতরাং, বিন্দু তিনটি সমরেখ।

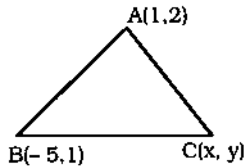


> **মন্তব্য :** $A\,(x_1,\, y_1)$, $B\,(x_2,\, y_2)$, $C\,(x_3,\, y_3)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, AB এবং BC রেখার ঢাল সমান হবে অর্থাৎ $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$ এবং বিপরীতক্রমে। সরলরেখার ঢাল সম্পর্কে 3.7 অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হয়েছে।

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. A, B, C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 2)$, $(-5, 1)$, (x,y) এবং $\Delta\, ABC$ এর ক্ষেত্রফল 18 বর্গএকক হলে, দেখাও যে, $x - 6y = 25.$

সমাধান : দেয়া আছে, A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 2)$, $(-5, 1)$, $(x, y).$



$$\therefore\ \Delta\, ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল } = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(1+10) + (-5y - x) + (2x - y)\}$$

$$= \frac{1}{2}\;(x - 6y + 11)$$

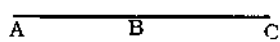
শর্তানুসারে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= 18$

$\therefore \frac{1}{2}\;(x - 6y + 11) = 18$ বা, $x - 6y + 11 = 36$, বা $x - 6y = 25.$

উদাহরণ 2. a এর মান কত হলে, $A(a,\, 2 - 2a)$, $B(1 - a,\, 2a)$ এবং $C(-\,4 - a,\, 6 - 2a)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে ? [ঢা. '১১, '১৩; কু. '১২]

সমাধান : মনে করি, A, B, C বিন্দুত্রয় সমরেখ। তাহলে, সমরেখ হবার শর্তানুসারে আমরা পাই,

$$\Delta\, ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2}a & 2 - 2a & 1 \\ 1-a & 2a & 1 \\ -4 - a & 6 - 2a & 1 \end{vmatrix} = 0$$



$$\Rightarrow [a(2a - 6 + 2a) - (2 - 2a)\,(1 - a + 4 + a) + 1\,\{(1-a)(6 - 2a) + 2a(4+a)\}] = 0$$
$$\Rightarrow a\,(4a - 6) - (2 - 2a) \times 5 + (6 - 6a - 2a + 2a^2 + 8a + 2a^2) = 0$$
$$\Rightarrow 4a^2 - 6a - 10 + 10a + 4a^2 + 6 = 0 \Rightarrow 8\,a^2 + 4a - 4 = 0$$
$$\Rightarrow 2a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow (a + 1)\,(2a - 1) = 0 \text{ অতএব, } a = -\,1 \text{ বা } \frac{1}{2}.$$

প্রশ্নমালা 3.3

1. (a, b) , (b, a) এবং $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে দেখাও যে, $a + b = 0$.

2. $(a, 0)$, $(0,b)$ এবং $(1, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

3. $A(2,3)$, $B(-3,6)$, $C(0,-5)$ এবং $D(4,-7)$ চারটি বিন্দু। $ABCD$ চতুর্ভূজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: 41 বর্গ একক

4. k এর মান কত হলে $(k, -1)$, $(2, 3)$ এবং $(0, 1)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থান করবে? উ: $k = -2$

5. $ABCD$ চতুর্ভূজের শীর্ষবিন্দু A, B, C, D এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 2)$, $(-5, 6)$, $(7, -4)$ এবং $(k, 2)$। চতুর্ভূজটির ক্ষেত্রফল 12 বর্গ একক হলে, k এর মান নির্ণয় কর। উ: $k = 3$

6. (x, y) বিন্দুটি $(5, 3)$ এবং $(-2, -4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ সরলরেখার উপর অবস্থিত হলে, দেখাও যে, $x - y - 2 = 0$.

7. ΔABC এর A, B এবং C শীর্ষ বিন্দুগুলির স্থানাংকে যথাক্রমে $(-1, 2)$, $(2, 3)$ এবং $(3, -4)$; P বিন্দুর স্থানাংক (x, y) হলে, দেখাও যে $\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{x - 3y + 7}{22}$. [কু. '০৭]

8. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $A(-3, -2)$, $B(-3, 9)$ এবং $C(5, -8)$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে B হতে CA এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু. ব. '০৪; ব '১৩ | উ: 44 বর্গ একক ; $8\frac{4}{5}$ একক

9. ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(5, 6)$, $(-9, 1)$ ও $(-3, -1)$. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে A থেকে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উ: 29 বর্গ একক; 9.17একক; [সি. ঢা. '১২]

10. ΔOPQ এর শীর্ষত্রয় যথাক্রমে $(0, 0)$, $(A \cos\beta, -A \sin\beta)$ এবং $(A \sin\alpha, A\cos\alpha)$. দেখাও যে, $\alpha = \beta$ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের মান বৃহত্তম হবে। বৃহত্তম মানটি নির্ণয় কর। উ: $\frac{1}{2}A^2$ বর্গ একক [চ. '১২]

11. যদি $A(x, y)$, $B(2, -4)$ এবং $C(-3, 3)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $7x + 5y + 24 = 0$.

12. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় (x,y), $(2,3)$, $(3,4)$ এবং এর ক্ষেত্রফল 8 বর্গ একক। প্রমাণ কর যে, $x - y + 17 = 0$.

13. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $A(x, y)$, $B(1, 2)$ এবং $C(2, 1)$ এবং এর ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $x + y = 15$. [রা. য. '১১; কু. রা. '১৩]

14. A, B দুইটি বিন্দুর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং O মূলবিন্দু হলে, মূল নিয়মে প্রমাণ কর যে, $\Delta OAB = \frac{1}{2}\left|(x_1 y_2 - x_2 y_1)\right|$. [সি. '১২]

15. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(t+1, 1)$ $(2t+1, 3)$, $(2t+2, 2t)$। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, $t = 2$ অথবা $t = -\frac{1}{2}$ হলে, বিন্দুগুলি সমরেখ হবে। উ: $\frac{1}{2}(2t^2 - 3t - 2)$ বর্গ একক

[ঢা. '০৬; কু. রা. ব. '১০; সি. '১১; য. '১২]

16. ΔABC এর A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4,-3)$, $(13, 0)$, $(-2, 9)$ এবং D, E, F বিন্দু তিনটি ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর এমনভাবে অবস্থিত যেন, $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 2$. প্রমাণ কর যে,

$\Delta ABC : \Delta DEF = 3 : 1$. [রা. '০২]

17. যদি $A(3,4)$, $B(2t,5)$, $C(6,t)$ বিন্দু দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $19\frac{1}{2}$ বর্গ একক হয়, তবে t এর মান নির্ণয় কর। [ব. '১৩] উঃ $t = -2, 7\frac{1}{2}$

18. A, B, C, D বিন্দুগুলির স্থানাংক যথাক্রমে $(t-4, -2)$, $(t, t+3)$, $(2t+1, 1)$, $(t-3, 1)$ এবং মূলবিন্দু O হলে, $\Delta OAB : \Delta OCD$ এর অনুপাত নির্ণয় কর এবং তা থেকে দেখাও যে, $t = 4$ হলে, ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফলের মান সমান ও একই চিহ্নযুক্ত হবে। উঃ $(t-3) : 1$

19. ΔABC এ A, B, C এর স্থানাংকে যথাক্রমে $(3,5)$, $(-3,3)$, $(-1,-1)$ এবং BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F. প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC = 4\Delta DEF$. [ব. '০৫]

20. $A(2,6)$, $B(-7,-3)$, $C(5,-6)$ শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G নির্ণয় কর এবং দেখাও যে,

$\Delta ABC = 3\Delta ABG = 3\Delta BCG = 3\Delta CAG$. উঃ $(0, -1)$

21. প্রমাণ কর যে, $(p, p-2)$, $(p+3, p)$ এবং $(p+2, p+2)$ বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত হবে।

22. কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $(2, -1)$, $(a+1, a-3)$, $(a+2, a)$ হলে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। a এর মান কত হলে বিন্দুগুলি সমরেখ হবে? [সি. '০৬; চ. '০৭; রা. '১২] উঃ $\frac{1}{2}(2a-1)$; $a = \frac{1}{2}$

23. দেখাও যে, $(3, 5)$ এবং $(3, 8)$ শীর্ষবিশিষ্ট বিন্দু দুইটি মূলবিন্দুর সংগে একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উঃ $4\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

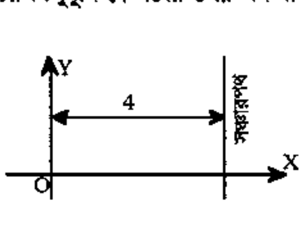
24. $ABCD$ সামান্তরিকের A, B, C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-3, 2)$, $(-4, -3)$, $(1, -7)$ হলে, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উঃ $(2, -2)$; 29 বর্গ একক।

25. A, B, C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাংক যথাক্রমে $(0, -1)$, $(15, 2)$, $(-1, 2)$ এবং $(4, -5)$. CD কে AB রেখাটি যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [কু. '১১; দি. '১৩] উঃ $2 : 3$; অন্তর্বিভক্ত

3.6. সঞ্চারপথ (*Locus*)

সংজ্ঞা : $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ কার্তেসীয় গুণজ সেটের ক্রমজোড়ের এক একটি ক্রমজোড় কার্তেসীয় সমতলে এক একটি বিন্দু নির্দেশ করে। প্রত্যেকটি বিন্দুর সংশ্লিষ্ট ক্রমজোড় হল ঐ বিন্দুর স্থানাংক। তাহলে, ক্রমজোড়ের সেট থেকে সংশ্লিষ্ট বিন্দুগুলির সেট পাওয়া যায়। যদি এই সেটের বিন্দুগুলি এক বা একাধিক শর্ত মেনে চলে তবে উক্ত সেট দ্বারা সৃষ্ট পথকে এর সঞ্চারপথ বলে অর্থাৎ **সেটের বিন্দুগুলি যে পথের উপর অবস্থান করে ঐ পথটিকে বিন্দুর সঞ্চারপথ বলে।**

সুতরাং, কার্তেসীয় সমতলস্থ যে সকল বিন্দু এক বা একাধিক প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে, তাদের সেটকে সঞ্চারপথ বলে। যেমন y-অক্ষ রেখা থেকে 4 একক দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুর সেট একটি সঞ্চারপথ।



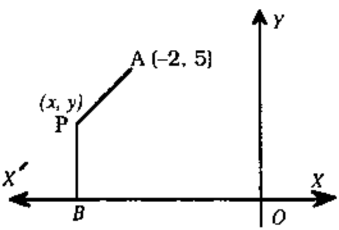
সঞ্চারপথের শর্ত থেকে চলমান বিন্দুর ভুজ ও কোটির মধ্যে একটি গাণিতিক সম্পর্ক পাওয়া যায়। ঐ গাণিতিক সম্পর্কই হল চলমান বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ। বিপরীতক্রমে সমীকরণ থেকে সঞ্চারপথ অঙ্কন করা যায়।

একটি চলমান বিন্দু যদি সর্বদাই x-অক্ষ বরাবর চলে তবে ঐ বিন্দুর অবস্থান থেকে প্রাপ্ত ক্রমজোড় হবে $(x,0)$. অর্থাৎ সব সময় বিন্দুটির y স্থানাঙ্ক $= 0$. তাহলে, x- অক্ষের উপরিস্থিত বিন্দুগুলির সেট চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথ তৈরি করে অর্থাৎ প্রদত্ত শর্তানুযায়ী চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথ x-অক্ষ। আবার x-অক্ষের উপরিস্থিত প্রত্যেকটি বিন্দু $y=0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

উক্ত সঞ্চারপথের সমীকরণ $y = 0$, অর্থাৎ x-অক্ষের সমীকরণ $y = 0$. তদরূপ দেখান যায় y-অক্ষের সমীকরণ $x = 0$.

উদাহরণ 1. $(-2, 5)$ বিন্দু এবং x–অক্ষ থেকে সর্বদা সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সেটের একটি বিন্দু $P(x, y)$. প্রদত্ত বিন্দুটি $A(-2, 5)$. P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর PB লম্ব টানি।



তাহলে, x-অক্ষ থেকে P এর দূরত্ব, $PB = y$

শর্তানুসারে $AP = BP$ বা $AP = y$, বা, $AP^2 = y^2$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = y^2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 4 - 10y + 25 - y^2 = 0$$
$$\therefore x^2 + 4x - 10y + 29 = 0,$$

যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

উদাহরণ 2. $A(a, 0)$ এবং $B(0, a)$ বিন্দু দুইটি থেকে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্বের বর্গের অন্তরফল সর্বদা $2a$ একক হলে, সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '১২]

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত চলমান বিন্দুটি $P(x, y)$. এ বিন্দুটি এমনভাবে চলে যেন,

$AP^2 - BP^2 = \pm 2a$ হয়।

বা, $\{(x-a)^2 + (y-0)^2\} - \{(x-0)^2 + (y-a)^2\} = \pm 2a$

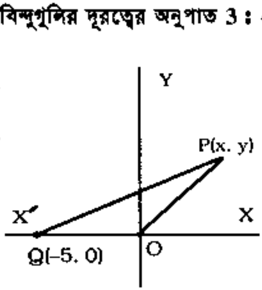
বা, $x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - x^2 - y^2 - a^2 + 2ay = \pm 2a$

বা, $-2ax + 2ay = \pm 2a$ বা, $-x + y = \pm 1$,

$\therefore y = x \pm 1$, যা চলমান বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ।

উদাহরণ 3. মূলবিন্দু এবং $(-5, 0)$ বিন্দু থেকে একটি প্রদত্ত সেটের বিন্দুগুলির দূরত্বের অনুপাত $3 : 4$. উক্ত সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত সেটের একটি বিন্দু $P(x, y)$ এবং মূলবিন্দু $O(0,0)$.



মূলবিন্দু থেকে P এর দূরত্ব $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ এবং প্রদত্ত বিন্দুটি $Q(-5,0)$ হলে,

$$PQ = \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 10x + 25}$$

শর্তানুসারে $OP : PQ = 3 : 4 \Rightarrow \frac{OP}{PQ} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{OP^2}{PQ^2} = \frac{9}{16}$

$$\Rightarrow 16(x^2 + y^2) = 9(x^2 + y^2 + 10x + 25)$$

$\therefore 7(x^2 + y^2) - 90x - 225 = 0$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

প্রশ্নমালা 3.4

1. $(2,0)$ এবং $(-4,0)$ হতে সমদূরবর্তী এরূপ বিন্দুসমূহের সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ: $x + 1 = 0$.

2. $(3, 0)$ ও $(-3, 0)$ বিন্দুদ্বয় হতে যে সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্বের সমষ্টি সর্বদা 10 একক, ঐ সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $16x^2 + 25y^2 = 400$

3. *(i)* একটি বিন্দু–সেটের যে কোনো উপাদান A ও B বিন্দুর সাথে একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। A এবং B এর স্থানাংক যথাক্রমে $(0,b)$, (a,b). হলে, সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '১০; চ. '১৩]
উ: $x^2 + y^2 - ax - 2by + b^2 = 0$

(ii) $A(0, 4)$ এবং $B(0, 6)$ দুইটি স্থির বিন্দু। কার্তেসীয় সমতলে বিন্দুসমূহের এমন একটি সেট গঠন করা হয়েছে যে, AB রেখাংশ ঐ সেটের যেকোন বিন্দুতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '১০] উ: $x^2 + y^2 - 10y + 24 = 0$

4. $A(2,3)$ এবং $B(-1,4)$ দুইটি স্থির বিন্দু। P বিন্দুটি এমনভাবে চলে যে $PA : PB = 2 : 3$ হয়। P বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. চ. '১১; ব. '১২] উ: $5x^2 + 5y^2 - 44x - 22y + 49 = 0$

5. $(2,0)$ থেকে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব, y - অক্ষ থেকে তার দূরত্বের তিনগুণ। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '০৯] উ: $y^2 - 8x^2 - 4x + 4 = 0$.

6. y-অক্ষ হতে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব, $(2,2)$ বিন্দু হতে তার দূরত্বের দ্বিগুণ, সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $3x^2 + 4y^2 - 16x - 16y + 32 = 0$

7. $A(1,2)$, $B(-4,0)$, $P(x,y)$। এবং P এরূপ সেটের সদস্য যার প্রত্যেক বিন্দুর জন্য $AP \perp BP$ হয়, তবে P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0$

8. O, A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0,0)$, $(3,5)$, $(2,6)$ (x, y); B ও C বিন্দু দুইটি OA রেখার এক পাশে অবস্থিত। এবং (x, y) বিন্দুটি এরূপ সেটের সদস্য যার প্রত্যেক বিন্দুর ক্ষেত্রে $\Delta OAC = 2\Delta OAB$ হয়, তাহলে দেখাও যে, ঐ সেট দ্বারা গঠিত সঞ্চারপথের সমীকরণ, $5x - 3y + 16 = 0$.

9. $A(x, y)$, $B(1,1)$ ও $C(-1,-1)$ বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজের শীর্ষ। ΔABC এর ক্ষেত্রফল 5 বর্গ একক হলে, A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x - y = \pm 5$

10. A, B, C তিনটি স্থির বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(c, 0)$; $P(x, y)$ একটি চলমান বিন্দু যেন $PA^2 + PB^2 = 2PC^2$. P বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $2cx = c^2 - a^2$

11. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x, y)$, $B(-6,-3)$ এবং $C(6,3)$. A বিন্দুটি একটি সেটের সদস্য যে সেটটির যে কোনো বিন্দু হতে BC এর উপর অংকিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য একটি স্থির সংখ্যা 5 একক। দেখাও যে, A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = 25$.

12. *(i)* একটি সেটের বিন্দুসমূহ $(2,-1)$ বিন্দু থেকে সর্বদা 4 একক দূরত্বে অবস্থান করে। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১২] উ: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$

(ii) একটি সেট এমনভাবে গঠন করা হয়েছে যে, x অক্ষ থেকে এর প্রতিটি বিন্দুর দূরত্বের বর্গ, y অক্ষ থেকে বিন্দুটির দূরত্বের 4 গুণ হলে, সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $y^2 = 4x$.

প্রশ্নমালা 3.5

সৃজনশীল প্রশ্ন

1. (a) একটি বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক বলতে কী বুঝ?
(b) $r(1 + \cos\theta) = 2$ সমীকরণটিকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর। সমীকরণটি কি নির্দেশ করে?
(c) একটি সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -4)$ ও $(0, 4)$ হলে, এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(\pm 4\sqrt{3}, 0)$.

2. (a) কার্তেসীয় সমতলে একটি বিন্দুর সঞ্চারপথের সংজ্ঞা লিখ। $x = 4$ দ্বারা কী বুঝ?
(b) t এর সকল বাস্তব মানের জন্য একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$ হলে, বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। প্রাপ্ত সমীকরণটি কী নির্দেশ করে? উ: $y^2 = 4ax$, পরাবৃত্ত।
(c) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ হলে, এর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের সূত্রটি প্রতিষ্ঠা কর।

3. (a) পোলার স্থানাঙ্ক এবং কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। কার্তেসীয় সমতলে একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, -1)$ হলে, এর পোলার স্থানাঙ্ক কত? উ: $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$.
(b) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 5)$ ও $(7, -1)$। ত্রিভুজটির অপর শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। দেওয়া আছে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র $(7, 2)$। উ: $(11, 2)$.
(c) $(7, 7)$ এবং $(-5, -10)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে x- অক্ষ যে অনুপাতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর। ছেদ বিন্দুর ভুজ কত? উ: $7 : 10$, $\frac{35}{17}$.

4. (a) $x^2 + y^2 - 6x = 0$ কে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর। উ: $r = 6\cos\theta$.
(b) দেখাও যে, মূলবিন্দুটি $(-3, -2)$ এবং $(6, 4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের একটি সমত্রিখণ্ডক বিন্দু।
(c) $A(0, 4)$ এবং $B(0, 6)$ দুইটি স্থির বিন্দু। কার্তেসীয় সমতলে বিন্দুসমূহের এমন একটি সেট গঠন করা হয়েছে যে, AB রেখাংশ ঐ সেটের যেকোনো বিন্দুতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x^2 + y^2 - 10y + 24 = 0$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ পোলার স্থানাঙ্কের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক কত?
(a) $\left(2, \sqrt{2}\right)$ (b) $\left(1, \sqrt{3}\right)$ (c) $\left(2, \sqrt{3}\right)$ (d) $(2, 2)$

2. $(\sqrt{3}, 1)$ কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের পোলার স্থানাঙ্ক কত?
(a) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ (c) $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$ (d) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

3. $(2, 270^\circ)$ পোলার স্থানাঙ্কের, কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক কত?
(a) $(0, 1)$ (b) $(0, -2)$ (c) $(0, 0)$ (d) $(2, 0)$

4. $y-$ অক্ষ ও $(7, 2)$ বিন্দু থেকে $(a, 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান–
(a) $\frac{25}{7}$ (b) $\frac{29}{7}$ (c) $\frac{31}{7}$ (d) $\frac{5}{6}$

5. x-অক্ষ ও $(-5, -7)$ বিন্দু থেকে $(4, k)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান কত?
(a) $\frac{-55}{7}$ (b) $\frac{19}{6}$ (c) $\frac{-65}{7}$ (d) $\frac{27}{5}$

6. $(1, -1)$ ও $(8, 6)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে যে বিন্দুটি 3 ঃ 4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক–
(a) $(2, 2)$ (b) $(3, -1)$ (c) $(4, 2)$ (d) $(4, 3)$

7. $(3, 4)$ ও $(5, 9)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে যে বিন্দুটি 2 ঃ 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক–
(a) $(-1, -6)$ (b) $(-1, 5)$ (c) $(2, -3)$ (d) $(-2, -3)$

8. কোন সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দু $(3, -4)$ ও $(-6, 5)$ এবং এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দু $(-2, -1)$ হলে চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক–
(a) $(1, 2)$ (b) $(-1, 2)$ (c) $(2, 3)$ (d) $(2, -3)$

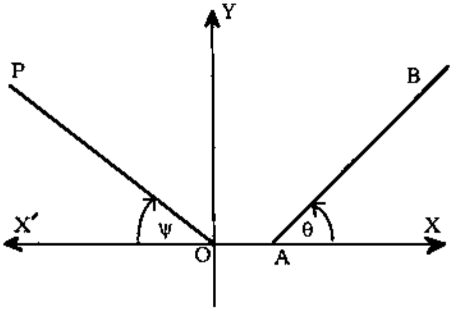
9. $(7, 7)$ ও $(-5, -10)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে x-অক্ষটি কি অনুপাতে ছেদ করে?
(a) $5 : 7$ (b) $7 : 10$ (c) $7 : 3$ (d) $10 : 7$

10. a এর মান কত হলে $(2, -1)$, $(a + 1, a - 3)$ এবং $(a + 2, a)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) 2 (d) $\frac{-1}{2}$

11. একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু $(2, 7)$, $(6, 1)$ এবং এর ভরকেন্দ্র $(6, 4)$ হলে, তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক–
(a) $(6, 7)$ (b) $(6, -9)$ (c) $(10, 4)$ (d) $(-10, -4)$

12. $(-2, 5)$ এবং x-অক্ষ থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ–
(a) $y^2 + 3x - 6y + 27 = 0$ (b) $x^2 + 4x - 10y + 29 = 0$
(c) $x^2 + 4x - 5y + 30 = 0$ (d) $x^2 + 2x - 6y + 4 = 0$

3.7. সরলরেখার ঢাল *(Gradient or slope of a line)*



পাশের চিত্রে AB সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করেছে। এখানে কোণ θ হলো আনুভূমিক x- অক্ষের সাথে AB রেখাটি কী পরিমাণ আনত হয়েছে তার পরিমাপ।

কোনো সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্টকে রেখাটির ঢাল বলে এবং একে সাধারণত m দ্বারা সূচিত করা হয়। চিত্রে AB রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ তৈরি করে। এখানে AB রেখার ঢাল $m = \tan\theta$.

চিত্রে OP রেখাটি x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সাথে ψ $(0° < \psi < 90°)$ কোণ তৈরি করেছে। এক্ষেত্রে OP রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $(180° - \psi)$ কোণ উৎপন্ন করে, সুতরাং OP এর ঢাল,

$m = \tan(180° - \psi) = -\tan\psi$.

যেমন, কানো সরলরেখা x–অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করলে ঐ রেখার ঢাল $m = \tan 45° = 1$

মন্তব্য : y–অক্ষের সমান্তরাল রেখার জন্য ঢাল সংজ্ঞায়িত নয়। কারণ এক্ষেত্রে $\theta = 90°$ এবং $\tan 90°$ অসংজ্ঞায়িত। কোণের পরিমাপ θ, $(90° < \theta < 180°)$ হলে, ঢাল ঋণাত্মক হবে।

স্পষ্টতঃ x-অক্ষের ঢাল শূন্য।

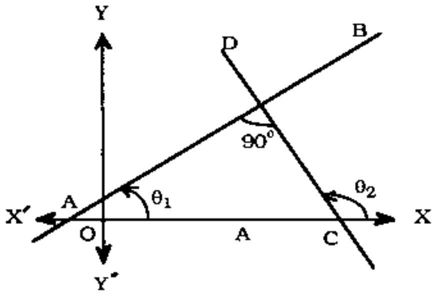
3.7. 1. দুইটি সরলরেখা লম্ব ও সমান্তরাল হবার শর্ত :

মনে করি, AB এবং CD সরলরেখা দুইটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে θ_1, θ_2 কোণ উৎপন্ন করে। অতএব AB এর ঢাল, $m_1 = \tan\theta_1$ এবং CD এর ঢাল, $m_2 = \tan\theta_2$.

এখন $AB \perp CD$ হলে, $\theta_2 = 90° + \theta_1$ [চিত্র থেকে]।

অতএব $\tan\theta_2 = \tan(90° + \theta_1) = -\cot\theta_1 = -\dfrac{1}{\tan\theta_1}$ বা, $\tan\theta_1 \times \tan\theta_2 = -1$

বা, $\boxed{m_1 . m_2 = -1.}$

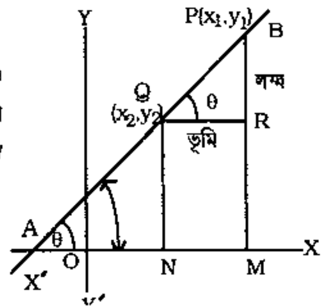


অর্থাৎ দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হলে, তাদের ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -1$ এবং বিপরীতক্রমে $m_1 \times m_2 = -1$ হলে, রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে।

আবার রেখা দুইটি সমান্তরাল হবে যদি এবং কেবল যদি $\theta_1 = \theta_2$ অর্থাৎ $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$ বা, $\boxed{m_1 = m_2.}$

সুতরাং রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হলে, তাদের ঢাল দুইটি পরস্পর সমান হবে এবং বিপরীতক্রমে $m_1 = m_2$ হলে, রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হবে।

3.8. দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখার ঢাল



মনে করি, AB সরলরেখাটি দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ দিয়ে যায় এবং তা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। P ও Q বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব টানি।

$QR \perp PM$ এবং $\angle QAN = \theta = \angle PQR$ [অনুরূপ কোণ]

এখন $PR = PM - RM = y_1 - y_2$ এবং

$QR = NM = OM - ON = x_1 - x_2$

$\therefore$ AB রেখার ঢাল,

$$m = \tan\theta = \frac{PR}{QR} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

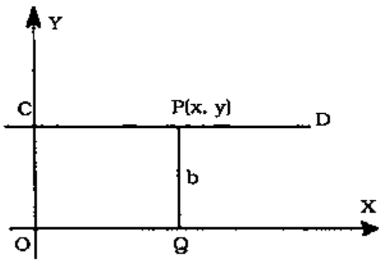
$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{কোটিদ্বয়ের বিয়োগফল}}{\text{ভুজদ্বয়ের বিয়োগফল}} \text{ [ক্রম ঠিক রেখে]}$$

উদাহরণ : $(6, 3)$ এবং $(3, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান : রেখাটির ঢাল, $m = \dfrac{3-2}{6-3} = \dfrac{1}{3}.$

3.9. অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ

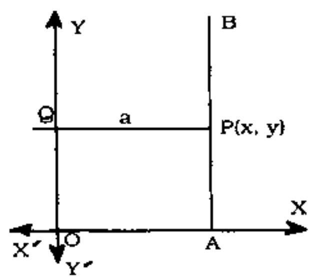
(i) x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ



মনে করি, x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাটি CD এবং CD সরলরেখার উপর বিন্দুর সেট $\{(x, y) : x \in X, y \in Y$ এবং $y = b\}$. এ সেটের যে কোনো $P(x, y)$ বিন্দুর x- অক্ষ থেকে দূরত্ব $y = b$ এবং এই সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথ হল CD সরলরেখা। CD রেখার উপরস্থ সকল বিন্দু x–অক্ষ থেকে b দূরত্বে অবস্থান করে। সুতরাং বিন্দুটি $y = b$ এ শর্তটি সর্বদা মেনে চলে। উক্ত শর্তটি সঞ্চারপথের সমীকরণ। অতএব x–অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $\boxed{y = b}$

দ্রষ্টব্য : b এর ধনাত্মক মানের জন্য CD রেখাটি x–অক্ষের উপরে এবং ঋণাত্মক মানের জন্য রেখাটি x–অক্ষের নিচে অবস্থান করে। $b = 0$ হলে CD রেখাটি x–অক্ষের উপর সমাপতিত হয়। এ কারণে x–অক্ষের সমীকরণ, $\boxed{y = 0}$.

(ii) y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ

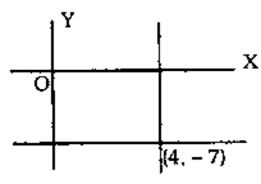


মনে করি, AB রেখাটি y–অক্ষের সমান্তরাল এবং AB সরলরেখার উপর বিন্দুর সেট $\{(x, y) : x \in X, y \in Y$ এবং $x = a\}$. তাহলে, AB রেখার উপরস্থ সকল বিন্দু y–অক্ষ হতে a দূরত্বে অবস্থান করে। এ সেটের যে কোনো $P(x, y)$ বিন্দুর y- অক্ষ থেকে দূরত্ব $x = a$ এবং এ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথটি AB সরলরেখা।

সুতরাং বিন্দুটি নির্দিষ্ট শর্ত $x = a$ সর্বদা মেনে চলে। অতএব y–অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাটির সমীকরণ, $\boxed{x = a}$.

দ্রষ্টব্য : $a = 0$ হলে AB রেখাটি y–অক্ষের উপর সমাপতিত হবে। সুতরাং y–অক্ষের সমীকরণ, $\boxed{x = 0}$.

উদাহরণ । দুইটি সরলরেখার উভয়ে $(4, -7)$ বিন্দুগামী এবং এরা যথাক্রমে y-অক্ষের সমান্তরাল এবং y-অক্ষের উপর লম্ব। সরলরেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান : মনে করি, y–অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাটির সমীকরণ

$x = a$ .... (i)

শর্তানুসারে (i) রেখাটি $(4, -7)$ বিন্দুগামী $\therefore \ a = 4$.

এখন (i) এ $a = 4$ বসিয়ে পাই, $x = 4$, যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

মনে করি, y-অক্ষের উপর লম্ব অর্থাৎ x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ,
$y = b$ .... (ii)
এ রেখাটিও $(4, -7)$ বিন্দুগামী। সুতরাং $-7 = b, \Rightarrow b = -7$.
এখন (ii) এ $b = -7$ বসিয়ে পাই, $y = -7$ বা, $y+7 = 0$, যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

3.10. বিভিন্ন আকারের সরলরেখার সমীকরণ

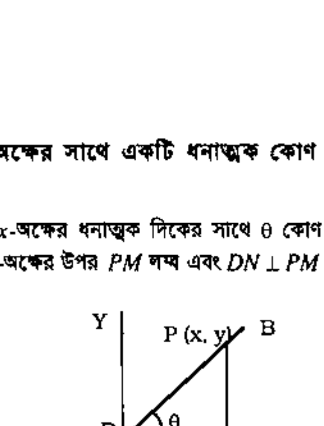
$(i)\ y = mx + c \quad (ii)\ y - y_1 = m(x - x_1)$

$$(iii)\ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$(iv)\ \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1 \quad (v)\ x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

(i) y-অক্ষকে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের সাথে একটি ধনাত্মক কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে

মনে করি, AB সরলরেখাটি y-অক্ষকে D বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটির উপর $P(x, y)$ যে কোনো একটি বিন্দু। P থেকে x-অক্ষের উপর PM লম্ব এবং $DN \perp PM$ টানি।



ধরি, $\angle BAM = \theta = \angle BDN$ [অনুরূপ কোণ]

এবং $OD = c = MN$ [y-অক্ষের খন্ডিতাংশ]

অতএব PDN সমকোণী ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই,

লম্ব $PN = PM - NM = y - c$ ভূমি $DN = OM = x$

$\therefore \dfrac{PN}{DN} = \tan\theta$

বা, $\dfrac{y-c}{x} = m$ বা, $y - c = mx$

বা, $y = mx + c$, যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত : $c = 0$ হলে, রেখাটি মূলবিন্দুগামী হবে। সুতরাং মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y = mx$.

উদাহরণ । $3x - 2y + 6 = 0$ **সরলরেখাটির ঢাল এবং y-অক্ষের খন্ডিতাংশ নির্ণয় কর।**

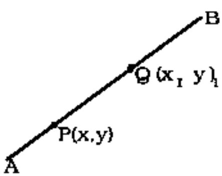
সমাধান : $3x - 2y + 6 = 0$ কে এভাবে লেখা যায় : $2y = 3x + 6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$

এ সমীকরণটিকে $y = mx + c$ এর সংগে তুলনা করে পাই, সরলরেখাটির ঢাল, $m = \frac{3}{2}$

এবং y-অক্ষের খন্ডিতাংশ, $c = 3$.

(ii) যে সরলরেখার ঢাল m এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী তার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে

মনে করি, AB সরলরেখাটি $Q(x_1, y_1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং রেখাটির উপর যে কোনো বিন্দু $P(x, y)$ নেয়া হল।



PQ এর ঢাল $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m. = AB$ এর ঢাল

$\therefore y - y_1 = m(x - x_1)$, যা (x_1, y_1) একটি বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ।

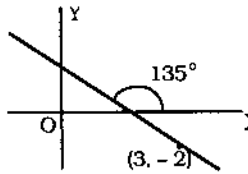
উদাহরণ । একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (3, – 2) বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 135° কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান : মনে করি, $(3, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখাটির সমীকরণ

$y - (-2) = m(x - 3)$

$\Rightarrow y + 2 = m(x - 3)$ .... (i)

এখন $m = \tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$



(i) এ $m = -1$ বসিয়ে পাই, $y + 2 = -(x - 3) \Rightarrow x + y - 1 = 0$, যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

(iii) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে

মনে করি, AB সরলরেখাটি $Q(x_1, y_1)$ ও $R(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং রেখাটির উপর $P(x, y)$ যে কোনো একটি বিন্দু।

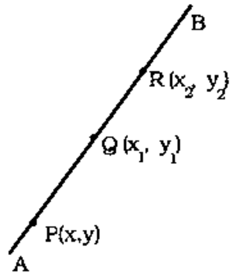
তাহলে PQ এর ঢাল $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ এবং QR এর ঢাল $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

P, Q, R বিন্দুত্রয় সমরেখ বলে PQ এর ঢাল $= QR$ এর ঢাল

$\therefore \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

বা, $\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

বা, $y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$



অর্থাৎ, $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, যা নির্ণেয় রেখার সমীকরণ।

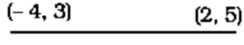
দ্রষ্টব্য : এখানে $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m =$ রেখাটির ঢাল।

উদাহরণ। একটি সরলরেখা (2, 5) এবং (–4, 3) বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রম করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ, $\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$.

সুতরাং $(2, 5)$ এবং $(-4, 3)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাটির সমীকরণ $\dfrac{y - 5}{5 - 3} = \dfrac{x - 2}{2 - (-4)}$

$$\Rightarrow \frac{y - 5}{2} = \frac{x - 2}{6}$$
$$\Rightarrow 3(y - 5) = x - 2$$

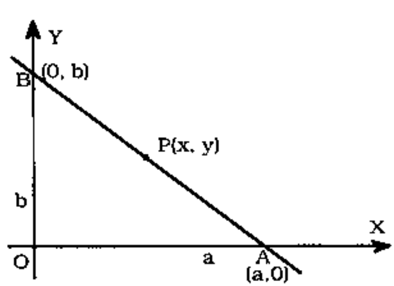


অতএব $x - 3y + 13 = 0$, যা নির্ণেয় রেখার সমীকরণ।

(iv) অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশ দেয়া থাকলে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে

মনে করি, সরলরেখাটি x-অক্ষকে A এবং y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। ধরি, x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $OA = a$, y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $OB = b$. সুতরাং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, b)$.

রেখাটির উপর $P(x, y)$ যে কোনো একটি বিন্দু।



তাহলে, AP এর ঢাল $= \frac{y-0}{x-a}$ বা, $\frac{y}{x-a}$

BP এর ঢাল $= \frac{y-b}{x-0}$ বা, $\frac{y-b}{x}$

A, P, B বিন্দুত্রয় সমরেখ বলে,

AP এর ঢাল $= BP$ এর ঢাল

$\therefore \frac{y}{x-a} = \frac{y-b}{x} \Rightarrow (x-a)(y-b) = xy$

$\Rightarrow xy - ay - bx + ab = xy$

$\Rightarrow bx + ay = ab$

$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ [ab দ্বারা ভাগ করে] যা নির্ণেয় সরলরেখাটির সমীকরণ।

উদাহরণ 1. $3x - 4y + 9 = 0$ রেখাটির ঢাল এবং অক্ষ দুইটির খণ্ডিতাংশ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $3x - 4y + 9 = 0 \Rightarrow 4y = 3x + 9$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4} \quad \text{রেখার ঢাল} = \frac{3}{4}$$

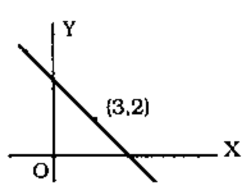
আবার $3x - 4y = -9 \Rightarrow \frac{3x}{-9} + \frac{4y}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{9}{4}} = 1$; একে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $a = -3$ এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $b = \frac{9}{4}$.

উদাহরণ 2. একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে এবং $(3,2)$ বিন্দুগামী। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.



এখানে a এবং b যথাক্রমে x-অক্ষের এবং y-অক্ষের ছেদাংশ।

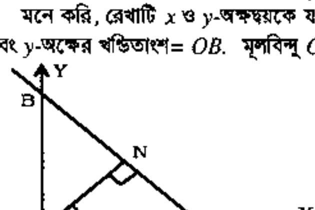
শর্তানুসারে $a = b$, সুতরাং সমীকরণটি দাঁড়ায় $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$,

$\Rightarrow x + y = a$. এ রেখাটি $(3,2)$ বিন্দুগামী।

সুতরাং $3 + 2 = a$, $\therefore a = 5$. অতএব নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x + y = 5$. বা, $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$

(v) মূলবিন্দু থেকে কোনো সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে

মনে করি, রেখাটি x ও y-অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= OA$ এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= OB$. মূলবিন্দু O থেকে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্ব দৈর্ঘ্য $ON = p$ এবং $\angle AON = \alpha$.



$\therefore \angle BON = 90° - \alpha$

এখন ΔONA-এ, $OA = ON \sec\alpha = p \sec\alpha$

আবার, ΔOBN-এ, $OB = ON \sec(90° - \alpha) = p \operatorname{cosec}\alpha$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$

বা, $\frac{x}{p\sec\alpha} + \frac{y}{p\operatorname{cosec}\alpha} = 1$

বা, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

একে সরলরেখার লম্বরূপ (*Perpendicular form*) সমীকরণ বলে।

3.10.1. দুইটি সমীকরণ দ্বারা একই সরলরেখা নির্দেশ করার শর্ত

মনে করি, $ax + by + c = 0$ এবং $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ সমীকরণদ্বয় একই সরলরেখা নির্দেশ করে, যখন ধ্রুবকগুলির কোনোটি শূন্য নয়। তাহলে, সমীকরণদ্বয় থেকে প্রাপ্ত ঢালদ্বয় সমান হবে এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণও সমান হবে। সমীকরণ দুইটিকে এভাবে লেখা যায় : $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$ এবং $y = \frac{-a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$

$\therefore \frac{-a}{b} = \frac{-a_1}{b_1}$ [$\because$ ঢালদ্বয় সমান] $\Rightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$.................. (i)

এবং $\frac{-c}{b} = \frac{-c_1}{b_1}$ [y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ সমান] $\Rightarrow \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ .... (ii)

এখন (i) ও (ii) থেকে $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, যা দুইটি সমীকরণ একই সরলরেখা সূচিত করার শর্ত।

3.11. $ax + by + c = 0$ সমীকরণটি একটি সরলরেখা প্রকাশ করে।

মনে করি, x এবং y দুই চলক সম্বলিত একঘাত সমীকরণ $ax + by + c = 0$ ....(i)

যেখানে a, b, c প্রত্যেকে অশূন্য। সমীকরণটি নিম্নরূপে লেখা যায় :

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Rightarrow y = mx + c'$..... (ii) যখন $-\frac{a}{b} = m$ এবং $-\frac{c}{b} = c'$.

আবার সমীকরণ (i) কে নিম্নরূপে লেখা যায় :

$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1$..... (iii) যখন $-\frac{c}{a} = a_1$ এবং $-\frac{c}{b} = b_1$.

যদি $a = 0$ হয়, তাহলে (i) নং থেকে পাই, $y = -\frac{c}{b}$, যা x- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা, এবং $b = 0$ হয়, তাহলে

(i) নং থেকে পাই, $x = -\frac{c}{a}$, যা y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা। আবার সমীকরণ (ii), (iii) প্রত্যেকে সরলরেখা নির্দেশ করে।

> **সুতরাং, $ax + by + c = 0$ সমীকরণটি সর্বদাই একটি সরলরেখা নির্দেশ করে যখন a ও b উভয়ই শূন্য না হয়।**

অনুসিদ্ধান্ত : $ax + by + c = 0$ রেখাটি x- অক্ষের সমান্তরাল হলে x- এর সহগ $a = 0$ এবং y- অক্ষের সমান্তরাল হলে y- এর সহগ $b = 0$ হবে।

উদাহরণ : $3x - 4y - 12 = 0$ সমীকরণটিকে নিচের আকারে রূপান্তর কর :

(i) $y = mx + c$ (ii) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

সমাধান : (i) প্রদত্ত সমীকরণটি $3x - 4y - 12 = 0 \Rightarrow 4y = 3x - 12$

$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x - 3$, যা $y = mx + c$ আকারের। এখানে $m = \frac{3}{4}$ এবং $c = -3$.

(ii) $3x - 4y - 12 = 0$

বা, $3x - 4y = 12$ বা, $\frac{3x}{12} - \frac{4y}{12} = 1$

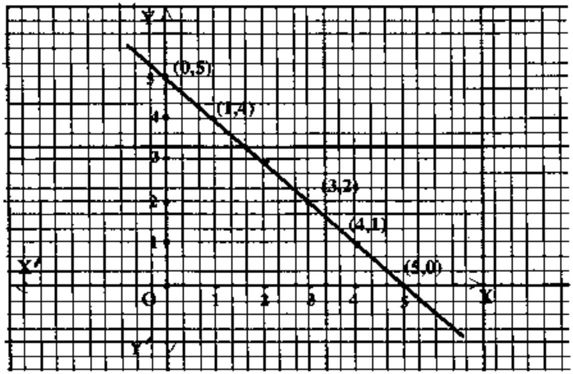
$\Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$, যা $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ আকারের। এখানে $a = 4, b = -3$.

3.12. লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন

$L = \{ (x, y) : x + y = 5 \}$ এর লেখ অঙ্কন করতে হবে।

প্রদত্ত সমীকরণ $x + y = 5$ এর উপর কতকগুলি বিন্দু যা সমীকরণকে সিদ্ধ করে তা নির্ণয় করে একটি সেট $S = \{ (1, 4), (0, 5), (4, 1), (5, 0), (3, 2) \subset L$ তৈরি করি।

ছক কাগজে x ও y অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। অতপর ছক কাগজের ক্ষুদ্র 3 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক নিয়ে উক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি।



বিন্দুগুলি পেন্সিল দ্বারা সংযোগ করলেই সরলরেখা L এর লেখ পাওয়া যায়।

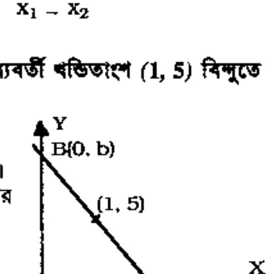
সরলরেখা বিষয়ক সূত্র ঃ

- y–অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $x = a$
- x- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $y = b$
- মূলবিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ, $y = mx$, যেখানে রেখার ঢাল m.
- y -অক্ষকে নির্দিষ্ট দূরত্বে ছেদ করে এরূপ রেখার সমীকরণ, $y = mx + c$
- অক্ষদ্বয়কে ছেদ করে (অর্থাৎ অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ (a ও b) এরূপ রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
- মূলবিন্দু থেকে কোনো রেখার উপর লম্ব–দূরত্ব = p এবং উক্ত লম্বটি X-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$
- একটি বিন্দু (x_1, y_1) দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$, যেখানে রেখার ঢাল m
- (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশ (1, 5) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

সমাধান : মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.



এ রেখাটি x-অক্ষকে $A\ (a, 0)$ এবং y-অক্ষকে $B\ (0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

শর্তানুসারে, $A\ (a, 0)$ এবং $B\ (0, b)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু $(1,5)$

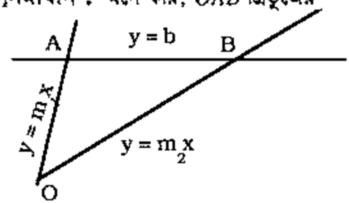
$\therefore\ \frac{a + 0}{2} = 1$ এবং $\frac{0 + b}{2} = 5$ অর্থাৎ $a = 2,\ b = 10$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{2} + \frac{y}{10} = 1$ বা, $5x + y = 10$.

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $y = m_1x$, $y = m_2x$ এবং $y = b$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{b^2}{2}\left|\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)\right|$ বর্গ একক।

[ঢা. '০৯; কু. '১০; দি. '১২]

সমাধান : মনে করি, OAB ত্রিভুজের



OA বাহুটির সমীকরণ, $y = m_1x$ .... (i)

OB বাহুটির সমীকরণ, $y = m_2x$ .... (ii)

AB বাহুটির সমীকরণ, $y = b$ .... (iii)

(i) ও (iii) সমাধান করে, $m_1x = b$ বা, $x = \frac{b}{m_1}$

$\therefore$ (i) ও (iii) এর ছেদবিন্দু $A\left(\frac{b}{m_1}, b\right)$

অনুরূপ (ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু $B\left(\frac{b}{m_2}, b\right)$. স্পষ্টত (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু $O(0,0)$.

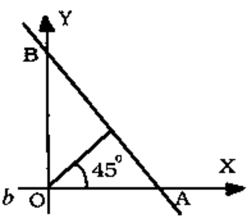
$$\therefore \Delta OAB \text{ এর ক্ষেত্রফল } = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{b}{m_1} & b & 1 \\ \frac{b}{m_2} & b & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{m_1} - \frac{b^2}{m_2}\right) = \frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right).$$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{b^2}{2}\left|\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)\right|$ বর্গ একক।

উদাহরণ 3. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ তৈরি করে এবং মূলবিন্দু থেকে উক্ত রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

[য. '১০; চ. '১৩]

সমাধান : মনে করি, রেখাটির সমীকরণ,



$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, যেখানে $\alpha = 45°$

$\therefore x \cos 45° + y \sin 45° = p$

বা, $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = p$ বা, $\frac{x}{p\sqrt{2}} + \frac{y}{p\sqrt{2}} = 1$. একে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

এর সাথে তুলনা করে আমরা পাই $OA = p\sqrt{2} = a$ এবং $OB = p\sqrt{2} = b$

শর্তানুসারে, ΔOAB এর ক্ষেত্রফল = 8 বর্গ একক

বা, $\frac{1}{2} OA.\ OB = 8$ বা, $ab = 16$ বা, $p\sqrt{2}\ .\ p\sqrt{2} = 16$ বা, $p^2 = 8$

$\therefore p = 2\sqrt{2}$. যেহেতু ধনাত্মক।

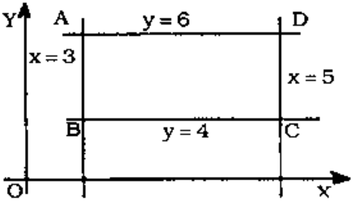
সুতরাং নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ অর্থাৎ, $x + y = 4$.

উদাহরণ 4. $x = 3$, $x = 5$, $y = 4$ এবং $y = 6$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন আয়তের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[য. '১১]

সমাধান : $x = 3$ এবং $x = 5$ রেখা দুইটি y-অক্ষের সমান্তরাল, আবার $y = 4$ এবং $y = 6$ রেখা দুইটি x-অক্ষের সমান্তরাল। সুতরাং রেখা চারটি একটি আয়ত উৎপন্ন করে।

মনে করি, উৎপন্ন আয়তটি $ABCD$ এবং এর AB বাহুটির সমীকরণ, $x = 3$; BC বাহুটির সমীকরণ, $y = 4$; CD বাহুটির সমীকরণ, $x = 5$ এবং AD বাহুটির সমীকরণ, $y = 6$



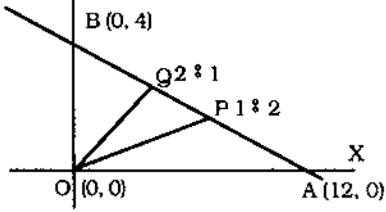
A বিন্দুটি $x = 3$ এবং $y = 6$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু। সুতরাং A বিন্দুটির স্থানাংক $(3, 6)$। তদ্রূপ B, C, D বিন্দুগুলির স্থানাংক যথাক্রমে $(3, 4), (5, 4), (5,6)$.

অতএব AC কর্ণের সমীকরণ, $\dfrac{y-6}{6-4} = \dfrac{x-3}{3-5}$

$$\Rightarrow \frac{y-6}{2} = \frac{x-3}{-2} \Rightarrow x + y - 9 = 0$$

এবং BD কর্ণের সমীকরণ, $\dfrac{y-4}{4-6} = \dfrac{x-3}{3-5} \Rightarrow \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{x-3}{-2}$ অর্থাৎ $x - y + 1 = 0$.

উদাহরণ 5. $x + 3y - 12 = 0$ সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশকে সমান তিনভাগে বিভক্ত করে এমন বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '১০; চ. '১৩]



সমাধান : $x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow x + 3y = 12$

বা, $\dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{4} = 1$

প্রদত্ত রেখাটি x-অক্ষকে $A\ (12, 0)$ এবং y-অক্ষকে $B\ (0, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, P ও Q বিন্দু দুইটি AB কে যথাক্রমে $1 : 2$ এবং $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore$ P এর স্থানাংক $\left(\dfrac{1 \times 0 + 2 \times 12}{1 + 2}, \dfrac{1 \times 4 + 2 \times 0}{1 + 2}\right) = \left(8, \dfrac{4}{3}\right)$

এবং Q বিন্দুর স্থানাংক $\left(\dfrac{2 \times 0 + 1 \times 0}{1 + 2}, \dfrac{2 \times 4 + 1 \times 0}{1 + 2}\right) = \left(4, \dfrac{8}{3}\right)$

OP রেখার ঢাল $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{\frac{4}{3} - 0}{8 - 0} = \dfrac{1}{6}$ এবং OQ এর ঢাল $= \dfrac{\frac{8}{3} - 0}{4 - 0} = \dfrac{2}{3}$

সুতরাং OP রেখার সমীকরণ $y = mx$ বা, $y = \dfrac{1}{6}x$ বা, $x = 6y$

এবং OQ রেখার সমীকরণ $y = \dfrac{2}{3}x$ বা, $2x = 3y$

উদাহরণ 6 : একটি ফ্যাক্টরিতে 200 বাক্স তৈরি করতে 800 টাকা এবং 400 বাক্স তৈরি করতে 1200 টাকা খরচ হয়। যদি ব্যয় রেখাটি সরলরেখা হয়, তবে এর সমীকরণ নির্ণয় কর। এ থেকে 300টি বাক্স তৈরি করতে কত টাকা খরচ হবে তা বের কর।

সমাধান : মনে করি, x সংখ্যক বাক্স তৈরি করতে খরচ হয় y টাকা। তাহলে, $(x_1, y_1) \equiv (200, 800)$ এবং $(x_2, y_2) \equiv (400, 1200)$

এখন $(200, 800)$ ও $(400, 1200)$ দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$ সূত্র দ্বারা

পাই, $\dfrac{y - 800}{800 - 1200} = \dfrac{x - 200}{200 - 400}$ বা, $\dfrac{y - 800}{-400} = \dfrac{x - 200}{-200}$

বা, $y - 800 = 2x - 400$ বা, $y = 2x + 400$, যা নির্ণেয় সমীকরণ।

এখন বাক্সের সংখ্যা $x = 300$ হলে, $y =$ কত টাকা?

$y = 2x + 400$ সমীকরণে $x = 300$ বসিয়ে পাই, $y = 2 \times 300 + 400$ বা, $y = 1000$ টাকা।

সুতরাং 300টি বাক্স তৈরি করতে 1000 টাকা খরচ।

প্রশ্নমালা 3.6

1. (i) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু এবং $(3,4)$ বিন্দু দিয়ে যায়। উ: $4x - 3y = 0$

(ii) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দুগামী এবং x–অক্ষের সাথে (a) $60°$ (b) $135°$ কোণ উৎপন্ন করে। উ: (a) $y - \sqrt{3}x = 0$; (b) $x + y = 0$.

(iii) $6x - 5y + 30 = 0$ সরলরেখাটির ঢাল এবং অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

উ: ঢাল $= \frac{6}{5}$ খণ্ডিতাংশ -5 এবং 6.

2. দুইটি সরলরেখার উভয়ে $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা যথাক্রমে x-অক্ষের সমান্তরাল এবং এর উপর লম্ব। রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $y + 4 = 0$ এবং $x-3 = 0$.

3. (i) $ax + by = c$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান a, b এবং c তে প্রকাশ কর। [দি. '১৩] উ: $p = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(ii) $3x + 7y = 21$ এবং $2ax - 3by + 6 = 0$ সমীকরণ দুইটি একই সরলরেখা সূচিত করলে, a এবং b এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. '০২] উ: $a = \frac{-3}{7}, b = \frac{2}{3}$

(iii) $12x + 5y - 6 = 0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ সমীকরণদ্বয় একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান নির্ণয় কর। উ: $p = \frac{6}{13}$

4. দেখাও যে, $x - 2y + 5 = 0$ রেখাটি $(-3, 6)$ বিন্দু হতে $x - 2y - 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত সকল সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [ঢা. '০৯; চ. '১১; দি. '১২]

5. নিম্নলিখিত দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $(2, -1)$ এবং $(-3,5)$, (ii) $(5,7)$ এবং $(0,-4)$. উ: (i) $6x + 5y - 7 = 0$, (ii) $11x - 6y - 24 = 0$

6. (i) একটি সরলরেখা $(1, 2)$ ও $(3, 4)$ বিন্দুদ্বয়গামী এবং (x, y) বিন্দুটি তার উপর অবস্থিত। দেখাও যে, $x - y + 1 = 0$. [ঢা. '০৩; রা. '০৬]

(ii) $P(x, y)C(1,2)$ রেখাটি $A(-7, 3)B(1, -5)$ রেখার উপর লম্ব হলে, দেখাও যে, $x - y + 1 = 0$.

7. $(a, b), (a', b'), (a - a', b - b')$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, দেখাও যে, এদের সংযোগ রেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $ab' = a'b$ হয়। [কু. '০৯]

8. $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ চলমান রেখাটি x ও y অক্ষরেখা দুইটিকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, এখানে p ধ্রুবক। দেখাও যে, AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হবে $p^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$. [ঢা. '১১]

9. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের সাথে $135°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং $(3,5)$ বিন্দু দিয়ে যায়। উ: $x + y - 8 = 0$

10. কোনো সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $(2,3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হলে, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১৩] উ: $3x + 2y = 12$

11. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $(6,2)$ বিন্দুতে $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়; সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. '১১] উ: $x + 2y - 10 = 0$

12. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $(-4, 3)$ বিন্দুতে $5 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। [সি. '১১; ব. '১৩] উ: $9x - 20y + 96 = 0$

13. $5x + 4y - 20 = 0$ সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশকে সমান তিনভাগে বিভক্ত করে, এমন বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $5x - 2y = 0$; $5x - 8y = 0$.

14. একটি বর্গের কর্ণদ্বয় অক্ষদ্বয় বরাবর এবং প্রত্যেক কর্ণের দৈর্ঘ্য 4 একক। বর্গের চারটি বাহুর সমীকরণ বের কর। উ: $x + y = 2, x - y + 2 = 0, x + y + 2 = 0, x - y = 2.$

15. একটি সরলরেখা $(-2, -5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA + 2.OB = 0$ হয়। O মূলবিন্দু হলে, সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '১২; ঢা. '১৩] উ: $x - 2y - 8 = 0$

16. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA - OB = 2$ হয়, যখন O মূলবিন্দু। [সি. রা. '১২] উ: $2x + 3y = 12$ বা, $x - y = 1$

17. একটি সরলরেখা $(2,6)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশের সমষ্টি 15; রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $2x + y = 10$ বা, $3x + 2y = 18.$

18. যে সরলরেখা $(-2, 6)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশের গুণফল 6, তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $3x + 2y - 6 = 0, 6x + y + 6 = 0$

19. একটি সরলরেখা $(6, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং তা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশের গুণফল $= 1$, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x + 4y = 2, x + 9y + 3 = 0$

20. $(2, 5)$ বিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখাটি অক্ষদ্বয় থেকে সমমানের বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট অংশ ছেদ করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। রেখাটির যে বিন্দুতে কোটি ভুজের দ্বিগুণ তার স্থানাঙ্ক বের কর। উত্তর: $x - y + 3 = 0$; $(3,6)$

21. একটি সরলরেখা অক্ষ দুইটি থেকে সমান সমান অংশ ছেদ করে এবং (α, β) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. '১১] উ: $x + y = \alpha + \beta.$

22. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-3,8)$ বিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয় থেকে সমমানের ধনাত্মক অংশ ছেদ করে। উ: $x + y - 5 = 0$

23. একটি সরলরেখা $(3, 7)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং অক্ষদ্বয় হতে বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x - y + 4 = 0$

24. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয় থেকে সমমানের যোগবোধক অংশছেদ করে এবং মূলবিন্দু থেকে যার দূরত্ব 4 একক। [কু. '১১; সি. '১৩] উ: $x + y = 4\sqrt{2}$

25. একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে $\dfrac{50}{\sqrt{3}}$ বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু হতে রেখাটির উপর অংকিত লম্ব x-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$

26. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 16 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু হতে উক্ত রেখার উপর অংকিত লম্ব x-অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। [সি. '০৫] উ: $x + y = 4\sqrt{2}.$

27. একটি সরলরেখা $(1,4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে প্রথম চর্তুভাগে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১২] উ: $y + 4x = 8.$

28. $A (h, k)$ বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $B (k, h)$ বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত; AB সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '১১; য. ঢা. '১২] উ: $x + y - 6 = 0$

29. $x + 2y + 7 = 0$ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উপরোক্ত খন্ডিতাংশ কোনো বর্গের বাহুর হলে তার ক্ষেত্রফল কত? [রা. '১২; য. '১৩] উ: $(-7/2, -7/4)$, $61\frac{1}{4}$ বর্গএকক

30. t এর যে কোনো বাস্তব মানের জন্য P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2t + 2, t - 4)$ হলে, এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। সঞ্চারপথটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: $x - 2y = 10$; 25 বর্গ একক।

31. $3x + by + 1 = 0$ এবং $ax + 6y + 1 = 0$ রেখা দুইটি $(5, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে; a ও b এর মান কত? যদি প্রথম রেখাটি x-অক্ষকে A বিন্দুতে এবং দ্বিতীয় রেখাটি y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে, তবে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উঃ $a = -5$, $b = -4$; $3x + 6y + 1 = 0$

32. a এর মান কত হলে (i) $3x + 2y - 5 = 0$, (ii) $ax + 4y - 9 = 0$, (iii) $x + 2y - 7 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে? বিশেষ অবস্থা দুইটি আলোচনা কর, যখন $a = 2$ এবং $a = 6$.
উঃ $a = 7$ এবং $a = 2$ হলে, (ii) ও (iii) সমান্তরাল; $a = 6$ হলে, (i) ও (ii) সমান্তরাল।

33. দেখাও যে, $x = a$, $y = b$ এবং $y = mx$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2m}(b - ma)^2$.
[কু. '১২; ব. '১৩]

34. $2y + x - 5 = 0$, $y + 2x - 7 = 0$ এবং $x - y + 1 = 0$ রেখাত্রয়ের সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উঃ $\frac{3}{2}$ বর্গএকক।

35. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $x - y + 2 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$ এবং $2x - y - 3 = 0$; প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উঃ $7\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

36. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $A(1,1)$, $B(3,4)$ এবং $C(5,-2)$; AB ও ACএর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তা BC এর সমান্তরাল। [ঢা. '১১] উত্তর : $6x + 2y - 17 = 0$.

37. $(2,4)$, $(-4,-6)$ এবং $(6, -8)$ বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে, ঐ ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। উঃ $11x - y - 18 = 0$, $x - 2y - 8 = 0$, $x + y + 2 = 0$.

38. $(1,2)$, $(4, 4)$ ও $(2,8)$ বিন্দুত্রয় কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু; ত্রিভুজটির বাহুগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। উঃ $2x + y - 4 = 0$, $6x - y - 20 = 0$, $2x - 3y + 20 = 0$.

39. $OABC$ একটি সামান্তরিক। x-অক্ষ বরাবর OA অবস্থিত। OC রেখার সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4,2)$। A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '১১; রা. '১৩]
উঃ $(3,0)$, $(1,2)$, $x + y - 3 = 0$.

40. $x + by = b$ রেখাটি x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $OA = 3. OB$, যখন O মূলবিন্দু এবং Q এর স্থানাঙ্ক $(0,-9)$ হয়, তবে AQ-এর সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে $AQ \perp AB$. উঃ $3x - y = 9$.

41. $x = 4$, $x = 8$, $y = 6$ এবং $y = 10$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তারা পরস্পর লম্ব। [চ. '০২] উঃ $x - y + 2 = 0$, $x + y - 14 = 0$.

42. $x - 4 = 0$, $y - 5 = 0$, $x + 3 = 0$ এবং $y + 2 = 0$ সমীকরণ চারটি একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু নির্দেশ করে। চতুর্ভুজটির কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '১২] উঃ $x - y + 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$.

43. x-অক্ষের উপর P, Q বিন্দুদ্বয় এবং y–অক্ষের উপর R, S বিন্দুদ্বয় অবস্থিত। PR ও QS রেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y + 6 = 0$ এবং $x + 2y - 1 = 0$; দেখাও যে, $PQ = RS$. [ঢা. '০৪]

44. একটি কারখানায় 75 একক এবং 100 একক জিনিস তৈরি করতে যথাক্রমে 350 টাকা এবং 400 টাকা খরচ হয়। জিনিসটির খরচ (cost) ও পরিমাণের মধ্যকার বিদ্যমান সরলরৈখিক সম্পর্ক নির্ণয় কর এবং তা থেকে 150 একক জিনিস তৈরি করার খরচ বের কর। উঃ $y = 2x + 200$; 500 টাকা।

45. কোনো একটি ছাত্রাবাসের মোট ব্যয় y এবং সদস্য সংখ্যা x; 12 জন সদস্যের জন্য মোট খরচ 1040 টাকা এবং 20 জন সদস্যের জন্য মোট খরচ 1600 টাকা হলে, (i) x এবং y এর মধ্যে সরলরৈখিক সম্পর্ক নির্ণয় কর। (ii) সদস্য সংখ্যা 15 হলে, মোট ব্যয় কত হবে? উঃ (i) $y = 70x + 200$, (ii) 1250 টাকা।

3.13. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু :

মনে করি, সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$........ (i)

এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ .... (ii)

এদের ছেদবিন্দুটি উভয় সরলরেখার একটি সাধারণ বিন্দু। যে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (i) ও (ii) সমীকরণ দুইটিকে সিদ্ধ করে তা হল প্রদত্ত রেখা দুইটির নির্ণেয় ছেদবিন্দু।

সুতরাং (i) ও (ii) সমীকরণ দুইটি সমাধান করে x ও y এর যে মান পাওয়া যায় তা হবে রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক। (i) ও (ii) কে বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় সমাধান করে আমরা পাই

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2-c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\therefore x = \frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \text{ এবং } y = \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

অর্থাৎ, রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$ যেখানে $a_1b_2 \neq a_2b_1$.

মন্তব্য : a_1, b_1, c_1 এবং a_2, b_2, c_2 নির্দিষ্ট বিধায় উক্ত ছেদবিন্দুটি অনন্য (Unique) .

$\therefore$ রেখা দুইটি সমান্তরাল না হলে, এরা একটি এবং কেবল একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করবে।

3.14. দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ

(i) ধরি, রেখা দুইটির সমীকরণ $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$.

রেখা দুইটি x– অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে θ_1, θ_2 কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore m_1 = \tan\theta_1$ এবং $m_2 = \tan\theta_2$

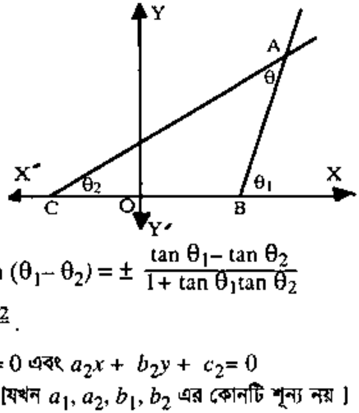
মনে করি, রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ

$\therefore$ চিত্র থেকে পাই, $\theta + \theta_2 = \theta_1$

সুতরাং $\theta = \theta_1 - \theta_2$, ... (i)

যদি AB ও AC রেখা দুইটি x-অক্ষের সাথে যথাক্রমে θ_2 ও θ_1 কোণ উৎপন্ন করে তবে,

$\theta = \theta_2 - \theta_1 = -(\theta_1 - \theta_2)$ .... (ii) , $\theta_2 > \theta_1$



(i) ও (ii) থেকে পাই, $\theta = \pm(\theta_1 - \theta_2)$. $\therefore \tan\theta = \pm\tan(\theta_1 - \theta_2) = \pm\dfrac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2}$

সুতরাং $\tan\theta = \pm\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ অথবা, $\cot\theta = \pm\dfrac{1+m_1m_2}{m_1-m_2}$.

(ii) মনে করি, সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

[যখন a_1, a_2, b_1, b_2 এর কোনটি শূন্য নয়]

সমীকরণ দুইটিকে এভাবে লেখা যায় : $y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1}$ এবং $y = \dfrac{-a_2}{b_2}x - \dfrac{c_2}{b_2}$

সুতরাং রেখা দুইটির ঢাল যথাক্রমে $m_1 = \dfrac{-a_1}{b_1}$ এবং $m_2 = \dfrac{-a_2}{b_2}$

যদি রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ φ হয় তবে, $\tan\varphi = \pm\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

$$= \pm\frac{\frac{-a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}}{1 + \frac{a_1a_2}{b_1b_2}} = \pm\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2},$$

3.15. দুইটি সরলরেখার সমান্তরাল বা লম্ব হওয়ার শর্ত

$y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ রেখা দুইটি সমান্তরাল হলে, $\theta = 0$ অর্থাৎ $\tan\theta = 0$

[অনুচ্ছেদ 3.14 থেকে]

সুতরাং $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = 0$ বা, $m_1 - m_2 = 0$ বা, $\boxed{m_1 = m_2}$ যা রেখা দুইটি সমান্তরাল হওয়ার শর্ত।

রেখা দুইটি লম্ব হলে, $\theta = 90°$.

অতএব $\cot 90° = 0$ অর্থাৎ $1 + m_1 m_2 = 0$ বা $\boxed{m_1 m_2 = -1}$, যা দুইটি রেখা লম্ব হওয়ার শর্ত।

অনুরূপভাবে, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখা দুইটি সমান্তরাল হবার শর্ত হল $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$ অর্থাৎ $a_1b_2 = a_2b_1$ বা, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ এবং বিপরীতক্রমে।

রেখাদ্বয় অসমান্তরাল হলে $(a_2b_1 - a_1b_2) \neq 0$.

এবং রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবার শর্ত হল $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ এবং বিপরীতক্রমে।

দ্রষ্টব্য : $\tan\varphi$ এর ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক মান দুইটি থেকে যথাক্রমে রেখা দুইটির মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ এবং স্থূলকোণ পাওয়া যায়।

লক্ষণীয় : দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব এবং সমান্তরাল হওয়ার শর্ত অনুচ্ছেদ 3.7.1 এ আলোচনা করা হয়েছে।

3.16. বিভিন্ন শর্তাধীনে সরলরেখার সমীকরণ

(i) দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়

মনে করি, প্রদত্ত রেখা দুইটির সমীকরণ, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ..... (i) এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ .... (ii)

যদি (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দুটির স্থানাংক (x', y') হয়, তবে $a_1x' + b_1y' + c_1 = 0$ এবং $a_2x' + b_2y' + c_2 = 0$ হবে।

সুতরাং যে কোনো অনির্ধারিত ধ্রুবক, $k \neq 0$ এর জন্য $a_1x' + b_1y' + c_1 + k(a_2x' + b_2y' + c_2) = 0$ ...... (iii)

(iii) থেকে স্পষ্ট বোঝা যায় যে, (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু (x', y') দ্বারা

$\boldsymbol{a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0}$ .... (iv) সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

আবার (iv) সমীকরণটি x ও y এর একঘাতবিশিষ্ট বলে একটি সরলরেখা সূচিত করে। সুতরাং k এর যে কোনো অশূন্য মানের জন (iv) সমীকরণটি (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দুগামী একটি সরলরেখা নির্দেশ করে।

(ii) সমান্তরাল ও লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় পদ্ধতি :

সমান্তরাল রেখা : দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হলে, প্রথম রেখার ঢাল = দ্বিতীয় রেখার ঢাল।

মনে করি, প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $ax + by + c = 0 \Rightarrow y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$. এ রেখাটির ঢাল= $\frac{-a}{b}$.

অতএব এর সমান্তরাল রেখার ঢাল $= \frac{-a}{b}$.

সুতরাং প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ $y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + k_1$

বা, $ax + by - bk_1 = 0$.

বা, $ax + by + k = 0$, যখন $k = -bk_1$ ...... (ii), যেখানে k একটি অনির্ধারিত ধ্রুবক।

লম্ব–রেখা : আবার যেহেতু দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হলে, রেখাদ্বয়ের ঢালের গুণফল $= -1$

অতএব প্রদত্ত $ax + by + c = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল m হলে,

$m \times \left(\frac{-a}{b}\right) = -1 \Rightarrow m = \frac{b}{a}$

সুতরাং প্রদত্ত সরলরেখার উপর লম্ব যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ, $y = \frac{b}{a}x + k_1$

$\Rightarrow bx - ay + ak_1 = 0$

$\Rightarrow bx - ay + k = 0$ .... (iii), যেখানে $ak_1 = k$ একটি অনির্ধারিত ধ্রুবক।

লক্ষণীয় : কোনো সরলরেখার সমীকরণের x, y সম্বলিত পদ দুইটি অপরিবর্তিত রেখে কেবল ধ্রুবক পদটি পরিবর্তন করলেই ঐ রেখার সমান্তরাল যে কোনো রেখার সমীকরণ পাওয়া যায়। আবার প্রদত্ত সমীকরণে x ও y এর সহগ দুইটি পরস্পর বিনিময় করে এদের যে কোনো একটির চিহ্ন পরিবর্তন করলে ঐ রেখার উপর লম্ব যেকোন রেখার সমীকরণ পাওয়া যায়। অবশ্য উভয়ক্ষেত্রে একটি অনির্ধারিত ধ্রুবক নিতে হবে।

3.16.1. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ....(i)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ .... (ii)

$a_3x + b_3y + c_3 = 0$ .... (iii)

সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু হওয়ার শর্ত : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

প্রমাণ : অনুচ্ছেদ 3.13 থেকে (ii) ও (iii) রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{b_2c_3-b_3c_2}{a_2b_3-a_3b_2}, \frac{a_3c_2-a_2c_3}{a_2b_3-a_3b_2}\right)$

রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে (i) রেখাটিও এ ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সুতরাং ছেদ বিন্দুটি (i) সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

$\therefore a_1\left(\frac{b_2c_3-b_3c_2}{a_2b_3-a_3b_2}\right) + b_1\left(\frac{a_3c_2-a_2c_3}{a_2b_3-a_3b_2}\right) + c_1 = 0$

$\Rightarrow a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$; অতএব $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (1, 2) বিন্দুগামী এবং (*a*) $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার উপর লম্ব হয়। (*b*) $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল হয়। [কু. '০৪]

সমাধান : (১ম পদ্ধতি) :

(*a*) প্রদত্ত রেখাটির সমীকরণ $3x - 4y + 8 = 0$. $\therefore$ এর ঢাল, $m_1 = \frac{3}{4}$

সুতরাং এ রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $= m_2$ হলে, $m_1 \cdot m_2 = -1$, $\therefore m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-4}{3}$

সুতরাং (1, 2) বিন্দুগামী এবং $m_2 = \frac{-4}{3}$ ঢালবিশিষ্ট রেখাটির সমীকরণ,

$y - 2 = \frac{-4}{3}(x - 1)$ অর্থাৎ $4x + 3y - 10 = 0$.

(*b*) প্রদত্ত রেখাটির ঢাল $m_1 = \frac{3}{4}$ সুতরাং এর সমান্তরাল রেখাটির ঢাল , $m_2 = m_1 = \frac{3}{4}$ হবে।

অতএব (1, 2) বিন্দুগামী এবং $m_2 = \frac{3}{4}$ ঢালবিশিষ্ট রেখাটির সমীকরণ

$y - 2 = \frac{3}{4}(x - 1)$ অর্থাৎ, $3x - 4y + 5 = 0$.

(২য় পদ্ধতি) :

(a) $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ যেকোন সরলরেখার সমীকরণ

$4x + 3y + k = 0$ ---------------- (i), যেখানে k একটি অনির্ধারিত ধ্রুবক।

এ রেখাটি $(1, 2)$ বিন্দুগামী হলে বিন্দুটির স্থানাংকে (i) কে সিদ্ধ করবে।

$\therefore 4.1 + 3(2) + k = 0$, বা, $k = -10$ $\therefore$ নির্ণেয় রেখাটির সমীকরণ, $4x + 3y - 10 = 0$.

(b) $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল এমন যেকোন সরলরেখার সমীকরণ

$3x - 4y + k = 0$ ----------- (ii), যেখানে k একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

এখন রেখাটি $(1, 2)$ বিন্দু দিয়ে গেলে আমরা পাই, $3.1 - 4(2) + k = 0$, বা, $k = 5$.

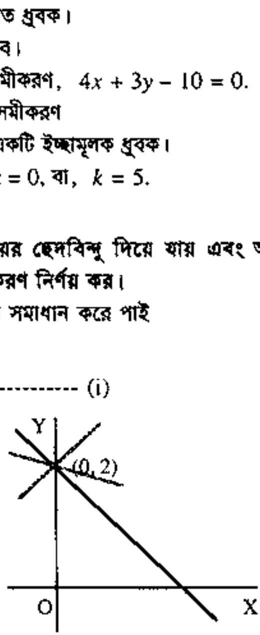
$\therefore$ নির্ণেয় রেখাটির সমীকরণ, $3x - 4y + 5 = 0$.

উদাহরণ 2. $2x - y + 2 = 0$ এবং $x + 3y - 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় থেকে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $2x - y + 2 = 0$ এবং $x + 3y - 6 = 0$ সমীকরণ দুইটি সমাধান করে পাই

$x = 0, y = 2$ অর্থাৎ, রেখা দুইটির ছেদবিন্দু $(0, 2)$.

ধরি অক্ষদ্বয়কে ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ----------- (i)



এখানে $a = x$-অক্ষের ছেদাংশ, $b = y$-অক্ষের ছেদাংশ

শর্তানুসারে, $a = b$.

সুতরাং (i) সমীকরণটি হবে $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1, \Rightarrow x + y = a$

যেহেতু এ রেখাটি ছেদবিন্দু $(0, 2)$ দিয়ে যায়,

সুতরাং $0 + 2 = a$ $\therefore a = 2$

অতএব সরলরেখাটির সমীকরণ, $x + y = 2$.

উদাহরণ 3. $2x + by + 4 = 0, 4x - y - 2b = 0$ এবং $3x + y - 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, b এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $2x + by + 4 = 0, 4x - y - 2b = 0$ এবং $3x + y - 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে

$$\begin{vmatrix} 2 & b & 4 \\ 4 & -1 & -2b \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

বা, $2(1 + 2b) - b(-4 + 6b) + 4(4 + 3) = 0$ বা, $2 + 4b + 4b - 6b^2 + 28 = 0$

বা, $-6b^2 + 8b + 30 = 0$ বা, $3b^2 - 4b - 15 = 0$

বা, $3b^2 - 9b + 5b - 15 = 0$ বা, $3b(b - 3) + 5(b - 3) = 0$

বা, $(b - 3)(3b + 5) = 0$; অতএব $b = 3$ অথবা $b = -\frac{5}{3}$

উদাহরণ 4. $(2, -1)$ বিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [সি. '০৫, '০৭; কু. '০৪; য. '০৬; চ. '০৭, '১০; ঢা. '০৮; রা. য. দি. সি. '১২]

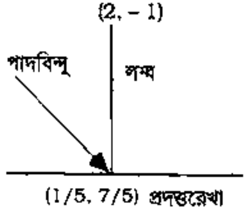
সমাধান : ধরি, $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ,

$4x + 3y + k = 0$ ---------------- (i), যেখানে k একটি অনির্ধারিত ধ্রুবক।

এ রেখাটি $(2, -1)$ বিন্দু দিয়ে গেলে আমরা পাই, $8 - 3 + k = 0$, বা, $k = -5$

$\therefore$ লম্ব-রেখাটির সমীকরণ, $4x + 3y - 5 = 0$.

এখন $3x - 4y + 5 = 0$ এবং $4x + 3y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুটি নির্ণেয় লম্বের পাদবিন্দু।



বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় সমীকরণদ্বয় সমাধান করে আমরা পাই

$$\frac{x}{20-15}=\frac{y}{20+15}=\frac{1}{9+16}$$

$\therefore x=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$ এবং $y=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$.

উদাহরণ 5. দুইটি সরলরেখা (1, 3) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x+y=7$ রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, (1, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y-3=m(x-1)$ ... (i)

[$y-y_1=m(x-x_1)$ সূত্র]

প্রদত্ত রেখা $2x+y=7 \Rightarrow y=-2x+7$ এর ঢাল $=-2$ [$y=mx+c$ এর সাথে তুলনা করে]

(i) রেখাটি প্রদত্তরেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan 45° = \pm\frac{m-(-2)}{1+m(-2)}$, $\left[\tan\theta=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} \text{ সূত্র দ্বারা}\right]$

$\Rightarrow 1=\pm\frac{m+2}{1-2m} \Rightarrow 1-2m=\pm(m+2)$

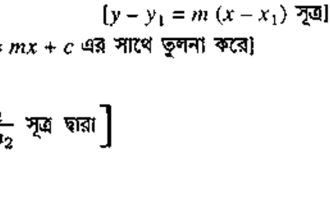
(+) নিয়ে, $1-2m=m+2 \Rightarrow 3m=-1 \Rightarrow m=-\frac{1}{3}$

(−) নিয়ে, $1-2m=-(m+2) \Rightarrow m=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $y-3=-\frac{1}{3}(x-1)$, যখন $m=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow x+3y=10$

এবং $y-3=3(x-1) \Rightarrow 3x-y=0$, যখন $m=3$



উদাহরণ 6. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x-7y+11=0$ ও $x+3y-8=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [সি. '১১; য. '১২]

সমাধান : ধরি, রেখাটির সমীকরণ $2x-7y+11+k(x+3y-8)=0$ .... (i) যখন $k\neq 0$ একটি ধ্রুবক।

$\Rightarrow (k+2)x+(3k-7)y-8k+11=0$

যেহেতু রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল, সুতরাং yএর সহগ $3k-7=0$ বা, $k=7/3$.

[অনুচ্ছেদ 3.11 এর অনুসিদ্ধান্ত দ্রষ্টব্য]

(i) এ k এর মান বসিয়ে পাই, $2x-7y+11+\frac{7}{3}(x+3y-8)=0$

বা, $6x-21y+33+7x+21y-56=0$ বা, $13x-23=0$, যা নির্ণেয় রেখার সমীকরণ।

বিকল্প পদ্ধতি : প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি $2x-7y+11=0$ .... (i) এবং $x+3y-8=0$ .... (ii)

(i) − (ii) × 2 $\Rightarrow -13y+27=0 \therefore y=\frac{27}{13}$

(ii) এ $y=\frac{27}{13}$ বসিয়ে, $x+\frac{3\times 27}{13}-8=0$

বা, $x=8-\frac{81}{13}=\frac{23}{13}$ $\therefore$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু $\left(\frac{23}{13},\frac{27}{13}\right)$

মনে করি, y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $x=a$, যা $\left(\frac{23}{13},\frac{27}{13}\right)$ বিন্দুগামী। $\therefore a=\frac{23}{13}$

সুতরাং নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $x=\frac{23}{13}$ বা, $13x-23=0$

প্রশ্নমালা 3.7

1. নিচের রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর :

(a) $y = 5$ এবং $x + y - 2 = 0$, (b) $x - 2y + 1 = 0$ এবং $3x - y + 5 = 0$,

(c) $3x + 4y - 2 = 0$ এবং $4x - 3y + 7 = 0$. উ : (a) $45°$ (b) $45°$ (c) $90°$.

2. k এর মান কত হলে $5x + 4y - 1 = 0$ এবং $2x + ky - 7 = 0$ রেখা দুইটি সমান্তরাল হবে? উ: $k = 8/5$.

3. a এর মান কত হলে $2x - y + 3 = 0$ এবং $3x + ay - 2 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে? উ : $a = 6$.

4. (i) মূলবিন্দু এবং $x - y - 4 = 0$ ও $7x + y + 20 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $3x - y = 0$.

(ii) মূলবিন্দু এবং $4x + 3y - 8 = 0$ ও $x + y = 1$ এর ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১০] উ : $4x + 5y = 0$.

5. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ও $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। উ : $x - y = 0$.

6. (i) (3, 2) বিন্দু এবং $x - y + 4 = 0$ ও $2x - y + 5 = 0$ এর ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x + 4y = 11$.

(ii) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (4, 6) ও (– 2, 4) বিন্দু দুইটির সংযোগ সরলরেখার মধ্যবিন্দু এবং $2x + 3y - 6 = 0$ ও $5x - 4y - 1 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। উ : $x - 4y + 19 = 0$.

7. (i) (2, – 3) বিন্দু দিয়ে গমনকারী এবং $2x - 3y = 7$ রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '০৭] উ : $3x + 2y = 0$.

(ii) এরূপ সরলরেখা সমীকরণ নির্ণয় কর যা (2, 5) বিন্দুগামী এবং $3x + 12y - 7 = 0$ যার উপর লম্ব। [কু. '০৫] উ : $12x - 3y - 9 = 0$.

(iii) একটি সরলরেখা (– 3, – 2) বিন্দুগামী এবং $4x + 5y - 2 = 0$ রেখার উপর লম্ব। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. ২০০০] উ : $5x - 4y + 7 = 0$.

(iv) (–3, –1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2y - 11x + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '০২] উ : $11y + 2x + 17 = 0$.

8. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা, $3x + 2y + 6 = 0$ এবং $2x + 3y - 11 = 0$ রেখা দুইটির ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $4x + 6y + 15 = 0$ রেখার উপর লম্ব। উ : $3x - 2y + 42 = 0$.

9. $5x - 9y + 13 = 0$ এবং $9x - 5y + 11 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষের সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $7x - 7y + 12 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$ [ঢা. '১২]

10. AB ও AC রেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $y = 2x + 1$ এবং $y = 4x - 1$ হলে, AB এর উপর অংকিত লম্ব AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. কু. '১২; য. '১৩] উ : $x + 2y = 7$

11. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা ও x-অক্ষের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১০] উ : $ax + by = a^2$.

12. (4, – 3) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 11y - 2 = 0$ রেখাটির সমান্তরাল এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. '১২] উ : $2x + 11y + 25 = 0$

13. $4x + 3y + 12 = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং $x + y - 5 = 0$ ও $2x - y - 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $4x + 3y - 19 = 0$.

14. (i) $A(8, 5)B(-4, -3)$ রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $3x + 2y - 8 = 0$. [রা. য. '১২; সি. '১৩]

(ii) $(2, 1), (6, 3)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখার লম্বদ্বিখণ্ডরে সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $2x + y = 10$

15. দেখাও যে, (a, b) ও (c, d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ
$$(a-c)x + (b-d)\,y = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2).$$

16. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-3, 2)$ ও $(3, 8)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে 1ঃ 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং উক্ত রেখার উপর লম্ব। উ : $x + y - 3 = 0$.

17. (i) দুইটি সরলরেখা $(6,-7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $y + x\sqrt{3} - 1 = 0$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। এদের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '০৫; কু. '১১] উ : $y + 7 = 0; y + 7 = \sqrt{3}\,(x - 6)$

(ii) দুইটি সরলরেখা $(3, 4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x - y + 4 = 0$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১৩] উ : $(2 \pm \sqrt{3})x + y = 10 \pm 3\sqrt{3}$

(iii) দুইটি সরলরেখা $(-1, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং এরা $3x - y + 7 = 0$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাদুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং এদের সমীকরণ থেকে প্রমাণ কর যে, তারা পরস্পর লম্ব।
[ঢা. য. '১১; সি. '১২; চ. '১৩] উ : $2x + y = 0; x - 2y + 5 = 0$

(iv) দুইটি সরলরেখা $(6, 7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x + 4y = 11$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। এদের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. চ. '১১, '১৩] উ : $x - 7y + 43 = 0, 7x + y - 49 = 0$

(v) $3x + 8y - 10 = 0$ রেখাটি একটি বর্গের কর্ণ নির্দেশ করে এবং বর্গের একটি শীর্ষ বিন্দুর স্থানাংক $(3, -4)$, এ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে বর্গের বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ : $11x + 5y - 13 = 0$ $5x - 11y - 59 = 0$.

সংকেত : $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী বাহু দুইটি কর্ণের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

18. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা, $x - 2y - 1 = 0$ এবং $2x + 3y + 2 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং যার ঢাল $\tan 45^0$. [কু. '০৮] উ : $7x - 7y - 3 = 0$.

19. (i) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, -2)$ দিয়ে অতিক্রম করে এবং $2x + y - 4 = 0$ রেখার সাথে $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ কোণ উৎপন্ন করে। উ : $x + y - 1 = 0,\ 7x + y - 19 = 0$

(ii) দুইটি সরলরেখা মূল বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3y = 2x$ রেখার সাথে $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. '১১] উ : $x = 8y,\ 7x = 4y$.

20. একটি সরলরেখা $(2, 5)$ এবং $(5,6)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে; ঐ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তা $(-4, 5)$ ও $(-3, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর লম্ব হবে। উ : $x - 3y + 13 = 0$,

21. A, B, C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, -2), (-3, 0)$ এবং $(5, 6)$. প্রমাণ কর যে, AB ও AC সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে। উক্ত বিন্দুগুলিকে কোনো আয়তক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দু ধরলে তার চতুর্থ শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [য. '০৪] উ : $(1,8)$,

22. একটি সামান্তরিকের দুইটি বাহুর সমীকরণ যথাক্রমে $x - 2y + 3 = 0, 2x + 3y - 1 = 0$ এবং এর কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(2, -3)$, ঐ সামান্তরিকের অপর বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ : $2x + 3y + 11 = 0,\ x - 2y - 19 = 0$

23. মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগ সরলরেখা যদি $(b, 0)$ এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর লম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x_1x_2 + y_1y_2 = bx_1$. [ঢা. রা. '১৩]

24. (2, 3) বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি থেকে সরলরেখার লম্ব–দূরত্ব নির্ণয় কর। [ঢা. '১০; কু. '১১] উ : $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$; 2.

25. (3, 1) বিন্দু হতে $2x + y - 3 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু নির্ণয় কর। [ব. '০৫] উ : $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$

26. (i) দেখাও যে, $x = 4 - 2t, y = t + 3$ এবং $2x = 3 - 4t, y = t + 2$ রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

(ii) দেখাও যে, $x = t, y = 2t + 1$ এবং $x = 2t, y = -t - 4$ রেখা দুইটি$(-2, -3)$ বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে। [ব. '১১]

27. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-3, -2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 3y = 3$ রেখার উপর লম্ব হয়। মূলবিন্দু এবং উপরোক্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ রেখাটিরও সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ : $3x - 2y + 5 = 0$, $19x + 9y = 0$.

28. A (2, 1) ও B (5, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর; রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ : $3x + y = 12$, (0, 12). [ঢা. '১০; রা. '১১]

29. $3x + 5y - 2 = 0$, $2x + 3y = 0$ এবং $ax + by + 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে a ও b মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। [দি. '১১; চ. '১২; য. '১৩] উ : $6a - 4b = 1$

30. a এর মান কত হলে $x - 3y + 2 = 0$, $x - 6y + 3 = 0$ এবং $x + ay = 0$ রেখাত্রয় একটি বিন্দুতে ছেদ করবে। [ব. '০৩] উ : 3

31. $ax + by + c = 0$ রেখাটি $bx + cy + a = 0$ এবং $cx + ay + b = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে গেলে প্রমাণ কর যে, $a + b + c = 0$. [সি. '০১]

32. (i) x- অক্ষের সমান্তরাল এবং $x - 3y + 2 = 0$ ও $x + y - 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '০৭] উ : $y - 1 = 0$

(ii) x- অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y = 6$ ও $x - 2y = 7$ রেখাদ্বয়ের সমবিন্দু রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '০৫; দি. সি. '১০; ঢা. ''০৭, ১৩] উ : $y + 2 = 0$

33. (i) y –অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 3y + 4 = 0$ ও $3x + 3y - 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '০৪; য. ব. '১০] উ : $5x - 1 = 0$

(ii) $2x - 3y - 15 = 0$ ও $3x + 3y - 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের সাথে একটি সরলরেখা সমবিন্দু এবং $x = 0$ রেখার সমান্তরাল হলে, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x - 4 = 0$

34. একটি সরলরেখা $2x + 5y - 9 = 0$ ও $3x - 4y - 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের সাথে সমবিন্দু এবং $x = y$ রেখার সমান্তরাল হলে, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $23x - 23y = 58$.

35. দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের অক্ষদ্বয়ের ছেদক অংশের সংখ্যামান সমান এবং যারা $2x + 3y = 1$ ও $x - 2y + 3 = 0$ রেখা দুইটির সাথে সমবিন্দু। উ : $x - y + 2 = 0, x + y = 0$

36. $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $5x + y = 1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান সমান অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $23x + 23y = 11$.

37. $3x - 7y + 5 = 0$ এবং $x - 2y - 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান সমান অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x + y = 85$.

38. দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $7x + 13y - 87 = 0$ ও $5x - 8y + 7 = 0$ রেখা দুইটির ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষ দুইটি হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে। উ : $x + y - 9 = 0, x - y - 1 = 0$

39. সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $4x - 3y = 1$ ও $2x - 5y + 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে। উ : $x + y = 2; x - y = 0$

40. (i) p বিন্দুটি $x - 3y = 2$ রেখার উপর অবস্থিত এবং তা $(2, 3), (6, -5)$ বিন্দু দুইটি হতে সমদূরবর্তী। p এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ : $(14, 4)$

(ii) $x + 2y + 2 = 0$ সরলরেখার উপর এরূপ একটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর যা $(2, -1), (3, 4)$ বিন্দু দুইটি থেকে সমদূরবর্তী। উ : $(-10, 4)$

41. $P(x, y)$ বিন্দুটি একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত যা $Q(2, 3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $A(-1, 2)B(-5, 4)$ রেখার উপর লম্ব। দেখাও যে, $2x - y - 1 = 0$.

42. $P(h, k)$ বিন্দু থেকে x ও y অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে PA ও PB হলে, P বিন্দু দিয়ে যায় এবং AB এর উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $hx - ky = h^2 - k^2$.

43. (i) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $A(6, 1)$ ও $B(1, 6)$ এবং এর লম্ববিন্দু $P(3, 2)$; অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাংক নির্ণয় কর। [ঢা. '০৪] উ : $(-2, -3)$

(ii) ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF উচ্চতা তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y = 6$, $x - 2y = 7$ ও $2x - y = 8$ এবং A বিন্দুর স্থানাংক $(0, 2)$ হলে, AB এবং AC বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ : $x + 2y - 4 = 0, 2x + y - 2 = 0$.

44. যদি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখাটি $2x - y = 1$ এবং $3x - 4y + 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $4x + 3y - 6 = 0$ রেখার সমান্তরাল হয়, তবে a এবং b এর মান নির্ণয় কর। উ : $a = 17/4, b = 17/3$. [ঢা. '১২ ; সি. '১৩]

45. দেখাও যে, $3x + 5y - 6 = 0$ ও $2x - 3y + 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং $(4, 9)$ বিন্দুর সংযোগ সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী।

46. $ABCD$ সামান্তরিকের AB ও BC বাহুদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $2x + y - 8 = 0$ ও $x - y + 2 = 0$ এবং D বিন্দুর স্থানাংক $(2, -4)$; অপর বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x - y - 6 = 0; 2x + y = 0$.

47. একটি সামান্তরিকের দুইটি বাহুর সমীকরণ $3x - 4y + 1 = 0$ ও $2x - y - 1 = 0$ এবং কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দু $(2, 3)$. এর অপর বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $3x - 4y + 11 = 0, 2x - y - 1 = 0$.

48. প্রমাণ কর যে, $2x + y + 5 = 0$ এবং $x - 2y - 3 = 0$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব। রেখাদ্বয়কে কোনো আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিতি বাহু ধরলে এবং অপর বাহুদ্বয় $(3, 4)$ বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করলে অপর বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x - 2y + 5 = 0, 2x + y - 10 = 0$.

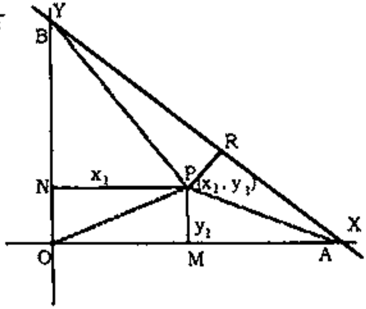
49. k এর যে কোনো বাস্তব মানের জন্য $(2k - 3)x + (3k - 2)y - (4k - 1) = 0$ রেখাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ : $(-1, 2)$.

50. দেখাও যে, k এর সব মানের জন্য একগুচ্ছ সরলরেখা $(3 + 2k)x + 5k\,y - 3 = 0$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী। বিন্দুটির স্থানাংক নির্ণয় কর। উ : $(1, -2/5)$.

3.17. কোনো বিন্দু থেকে একটি সরলরেখার লম্ব দূরত্ব

$P(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে

মনে করি, $ax + by + c = 0$ রেখাটি x ও $y-$ অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। প্রদত্ত সমীকরণকে নিম্নরূপে লেখা যায় : $\frac{x}{-c/a} + \frac{y}{-c/b} = 1 \Rightarrow OA = -c/a$, এবং $OB = -c/b$.



$\therefore AB^2 = OA^2 + OB^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}$ $\therefore AB = \pm\frac{c}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$

$P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে x ও y–অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব অঙ্কন করি। সুতরাং $PM = y_1$, $PN = x_1$.

ধরি, P থেকে AB রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব দৈর্ঘ্য $PR = d$.

এখন $\Delta OAB = \Delta OAP + \Delta OBP + \Delta ABP$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{-c}{a}\right)\left(\frac{-c}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-c}{a}\right).y_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{-c}{b}\right)x_1 + \frac{1}{2}d \times AB$

বা, $\pm d \times \frac{c}{ab}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{cx_1}{b} + \frac{cy_1}{a} + \frac{c^2}{ab}$

$\Rightarrow \pm d \times \sqrt{a^2+b^2} = ax_1 + by_1 + c$, $\left[\frac{ab}{c}\text{ দ্বারা গুণ করে}\right]$ সুতরাং, $d = \pm\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore P(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ রেখার লম্ব দৈর্ঘ্য $= \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

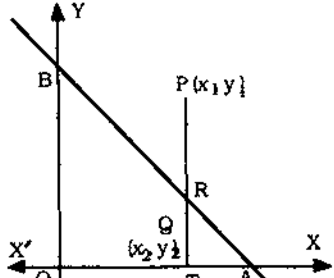
দ্রষ্টব্য : কেবল দূরত্ব নির্ণয়ের জন্য পরম মান প্রয়োজন।

উদাহরণ। $(3, -2)$ বিন্দু থেকে $12x - 5y + 6 = 0$ সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : $(3, -2)$ বিন্দু থেকে $12x - 5y + 6 = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব

$$= \left|\frac{12.3 - 5(-2) + 6}{\sqrt{(12)^2 + (-5)^2}}\right| = \left|\frac{36+10+6}{\sqrt{144+25}}\right| = \left|\frac{52}{\sqrt{169}}\right| = \left|\frac{52}{13}\right| = 4.$$

3.17.1. সরলরেখার ধনাত্মক পার্শ্ব এবং ঋণাত্মক পার্শ্ব



মনে করি, AB রেখার সমীকরণ $ax + by + c = 0$ এবং $P(x_1, y_1)$ একটি বিন্দু। P থেকে $x-$ অক্ষের উপর PT লম্ব টানি, যা AB কে R বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব (x_1, RT) বিন্দুটি AB রেখার উপর অবস্থিত। এখানে $RT = R$ বিন্দুর কোটি।

সুতরাং $ax_1 + b.RT + c = 0$ $[\because y = RT]$

$\Rightarrow ax_1 + c = -b.RT$

$\therefore ax_1 + by_1 + c = by_1 - b.RT$ [উভয়পক্ষে by_1 যোগ করে]

$= b(y_1 - RT) = b(PT - RT) > 0$ $[\because PT > RT$ এবং $b > 0]$

তদ্রূপ AB রেখার অপর পার্শ্বের $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুটির জন্য আমরা পাই, $ax_2 + by_2 + c = by_2 - b.RT$

$= b(y_2 - RT) = b(QT - RT) < 0$ $[\because QT < RT]$

এক্ষেত্রে আমরা বলি $P(x_1, y_1)$ এবং $Q\ (x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটি যথাক্রমে AB রেখার ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত। $P\ (x_1, y_1)$ বিন্দুটি AB রেখার উপর থাকলে $ax_1 + by_1 + c = 0$ হবে।

এখন AB রেখার সমীকরণ $ax + by + c = 0$ কে L এবং ঐ রেখার একই সমতলস্থ $P\ (x_1, y_1)$ এর জন্য

$(ax_1 + by_1 + c)$ কে $L\ (P)$ দ্বারা সূচিত করা হলে $P \in L \Leftrightarrow L(P) = 0.$

প্রত্যেক সরলরেখা এর বহিঃস্থ সকল বিন্দুকে নিচ্ছেদ দুইটি সেটে বিভক্ত করে।

এক্ষেত্রে $L(P) \cap L\ (Q) = \varnothing$. এ নিচ্ছেদ সেট দুইটিকে আমরা রেখাটির দুই পার্শ্ব বলতে পারি। L এর বহিঃস্থ সকল P বিন্দুর জন্য $L(P) > 0$ হলে, P বিন্দু L এর ধনাত্মক পার্শ্বে এবং $L(P) < 0$ হলে, P বিন্দু L এর ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত বুঝায়।

মন্তব্য : কোনো সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত সকল বিন্দুর জন্য $L(P)$ রাশিটির চিহ্ন (+) অথবা (–) হবে।

উদাহরণ । $P(2, 5), Q(-1, 3)$ বিন্দুদ্বয় $3x - 2y + 7 = 0$ রেখার একই পার্শ্বে অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত কিনা তা নির্ণয় কর। কোন্ বিন্দুটি মূলবিন্দুর পার্শ্বে অবস্থিত ?

সমাধান : ধরি প্রদত্ত সমীকরণ, $L \equiv 3x - 2y + 7 = 0$

$\therefore L(P) = 3.2 - 2.5 + 7 = 3 > 0$ এবং $L(Q) = 3(-1) - 2.3 + 7 = -2 < 0.$

দেখা যায় যে, $L(P)$ এবং $L(Q)$ পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত। সুতরাং বিন্দুদ্বয় প্রদত্ত রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

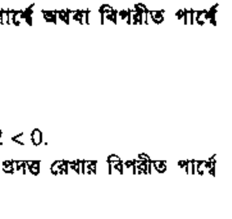
আবার মূলবিন্দু , $O\ (0, 0)$;

$\therefore L(O) = 3.0 - 2.0 + 7 = 7 > 0.$ সুতরাং $L(P)$ এবং $L(O)$ উভয়েই ধনাত্মক অর্থাৎ একই চিহ্নযুক্ত। অতএব রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু ঐ পার্শ্বে P বিন্দুটি অবস্থিত।

3. 17.2. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় : $ax + by + c_1 = 0$ .... (i) $\quad ax + by + c_2 = 0$ ....(ii)

মূলবিন্দু $O(0, 0)$ থেকে (i) রেখার দূরত্ব $ON = \dfrac{a.0 + b.0 + c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



মূলবিন্দু $O(0, 0)$ থেকে (ii) রেখার দূরত্ব $OM = \dfrac{c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

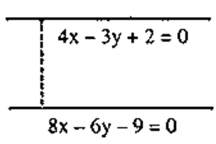
$\therefore$ সমান্তরাল রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $MN = ON - OM$

$$= \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

উদাহরণ। $4x - 3y + 2 = 0$ এবং $8x - 6y - 9 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

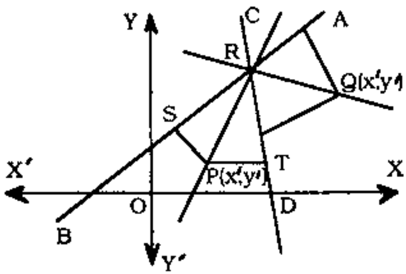
সমাধান : সমীকরণ দুইটিকে এভাবে লেখা যায় : $4x - 3y + 2 = 0$

এবং $4x - 3y - \frac{9}{2} = 0$



অতএব নির্ণেয় দূরত্ব $= \left|\dfrac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\dfrac{2 - (-\frac{9}{2})}{\sqrt{16 + 9}}\right| = \dfrac{13}{10}.$

3.17.3. দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ



মনে করি, AB ও CD সরলরেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এবং রেখা দুইটি R বিন্দুতে ছেদ করে। প্রদত্ত রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক PR এবং QR.

ধরি, $P(x', y')$ বিন্দুটি $\angle BRD$ এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। P থেকে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে PS ও PT লম্ব টানি।

সুতরাং $PS = PT$, (সমদ্বিখণ্ডকের সংজ্ঞা অনুযায়ী)

$$\Rightarrow \frac{a_1x' + b_1y' + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2x' + b_2y' + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \text{ ..... (ii)}$$

যেহেতু $P(x', y')$ বিন্দু ও মূলবিন্দু উভয়ই $\angle BRD$ –এর ভিতরে অবস্থিত, সুতরাং (ii) এর উভয়পক্ষের চিহ্ন একই হইবে। তদ্রূপ $\angle ARD$ কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপরস্থ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x', y') হলে,

$$\frac{a_1x' + b_1y' + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2x' + b_2y' + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \text{ .... (iii)}$$

এক্ষেত্রে মূলবিন্দু ও Q বিন্দু CD রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত বলে (iii) এর দুইপক্ষ পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

সুতরাং (x', y') বিন্দুর সঞ্চারপথ অর্থাৎ প্রদত্ত রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \text{. .... (iv)}$$

দ্রষ্টব্য : যদি c_1 ও c_2 একই চিহ্নবিশিষ্ট হয় অর্থাৎ উভয়ই (+) অথবা উভয়ই (–) চিহ্নযুক্ত হয়, তবে (iv) এর (+) চিহ্নযুক্ত সমীকরণটি মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক বুঝায়। (–) চিহ্নযুক্ত সমীকরণটি অন্য সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্দেশ করে।

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. **দেখাও যে, $(-6, 0)$ বিন্দুটি $3x + 4y - 1 = 0$ এবং $4x - 3y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের একটি সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।**

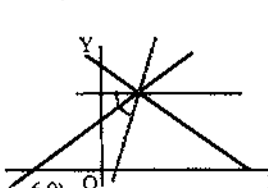
সমাধান : $3x + 4y - 1 = 0$ এবং $4x - 3y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{3x + 4y - 1}{\sqrt{9 + 16}} = \pm \frac{4x - 3y + 5}{\sqrt{16 + 9}}$$

বা, $3x + 4y - 1 = \pm (4x - 3y + 5)$

(+) চিহ্ন নিয়ে, $3x + 4y - 1 = 4x - 3y + 5$

বা, $x - 7y + 6 = 0$, ধরি, $L_1 \equiv x - 7y + 6 = 0$



(–) চিহ্ন নিয়ে, $3x + 4y - 1 = -(4x - 3y + 5)$

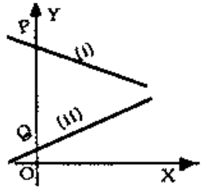
বা, $7x + y + 4 = 0$,

ধরি, $L_2 \equiv 7x + y + 4 = 0$

$L_1(-6, 0) = -6 - 7.0 + 6 = 0$ এবং $L_2(-6, 0) = -6 \times 7 + 0 + 4 \neq 0$

সুতরাং $(-6,0)$ বিন্দুটি একটি সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

উদাহরণ 2. $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডসমূহ y-অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দূরত্ব নির্ণয় কর। [রা. '১১; ব. '১২]



সমাধান : প্রদত্ত রেখা দুইটির মধ্যবর্তী কোণ সমূহের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$$\frac{2x-y+1}{\sqrt{4+1}} = \pm \frac{x-2y+4}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow 2x - y + 1 = \pm (x - 2y + 4)$$

(+) নিয়ে পাই, $x + y - 3 = 0$... (i)

(–) নিয়ে পাই, $3x - 3y + 5 = 0$ ....(ii)

ধরি, (i) ও (ii) রেখাদ্বয় y-অক্ষকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং P ও Q এর ভুজ $x = 0$, এখন (i) ও (ii) এ $x = 0$ বসিয়ে পাই, $y = 3, 5/3$

অর্থাৎ $OP = 3$ এবং $OQ = \frac{5}{3}$. অতএব, $PQ = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

উদাহরণ 3. একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হতে সমমানেরর যোগবোধক অংশ ছেদ করে। মূলবিন্দু হতে রেখাটির দূরত্ব 6 একক। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ বা, $x + y = a$ ......(i) $(a > 0)$

মূলবিন্দু $O(0, 0)$ হতে রেখাটির দূরত্ব $= 6$.

$$\therefore \left| \frac{0+0-a}{\sqrt{1^2+1^2}} \right| = 6 \Rightarrow \left| \frac{-a}{\sqrt{2}} \right| = 6 \Rightarrow a = 6\sqrt{2}$$ [∵ সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে]

(i) এ a এর মান বসিয়ে পাই, $x + y = 6\sqrt{2}$, যা নির্ণেয় রেখার সমীকরণ।

প্রশ্নমালা 3.8

1. লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর :
   (a) মূলবিন্দু হতে $8x + 6y + 25 = 0$ রেখা — উ : 5/2
   (b) $(2, -3)$ বিন্দু হতে $4x - 3y + 33 = 0$ রেখা — উ : 10
2. $5x + 12y = 23$ এবং $5x + 12y + 29 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। উ : 4
3. $3x - 2y = 2$ এবং $6x - 4y + 9 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। উ : $\sqrt{13}/2$
4. $5x + 12y + 3 = 0$ এবং $5x + 12y + 29 = 0$ সরলরেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। উ : 2.
5. $4x - 4y + 3 = 0$ এবং $x + 7y - 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে, দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। এদের মধ্যে কোন্‌টি মূলবিন্দু অন্তর্ধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক? [য. '১২] উ : $16x - 48y + 23 = 0$; $24x + 8y + 7 = 0$, ২য়টি
6. $15x - 8y + 3 = 0$ এবং $4x + 3y + 5 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় y- অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উ : 1190/143
7. P বিন্দু হতে $2x + y - 1 = 0$ এবং $x + 2y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের দূরত্বের অনুপাত 2 : 1 হলে P এর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $4x + 5y + 1 = 0$; $y + 1 = 0$.
8. দেখাও যে, $7x - 9y + 10 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যে কোনো বিন্দু $3x + 4y - 5 = 0$ এবং $12x + 5y - 7 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।
9. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $y - 2x + 2 = 0$ এবং $y - 3x + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং মূলবিন্দু হতে যাদের দূরত্ব $7/\sqrt{2}$ একক। উ : $x + y = 7$; $17x + 31y = 175$.

10. $12x - 5y = 7$ রেখার 2 একক দূরত্বে অবস্থিত সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
[সি. '১২; রা. '১৩] উ : $12x - 5y + 19 = 0$; $12x - 5y - 33 = 0$.

11. $4x - 3y = 8$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং তা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '১৩] উ : $4x - 3y + 2 = 0$, $4x - 3y - 18 = 0$.

12. (i) দেখাও যে, $(\sqrt{5}, 0)$ ও $(-\sqrt{5}, 0)$ বিন্দুদ্বয় হতে $2x \cos \alpha - 3y \sin \alpha = 6$ এর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের গুণফল α মুক্ত।
(ii) দেখাও যে, $(\pm 4, 0)$ বিন্দু দুইটি থেকে $3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির গুণফল θ মুক্ত। [ঢা. '১১; কু. '১৩]

13. প্রমাণ কর যে, $(\pm c, 0)$ বিন্দুদ্বয় হতে $bx \cos \theta + ay \sin \theta = ab$ এর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের গুণফল b^2 হবে, যখন $a^2 = b^2 + c^2$.

14. $(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দু হতে $x\sqrt{3} - y + 8 = 0$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং এ লম্ব x-অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। উ : 5; $150°$.

15. দেখাও যে, $(0, 1)$ বিন্দুটি $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণগুলির একটি সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। [কু. য. '১১; কু. দি. '১৩]

16. দেখাও যে, $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যে কোনো বিন্দু, $3x + 4y - 12 = 0$ এবং $5x + 12y - 52 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

17. মূলবিন্দু হতে $x \sec \theta - y \operatorname{cosec} \theta = k$ এবং $x \cos \theta - y \sin \theta = k \cos 2\theta$ রেখাদ্বয়ের লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে p ও p_1 হলে প্রমাণ কর যে, $4p^2 + {p_1}^2 = k^2$. [চ. '১১]

18. $x - y - 4 = 0$ ও $7x + y + 20 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং মূলবিন্দুর সংযোগ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তা প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। উ : $3x - y = 0$.

19. $2x + y + 3 = 0$ এবং $2x - 4y + 7 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $2x + 6y - 1 = 0$. $6x - 2y + 13 = 0$.

20. (a, b) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে, দেখাও যে, $a + 7b = 0$ অথবা $7a - b + 2 = 0$. [চ. '১৩]

21. $4x + 3y + 2 = 0$ এবং $12x + 5y + 13 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত যে কোণটি মূলবিন্দুধারী তার সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $8x - 14y + 39 = 0$.

22. $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরালে $3x + y + 4 = 0$ রেখা থেকে $(1, 2)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।
সংকেত : $P(1,2)$ বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখাটি $3x + y + 4 = 0$ রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দূরত্ব নির্ণয় কর। [য. '০৮] উ : 3.

23. $bx + ay = ab$ ও $ax - by = ab$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু হতে $ax - by = 0$ এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য ও তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $ab/\sqrt{a^2+b^2}$, $bx + ay = ab$.

24. $(1, -2)$ বিন্দু থেকে $7\frac{1}{2}$ একক দূরবর্তী এবং $3x + 4y = 7$ রেখাটির সমান্তরাল রেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '১২; য. সি. '১৩] উ : $6x + 8y = 65$, $6x + 8y + 85 = 0$.

25. মূলবিন্দু থেকে 7 একক দূরত্বে এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. সি. '১১; দি. '১২] উ : $4x + 3y \pm 35 = 0$.

26. $8x - 6y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং মূলবিন্দু হতে 4 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $6x + 8y \pm 40 = 0$.

27. দেখাও যে, $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ বিন্দুটি $2x - 3y + 4 = 0$ এবং $6x + 4y - 7 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

28. $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c + 3)$ রেখাদ্বয় মূলবিন্দু হতে সমদূরবর্তী। c-এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। [রা. '১২] উ : $c = 10$.

29. y-অক্ষের উপরিস্থিত যে বিন্দুগুলি হতে $3y = 4x - 10$ রেখার লম্বদূরত্ব 4 একক তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ. '১০] উ : $(0, -10), \left(0, \frac{10}{3}\right)$

30. x– অক্ষের উপরিস্থিত যে বিন্দুগুলি হতে $3x + 4y = 15$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব দূরত্ব 6 একক হয় তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ : $(-5, 0), (15, 0)$.

31. $5x - 12y - 6 = 0$, $3x + 4y + 2 = 0$ এবং $y = 2$ রেখাগুলির সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর। উ : $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$.

32. $2x + y + 3 = 0$ এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. '১০] উ : $\left(2\sqrt{5} + 3\right)x + \left(\sqrt{5} - 4\right)y + 3\sqrt{5} + 7 = 0$.

33. $4y - 3x = 3$ এবং $3y - 4x = 5$ রেখা দুইটির অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x + y + 2 = 0$.

34. $y = 4$ এবং y–অক্ষের অর্ন্তগত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x + y - 4 = 0, x - y + 4 = 0$

35. (i) একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমীকরণ $x - 2y = 0$, $3x + y = 0$ এবং $2x - 3y + 11 = 0$ হলে এর লম্বকেন্দ্র(*Orthocentre*) নির্ণয় কর। উ : $(2, -3)$

(ii) ΔABC এর শীর্ষ তিনটি $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ ও $C(3, 5)$ হলে ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর। উ : $(5/3, 7/3)$

(iii) ΔABC এর দুইটি শীর্ষ $A(5, -1)$, $B(-4, -7)$ এবং লম্বকেন্দ্র $(0, 0)$ হলে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ : $(-2, 3)$

36. (i) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যা x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং মূলবিন্দু হতে 4 একক দূরে অবস্থিত। উ : $\sqrt{3}\,x - y \pm 8 = 0$

(ii) এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার ঢাল -1 এবং মূল বিন্দু হতে যার দূরত্ব 4 একক।

[সি. '০৯; কু. '১২] উ : $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$.

37. মূলবিন্দু হতে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বদৈর্ঘ্য p হলে, দেখাও যে, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{p^2}$.

38. একটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু $6x - 8y + 5 = 0$ এবং $3x - 4y + 10 = 0$ রেখা দুইটির উপর অবস্থিত। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ : $\frac{9}{4}$ বর্গএকক।

39. যে ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $4x + 3y = 12$, $3x - 4y + 16 = 0$, $4x - 3y = 12$, তার অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর। উ : $(3, 25/7)$

40. $(0, 0)$, $(0, 3)$ ও $(4, 0)$ শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের কোণসমূহের অন্তর্দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তারা সমবিন্দু। [ঢা. '০৪; কু. '১০; সি. '১১] উ : $x - y = 0, x + 3y - 4 = 0, 2x + y - 3 = 0$

প্রশ্নমালা 3.9

সৃজনশীল প্রশ্ন

1. একটি সরলরেখার সমীকরণ : $3x - 4y + 8 = 0$.

(a) সরলরেখার ঢাল বলতে কি বুঝ? উপরে উল্লিখিত সরলরেখাটির ঢাল এবং y-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ নির্ণয় কর? উ : 3/4, 2.

(b) $a_1x + b_1y + c_1 =$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমীকরণ দুইটি একই সরলরেখা নির্দেশ করার শর্তটি লিখ।

(c) $ax + by + c = 0$ এবং $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ সমীকরণ দুইটি একটি সরলরেখা সূচিত করলে, p এর মান a, b, c, এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। উ : $p = \pm c/\sqrt{a^2 + b^2}$

2. **একটি সরলরেখার সমীকরণ $3x - 2y + 4 = 0$**

(a) $y = m_1x + c_1$ $y = m_2x + c_2$ সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হলে দেখাও যে, $m_1 \times m_2 = -1$.

(b) $x = 2$ এবং $y = 2$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, একটি সমদ্বিখণ্ডক অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। উ : $x = y, x + y = 4$.

(c) একটি সরলরেখা $(-3, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x – অক্ষের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $\sqrt{3}x - y + (3\sqrt{3} + 2) = 0$

3. **তিনটি সরলরেখার সমীকরণ নিম্নরূপ :**

$x + 2y + 5 = 0$ --- (i) , $kx + 4y - 7 = 0$ --- (ii), $4x - 5y + 1 = 0$ --- (iii)

(a) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ দেয়া হলো। এদের ঢাল নির্ণয় না করে তুমি কিভাবে বুঝবে রেখা দুইটি সমান্তরাল না পরস্পর লম্ব।

(b) চিত্র অংকন করে $y = mx + c$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা কর। m ও c এর ব্যাখ্যা দাও।

(c) উদ্দীপকের দ্বিতীয় সমীকরণে $k = 2$ অথবা 5 হলে, উক্ত রেখাত্রয় কিরূপ হবে তা বিশ্লেষণ কর।

উ : (i) ও (ii) সমান্তরাল, (ii) ও (iii) লম্ব।

4. **$x \cos \alpha + y \sin \alpha = P$ সরলরেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।**

(a) $A(8, 5)$ $B(-4, -3)$ রেখার লম্ব দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $3x + 2y = 8$

(b) α কে পরিবর্তনশীল ধরে AB এর মধ্য বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ : $p^2(x^2 + y^2) = 4x^2 y^2$

(c) $5x - 9y + 13 = 0$ ও $9x - 5y + 11 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং x – অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ : $7x - 7y + 12 = 0, 2x + 2y - 1 = 0$.

5. **একটি সরলরেখার সমীকরণ $8x - 6y + 9 = 0$.**

(a) $(-1, 2)$ বিন্দুগামী এবং প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ : $4x - 3y + 10 = 0$

(b) $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্রটি প্রতিষ্ঠা কর। সূত্রটির সাহায্যে প্রদত্ত ও নির্ণেয় রেখার দূরত্ব বের কর। উ : 11/10.

(c) $(2, -1)$ বিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উ : (1/5, 7/5).

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

1. মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?

(a) $y = mx$ (b) $y = \frac{y_1}{x_1}x$

(c) $y - y_1 = m(x - x_1)$ (d) $y = \frac{x_1}{y_1}x$.

2. (2,1) এবং (6, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার লম্বদ্বিখণ্ড রেখার সমীকরণ :

(a) $2x + y = 10$ (b) $2x - y = 8$

(c) $x + 2y = 10$ (d) $x - 2y = 6$

[সংকেত : $A(a, b)$ $B(c, d)$ রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক $(a - c)x + (b - d)y = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$]

3. মূলবিন্দু এবং $4x + 3y - 8 = 0$ ও $x + y = 1$ এর ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ :

(a) $4x - 3y = 0$ (b) $4x + 5y = 0$

(c) $4x + 4y = 0$ (d) $5x + 2y = 0$

4. (1,2) বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ :

(a) $4x + 3y = 10$ (b) $4x + 3y + 10 = 0$

(c) $4x + 3y - 6 = 0$ (d) $4x + 3y = 8$

6. $x = a, y = b$ এবং $y = mx$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল :

(a) $\frac{1}{2m}(b - ma)^2$ (b) $\frac{1}{2m}(ma + b)^2$

(c) $\frac{1}{m}(ma + b)$ (d) $\frac{m}{2}(b - ma)^2$

8. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ (2, 3) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হলে, রেখাটির সমীকরণ :

(a) $4x + 4y + 10$ (b) $3x + 2y = 12$

(c) $4x + 3y = 8$ (d) $4x + 3y = 6$

9. x – অক্ষের উপর লম্ব এবং (4, –7) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ :

(a) $x = 4$ (b) $y + 7 = 0$

(c) $x + 4 = 0$ (d) $y - 7$

10. y–অক্ষের উপর লম্ব এবং (5, 6) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ :

(a) $x = 5$ (b) $y = 6$

(c) $x + 5 = 0$ (d) $y + 6 = 0$

11. মূল বিন্দু হতে $12x - 5y + 26 = 0$ রেখার দূরত্ব :

(a) 2 (b) 3

(c) $\frac{11}{13}$ (d) 4

12. $3x + 2y + 5 = 0$ এবং $ax - 4y + 7 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হলে a এর মান

(a) 4 (b) 8/3 (c) 6 (d) 8/5

ব্যবহারিক

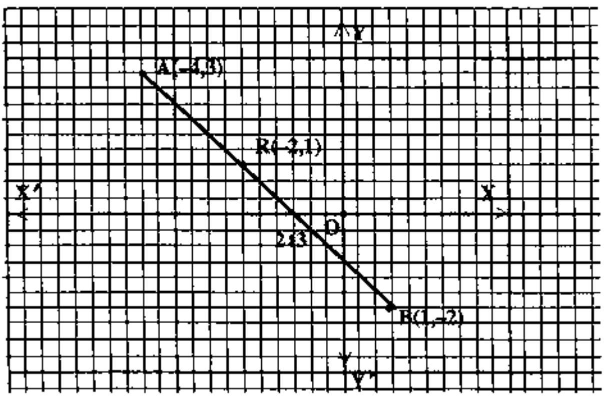
3.18. রেখা বিভক্তিকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক

সমস্যা নং		তারিখ :

সমস্যা 1 : (– 4, 3) এবং (1, – 2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে যে বিন্দুটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : **তত্ত্ব :** (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে যে বিন্দুটি $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$

কার্যপদ্ধতি : ছক কাগজের ক্ষুদ্র 2 বর্গের বাহুকে 1(একক) ধরি। ছক কাগজে x ও y–অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করে প্রদত্ত $A(-4, 3)$, $B(1, -2)$ বিন্দু দুইটি স্থাপন করি।



মনে করি, AB রেখাকে (x, y) বিন্দুটি 2: 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$\therefore x = \frac{2 \times 1 + 3 \times (-4)}{2 + 3} = \frac{2 - 12}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$\text{এবং } y = \frac{2 \times (-2) + 3 \times 3}{2 + 3} = \frac{-4 + 9}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

অতএব নির্ণেয় বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 2, 1)

ছক কাগজে বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় : রেখাটি স্কেল দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত করি। 2: 3 অনুপাতে বিভক্তকারী বিন্দুটি ছক কাগজে চিহ্নিত করি। দেখা যায় যে, বিন্দুটি x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে 10 ঘর এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে পাঁচ ঘর দূরে অবস্থিত।

অর্থাৎ ছক কাগজে নির্ণেয় বিন্দুটির অবস্থান বা স্থানাঙ্ক (– 2, 1)

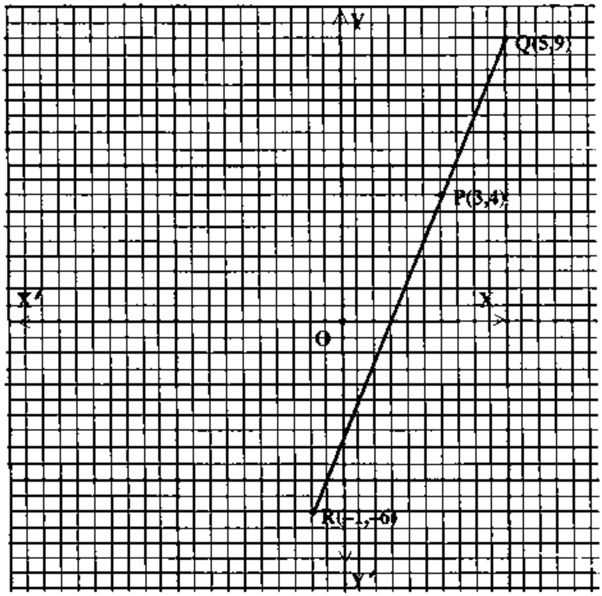
সমস্যা নং		তারিখ :

সমস্যা 2 : $P(3, 4)$ এবং $Q(5, 9)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি $2 : 3$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : তত্ত্ব : (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি $m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$ এবং $y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$

কার্যপদ্ধতি : ছক কাগজে x ও y অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম এক বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $= 1$ (একক) ধরে প্রদত্ত বিন্দু দুইটি স্থাপন করি।

মনে করি, $R(x, y)$ বিন্দুটি PQ রেখাংশকে $2 : 3$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে। অর্থাৎ $PR : QR = 2 : 3$



$$\therefore x = \frac{2 \times 5 - 3 \times 3}{2 - 3} = \frac{10 - 9}{-1} = -1 \text{ এবং } y = \frac{2 \times 9 - 3 \times 4}{2 - 3} = \frac{18 - 12}{-1} = -6$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিভক্তকারী বিন্দুটি R এর স্থানাঙ্ক $(-1, -6)$.

ছক কাগজে বিভক্তকারী বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় :

ছক কাগজে বর্ধিত PQ রেখার উপর R বিন্দুটির অবস্থান চিহ্নিত করি যা, P এবং Q থেকে যথাক্রমে 2 এবং 3 একক দূরত্বে অবস্থিত।

দেখা যায় যে, R বিন্দুটি তৃতীয়–চতুর্ভাগে অবস্থিত এবং যা x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে 5 ঘর এবং y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে 12 ঘর দূরে অর্থাৎ বিন্দুটির ভুজ $x = \frac{-2}{2} = -1$ এবং কোটি $y = \frac{-12}{2} = -6$।

$\therefore$ বিভক্তকারী বিন্দুটির অবস্থান বা স্থানাঙ্ক $(-1, -6)$

শ্রেণির কাজ

1. $P(1, -1)$ ও $Q(8, 6)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি $3 : 4$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
2. একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর, যা $(-2, 3)$ এবং $(6, -8)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $1 : 2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

3.19. শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

সমস্যা নং		তারিখ :

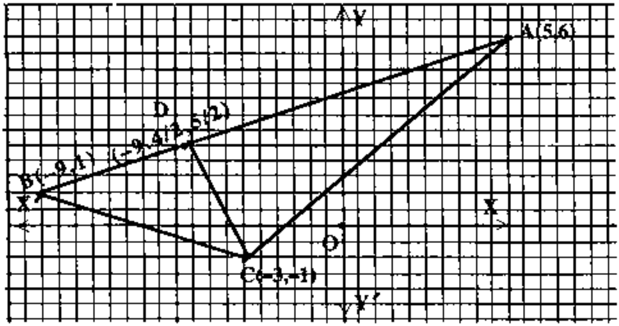
সমস্যা 3 : একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক $(5, 6)$, $(-9, 1)$ এবং $(-3, -1)$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল ণির্ণয় কর। $\frac{1}{2}$ (ভূমি $\times$ উচ্চতা) এর মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে উত্তরের সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান : তত্ত্ব : (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$$

কার্যপদ্ধতি : মনে করি, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি যথাক্রমে $A(5, 6)$, $B(-9, 1)$ এবং $C(-3, -1)$

ছক কাগজে x ও y-অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম দুই বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 (একক) নিয়ে, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি ছক কাগজে স্থাপন করি।



$$\therefore \Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -9 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(5 + 54) + (9 + 3) + (-18 + 5)\} = \frac{1}{2}(59 + 12 - 13) = 29$$

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 29 (বর্গ একক)।

আবার ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (ভূমি $\times$ উচ্চতা)

C বিন্দু থেকে AB বাহুর উপর CD লম্ব অঙ্কন করি এবং AB বাহুর উপর D এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-9.4}{2}, \frac{5}{2}\right)$ নির্ণয় করি।

এখন AB এবং CD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

$$AB = \sqrt{(5+9)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{196+25} = \sqrt{221} = 14.866$$

$$CD = \sqrt{\left(\frac{-9.4}{2}+3\right)^2 + \left(\frac{5}{2}+1\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+2.89} = 3.89$$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} AB \times CD = \frac{1}{2}(14.866 \times 3.89) = 28.914$ বর্গ একক (প্রায়)

শ্রেণির কাজ :

1. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক $(-3, -2)$, $(-3, 9)$ এবং $(5, -8)$। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। $\frac{1}{2}$ (ভূমি $\times$ উচ্চতা)–এর মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে তোমার উত্তরের সত্যতা যাচাই কর।
2. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 3)$, $(-3, -4)$ এবং $(5, -1)$। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। $\frac{1}{2}$ (ভূমি $\times$ উচ্চতা) এর মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে তোমার উত্তরের সত্যতা যাচাই কর।

3.20. সরলরেখার সমীকরণের লেখচিত্র

সমস্যা নং		তারিখ :

সমস্যা 1 : $2x + y = 6$ সরল রেখাটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

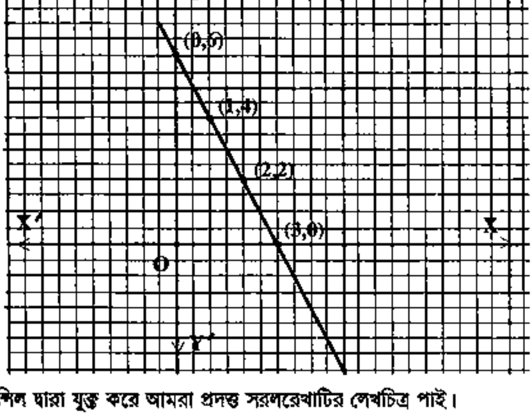
সমাধান : তত্ত্ব : $S = \{(x, y) \in R \times R : 2x + y = 6\}$

কার্যপদ্ধতি : প্রদত্ত সমীকরণ, $y = 6 - 2x$ .... (i)

x	0	1	3	2
y	6	4	0	2

সমীকরণ (i) থেকে $S = \{(0, 6), (1, 4), (3, 0), (2, 2)\}$ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

ছক কাগজে x ও y–অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম দুই বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 (একক) ধরে উক্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করি।



স্থাপিত বিন্দুগুলি পেন্সিল দ্বারা যুক্ত করে আমরা প্রদত্ত সরলরেখাটির লেখচিত্র পাই।

শ্রেণির কাজ

1. নিচের সরলরেখাগুলির লেখ অঙ্কন কর :

(i) $3x - 2y = 6$ (ii) $x + 4y + 8 = 0$
(iii) $2x + y - 4 = 0$ (iv) $x - 2y + 1 = 0$

3.21. লেখচিত্র থেকে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়

সমস্যা নং		তারিখ :

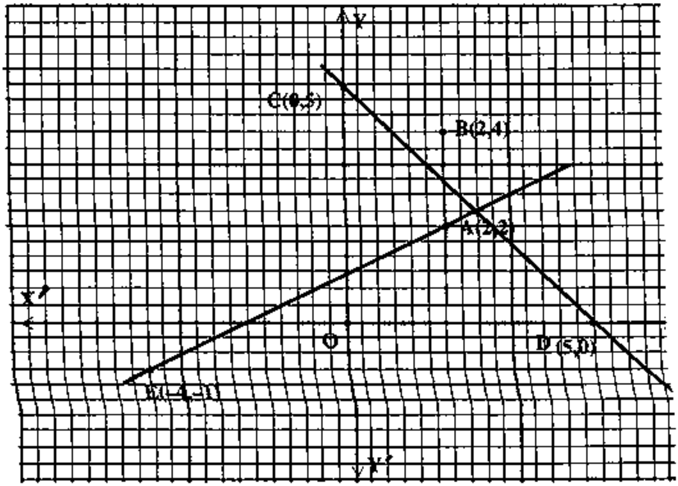
সমস্যা 1 : কার্তেসী সমতলে কতকগুলি বিন্দুর সেট দেওয়া হলো। এদের যে কোনো দুইটি বিন্দু সংযোগ করে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং সমীকরণের আকার উল্লেখ কর।

$S = \{A(2, 2), B(2, 4), C(0, 5), D(5, 0), E(-4, -1), F(3, 4), G(3, -5)\}$

সমাধান :

তত্ত্ব : সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ $ax + by + c = 0$, যেখানে a ও b উভয়ই শূন্য নয়। যে কোনো দুইটি বিন্দু সংযোগে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়।

কার্যপদ্ধতি : ছক কাগজে x ও y-অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। ক্ষুদ্র তিন বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 (একক) নিয়ে প্রদত্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি। পেন্সিল দ্বারা, যে কোনো দুইটি বিন্দু সংযোগ করে সরলরেখা ও এর সমীকরণ নির্ণয় করি।



উৎপন্ন রেখাগুলি : A ও B সংযুক্ত রেখাটি $x = 2$, বা, y-অক্ষের সমান্তরাল C, ওন্ড D বিন্দু দুইটি সংযোগে উৎপন্ন রেখাটি $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$ বা, $x + y = 5$, বা, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ আকারের।

A ও E বিন্দু দুইটি সংযোগে উৎপন্ন রেখাটির সমীকরণ $\frac{x-2}{2+4} = \frac{y-2}{2+1}$

বা, $\frac{x-2}{6} = \frac{y-2}{3}$

বা, $(x-2) = 2(y-2)$ বা, $x - 2y + 2 = 0$

যা, $y = mx + c$ আকারের সমীকরণ।

3.22. (i) অক্ষরেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি

সমস্যা নং		তারিখ :

সমস্যা 1.: x-অক্ষের সাপেক্ষে (2, 3) বিন্দুটির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে।

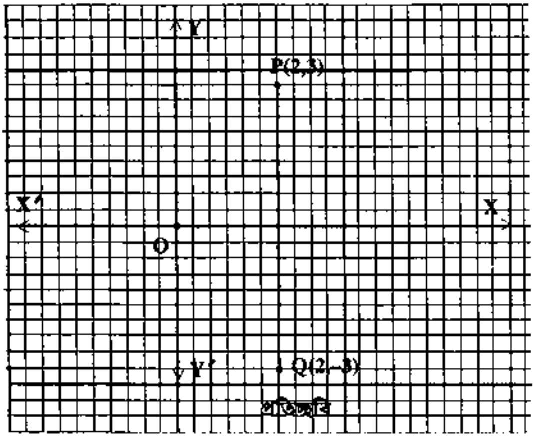
তত্ত্ব : x-অক্ষের সাপেক্ষে একটি বিন্দুর প্রতিচ্ছবি ঐ বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর অংকিত লম্বের বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত এবং বিন্দুটি ও এর প্রতিচ্ছবি x-অক্ষ থেকে সমদূরবর্তী।

কার্যপদ্ধতি : (i) ছক কাগজে x-অক্ষ, y-অক্ষ অংকন করে মূলবিন্দু চিহ্নিত করি।

(ii) ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম 3 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (2, 3) বিন্দুটি স্থানাঙ্কায়িত করি।

(iii) (2, 3) বিন্দুটির মধ্য দিয়ে x-অক্ষের উপর একটি লম্ব অংকন করি এবং লম্বটিকে নিচের দিকে বর্ধিত করি।

(iv) লম্বের বর্ধিতাংশের উপর একটি বিন্দু চিহ্নিত করি যেন, x-অক্ষ থেকে তার ও প্রদত্ত বিন্দুটি সমদূরবর্তী হয়।



(v) ছক কাগজ থেকে দেখা যায় চিহ্নিত প্রতিচ্ছবি বিন্দুটি y-অক্ষ থেকে ক্ষুদ্র 6 ঘর ডান দিকে এবং x-অক্ষ থেকে নিচের দিকে 9 ঘর । অর্থাৎ, প্রতিচ্ছবি বিন্দুটির x-স্থানাঙ্ক = 2 এবং y-স্থানাঙ্ক = – 3.

ফলাফল : নির্ণেয় প্রতিচ্ছবি বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (2, – 3).

3.22. (ii) x-অক্ষের সাপেক্ষে রেখাংশের প্রতিচ্ছবি

সমস্যা নং		তারিখ :

সমস্যা 2.: x-অক্ষের সাপেক্ষে রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে।

তত্ত্ব : যে রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে তার উপর যে কোনো দুইটি বিন্দু নিয়ে x-অক্ষের সাপেক্ষে এ বিন্দু দুইটির প্রাপ্ত প্রতিচ্ছবি সংযোগকারী রেখাটিই প্রদত্ত রেখাংশের প্রতিচ্ছবি।

কার্যপদ্ধতি : (i) ছক কাগজে x ও y অক্ষ এবং মূলবিন্দু $O(0, 0)$ চিহ্নিত করি। স্কেল : ছক কাগজের ক্ষুদ্র দুই বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1(একক) ধরি।

(ii) $x - y + 1 = 0$ রেখার উপর $P(2, 3)$ ও $Q(4, 5)$ দুইটি বিন্দু নিয়ে ছক কাগজে স্থাপন করি।

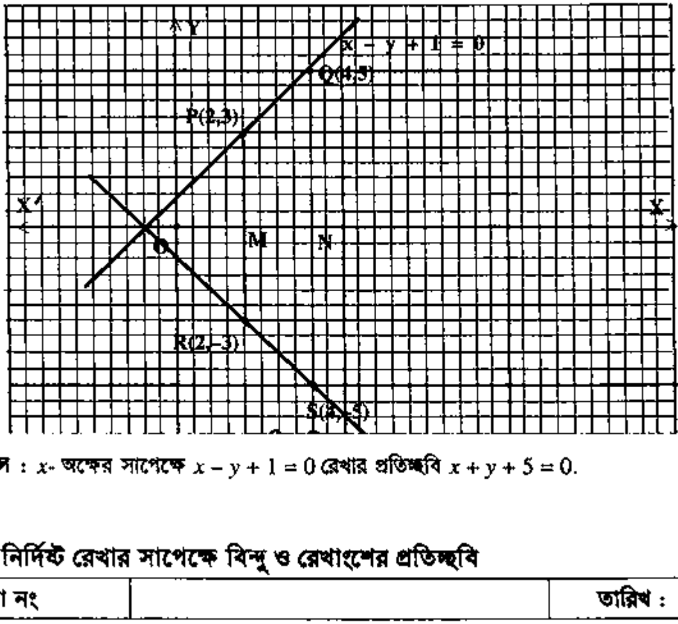
(iii) প্রদত্ত রেখাটির লেখ অঙ্কন করি। অতপর P ও Q বিন্দু দিয়ে x অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও QN দুইটি লম্ব অঙ্কন করে R ও S পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $PM = MR$ এবং $QN = NS$ হয়।

(iv) R ও S বিন্দু দুইটি যথাক্রমে P ও Q এর প্রতিচ্ছবি এবং R ও S সংযোগকারী রেখাটিই x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রদত্ত রেখাংশের প্রতিচ্ছবি। ছক কাগজ থেকে R ও S বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(2, -3)$ ও $(4, -5)$ নির্ণয় করি।

অতএব, প্রতিচ্ছবি RS রেখার সমীকরণ $\dfrac{y+3}{-3+5} = \dfrac{x-2}{2-4}$

বা, $\dfrac{y+3}{2} = \dfrac{x-2}{-2}$

বা, $x + y + 5 = 0$



ফলাফল : x- অক্ষের সাপেক্ষে $x - y + 1 = 0$ রেখার প্রতিচ্ছবি $x + y + 5 = 0$.

3.23. নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি

সমস্যা নং		তারিখ :

সমস্যা 2 : $3x + 5y - 16 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $(5, 7)$ বিন্দুটির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।

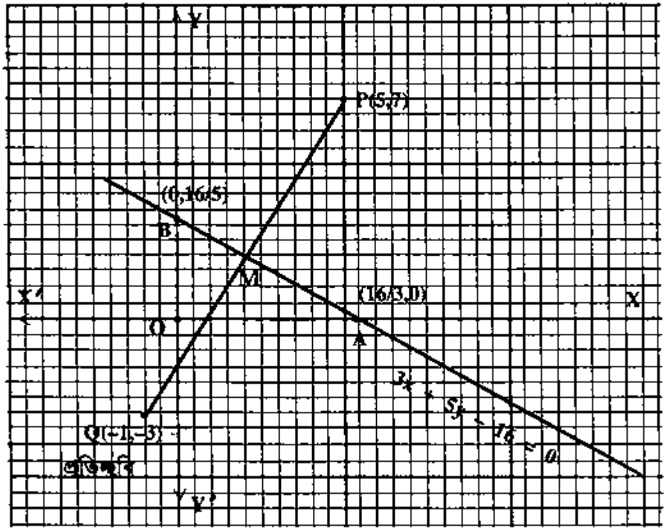
সমাধান : তত্ত্ব : কোনো সরলরেখার সাপেক্ষে একটি বিন্দুর প্রতিচ্ছবি ঐ বিন্দু থেকে রেখাটির উপর অংকিত লম্বের বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত এবং প্রদত্ত বিন্দুটি ও এর প্রতিচ্ছবি প্রদত্ত রেখাটি হতে সমদূরবর্তী।

কার্যপদ্ধতি : (i) ছক কাগজে x-অক্ষ, y-অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। ধরি প্রদত্ত বিন্দুটি P.

(ii) ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে, প্রদত্ত $P(5, 7)$ বিন্দুটি স্থাপন করি। প্রদত্ত সরলরেখাটির উপর $A(16/3, 0)$ এবং $B(0, 16/5)$ দুইটি বিন্দু নিয়ে এদেরকে পেন্সিল দ্বারা যুক্ত করে AB রেখাটি অঙ্কন করি।

(iii) $P(5, 7)$ বিন্দু থেকে প্রদত্ত সরলরেখাটির উপর PM লম্ব অঙ্কন করি এবং লম্বটিকে নিচের দিকে Q পর্যন্ত র্ধিত করি যেন $PM = QM$ হয়।

তাহলে Q বিন্দুটি প্রদত্ত রেখার সাপেক্ষে $P(5, 7)$ বিন্দুটির প্রতিচ্ছবি।



(v) ছক কাগজ থেকে দেখা যায় Q বিন্দুটি y-অক্ষ থেকে ক্ষুদ্র 2 ঘর বাম দিকে এবং x-অক্ষ থেকে ক্ষুদ্র 6 ঘর নিচে। অর্থাৎ, প্রতিচ্ছবি বিন্দুটির x-স্থানাঙ্ক $= -1$ এবং y-স্থানাঙ্ক $= -3$.

ফলাফল : অতএব, প্রদত্ত রেখার সাপেক্ষে $(5, 7)$ বিন্দুটির প্রতিচ্ছবি $(-1, -3)$.

সমস্যা নং		তারিখ :

সমস্যা 3 : $x - 2y + 1 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $2x + 3y - 6 = 0$ রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় ।

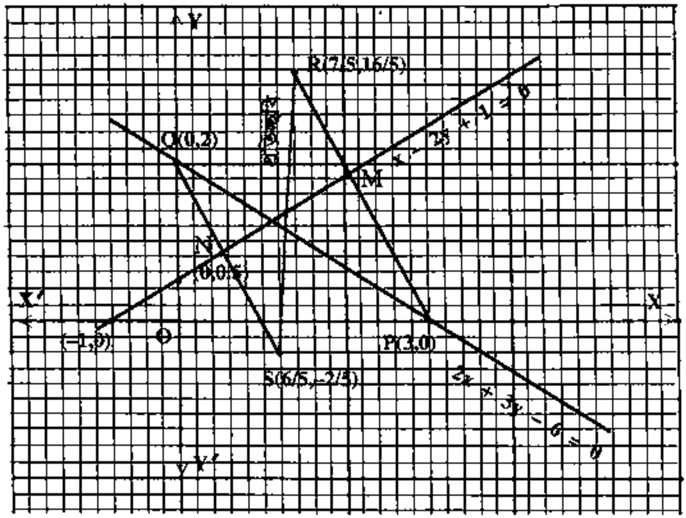
সমাধান : তত্ত্ব : যে রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে তার সমীকরণকে সিদ্ধ করে এরূপ যে কোনো দুইটি বিন্দুর প্রদত্ত সরলরেখার সাপেক্ষে দুইটি প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করে এদের সংযোগকারী রেখাটিই হবে রেখাংশের প্রতিচ্ছবি।

কার্যপদ্ধতি : (i) ছক কাগজে x-অক্ষ, y-অক্ষ এবং মূলবিন্দু $O(0, 0)$ চিহ্নিত করি।

(ii) $2x + 3y - 6 = 0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে এরূপ দুইটি বিন্দু $P(3, 0)$ এবং $Q(0, 2)$ নির্ণয় করি।

(iii) ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম পাঁচ বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $= 1$ একক নিয়ে উক্ত বিন্দু দুইটি স্থাপন করি।

(iv) $P(3, 0)$ এবং $Q(0, 2)$ বিন্দু দিয়ে $x - 2y + 1 = 0$ রেখাটির উপর PM ও QN দুইটি লম্ব অংকন করি এবং লম্ব দুইটি যথাক্রমে R ও S বিন্দু পর্যন্ত বাড়াই যেন PM = MR এবং QN = NS হয়



(v) ছক কাগজ থেকে দেখা যায় R ও S বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $\left(\frac{7}{5}, \frac{16}{5}\right)$ এবং $\left(\frac{6}{5}, \frac{-2}{5}\right)$ যা যথাক্রমে P ও Q এর প্রতিচ্ছবি।

এই প্রতিচ্ছবি বিন্দু দুইটি সংযোগে উৎপন্ন সরলরেখার সমীকরণ

$$\frac{y - \frac{16}{5}}{\frac{16}{5} + \frac{2}{5}} = \frac{x - \frac{7}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{6}{5}} \text{ বা, } \frac{5y - 16}{18} = \frac{5x - 7}{1} \text{ বা, } 90x - 5y - 110 = 0 \text{ বা, } 18x - y - 22 = 0$$

যা নির্ণেয় রেখাংশের প্রতিচ্ছবি।

ফলাফল : $x - 2y + 1 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $2x + 3y - 6 = 0$ রেখাংশের প্রতিচ্ছবি $18x - y - 22 = 0$.

শ্রেণির কাজ

1. x ও y - অক্ষের সাপেক্ষে $(3, 4), (-2, 3), (-2, -4)$ এবং $(3, -2)$ বিন্দুগুলির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।
2. $3x - 2y + 5 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $x + y - 6 = 0$ রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।
3. $x - 2y + 2 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $x + y - 1 = 0$ রেখার প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।
4. $2x + y - 3 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $x - 2y + 4 = 0$ রেখার প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।
5. $2x + 5y - 10 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $(3, 4)$ বিন্দুটির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।
6. x - অক্ষের সাপেক্ষে $x + y - 3 = 0$ রেখার প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।
7. y - অক্ষের সাপেক্ষে $x - 2y + 4 = 0$ রেখার প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।

চতুর্থ অধ্যায়

বৃত্ত (Circle)

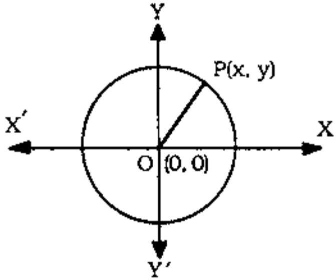
4. বৃত্তের সংজ্ঞা :

মনে করি, $\boldsymbol{R}$ বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ বা, $\boldsymbol{R}^2 = \{(x, y) : x \in \boldsymbol{R}, y \in \boldsymbol{R}\}$ ক্রমজোড়ের (Ordered pair) সেটটি কার্তেসীয় সমতলের সকল বিন্দু নির্দেশ করে। ঐ সমতলে $P(x, y)$ একটি চলমান বিন্দু এবং $C(a, b)$ একটি স্থির বিন্দু হলে, যে কোন ধ্রুবক r এর জন্য যদি $CP = r$ হয়, তবে চলমান বিন্দুর সেট,

$\{(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} : CP = r\}$ দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথকে বৃত্ত বলে। বৃত্তের সমীকরণ $CP = r$, যেখানে r কে বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং C কে কেন্দ্র বলে।

মন্তব্য : $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ কে সংক্ষেপে $\boldsymbol{R}^2$ লেখা হয়।

4.1. মূলবিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ



মনে করি, বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু O(0, 0) ও পরিধির উপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু এবং ব্যাসার্ধ $OP = r$

তাহলে, $OP^2 = r^2$

বা, $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$

বা, $x^2 + y^2 = r^2$ যা মূলবিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ।

4.2. কেন্দ্র মূলবিন্দুবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ অঙ্কন ও অক্ষদ্বয়ের সাথে ছেদ বিন্দু নির্ধারণ

মূলবিন্দুকে কেন্দ্র এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ r নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। [অনু : 4.1 এর চিত্র দ্রষ্টব্য]

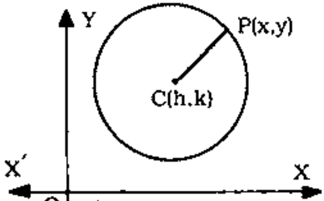
এখন $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের সমীকরণে পর্যায়ক্রমে $x = 0, y = 0$ বসিয়ে পাই,

$y^2 = r^2$ বা, $y = \pm r$

আবার যখন $y = 0$ তখন $x^2 = r^2$ বা, $x = \pm r$

সুতরাং বৃত্তটি x-অক্ষকে $(r, 0), (-r, 0)$, এবং y-অক্ষকে $(0, r), (0, -r)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

4.3. নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়



মনে করি, বৃত্তের কেন্দ্র (h, k), ব্যাসার্ধ $= r$ এবং পরিধির উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু।

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই $CP = r$ বা, $CP^2 = r^2$

বা, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ... (i)

এ সম্পর্কটি সঞ্চারপথের উপর P এর সকল অবস্থানের জন্য সত্য। সুতরাং সমীকরণ (i) বৃত্তের সমীকরণ।

4.3.1. বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় করা

অনুচ্ছেদ 4.3 থেকে আমরা জানি কেন্দ্র (h, k) এবং r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \text{ বা, } x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0$$

এখন $h=-g$, $k=-f$ এবং $h^2+k^2-r^2=c$ ধরে আমরা পাই,

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0, \text{ যা বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ।}$$

অনুসিদ্ধান্ত : $h=-g, k=-f$. অতএব বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) বা, $(-g, -f)$ এবং

$h^2+k^2-r^2=c$

বা, $g^2+f^2-c=r^2$

অতএব ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$.

বৃত্তের সমীকরণের বৈশিষ্ট্য : বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

লক্ষ করি : (i) সমীকরণটি চলক x ও y সম্বলিত দ্বিঘাত সমীকরণ,

(ii) xy সম্বলিত কোন পদ নেই এবং (iii) x^2 ও y^2 এর সহগ পরস্পর সমান।

অতএব, x ও y সম্বলিত কোন দ্বিঘাত সমীকরণে x^2 ও y^2 এর সহগ পরস্পর সমান হলে এবং xy সম্বলিত পদ না থাকলে তা বৃত্তের সমীকরণ সূচিত করবে যদি $(g^2+f^2-c)\geq 0$

4.3.2. প্রমাণ করতে হবে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে এবং এর কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে

প্রদত্ত সমীকরণটিকে এভাবে লেখা যায় :

$$(x^2+2gx+g^2)+(y^2+2fy+f^2)=g^2+f^2-c$$

$$\Rightarrow (x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

$\Rightarrow \{x-(-g)\}^2+\{y-(-f)\}^2=(\sqrt{g^2+f^2-c})^2$, যা কেন্দ্র (h, k) এবং r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ এর সমতুল্য, যেখানে $h=-g, k=-f$ এবং $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$.

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণটি একটি বৃত্ত সূচিত করে যার কেন্দ্র $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$.

দ্রষ্টব্য : (i) বৃত্তের ব্যাসার্ধ সর্বদা ধনাত্মক হবে। সুতরাং $g^2+f^2-c>0$ হলে, সমীকরণটি একটি বাস্তব বৃত্ত সূচিত করবে।

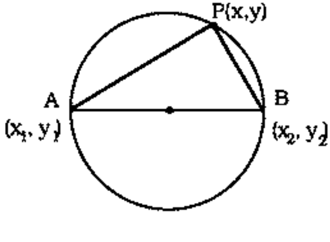
(ii) যদি $g^2+f^2-c=0$ হয়, তাহলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ শূন্য হবে এবং এক্ষেত্রে বৃত্তটি $(-g, -f)$ বিন্দুতে পরিণত হয়। এরূপ বৃত্তকে বিন্দু বৃত্ত (*P*oint *C*ircle) বলে।

(iii) যখন $g^2+f^2-c<0$, তখন ব্যাসার্ধ কাল্পনিক সংখ্যা হবে এবং এরূপ ক্ষেত্রে প্রদত্ত সমীকরণটি বাস্তবে কোন বৃত্ত সূচিত করে না।

সুতরাং, বাস্তব বৃত্তের জন্য শর্ত হল $(g^2+f^2-c)\geq 0$.

4.3.3. (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়কে ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়

মনে করি, বৃত্তের ব্যাসের প্রান্ত দুইটি $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ এবং পরিধির উপর $P(x, y)$ যে কোন একটি চলমান



বিন্দু। AP এবং BP এর ঢাল যথাক্রমে $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ ও $\frac{y-y_2}{x-x_2}$

যেহেতু অর্ধবৃত্তস্থ $\angle APB = 90^\circ$, সুতরাং $AP \perp BP$.

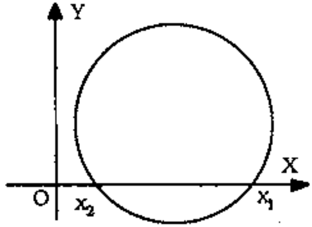
অতএব, $\frac{y-y_1}{x-x_1} \times \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$

বা, $(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2)$

$\therefore (y-y_1)(y-y_2) + (x-x_1)(x-x_2) = 0$, যা নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।

4.3.4. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ নির্ণয়

বৃত্তটি x–অক্ষকে ছেদ করলে ছেদ বিন্দুর কোটি $y = 0$ হবে।



সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণে $y = 0$ বসিয়ে আমরা পাই

$x^2 + 2gx + c = 0$, যা x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

ধরি মূলদ্বয় $x_1, x_2\ (x_1 > x_2)$

অতএব $x_1 + x_2 = -2g$ এবং $x_1 x_2 = c$

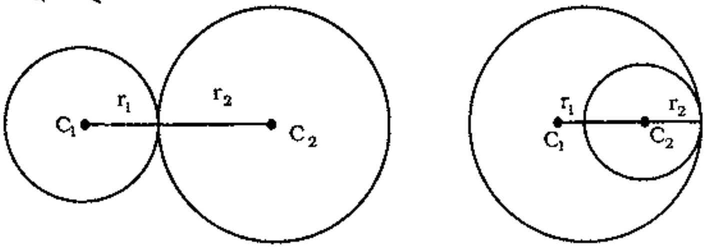
সুতরাং বৃত্তটি দ্বারা x–অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ

$$= x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2} = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1 x_2}$$
$$= \sqrt{4g^2 - 4c} = 2\sqrt{g^2 - c}$$

তদ্রূপ y–অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ $= 2\sqrt{f^2 - c}$.

অনুসিদ্ধান্ত : যদি বৃত্তটি x–অক্ষকে স্পর্শ করে, তাহলে x–অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ $2\sqrt{g^2 - c} = 0$, অতএব, $g^2 = c$. তদ্রূপ y–অক্ষকে স্পর্শ করলে $f^2 = c$.

4.3.5. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করার শর্ত



বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করেছে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করেছে

মনে করি, বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র C_1 ও C_2 এবং ব্যাসার্ধ দুইটি যথাক্রমে r_1 ও r_2.

অতএব কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= C_1 C_2$.

(a) দুইটি বৃত্ত বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে $C_1 C_2 = r_1 + r_2$, অর্থাৎ কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব = এদের ব্যাসার্ধের সমষ্টি।

(b) দুইটি বৃত্ত অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে, $C_1 C_2 = r_1 - r_2, (r_1 > r_2)$
অর্থাৎ কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব = এদের ব্যাসার্ধের বিয়োগফল।

(c) দুইটি বৃত্ত স্পর্শ করলে (বহিঃস্থ বা অন্তঃস্থভাবে এর কোনটাই উল্লেখ করা না হলে)

$$C_1C_2 = r_1 \pm r_2;\ (r_1 > r_2)$$

4.4. পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়।

কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) এবং পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হলে, আমরা জানি, $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$

বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং ব্যাসার্ধ c হলে, বৃত্তটির কার্তেসীয় সমীকরণ $x^2 + y^2 = c^2$. এ বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

বৃত্তটির কার্তেসীয় সমীকরণ $x^2 + y^2 = c^2$ ..... (i)

(i) নং এ $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ বসিয়ে পাই,

$r^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = c^2$

বা, $r^2 = c^2 \therefore r = c$, যা বৃত্তটির পোলার সমীকরণ।

উদাহরণ 1. $x^2 + y^2 - 10x = 0$ বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণে $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$ বসিয়ে আমরা পাই,

$r^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 10 (r\cos\theta) = 0$

বা, $r^2 - 10r\cos\theta = 0$ বা, $r = 10\cos\theta$, যা বৃত্তটির পোলার সমীকরণ।

বৃত্ত সংক্রান্ত সূত্র ঃ

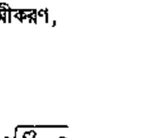
- কেন্দ্র (0,0) এবং r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = r^2$.
- কেন্দ্র (h,k)এবং r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
- (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ,
  $(x - x_1)(x - x_2) + (y_1 - y_1)(y - y_2) = 0$
- বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.
  - (a) এ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
  - (b) এ বৃত্তটি দ্বারা x -অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c}$ এবং y - অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{f^2 - c}$
  - (c) এ বৃত্তটি x -অক্ষকে স্পর্শ করলে $g^2 = c$ এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করলে $f^2 = c$ হবে।

সমস্যা ও সমাধান ঃ

উদাহরণ 1. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (2, –3) এবং ব্যাসার্ধ 5.

সমাধান ঃ আমরা জানি, কেন্দ্র (h, k) এবং r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



অতএব নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = (5)^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0.$$

উদাহরণ 2. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ **বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ (১ম পদ্ধতি) প্রদত্ত সমীকরণ, $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

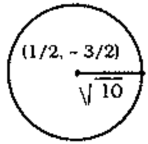
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{15}{2} = 0$$

এ সমীকরণটিকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$2g = -1, 2f = 3$ এবং $c = -\frac{15}{2}$ $\therefore g = -\frac{1}{2}, f = \frac{3}{2}$.

অতএব বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$, অর্থাৎ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = R(\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{15}{2})$

$= \sqrt{10}$.



২য় পদ্ধতি : প্রদত্ত সমীকরণ $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

বা, $x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{15}{2} = 0$ [2 দ্বারা ভাগ]

বা, $\left(x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 + 2.y.\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) = \frac{15}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 10$

বা, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$

সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{10}$.

উদাহরণ 3. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(4, -8)$ বিন্দুতে এবং যা y–অক্ষকে স্পর্শ করে। [ঢা. '০২]

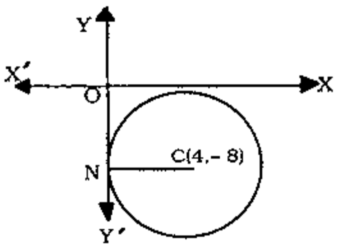
সমাধান : মনে করি, বৃত্তটি y–অক্ষকে N বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং এর কেন্দ্র $C(4, -8)$.

অতএব কেন্দ্রের ভুজ CN হল বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান।

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $CN = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 4^2$

বা, $x^2 + y^2 - 8x + 16y + 64 = 0$.



উদাহরণ 4. $(3, 0)$ এবং $(-4, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ একটি বৃত্তের কেন্দ্র y–অক্ষের উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '০৫]

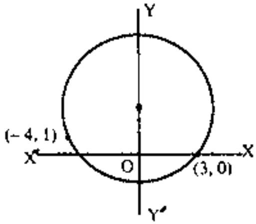
সমাধান : মনে করি, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র y–অক্ষের উপর অবস্থান করে বলে $g = 0$

$\therefore$ আমরা পাই $x^2 + y^2 + 2fy + c = 0$

বৃত্তটি $(3, 0)$ এবং $(-4, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায় $\therefore 9 + c = 0$ .... (i)

এবং $16 + 1 + 2f + c = 0$ .... (ii)



(i) থেকে $c = -9$

(ii) এ c এর মান বসিয়ে $17 + 2f - 9 = 0$ বা, $2f = -8$

বা, $f = -4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$.

উদাহরণ 5. একটি বৃত্ত (–6, 5), (–3, –4) এবং (2, 1) বিন্দুত্রয় দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ, কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... (i)

(i) বৃত্তটি (– 6, 5), (– 3, – 4) এবং (2, 1) বিন্দুত্রয় দিয়ে অতিক্রম করে, সুতরাং আমরা পাই

$61 - 12g + 10f + c = 0$ ... ... (ii)

$25 - 6g - 8f + c = 0$ ... ... (iii)

এবং $5 + 4g + 2f + c = 0$ ... ... (iv)

(ii) – (iii) $\Rightarrow 36 - 6g + 18f = 0 \Rightarrow 6 - g + 3f = 0$ ... ...(v)

(iii) – (iv) $\Rightarrow 20 - 10g - 10f = 0 \Rightarrow 2 - g - f = 0$.... ......(vi)

(v) – (vi) $\Rightarrow 4 + 4f = 0 \quad \therefore f = -1$

(vi) থেকে $g = 2 - f = 2 + 1 = 3$ [f এর মান বসিয়ে]

এবং (iv) থেকে $5 + 4.3 + 2(-1) + c = 0$ [g ও f এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow 15 + c = 0, \quad \therefore c = -15$ (i) এ $g = 3, f = -1$ এবং $c = -15$ বসিয়ে পাই

$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$, যা নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।

২য় অংশ ঃ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$ অর্থাৎ $(-3, 1)$ এবং

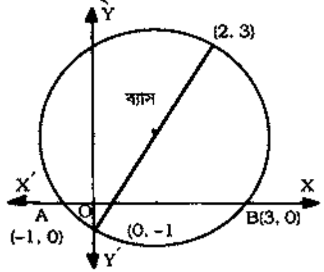
ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{9+1+15} = \sqrt{25} = 5$.

উদাহরণ 6. (0, –1) ও (2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত অংকন করা হল। বৃত্তটির সমীকরণ এবং x–অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ নির্ণয় কর। [য. '১২]

সমাধান ঃ (0, –1) ও (2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ

$(x - 0)(x - 2) + (y + 1)(y - 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$



২য় অংশ ঃ বৃত্তটি x–অক্ষকে ছেদ করলে ছেদবিন্দুর কোটি $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x + 1)(x - 3) = 0, \quad \therefore x = -1$ অথবা 3

অর্থাৎ ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক (–1, 0) ও (3, 0).

মনে করি, ছেদবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে A ও B.

অতএব x–অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ

$= AB = \sqrt{(3 + 1)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{16} = 4.$

উদাহরণ 7. $2x - y = 3$ রেখার উপর অবস্থিত কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (3, –2) ও (–2, 0) বিন্দুদ্বয় দিয়ে যায়। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. রা. '১০; ব. '১২; রা. '১৩]

সমাধান ঃ মনে করি, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... (i)

এ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$, যা প্রদত্ত রেখা $2x - y = 3$ এর উপর অবস্থিত

অতএব $-2g + f = 3$ ... ... (ii)

আবার বৃত্তটি (3, –2) ও (–2, 0) বিন্দুদ্বয় দিয়ে যায়, সুতরাং আমরা পাই

$13 + 6g - 4f + c = 0$ ... ... (iii) এবং $4 - 4g + c = 0$ ... (iv)

(iii) – (iv) $\Rightarrow 9 + 10g - 4f = 0$ বা, $10g - 4f = -9$ ...... (v)

(ii) কে 4 দ্বারা গুণ করে (v) এর সাথে যোগ করে পাই, $2g = 3 \quad \therefore g = \frac{3}{2}$

(ii) থেকে $f = 3 + 3 = 6$ [g এর মান বসিয়ে]

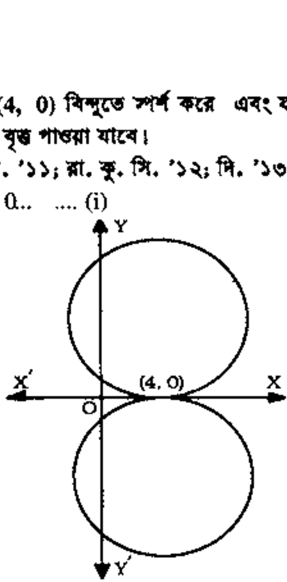
এবং (iv) থেকে $c = 4 \cdot \frac{3}{2} - 4 = 2$

অতএব নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 3x + 12y + 2 = 0$.

উদাহরণ ৪. এমন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x–অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং যার দ্বারা y–অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ 6 একক। দেখাও যে, এরূপ দুইটি বৃত্ত পাওয়া যাবে।

[কু. '১০; য. '১১; রা. কু. সি. '১২; সি. '১৩;]

সমাধান : মনে করি বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.. .... (i)



বৃত্তটি x–অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

সুতরাং আমরা পাই, $g^2 = c$ ... (ii)

এবং $16 + 8g + c = 0$ [$x = 4$ এবং $y = 0$ বসিয়ে]

$\Rightarrow 16 + 8g + g^2 = 0$ [(ii) থেকে]

$\Rightarrow (g + 4)^2 = 0, \quad \therefore g = -4$

এবং $c = g^2 = (-4)^2 = 16$

যেহেতু y–অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ = 6 (একক)

$\therefore 2\sqrt{f^2 - c} = 6 \quad \Rightarrow \sqrt{f^2 - c} = 3$

বা, $f^2 - c = 9$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow f^2 - 16 = 9$ বা, $f^2 = 25 \quad \therefore f = \pm 5$

f এর দুইটি মান x–অক্ষের দুই পার্শ্বে দুইটি বৃত্ত নির্দেশ করে।

অতএব বৃত্ত দুইটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 8x \pm 10y + 16 = 0$.

প্রশ্নমালা 4.1

1. নিম্নলিখিত বৃত্তের সমীকরণগুলি পোলার স্থানাঙ্কের মাধ্যমে প্রকাশ কর :

   (i) $x^2 + y^2 = 25$ — উ : $r = 5$

   (ii) $x^2 + y^2 - ax = 0$ — উ : $r = a\cos\theta$

   (iii) $x^2 + y^2 - by = 0$ — উ : $r = b\sin\theta$

2. (*a*) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (3, –2) এবং ব্যাসার্ধ 6. উ : $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$

   (*b*) নিচের বৃত্তগুলির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর :

   (i) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$ — উ : (4, –3); 4

   (ii) $4(x^2 + y^2) + 24x - 4y - 27 = 0$ — উ : $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$; 4

   (c) k এর কোন মানের জন্য $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে। — উ : 2

3. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত সূচিত করার শর্তগুলি লেখ এবং এ থেকে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 17 = 0$ সমীকরণটি কোন বাস্তব বৃত্ত সূচিত করে না।

4. এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(1, 8)$ বিন্দু দিয়ে যায়।
[কু. '১২; সি. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$; $x^2 + y^2 - 26x - 26y + 169 = 0$.

5. (i) একটি বৃত্ত $(2, 1)$, $(-6,5)$ ও $(-3, -4)$ বিন্দুত্রয় দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ, কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। উ : $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$, $(-3,1)$, 5.
(ii) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4, -5)$ এবং তা মূলবিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং বৃত্তটি অক্ষদ্বয় হতে কি পরিমাণ অংশ ছেদ করে তাও নির্ণয় কর। [দি. '০৬] উ : $x^2 + y^2 - 8x + 10y = 0$; 8, 10

6. (i) মূল নিয়মে প্রমাণ কর যে, $(1,5)$ ও $(7,-3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)(x-7) + (y-5)(y+3) = 0$. বৃত্তটির কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। উ : $(4,1)$, 5.
(ii) প্রমাণ কর যে, $(-2, 3)$ ও $(3, -4)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ $(x + 2)(x - 3) + (y - 3)(y + 4) = 0$ [ব. '০৩]

7. $(4, 5)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়, ঐ বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. '১১; চা. রা. চ. '১২; কু. '১০, '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0$

8. (i) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 9 = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং $(2, -1)$ বিন্দুগামী। [দি. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 8 = 0$.
(ii) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক। উ : $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$.

9. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(7, 2)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং যা $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 15 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়। উ : $x^2 + y^2 - 14x - 4y + 28 = 0$;

10. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(6, 0)$ এবং তা $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্ত ও $x = 3$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. '১২; ব. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 12x + 24 = 0$

11. মূলবিন্দু এবং $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্ত ও $2x + 3y + 1 = 0$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '১১] উ : $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$

12. (i) মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y–অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিক হতে যথাক্রমে 3 ও 5 একক অংশ ছেদ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. সি. '১২; ঢা. রা. '১১; ব. '১৩] উ: $x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$
(ii) একটি বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y- অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিক হতে যথাক্রমে a ও b অংশ কর্তন করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১১] উ : $x^2 + y^2 - ax - by = 0$
(iii) b বাহুবিশিষ্ট $OABC$ একটি বর্গ। OA এবং OC কে অক্ষ ধরে প্রমাণ কর যে, বর্গটির পরিবৃত্তের সমীকরণ হবে $x^2 + y^2 = b(x + y)$ [রা. '১০; ব. '১৩]

13. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে -4 একক দূরত্বে y–অক্ষকে স্পর্শ করে এবং x–অক্ষ হতে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডন করে। [চ. '১৩] উ : $x^2 + y^2 \pm 10x + 8y + 16 = 0$

14. (i) একটি বৃত্ত x–অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(1, 2)$ ও $(3, 2)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে যায়। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. '১২; ঢা. '১৩] উ : $2(x^2 + y^2) - 8x - 5y + 8 = 0$

(ii) একটি বৃত্ত x– অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(1,3)$ বিন্দু দিয়ে যায়। তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $3(x^2 + y^2) = 10y$.

15. $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x–অক্ষকে স্পর্শ করে; এর সমীকরণসহ y–অক্ষ হতে তা কি পরিমাণ অংশ ছেদ করে তাও নির্ণয় কর। [দি. '১১] উ : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0;\ 2\sqrt{3}$

16. যে বৃত্তের কেন্দ্র $(-5, 7)$ এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x^2 + y^2 + 10x - 14y + 25 = 0$

17. (i) y– অক্ষকে মূলবিন্দুতে এবং $3x - 4y + 8 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে এমন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x^2 + y^2 + 8x = 0,\ x^2 + y^2 - 2x = 0.$

(ii) y– অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(3, 0)$ ও $(7, 0)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে যায় এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '০৬] উ : $x^2 + y^2 - 10x \pm 2\sqrt{21}\, y + 21 = 0,$

18. y– অক্ষকে মূল বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '০৫; দি. '১১] উ : $3(x^2 + y^2) - 25x = 0.$

19. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা y–অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। উ : $x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0,\ (-2, \sqrt{3});\ 2$

20. $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(1, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং এর কেন্দ্র $y = 3x - 7$ রেখার উপর অবস্থিত, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '১১; দি. '১৩] উত্তর : $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$

21. (i) $(4, 3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। [দি. '১০; রা. '১১] উ : $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$

(ii) এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্রের স্থানাংক $(3, 4)$ এবং যা $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। [চ. '১০] উ : $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0,\ x^2 + y^2 - 6x - 8y - 39 = 0$

22. $4\sqrt{2}$ বাহুবিশিষ্ট বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে এবং এর বিপরীত শীর্ষটি x–অক্ষের উপর অবস্থিত। ঐ বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '১০] উ : $x^2 + y^2 \pm 8x = 0$

23. $x = 0,\ y = 0$ এবং $x = a$ রেখা তিনটিকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১১] উ : $x^2 + y^2 - ax \pm ay + a^2/4 = 0$

24. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা $y = 4,\ y = 10$ এবং $x = 0$ রেখাত্রয়কে স্পর্শ করে। উ : $x^2 + y^2 \pm 6x - 14y + 49 = 0$

25. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $x + 2 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত এবং তা $(-7, 1)$ ও $(-1, 3)$ বিন্দুগামী। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '০৭] উ : $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 30 = 0$

26. (i) $(-4, 3)$ ও $(12, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি দ্বারা y–অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণও নির্ণয় কর। [ঢা. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 51 = 0;\ 4\sqrt{13}$

(ii) $(0, -1)$ ও $(2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি দ্বারা x–অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণও নির্ণয় কর। [য. '১২] উ : 4.

27. একটি বৃত্ত x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1, 9)$ বিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর? [কু. '০৮] উ : $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$

28. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$ দ্বারা নির্দেশিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা–এর সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x - 2y + 7 = 0$

29. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যা মূলবিন্দু ও (p, q) বিন্দু দিয়ে যায়। [ঢা. '১২; চ. রা. '১৩] উ : $q(x^2 + y^2) - (p^2 + q^2)y = 0$

30. একটি বৃত্ত $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে যায় এবং এর কেন্দ্র (i) $x + 2y - 10 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। (ii) x-অক্ষের উপর অবস্থিত। (iii) y-অক্ষের উপর অবস্থিত। বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '০২; দি. '১০]

উত্তর : (i) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$; (ii) $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$; (iii) $x^2 + y^2 + 18y - 124 = 0$

31. প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুটি নির্ণয় কর। উ : $(-17/5, 11/5)$

32. $(1, 1)$ ও $(2, 2)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে গমনকারী বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 1. বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. '০৩] উ : $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.

33. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(1, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র $x + y = 3$ রেখার উপর অবস্থিত। [কু. '০৮] উ : $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

34. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 8x + y + 10 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. '০৫] উ : $5(x^2 + y^2) + 26x + 12y + 22 = 0$

35. $x^2 + y^2 = 9$ এবং $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা–এর সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উ : $x + 2y + 5 = 0$; 4

36. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(0,0)$ এবং $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং বৃত্তের কেন্দ্র x- অক্ষের উপর অবস্থিত। উ : $3(x^2 + y^2) = 25x$.

37. (i) এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু হতে 2 একক দূরত্বে x- অক্ষকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে এবং যার ব্যাসার্ধ 5 একক। [য. '০৫; ব. '১১] উ : $x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{21}y - 4 = 0$

(ii) দেখাও যে, $A(1, 1)$ বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$, বৃত্তের উপর অবস্থিত। A বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. '১০; দি. '১২; ব. '১৩] উ : $(-5, -7)$

38. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা x ও y- অক্ষরেখা হতে যথাক্রমে 5 এবং 2 একক দৈর্ঘ্যের সমান অংশ কর্তন করে এবং যার কেন্দ্র $2x - y = 6$ রেখার উপর অবস্থিত।

উত্তর : $x^2 + y^2 - 5x + 2y = 0$, $x^2 + y^2 - 11x - 10y + 24 = 0$.

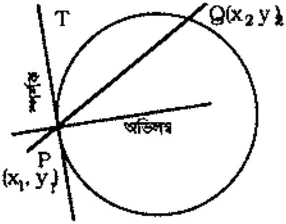
39. সাধারণ জ্যা–এর সমীকরণ নির্ণয় কর যখন বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$. উ : $x - 2y + 7 = 0$

40. একটি বৃত্ত $(-1, -1)$ ও $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং এর কেন্দ্র $x + 2y + 3 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. '১০; কু. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 8x + 7y - 3 = 0$.

41. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি $(2, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '০১] উ : $4x + y - 13 = 0$

42. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 3)$ এবং তা $x^2 + y^2 - 4y = 0$ বৃত্ত ও $y - 2 = 0$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। ঐ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '০২] উ : $x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$

4.5. বৃত্তের স্পর্শক (Tangent) এবং অভিলম্বের (Normal) সমীকরণ



মনে করি, একটি সরলরেখা কোন বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। এখন Q বিন্দুটি বৃত্তের পরিধির উপর দিয়ে ঘুরে P এর সন্নিকটবর্তী হলে অর্থাৎ P এর উপর Q সমাপতিত হলে, ছেদক রেখাটিকে P বিন্দুতে প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক বলা হয়। এখানে PT হল স্পর্শক এবং P কে স্পর্শবিন্দু বলা হয়।

কোন বৃত্তের স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বরেখাকে ঐ বিন্দুতে বৃত্তের অভিলম্ব (Normal) বলে।

4.5.1. কোন শর্তে $y = mx + c$ রেখাটি $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের স্পর্শক হবে?

$x^2 + y^2 = r^2$ এবং $y = mx + c$

সমীকরণ দুইটি সমাধান করে $x^2 + (mx + c)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 - r^2 = 0$

$$\Rightarrow (1 + m^2)\, x^2 + 2mcx + (c^2 - r^2) = 0 \text{ .... (i)}$$

মনে করি, সরলরেখাটি বৃত্তকে $P\,(x_1, y_1)$ ও $Q\,(x_2, y_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে। যদি রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করে তাহলে P ও Q বিন্দু দুইটি সমাপতিত হবে এবং $x_1 = x_2$ হবে অর্থাৎ (1) সমীকরণের মূল দুইটি সমান হবে। আবার মূল দুইটি সমান হবার শর্ত $b^2 - 4ac = 0$ অর্থাৎ $4m^2c^2 - 4\,(1 + m^2)\,(c^2 - r^2) = 0$

$\Rightarrow m^2c^2 - c^2 - m^2c^2 + m^2r^2 + r^2 = 0$

$\Rightarrow c^2 = r^2\,(1 + m^2) \therefore c = \pm r\sqrt{1 + m^2}$

যা নির্ণেয় শর্ত এবং স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$

যথা : $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের স্পর্শক দুইটি x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করলে তার সমীকরণ

$y = \sqrt{3}x \pm 5\sqrt{1 + 3}$, যেহেতু $m = \tan 60° = \sqrt{3}$

বা, $y = \sqrt{3}x \pm 10.$

উদাহরণ : $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শক দুইটি লম্বভাবে ছেদ করলে ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ

$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$, যখন $m =$ স্পর্শকের ঢাল

$\Rightarrow (y - mx)^2 = r^2\,(1 + m^2)$

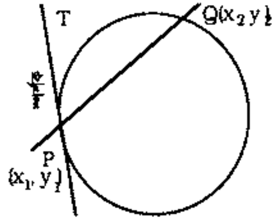
$\Rightarrow (x^2 - r^2)\, m^2 - 2xym + (y^2 - r^2) = 0$

যা m এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। ধরি, মূল দুইটি m_1, m_2. সুতরাং স্পর্শক দুইটি লম্বভাবে ছেদ করলে

$m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow \dfrac{y^2 - r^2}{x^2 - r^2} = -1$, যেহেতু $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$.

$\Rightarrow y^2 - r^2 = -x^2 + r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2r^2$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

4.5.2. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়



মনে করি, বৃত্তের পরিধির উপর দুইটি বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$.

অতএব $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$... ...(i)

$x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0$ ... ... (ii)

(i) – (ii) $\Rightarrow (x_1^2-x_2^2)+(-y_2^2)+2g(x_1-x_2)+2f(y_1-y_2)=0$

বা, $(x_1-x_2)(x_1+x_2+2g)=-(y_1-y_2)(y_1+y_2+2f)$

$\therefore \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{x_1+x_2+2g}{y_1+y_2+2f}=m$ (ধরি), যা PQ ছেদকের ঢাল।

অতএব PQ ছেদকের সমীকরণটি এভাবে লেখা যায় :

$y-y_1=m(x-x_1)$, বা $y-y_1=-\dfrac{x_1+x_2+2g}{y_1+y_2+2f}(x-x_1)$

বা, $(x-x_1)(x_1+x_2+2g)+(y-y_1)(y_1+y_2+2f)=0$ ... (iii)

এখন যদি Q বিন্দুটি বৃত্তের পরিধির উপর দিয়ে ক্রমশঃ অগ্রসর হয়ে P বিন্দুর উপর সমাপতিত হয়, তবে PQ ছেদক $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে PT স্পর্শক হবে এবং সীমাস্থ অবস্থায় $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$.

এখন (iii) এ $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ বসিয়ে আমরা পাই

$(x-x_1)(2x_1+2g)+(y-y_1)(2y_1+2f)=0$

বা, $xx_1+gx-x_1^2-gx_1+yy_1-y_1^2-fy_1+fy=0$

বা, $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1$

বা, $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)=-c$ [(i) থেকে]

$\therefore x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$\boldsymbol{xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0.}$

> **অনু : $x^2+y^2=r^2$ বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ : $xx_1+yy_1=r^2$**

উদাহরণ : $x^2+y^2-6x+4y+3=0$ বৃত্তের উপরস্থ (2, 1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রথম পদ্ধতি (ঢালের সাহায্যে) : $x^2+y^2-6x+4y+3=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C(3, -2)$

ধরি, স্পর্শ বিন্দু N(2, 1) এবং স্পর্শকটি AB

$\therefore$ CN এর ঢাল $=\dfrac{-2\ -1}{3-2}=-3$

CN⊥AB সুতরাং AB স্পর্শকের ঢাল $=\dfrac{1}{3}$ [$\because m_1\times m_2=-1$]

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y-1=\dfrac{1}{3}(x-2)\Rightarrow x-3y+1=0$

দ্বিতীয় পদ্ধতি (সূত্রের সাহায্যে) : $x^2+y^2-6x+4y+3=0$

এখানে, $g=-3, f=2, c=3$

$(x_1, y_1)=(2, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ [সূত্রের সাহায্যে]

$x.2+y.1-3(x+2)+2(y+1)+3=0\Rightarrow 2x+y-3x-6+2y+2+3=0$

$\Rightarrow x-3y+1=0$

4.6. বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়।

মনে করি, $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু (x_1, y_1)

(x_1, y_1) বিন্দু থেকে অঙ্কিত যে কোন সরলরেখার সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$

বা, $mx - y + y_1 - mx_1 = 0$ .... (i)

এ রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হলে কেন্দ্র (0, 0) থেকে রেখার দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ হবে।

অর্থাৎ $\dfrac{|y_1 - mx_1|}{\sqrt{1 + m^2}} = r$

বা, $(y_1 - mx_1)^2 = r^2(1 + m^2)$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে m অপসারণ করে আমরা পাই,

$\{x_1(y - y_1) - y_1(x - x_1)\}^2 = r^2\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\}$

$\Rightarrow (x_1y - y_1x)^2 = r^2\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\}$

$\Rightarrow (x^2 + y^2 - r^2)(x_1^2 + y_1^2 - r^2) = (xx_1 + yy_1 - r^2)^2$, যা (x_1, y_1) বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ।

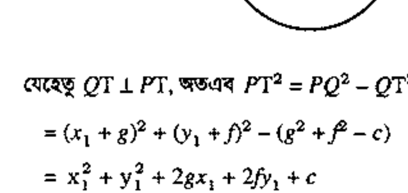
অনুরূপভাবে দেখান যায় যে, বহিঃস্থ কোন বিন্দু (x_1, y_1) থেকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির সমীকরণ

$$(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c)(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)$$
$$= \{xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c\}^2$$

সংকেতের মাধ্যমে প্রকাশ করলে স্পর্শক দুইটির সমীকরণ : $\boxed{SS_1 = T^2}$

4.7. স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু $P(x_1, y_1)$ থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে



মনে করি, বৃত্তটির সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

এবং বহিঃস্থ বিন্দু $P(x_1, y_1)$ থেকে এ বৃত্তে অংকিত স্পর্শক PT.

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $Q(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ

$QT = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

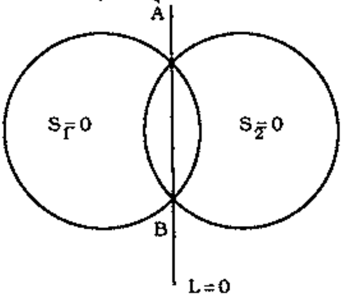
যেহেতু $QT \perp PT$, অতএব $PT^2 = PQ^2 - QT^2$

$= (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c)$

$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

$\therefore$ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $PT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$.

4.8. দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয়



মনে করি, প্রদত্ত দুইটি বৃত্তের সমীকরণ যথাক্রমে

$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ ... ...(i)

$S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ ... ... (ii)

$\therefore S_1 - S_2 \equiv 2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + c_1 - c_2 = 0$ .... (iii)

যদি বৃত্ত দুইটি পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (i) ও (ii) এর উভয়কে সিদ্ধ করে, সুতরাং $S_1 = 0$ এবং $S_2 = 0$, $\therefore S_1 - S_2 = 0$

অর্থাৎ, এদের স্থানাঙ্ক (iii) কেও সিদ্ধ করে। আবার (iii) x ও y এর একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ যা সর্বদা সরলরেখা নির্দেশ করে।

$\therefore S_1 - S_2 = 0$, অর্থাৎ (iii) সমীকরণটি বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা AB কে নির্দেশ করে।

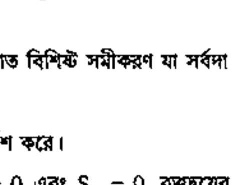
অনুসিদ্ধান্ত : যদি সাধারণ জ্যা $L \equiv S_1 - S_2 = 0$ হয়, তবে $S_1 = 0$ এবং $S_2 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন বৃত্তের সমীকরণ $S_1 + kL = 0$, যেখানে k একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক $(k \neq 0)$।

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. **$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক, $3x - 4y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান : মনে করি, সমান্তরাল সরলরেখাটির সমীকরণ $3x - 4y + k = 0$, যখন k অনির্ধারিত ধ্রুবক।

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র (1, 2) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1+4+4} = 3$.



এখন $3x - 4y + k = 0$ রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হলে, কেন্দ্র থেকে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্ব–দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\therefore \left|\frac{3.1 - 4.2 + k}{\sqrt{9+16}}\right| = 3,$$

$$\Rightarrow \frac{k-5}{5} = \pm 3 \quad \therefore k = 20, -10.$$

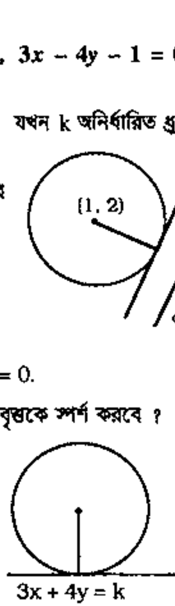
সুতরাং নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 20 = 0$.

উদাহরণ 2. k এর মান কত হলে, $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে ? [সি. '১২]

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 10x$

বা, $(x^2 - 10x + 25) + y^2 = 25$

বা, $(x-5)^2 + y^2 = (5)^2$ এর কেন্দ্র (5, 0) এবং ব্যাসার্ধ = 5.



$3x + 4y = k$ বা $3x + 4y - k = 0$ রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করলে

বৃত্তের কেন্দ্র (5, 0) থেকে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্ব দৈর্ঘ্য বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

অর্থাৎ $\left|\frac{3.5 + 4.0 - k}{\sqrt{9 + 16}}\right| = 5$

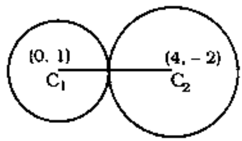
বা, $\frac{15 - k}{5} = \pm 5$ বা, $15 - k = \pm 25$

(+) নিয়ে, $15 - k = 25$ বা, $k = -10$. (–) নিয়ে, $15 - k = -25$ বা, $k = 40$

$\therefore$ নির্ণেয় k এর মান 40 অথবা – 10.

উদাহরণ 3. (4, –2) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$ বৃত্তটিকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $= r$. সুতরাং বৃত্তটির সমীকরণ $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = r^2$ ... (i)



প্রদত্ত বৃত্তটির সমীকরণকে এরূপ লেখা যায় :

$x^2 + (y^2 - 2y + 1) = 15 + 1$

বা, $x^2 + (y - 1)^2 = 16 = 4^2$.

অতএব বৃত্তটির কেন্দ্র (0, 1) এবং ব্যাসার্ধ = 4

শর্তানুসারে বৃত্ত দুইটি বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে,

সুতরাং কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব = ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফল $\Rightarrow \sqrt{(4-0)^2 + (-2-1)^2} = r + 4$

$\Rightarrow \sqrt{16 + 9} = r + 4, \Rightarrow r + 4 = 5, \quad \therefore r = 1$

সুতরাং, নির্ণেয় বৃত্তটির সমীকরণ $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 1^2$,

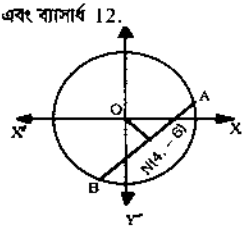
অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 19 = 0$.

উদাহরণ 4. $x^2 + y^2 = 144$ বৃত্তের যে জ্যা (4, –6) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. সি. '১১]

সমাধান : $x^2 + y^2 = 144 = (12)^2$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু O(0, 0) এবং ব্যাসার্ধ 12.

মনে করি, AB জ্যা, N(4, –6) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

$\therefore$ ON রেখার সমীকরণ, $y = \frac{-6}{4}x$ বা, $3x + 2y = 0$.



আমরা জানি বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা–এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখা জ্যা–এর উপর লম্ব। অর্থাৎ ON ⊥ AB.

ধরি AB জ্যা–এর সমীকরণ $2x - 3y + k = 0$,

যেখানে k একটি অনির্ধারিত ধ্রুবক।

যেহেতু (4, –6) বিন্দুটি AB জ্যা–এর উপর অবস্থিত,

$\therefore 2.4 - 3(-6) + k = 0$ বা, $k = -26$

অতএব, নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ $2x - 3y - 26 = 0$.

উদাহরণ 5. $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক অক্ষদ্বয় থেকে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১১; ব. '১৩]

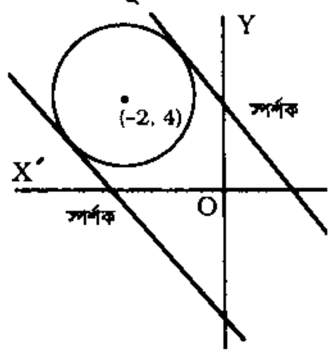
সমাধান ঃ $x^2+ y^2+ 4x - 8y + 2 = 0$ এর কেন্দ্র $(-2, 4)$

এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{2^2 + (-4)^2 - 2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

মনে করি, অক্ষদ্বয়কে ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

শর্তানুসারে $b = a$, সুতরাং রেখার সমীকরণটি হবে $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$

বা, $x + y - a = 0$ ... (i)



এখন (i) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হবে যদি কেন্দ্র $(-2, 4)$ হতে রেখাটির উপর লম্ব-দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হয়।

অর্থাৎ যদি $\left|\frac{-2 + 4 - a}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \frac{2 - a}{\sqrt{2}} = \pm 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2 - a = \pm 6 \Rightarrow a = 8$ এবং $a = -4$.

অতএব নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $x + y - 8 = 0$ এবং $x + y + 4 = 0$.

প্রশ্নমালা 4.2

1. প্রমাণ কর যে, $3x + 4y - 38 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 15$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুটি নির্ণয় কর। **উ :** $(6, 5)$
2. $x - 5y + 2 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - ax + 2y + 1 = 0$ বৃত্তের একটি ব্যাস হলে a এর মান নির্ণয় কর। **উ:** -14
3. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y - 5 = 0$ বৃত্তের একটি ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর যা (i) $6x + 8y = 11$ রেখার উপর লম্ব। (ii) $6x + 8y = 11$ রেখার সমান্তরাল। **উ :** (i) $4x - 3y - 13 = 0$ (ii) $3x + 4y + 9 = 0$;
4. প্রমাণ কর যে, $x - 3y = 5$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসের সমীকরণও নির্ণয় কর। [চ. '০৭] **উ :** $3x + y = 5$
5. মূলবিন্দু হতে $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '১১; ব. '১২; রা. চ. '১৩] **উ :** $x - 2y = 0, x + 2y = 0$
6. $(1, -3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $2x - y - 4 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '১২] **উ :** $5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 49 = 0$
7. (i) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(4, 3)$ এবং যা $5x - 12y + 3 = 0$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে। **উ :** $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$

   (ii) $2x + 3y - 5 = 0$ রেখাটি $(3, 4)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শক। বৃত্তটি y-অক্ষের যে অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ নির্ণয় কর। **উ :** 4.
8. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(4, 3)$ এবং একটি স্পর্শক $5x - 12y + 3 = 0$. **উ :** $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$
9. $x^2 + y^2 - 3x + 10y = 15$ বৃত্তের $(4, -11)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. '১০] **উ :** $5x - 12y = 152$.

10. (p, q) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত মূলবিন্দুগামী। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, মূলবিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক $px + qy = 0$. [য. '০৭; দি. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 2px - 2qy = 0$

11. $px + qy = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। দেখাও যে, (p, q) বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত। [ঢা. '০৬; ব. '০৮; য. '১২]

12. $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x - 2y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব হবে। উ : $2x + y \pm 2\sqrt{5} = 0$

13. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত যে স্পর্শক $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '১২; সি. '১৩] উ : $4x + 3y - 25 = 0, 4x + 3y + 5 = 0$

14. দেখাও যে $3x + 4y - 9 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। এমন দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা উক্ত স্পর্শকটির উপর লম্ব। উ : $4x - 3y + 3 = 0, 4x - 3y - 17 = 0$ [দি. '১২]

15. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $3x - 4y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল। উ : $3x - 4y - 10 = 0$
$3x - 4y + 20 = 0$

16. $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক $5x - 12y = 9$ রেখার সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. '১১; চ. '১২] উ : $5x - 12y - 51 = 0, 5x - 12y + 131 = 0$

17. $x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$ বৃত্তের উপর দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $y = x$ রেখার সমান্তরাল হবে। উ : $x - y \pm 10 = 0$

18. (i) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$ বৃত্তের যে স্পর্শক y–অক্ষের সমান্তরাল; ঐ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x + 5 = 0, x + 1 = 0$
(ii) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$ বৃত্তের যে স্পর্শকগুলো x-অক্ষের সমান্তরাল, তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $y + 2 = 0, y + 6 = 0$

19. একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের একটি $(2, -4)$ এবং অপরটি মূলবিন্দু; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। এ বৃত্তে যে স্পর্শকদ্বয় প্রদত্ত ব্যাসের সমান্তরাল তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ : $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0; 2x + y \pm 5 = 0$

20. $(-4, 3)$ এবং $(8, -2)$ বিন্দু দুইটি কোন বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হলে ঐ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত। উ : $4x + y = 0$

21. $(2, -5)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী। ঐ বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ $2x - 5y = 0$. উ : $x^2 + y^2 - 4x + 10y = 0$

22. $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট যে বৃত্তটি $2x + y = 9$ রেখাকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত রেখাটি $4(x^2 + y^2) - 4x - 24y + 17 = 0$ বৃত্তেরও একটি স্পর্শক। উ : $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

23. (i) $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তের একটি জ্যা–এর মধ্যবিন্দু $(-2, 3)$. ঐ জ্যা–এর সমীকরণ নির্ণয় কর।
[রা. '১১; চ. '১২; ব. দি. '১৩] উ : $2x - 3y + 13 = 0$
(ii) $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের জ্যা $(-2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। ঐ জ্যা–এর সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ : $2x - 3y + 13 = 0$

24. $y = 2x$ যদি $x^2 + y^2 - 10x = 0$ বৃত্তের কোন জ্যা–এর সমীকরণ হয়, তবে উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '০৮; য. '১০] উ : $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

25. $3x - 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে k এর মান নির্ণয় কর। উঃ $32, -8$.

26. (i) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x–অক্ষকে স্পর্শ করে। c এর মান ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. য. '১১; রা. '১২] উ : $c = 4$; $(2, 0)$

(ii) $3x + cy = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। c এর মান নির্ণয় কর।

[ব. '১২] উ : $2, -\frac{1}{6}$

27. দেখাও যে $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2 m^2 + 2al = 1$ হয়। [চ. '১০; কু. রা. '১৩]

28. (i) $x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '১০; সি. '১১]

উ : $x + 2y = 10$; $x - 2y = 10$

(ii) $x^2 + y^2 = 13$ বৃত্তের যে বিন্দুতে কোটি 2, উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[য. '০৮] উ : $2y \pm 3x = 13$

29. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের পরিধিস্থ $(6, -6)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $4x - 3y - 42 = 0$; $3x + 4y + 6 = 0$

30. মূলবিন্দু হতে $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2. বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢা. '০৬, '১০; চ. য. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

31. $(1, -2)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উ : $y + 2 = 0$, $4x + 3y + 2 = 0$, দৈর্ঘ্য $= 1$

32. দেখাও যে $12x + 5y - 4 = 0$ রেখাটি, $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক; এ বৃত্তের যে ব্যাসটি স্পর্শবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $5x - 12y + 33 = 0$

33. (i) মূলবিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি ব্যাস $2y = 3x$ এবং একটি স্পর্শক $2x + 3y + 13 = 0$. উ : $x^2 + y^2 + 2x + 3y = 0$.

(ii) $2x + 3y - 5 = 0$ রেখাটি $(3, 4)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শক। বৃত্তটি y অক্ষ থেকে যে অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ নির্ণয় কর। [য. '০৪; কু. '০৭] উ : 4.

34. $(3, -1)$ বিন্দু দিয়ে গমনকারী বৃত্তটি x–অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দু দিয়ে গমনকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণও নির্ণয় কর। [ঢা. কু. '১২; সি. '১১]

উ : $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$; $4x + 3y = 0$

35. (i) $(3, 7)$ ও $(9, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত অংকন করা হয়েছে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, $x + y = 4$ রেখাটি ঐ বৃত্তের একটি স্পর্শক। স্পর্শবিন্দুটি নির্ণয় কর।

[সি. '১২] উ : $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0$; $(3, 1)$

(ii) $(b, 0)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শকের উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [ঢা. '০৪] উ : $(y^2 + x^2 - bx)^2 = a^2\{y^2 + (b - x)^2\}$

36. (i) $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের একটি স্পর্শক x– অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $y = \sqrt{3}x \pm 10$.

(ii) $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের স্পর্শক x-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ. '১০; ব. '১১; কু. '১২] উ : $\sqrt{3}\,y = x \pm 8$

37. (i) $x^2 + y^2 = (3x - 4y)$ বৃত্তের একটি ব্যাস মূলবিন্দু দিয়ে যায়। ব্যাসটির সমীকরণ এবং মূলবিন্দুতে অংকিত স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $4x + 3y = 0$; $3x - 4y = 0$.

(ii) $x^2 + y^2 = b\,(5x - 12y)$ বৃত্তের ব্যাস মূল বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এই ব্যাসের সমীকরণ এবং মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '০৪] উ : $12x + 5y = 0$; $5x - 12y = 0$

38. দেখাও যে, $x - 2y + 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 2 = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। এ বৃত্তের যে ব্যাসটি স্পর্শবিন্দুগামী তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $2x + y - 3 = 0$.

39. দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে। সাধারণ স্পর্শক নির্ণয় কর। [য. '১১] উ : $3x - 4y + 19 = 0$

40. দেখাও যে, x-অক্ষ, $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। মূলবিন্দুগামী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $15x + 8y = 0$

41. $(-5, 4)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ বৃত্তের উপর অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '১৩] উ : $y - 4 = 0, 3x + 4y - 1 = 0$.

42. দেখাও যে, $y = 3x + 10$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুটি নির্ণয় কর। উ: $(-3, 1)$.

43. $(-2, 3)$ বিন্দু হতে $2x^2 + 2y^2 = 3$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উ : $\sqrt{\frac{23}{2}}$

44. (i) $3x + by - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। b এর মান নির্ণয় কর। [চ. '১১; রা. '১২; ঢা. '১৩] উ : 2 বা $-\frac{1}{6}$

(ii) $ax + 2y - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। a এর মান নির্ণয় কর। [রা. '০৪] উ : $3, -17/3$.

45. দেখাও যে, $x + 2y = 17$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 10$ বৃত্তের একটি স্পর্শক এবং এ বৃত্তের যে ব্যাসটি স্পর্শ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '০২] উ : $2x - y + 1 = 0$.

46. $(1, -1)$ বিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উ : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ [চ. '১১; কু. '১৩]

47. $\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $x + y + 1 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং যাদের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত। [সি. '১১] উ : $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0, x^2 + y^2 + 6x + 7 = 0$.

48. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১১; ব. সি. '১৩] উ : $2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

প্রশ্নমালা 4.3

সৃজনশীল প্রশ্ন

1. কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(1, 5)$ ও $(7, -3)$.

   (a) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ এটা প্রয়োগ করে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$

   (b) অপর একটি ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উল্লিখিত ব্যাসের উপর লম্ব। উ : $3x - 4y - 8 = 0$

   (c) মূল বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে যথাক্রমে 3 ও 5 একক ছেদ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$

2. একটি বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$.

   (a) দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ এবং $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

   (b) $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি কী শর্তে একটি বাস্তব বৃত্ত সূচিত করে?

   (c) এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(4, 5)$ এবং প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্রগামী। উ : $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0$

3. একটি বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 4$ এবং একটি সরলরেখার সমীকরণ $3x + 4y = 9$.

   (a) দেখাও যে, বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে।

   (b) $2x - 3y - 9 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2x - 4y + c = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক হলে, c এর মান কত? উ : 8.

   (c) উদ্দিপকে উল্লিখিত বৃত্তের দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা প্রদত্ত রেখাটির উপর লম্ব।

4. একটি বৃত্তের সমীকরণ : $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$.

   (a) দেখাও যে, $A(1, 1)$ বিন্দুটি প্রদত্ত বৃত্তটির উপর অবস্থিত।

   (b) A বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ : $(-5, -7)$

   (c) দেখাও যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়।

5. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

   (a) বৃত্তটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ নির্ণয়ের সূত্রটি প্রতিষ্ঠা কর।

   (b) বৃত্তটি x ও y অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করার শর্ত নির্ণয় কর।

   (c) $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের স্পর্শক x- অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $\sqrt{3}y = x \pm 8$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব তার সমীকরণ :

   (a) $4x + 3y - 10 = 0$ (b) $4x + 3y - 16 = 0$

   (c) $4x + 3y - 25 = 0$ (d) $4x + 3y + 20 = 0$

2. একটি বৃত্ত x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(3, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ।

   (a) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

   (c) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যায়ের সমীকরণ :

   (a) $x + y - 2 = 0$ (b) $x - y - 3 = 0$

   (c) $2x + y - 3 = 0$ (d) $x + 2y + 1 = 0$

4. y-অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1, 0)$ দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ।

   (a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

   (c) $x^2 + y^2 - 4x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$

5. $(-4, 3)$ ও $(12, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগরেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ।

   (a) $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 51 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 51 = 0$

   (c) $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 51 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 51 = 0$

6. একটি বৃত্ত x-অক্ষকে $(4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং এর কেন্দ্র $2x - y - 5 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ।

   (a) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 8x + 6x + 16 = 0$

   (c) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$

7. (4, −8) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত y-অক্ষকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ।

(a) $x^2 + y^2 - 8x - 16y + 64 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 8x + 16y + 64 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 8x + 16y + 16 = 0$ (d) কোনটি নয়।

8. (4, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ

(a) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 21 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 25 = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$

9. নিচের তথ্যগুলি লক্ষ কর :

(i) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$ বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -3)$।

(ii) $x^2 + y^2 = 0$ সমীকরণটি বিন্দু বৃত্ত নির্দেশ করে।

(iii) (1, 2) ও (3, 4) বিন্দু দুইটি যে বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু তার সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$.

নিচের কোনটি সঠিক ?

(a) (i) ও (ii) (b) (ii) ও (iii)

(c) (i) ও (iii) (d) (i), (ii) ও (iii)

10. k এর কোন মানের জন্য $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$ একটি বৃত্ত সূচিত করে?

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) −2

11. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + c = 0$ বৃত্তটি y- অক্ষকে স্পর্শ করলে c- এর মান কত?

(a) 4 (b) 5

(c) 6 (d) 9

12. (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x -অক্ষকে স্পর্শ করে। y -অক্ষ থেকে বৃত্তটি দ্বারা খণ্ডিত অংশের পরিমাণ −

(a) $\sqrt{3}$ (b) $2\sqrt{2}$

(c) $2\sqrt{3}$ (d) 3

13. $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। k -এর একটি মান −

(a) 20 (b) 30

(c) 40 (d) 45

14. $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তের একটি জ্যায়ের মধ্যবিন্দু $(-2, 3)$ হলে ঐ জ্যায়ের সমীকরণ −

(a) $2x + 3y + 12 = 0$ (b) $2x - 3y + 13 = 0$

(c) $2x - y + 5 = 0$ (d) $x + 2y - 11 = 0$

15. একটি বৃত্ত y- অক্ষকে মূল বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(2, -2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ −

(a) $x^2 + y^2 + 4x = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 4x = 0$

(c) $2(x^2 + y^2) - 5x = 0$ (d) $2(x^2 + y^2) - 3x = 0$

ব্যবহারিক

4.9. $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ সমীকরণের লেখচিত্র (মুক্তহস্তে ও গ্রাফ পেপারে)

সমস্যা নং 4.9.1		তারিখ :

সমস্যা 1 : $x^2+y^2-6x+8y+y=0$ বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর এবং এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান :

তত্ত্ব : $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (a, b) এবং ব্যাসার্ধ $= c$

কার্যপদ্ধতি : (i) ছক কাগজে x ও y–অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্র দুই বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1(একক) ধরি।

প্রদত্ত সমীকরণ $x^2+y^2-6x+8y-9=0$

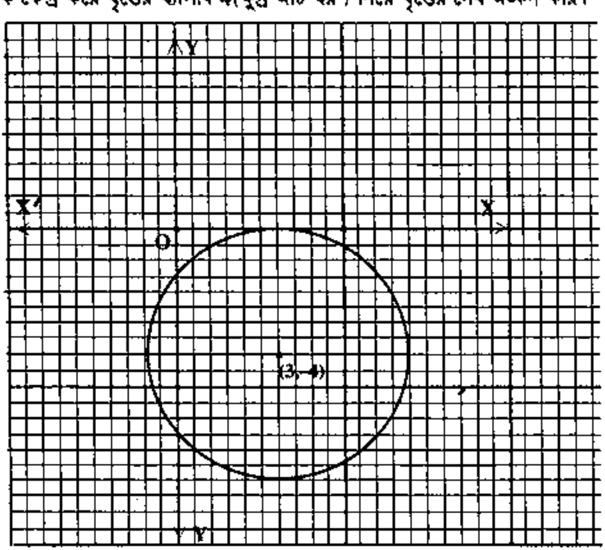
বা, $(x^2-6x+9)+(y^2+8y+16)=25-9$

বা, $(x-3)^2+(y+4)^2=16$

বা, $(x-3)^2+\{y-(-4)\}^2=(4)^2$

এ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(3, -4)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 4$

$(3, -4)$ বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4(ক্ষুদ্র আট ঘর) নিয়ে বৃত্তের লেখ অঙ্কন করি।



শ্রেণির কাজ

1. $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ বৃত্তটির লেখ অঙ্কন কর।
2. $x^2+y^2-14x-4y+28=0$ বৃত্তটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।
3. $x^2+y^2-4x-4y+4=0$ বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর এবং লেখ অঙ্কন কর।
4. মুক্ত হস্তে $x^2+y^2-10x=0$ বৃত্তটির লেখ অঙ্কন কর।

পঞ্চম অধ্যায়

বিন্যাস ও সমাবেশ (*Permutations and Combinations*)

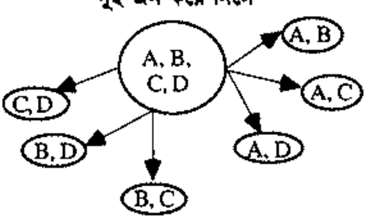
5.1. গণনার যোজন ও গুণন বিধি

গণনার যোজন বিধি :

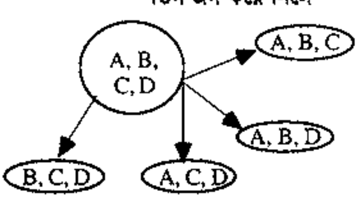
মনে করি A, B, C, D নামের 4 জন খেলোয়াড়ের মধ্য থেকে প্রতিবারে দুইজন এবং তিনজন করে নিয়ে দল গঠন করতে হবে।

তাহলে, কত সংখ্যক উপায়ে দল গঠন করা যায় ? নিচের দুইটি চিত্র লক্ষ করি :

দুই জন করে নিলে



তিন জন করে নিলে



উপরের চিত্র থেকে দেখা যায় দুইজন করে নিয়ে প্রথমে কাজটি 6 সংখ্যক উপায়ে এবং তিন জন করে নিয়ে দ্বিতীয়বারে কাজটি 4 সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়। সুতরাং স্বতন্ত্রভাবে কাজটি মোট $(6 + 4)$ বা, 10 সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়। একেই **গণনার যোজন বিধি** বলা হয়।

সাধারণভাবে,

একটি কাজ সম্ভাব্য m সংখ্যক উপায়ে এবং অন্য একটি কাজ স্বতন্ত্রভাবে সম্ভাব্য n সংখ্যক উপায়ে করতে পারলে, কাজ দুইটি একত্রে সম্ভাব্য $(m + n)$ সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন উপায়ে করাকেই বলা হয় **'গণনার যোজন বিধি'**।

উদাহরণ। একটি মহাবিদ্যালয়ের পরিচালনা কমিটিতে 4 জন পুরুষ ও 3 জন মহিলা সদস্য আছেন। তাদের মধ্য থেকে 2 জন সদস্য (কেবল পুরুষ বা মহিলা) নিয়ে কতগুলি উপকমিটি গঠন করা যায় ?

সমাধান : মনে করি, পুরুষ সদস্যরা হলেন A, B, C, D এবং মহিলা সদস্যরা A_1, B_1, C_1.

$(A$ ও $B)$, $(A$ ও $C)$, $(A$ ও $D)$, $(B$ ও $C)$, $(B$ ও $D)$ এবং $(C$ ও $D)$ পুরুষ সদস্যদের সমন্বয়ে 2 জন সদস্যবিশিষ্ট উপকমিটি গঠন করা যায়, অর্থাৎ 6টি উপকমিটি গঠন করা যায়।

আবার $(A_1$ ও $B_1)$, $(A_1$ ও $C_1)$ এবং $(B_1$ ও $C_1)$ মহিলা সদস্যদের সমন্বয়ে 2 জন সদস্যবিশিষ্ট 3টি উপকমিটি গঠন করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় উপ-কমিটির সংখ্যা $= 6 + 3 = 9$.

গণনার গুণন বিধি :

মনে করি, ঢাকা হতে খুলনায় 6টি ভিন্ন ভিন্ন বাস যাতায়াত করে। তাহলে, একজন লোক কত সংখ্যক উপায়ে ঢাকা হতে খুলনায় পৌঁছে আবার ঢাকায় ফিরে আসতে পারবেন, যদি যাবার সময় তিনি যে বাস ব্যবহার করেছেন ফিরার সময় ঐ বাস ব্যবহার না করেন।

যেহেতু 6টি ভিন্ন ভিন্ন বাস আছে, সুতরাং লোকটি 6 সংখ্যক উপায়ে খুলনায় পৌঁছতে পারবেন। 6 সংখ্যক উপায়ের যে কোনো 1টি উপায়ে খুলনায় পৌঁছে তিনি 5 সংখ্যক উপায়ে ঢাকায় ফিরে আসতে পারবেন, কারণ যাবার ও ফিরার সময় তিনি একই বাস ব্যবহার করবেন না। সুতরাং ঢাকা হতে খুলনায় পৌঁছে আবার ঢাকায় ফিরার কাজ দুইটি একত্রে মোট (6×5) বা 30 সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করতে পারবেন।

সাধারণভাবে, যদি m সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন পদ্ধতিতে কোনো একটি কাজ সম্পন্ন করা যায় এবং এদের এক পদ্ধতিতে কাজটি সম্পাদিত হবার পর যদি অপর একটি কাজ n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন পদ্ধতিতে সম্পন্ন করা যায়, তাহলে কাজ দুইটি একত্রে মোট $m \times n$ সংখ্যক পদ্ধতিতে সম্পন্ন করা যাবে। একেই বলা হয় "গণনার গুণন বিধি"।

মন্তব্য : উপরের দুইটি কাজ $m \times n$ সংখ্যক পদ্ধতির যে কোনো একটি পদ্ধতিতে সম্পাদিত হবার পর যদি তৃতীয় একটি কাজ r সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়, তাহলে তিনটি কাজ একত্রে মোট $m \times n \times r$ সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যাবে। অর্থাৎ যে কোনো সংখ্যক কাজের জন্য 'গণনার গুণন বিধি' প্রয়োগ করা যায়।

উদাহরণ। একজন ছাত্রের তার এক বন্ধুর বাড়ি যেতে 5টি ভিন্ন ভিন্ন রাস্তা আছে এবং ঐ বন্ধুর বাড়ি হতে তাদের মহাবিদ্যালয়ে যাবার জন্য 4টি ভিন্ন ভিন্ন রাস্তা আছে। ছাত্রটি তার বন্ধুকে নিয়ে কত সংখ্যক উপায়ে মহাবিদ্যালয়ে যেতে পারবে ?

সমাধান : ছাত্রটি তার বন্ধুর বাড়িতে 5টি ভিন্ন ভিন্ন রাস্তায় যেতে পারে। যেহেতু বন্ধুর বাড়ি হতে মহাবিদ্যালয়ে যাবার জন্য 4টি ভিন্ন ভিন্ন রাস্তা আছে, সুতরাং, বন্ধুর বাড়ি যাবার 5টি রাস্তার যে কোনো 1টিতে যেয়ে 4 সংখ্যক উপায়ে তারা মহাবিদ্যালয়ে পৌছতে পারবে। অতএব বন্ধুকে নিয়ে ছাত্রটি 5×4 বা, মোট 20 সংখ্যক উপায়ে মহাবিদ্যালয়ে যেতে পারবে।

5.2. বিন্যাস

তিনটি অক্ষর a, b, c এর মধ্য থেকে দুইটি করে নিয়ে পর পর সাজালে পাওয়া যায়

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

আবার তিনটি করে নিয়ে পর পর সাজানো হলে পাওয়া যায় : $abc, acb, bac, bca, cab, cba.$

উপরে প্রাপ্ত প্রত্যেকটিকে বলা হয় এক একটি বিন্যাস ***(Permutation)***.

নির্দিষ্ট সংখ্যক জিনিস থেকে কয়েকটি বা সব কয়টি একবারে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় (অর্থাৎ ভিন্ন ভিন্ন সারি গঠন করা যায়)তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি বিন্যাস বলা হয়।

n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেকবার $r\ (r \le n)$ সংখ্যক জিনিস নিয়ে প্রাপ্ত বিন্যাস সংখ্যাকে সাধারণত সংক্ষেপে nP_r বা, ${}^nP_r$ বা, $P(n,r)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ 1. প্রত্যেকটি অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 1, 2, 3 দ্বারা কতগুলি দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান : আমরা জানি, দুইটি অঙ্ক পাশাপাশি লিখে অর্থাৎ, সাজিয়ে দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যায়। এখন 1, 2, 3 এর মধ্য থেকে দুইটি করে নিয়ে সম্ভাব্য সংখ্যাগুলি হল : 12, 13, 21, 23, 31, 32.

অর্থাৎ, মোট সংখ্যা = 6.

আসলে এখানে তিনটি জিনিস (অঙ্ক) থেকে দুটি করে নিয়ে সাজানো হয়েছে। তাহলে,সংজ্ঞানুসারে বিন্যাস সংখ্যা= 6.

5.3. n ! এর ব্যাখ্যা

1 থেকে n পর্যন্ত সব স্বাভাবিক সংখ্যার ধারাবাহিক গুণফলকে সাধারণত n ! দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ, $n\,! = n(n-1)(n-2)\ ......\ 3.2.1.$

যেমন, $6\,! = 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1$

$= 6.\ 5! = 6.\ 5.\ 4!$

মন্তব্য : $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ ....\ 3.2.1 = n(n-1)!$

$= n(n-1)\,(n-2)! = n(n-1)(n-2)\ ....\ (n-r+1)\,(n-r)!.$

5.4. বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়ের বিভিন্ন সূত্র

(i) ^nP_r নির্ণয় করা, যেখানে n সংখ্যক জিনিসের প্রত্যেকে ভিন্ন ভিন্ন এবং $n \geq r$.

n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস দ্বারা r সংখ্যক শূন্যস্থান যতভাবে পূরণ করা যায় তা হল নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা, অর্থাৎ ^nP_r এর সমান।

প্রথম স্থানটি n সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়, কারণ n সংখ্যক জিনিসের যে কোনো একটিকে ঐ স্থানে বসানো যায়। প্রথম স্থানটি n সংখ্যক উপায়ের যে কোনো একটি উপায়ে পূরণ করলে দ্বিতীয় স্থানটি অবশিষ্ট $(n - 1)$ জিনিসের যে কোনো একটি দ্বারা পূরণ করা যেতে পারে। অর্থাৎ দ্বিতীয় স্থানটি $(n - 1)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়।

সুতরাং, প্রথম দুইটি স্থান একত্রে $n(n-1)$সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যাবে (অনুচ্ছেদ 6.1)।

অর্থাৎ $^nP_2 = n(n - 1)$.

আবার প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান n সংখ্যক জিনিসের যে কোনো দুইটি দ্বারা পূরণ করার পর তৃতীয় স্থানটি পূরণের জন্য

$(n - 2)$ সংখ্যক জিনিস অবশিষ্ট থাকে। সুতরাং, প্রথম দুইটি স্থান একত্রে পূরণ করার প্রত্যেকটি উপায়ের জন্য তৃতীয় স্থান $(n - 2)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। অর্থাৎ, প্রথম তিনটি স্থান একত্রে $n(n - 1)(n - 2)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং, $^nP_3 = n(n - 1)(n - 2)$.

এভাবে অগ্রসর হলে আমরা পাই $^nP_4 = n(n-1)(n- 2)(n- 3)$, $^nP_5 = n(n- 1)(n- 2)(n- 3)(n- 4)$ ইত্যাদি।

$\therefore\ ^nP_r = n(n- 1)(n- 2) \ldots\ldots$ r সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= n(n- 1)(n - 2) \ldots (n- r +1)$

অর্থাৎ, $^nP_r = n(n- 1)(n- 2) \ldots\ldots\ldots (n- r+1)$.

লক্ষ করি : একবারে যতগুলি জিনিস নেয়া হয় বিন্যাস সংখ্যা হল ততগুলি উৎপাদকের গুণফল এবং শেষ উৎপাদকটি $= n -$ (যতগুলি জিনিস একবারে নেয়া হয়) $+ 1$

অনুসিদ্ধান্ত 1. n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে সব জিনিস একবারে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা, অর্থাৎ

$^nP_n = n(n- 1)(n- 2) \ldots\ldots$ n সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত।

$= n(n- 1)(n- 2) \ldots\ldots (n- n+1) = n(n- 1)(n- 2) \ldots 1 = n(n- 1)(n- 2) \ldots\ldots 3.2.1.$

$\therefore\ ^nP_n = n!$

অনুসিদ্ধান্ত 2. আমরা জানি

$^nP_r = n(n- 1)(n- 2) \ldots\ldots (n- r+1)$

$$= \frac{n(n- 1)(n- 2) \ldots\ldots (n- r+1)(n- r)(n- r-1) \ldots\ldots 3.2.1}{(n- r)(n- r- 1) \ldots\ldots 3.2.1} = \frac{n!}{(n- r)!}$$

(ii) 0! এর মান নির্ণয় :

অনুসিদ্ধান্ত 1 থেকে $^nP_n = n!$

আবার অনুসিদ্ধান্ত 2 থেকে $^nP_n = \frac{n!}{0!}$ [$r = n$ বসিয়ে]

$\therefore n! = \frac{n!}{0!}$, অর্থাৎ $0! = 1$.

(iii) প্রত্যেকটি ভিন্ন নয় এরূপ জিনিসের বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করা

মনে করি, n সংখ্যক জিনিসের মধ্যে p সংখ্যক এক রকমের, q সংখ্যক দ্বিতীয় রকমের, r সংখ্যক তৃতীয় রকমের এবং বাকি জিনিসগুলি ভিন্ন ভিন্ন।

যদি p সংখ্যক একই রকম জিনিসকে p সংখ্যক স্বতন্ত্র জিনিস দ্বারা বদলানো হয়, তবে এ স্বতন্ত্র জিনিসগুলি নিজেদের স্থানে রেখে তাদেরকে $p!$ সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায়। অর্থাৎ, নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যার একটি থেকে $p!$

সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়। এখন নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা x হলে, p সংখ্যক জিনিস স্বতন্ত্র ধরার ফলে মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে $x \times p\,!$.

অনুরূপভাবে $x \times p\,!$ সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে q সংখ্যক একই রকমের জিনিসকে q সংখ্যক স্বতন্ত্র জিনিস দ্বারা পরিবর্তন করা হলে, মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে $x \times p\,! \times q\,!$.

তদ্রূপ $x \times p\,! \times q\,!$ সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে r সংখ্যক একই রকম জিনিসকে r সংখ্যক স্বতন্ত্র জিনিস দ্বারা পরিবর্তন করলে মোট বিন্যাস সংখ্যা হয় $x \times p\,! \times q\,! \times r\,!$.

এখন সবগুলি জিনিসই স্বতন্ত্র। সুতরাং, n সংখ্যক জিনিসের সবগুলি একবারে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা হবে $n!$.

$\therefore x \times p\,! \times q\,! \times r\,! = n\,!$ অর্থাৎ, $x = \dfrac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}$.

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}$.

(iv) জিনিসগুলির পুনরাবৃত্তি ঘটতে পারে ঐসব ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা

***n* সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে একবারে *r* সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে, যেখানে যে কোনো জিনিসের *r* সংখ্যক বার পুনরাবৃত্তি ঘটতে পারে।**

এখানে n সংখ্যক জিনিস দ্বারা r সংখ্যক শূন্য স্থান যত প্রকারে পূরণ করা যায় তা হল নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা।

এক্ষেত্রে প্রথম স্থান, দ্বিতীয় স্থান,তৃতীয় স্থান ইত্যাদির প্রত্যেকটি স্থান n সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়; কারণ প্রত্যেক জিনিস বার বার ব্যবহার করা যায়। সুতরাং, তিনটি স্থান একত্রে $n \times n \times n$, অর্থাৎ n^3 উপায়ে পূরণ করা যায়। অর্থাৎ বিন্যাস সংখ্যা $= n^3$.

এভাবে অগ্রসর হলে, একবারে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= n^r$.

অর্থাৎ, এ বিশেষ ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= n^r$.

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. প্রত্যেকটি অঙ্ক কেবল একবার নিয়ে 8, 9, 7, 6, 3, 2 অঙ্কগুলি দ্বারা তিন অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা গঠন করা যায় ?

সমাধান : যেহেতু অঙ্কগুলি বিভিন্নভাবে সাজালে ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা হয়, সুতরাং 6 টি জিনিসের মধ্য থেকে 3 টিকে একবারে নিয়ে যে বিন্যাস সংখ্যা তা হল মোট সংখ্যার সমান।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= {}^6P_3 = \dfrac{6!}{(6-3)!} = \dfrac{6\,!}{3\,!} = 120.$

উদাহরণ 2. '*Courage*' শব্দটির বর্ণগুলি নিয়ে কতগুলি বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করা যায় যেন প্রত্যেক বিন্যাসের প্রথমে একটি স্বরবর্ণ থাকে?

সমাধান : '*Courage*' শব্দটিতে 7টি অক্ষর যার মধ্যে চারটি স্বরবর্ণ (o, u, a, e) আছে। মনে করি, এদের যে কোনো একটি স্বরবর্ণ (o) কে প্রথম স্থানে রাখা হল। তাহলে বাকি 6টি অক্ষর দ্বারা অবশিষ্ট স্থানগুলি $6!$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

$\therefore$ O কে প্রথমে রেখে বিন্যাস সংখ্যা $= 6\,! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$

তদ্রূপ অপর স্বরবর্ণগুলি প্রথমে রাখলে প্রত্যেক ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= 720$.

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 4 \times 720 = 2880.$

উদাহরণ 3. স্বরবর্ণগুলিকে পাশাপাশি না রেখে '*Daughter*' শব্দটির অক্ষরগুলি কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায়?

সমাধান : শব্দটিতে মোট ৪টি অক্ষর আছে। এ অক্ষরগুলি সবই ভিন্ন ভিন্ন। সুতরাং সবগুলি অক্ষর একবারে নিয়ে ৪টি অক্ষরকে ${}^8P_8$ সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায়।

এখন স্বরবর্ণ a, u, e কে একক অক্ষর ধরে $d, g, h, t, r, (aue)$ অর্থাৎ 6টি অক্ষরের সবগুলি একবারে নিয়ে ${}^6P_6$ সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায়। এখানে ক্রমানুসারে (aue) স্বরবর্ণগুলিকে একক অক্ষর ধরা হয়েছে। কিন্তু এ 3 টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $3\,!$ অর্থাৎ, 6 সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায়।

∴ স্বরবর্ণগুলি পাশাপাশি রেখে অক্ষরগুলিকে $^6P_6 \times 6$ সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায়।

∴ স্বরবর্ণগুলি পাশাপাশি না রেখে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^8P_8 - {}^6P_6 \times 6$

$$= 8\,! - 6\,! \times 6 = 40320 - 720 \times 6 = 36000.$$

উদাহরণ 4. *'Calculus'* শব্দটির বর্ণগুলির সবগুলি একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় যেন প্রথম ও শেষ অক্ষর *'u'* থাকে ?

সমাধান : শব্দটির মধ্যে 8টি অক্ষর আছে। এদের মধ্যে দুইটি c, দুইটি l এবং দুইটি u আছে; অবশিষ্ট অক্ষরগুলি বিভিন্ন রকমের।

শর্তানুযায়ী প্রথম ও শেষে u থাকবে। সুতরাং অবশিষ্ট 6টি স্থান বাকি 6টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করতে হবে।

যেহেতু বাকি 6টি অক্ষরের মধ্যে 2টি c, 2টি l এবং অন্যগুলি ভিন্ন ভিন্ন, সুতরাং 6টি অক্ষরের সবগুলি একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{6\,!}{2\,!\,2\,!}$ [অনুচ্ছেদ 5.4 থেকে] $= 180$.

∴ প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী অক্ষরগুলিকে 180 প্রকারে সাজানো যাবে।

উদাহরণ 5. 0, 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলি দ্বারা ছয় অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ সংখ্যা গঠন করা যায় ? (প্রত্যেক অঙ্ক কেবল একবার নিয়ে একটি সংখ্যায় ব্যবহার করে)

সমাধান : ছয় অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা গঠনের জন্য প্রদত্ত 6টি অঙ্কই ব্যবহার করতে হবে।

∴ 6টি অঙ্ক একবারে নিয়ে মোট সংখ্যা $= {}^6P_6 = 720$.

যে সংখ্যার সর্ববামে 0 থাকবে তা ছয় অঙ্কবিশিষ্ট অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবে না। সর্ববামের স্থানটি 0 এর জন্য নির্দিষ্ট রেখে বাকি 5টি অঙ্ককে নিজেদের মধ্যে 5! অর্থাৎ, 120 উপায়ে সাজানো যায়।

সুতরাং, 120টি সংখ্যার সর্ববামে 0 থাকবে।

∴ ছয় অঙ্কবিশিষ্ট মোট সংখ্যা $= 720 - 120 = 600$.

উদাহরণ 6. একজন সংকেত প্রদানকারীর 6টি পতাকা আছে যার মধ্যে 1টি সাদা, 2টি সবুজ এবং 3টি লাল। তিনি 5টি পতাকা সারিতে (*in a row*) ব্যবহার করে কতটি বিভিন্ন সংকেত দিতে পারবেন ?

সমাধান : পাঁচটি পতাকার সম্ভাব্য নির্বাচন নিম্নরূপঃ

	সাদা (1টি)	সবুজ (2টি)	লাল (3টি)
(a)	1	2	2
(b)	1	1	3
(c)	0	2	3

(a) এর জন্য বিন্যাস সংখ্যা, অর্থাৎ সংকেত সংখ্যা $= \dfrac{5!}{2!\,2!} = 30$

(b) " " " " " " " $= \dfrac{5!}{3!} = 20$

(c) " " " " " " " $= \dfrac{5!}{2!\,3!} = 10$

∴ নির্ণেয় মোট সংকেত সংখ্যা $= 30+20+10 = 60$.

উদাহরণ 7. 4, 5, 6, 7, 8 এর প্রত্যেকটিকে যে কোনো সংখ্যক বার নিয়ে চার অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়? এ সংখ্যাগুলির কয়টিতে একই অঙ্ক একাধিকবার থাকবে ?

সমাধান : এখানে 5টি অঙ্ক থেকে প্রতিবারে 4টি অঙ্ক (একই অঙ্ক একাধিবারে নিয়েও) পর পর সাজালেই চার অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা পাওয়া যাবে। অর্থাৎ 5টি জিনিস থেকে প্রতিবারে 4টি জিনিস (যেখানে একই জিনিসের 4 সংখ্যক বার পুনরাবৃত্তি ঘটতে পারে) নিয়ে বিন্যাস সংখ্যাই হল মোট সংখ্যা।

∴ চার অঙ্কবিশিষ্ট মোট সংখ্যা $= 5^4 = 625$. [অনুচ্ছেদ 6.5]

আবার 5টি অঙ্ক থেকে 4টি অঙ্ক (প্রত্যেকটি কেবল একবার) নিয়ে চার অঙ্কবিশিষ্ট মোট সংখ্যা

$$= {}^5P_4 = 120.$$

∴ প্রত্যেকটি সংখ্যায় একই অঙ্ক একাধিকবার থাকবে এরূপ মোট সংখ্যা $= 625 - 120 = 505$

প্রশ্নমালা 5.1

1. (i) প্রমাণ কর যে, প্রথম n সংখ্যক বিজোড় সংখ্যার গুণফল $= \frac{(2n)!}{2^n.n!}$ [কু. '১১; রা. '১৩]

   (ii) $4 \times {}^nP_3 = 5 \times {}^{n-1}P_3$ হলে, n এর মান কত? [কু. '০৫]

2. ${}^{4n}P_3 = 2 \times {}^{2n}P_4$ হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

3. '*Equation*' শব্দটির সবগুলি অক্ষর একত্রে ব্যবহার করে কত উপায়ে অক্ষরগুলি সাজানো যায় ?

4. প্রত্যেক সংখ্যায় প্রত্যেকটি অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 2, 3, 5, 7, 8, 9 দ্বারা তিন অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

5. প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেকটি সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 0, 1, 2, 3, 5, 6 দ্বারা চার অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ সংখ্যা গঠন করা যায়?

6. 1, 2, 3, 5, 6, 7 অঙ্কগুলি প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 5000 ও 6000 এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে ? [ব. '১৩]

7. (i) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 6, 5, 2, 3, 0 দ্বারা পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায় ? [য. '১৩; ঢা.চ.দি. '১১; সি. '১০, '১৩]

   (ii) 5, 3, 2, 6, 0 অঙ্কগুলির প্রত্যেকটি প্রতি সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট কয়টি অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করা যায়? [রা'০৭; ব'০৮]

8. (i) '*Critical*' শব্দটির সব অক্ষর ব্যবহার করে কতগুলি বিন্যাস সংখ্যা পাওয়া যায়?

   (ii) স্বরবর্ণগুলিকে পাশাপাশি না রেখে '*TRIANGLE*' শব্দটির অক্ষরগুলি কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। [চ. '০৭; ব. '১০]

9. (i)'*Second*' শব্দটির অক্ষরগুলি থেকে 1টি স্বরবর্ণ ও 2টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ–এর সংখ্যা নির্ণয় কর, যাতে স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যস্থানে থাকে।

   (ii) '*MILLENNIUM*' শব্দটির অক্ষরগুলি কত প্রকারে সাজানো যায় ? এদের মধ্যে কতগুলিতে প্রথমে ও শেষে '*M*' থাকবে ? [সি. '০৬; '১১]

10. '*Postage*' শব্দটির অক্ষরগুলি কত রকমে সাজানো যায় যেন স্বরবর্ণগুলি জোড় স্থান দখল করে ? শব্দটির অক্ষরগুলি কত প্রকারে সাজানো যায় যাতে ব্যঞ্জনবর্ণগুলি একত্রে থাকবে ?

11. '*Maturity*' শব্দটির সব অক্ষর ব্যবহার করে কত উপায়ে সাজানো যায়? এ উপায়গুলির মধ্যে কয়টির প্রথমে '*M*' থাকবে?

12. একজন বালকের ভিন্ন ভিন্ন আকারের 11টি মার্বেল আছে, যার মধ্যে 5টি কালো ও 6টি সাদা। কালো রঙের মার্বেল মাঝখানে রেখে সে 3টি মার্বেল এক সারিতে কত রকমে সাজাতে পারবে ?

13. (i) '*Parallel*' শব্দটির অক্ষরগুলির সবগুলি একত্রে নিয়ে যত রকমে সাজানো যায় তা বের কর। স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে রেখে অক্ষরগুলি যত রকমে সাজানো যায় তাও নির্ণয় কর। [ঢা. '১৩; দি. রা. '১১; চ. '১২]

    (ii) '*MATHEMATICS*' শব্দটির বর্ণগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা বের কর এবং এদের কতগুলিতে স্বরবর্ণগুলি একত্রে থাকবে ? [ঢা. '০৬; রা. '০৯; কু. ব. য. '১২]

    (iii) '*CHITTAGONG*' শব্দটির বর্ণগুলিকে কতভাবে বিন্যাস করা যায় যখন স্বরবর্ণগুলি একত্রে থাকবে?

    (iv) ব্যঞ্জনবর্ণগুলিকে বিজোড় স্থানে রেখে '*Equation*' শব্দটির অক্ষরগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। [য. '০৮]

14. প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 0, 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলি দ্বারা পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

15. প্রত্যেক সংখ্যায় প্রতিটি অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 5, 1, 7, 0, 4, 3 অঙ্কগুলি দ্বারা ছয় অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে ? এদের মধ্যে কতগুলি সংখ্যায় শতক স্থানে 0 থাকবে?
16. প্রতিটি অঙ্ক যতবার আছে এর বেশি সংখ্যক বার প্রত্যেক সংখ্যায় ব্যবহার না করে 3, 4, 5, 3, 4, 5,6 এর বিজোড় অঙ্কগুলি সব সময় বিজোড় স্থানে রেখে সাত অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় ?
17. অঙ্কগুলির প্রত্যেকটি প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 দ্বারা 1000 অপেক্ষা ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় ?
18. প্রত্যেক সংখ্যায় প্রতিটি অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 অঙ্কগুলি দ্বারা কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়, যাদের প্রথমে ও শেষে জোড় অঙ্ক থাকবে ?
19. 9টি বলের মধ্যে 7টি লাল ও 2টি সাদা। বলগুলিকে এক সারিতে কত রকমে সাজানো যায়। দুইটি সাদা বল পাশাপাশি না রেখে বলগুলিকে যত প্রকারে সারিতে সাজানো যায় তাও নির্ণয় কর।
20. (a) প্রমাণ কর যে, *'America'* শব্দটির বর্ণগুলি একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায়, *'Calcutta'* শব্দটির বর্ণগুলি একত্রে নিয়ে তার দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায়। [রা. '১৩]

(b) প্রমাণ কর যে, *'AMERICA'* শব্দটির বিন্যাস সংখ্যা, *'CANADA'* শব্দটির বিন্যাস সংখ্যার 21 গুণ।

(c) দেখাও যে, *'Rajshahi'* শব্দটির অক্ষরগুলির একত্রে বিন্যাস সংখ্যা, *'Barisal'* শব্দটির অক্ষরগুলির একত্রে বিন্যাস সংখ্যার চার গুণ। [ঢা. '০৮; রা. '১২]

21. নিচের শব্দগুলির প্রত্যেকের সব অক্ষর ব্যবহার করে যতগুলি বিন্যাস সংখ্যা পাওয়া যায় তা নির্ণয় কর ঃ
    (i) *Cricket* (ii) *Chittagong* (iii) *Application*
22. *'Engineering'* শব্দটির সব কটি বর্ণকে কত প্রকারে বিভিন্ন রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। তাদের কতগুলিতে '*e*' তিনটি একত্রে স্থান দখল করবে এবং কতগুলিতে এরা প্রথম স্থান দখল করবে?
23. 8 টি ভিন্ন ভিন্ন জিনিসকে এক সারিতে কত রকমে সাজানো যেতে পারে যেন (i) দুইটি বিশেষ জিনিস একত্রে থাকে; এবং (ii) দুইটি বিশেষ জিনিস প্রতি সাজানো ব্যবস্থায় একত্রে না থাকে ?
24. দুইজন কলা বিভাগের ছাত্রকে একত্রে না বসিয়ে 5 জন বিজ্ঞানের ছাত্র ও 5 জন কলা বিভাগের ছাত্র কত রকমে একটি গোল টেবিলের পাশে আসন নিতে পারে ? [ঢা. '১২]
25. স্বরবর্ণগুলির (i) ক্রম *(Order)* পরিবর্তন না করে, (ii) স্থান পরিবর্তন না করে এবং (iii) স্বরবর্ণের ও ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থানের *(Relative position)* পরিবর্তন না করে *'Director'* শব্দটির অক্ষরগুলিকে যত প্রকারে পুনরায় সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর।
26. একজন প্রফেসরের পদের জন্য 3 জন প্রার্থী। 5 জন লোকের ভোটে একজন নির্বাচিত হবেন। কত প্রকারে তাঁরা ভোট দিতে পারবেন? [রা. '১০]
27. *'Permutation'* শব্দটির বর্ণগুলির মধ্যে স্বরবর্ণের অবস্থান পরিবর্তন না করে বর্ণগুলিকে কত রকমে পুনরায় সাজানো যেতে পারে? [দি. '১৩]
28. প্রত্যেক অঙ্ক প্রতিটি সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 0, 5, 6, 7, 8, 9 দ্বারা তিন অঙ্কের বেশি নয়, এরূপ যতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় তা নির্ণয় কর।
29. একজন বালকের ভিন্ন ভিন্ন আকারের 1টি সাদা, 2টি লাল এবং 3টি সবুজ মার্বেল আছে। এদের মধ্য থেকে প্রতিবারে 4টি মার্বেল নিয়ে একটির উপর আর একটি মার্বেল সাজালে কাজটি সে কত সংখ্যক উপায়ে করতে পারবে ?
30. *'Immediate'* শব্দটির অক্ষরগুলি কত প্রকারে সাজানো যায়? এদের মধ্যে কতগুলিতে প্রথমে t এবং শেষে a থাকবে?
31. স্বরবর্ণগুলি কেবল বিজোড় স্থানে রেখে *'Article'* শব্দটির অক্ষরগুলি যত উপায়ে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। [ঢা. '১০]

32. কোনো সংখ্যায় কোনো অঙ্কের পুনরাবৃত্তি না করে 0, 1, 3, 5, 6 অঙ্কগুলি দ্বারা 3000 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং চার অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

33. (i) টেলিফোন ডায়ালে 0 হতে 9 পর্যন্ত লেখা থাকে। যদি কক্সবাজার শহরের টেলিফোনগুলি 5 অঙ্কবিশিষ্ট হয়, তবে ঐ শহরে কত টেলিফোন সংযোগ দেয়া যাবে ? [রা. '০৯]
(ii) 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলির প্রত্যেকটিকে যে কোনো সংখ্যক বার নিয়ে তিন অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়? এদের কতগুলিতে দুইটি বা তিনটি একই অঙ্ক থাকবে?

34. '*Security*' শব্দটির অক্ষরগুলি কত উপায়ে সাজানো যায় যেন স্বরবর্ণগুলি একত্রে না থাকে?

35. 6টি সবুজ, 5টি কালো এবং 2টি লাল কাউন্টার এক সারিতে কত উপায়ে সাজানো যায়? এ ব্যবস্থার কতটিতে দুইটি লাল কাউন্টার একত্রে থাকবে না?

36. প্রত্যেকবার সব অক্ষর নিয়ে এবং স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে রেখে '*Aluminium*' শব্দটির অক্ষরগুলি থেকে মোট কয়টি বিন্যাস সংখ্যা পাওয়া যাবে?

37. 9টি অক্ষর আছে যাদের মধ্যে কতগুলি এক জাতীয় এবং বাকিগুলি ভিন্ন ভিন্ন। যদি সবগুলি অক্ষর একত্রে নিয়ে 3024 উপায়ে সাজানো যায়, তবে একজাতীয় বর্ণ কতগুলি?

38. একটি লাইব্রেরীতে একই লেখকের বীজগণিতের ৬ টি বই, দুইজন লেখকের প্রত্যেকের জ্যামিতির 5 টি বই, তিনজন লেখকের প্রত্যেকের বলবিদ্যার 3 টি বই এবং ৪ জন লেখকের ইংরেজির 1টি করে বই আছে। সবগুলি বই একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে?

সমাবেশ সংখ্যা ঃ

5.5. সমাবেশ

তিনজন লোক M_1, M_2, M_3 থেকে দুইজন করে নিয়ে দল গঠন করলে সম্ভাব্য দলগুলি
$M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3.$
আবার তিনজনের সবাইকে নিয়ে দল গঠন করলে সম্ভাব্য দলটি হবে $M_1M_2M_3$.
সম্ভাব্য দলগুলির প্রত্যেকটিকে বলা হয় এক একটি সমাবেশ ***(Combination).***

নির্দিষ্ট সংখ্যক জিনিস থেকে কয়েকটি বা সবকয়টি একবারে নিয়ে যত প্রকারে নির্বাচন বা দল (ক্রম বর্জন করে) গঠন করা যায় তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সমাবেশ বলা হয়।

n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে প্রাপ্ত সমাবেশ সংখ্যাকে সংক্ষেপে সাধারণত ^nC_r বা , $_nC_r$ বা, $C(n,r)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ : কোনো দেশের টেনিস খেলোয়াড়দের মধ্যে ক, খ ও গ নামের তিনজন ভাল খেলোয়াড়। ক, খ, গ এর মধ্য থেকে দুইজন করে নিয়ে কয়টি ভিন্ন ভিন্ন দল গঠন করা যায় ?

সমাধান ঃ আমরা সহজেই বলতে পারি দলগুলি হল ঃ কখ, কগ, খগ।

অর্থাৎ , মোট দলের সংখ্যা = 3.

আসলে এখানে তিনটি জিনিস (খেলোয়াড়) থেকে দুইটি করে নিয়ে দল গঠন করা হয়েছে। অথবা, বলা যায় তিনটি থেকে দুইটি নির্বাচন করা হয়েছে।

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, সমাবেশ সংখ্যা = 3.

সমাবেশ ও বিন্যাস সংখ্যার মধ্যে সম্পর্ক :

মনে করি, চারটি অক্ষর a, b, c, d দেয়া আছে। এ চারটি অক্ষর থেকে প্রত্যেকবার দুইটি করে নিয়ে সাজালে আমরা পাই

$ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc.$

সুতরাং 4 টি থেকে প্রত্যেকবার 2টি করে নিয়ে অক্ষরগুলি 12 উপায়ে সাজানো যায়। অর্থাৎ সংজ্ঞানুসারে
$^4P_2 = 12.$

লক্ষ করি : (i) ab ও ba এর উভয়ের মধ্যেই দুইটি অক্ষর a ও b আছে। ক্রম *(order)* অনুসারে এরা বিভিন্ন। অর্থাৎ সারিতে সাজানোর সময় ক্রমেরও বিবেচনা করতে হয়। তদ্রূপ (ac, ca), (ad, da) ইত্যাদি পরস্পর বিভিন্ন।

এখন 4টি অক্ষর থেকে দুইটি করে নিয়ে দল গঠন করলে আমরা পাই (a ও b), (a ও c), (a ও d), (b ও c), (b ও d) এবং (c ও d).

সুতরাং, 4টি থেকে প্রত্যেকবার 2টি করে নিয়ে 6টি দল গঠন করা যায়। অর্থাৎ সংজ্ঞানুসারে, $^4C_2 = 6$.

(ii) ab এবং ba দুইটি ভিন্ন দল নয়। অর্থাৎ দল গঠনের সময় ক্রমকে উপেক্ষা করা হয়।

তাহলে, দেখা যায় যদি প্রত্যেক দলে অর্থাৎ সমাবেশে 2টি ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থাকে, তবে প্রত্যেকটি সমাবেশ থেকে 2 ! সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়। যেমন,

$^4P_2 = 12 = 6 \times 2\,! = {}^4C_2 \times 2\,!$.

তদ্রূপ $^4P_3 = {}^4C_3 \times 3\,!$, $^5P_2 = {}^5C_2 \times 2\,!$ ইত্যাদি।

সাধারণভাবে, $^nP_r = {}^nC_r \times r\,!$.

5.7. সমাবেশ সংখ্যা

প্রত্যেকটি জিনিস ভিন্ন ভিন্ন হলে, ^nC_r অর্থাৎ n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা নির্ণয় করা (যেখানে n এবং r এর উভয়ে ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $n \geq r$).

মনে করি, n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেক বার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যাকে ^nC_r দ্বারা সূচিত করা হল।

এখন প্রত্যেক সমাবেশে r সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস আছে, যাদেরকে $r\,!$ উপায়ে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায়। অর্থাৎ একটি সমাবেশ থেকে $r\,!$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়। অতএব, ^nC_r থেকে $^nC_r \times r\,!$ সংখ্যক বিন্যাস পাই।

আবার n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেকবারে r সংখ্যক জিনিস নিলে বিন্যাস সংখ্যা ^nP_r .

$\therefore\ {}^nC_r \times r\,! = {}^nP_r$

বা, $^nC_r \times r\,! = \dfrac{n\,!}{(n-r)\,!}$ [অনুচ্ছেদ 6.3 এর অনুসিদ্ধান্ত 2 থেকে]

$\therefore\ {}^nC_r = \dfrac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}$ [যেখানে $n \in N$, $r \in N$ এবং $n \geq r$]

অনুসিদ্ধান্ত : n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে সবগুলি একত্রে নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা, অর্থাৎ

$^nC_n = \dfrac{n\,!}{n\,!\,(n-n)\,!}$ [উপরের সূত্র থেকে] $= \dfrac{n\,!}{n\,!\,0\,!} = 1$. [$\because 0\,! = 1$]

বিকল্প পদ্ধতি :

n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিসকে ভিন্ন ভিন্ন অক্ষর $a, b, c, d, \ldots\ldots$ দ্বারা সূচিত করা হল। ^nC_r সমাবেশগুলির মধ্যে যে সব সমাবেশে a সব সময় থাকবে তাদের সংখ্যা $^{n-1}C_{r-1}$. কারণ a কে বাদ দিয়ে বাকি $(n-1)$ সংখ্যক অক্ষর থেকে প্রত্যেকবার $(r-1)$ সংখ্যক অক্ষর নিয়ে $^{n-1}C_{r-1}$ সংখ্যক সমাবেশের প্রত্যেকটিতে a অন্তর্ভুক্ত করলে ঐ সমাবেশের মোট অক্ষরের সংখ্যা r হবে।

তদ্রূপ যে সব সমাবেশে b, c, d ….. থাকবে,তাদের প্রত্যেকটির সংখ্যা $^{n-1}C_{r-1}$ হবে।

সুতরাং, যদি n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন অক্ষর থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক অক্ষর নিয়ে সবগুলি সমাবেশ লেখা হয়, তবে প্রত্যেকটি অক্ষর ঐ সমাবেশগুলিতে $^{n-1}C_{r-1}$ সংখ্যক বার থাকবে।

যেহেতু অক্ষরের মোট সংখ্যা n, অতএব লিখিত সমাবেশগুলিতে অক্ষরের সংখ্যা $= n \times {}^{n-1}C_{r-1}$ ....(i)

আবার প্রত্যেকটি সমাবেশে r সংখ্যক অক্ষর আছে। সুতরাং; সমাবেশগুলিতে অর্থাৎ, ^nC_rএ মোট অক্ষরের সংখ্যা $= r \times {^nC_r}$.......(ii)

অতএব, (i) ও (ii) থেকে $r \times {^nC_r} = n \times {^{n-1}C_{r-1}}$

$$\therefore {^nC_r} = \frac{n}{r} \times {^{n-1}C_{r-1}} \text{ .... (1)}$$

অনুরূপভাবে, $^{n-1}C_{r-1} = \frac{n-1}{r-1} \times {^{n-2}C_{r-2}}$ .... (2)

$$^{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2} \times {^{n-3}C_{r-3}} \text{ ...... (3)}$$

....

$$^{n-r+2}C_2 = \frac{n-r+2}{2} \times {^{n-r+1}C_1} \text{.... } (n)$$

(1) থেকে (n) পর্যন্ত সবগুলি একত্রে গুণ করে এবং গুণফলের উভয়পক্ষ থেকে সাধারণ উৎপাদকগুলি বর্জন করে আমরা পাই

$$^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\text{.....}(n-r+2)}{r(r-1)(r-2)\text{.....}2} \times {^{n-r+1}C_r}$$

এখন $^{n-r+1}C_1$ এর অর্থ হল $(n-r+1)$ সংখ্যক জিনিস থেকে প্রত্যেকবার 1টি করে নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা। সুতরাং, $^{n-r+1}C_1 = n-r+1$.

$$\therefore {^nC_r} = \frac{n(n-1)(n-2)\text{....}(n-r+2)(n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\text{.....}(n-r+2)(n-r+1)(n-r)!}{r!(n-r)!}$$ [লব ও হরকে $(n-r)!$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

5.7. সম্পূরক সমাবেশ

আমরা জানি $^4C_1 = \frac{4!}{1!\,3!} = 4$

আবার $^4C_{4-1}$ অর্থাৎ, $^4C_3 = \frac{4!}{3!\,1!} = 4 \quad \therefore {^4C_1} = {^4C_{4-1}}$.

$^4C_1$ এবং $^4C_{4-1}$ কে পরস্পরের সম্পূরক *(Complementary)* বলা হয়।

আমরা পাই $^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ এবং $^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-n+r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

$\therefore {^nC_r} = {^nC_{n-r}}$. সুতরাং, সাধারণভাবে ^nC_r এবং $^nC_{n-r}$ পরস্পরের সম্পূরক।

5.8. সূত্র : $^nC_r + {^nC_{r-1}} = {^{n+1}C_r}$. [দি. '১৩; কু. ব. ঢা. রা. '১২]

প্রমাণঃ $^nC_r + {^nC_{r-1}} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$

$$= \frac{n!}{r.(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!.(n-r+1).(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right\} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \cdot \frac{n+1}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-r+1)!\,r!} = \frac{(n+1)!}{r!\{(n+1)-r\}!} = {^{n+1}C_r}$$

5.9. শর্তাধীন সমাবেশ

***(a)* n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = $^{n-p}C_{r-p}$, যেখানে p সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিস সব সময় থাকবে এবং $p \le r$.**

প্রমাণ : n সংখ্যক জিনিস থেকে নির্দিষ্ট p সংখ্যক জিনিস আলাদা করলে জিনিসের সংখ্যা হয় $(n-p)$.

এখন $(n-p)$ সংখ্যক জিনিস থেকে $(r-p)$ সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = $^{n-p}C_{r-p}$. এ সমাবেশগুলির প্রত্যেকটিতে আলাদা করা p সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিস অন্তর্ভুক্ত করলে প্রত্যেকটি সমাবেশ $(r-p+p)$ বা r সংখ্যক সদস্যবিশিষ্ট হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা = $^{n-p}C_{r-p}$.

***(b)* n সংখ্যক জিনিস থেকে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = $^{n-p}C_r$, যেখানে p সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিস কোনো সমাবেশে অন্তর্ভুক্ত থাকবে না এবং $p \le r$.**

প্রমাণ : n সংখ্যক জিনিস থেকে p সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিস আলাদা করলে $(n-p)$ সংখ্যক জিনিস থাকে। এখন $(n-p)$ সংখ্যক জিনিস থেকে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = $^{n-p}C_r$. এ সমাবেশগুলির কোনোটিতে p সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকবে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা = $^{n-p}C_r$.

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর যে, $^6C_4 + {}^6C_3 + {}^7C_3 = 70$.

সমাধান : $^6C_4 + {}^6C_3 + {}^7C_3$

$= {}^7C_4 + {}^7C_3 \qquad [\because {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r]$

$= {}^8C_4 = 70.$

উদাহরণ 2. 16 বাহুবিশিষ্ট একটি বহুভুজের কৌণিক বিন্দুর সংযোগ রেখা দ্বারা কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যায় ? এ বহুভুজের কতগুলি কর্ণ আছে ?

সমাধান : বহুভুজের 16টি কৌণিক বিন্দু আছে। বহুভুজটির কৌণিক বিন্দুগুলির যে কোনো তিনটি বিন্দু দ্বারা একটি ত্রিভুজ গঠিত হয়। এ 3টি বিন্দু $^{16}C_3$ সংখ্যক উপায়ে নির্বাচন করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজের সংখ্যা = $^{16}C_3 = 560$.

আবার 16টি বিন্দুর যে কোনো 2টি নিয়ে যোগ করলে একটি রেখা পাওয়া যায়।

$\therefore$ রেখার মোট সংখ্যা = $^{16}C_2 = 120$.

কিন্তু এ রেখাগুলির মধ্যে 16টি রেখা বহুভুজের বাহু।

$\therefore$ নির্ণেয় কর্ণের সংখ্যা = $120 - 16 = 104$.

উদাহরণ 3. 16 জন ক্রিকেট খেলোয়াড়ের মধ্যে 5 জন ভাল বোলার, 3 জন উইকেটরক্ষক এবং বাকি কয়জন সাধারণ মানের বোলার হলেও উইকেটরক্ষক নন। এদের মধ্য থেকে 11 জন খেলোয়াড় নিয়ে কয়টি দল গঠন করা যায় যাতে কমপক্ষে 4 জন ভাল বোলার ও 2 জন উইকেটরক্ষক থাকবে ?

সমাধান : একটি দল গঠন করতে সম্ভাব্য নির্বাচন হবে নিম্নরূপঃ

	ভাল বোলার (5)	উইকেটরক্ষক (3)	অন্যান্য (8)
(a)	4	2	5
(b)	4	3	4
(c)	5	2	4
(d)	5	3	3

(a) এর জন্য ভাল বোলার, উইকেটরক্ষক ও অন্যান্য খেলোয়ার নির্বাচন করা যায় যথাক্রমে $^5C_4$, $^3C_2$, $^8C_5$ উপায়ে।

$\therefore$ (a) এর জন্য নির্বাচনের উপায়ের মোট সংখ্যা $= {}^5C_4 \times {}^3C_2 \times {}^8C_5$ [অনুচ্ছেদ 5.1]
$= 840$

অর্থাৎ 4 জন ভাল বোলার, 2 জন উইকেটরক্ষক ও $(11 - 4 - 2)$ বা 5 জন অন্যান্য খেলোয়াড় নিয়ে 840 টি সম্ভাব্য দল গঠন করা যায়।

তদ্রূপ (b) এর জন্য $({}^5C_4 \times {}^3C_3 \times {}^8C_4)$, বা 350 টি দল;

(c) এর জন্য $({}^5C_5 \times {}^3C_2 \times {}^8C_4)$, বা 210 টি দল;

(d) এর জন্য $({}^5C_5 \times {}^3C_3 \times {}^8C_3)$, বা 56টি দল।

$\therefore$ নির্ণেয় দলের সংখ্যা $= 840 + 350 + 210 + 56 = 1456$.

উদাহরণ 4. 12 জন ছাত্রের মধ্য থেকে 3টি কমিটি (প্রত্যেক কমিটিতে 4 জন ছাত্র নিয়ে) গঠন করতে হবে। কত উপায়ে ঐ কমিটিগুলি গঠন করা যায় ?

সমাধান : 12 জন ছাত্রের মধ্য থেকে 4 জন নিয়ে প্রথম কমিটি $^{12}C_4$ উপায়ে গঠন করা যায়। প্রথম কমিটি গঠন করার পর দ্বিতীয় কমিটি $(12 - 4)$ জন বা 8 জন ছাত্রের মধ্য থেকে $^8C_4$ উপায়ে গঠন করা যায়। আবার প্রত্যেকটি প্রথম কমিটির প্রেক্ষিতে দ্বিতীয় কমিটির সংখ্যা $^8C_4$. অতএব প্রথম ও দ্বিতীয় কমিটি $^{12}C_4 \times {}^8C_4$ উপায়ে গঠন করা যেতে পারে।

$^{12}C_4 \times {}^8C_4$ উপায়ে প্রথম ও দ্বিতীয় কমিটি গঠনের একটি উপায়ের প্রেক্ষিতে অবশিষ্ট $(12 - 8)$ জন বা 4 জন ছাত্রের মধ্য থেকে তৃতীয় কমিটি $^4C_4$ বা 1 উপায়ে গঠন করা যায়।

$\therefore$ তিনটি কমিটি গঠনের মোট উপায় (*Total number of ways*) $= {}^{12}C_4 \times {}^8C_4 \times 1$
$= 495 \times 70 \times 1 = 34650$.

উদাহরণ 5. '*Permutations*' শব্দটির বর্ণগুলি থেকে 1টি স্বরবর্ণ ও 2টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা সম্ভব যেন স্বরবর্ণটি সব সময় মাঝখানে থাকে ?

সমাধান : '*Permutations*' শব্দের ব্যঞ্জনবর্ণগুলি ও স্বরবর্ণগুলি হচ্ছে যথাক্রমে (p, r, m, t, t, n, s) এবং (e, u, a, i, o).

এখানে একটি 't' বাদ দিয়ে বাকি 6টি ব্যঞ্জনবর্ণ (প্রত্যেকে ভিন্ন) থেকে 2টি করে নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা
$= {}^6C_2 = 15$

আবার 5টি স্বরবর্ণ থেকে 1টি করে নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা $= {}^5C_1 = 5$

$\therefore$ সব বর্ণ নিয়ে 3টি বর্ণের (2টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 1টি স্বরবর্ণ) মোট সমাবেশ সংখ্যা $= 15 \times 5 = 75$.

এখন প্রত্যেকটি সমাবেশের বর্ণগুলি সাজালে শব্দ গঠিত হবে। শর্তানুযায়ী স্বরবর্ণটি মাঝখানে থাকবে। সুতরাং ব্যঞ্জনবর্ণ দুইটি নিজেদের মধ্যে $^2P_2$ বা, 2 উপায়ে সাজানো যায়।

$\therefore$ শব্দের মোট সংখ্যা $= 75 \times 2 = 150$.

আবার ব্যঞ্জনবর্ণগুলি থেকে 2টি 't' ও স্বরবর্ণ থেকে 1টি নিয়েও শব্দ গঠন করা যায়।

$\therefore$ 2টি 't' ও 1টি স্বরবর্ণ সম্বলিত শব্দের সংখ্যা

$= {}^2C_2 \times {}^5C_1 \times 1$ {$\because$ 2 টি 't' নিজেদের মধ্যে 1 উপায়ে সাজানো যায়}
$= 1 \times 5 \times 1 = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দের মোট সংখ্যা $= 150 + 5 = 155$.

মন্তব্য : এখানে শব্দ বলতে আমরা পর পর বর্ণ বসানোকে একটি শব্দ ধরে নিয়েছি। আসলে শব্দের সংজ্ঞা আলাদা।

প্রশ্নমালা 5.2

1. (i) ${}^nC_5 = {}^nC_7$ হলে, ${}^nC_{11}$ এর মান নির্ণয় কর।

   (ii) প্রমাণ কর যে, ${}^8C_8 + {}^8C_7 + {}^9C_7 + {}^{10}C_7 = {}^{11}C_8$.

   (iii) ${}^nC_2 = \frac{2}{5} \times {}^nC_4$ হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

   (iv) ${}^nP_r = 240$, ${}^nC_r = 120$ হলে, n ও r এর মান নির্ণয় কর। [চ. '১১]

2. একটি ফুটবল টুর্নামেন্টে 8টি দল অংশগ্রহন করেছে। একক লীগ পদ্ধতিতে খেলা হলে, মোট কতটি খেলা পরিচালনা করতে হবে?

3. 17টি বাহুবিশিষ্ট একটি বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি সংযোগ করে কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যায়?

4. 12 বাহুবিশিষ্ট একটি বহুভুজের কৌণিক বিন্দুর সংযোগ রেখা দ্বারা কতগুলি বিভিন্ন ত্রিভুজ গঠন করা যেতে পারে? এ বহুভুজের কতগুলি কর্ণ আছে ? [সি. '১১]

5. একটি ব্যাংকের পরিচালকমন্ডলিতে 8 জন পুরুষ ও 6 জন মহিলা আছেন। ঐ পরিচালকমন্ডলির সদস্যদের মধ্য থেকে 5 জন পুরুষ ও 3 জন মহিলা সমন্বয়ে কত রকমে একটি সাব–কমিটি গঠন করা যেতে পারে ?

6. (i) প্রমাণ কর যে, কোনো তিনটি বিন্দু সমরেখা নয় এরূপ n সংখ্যক বিন্দু সংযোগ করে $\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)$ সংখ্যক ত্রিভুজ গঠন করা যায়।

   (ii) দেখাও যে, n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি বহুভুজের $\frac{1}{2} n(n-3)$ সংখ্যক কর্ণ আছে। আরও দেখাও যে, এর কৌণিক বিন্দুগুলির সংযোগ রেখা দ্বারা $\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন ত্রিভুজ গঠন করা যেতে পারে। [ঢা . '০৫]

7. 4 জন ভদ্র মহিলাসহ 10 ব্যক্তির মধ্য থেকে 5 জনের একটি কমিটি কত প্রকারে গঠন করা যেতে পারে যেন প্রত্যেক কমিটিতে অন্ততঃপক্ষে 1 জন ভদ্র মহিলা থাকবে? [ব. '০৪]

8. 6 জন অভিজ্ঞ বোলারসহ 14 জন খেলোয়াড়ের মধ্য থেকে 11 জন খেলোয়াড়ের কতগুলি দল গঠন করা যেতে পারে যেন প্রত্যেক দলে কমপক্ষে 5 জন অভিজ্ঞ বোলার থাকে?

9. (i) 6 জন ও 8 জন খেলোয়াড়ের দুইটি দল থেকে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি ক্রিকেট টিম গঠন করতে হবে যাতে 6 জনের দল থেকে কমপক্ষে 4 জন খেলোয়াড় ঐ টিমে থাকবে ? ক্রিকেট টিমটি কত উপায়ে গঠন করা যাবে ? [কু. '০৯]

   (ii) 6 জন গণিত ও 4 জন পদার্থ বিজ্ঞানের ছাত্র থেকে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে যাতে গণিতের ছাত্রদের সংখ্যাগরিষ্ঠতা থাকে। কত প্রকারে কমিটি গঠন করা যায় ? [য. '১২; ব. চ. '১৩]

10. 12টি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ ও 5টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ থেকে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ সমন্বয়ে গঠিত কতগুলি ভিন্ন ভিন্ন শব্দ গঠন করা যায় ? [চ. '১০]

11. একটি ক্লাবের নির্বাহী কমিটিতে 1 জন চেয়ারম্যান, 2 জন ভাইস–চেয়ারম্যান এবং 8 জন সদস্য আছেন। চেয়ারম্যান, 1 জন ভাইস–চেয়ারম্যান এবং 4 জন সদস্য নিয়ে কত উপায়ে সাব–কমিটি গঠন করা যেতে পারে?

12. একটি কলেজের অধ্যাপকের 3টি খালি পদের জন্য 10 জন প্রার্থী আছেন। খালি পদের সংখ্যা অপেক্ষা বেশি নয় এরূপ যে কোনো সংখ্যক প্রার্থীকে নির্বাচিত করা যেতে পারে। কত প্রকারে প্রার্থী নির্বাচন করা যায়? [ঢা. '০৯]

13. একজন পরীক্ষার্থীকে 12টি প্রশ্ন থেকে 6টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। এর মধ্যে তাকে প্রথম 5টি থেকে ঠিক (*Exactly*) 4টি প্রশ্ন বাছাই করতে হবে। সে কত প্রকারে প্রশ্নগুলি বাছাই করতে পারবে ? [ব. '০৭; য. '০৬]

14. গণিতের প্রশ্নপত্রের দুইটি গ্রুপের প্রতি গ্রুপে 5টি করে প্রশ্ন আছে। একজন পরীক্ষার্থীকে 6টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে কিন্তু কোনো গ্রুপ থেকে 4টির বেশি প্রশ্নের উত্তর দিতে পারবে না। পরীক্ষার্থী কত প্রকারে প্রশ্নগুলি বাছাই করতে পারবে? [য. '০৩; সি. '১৩]

15. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 চিহ্নিত আটটি কাউন্টার থেকে কমপক্ষে 1টি বিজোড় ও 1টি জোড় কাউন্টার নিয়ে একবারে 4টি কাউন্টার নিলে সমাবেশ সংখ্যা কত হবে ?

16. (a) দুই জন নির্দিষ্ট বালককে (i) সব সময় অন্তর্ভুক্ত রেখে এবং (ii) সব সময় বাদ দিয়ে, 12 জন বালক থেকে 5 জনকে কত রকমে বাছাই করা যায় ?

(b) 10টি বস্তু থেকে একবারে 5টি নিয়ে প্রাপ্ত বিন্যাসের মধ্যে কতগুলি বিন্যাসে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত থাকবে ? [কু. '১০]

17. 8 জন বালক এবং 2 জন বালিকার মধ্য থেকে বালিকাদের (i) সর্বদা গ্রহণ করে (ii) সর্বদা বর্জন করে 6 জনের একটি কমিটি কত উপায়ে গঠন করা যাবে ?

18. '*Degree*' শব্দটির অক্ষরগুলি থেকে যে কোনো 4টি অক্ষর প্রত্যেকবার নিয়ে কত প্রকারে বাছাই করা যায় ? [রা. '১১; য. '১৩]

19. রহিম ও রফির যথাক্রমে 8টি ও 10টি বই আছে। তারা কত প্রকারে বইগুলি বিনিময় করতে পারবে ? (i) যদি একটির পরিবর্তে একটি (ii) যদি 2টির পরিবর্তে 2টি বই দেয়া হয়।

20. এক ভদ্রলোকের 6 জন বন্ধু আছেন। তিনি কত প্রকারে তাঁর একজন বা একাধিক বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করতে পারেন?

21. '*Cambridge*' শব্দটির বর্ণগুলি থেকে 5টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করলে কতগুলিতে প্রদত্ত শব্দটির সবগুলি স্বরবর্ণ থাকবে? [কু. '০৭]

22. 12টি জিনিসের মধ্যে 2টি এক জাতীয় এবং বাকিগুলি ভিন্ন ভিন্ন জিনিস। ঐ জিনিসগুলি থেকে প্রতিবারে 5টি নিয়ে কত প্রকারে বাছাই করা যায় ?

23. '*Thesis*' শব্দটির অক্ষরগুলি থেকে প্রতিবারে 4টি অক্ষর নিয়ে কত উপায়ে বাছাই করা যেতে পারে ? [য. '১১; ঢা. রা. '১৩; ব. দি. '১২; কু. '১১, '১৩]

24. '*Motherland*' থেকে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ একত্রে কত উপায়ে বাছাই করা যেতে পারে ?

25. 9 জন লোকের একটি দল দুইটি যানবাহনে ভ্রমন করবে। এ যানবাহনের একটিতে 7 জনের বেশি এবং অপরটিতে 4 জনের বেশি ধরে না। দলটি কত রকমে ভ্রমণ করতে পারবে ? [ঢা. য. '১১; সি. কু. '১০]

26. একটি সমতলে 13টি বিন্দু আছে, যাদের মধ্যে 5টি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং বাকিগুলির যে কোনো তিনটি বিন্দু সমরেখ নয়। বিন্দুগুলি সংযোগ করে যতগুলি ভিন্ন সরলরেখা পাওয়া যায়, তা নির্ণয় কর। বিন্দুগুলিকে শীর্ষবিন্দুরূপে ব্যবহার করে কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যায় ?

27. সাতটি ভিন্ন ভিন্ন সরলরেখার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5, 6 ও 7 সেন্টিমিটার। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজ গঠন করতে এদের চারটি সরলরেখা যত প্রকারে বাছাই করা যায় এর মোট সংখ্যা 32. [রা. ব. '১০; দি. চ. '১২]

28. দুইটি ধনাত্মক চিহ্নকে পাশাপাশি না রেখে m সংখ্যক ধনাত্মক ও n সংখ্যক ঋণাত্মক চিহ্ন ($m < n$) যত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

29. কোনো পরীক্ষায় কৃতকার্য হতে 6টি বিষয়ের প্রত্যেকটিতে ন্যূনতম নম্বর পেতে হয়। একজন পরীক্ষার্থী কত প্রকারে অকৃতকার্য হতে পারে?

30. '*America*' শব্দটির বর্ণগুলি থেকে প্রত্যেকবার 3টি বর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায় ? [ব. '১১]

31. È*PROFESSOR*' শব্দটির অক্ষরগুলি হতে প্রতিবার চারটি করে অক্ষর নিয়ে কতভাবে সাজানো যায়? [সি. '০৯]

32. একজন বালকের সাদা, লাল, নীল, হলুদ, বেগুনি ও কালো রঙের প্রত্যেকটির 4টি করে ভিন্ন ভিন্ন আকারের মার্বেল আছে। সে প্রত্যেকবার তিনটি করে মার্বেল পর পর টেবিলে সাজালে মার্বেলগুলি সে কত উপায়ে সাজাতে পারবে ?

33. একটি তালার 3টি রিং-এর প্রত্যেকটিতে 10টি করে অক্ষর মুদ্রিত আছে। তিনটি অক্ষরের কেবল একটি বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা গেলে কতগুলি বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা যাবে না ?

প্রশ্নমালা 5.3

সৃজনশীল প্রশ্ন :

1. '*INTERESTING*' শব্দটির অক্ষরগুলির সব একত্রে নিয়ে
   (a) n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস আছে। $n \in N$ এবং $r \leq n$ হলে, ${}^nP_r$ ও ${}^nC_r$ এর সম্পর্ক লেখ।
   (b) কত প্রকারে সাজানো যায় যেন প্রথমে ও শেষে 'e' থাকে ?
   (c) কত প্রকারে সাজানো যায় যেন স্বরবর্ণগুলি একত্রে থাকে ?
2. 0, 1, 2, 3, 6, 5 অঙ্কগুলি (প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার নিয়ে) থেকে
   (a) কয়টি ছয় অঙ্কবিশিষ্ট অর্থপূর্ণ সংখ্যা পাওয়া যায়?
   (b) কয়টি ছয় অঙ্কবিশিষ্ট অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা পাওয়া যায়?
   (c) কয়টি ছয় অঙ্কবিশিষ্ট অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা পাওয়া যায়?
3. একটি ক্লাবের নির্বাহী কমিটিতে 6 জন ভদ্রলোক ও 5 জন ভদ্রমহিলা আছেন
   (a) 2 জন ভদ্রলোক ও 3 জন ভদ্রমহিলা নিয়ে 5 সদস্যবিশিষ্ট কয়টি উপ কমিটি গঠন করা যায়?
   (b) কমপক্ষে 2 জন ভদ্রমহিলা নিয়ে 5 সদস্যবিশিষ্ট কয়টি উপ কমিটি গঠন করা যায়?
   (c) প্রমাণ কর যে, ${}^mC_6 + {}^mC_5 = {}^{m+1}C_6$.
4. '*THOUSAND*' শব্দটি থেকে
   (a) সব অক্ষরগুলি একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় যেন স্বরবর্ণগুলি একসঙ্গে না থাকে?
   (b) 2টি স্বরবর্ণ ও 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ একত্রে নিয়ে কত উপায়ে বাছাই করা যেতে পারে?
   (c) 2টি স্বরবর্ণ ও 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে অক্ষরগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যায়?

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন :

5. '*ENGINEERING*' শব্দটির '*E*' গুলি একসঙ্গে রেখে সব অক্ষরগুলির বিন্যাস সংখ্যা —
   (a) 25800 (b) 15120
   (c) 277200 (d) 362880
6. '*MOTHERLAND*' শব্দটির সব অক্ষরগুলি একত্রে নিয়ে যত উপায়ে সাজানো যায় যেন স্বরবর্ণগুলি একসঙ্গে না থাকে তা হলো —
   (a) 3628800 (b) 241920
   (c) 3604610 (d) 5040
7. '*PARMANENT*' শব্দটির সব অক্ষরগুলি নিয়ে প্রথমে ও শেষে '*A*' রেখে যত প্রকারে সাজানো যায় তা হলো —
   (a) 360 (b) 2520
   (c) 1260 (d) 9072
8. 1, 2, 4, 5, 6 অঙ্কগুলি নিয়ে 500 থেকে বৃহত্তর কিন্তু 700 থেকে ক্ষুদ্রতর কতগুলি সংখ্যা নির্ণয় করা যায়? (প্রত্যেক সংখ্যায় অঙ্কগুলি কেবল একবার ব্যবহার করে) –
   (a) 12 (b) 24 (c) 36 (d) 48
9. 3, 5, 7, 8, 9 অঙ্কগুলি থেকে 7000 এর চেয়ে বৃহত্তর চার অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়? (প্রত্যেক সংখ্যায় অঙ্কগুলি একবার বা একাধিকবার ব্যবহার করে))
   (a) 625 (b) 192 (c) 375 (d) 64
10. 10টি বইয়ের মধ্যে 4টি বই কত প্রকারে বাছাই করা যায়, যাতে নির্দিষ্ট দুইটি বই সর্বদা বাদ থাকে?
   (a) 210 (b) 70 (c) 45 (d) 28
11. 4 জন বালিকা ও 6 জন বালকের মধ্য থেকে 4 সদস্যবিশিষ্ট কয়টি কমিটি গঠন করা যায় যাতে একজন নির্দিষ্ট বালক সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকে?
   (a) 504 (b) 84 (c) 210 (d) 126

12. ${}^nC_4 + {}^nC_3 = 70$ হলে, n এর মান কত?
(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 4

13. একটি নির্বাহী কমিটিতে 6 জন পুরুষ ও 5 জন মহিলা আছেন। তাদের মধ্য থেকে 4 সদস্যবিশিষ্ট কয়টি উপকমিটি গঠন করা যায় যাতে প্রত্যেক উপ কমিটিতে কমপক্ষে 4 জন মহিলা থাকেন ?
(a) 310 (b) 315
(c) 75 (d) 330

14. 6 জন পুরুষ ও 5 জন মহিলা থেকে 5 জনের কয়টি কমিটি গঠন করা যায় যাতে প্রত্যেক কমিটিতে কমপক্ষে একজন পুরুষ ও একজন মহিলা অন্তর্ভুক্ত থাকে?
(a) 120 (b) 350
(c) 450 (d) 455

15. 'AMERICA" শব্দের সব অক্ষরগুলি থেকে প্রতিবারে 4টি অক্ষর নিয়ে কতভাবে সাজানো যায়?
(a) 840 (b) 1270
(c) 480 (d) 360

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 5.1

1. 15. **2.** 4. **3.** 40320. **4.** 120. **5.** 300. **6.** 60. **7.** **(i)** 36. **(ii)** 60. **8.** **(i)** 10080, **(ii)** 36000. **9.** **(i)** 24 **(ii)** 226800, 5040 **10.** 144, 576. **11.** 20160, 2520. **12.** 450. **13.** **(i)** 3360, 360. **(ii)** $\frac{11!}{2!\,2!\,2!}$; 120960. **(iii)** 60480. **(iv)** 2880. **14.** 36. **15.** 600, 120. **16.** 18. **17.** 154. **18.** 8640. **19.** 36, 28. **21.** **(i)** 2520; **(ii)** 907200; **(iii)** 4989600; **22.** 277200, 15120, 1680. **23.** **(i)** 10080, **(ii)** 30240. **24.** 14400. **25.** **(i)** 3359, **(ii)** 59, **(iii)** 359. **26.** 243. **27.** 359. **28.** 130. **29.** 38. **30.** 45360, 630. **31.** 576. **32.** 72. **33.** **(i)** 100000 **(ii)** 125, 65. **34.** 36000. **35.** 36036, 30492. **36.** 1800. **37.** 5. **38.** $\frac{33!}{6! \times (5!)^2 \times (3!)^3}$.

প্রশ্নমালা 5.2

1. **(i)** 12. **(iii)** 8. **(iv)** $n = 16, r = 2$. **2.** 28. **3.** 680. **4.** 220, 54. **5.** 1120. **7.** 246. **8.** 224. **9.** **(i)** 344, **(ii)** 115. **10.** 264000. **11.** 140. **12.** 175. **13.** 105. **14.** 200. **15.** 68. **16.** **(a)** **(i)** 120, **(ii)** 252. **(b)** 6720. **17.** **(i)** 70 **(ii)** 28. **18.** 7. **19.** **(i)** 80 **(ii)** 1260. **20.** 63. **21.** 1800. **22.** 582. **23.** 11. **24.** 105. **25.** 246. **26.** 69, 276. **28.** $\frac{(n+1)!}{m!\,(n+1-m)!}$. **29.** 63. **30.** 135. **31.** 738. **32.** 216. **33.** 999.

প্রশ্নমালা 5.3

1. **(a)** 2494800; **(b)** 45360; **(c)** 60480. **2.** **(a)** 600; **(b)** 360; **(c)** 288. **3.** **(a)** 6; **(b)** 150; **(c)** 381. **4.** **(a)** 36000; **(b)** 30; **(c)** 10800. **5.** c; **6.** c; **7.** a; **8.** b; **9.** b; **10.** b; **11.** b; **12.** c; **13.** b; **14.** d; **15.** c.

ষষ্ঠ অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
(Trigonometric Ratios)

6. ত্রিকোণমিতি

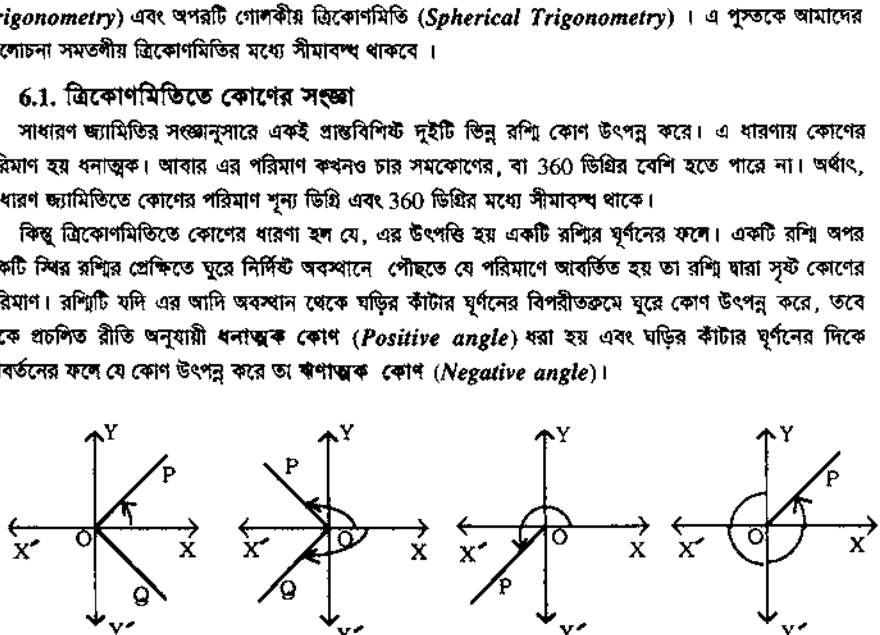
ত্রিকোণমিতির ইংরেজি প্রতিশব্দ "*Trigonometry*". এ শব্দটি গ্রীক ভাষায় ব্যবহৃত হয়। এ শব্দের বিশ্লেষণ করলে ত্রিকোণমিতি বলতে আমরা ঐ বিজ্ঞানকেই বুঝি যার সাহায্যে ত্রিভুজের বিভিন্ন অংশের পরিমাপ করা যায়। গোড়ার দিকে ত্রিকোণমিতি আবিষ্কারের মূল উদ্দেশ্য এর মধ্যেই সীমাবদ্ধ ছিল। কিন্তু নতুন নতুন অনুপাত ও তত্ত্ব আবিষ্কারের ফলে এ বিজ্ঞানের পরিধি হয়েছে ব্যাপক। সুতরাং, আধুনিককালে গণিতের যে কোন শাখায় শিক্ষালাভ করতে হলে ত্রিকোণমিতিতে জ্ঞানার্জন হল অপরিহার্য।

ত্রিকোণমিতিকে দুইটি শাখায় বিভক্ত করা হয়েছে। এদের একটি সমতলীয় ত্রিকোণমিতি (***Plane Trigonometry***) এবং অপরটি গোলকীয় ত্রিকোণমিতি (***Spherical Trigonometry***) । এ পুস্তকে আমাদের আলোচনা সমতলীয় ত্রিকোণমিতির মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে ।

6.1. ত্রিকোণমিতিতে কোণের সংজ্ঞা

সাধারণ জ্যামিতির সংজ্ঞানুসারে একই প্রান্তবিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন রশ্মি কোণ উৎপন্ন করে। এ ধারণায় কোণের পরিমাণ হয় ধনাত্মক। আবার এর পরিমাণ কখনও চার সমকোণের, বা 360 ডিগ্রির বেশি হতে পারে না। অর্থাৎ, সাধারণ জ্যামিতিতে কোণের পরিমাণ শূন্য ডিগ্রি এবং 360 ডিগ্রির মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে।

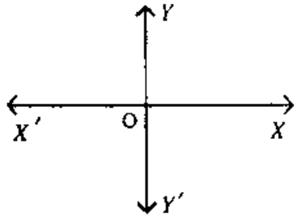
কিন্তু ত্রিকোণমিতিতে কোণের ধারণা হল যে, এর উৎপত্তি হয় একটি রশ্মির ঘূর্ণনের ফলে। একটি রশ্মি অপর একটি স্থির রশ্মির প্রেক্ষিতে ঘুরে নির্দিষ্ট অবস্থানে পৌছতে যে পরিমাণে আবর্তিত হয় তা রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট কোণের পরিমাণ। রশ্মিটি যদি এর আদি অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে কোণ উৎপন্ন করে, তবে একে প্রচলিত রীতি অনুযায়ী **ধনাত্মক কোণ** (***Positive angle***) ধরা হয় এবং ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে আবর্তনের ফলে যে কোণ উৎপন্ন করে তা **ঋণাত্মক কোণ** (***Negative angle***)।



১ম চিত্র ২য় চিত্র ৩য় চিত্র ৪র্থ চিত্র

উপরের চিত্রগুলিতে $\angle XOP$ ধনাত্মক এবং $\angle XOQ$ ঋণাত্মক। চিত্রগুলি থেকে স্পষ্টতঃ বুঝা যায় কোণের পরিমাণ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক এবং 360 ডিগ্রির বেশি হতে পারে না।

6.1.1. চতুর্ভাগ বা চৌকণ (Quadrant) ঃ



পাশের চিত্র লক্ষ করলে দেখা যাবে যে, লম্বভাবে পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সরলরেখা অর্থাৎ অক্ষরেখাদ্বয় দ্বারা সমতলটি চারটি অংশে বিভক্ত হয়েছে। এদের প্রত্যেকটি অংশকে একটি চতুর্ভাগ (কোয়াড্রেন্ট) বলা হয়। সমতলের XOY, YOX', $X'OY'$ এবং $Y'OX$ অংশকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ বলা হয়।

নির্দিষ্ট পরিমাণের কোণ উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মি যে অবস্থানে পৌঁছায় ঐ অবস্থানকে শেষ অবস্থান বলা হয়।

6.2. কোণের ডিগ্রি ও রেডিয়ান পরিমাপ

ত্রিকোণমিতিতে কোণের পরিমাপের জন্য সাধারণত তিন প্রকারের পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। এ পদ্ধতিগুলি ঃ

(ক) **ষাটমূলক পদ্ধতি (*Sexagesimal system*),**

(খ) **শতমূলক পদ্ধতি (*Centesimal system*),**

(গ) **বৃত্তীয় পদ্ধতি (*Circular system*)।**

আমরা কেবল ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতি বিষয়ে আলোচনা করব।

সংজ্ঞানুসারে, সমকোণের পরিমাপ স্থির, বা ধ্রুব (*Constant*)। ত্রিকোণমিতিতে এক সমকোণকে মূল একক ধরা হয়।

(ক) ষাটমূলক পদ্ধতি : এই পদ্ধতিতে সমকোণকে সমান নব্বই অংশে বিভক্ত করলে প্রতি অংশে যে পরিমাপের কোণ পাওয়া যায় তাকে এক ডিগ্রি বলা হয়। প্রতি ডিগ্রিকে ষাট ভাগে বিভক্ত করলে এক অংশকে বলা হয় এক মিনিট। আবার প্রতি মিনিটকে সমান ষাট ভাগে বিভক্ত করলে এক অংশকে বলা হয় এক সেকেন্ড। সুতরাং, আমরা পাই, এক সমকোণ $= 90°$ (নব্বই ডিগ্রি), $1° = 60'$ (ষাট মিনিট), $1' = 60''$ (ষাট সেকেন্ড)

(খ) বৃত্তীয় পদ্ধতি : গণিতের অন্যান্য শাখার পুস্তকে এই পদ্ধতির ব্যবহারই সাধারণত করা হয়। এই পদ্ধতিতে মূল একক হলো এক রেডিয়ান। 1^c প্রতীকের মাধ্যমে এক রেডিয়ান প্রকাশ করা হয়। যেকোনো বৃত্তের **ব্যাসার্ধের সমান বৃত্তচাপ এর কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে বলা হয় এক রেডিয়ান।** রেডিয়ান একটি ধ্রুবক (*Constant*) কোণ।

কোণের ডিগ্রি ও রেডিয়ান পরিমাপের মধ্যে সম্পর্ক :

ষাটমূলক পদ্ধতিতে 1 সমকোণ $= 90°$ বা, 2 সমকোণ $= 180°$.

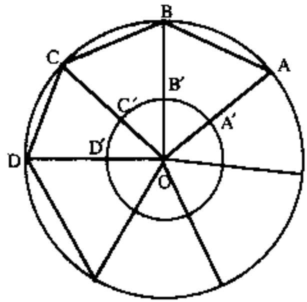
বৃত্তীয় পদ্ধতিতে, $\frac{2}{\pi}$ সমকোণ $= 1$ রেডিয়ান বা, 2 সমকোণ $= \pi$ রেডিয়ান অর্থাৎ, π^c

$\therefore$ 2 সমকোণ $= 180° = \pi^c$ অর্থাৎ, $\pi^c = 180°$.

মন্তব্য ঃ উচ্চতর গণিতশাস্ত্রে কোণের পরিমাপকে সাধারণত রেডিয়ানে ধরা হয় এবং এজন্য এককের উল্লেখ থাকে না। সুতরাং কোনও কোণের পরিমাপকে π দ্বারা নির্দেশ করলে বুঝতে হবে যে, ঐ কোণের পরিমাপ হলো π রেডিয়ান ; অর্থাৎ ডিগ্রিতে প্রকাশ করলে $180°$ হয়। কিন্তু মনে রাখতে হবে π হল একটি ধ্রুব সংখ্যা যার আসন্ন মানকে $\frac{22}{7}$ বা 3.14159 (পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত) ধরা হয়।

6.2.1. উপপাদ্য : যেকোনো বৃত্তের পরিধি ও এর ব্যাসের অনুপাত হলো ধ্রুবক।

প্রমাণ : মনে করি, O হলো দুইটি বৃত্তের সাধারণ কেন্দ্র। বড় বৃত্তটিতে n সংখ্যক সমান বাহুবিশিষ্ট ABC ..... বহুভুজ অঙ্কন করি। $OA, OB, OC, OD,$ .... যোগ করি। এই রেখাগুলি ছোট বৃত্তটিকে যথাক্রমে $A', B', C', D',$ ..... বিন্দুতে ছেদ করল। এখন $AB, BC, CD,$ ..... যোগ করি। তাহলে $A'B'C'D'$... ক্ষেত্রটি ছোট বৃত্তে অন্তর্লিখিত n সংখ্যক সমান বাহুবিশিষ্ট বহুভুজ হবে।



তাহলে,

$OA = OB$ (বড় বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ)

এবং $OA' = OB'$ (ছোট বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ)

সুতরাং, $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$ এবং AOB কোণটি OAB এবং $OA'B'$ ত্রিভুজদ্বয়ের সাধারণ কোণ। অতএব, OAB এবং $OA'B'$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'} \quad \text{বা, } \frac{n.AB}{n.A¢B¢} = \frac{OA}{OA¢}$$

$$\text{বা, } \frac{n.AB}{OA} = \frac{n.A'B'}{OA'}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{\text{বড় বৃত্তে অন্তর্লিখিত বহুভুজের পরিসীমা}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$$

$$= \frac{\text{ছোট বৃত্তের অন্তর্লিখিত বহুভুজের পরিসীমা}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাসার্ধ}} \quad ..... \text{(i)}$$

এখন, বহুভুজের বাহুসংখ্যা, n যতই বেশি হবে, AB এবং অন্যান্য বাহুর দৈর্ঘ্য ততই ছোট হবে। এভাবে যদি n এর মানকে অসীম পর্যন্ত বাড়ানো হয়, তবে উভয় বহুভুজের বাহুগুলি বৃত্তের পরিধির উপর সমাপাতিত হবে। অতএব, এক্ষেত্রে (i) নং হতে পাওয়া যায় :

$$\frac{\text{বড় বৃত্তের পরিধি}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাসার্ধ}} = \frac{\text{ছোট বৃত্তের পরিধি}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$$

$$\text{বা, } \frac{\text{বড় বৃত্তের পরিধি}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাস}} = \frac{\text{ছোট বৃত্তের পরিধি}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাস}}$$

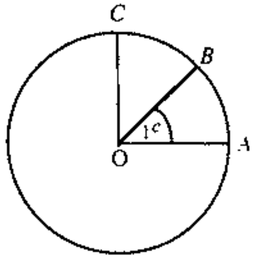
$$\therefore \frac{\text{কোনো বৃত্তের পরিধি}}{\text{এর ব্যাস}} = \text{ধ্রুবক} \quad ..... \text{(ii)}$$

এই ধ্রুবককে π দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অধিকাংশ গণিতশাস্ত্রবিদ 500 দশমিক স্থান পর্যন্ত π এর আসন্ন মান নির্ণয় করেছেন। সাধারণত এর আসন্ন মানকে (*Approximate value*) ধরা হয় $\frac{22}{7}$ বা, 3.14159 (পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)।

যদি কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধকে r এবং ব্যাসকে d ধরা হয়, তবে (*ii*) নং থেকে পাই,

$$\frac{\text{পরিধি}}{d} = \pi \text{ বা, পরিধি } = \pi d = 2\pi r.$$

6.2.2. রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ



O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এর সমান AB বৃত্তচাপ চিহ্নিত করি। তাহলে, সংজ্ঞানুযায়ী

$\angle AOB = 1^c$.

OA সরলরেখার উপর OC লম্ব আঁকি। তাহলে, $\angle AOC =$ এক সমকোণ এবং বৃত্তচাপ $AC =$ বৃত্তের পরিধির এক চতুর্থাংশ $= \frac{1}{4}. 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$.

সাধারণ জ্যামিতি হতে আমরা জানি যে, একটি বৃত্তচাপ দ্বারা সৃষ্ট কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তচাপটির সমানুপাতিক।

সুতরাং, $\frac{\angle AOB}{\text{বৃত্তচাপ } AB} = \frac{\angle AOC}{\text{বৃত্তচাপ } AC}$

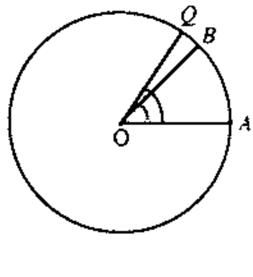
বা, $\frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{\text{বৃত্তচাপ } AB}{\text{বৃত্তচাপ } AC} = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}}$

বা, $\frac{\text{এক রেডিয়ান}}{\text{এক সমকোণ}} = \frac{2}{\pi}$ বা, এক রেডিয়ান $= \frac{2}{\pi} \times$ এক সমকোণ

সুতরাং, এক রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ, কারণ π এবং এক সমকোণের মান ধ্রুবক।

6.3. রেডিয়ান পরিমাপে বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য ও বৃত্তকলার ক্ষেত্রফলের সূত্র

বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য :



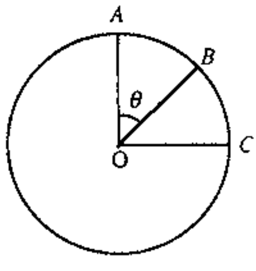
মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং বৃত্তটির AQ চাপ এর কেন্দ্রে $\angle AOQ = \theta$ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে। যদি $\angle AOB = 1^c$ রেডিয়ান হয়, তাহলে

$$\frac{\angle AOQ}{AQ \text{ চাপ}} = \frac{\angle AOB}{AB \text{ চাপ}}$$

বা, $\frac{\angle AOQ}{AQ \text{ চাপ}} = \frac{1 \text{ রেডিয়ান}}{r}$

$\therefore AQ$ চাপ $= r\theta$.

বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল :



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r একক এবং বৃত্তটির AB চাপ এর কেন্দ্রে θ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে। OA রেখাংশের উপর লম্ব OC রেখাংশ অঙ্কন করি। তাহলে,

$$\frac{\text{বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\angle AOB} = \frac{\text{বৃত্তকলা } AOC \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\angle AOC}$$

বা, $\frac{\text{বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা } AOC \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\theta}{\pi}$

$\therefore$ বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{2\theta}{\pi} \times \dfrac{1}{4}\pi r^2$ বর্গ একক

$= \dfrac{1}{2} r^2\theta$ বর্গ একক, যেখানে θ রেডিয়ান পরিমাপে

[$\because$ বৃত্তকলা ক্ষেত্র $= \dfrac{1}{4} \times$ বৃত্তক্ষেত্র এবং বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$.]

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর প্রগমণ শ্রেণিভুক্ত। এর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ দুইটিকে যথাক্রমে রেডিয়ান ও ডিগ্রীতে প্রকাশ করলে এদের অনুপাত হয় $\pi : 90$; কোণগুলির পরিমাপকে রেডিয়ানে নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, কোণগুলি হলো $(\alpha - \beta)^c, \alpha^c, (\alpha + \beta)^c$

যেহেতু ত্রিভুজের কোণগুলির সমষ্টি = 2 সমকোণ = π^c, সুতরাং,

$(\alpha - \beta) + \alpha + (\alpha + \beta) = \pi$ বা, $3\alpha = \pi \quad \therefore \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

আবার ক্ষুদ্রতম কোণ $= (\alpha - \beta)^c = (\alpha - \beta) \times \dfrac{180}{\pi}$ ডিগ্রি

এখন শর্তানুসারে, $(\alpha + \beta) : \dfrac{(\alpha - \beta)180}{\pi} = \pi : 90$

বা, $\dfrac{(\alpha + \beta)\pi}{2(\alpha - \beta)} = \pi$

বা, $\alpha + \beta = 2(\alpha - \beta)$

বা, $3\beta = \alpha = \dfrac{\pi}{3}$ [α এর মান বসিয়ে]

$\therefore \beta = \alpha = \dfrac{\pi}{9}$

সুতরাং কোণগুলি হলো $\dfrac{2\pi^c}{9}, \dfrac{\pi^c}{9}$ এবং $\dfrac{4\pi^c}{9}$.

উদাহরণ 2. একটি বৃত্তচাপ 30 মিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্রে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য এবং চাপটির উপর দণ্ডায়মান বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, $60° = \dfrac{\pi \times 60}{180}$ রেডিয়ান $= \dfrac{\pi}{3}$ রেডিয়ান

যেহেতু বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য, $s = r\theta$, যেখানে θ রেডিয়ান পরিমাপে

$\therefore$ নির্ণেয় চাপের দৈর্ঘ্য $= 30 \times \dfrac{\pi}{3}$ মিটার $= 31.42$ মিটার।

যেহেতু বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} r^2\theta$, যেখানে θ রেডিয়ান পরিমাপে

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \times 30 \times \dfrac{\pi}{3}$ বর্গ মিটার $= 471.24$ বর্গ মিটার

প্রশ্নমালা 6.1

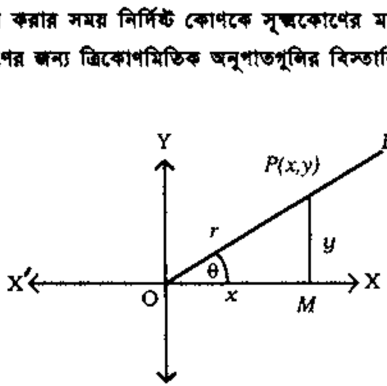
1. দুইটি কোণের যোগফল ও অন্তরফল যথাক্রমে 25^c এবং $35°$ হলে, কোণ দুইটির মান ডিগ্রিতে প্রকাশ কর। $(\pi = 3.1416)$
2. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে $x°$, $25°$ এবং $\frac{11\pi}{36}$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।
3. একটি গাড়ির চাকা 200 বার আবর্তিত হয়ে 800 মিটার অতিক্রম করে। চাকার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।
4. একটি বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে $24°$ কোণ উৎপন্ন করে। যদি বৃত্তের ব্যাস 49 মিটার হয়, তবে বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য এবং এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
5. এক ব্যক্তি বৃত্তাকার পথে ঘণ্টায় 5 কি. মি. গতিবেগে পরিভ্রমণ করে 15 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি ঐ বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $\frac{5\pi}{12}$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।
6. একটি গাড়ি বৃত্তাকার পথে প্রতি সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি চাপটি কেন্দ্রে $28°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং বৃত্তের ব্যাস 60 মিটার হয়, তবে গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

6.4. ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাত

আমরা জানি, একটি রশ্মির ঘূর্ণনের ফলে কোণের উৎপত্তি হয়। নির্দিষ্ট পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মি যে অবস্থানে থাকে তার যে কোন বিন্দু (প্রান্ত বিন্দু ছাড়া) থেকে আদি অবস্থানের উপর লম্ব অঙ্কন করলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যায়। এ ত্রিভুজের তিনটি বাহুর পরিমাপকে পরস্পর ভাগ করলে ছয়টি অনুপাত পাওয়া যায়। এ অনুপাতগুলিকে ত্রিকোণমিতিতে বিশিষ্ট নামে অভিহিত করা হয়।

(a) এখানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির আলোচনা করার সময় নির্দিষ্ট কোণকে সূক্ষ্মকোণের মধ্যে সীমাবদ্ধ রাখা হবে। অবশ্য যেকোনো পরিমাপের কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির বিস্তারিত আলোচনা পরের অনুচ্ছেদে করা হবে।

মনে করি, ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি OX অবস্থান থেকে শুরু করে OB অবস্থানে যেতে যে কোণ উৎপন্ন করেছে তাকে θ দ্বারা সূচিত করা হলো। এখন রশ্মিটির শেষ অবস্থান OB এর O বিন্দু ব্যতীত যে কোন বিন্দু $P(x, y)$ থেকে রশ্মিটির আদি অবস্থান, OX এর উপর PM লম্ব অঙ্কন করলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ POM গঠিত হবে। তাহলে, $OM = x$, $PM = y$.



OP বাহুকে r দ্বারা সূচিত করলে $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

এখন POM ত্রিভুজের বাহুগুলি দ্বারা নিচের অনুপাতগুলি গঠিত হয় :

$\frac{PM}{OP}, \frac{OM}{OP}, \frac{PM}{OM}, \frac{OP}{PM}, \frac{OP}{OM}$ এবং $\frac{OM}{PM}$.

θ কোণের জন্য ত্রিকোণমিতির বিভিন্ন অনুপাতের নামকরণ উপরের অনুপাতগুলি থেকে করা হয়েছে।

$\frac{PM}{OP}$ অনুপাতের নামকরণ করা হয়েছে θ কোণের সাইন (*sine*) অর্থাৎ, $\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{r}$

$\frac{OM}{OP}$ " θ " কোসাইন (*cosine*) অর্থাৎ, $\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r}$

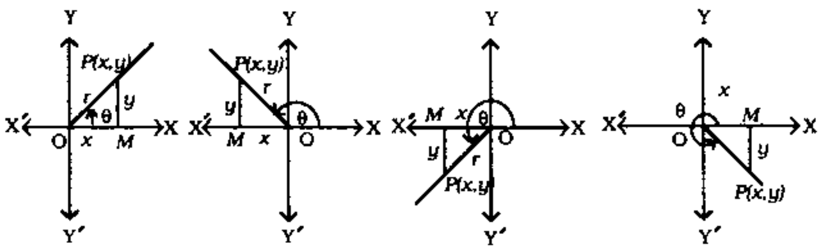
$\frac{PM}{OM}$ " θ " টেনজেন্ট (*tangent*) অর্থাৎ, $\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{x}$

$\frac{OP}{PM}$ " θ " কোসেকেন্ট (*cosecant*) অর্থাৎ, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{r}{y}$

$\frac{OP}{OM}$ θ " সেকেন্ট (*secant*) অর্থাৎ, $\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{r}{x}$

$\frac{OM}{PM}$ " θ " কোটেনজেন্ট (*cotangent*) অর্থাৎ, $\cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{x}{y}$.

(*b*) যেকোনো কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



১ম চিত্র ২য় চিত্র ৩য় চিত্র ৪র্থ চিত্র

মনে করি, XOX' এবং YOY' লম্বভাবে পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সরলরেখা অর্থাৎ স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়। তাহলে, এ দুইটি সরলরেখা দ্বারা সমতলক্ষেত্রটি চারটি চতুর্ভাগে বিভক্ত হয়েছে।

এখন কোণ উৎপন্নকারী একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান, OX থেকে ঘূর্ণন শুরু করে যে কোন পরিমাণের কোণ উৎপন্ন করে এ চারটি চতুর্ভাগের যে কোন একটিতে অবস্থান করবে। ধরি, এ শেষ অবস্থানে পৌঁছতে রশ্মিটি θ কোণ উৎপন্ন করেছে। রশ্মিটির এ শেষ অবস্থান, OP এর যে কোন বিন্দু P থেকে XOX' উপর PM লম্ব অংকন করায় POM সমকোণী ত্রিভুজটি গঠিত হল।

সুতরাং, $\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{x}$.

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{r}{y},\ \sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{r}{x},\ \cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{x}{y}.$$

কিন্তু একেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয়ের সময় প্রচলিত রীতি অনুযায়ী বাহুর চিহ্নের বিবেচনাও করতে হবে। এ প্রচলিত রীতির বিশদ্ আলোচনা পরের অনুচ্ছেদে করা হবে।

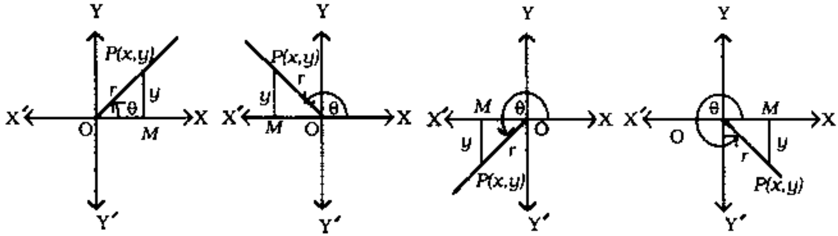
মন্তব্য : উপরের আলোচনায় θ কে অক্ষীয় কোণ ও P বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরা হয়নি। 0°, 90°, 180°, 270°, 360° ইত্যাদি কোণকে অক্ষীয় কোণ বলা হয়।

6.5. চতুর্ভাগ অনুযায়ী ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন (*Signs of trigonometrical ratios*)

লেখচিত্রের মত OX ও OY এর সমান্তরাল দিকে দূরত্ব পরিমাপ করলে ঐ দূরত্বকে ধনাত্মক এবং OX' ও OY' এর সমান্তরাল দিকের দূরত্বের পরিমাপকে ঋণাত্মক ধরা হয়। অবশ্য ব্যাসার্ধ ভেক্টর, OP এর দিকে দূরত্ব পরিমাপ করলে তাকে সব সময় ধনাত্মক বিবেচনা করা হয়।

মনে করি, আদর্শ অবস্থানে কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মির আদি অবস্থান OX ও শেষ অবস্থান OP. তাহলে, $\angle XOP = \theta$. কোণটি অক্ষীয় কোণ এবং P মূলবিন্দু না হলে (অর্থাৎ, আদর্শ অবস্থানে), P বিন্দুটি চারটি চতুর্ভাগের যে কোন একটিতে অবস্থান করবে।

নিচের চারটি চিত্র লক্ষ করি :



১ম চিত্র ২য় চিত্র ৩য় চিত্র ৪র্থ চিত্র

$P(x,y)$ বিন্দু থেকে x- অক্ষের উপর PM লম্ব আঁকি। তাহলে, $OM = x$ এবং $PM = y$.

এখন $OP = r$ ধরা হলে, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r}, \qquad \tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{r}{y}, \quad \sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{r}{x}, \quad \cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{x}{y}.$$

আগেই বলা হয়েছে r এর মান ধনাত্মক, সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির চিহ্ন x ও y এর চিহ্নের উপর নির্ভর করে। চিত্র থেকে আমরা সহজেই x ও y এর চিহ্ন বের করতে পারি। অর্থাৎ চারটি চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির চিহ্ন কি হবে? – তা নির্ণয় করা যায়।

নিচের ছকে অনুপাতগুলোর চিহ্ন দেখানো হলো :

চতুর্ভাগ	x	y	r	$\sin\theta = \frac{y}{r}$	$\cos\theta = \frac{x}{r}$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$
প্রথম	+	+	+	+	+	+
দ্বিতীয়	–	+	+	+	–	–
তৃতীয়	–	–	+	–	–	+
চতুর্থ	+		+	–	+	–

নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি শেষ পর্যায়ে কোন্ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে তা জানতে পারলে শিক্ষার্থীরা পাশের চিত্রের সাহায্যে অতি সহজেই অনুপাতের চিহ্ন নির্ণয় করতে পারবে।

sin, cosec } ধনাত্মক	সব } ধনাত্মক
tan, cot } ধনাত্মক	cos, sec } ধনাত্মক

6.6. ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাতসমূহের মধ্যে সম্পর্ক

অনুচ্ছেদ 6.4 থেকে আমরা পাই,

(i) $\sin\theta = \frac{x}{r}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{x}$

$\therefore$ $\sin\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\frac{r}{x}} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{\frac{x}{r}} = \frac{1}{\sin\theta}$

(ii) $\cos\theta = \frac{y}{r}$ এবং $\sec\theta = \frac{r}{y}$

$\therefore$ $\cos\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\frac{r}{y}} = \frac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\frac{y}{r}} = \frac{1}{\cos\theta}$

(iii) $\sin\theta = \frac{x}{r}$, $\cos\theta = \frac{y}{r}$, $\tan\theta = \frac{x}{y}$, এবং $\cot\theta = \frac{y}{x}$

(iv) অনুচ্ছেদ 6.4 এর চিত্র থেকে, $x^2 + y^2 = r^2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ...... (1)

(v) অনুচ্ছেদ 6.4 এর চিত্র থেকে, $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + 1 = \frac{r^2}{y^2}$ [y^2 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ ...... (1)

আবার x^2 দ্বারা ভাগ করে, $1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$

$\therefore 1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ ...... (3)

অনুসিদ্ধান্ত : (1), (2) এবং (3) সূত্রগুলি থেকে আমরা পাই

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$,

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$, $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$,

$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$, $\operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta$ ইত্যাদি।

মন্তব্য : প্রচলিত রীতি অনুযায়ী $(\sin\theta)^2$ এর পরিবর্তে $\sin^2\theta$ লেখা হয়। অন্যান্য অনুপাতের ক্ষেত্রেও তা প্রযোজ্য।

6.6.1. ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সীমাবদ্ধতা

আমরা জানি, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. যেহেতু বাস্তব সংখ্যার বর্গ সর্বদা অঋণাত্মক, সুতরাং $\sin^2\theta$ এবং $\cos^2\theta$ এর প্রত্যেকটির মান অঋণাত্মক হবে। আবার এদের যোগফল $= 1$. অতএব এদের কোনটির মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না। অর্থাৎ, $\sin\theta$ বা $\cos\theta$ এর মান $+1$ অপেক্ষা বৃহত্তর কিংবা -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না।

তাহলে, θ এর পরিমাণ যত বড় বা ছোটই হয়, $\sin \theta$ বা $\cos \theta$ এর মান $+1$ এবং -1 এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে অর্থাৎ, $(-1 \le \sin \theta \le 1)$ এবং $(-1 \le \cos \theta \le 1)$.

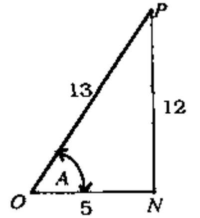
যেহেতু আমরা জানি, $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ এবং $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$; সুতরাং $\sec \theta$ বা $\operatorname{cosec} \theta$ এর মান $+1$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কিংবা -1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না। যেমন, $\sec \theta$ এবং $\operatorname{cosec} \theta$ এর মান $\cdot 3$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\cdot 7$ ইত্যাদি হতে পারে না।

মন্তব্য : $\tan \theta$ বা $\cot \theta$ এর মান $+1$ অপেক্ষা বৃহত্তর বা, -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে।

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. যদি A সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin A = \frac{12}{13}$ হয়, তবে $\cot A$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত শর্তানুসারে OPN সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কন করি।



তাহলে, $y = 12$ এবং $r = 13$.

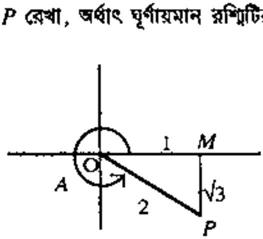
যেহেতু $\sin A = \frac{y}{r}$, সুতরাং, $\angle PON = \angle A$.

$\therefore \; x = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$

সুতরাং, $\cot A = \frac{x}{y} = \frac{5}{12}$.

উদাহরণ 2. যদি A কোণের পরিমাণ 270 ডিগ্রি ও 360 ডিগ্রির মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে এবং $\cos A = \cdot 5$ হয়, তাহলে অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত শর্তানুসারে OPM সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কন করা হয়েছে। যেহেতু কোণের পরিমাণ 270 ডিগ্রি ও 360 ডিগ্রির মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে, সুতরাং OP রেখা, অর্থাৎ ঘূর্ণায়মান রশ্মিটির শেষ অবস্থানটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে।



যেহেতু $\cos A = \cdot 5 = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ চিত্র থেকে আমরা পাই, $OM = 1$ এবং $OP = 2$.

আবার যেহেতু চতুর্থ চতুর্ভাগে PM এর মান ঋণাত্মক, সুতরাং

$PM = -\sqrt{OP^2 - OM^2} = -\sqrt{4-1} = -\sqrt{3}.$

$\therefore \; \sin A = -\sqrt{3}/2$, $\tan A = -\sqrt{3}$, $\operatorname{cosec} A = -2/\sqrt{3}$, $\sec A = 2$ এবং $\cot A = -1/\sqrt{3}$.

উদাহরণ 3. যদি $\tan \theta + \sec \theta = x$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sin \theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

সমাধান : এখানে $\tan \theta + \sec \theta = x$ $\quad \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = x$

$$\Rightarrow \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = x \qquad \Rightarrow \frac{(1 + \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} = x^2 \quad \text{[উভয়পক্ষকে বর্গ করে]}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = x^2 \qquad \therefore \; \sin \theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

উদাহরণ 4. যদি $\cos\alpha + \sec\alpha = \frac{5}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos^n\alpha + \sec^n\alpha = 2^n + 2^{-n}$.

সমাধান : এখানে $\cos\alpha + \sec\alpha = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha - 2) = 0$$

যেহেতু $(\cos\alpha - 2) \neq 0$, $\therefore\ 2\cos\alpha - 1 = 0$, অর্থাৎ, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$$\therefore\ \cos^n\alpha + \sec^n\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n = \frac{1}{2^n} + 2^n = 2^{-n} + 2^n = 2^n + 2^{-n}.$$

উদাহরণ 5. $\cot A + \cot B + \cot C = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(\Sigma \tan A)^2 = \Sigma \tan^2 A$.

সমাধান : আমরা পাই, $(\Sigma \tan A)^2 = (\tan A + \tan B + \tan C)^2$

$$= \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C + 2\tan B\tan C + 2\tan C\tan A + 2\tan A\tan B$$

$$= \Sigma\tan^2 A + 2\tan A\tan B\tan C(\cot A + \cot B + \cot C)$$

$$= \Sigma\tan^2 A + 2\tan A\tan B\tan C \times 0 = \Sigma\tan^2 A.$$

প্রশ্নমালা 6.2

নিচের অভেদাবলীর সত্যতা প্রমাণ কর :

1. $(a\cos x - b\sin x)^2 + (a\sin x + b\cos x)^2 = a^2 + b^2$.
2. $\sec^4 A - \sec^2 A = \tan^4 A + \tan^2 A$.
3. (i) $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$; (ii) $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$.
4. $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$.
5. $\frac{1+(\operatorname{cosec} x\tan y)^2}{1+(\operatorname{cosec} z\tan y)^2} = \frac{1+(\cot x\sin y)^2}{1+(\cot z\sin y)^2}$.
6. $(\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = (1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2$.
7. $\frac{\cos^4 x}{\cos^2 y} + \frac{\sin^4 x}{\sin^2 y} = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos^4 y}{\cos^2 x} + \frac{\sin^4 y}{\sin^2 x} = 1$.
8. যদি $\tan\theta = \frac{a}{b}$ হয়, তবে $\frac{a\sin\theta - b\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।
9. যদি $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
10. যদি $\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = 2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\sin^n\alpha + \operatorname{cosec}^n\alpha = 2$.
11. যদি $\tan\theta + \sin\theta = m$ এবং $\tan\theta - \sin\theta = n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.
12. যদি $\tan^2\theta = 1 - e^2$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sec\theta + \tan^3\theta\operatorname{cosec}\theta = (2-e^2)^{3/2}$.
13. যদি $x\sin^3\alpha + y\cos^3\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$ এবং $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 1$.

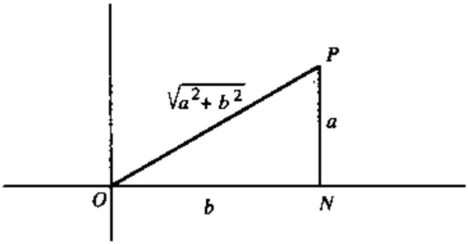
14. যদি $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$.

15. যদি A কোণ $90°$ ও $180°$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে এবং $\sin A = \cdot 8$ হয়, তবে $\tan A$ এর মান নির্ণয় কর।

16. যদি $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ হয়, তবে দেখাও যে, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

17. যদি $\operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec} B + \operatorname{cosec} C = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $(\sum \sin A)^2 = \sum \sin^2 A$.

6.7. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মানের পরিবর্তন



উপরের চিত্র থেকে লক্ষ করি,

যখন $\theta = 0$, $a = 0$. অতএব, $\sin 0 = \frac{0}{b} = 0$, $\cos 0 = \frac{b}{b} = 1$, $\tan 0 = \frac{0}{b} = 0$,

$\cot 0 = \frac{b}{0}$, যা অসংজ্ঞায়িত; $\sec 0 = \frac{b}{b} = 1$ এবং $\operatorname{cosec} 0 = \frac{b}{0}$, যা অসংজ্ঞায়িত।

এখন $[0, 2\pi]$ ব্যবধিতে $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মান নিচের ছকে দেখানো হলো :

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
0	0	1	0	অসংজ্ঞায়িত	1	অসংজ্ঞায়িত
$\frac{\pi}{2}$	1	0	অসংজ্ঞায়িত	0	অসংজ্ঞায়িত	1
π	0	-1	0	অসংজ্ঞায়িত	-1	অসংজ্ঞায়িত
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	অসংজ্ঞায়িত	0	অসংজ্ঞায়িত	-1
2π	0	1	0	অসংজ্ঞায়িত	1	অসংজ্ঞায়িত

উপরের ছকটি সতর্কতাবে পর্যবেক্ষণ করে প্রত্যেক ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মানের পরিবর্তন নিম্নোক্তভাবে দেখানো হলো :

(i) যখন $\theta = 0$, $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, $\tan\theta = 0$, $\cot\theta$ অসংজ্ঞায়িত,

$\sec\theta = 1$, $\operatorname{cosec}\theta$ অসংজ্ঞায়িত।

কিন্তু $\theta \to 0+$ হলে, $\cot\theta \to +\infty$ এবং $\operatorname{cosec}\theta \to +\infty$.

(ii) যখন $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$;

$$0 < \sin\theta < 1$$
$$1 > \cos\theta > 0$$
$$0 < \tan\theta < +\infty \quad [\because \theta \to \tfrac{\pi}{2} - \text{ হলে}, \tan\theta \to +\infty]$$
$$+\infty > \cot\theta > 0$$
$$1 < \sec\theta < +\infty \quad [\because \theta \to \tfrac{\pi}{2} - \text{ হলে}, \sec\theta \to +\infty]$$
$$+\infty > \operatorname{cosec}\theta > 1$$

(iii) যখন $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sin\theta = 1$, $\cos\theta = 0$, $\tan\theta$ অসংজ্ঞায়িত, $\cot\theta = 0$, $\sec\theta$ অসংজ্ঞায়িত এবং $\operatorname{cosec}\theta = 1$.

(iv) যখন $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$;

$$1 > \sin\theta > 0$$
$$0 > \cos\theta > -1$$
$$-\infty < \tan\theta < 0 \quad [\because \theta \to \tfrac{\pi}{2} - \text{ হলে}, \tan\theta \to -\infty]$$
$$0 > \cot\theta > -\infty \quad [\because \theta \to \tfrac{\pi}{2} - \text{ হলে}, \cot\theta \to -\infty]$$
$$-\infty < \sec\theta < -1 \quad [\because \theta \to \tfrac{\pi}{2} - \text{ হলে}, \sec\theta \to -\infty]$$
$$1 < \operatorname{cosec}\theta < +\infty \quad [\because \theta \to \tfrac{\pi}{2} - \text{ হলে}, \operatorname{cosec}\theta \to +\infty]$$

(v) যখন $\theta = \pi$, $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = -1$, $\tan\theta = 0$, $\cot\theta$ অসংজ্ঞায়িত, $\sec\theta = -1$ এবং $\operatorname{cosec}\theta$ অসংজ্ঞায়িত।

(vi) যখন $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$;

$$0 > \sin\theta > -1$$
$$-1 < \cos\theta < 0$$
$$0 < \tan\theta < +\infty \quad [\because \theta \to \tfrac{3\pi}{2} - \text{ হলে}, \tan\theta \to +\infty]$$
$$+\infty > \cot\theta > 0 \quad [\because \theta \to \pi_+ \text{ হলে}, \cot\theta \to +\infty]$$
$$-1 > \sec\theta > -\infty \quad [\because \theta \to \tfrac{3\pi}{2} - \text{ হলে}, \sec\theta \to +\infty]$$
$$-\infty < \operatorname{cosec}\theta < -1. \quad [\because \theta \to \pi_+ \text{ হলে}, \operatorname{cosec}\theta \to -\infty]$$

(vii) যখন $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = -1$, $\cos\theta = 0$, $\tan\theta$ অসংজ্ঞায়িত, $\cot\theta = 0$, $\sec\theta$ অসংজ্ঞায়িত এবং $\operatorname{cosec}\theta = -1$.

(viii) যখন $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$:

$-1 < \sin\theta < 0$

$0 < \cos\theta < 1$

$-\infty < \tan\theta < 0$ $\quad [\because \theta \to \frac{3\pi}{2}+$ হলে, $\tan\theta \to -\infty]$

$0 > \cot\theta > -\infty$ $\quad [\because \theta \to 2\pi\_$ হলে, $\cot\theta \to -\infty]$

$+\infty > \sec\theta > 1$ $\quad [\because \theta \to \frac{3\pi}{2}+$ হলে, $\sec\theta \to +\infty]$

$-1 > \mathrm{cosec}\,\theta > -\infty.$ $\quad [\because \theta \to 2\pi\_$ হলে, $\mathrm{cosec}\,\theta \to -\infty]$

(ix) যখন $\theta = 2\pi$, $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, $\tan\theta = 0$, $\cot\theta$ অসংজ্ঞায়িত, $\sec\theta = 1$ এবং $\mathrm{cosec}\,\theta$ অসংজ্ঞায়িত।

6.8. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র

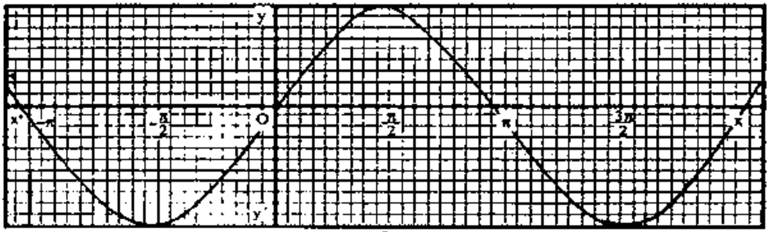
বীজগাণিতিক ফাংশনের মত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনেরও লেখচিত্র অঙ্কন করা যায়। লেখচিত্র অঙ্কন করার নিয়ম সম্পর্কে জ্যামিতিতে বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে লেখচিত্র অঙ্কনের নিয়ম সম্পর্কে অতি প্রয়োজনীয় বিষয়ের উল্লেখ করা হবে মাত্র।

ধরি $y = \sin x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

প্রথমে ছক–কাগজে লম্বভাবে দণ্ডায়মান দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা XOX' এবং YOY' অঙ্কন করি। এরাই যথাক্রমে x –অক্ষ এবং y–অক্ষ।

এখন x এর কয়েকটি সুবিধাজনক মানের জন্য y এর আনুষঙ্গিক মান বের করে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে ছক–কাগজে কয়েকটি বিন্দু স্থাপন করে স্থাপিত বিন্দুগুলি পেন্সিলের সাহায্যে যোগ করলে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যায়। কখনও কখনও নির্দিষ্ট সীমাবদ্ধতার মধ্যে লেখচিত্র অঙ্কন করার জন্য বলা হয়ে থাকে। শিক্ষার্থীদের স্মরণ রাখতে হবে যে, x-স্থানাঙ্কের জন্য এক রকম স্কেল নির্বাচন করলেও y-স্থানাঙ্কের জন্য সুবিধানুযায়ী অন্য রকম স্কেল ব্যবহার করা যায়। সুতরাং, ছক-কাগজের আকার ও লেখচিত্র অঙ্কনের সীমাবদ্ধতার কথা মনে রেখে সুবিধাজনকভাবে স্কেল নির্বাচন করা সম্ভব।

(ক) সাইন ফাংশনের লেখচিত্র



সাইন—লেখচিত্র

মনে করি, $y = \sin x$.

এখানে $x = -180°$ থেকে শুরু করে $x = 360°$ পর্যন্ত x এর কয়েকটি মানের জন্য $y = \sin x$ এর আনুষঙ্গিক মান নেয়া হল। এ মানগুলি নিচের তালিকায় সাজানো হয়েছে।

x	$-180°$	$-150°$	$-120°$	$-90°$	$0°$	$60°$	$90°$	$180°$	$240°$	$360°$
y বা, $\sin x$	0	$-.50$	$-.87$	-1	0	$.87$	1	0	$-.87$	0

স্কেল : x – অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= 10°$; y – অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= 0.1$.

এখন তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি নির্বাচিত স্কেল অনুযায়ী ছক–কাগজে স্থাপন করা হল। বিন্দুগুলি পেন্সিলের সাহায্যে যোগ করলে সাইন–লেখচিত্র পাওয়া যায়। এখানে লেখচিত্রটি $x = -180°$ থেকে $x = 360°$ পর্যন্ত অঙ্কন করা হয়েছে।

মন্তব্য 2. সাইন লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য :

(i) লেখচিত্রের কোথাও ছেদ (*Break*) নেই এবং এর আকার ঢেউয়ের মত।

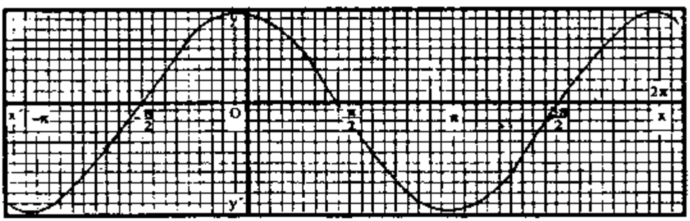
(ii) লেখচিত্র থেকে সহজেই বুঝা যায় যে, সাইন অনুপাতের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান হলো যথাক্রমে 1 এবং -1.

(iii) সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান তখনই পাওয়া যায় যখন x এর মান $90°$ এর বিজোড় গুণিতকের সমান হয়।

(iv) মূলবিন্দুতে এবং যে সকল বিন্দুর জন্য x এর মান $90°$ এর জোড় গুণিতকের সমান হয়, ঐক্ষেত্রে সাইন অনুপাতের মান শূন্য হয়।

(v) যেহেতু $\sin(360° + x) = \sin x$, সুতরাং $0°$ এবং $360°$ এর মধ্যে অঙ্কিত লেখচিত্রটি ডানে এবং বামে পর্যায়ক্রমে আবির্ভূত হয়।

(খ) কোসাইন ফাংশনের লেখচিত্র



কোসাইন–লেখচিত্র

মনে করি, $y = \cos x$.

$-180°$ থেকে শুরু করে $360°$ পর্যন্ত x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর, অর্থাৎ, $\cos x$ এর আনুষঙ্গিক মান বের করে নিচের তালিকায় সাজানো হলো :

x	$-180°$	$-120°$	$-90°$	$-30°$	$0°$	$60°$	$90°$	$150°$	$180°$	$360°$
y বা, $\cos x$	-1	$-.50$	0	$.87$	1	$.50$	0	$-.87$	-1	1

স্কেল : x – অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= 10°$; y– অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= 0.1$.

এখন তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি নির্বাচিত স্কেল অনুযায়ী ছক কাগজে স্থাপন করে এদেরকে পেন্সিলের সাহায্যে যোগ করলে কোসাইন-লেখচিত্র পাওয়া যায়। এখানে লেখচিত্রটি $x = -180°$ থেকে $x = 360°$ পর্যন্ত অঙ্কন করা হয়েছে।

মন্তব্য : কোসাইন – লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য :

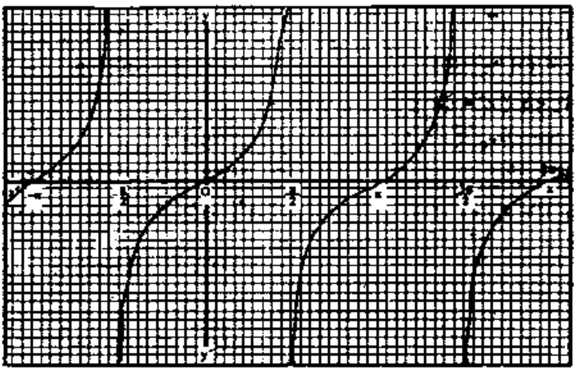
(i) লেখচিত্রটিকে 90° ডানে অথবা 90° বামে সরানো হলে তা সাইন লেখচিত্রের অনুরূপ হবে, যেহেতু
$$\sin(90^\circ + x) = \cos x, \text{ বা, } \cos(x - 90^\circ) = \sin x.$$

(ii) লেখচিত্র থেকে স্পষ্টত বুঝা যায় যে কোসাইন অনুপাতের সর্বোচ্চ মান = 1 এবং সর্বনিম্ন মান = – 1.

(iii) মূল বিন্দুতে এবং যে সকল বিন্দুতে x এর মান 180° এর গুণিতকের সমান হয়, ঐক্ষেত্রে কোসাইন অনুপাতের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

(iv) x এর পরিবর্তে $-x$ স্থাপন করলে $y = \cos x$ অপরিবর্তিত থাকে বলে লেখচিত্রটি y–অক্ষের সঙ্গে সাদৃশ্যপূর্ণ (*symmetrical*) হবে।

(গ) টেনজেন্ট ফাংশনের লেখচিত্র



মনে করি, $y = \tan x$.

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর আনুষঙ্গিক মান টেনজেন্ট-সারণী থেকে বের করে নিচের তালিকায় সাজানো হল :

x	–80°	–60°	–40°	0°	80°	120°	160°	180°	240°	260°
y বা, $\tan x$	– 5.67	–·1.73	0.84	0	5.67	– 1.73	– 0·36	0	1.73	5.67

স্কেল : x -অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = 10°; y - অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = ·28.

এখন তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক-কাগজে স্থাপন করে পেন্সিলের সাহায্যে যোগ করলে টেনজেন্ট–লেখচিত্র পাওয়া যায়।

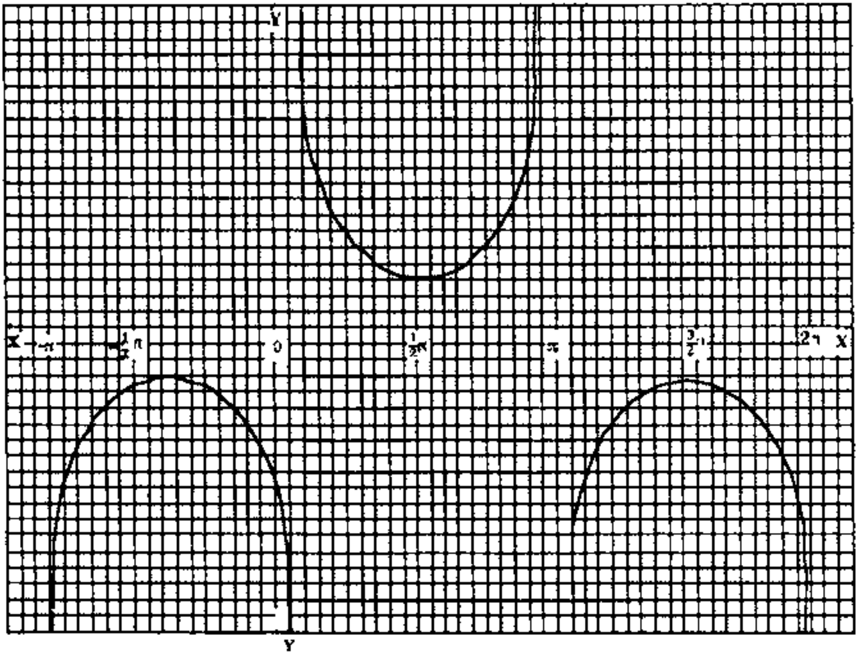
মন্তব্য : টেনজেন্ট–লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য :

(i) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন (*Continuous*) নয়। এটি ভিন্ন ভিন্ন শাখায় বিভক্ত। যখন x–এর মান 90° কোণের বিজোড় গুণিতকের সমান হয়, তখনই লেখচিত্রটি বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়।

(ii) – 90° এবং 90° কোণের মধ্যে যে লেখচিত্র অঙ্কন করা যায়, তা ডানে এবং বামে পর্যায়ক্রমে আবির্ভূত হয়।

(iii) 90° এর বিজোড় গুণিতকের সমান কোণের ভুজের বিন্দুগামী y–অক্ষের সমান্তরাল করে যে রেখাগুলি টানা যায় এদের এবং লেখচিত্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব ক্রমশঃ কমতে থাকে, কিন্তু এরা কখনও লেখচিত্রকে স্পর্শ করে না।

(ঘ) কোসেকেন্ট ফাংশনের লেখচিত্র।



মনে করি, $y = \operatorname{cosec} x$.

এখন, $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ সম্পর্কের সাহায্যে গ্রহণ করে x-এর কয়েকটি মানের জন্য y-এর আনুষঙ্গিক মান বের করে নিচের তালিকায় সাজানো হলো:

x	–90°	–70°	–50°	–10°	10°	70°	100°	120°	150°	170°
y বা, cosec x	– 1	– 1.06	– 1.31	– 5.76	5.76	1·06	1.02	1·16	2	5·76

স্কেল : x-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = 10°;

y-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের তিন বাহু = 1.

এ স্কেলের সাহায্যে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক-কাগজে স্থাপন করে সংযুক্ত করলে কোসেকেন্ট লেখচিত্র পাওয়া যায়।

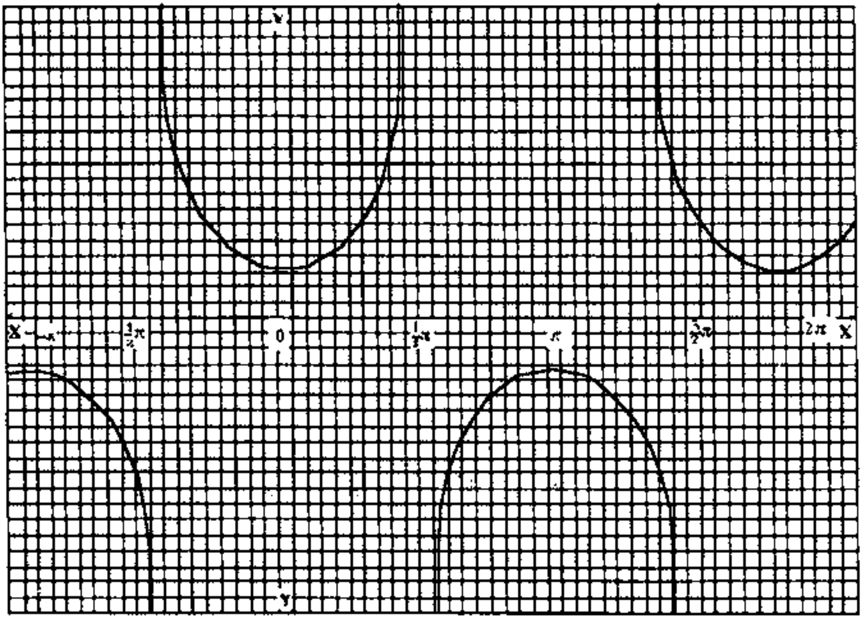
মন্তব্য : কোসেকেন্ট লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য ।

(i) লেখচিত্রটি বিভিন্ন অংশে বিভক্ত হয়ে বিচ্ছিন্ন থাকে। 180° এর যে কোন গুণিতকের সমান কোণের জন্য যে সব বিন্দু পাওয়া যায় ঐ সব বিন্দুতে লেখচিত্রটি বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়।

(ii) 0 এবং 2π কোণের মধ্যে যে লেখচিত্র অঙ্কন করা যায় তা ডানে এবং বামে পর্যায়ক্রমে আবির্ভূত হয়।

(iii) লেখচিত্র হতে সহজেই লক্ষ করা যায় যে, x-এর যেকোনো মানের জন্য cosec x এর + 1 এবং – 1 এর মধ্যবর্তী কোনও মান নাই।

(ঙ) সেকেন্ট ফাংশনের লেখচিত্র।



মনে করি, $y = \sec x$.

এখন, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ সম্পর্কের সাহায্যে গ্রহণ করে x-এর কয়েকটি মানের জন্য y-এর আনুষঙ্গিক মান বের করে নিচের তালিকায় সাজানো হলো :

x	$-180°$	$-120°$	$-100°$	$0°$	$80°$	$120°$	$150°$	$180°$
y বা, $\sec x$	-1	-2	0.17	1	0.17	-2	$-1{\cdot}15$	-1

x-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= 10°$;

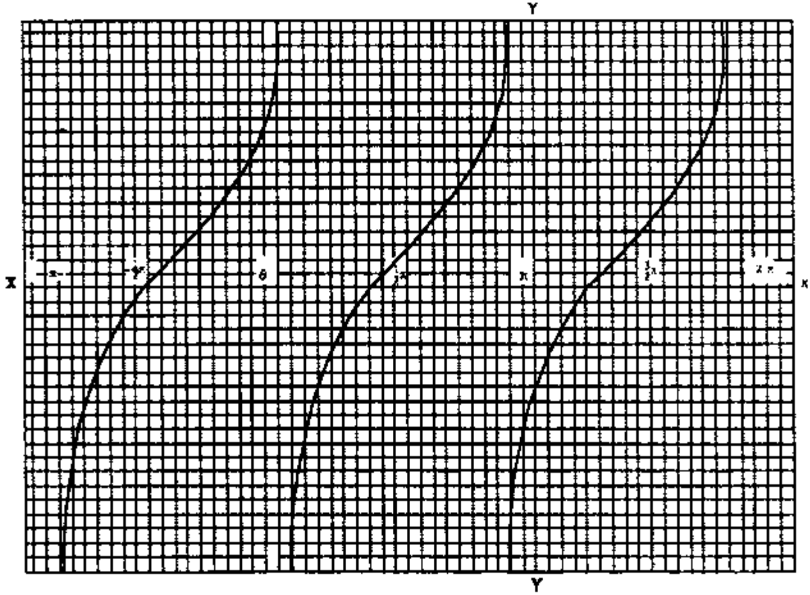
y-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের তিন বাহু $= 1$.

এখন তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে পেন্সিলের সাহায্যে সংযুক্ত করে যে লেখচিত্র পাওয়া যায় তা হলো সেকেন্ট–লেখচিত্র।

মন্তব্য : (i) কোসেকেন্ট লেখচিত্রের মতই সেকেন্ট লেখচিত্র বিচ্ছিন্ন থাকে। $90°$ এর বিজোড় গুণিতকের সমান কোণের জন্য যে বিন্দুগুলি পাওয়া যায় সেই বিন্দুগুলিতে লেখচিত্রটি বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়।

(ii) লেখচিত্র হতে সহজেই লক্ষ করা যায় যে, sec x এর জন + 1 এবং – 1 এর মধ্যবর্তী কোনো মান নাই।

(চ) কোটেনজেন্ট ফাংশনের লেখচিত্র।



মনে করি $y = \cot x$.

$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ সম্পর্কের সাহায্যে গ্রহণ করে x-এর কয়েকটি মানের জন্য y-এর আনুষঙ্গিক মান বের করে নিচের তালিকায় সাজানো হলো :

x	$-170°$	$-140°$	$-100°$	$-60°$	$-10°$	$10°$	$50°$	$120°$	$150°$	$160°$	$240°$
y, বা $\cot x$	5.67	1.19	0.18	− 0.38	− 5.67	5.67	0.84	−0.58	−1.73	−2.75	−5.76

স্কেল : x-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= 10°$;

y-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= .34$.

এখন এই নির্বাচিত স্কেলের সাহায্যে বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে সংযুক্ত করে কোটেনজেন্ট–লেখচিত্র পাওয়া যায়।

প্রশ্নমালা 6.3

1. নিচের ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর :

(ক) $y = \sin 2x$; যখন $0 \le x \le 2\pi$;

(খ) $y = \sin 3x$; ($x = 0$ হতে $x = 2\pi$ পর্যন্ত)

(গ) $y = \cos^2 x$, যখন $-\pi \le x \le \pi$;

(ঙ) $y = \cos 2x$, যখন $0 \le x \le 2\pi$.

(চ) $y = \cos 3\theta$, যখন $0 \le \theta \le \pi$.

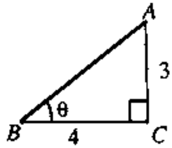
প্রশ্নমালা 6.4

সৃজনশীল প্রশ্ন :

1. (*a*) বৃত্তকলা বলতে কী বুঝায়?
   (*b*) রেডিয়ান পরিমাপে বৃত্তকলার সূত্র প্রতিষ্ঠা কর।
   (*c*) 20 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কোনো বৃত্তচাপ এর কেন্দ্রে $50°$ কোণ উৎপন্ন করলে ঐ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য এবং চাপটির উপর দণ্ডায়মাণ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
2. (*a*) $75°$ কে রেডিয়ান পরিমাপে প্রকাশ কর।
   (*b*) একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে $50°$ এবং $\frac{\pi^c}{3}$. তৃতীয় কোণটি ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।
   (*c*) একটি ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর প্রগমণ শ্রেণিভুক্ত। এদের সাধারণ অন্তর $20°$ হলে, কোণগুলি রেডিয়ান পরিমাপে নির্ণয় কর।
3. $\tan\theta = \frac{a}{b}$ হলে, $\frac{a\sin\theta + b\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta\, b}$ এর মাণ নির্ণয় কর।
   (*a*) যখন $0° < \theta < 90°$.
   (*b*) যখন $180° < \theta < 270°$.
   (*c*) যখন $a = b$.
4. (*a*) θ কোণের যেকোনো মানের জন্য কি $9\sin^2\theta + 3\sin\theta = 20$ হতে পারে?
   (*b*) যদি $a \neq b$ হয়, তবে $\sec\theta = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$ কি সম্ভব? যদি হ্যাঁ সূচক হয়, তবে কেন ?
   (*c*) $\cos^2\theta = \frac{(a+b)^2}{4ab}$ কি সম্ভব? যদি এরূপ হয়, তবে কখন?

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন :

5. $\sin\theta = \frac{12}{13}$ হলে, $\tan\theta$ এর মান –
   (a) $\frac{12}{5}$ (b) $\frac{5}{12}$
   (c) $\pm\frac{12}{5}$ (d) $\pm\frac{5}{12}$
6. পাশের সমকোণী ত্রিভুজ থেকে $(\sin\theta + \cos\theta)$ এবং $(\tan\theta + \cot\theta)$ এর অনুপাত হবে –
   (a) 3 : 7 (b) 25 : 12
   (c) 84 : 125 (d) 7 : 25



7. $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ হলে, $\cos\theta - \sin\theta$ এর মান হবে –
   (a) $\pm\sqrt{2}\sin\theta$ (b) $2\sin\theta$
   (c) $\sqrt{2}\sin\theta$ (d) $\sqrt{2\sin\theta}$

8. $\sin A = \frac{1}{2}$ এবং $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\tan A \tan B$ এর মান হবে –

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{3}{2}$

9. $\cot \theta = \frac{12}{5}$ হলে, $\sin \theta + \cos \theta$ এর মান হবে –

(a) $\frac{13}{17}$ (b) $\frac{17}{13}$

(c) $-\frac{7}{13}$ (d) $-\frac{13}{17}$

10. $\operatorname{cosec}^2 \theta \tan \theta + \sec^2 \theta \cot \theta$ এর সমান হবে –

(a) $2 \sin \theta \cos \theta$ (b) $\sin \theta \cos \theta$

(c) $2 \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$ (d) $\sec \theta \operatorname{cosec} \theta$

11. $\tan \theta = \frac{3}{4}$ হলে, $\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$ এর মান–

(a) 7 (b) $\frac{1}{7}$

(c) $-\frac{1}{7}$ (d) -7

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 6.1

1. 733°.7, 698°.7. **2.** 100. **3.** 0.6376 মিটার। **4.** 10.26 মিটার, 125.72 বর্গ মিটার। **5.** 15.91 মিটার। **6.** প্রতি ঘণ্টায় 52.78 কিলোমিটার।

প্রশ্নমালা 6.2

8. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ **15.** $-1\cdot3$.

প্রশ্নমালা 6.4

1. **(a)** $\frac{5\pi^c}{12}$; **(b)** $\frac{7\pi^c}{18}$; **(c)** $\frac{5\pi^c}{18}, \frac{\pi^c}{3}, \frac{7\pi^c}{18}$,

2. **(b)** $\frac{1}{2} r^2\theta$; **(c)** 17.45 সেন্টিমিটার,, 174.53 বর্গ সেন্টিমিটার।

3. **(a)** $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$; **(b)** $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ **(c)** অসংজ্ঞায়িত।

4. **(a)** না ; **(b)** হ্যাঁ, কারণ $2ab \le (a^2 + b^2)$; **(c)** তা কেবল তখন সম্ভব, যখন $a = b$.

5. *c*. **6.** *c*. **7.** *a*. **8.** *b*. **9.** *b*. **10.** *c*. **11.** *c*.

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
(Trigonometrical Ratios of Associated Angles)

7.1. সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

n একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে, $(n.360° + \theta)$ কোণের অনুপাত :

ত্রিকোণমিতিক কোণের সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান থেকে শুরু করে θ, $360° + \theta$, $-360° + \theta$, $2 \times 360° + \theta$, $-2 \times 360° + \theta$, $3 \times 360° + \theta$, $-3 \times 360° + \theta$ ইত্যাদি কোণের যেকোনো কোণই উৎপন্ন করুক না কেন এর শেষ অবস্থান হবে একই স্থানে। অর্থাৎ n যদি একটি পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে $(n.\ 360° + \theta)$ থেকে প্রাপ্ত যে কোন কোণ উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি একই স্থানে অবস্থান করবে।

যেহেতু ঘূর্ণায়মান রশ্মি একই আদি অবস্থান থেকে ঘূর্ণন শুরু করলে এর শেষ অবস্থানের উপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ভর করে, সুতরাং এটি স্পষ্ট যে, $(n.360° + \theta)$ থেকে প্রাপ্ত প্রত্যেকটি কোণের জন্য একটি নির্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান একই হবে। তাহলে , আমরা নিচের সম্পর্কগুলি সহজেই পাই ঃ

$\sin (n.360° + \theta) = \sin \theta$, $\cos (n.360° + \theta) = \cos \theta$,
$\operatorname{cosec} (n.360° + \theta) = \operatorname{cosec} \theta$, $\sec (n.360° + \theta) = \sec \theta$,
$\tan (n.360° + \theta) = \tan \theta$ এবং $\cot (n.360° + \theta) = \cot \theta$.

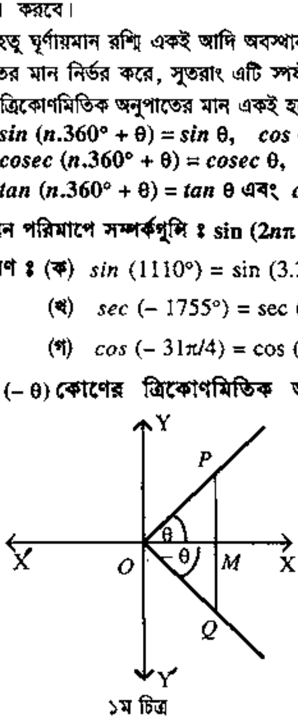
রেডিয়ান পরিমাপে সম্পর্কগুলি ঃ $\sin (2n\pi + \theta) = \sin \theta$, $\cos (2n\pi + \theta) = \cos \theta$ ইত্যাদি।

উদাহরণ ঃ (ক) $\sin (1110°) = \sin (3.360° + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$.

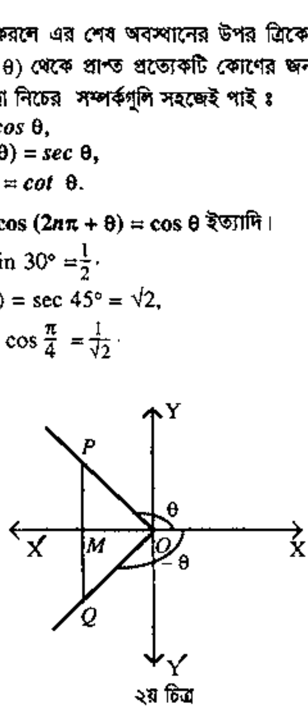
(খ) $\sec (-1755°) = \sec (-5.360° + 45°) = \sec 45° = \sqrt{2}$,

(গ) $\cos (-31\pi/4) = \cos (-4.2\pi + \pi/4) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7.1.1. $(-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



১ম চিত্র



২য় চিত্র

মনে করি, কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মি একই আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। যদি অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি ঐ একই অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে ঘুরে θ কোণের সম-পরিমাপের XOQ কোণ উৎপন্ন করে; তাহলে, $\angle XOQ = -\theta$.

OP এর যে কোন বিন্দু P থেকে XOX' এর উপর PM লম্ব অঙ্কন করে এমনভাবে বর্ধিত করা হল যেন তা OQ কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। এখন সাধারণ জ্যামিতি থেকে আমরা জানি যে, OPM এবং OQM ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান। [$\because$ উভয় চিত্রানুযায়ী, $\angle POM = \angle QOM$, $\angle OMP = \angle OMQ$ এবং OM বাহু সাধারণ।

সুতরাং আমরা পাই, $PM = QM$ এবং $OP = OQ$.

অতএব, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞানুযায়ী,

$$\sin(-\theta) = \sin XOQ = \frac{-QM}{OQ} = -\frac{PM}{OP} = -\sin XOP = -\sin\theta,$$

$$\cos(-\theta) = \cos XOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos XOP = \cos\theta,$$

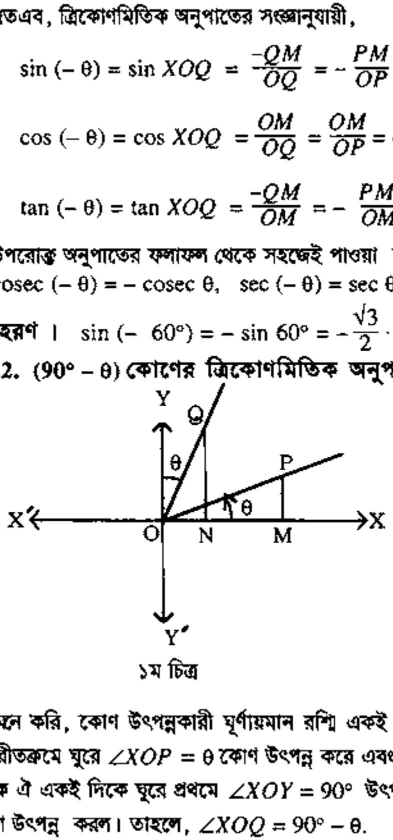
$$\tan(-\theta) = \tan XOQ = \frac{-QM}{OM} = -\frac{PM}{OM} = -\tan XOP = -\tan\theta.$$

উপরোক্ত অনুপাতের ফলাফল থেকে সহজেই পাওয়া যায়

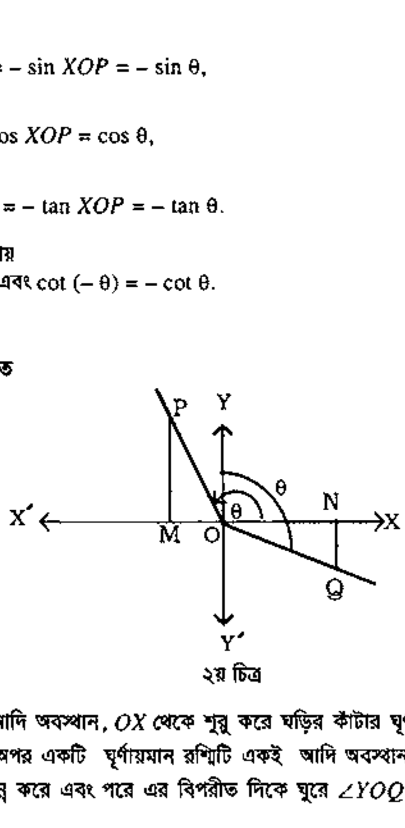
$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\sec(-\theta) = \sec\theta$ এবং $\cot(-\theta) = -\cot\theta$.

উদাহরণ । $\sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.1.2. $(90° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



১ম চিত্র



২য় চিত্র

মনে করি, কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মি একই আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে এবং অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি একই আদি অবস্থান OX থেকে ঐ একই দিকে ঘুরে প্রথমে $\angle XOY = 90°$ উৎপন্ন করে এবং পরে এর বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle YOQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করল। তাহলে, $\angle XOQ = 90° - \theta$.

θ এবং $(90° - \theta)$ কোণদ্বয় উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মিদ্বয় যে অবস্থানে থাকে ঐ বাহুদ্বয় থেকে যথাক্রমে OP এবং OQ এমনভাবে নেয়া হল যেন $OP = OQ$ হয়। XOX' এর উপর PM এবং QN লম্বদ্বয় অঙ্কন করি। তাহলে, OPM এবং OQN ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান। $\therefore$ $QN = OM$ এবং $ON = PM$.

অতএব, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞানুযায়ী,

$$\sin(90° - \theta) = \sin XOQ = \frac{QN}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos XOP = \cos\theta,$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \cos XOQ = \frac{ON}{OQ} = \frac{PM}{OP} = \sin XOP = \sin\theta,$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \tan XOQ = \frac{QN}{ON} = \frac{OM}{PM} = \cot XOP = \cot\theta.$$

উপরোক্ত অনুপাতের ফলাফল থেকে সহজেই দেখানো যায়

$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$, $\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$ এবং $\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$.

রেডিয়ান পরিমাপে উপরোক্ত অনুপাতগুলি হলো :

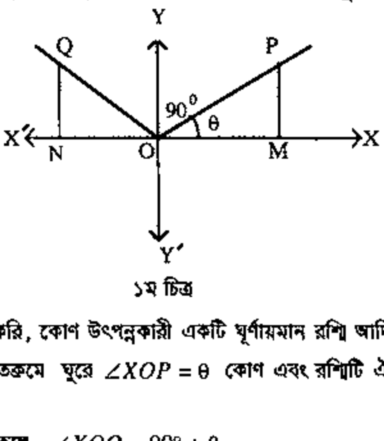
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta \text{ ইত্যাদি।}$$

মন্তব্য ঃ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনও বলা হয়। সাইন এবং কোসাইনকে পরস্পরের সহ-ফাংশন বলে। অনুরূপভাবে, সেকেন্ট এবং কোসেকেন্টকেও পরস্পরের সহ-ফাংশন বলা হয়। তদ্রুপ, টেনজেন্ট ও কোটেনজেন্ট হল পরস্পরের সহ-ফাংশন। যদি দুইটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণ হয়, তবে একটিকে অপরটির পরিপূরক বলা হয়। তাহলে, 30° এবং 60° কোণদ্বয়ের একটি অপরটির পরিপূরক।

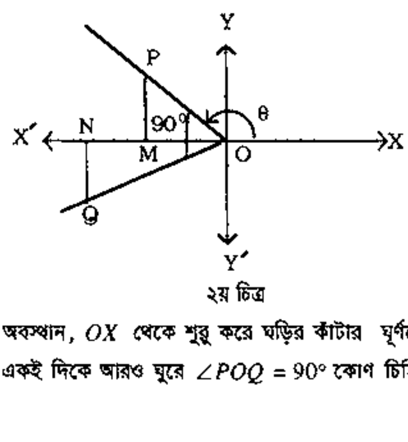
সুতরাং, একটি কোণের ত্রিকোণমিতিক ফাংশন = এর পরিপূরকের সহ-ফাংশন।

উদাহরণ । (ক) $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$, (খ) $\tan 25^\circ = \cot 65^\circ$, (গ) $\sec 80^\circ = \operatorname{cosec} 10^\circ$.

7.1.3. $(90^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



১ম চিত্র



২য় চিত্র

মনে করি, কোণ উৎপন্নকারী একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ এবং রশ্মিটি ঐ একই দিকে আরও ঘুরে $\angle POQ = 90^\circ$ কোণ চিহ্নিত করে।

তাহলে, $\angle XOQ = 90^\circ + \theta$.

θ এবং $(90^\circ + \theta)$ কোণদ্বয় উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মি যে দুইটি অবস্থানে থাকে তা থেকে যথাক্রমে OP এবং OQ এমনভাবে নেয়া হল যেন $OP = OQ$ হয়। XOX' এর উপর PM এবং QN লম্বদ্বয় অঙ্কন করি। তাহলে, OPM এবং OQN ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান। সুতরাং $QN = OM$ এবং $ON = PM$.

$\therefore$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞানুযায়ী,

$$\sin(90^\circ + \theta) = \sin XOQ = \frac{QN}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos XOP = \cos\theta,$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \cos XOQ = \frac{-ON}{OQ} = -\frac{PM}{OP} = -\sin XOP = -\sin\theta,$$

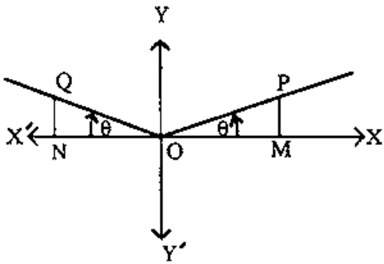
$$\tan(90^\circ + \theta) = \tan XOQ = \frac{QN}{-ON} = -\frac{OM}{PM} = -\cot XOP = -\cot\theta.$$

উপরোক্ত অনুপাতের ফলাফল থেকে আমরা পাই, $\operatorname{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta$,
$\sec(90° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$ এবং $\cot(90° + \theta) = -\tan\theta$.
রেডিয়ান পরিমাপে অনুপাতগুলি হলো :

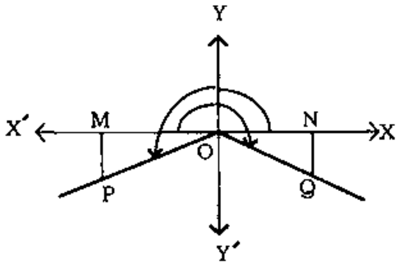
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$ ইত্যাদি।

উদাহরণ। $\sin 120° = \sin(90° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

7.1.4. $(180° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



১ম চিত্র



২য় চিত্র

মনে করি, কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে এবং কোণ উৎপন্নকারী অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি একই আদি অবস্থান, OX থেকে ঐ একই দিকে ঘুরে $XOX' = 180°$ কোণ উৎপন্ন করে বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle X'OQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করল।

তাহলে, $\angle XOQ = 180° - \theta$.

θ এবং $(180° - \theta)$ কোণদ্বয় উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মি যে দুইটি অবস্থানে থাকে ঐ রেখা থেকে যথাক্রমে OP এবং OQ এমনভাবে নেয়া হল যেন $OP = OQ$ হয়। XOX' রেখার উপর PM এবং QN লম্বদ্বয় অঙ্কন করি। তাহলে, OPM এবং OQN ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান।

$\therefore PM = QN$ এবং $OM = ON$.

$\therefore$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞানুযায়ী,

$$\sin(180° - \theta) = \sin XOQ = \frac{QN}{OQ} = \frac{PM}{OP} = \sin XOP = \sin\theta,$$

$$\cos(180° - \theta) = \cos XOQ = \frac{-ON}{OQ} = -\frac{OM}{OP} = -\cos XOP = -\cos\theta,$$

$$\tan(180° - \theta) = \tan XOQ = \frac{QN}{-ON} = -\frac{PM}{OM} = -\tan XOP = -\tan\theta.$$

উপরোক্ত অনুপাতের ফলাফল থেকে আমরা পাই

$\operatorname{cosec}(180° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$, $\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$ এবং $\cot(180° - \theta) = -\cot\theta$.

রেডিয়ান পরিমাপে উপরোক্ত অনুপাতগুলি হলো :

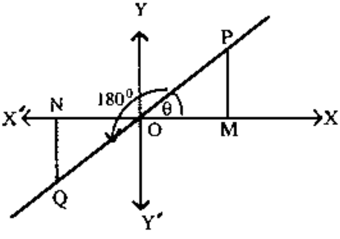
$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$, $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ ইত্যাদি

উদাহরণ । (ক) $\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$.

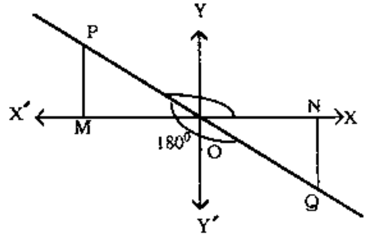
(খ) $\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.

(গ) $\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$.

7.1.5. $(180° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



১ম চিত্র



২য় চিত্র

মনে করি, কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। আবার রশ্মিটি ঐ একই দিকে ঘুরে $\angle POQ = 180°$ কোণ উৎপন্ন করল। তাহলে, $\angle XOQ = 180° + \theta$.

θ এবং $(180° + \theta)$ কোণদ্বয় উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মি যে অবস্থানে থাকে ঐ অবস্থানের রশ্মিদ্বয় থেকে যথাক্রমে OP এবং OQ এমনভাবে নেয়া হল যেন $OP = OQ$ হয়। XOX' রেখার উপর PM এবং QN লম্বদ্বয় অংকন করি। তাহলে, OPM এবং OQN ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান। $\therefore\ QN = PM$ এবং $ON = OM$.

$\therefore$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞানুযায়ী

$$\sin(180° + \theta) = \sin XOQ = \frac{-QN}{OQ} = -\frac{PM}{OP} = -\sin XOP = -\sin\theta,$$

$$\cos(180° + \theta) = \cos XOQ = \frac{-ON}{OQ} = -\frac{PM}{OP} = -\cos XOP = -\cos\theta,$$

$$\tan(180° + \theta) = \tan XOQ = \frac{-QN}{-ON} = \frac{PM}{OM} = \tan XOP = \tan\theta.$$

উপরোক্ত অনুপাতের ফলাফল থেকে আমরা পাই,

$\operatorname{cosec}(180° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$ এবং $\cot(180° + \theta) = \cot\theta$.

রেডিয়ান পরিমাপে উপরোক্ত অনুপাতগুলি হল : $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$, $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$, ইত্যাদি।

উদাহরণ । (ক) $\cot 225° = \cot(180° + 45°) = \cot 45° = 1$.

(খ) $\sin 210° = \sin(180° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$.

(গ) $\operatorname{cosec}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{cosec}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

7.1.6. $(270° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে $(270° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়। কিন্তু নিচের প্রক্রিয়ায়ও এদের ফলাফল বের করা যায়। যেমন,

$\sin(270° - \theta) = \sin\{180° + (90° - \theta)\} = -\sin(90° - \theta) = -\cos\theta$;

অনুরূপভাবে, $\cos(270° - \theta) = -\sin\theta$, $\tan(270° - \theta) = \cot\theta$ ইত্যাদি।

7.1.7. $(270^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$(270^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি জ্যামিতিক পদ্ধতিতে বের করতে পারি। কিন্তু এ ফলাফল নিচের প্রক্রিয়ায়ও নির্ণয় করা যায়। যেমনঃ

$$\sin(270^\circ + \theta) = \sin\{180^\circ + (90^\circ + \theta)\} = -\sin(90^\circ + \theta) = -\cos\theta,$$

তদ্রূপ, $\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta$, $\tan(270^\circ + \theta) = -\cot\theta$ ইত্যাদি।

7.1.8. $(360^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে $(360^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়। কিন্তু অনুপাতগুলি নিচের প্রক্রিয়ায়ও বের করা যায়। যেমন :

$$\sin(360^\circ - \theta) = \sin\{270^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\cos(90^\circ - \theta) = -\sin\theta,$$

অনুরূপভাবে, $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$, $\tan(360^\circ - \theta) = -\tan\theta$ ইত্যাদি।

7.1.9. দুইটি প্রয়োজনীয় নিয়ম

প্রথম নিয়ম ঃ যদি θ কে 90 ডিগ্রির জোড় গুণিতকের সঙ্গে ধনাত্মক বা, ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত করা হয় (যেমন $180^\circ - \theta$, $180^\circ + \theta$, $360^\circ - \theta$ ইত্যাদি), তবে ঐ কোণের অনুপাতকে কেবল θ কোণের অনুপাতে প্রকাশ করলে মূল অনুপাতের রূপান্তর হয় না। কিন্তু এর চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) নির্ণয় করতে θ কে ধনাত্মক এবং সূক্ষ্মকোণ কল্পনা করে দেখতে হবে যে, সংযুক্ত কোণ উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মি কোন্ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে? এরপর চতুর্ভাগ–নিয়ম অনুযায়ী অনুপাতের চিহ্ন সহজেই নির্ণয় করা যায়।

দ্বিতীয় নিয়ম ঃ যদি θ কে 90 ডিগ্রির বিজোড় গুণিতকের সঙ্গে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত করা হয় (যেমন $90^\circ - \theta$, $90^\circ + \theta$, $270^\circ - \theta$ ইত্যাদি), তবে ঐ কোণের অনুপাতকে কেবল θ কোণের অনুপাতে প্রকাশ করলে মূল অনুপাতটি এর সহ–অনুপাতে রূপান্তরিত হয়। কিন্তু এর চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) নির্ণয় করতে θ কে ধনাত্মক এবং সূক্ষ্মকোণ কল্পনা করে দেখতে হবে যে, সংযুক্ত কোণ উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মি কোন্ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে? এরপর চতুর্ভাগ–নিয়ম অনুযায়ী অনুপাতের চিহ্ন সহজেই নির্ণয় করা যায়।

7.1.10. যেকোনো পরিমাপের কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে ধনাত্মক এবং সূক্ষ্মকোণের অনুপাতে প্রকাশ করা

যেকোনো পরিমাপের কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে ধনাত্মক এবং সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করা যায়। এর জন্য নিচের পদক্ষেপ গ্রহণ করতে হবে :

(1) যদি প্রদত্ত কোণের পরিমাপ 360° অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে ঐ কোণ থেকে 360° কিংবা 360 ডিগ্রির গুণিতক বাদ দিলে তা 360° কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণে পরিবর্তিত হয়। আগেই প্রমাণ করা হয়েছে যে, প্রদত্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এরূপ পরিবর্তিত কোণের ঐ একই ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের সমান। যেমন ঃ

$\sec(1270^\circ) = \sec(360^\circ \times 3 + 190^\circ) = \sec 190^\circ$.

(2) আবার যদি প্রদত্ত কোণের পরিমাপ -360° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে ঐ কোণ থেকে -360° কিংবা -360° ডিগ্রির গুণিতক বাদ দিয়ে এটিকে ধনাত্মক এবং 360° কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণে পরিবর্তন করা যায়। এ ক্ষেত্রেও প্রমাণ করা হয়েছে যে, প্রদত্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এরূপ পরিবর্তিত কোণের ঐ একই ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের সমান হয়। যেমন,

(ক) $\cos(-1000^\circ) = \cos(-360^\circ \times 3 + 80^\circ) = \cos 80^\circ$ এবং

(খ) $\tan(-1880^\circ) = \tan(-360^\circ \times 6 + 280^\circ) = \tan 280^\circ$ ইত্যাদি।

(3) উপরে বর্ণিত দুইটি পদক্ষেপের একটির সাহায্যে যে কোন পরিমাপের কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে কোনো কোনো ক্ষেত্রে ধনাত্মক ও সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে পরিবর্তন করা সম্ভব না হলেও এদেরকে 360° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করা যায়। তখন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাথে এমন কোণ সংযুক্ত থাকে যাকে $90^\circ \pm \theta$, বা $180^\circ \pm \theta$, বা $360^\circ - \theta$ আকারে প্রকাশ করে অনুচ্ছেদ 7.1.9 এর নিয়মানুযায়ী অনুপাতটিকে θ (ধনাত্মক এবং সূক্ষ্মকোণ) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ 1 $\sin(3825^\circ) = \sin(360^\circ \times 10 + 225^\circ) = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর : $\cos 18° + \cos 162° + \cos 234° + \cos 1386°$.

সমাধান : $\cos 18° + \cos 162° + \cos 234° + \cos 1386°$

$$= \cos 18° + \cos(180° - 18°) + \cos(270° - 36°) + \cos(360° \times 4 - 54°)$$
$$= \cos 18° - \cos 18° - \sin 36° + \cos 54°$$
$$= -\sin 36° + \cos(90° - 36°) = -\sin 36° + \sin 36° = 0$$

উদাহরণ 2. যদি $x = r\sin(\theta + 45°)$ এবং $y = r\sin(\theta - 45°)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = r^2$.

সমাধান : আমরা পাই $x^2 + y^2 = r^2\sin^2(\theta + 45°) + r^2\sin^2(\theta - 45°)$

$$= r^2\{\sin^2(90° + \theta - 45°) + \sin^2(\theta - 45°)\}$$
$$= r^2\{\cos^2(\theta - 45°) + \sin^2(\theta - 45°)\} = r^2.$$

উদাহরণ 3. মান নির্ণয় কর : $\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{3\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12} + \cos^2\frac{9\pi}{12} + \cos^2\frac{11\pi}{12}$

সমাধান : $\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{3\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12} + \cos^2\frac{9\pi}{12} + \cos^2\frac{11\pi}{12}$

$$= \cos^2\frac{\pi}{12} + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) + \left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2 + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{12} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \left\{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 + \cos^2\frac{\pi}{12}$$

$$= 2\left(\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{2} + \left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2\left\{\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right\} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 2\left\{\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12}\right\} + 1 = 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

উদাহরণ 4. মান নির্ণয় কর : $\cot\frac{\pi}{20}\cot\frac{3\pi}{20}\cot\frac{5\pi}{20}\cot\frac{7\pi}{20}\cot\frac{9\pi}{20}$.

সমাধান : নির্ণেয় মান $= \cot 9° \cot 27° \cot 45° \cot 63° \cot 81°$ [$\because \pi = 180°$]

$$= \cot 9° \cot 27° .1. \cot(90° - 27°)\cot(90° - 9°)$$
$$= \cot 9° \cot 27° \tan 27° \tan 9° = 1 \quad [\because \cot 9° \tan 9° = 1 \text{ ইত্যাদি}]$$

উদাহরণ 5. যদি $\sin\theta = \frac{5}{13}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \csc(-\theta)} = \frac{3}{10}.$$ [য. '১২]

সমাধান : আমরা পাই, $\cos\theta = -\sqrt{1 - \sin^2\theta} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$

[$\because \frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$, অর্থাৎ কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রেখাটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে এবং এ চতুর্ভাগে সাইন এবং কোসেকেন্ট ছাড়া অন্যান্য অনুপাত ঋণাত্মক]

অতএব, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{5/13}{-12/13} = -\frac{5}{12}$.

এখন $$\frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \csc(-\theta)} = \frac{\tan\theta + \sec\theta}{\cot\theta - \csc\theta} = \frac{-\frac{5}{12} - \frac{13}{12}}{-\frac{12}{5} - \frac{13}{5}} = \frac{-\frac{18}{12}}{-\frac{25}{5}} = \frac{3}{10}.$$

প্রশ্নমালা 7.1

1. মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $\sin 675°$, (ii) $\tan 1305°$, (iii) $\sec 510°$, (iv) $\operatorname{cosec} 765°$, (v) $\cot 3750°$, (vi) $\sin(-1395°)$, (vii) $\sec(-2580°)$, (viii) $\cot(-1530°)$, (ix) $\tan(-1590°)$.

2. মান নির্ণয় কর ঃ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(-\frac{29\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{49\pi}{6}\right)$ এবং $\tan\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{19\pi}{3}\right)$.

3. মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $\cos 198° + \sin 432° + \tan 168° + \tan 12°$;

(ii) $\cos 420° \sin(-300°) - \sin 870° \cos 570°$;

(iii) $\sin 780° \cos 390° - \sin 330° \cos(-300°)$;

(iv) $\tan\frac{17\pi}{4} \cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + \sec\left(-\frac{34\pi}{3}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{25\pi}{6}\right)$

4. দেখাও যে, $\cos A + \sin\left(\frac{23\pi}{2}+A\right) - \sin\left(\frac{23\pi}{2}-A\right) + \cos(17\pi + A) = 0$.

5. নিচের অনুপাতগুলোকে 45° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং ধনাত্মক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করঃ

(i) $\sin(-65°)$, (ii) $\tan(-246°)$, (iii) $\sin 843°$, (iv) $\cot(-1054°)$, (v) $\sec 1327°$ এবং (vi) $\operatorname{cosec}(-756°)$.

6. মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $\sin^2\frac{17\pi}{18} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{37\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$;

(ii) $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14}$; [ব. '১০; য. '১১]

(iii) $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$; [ঢা. '১৩]

(iv) $\cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2\frac{31\pi}{24} + \cos^2\frac{37\pi}{24}$.

(v) $\sec^2\frac{14\pi}{17} - \sec^2\frac{39\pi}{17} + \cot^2\frac{41\pi}{34} - \cot^2\frac{23\pi}{34}$. [য. '০৬]

7. যদি n এর মান যে কোন পূর্ণ সংখ্যা হয় , তবে দেখাও যে, $\cos\left(2n\pi \pm \frac{\pi}{4}\right)$ এর মান সব সময় $\frac{1}{\sqrt{2}}$ হয়।

8. যদি $\alpha = \frac{11\pi}{4}$ হয়, তবে $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - 2\tan\alpha - \sec^2\alpha$ এর মান নির্ণয় কর।

9. যদি $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হয়, তবে $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$ এর মান কত?

10. প্রমাণ কর :

(i) $\cos^2 10° + \cos^2 20° + \cos^2 30° + \dots \dots \dots + \cos^2 80° = 4$,

(ii) $\sin^2 15° + \sin^2 20° + \sin^2 25° + \dots \dots \dots + \sin^2 75° = \frac{13}{2}$.

(iii) $\sin^2 3° + \sin^2 9° + \sin^2 15° + \dots \dots \dots + \sin^2 177° = 15$.

11. প্রমাণ কর : $\sin\theta + \sin(\pi+\theta) + \sin(2\pi+\theta) + \dots\dots\dots + \sin(n\pi+\theta)$
$= \sin\theta$, বা 0; যখন n যথাক্রমে জোড় ও বিজোড় সংখ্যা ।

12. যদি $ABCD$ চতুর্ভুজের কোণগুলি যথাক্রমে A, B, C, D হয়, তবে দেখাও যে,

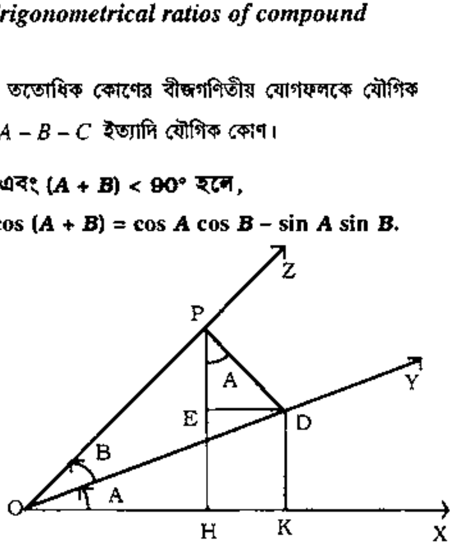
(i) $\cos\frac{1}{2}(A+C) + \cos\frac{1}{2}(B+D) = 0$; (ii) $\sin(A+B+C) + \sin(A+B+C+2D) = 0$.

13. যদি $\theta = \frac{\pi}{20}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cot\theta . \cot 3\theta . \cot 5\theta . \cot 7\theta \dots\dots \cot 19\theta = -1$.

7.2. যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (*Trigonometrical ratios of compound angle*)

যৌগিক কোণ (compound angle) **:** দুই বা ততোধিক কোণের বীজগণিতীয় যোগফলকে যৌগিক কোণ বলা হয় । যেমন : $A+B, A-B, A+B-C, A-B-C$ ইত্যাদি যৌগিক কোণ।

7.2.1. সূত্র : A এবং B কোণদ্বয় ধনাত্মক ও সূক্ষ্ম এবং $(A+B) < 90°$ হলে,
$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ এবং $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$.



প্রমাণ : মনে করি, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOY = A$ কোণ উৎপন্ন করে এবং ঐ একই রশ্মি আরও অধিক দূর একই দিকে অগ্রসর হয়ে $\angle YOZ = B$ কোণ উৎপন্ন করল। তাহলে, $\angle XOZ = A + B$.

এখন ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান, OZ এর উপর একটি বিন্দু P থেকে OX এবং OY এর উপর যথাক্রমে PH এবং PD লম্বদ্বয় আঁকি। আবার D বিন্দু থেকে OX এবং PH এর উপর যথাক্রমে DK এবং DE লম্বদ্বয় আঁকি।

তাহলে, স্পষ্টতঃ
$\angle DPE = 90° - \angle PDE = \angle EDO = \angle A$.
এখন POH সমকোণী ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই

$$\sin(A+B) = \frac{PH}{OP} = \frac{EH+PE}{OP} = \frac{DK+PE}{OP} = \frac{DK}{OP} + \frac{PE}{OP} = \frac{DK}{OD}\cdot\frac{OD}{OP} + \frac{PE}{PD}\cdot\frac{PD}{OP}$$
$$= \sin A\cos B + \cos\angle DPE.\ \sin B = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$\therefore$ **$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$.**

পুনরায় $$\cos(A+B) = \frac{OH}{OP} = \frac{OK-HK}{OP} = \frac{OK-DE}{OP} = \frac{OK}{OP} - \frac{DE}{OP} = \frac{OK}{OD}\cdot\frac{OD}{OP} - \frac{DE}{PD}\cdot\frac{PD}{OP}$$

$$= \cos A\cos B - \sin\angle DPE.\ \sin B = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
$\therefore$ **$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$.**

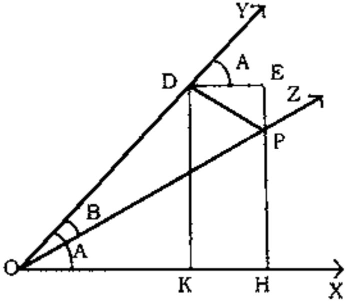
7.2.2. সূত্র : A ও B কোণদ্বয় সূক্ষ্ম ও ধনাত্মক এবং $A > B$ হলে,

$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ এবং $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

প্রমাণ : (i) মনে করি, একটি কোণ উৎপন্নকারী রশ্মি আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOY = \angle A$ কোণ উৎপন্ন করে এবং ঐ একই রশ্মি এখন ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে ঘুরে $\angle YOZ = \angle B$ উৎপন্ন করল।

তাহলে, $\angle XOZ = A - B$.

এখন কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান, OZ এর উপর যে কোন একটি বিন্দু P নিয়ে OX এবং OY এর উপর যথাক্রমে PH এবং PD লম্বদ্বয় অংকন করি। আবার D বিন্দু থেকে OX এবং HP এর বর্ধিতাংশের উপর যথাক্রমে DK এবং DE লম্বদ্বয় আঁকি । তাহলে, স্পষ্টত $\angle DPE = 90° - \angle PDE = \angle EDY = \angle A$.



এখন POH সমকোণী ত্রিভুজ থেকে

$$\sin(A-B) = \frac{PH}{OP} = \frac{EH-PE}{OP} = \frac{DK-PE}{OP} = \frac{DK}{OP} - \frac{PE}{OP} = \frac{DK}{OD}\cdot\frac{OD}{OP} - \frac{PE}{PD}\cdot\frac{PD}{OP}$$

$$= \sin A \cos B - \cos\angle DPE \sin B = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$\therefore$ **$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$.**

$$\cos(A-B) = \frac{OH}{OP} = \frac{OK+KH}{OP} = \frac{OK+DE}{OP}$$

$$= \frac{OK}{OP} + \frac{DE}{OP} = \frac{OK}{OD}\cdot\frac{OD}{OP} + \frac{DE}{PD}\cdot\frac{PD}{OP}$$

$$= \cos A \cos B + \sin\angle DPE.\sin B = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$\therefore$ **$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.**

মন্তব্য : যেকোনো পরিমাপের A ও B এরজন্য 7.2.1 এবং 7.2.2 অনুচ্ছেদের সূত্রগুলি প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

7.2.3. প্রমাণ কর যে,

(i) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$, (ii) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$.

প্রমাণ : (i) $\tan(A+B) = \dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \dfrac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \dfrac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \dfrac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

(ii) $\tan(A-B) = \dfrac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)} = \dfrac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} - \dfrac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} + \dfrac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}} = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}.$$

মন্তব্য : উপরোক্ত সূত্র দুইটি জ্যামিতিক নিয়মেও প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

7.2.3. অনুসিদ্ধান্ত : (i) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$;
(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$.

প্রমাণ :

(i) বাম পক্ষ $= (\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B)$
$= \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B$
$= \sin^2 A\,(1 - \sin^2 B) - \sin^2 B\,(1 - \sin^2 A) = \sin^2 A - \sin^2 B$
$= (1 - \cos^2 A) - (1 - \cos^2 B) = \cos^2 B - \cos^2 A$.

(ii) বাম পক্ষ $= (\cos A \cos B - \sin A \sin B)(\cos A \cos B + \sin A \sin B)$
$= \cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B$
$= \cos^2 A\,(1 - \sin^2 B) - \sin^2 B\,(1 - \cos^2 A)$
$= \cos^2 A - \sin^2 B = (1 - \sin^2 A) - (1 - \cos^2 B) = \cos^2 B - \sin^2 A$.

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর : $\sin 75°, \cos 75°, \tan 15°$.

সমাধান : $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left[\sqrt{6}+\sqrt{2}\right]$$

$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left[\sqrt{6}-\sqrt{2}\right]$$

$$\tan 15° = \tan(45° - 30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $\cot\theta - \cot 2\theta = \operatorname{cosec} 2\theta$.

সমাধান : বাম পক্ষ $= \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \dfrac{\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta}{\sin\theta\sin 2\theta}$

$$= \frac{\sin(2\theta-\theta)}{\sin\theta\sin 2\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta\sin 2\theta} = \frac{1}{\sin 2\theta} = \operatorname{cosec} 2\theta.$$

উদাহরণ 3. প্রমাণ কর যে, $\cos 68° 20' \cos 8° 20' + \cos 81° 40' \cos 21° 40' = \frac{1}{2}$.

সমাধান : বাম পক্ষ $= \cos(90° - 21° 40')\cos 8° 20' + \cos(90° - 8° 20')\cos 21° 40'$
$= \sin 21° 40' \cos 8° 20' + \sin 8° 20' \cos 21° 40'$
$= \sin(21° 40' + 8° 20') = \sin 30° = \frac{1}{2}$.

উদাহরণ 4. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\cos 27° - \cos 63°}{\cos 27° + \cos 63°} = \tan 18°$

সমাধান : বাম পক্ষ $= \dfrac{\cos 27° - \cos(90° - 27°)}{\cos 27° + \cos(90° - 27°)} = \dfrac{\cos 27° - \sin 27°}{\cos 27° + \sin 27°}$

$$= \frac{1 - \tan 27°}{1 + \tan 27°} = \frac{\tan 45° - \tan 27°}{1 + \tan 45° \tan 27°}$$

$= \tan(45° - 27°) = \tan 18°$.

উদাহরণ 5. যদি $a \sin (x + \theta) = b \sin (x - \theta)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(a - b) \tan x + (a + b) \tan \theta = 0$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $a \sin (x + \theta) = b \sin (x - \theta)$

বা, $a(\sin x \cos \theta + \cos x \sin \theta) = b(\sin x \cos \theta - \cos x \sin \theta)$

বা, $(a - b) \sin x \cos \theta + (a + b) \cos x \sin \theta = 0$

বা, $(a - b) \tan x + (a + b) \tan \theta = 0$. [উভয়পক্ষকে $\cos \theta \cos x$ দ্বারা ভাগ করে]

উদাহরণ 6. θ কোণকে α ও β অংশে এমনভাবে বিভক্ত করা হল যেন $\tan \alpha : \tan \beta = x : y$ হয়, প্রমাণ কর যে, $\sin (\alpha - \beta) = \dfrac{x - y}{x + y} \sin \theta$.

সমাধান : যেহেতু θ কোণকে α ও β অংশে বিভক্ত করা হয়েছে, $\therefore \theta = \alpha + \beta$.

আবার, $\tan \alpha : \tan \beta = x : y \Rightarrow \dfrac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = \dfrac{x}{y}$

$\therefore \dfrac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} = \dfrac{x - y}{x + y}$ [যোজন ও বিয়োজন প্রক্রিয়ায়]

বা, $\dfrac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta)} = \dfrac{x - y}{x + y}$ $\quad \therefore \sin (\alpha - \beta) = \dfrac{x - y}{x + y} \sin (\alpha + \beta) = \dfrac{x - y}{x + y} \sin \theta$.

প্রশ্নমালা 7.2

1. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin 15^\circ$, (ii) $\sin 105^\circ$, (iii) $\tan 75^\circ$, (iv) $\sec 165^\circ$, (v) $\operatorname{cosec} 375^\circ$.

2. A এবং B কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি ধনাত্মক ও সূক্ষ্ম হলে এবং

(i) যদি $\cos A = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{3}{5}$ হয়, তবে $\sin (A + B)$ এবং $\cos (A + B)$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii) যদি $\cot A = \frac{11}{2}$, $\tan B = \frac{7}{24}$ হয়, তবে $\cot (A - B)$ এবং $\tan (A + B)$ এর মান নির্ণয় কর।

(iii) যদি $\sec A = \frac{17}{8}$, $\operatorname{cosec} B = \frac{5}{4}$ হয়, তবে $\sec (A + B)$ এর মান নির্ণয় কর।

3. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin 28^\circ 32' \sin 88^\circ 32' + \sin 61^\circ 28' \sin 1^\circ 28'$

(ii) $\cos 17^\circ 40' \sin 77^\circ 40' + \cos 107^\circ 40' \sin 12^\circ 20'$

(iii) $\dfrac{\tan 68^\circ 35' - \cot 66^\circ 25'}{1 + \tan 68^\circ 35' \cot 66^\circ 25'}$.

প্রমাণ কর : (4-18)

4. $\cos x \sin (y - z) + \cos y \sin (z - x) + \cos z \sin (x - y) = 0$.

5. $\sin x \sin (x + 30^\circ) + \cos x \sin (x + 120^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6. $\cos (x - 60^\circ) \cos (x - 30^\circ) - \sin (x - 60^\circ) \sin (x + 330^\circ) = \sin 2x$.

7. $\sin (n + 1)\theta \sin (n - 1)\theta + \cos (n + 1)\theta \cos (n - 1)\theta = \cos 2\theta$

8. $\dfrac{\tan (3\theta - 2\varphi) + \tan 2\varphi}{1 - \tan (3\theta - 2\varphi) \tan 2\varphi} = \tan 3\theta$.

9. $\tan 36^\circ + \tan 9^\circ + \tan 36^\circ \tan 9^\circ = 1$. [ব. '০৪]

10. $\dfrac{\sin (B - C)}{\sin B \sin C} + \dfrac{\sin (C - A)}{\sin C \sin A} + \dfrac{\sin (A - B)}{\sin A \sin B} = 0$.

11. $1 + \tan 2A \tan A = \sec 2A$.

12. $\sin A + \sin (A + 120°) + \sin (A - 120°) = 0$.

13. $\text{cosec } (x - y) = \dfrac{\sec x \sec y}{\tan x - \tan y}$.

14. $\tan 3A \tan 2A \tan A = \tan 3A - \tan 2A - \tan A$.

15. $\tan \left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) + \tan \left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{4 \sin 2\alpha}{1 - 4 \sin^2 \alpha}$.

16. (i) $\dfrac{\cos 8° + \sin 8°}{\cos 8° - \sin 8°} = \tan 53°$. (ii) $\dfrac{\sin 75° + \sin 15°}{\sin 75° - \sin 15°} = \sqrt{3}$.

17. যদি $\dfrac{\sin (\alpha + \gamma)}{\sin \alpha} = \dfrac{2 \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cot \alpha - \cot \gamma = 2 \cot \beta$. [কু. '১২]

18. যদি $\tan \beta = \dfrac{2 \sin \alpha \sin \gamma}{\sin (\alpha + \gamma)}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cot \gamma + \cot \alpha = 2 \cot \beta$.

19. যদি $A + B + C = \pi$ এবং $\cos A = \cos B \cos C$ হয়, তবে দেখাও যে,
(i) $\tan A = \tan B + \tan C$; [দি. ব. কু. '১৩] (ii) $\tan B \tan C = 2$.

20. যদি $A + B = \dfrac{\pi}{4}$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$.

21. (i) $\sin (A - B - C)$ এবং $\cos (A - B + C)$ কে বিস্তৃত কর।
(ii) $\cot (A + B + C)$ কে $\cot A, \cot B, \cot C$ পদে প্রকাশ কর।

22. যদি $\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + 1 = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $1 + \cot \alpha \tan \beta = 0$. [য. '০৭]

23. (i) যদি $\cot \alpha + \cot \beta = a$, $\tan \alpha + \tan \beta = b$ এবং $\alpha + \beta = \theta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$(a - b)\tan \theta = ab$. [ঢা. '১১; ব. '০৮; চ. '১২]

(ii) যদি $\theta + \varphi = \alpha$ এবং $\tan \theta = k \tan \varphi$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sin (\theta - \varphi) = \dfrac{k - 1}{k + 1} \sin \alpha$.

24. (i) যদি $m \sin (\theta - \alpha) = n \sin (\theta + \alpha)$ হয়, তবে দেখাও যে, $(m - n) \tan \theta = (m + n) \tan \alpha$.
(ii) যদি $a \cos (x + a) = b \cos (x - a)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(a + b) \tan x = (a - b) \cot \alpha$.

25. (i) যদি $\cot \theta = \dfrac{a \cos x - b \cos y}{a \sin x + b \sin y}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\dfrac{\sin (\theta - x)}{\sin (\theta + y)} = \dfrac{b}{a}$ [ঢা. '০৫]

(ii) $a \sin (\theta + \alpha) = b \sin (\theta + \beta)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cot \theta = \dfrac{a \cos \alpha - b \cos \beta}{b \sin \beta - a \sin \alpha}$. [য. '০৫]

26. যদি $\tan \theta = \dfrac{x \sin \varphi}{1 - x \cos \varphi}$ এবং $\tan \varphi = \dfrac{y \sin \theta}{1 - y \cos \theta}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \dfrac{x}{y}$

27. যদি $\cos (A + B) \sin (C + D) = \cos (A - B) \sin (C - D)$ হয়, তবে দেখাও যে,
$\cot A \cot B \cot C = \cot D$.

28. যদি $\tan \theta = \dfrac{a \sin x + b \sin y}{a \cos x + b \cos y}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a \sin (\theta - x) + b \sin (\theta - y) = 0$.

29. যদি $\tan \beta = \dfrac{n \sin \alpha \cos \alpha}{1 - n \sin^2 \alpha}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan (\alpha - \beta) = (1 - n) \tan \alpha$.

30. যদি $\sqrt{2} \cos A = \cos B + \cos^3 B$ এবং $\sqrt{2} \sin A = \sin B - \sin^3 B$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$\sin (A - B) = \pm\dfrac{1}{3}$ [ঢা. '০৪]

7.2.4. যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত থেকে কয়েকটি অনুসিদ্ধান্ত

যৌগিক কোণের অনুপাত থেকে আমরা পাই

$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin (A + B)$ ... . (i)

এবং $\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin (A - B)$ ... . (ii)

(i) এবং (ii) যোগ করে আমরা পাই, $\mathbf{2 \sin A \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B)}$ .... **(1)**

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে আমরা পাই, $\mathbf{2 \cos A \sin B = \sin (A + B) - \sin (A - B)}$ ...... **(2)**

আবার, $\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos (A + B)$ ... . (iii)

এবং $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos (A - B)$ ... . (iv)

এখন (iii) এবং (iv) যোগ করে আমরা পাই, $\mathbf{2 \cos A \cos B = \cos (A + B) + \cos (A - B)}$ .... **(3)**

(iv) থেকে (iii) বিয়োগ করে আমরা পাই, $\mathbf{2 \sin A \sin B = \cos (A - B) - \cos (A + B)}$ .... **(4)**

মনে করি, $A + B = C$ এবং $A - B = D$ তাহলে, $A = \frac{C + D}{2}$ এবং $B = \frac{C - D}{2}$.

এখন (1) থেকে (4) পর্যন্ত সূত্রে A এবং B এর পরিবর্তে এদের জন্য উপরে প্রাপ্ত মান স্থাপন করে আমরা যথাক্রমে পাই

$$\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C + D}{2} \cos \frac{C - D}{2}; \quad \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C + D}{2} \sin \frac{C - D}{2}$$

$$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C + D}{2} \cos \frac{C - D}{2}; \quad \cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C + D}{2} \sin \frac{D - C}{2} .$$

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. দেখাও যে, (ক) $\cos 70° - \cos 10° + \sin 40° = 0$,

(খ) $\sin 10° \sin 50° \sin 70° = \frac{1}{8}$.

সমাধান : (ক) বাম পক্ষ $= \cos 70° - \cos 10° + \sin 40°$

$$= 2 \sin 40° \sin (- 30°) + \sin 40° = - 2 \sin 40° \sin 30° + \sin 40°$$

$$= - 2 \sin 40° \cdot \frac{1}{2} + \sin 40° = - \sin 40° + \sin 40° = 0.$$

(খ) বাম পক্ষ $= \sin 10° \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \sin 70° \sin 50° = \frac{1}{2} \sin 10° (\cos 20° - \cos 120°)$

$$= \frac{1}{2} \sin 10° \left(\cos 20° + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos 20° \sin 10° + \frac{1}{4} \sin 10°$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2 \cos 20° \sin 10° + \frac{1}{4} \sin 10° = \frac{1}{4} (\sin 30° - \sin 10°) + \frac{1}{4} \sin 10°$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \sin 10°\right) + \frac{1}{4} \sin 10° = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \sin 10° + \frac{1}{4} \sin 10° = \frac{1}{8}$$

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর যে, $\mathbf{\frac{1}{2} \operatorname{cosec} 10° - 2 \sin 70° = 1}$.

সমাধান : বাম পক্ষ $= \frac{1}{2 \sin 10°} - 2 \sin 70° = \frac{1 - 4 \sin 70° \sin 10°}{2 \sin 10°}$

$$= \frac{1 - 2 (\cos 60° - \cos 80°)}{2 \sin 10°} = \frac{1 - 2 \left(\frac{1}{2} - \cos 80°\right)}{2 \sin 10°} = \frac{2 \cos 80°}{2 \sin 10°}$$

$$= \frac{\cos (90° - 10°)}{\sin 10°} = \frac{\sin 10°}{\sin 10°} = 1.$$

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $\sin 27^\circ + \cos 27^\circ = \sqrt{2}\cos 18^\circ$.

সমাধান : বাম পক্ষ $= \sin 27^\circ + \cos(90^\circ - 63^\circ) = \sin 27^\circ + \sin 63^\circ$

$$= 2\sin\frac{27^\circ + 63^\circ}{2}\cos\frac{63^\circ - 27^\circ}{2} = 2\sin 45^\circ \cos 18^\circ = 2.\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 18^\circ$$
$$= \sqrt{2}\cos 18^\circ.$$

উদাহরণ 4. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\sin\theta + \sin 5\theta + \sin 9\theta + \sin 13\theta}{\cos\theta + \cos 5\theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta} = \tan 7\theta.$

সমাধান : বাম পক্ষ $= \dfrac{(\sin 13\theta + \sin\theta) + (\sin 9\theta + \sin 5\theta)}{(\cos 13\theta + \cos\theta) + (\cos 9\theta + \cos 5\theta)}$

$$= \frac{2\sin 7\theta\cos 6\theta + 2\sin 7\theta\cos 2\theta}{2\cos 7\theta\cos 6\theta + 2\cos 7\theta\cos 2\theta}$$
$$= \frac{2\sin 7\theta(\cos 6\theta + \cos 2\theta)}{2\cos 7\theta(\cos 6\theta + \cos 2\theta)} = \frac{\sin 7\theta}{\cos 7\theta} = \tan 7\theta.$$

উদাহরণ 5. প্রমাণ কর যে, $\tan 54^\circ = \tan 36^\circ + 2\tan 18^\circ$.

সমাধান : আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে, $\tan 54^\circ = \tan 36^\circ + 2\tan 18^\circ$,

অর্থাৎ, $\tan 54^\circ - \tan 36^\circ = 2\tan 18^\circ$

এখন, $\tan 54^\circ - \tan 36^\circ$

$$= \frac{\sin 54^\circ}{\cos 54^\circ} - \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{\sin 54^\circ\cos 36^\circ - \sin 36^\circ\cos 54^\circ}{\cos 54^\circ\cos 36^\circ}$$
$$= \frac{\sin(54^\circ - 36^\circ)}{\cos 54^\circ\cos 36^\circ} = \frac{2\sin 18^\circ}{2\cos 54^\circ\cos 36^\circ} = \frac{2\sin 18^\circ}{\cos 90^\circ + \cos 18^\circ} = \frac{2\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} = 2\tan 18^\circ.$$

সুতরাং, $\tan 54^\circ = \tan 36^\circ + 2\tan 18^\circ$.

প্রশ্নমালা 7.3

প্রমাণ কর : (প্রশ্ন 1 – 15)

1. $\dfrac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B} = \cot\frac{1}{2}(A + B)\cot\frac{1}{2}(B - A)$.
2. $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sin B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\tan\frac{1}{2}(A + B)\cot\frac{1}{2}(A - B) = 5 + 2\sqrt{6}$.
3. $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0$.
4. (a) $\cos A + \cos(120^\circ - A) + \cos(120^\circ + A) = 0$.
   (b) $\sin\theta + \sin(120^\circ + \theta) + \sin(240^\circ + \theta) = 0$. [ঢা. '১২]
5. $\sin\theta\sin(60^\circ - \theta)\sin(60^\circ + \theta) = \frac{1}{4}\sin 3\theta$.
6. $\sec\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right)\sec\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) = 2\sec 2\theta$.
7. (i) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ = \dfrac{1}{16}$.
   (ii) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ = \dfrac{3}{16}$.
   (iii) $\tan 20^\circ\tan 40^\circ\tan 80^\circ = \sqrt{3}$. [ব. '০৭; কু. '০৯; রা. '১০]
   (iv) $16\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}\cos\dfrac{14\pi}{15} = 1$. [সি. '১১; দি. '১২; ব. '১৩]

8. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha.$

9. $\dfrac{\sin 7\theta - \sin 3\theta - \sin 5\theta + \sin\theta}{\cos 7\theta + \cos 3\theta - \cos 5\theta - \cos\theta} = \tan 2\theta.$

10. $\dfrac{\cos 8\theta + 6\cos 6\theta + 13\cos 4\theta + 8\cos 2\theta}{\cos 7\theta + 5\cos 5\theta + 8\cos 3\theta} = 2\cos\theta.$

11. $4\cos\theta\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+\theta\right)\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}+\theta\right) = \cos 3\theta.$

12. (i) $\cos 85° + \sin 85° = \sqrt{2}\cos 40°,$ [চ. '০৫]
(ii) $\sin 18° + \cos 18° = \sqrt{2}\cos 27°.$

13. $\tan 70° = \tan 20° + 2\tan 50°.$ [য. ঢা. '১০]

14. $\tan\dfrac{45°+\theta}{2}\tan\dfrac{45°-\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\cos\theta - 1}{\sqrt{2}\cos\theta + 1}.$ [ঢা. কু. '০৮; ব. '০৯; য. '১১]

15. $\cot(A + 15°) - \tan(A - 15°) = \dfrac{4\cos 2A}{2\sin 2A + 1}.$

16. যদি $A \neq B$ এবং $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $A + B = \frac{\pi}{2}.$ [কু. '১২]

17. যদি $\sin x = m\sin y$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan\frac{1}{2}(x-y) = \dfrac{m-1}{m+1}\tan\frac{1}{2}(x+y).$

18. যদি $\alpha + \beta = \theta$ এবং $\cos\alpha = k\cos\beta$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \dfrac{1-k}{1+k}\cot\frac{1}{2}\theta.$

19. যদি $(\theta - \varphi)$ সূক্ষ্ম এবং $\sin\theta + \sin\varphi = \sqrt{3}(\cos\varphi - \cos\theta)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sin 3\theta + \sin 3\varphi = 0.$

7.2.5. গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (*Trigonometrical ratios of multiple angles*)

$2A$, $3A$, $4A$ ইত্যাদি কোণকে A কোণের গুণিতক কোণ বলা হয়। এখন আমরা $2A$, $3A$ ইত্যাদি কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে A কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করব।

(ক) $2A$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

আমরা জানি $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ এবং

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B.$$

প্রথম সূত্রে $B = A$ বসিয়ে আমরা পাই, $\mathbf{\sin 2A} = \sin A\cos A + \cos A\sin A = \mathbf{2\sin A\cos A}$ ....(i)

দ্বিতীয় সূত্রে $B = A$ বসিয়ে আমরা পাই, $\mathbf{\cos 2A} = \cos A.\cos A - \sin A\sin A = \mathbf{\cos^2 A - \sin^2 A}$ ...(ii)

আবার (ii) সূত্রের ডান পক্ষকে কেবল $\sin A$, বা $\cos A$ অনুপাতে পরিবর্তন করে আমরা পাই

$$\mathbf{\cos 2A} = 1 - \sin^2 A - \sin^2 A = \mathbf{1 - 2\sin^2 A} \quad \ldots \ldots \text{(iii)}$$

এবং $\mathbf{\cos 2A} = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = \mathbf{2\cos^2 A - 1}$ ... (iv)

পক্ষ পরিবর্তন করে (iii) এবং (iv) থেকে আমরা পাই

$$\mathbf{1 - \cos 2A = 2\sin^2 A;} \quad \ldots \ldots \ldots \text{(v)}$$

এবং $\mathbf{1 + \cos 2A = 2\cos^2 A;}$ ... ... (vi)

(v) কে (vi) দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই, $\mathbf{\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan^2 A}$. ... ... (vii)

আবার $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$ সূত্রে $B = A$ বসিয়ে আমরা পাই

$$\mathbf{\tan 2A} = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A.\tan A} = \mathbf{\frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}} \quad \ldots \text{(viii)}$$

উদাহরণ :

(i) $\sin 4\theta = \sin(2.2\theta) = 2\sin 2\theta \cos 2\theta$;

(ii) $\sin 8\theta = \sin(2.4\theta) = 2\sin 4\theta \cos 4\theta$;

(iii) $\cos 16\theta = \cos(2.8\theta) = \cos^2 8\theta - \sin^2 8\theta = 1 - 2\sin^2 8\theta = 2\cos^2 8\theta - 1$.

(খ) $\sin 2A$ এবং $\cos 2A$ অনুপাতকে $\tan A$ অনুপাতে প্রকাশ করা

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\cdot\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\cos^2 A = 2\tan A\cdot\frac{1}{\sec^2 A} = \frac{2\tan A}{\sec^2 A} = \frac{\mathbf{2\tan A}}{\mathbf{1+\tan^2 A}}.$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A\left(1 - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)$$
$$= \frac{1}{\sec^2 A}\cdot(1-\tan^2 A) = \frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A} = \frac{\mathbf{1-\tan^2 A}}{\mathbf{1+\tan^2 A}}.$$

(গ) $3A$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$$\sin 3A = \sin(2A + A) = \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A$$
$$= 2\sin A\cos A.\cos A + (1 - 2\sin^2 A)\sin A$$
$$= 2\sin A\cos^2 A + (1-2\sin^2 A)\sin A$$
$$= 2\sin A(1-\sin^2 A) + (1-2\sin^2 A)\sin A = \mathbf{3\sin A - 4\sin^3 A}.$$

$$\cos 3A = \cos(2A + A) = \cos 2A\cos A - \sin 2A\sin A$$
$$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A\cos A.\sin A$$
$$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\cos A(1-\cos^2 A) = \mathbf{4\cos^3 A - 3\cos A}.$$

$$\tan 3A = \tan(2A + A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A\tan A} = \frac{\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\cdot\tan A}$$
$$= \frac{2\tan A + \tan A(1-\tan^2 A)}{1-\tan^2 A - 2\tan^2 A} = \frac{\mathbf{3\tan A - \tan^3 A}}{\mathbf{1 - 3\tan^2 A}}.$$

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. $\cos 5\theta$ এর মান $\cos\theta$ অনুপাতে প্রকাশ কর। [রা. '১১]

সমাধান : $\cos 5\theta = \cos(\theta + 4\theta) = \cos\theta\cos 4\theta - \sin\theta\sin 4\theta$
$$= \cos\theta(2\cos^2 2\theta - 1) - \sin\theta.2\sin 2\theta\cos 2\theta$$
$$= \cos\theta\{2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1\} - 2\sin\theta.2\sin\theta\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)$$
$$= \cos\theta\{8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\} - 4\cos\theta(1-\cos^2\theta)(2\cos^2\theta - 1)$$
$$= \cos\theta\{8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\} - 4\cos\theta(3\cos^2\theta - 2\cos^4\theta - 1)$$
$$= 8\cos^5\theta - 8\cos^3\theta + \cos\theta - 12\cos^3\theta + 8\cos^5\theta + 4\cos\theta$$
$$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.$$

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর যে, $\mathbf{\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x}$.

সমাধান : $\cos^4 x = \frac{1}{4}4\cos^4 x = \frac{1}{4}(2\cos^2 x)^2 = \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cdot 2\cos^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}(1+\cos 4x)$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

উদাহরণ 3. যদি $\tan\theta = \frac{y}{x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = x$.

সমাধান : দেওয়া আছে $\tan\theta = \frac{y}{x}$, বা $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$, বা $y\cos\theta = x\sin\theta$

$\therefore x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = x(1-2\sin^2\theta) + y.2\sin\theta\cos\theta$

$= x - 2x\sin^2\theta + 2\sin\theta.y\cos\theta$
$= x - 2x\sin^2\theta + 2x\sin^2\theta = x$.

উদাহরণ 4. প্রমাণ কর যে, $4\cos^3 x\sin 3x + 4\sin^3 x\cos 3x = 3\sin 4x$.

সমাধান : বা, প, $= 2\cos^2 x.2\sin 3x\cos x + 2\sin^2 x.2\cos 3x\sin x$
$= 2\cos^2 x.(\sin 4x + \sin 2x) + 2\sin^2 x(\sin 4x - \sin 2x)$
$= 2\sin 4x.(\cos^2 x + \sin^2 x) + 2\sin 2x(\cos^2 x - \sin^2 x)$
$= 2\sin 4x + 2\sin 2x\cos 2x = 2\sin 4x + \sin 4x = 3\sin 4x$.

উদাহরণ 5. প্রমাণ কর যে, $\cos^3 x + \cos^3(120^\circ + x) + \cos^3(240^\circ + x) = \frac{3}{4}\cos 3x$.

সমাধান : আমরা জানি $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ বা, $\cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$

$\therefore \cos^3 x + \cos^3(120^\circ + x) + \cos^3(240^\circ + x)$

$= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) + \frac{1}{4}\{\cos 3(120^\circ + x) + 3\cos(120^\circ + x)\} + \frac{1}{4}\{\cos 3(240^\circ + x) + 3\cos(240^\circ + x)\}$

$= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) + \frac{1}{4}\{\cos(360^\circ + 3x) + 3\cos(120^\circ + x)\} + \frac{1}{4}\{\cos(720^\circ + 3x) + 3\cos(240^\circ + x)\}$

$= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos(120^\circ + x) + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos(240^\circ + x)$

$= \frac{3}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x + \frac{3}{4}\cdot 2\cos(180^\circ + x)\cos 60^\circ$

$= \frac{3}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x + \frac{3}{4}\cdot 2(-\cos x)\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x - \frac{3}{4}\cos x = \frac{3}{4}\cos 3x$.

প্রশ্নমালা 7.4

প্রমাণ কর : (প্রশ্ন 1-3)

1. $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$. **2.** $\frac{1-\cos 2\theta + \sin 2\theta}{1+\cos 2\theta + \sin 2\theta} = \tan\theta$.

3. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$. [সি. '০৫; রা. '১০]

4. যদি $\tan\theta = \frac{1}{2}$ হয়, তবে দেখাও যে, $10\sin 2\theta - 6\tan 2\theta + 5\cos 2\theta = 3$.

প্রমাণ কর : (প্রশ্ন 5 – 16)

5. $\cos nA\cos(n+2)A - \cos^2(n+1)A + \sin^2 A = 0$.

6. $\frac{\cos(45^\circ + A)}{\cos(45^\circ - A)} = \sec 2A - \tan 2A$ [ব. '০৪]

7. $\frac{\sin\alpha - \sqrt{1+\sin 2\alpha}}{\cos\alpha - \sqrt{1+\sin 2\alpha}} = \cot\alpha$; যখন α ধনাত্মক ও সূক্ষ্মকোণ।

8. $\frac{3\sin x - \sin 3x}{3\cos x + \cos 3x} = \tan^3 x$. **9.** $\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$.

10. $\tan 2A = (\sec 2A + 1)\sqrt{\sec^2 A - 1}$. **11.** $\cos^3 A \cos 3A + \sin^3 A \sin 3A = \cos^3 2A$.

12. $\tan A \tan(60° + A)\tan(120° + A) = -\tan 3A$.

13. $\sec x = \dfrac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4x}}}$ [য. '০৫; দি. '০৯]

14. (i) $4(\sin^3 10° + \cos^3 20°) = 3(\sin 10° + \cos 20°)$;

(ii) $4(\sin^3 25° + \cos^3 5°) = 3\sqrt{3}\sin 55°$.

15. (i) $\cos^2(A - 120°) + \cos^2 A + \cos^2(A + 120°) = \frac{3}{2}$. [দি. '১৩]

(ii) $\sin^2(60° + A) + \sin^2 A + \sin^2(60° - A) = \frac{3}{2}$. [রা. '১২; চ. '১১]

16. $\sin^3 x + \sin^3(120° + x) + \sin^3(240° + x) = -\frac{3}{4}\sin 3x$. [রা. '০৬, সি. '১০; চ. '০৭]

17. যদি $\cos A + \cos B + \cos C = 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 12\cos A\cos B\cos C$.

18. যদি $\tan\theta = \frac{1}{7}$ এবং $\tan\varphi = \frac{1}{3}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cos 2\theta = \sin 4\varphi$.

19. যদি $2\tan\alpha = 3\tan\beta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$.

20. যদি $\tan\alpha = 2\tan\beta$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{3\sin 2\alpha}{1 + 3\cos 2\alpha}$.

21. যদি $(A + B) \neq 0$ এবং $\sin A + \sin B = 2\sin(A + B)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$.

22. প্রমাণ কর যে, $\tan\theta + 2\tan 2\theta + 4\tan 4\theta + 8\cot 8\theta = \cot\theta$. [সি. '০৮]

23. প্রমাণ কর যে, (i) $\dfrac{1}{\sin 10°} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = 4$. [সি. চ. '১২; দি. '১১; য. রা. '১৩]

(ii) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20°} - \dfrac{1}{\cos 20°} = 4$. [য. ঢা. '১০]

24. যদি $a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$ হয়, তবে দেখাও যে,
$\cos^2\dfrac{\alpha + \beta}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha + \beta}{2} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ [সি. '০৩; কু. '০৮]

7.2.6. উপগুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (*Trigonometrical ratios of sub–multiple angles*)

$\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{3}, \frac{\theta}{4}$ ইত্যাদি কোণকে θ কোণের উপ-গুণিতক কোণ বলা হয়।

$$\sin\theta = \sin\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\theta\right) = \sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta + \cos\tfrac{1}{2}\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta = 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta; \quad \ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\cos\theta = \cos\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\theta\right) = \cos^2\tfrac{1}{2}\theta - \sin^2\tfrac{1}{2}\theta = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta\ ; \quad \ldots\ldots \text{(ii)}$$

$$\tan\theta = \tan\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\theta\right) = \frac{2\tan\frac{1}{2}\theta}{1 - \tan^2\frac{1}{2}\theta} \quad \ldots\ldots \text{(iii)}$$

(ii) থেকে আমরা পাই, $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta$ ..... (iv) $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ ..... (v)

$$\text{(v)} \div \text{(iv)} \Rightarrow \tan^2\tfrac{1}{2}\theta = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \quad \ldots\ldots \text{(vi)}$$

7.2.7. 18° এবং 36° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করি, $\theta = 18°$. তাহলে, $5\theta = 90°$; $\therefore\ 2\theta = 5\theta - 3\theta = 90° - 3\theta$

সুতরাং, $\sin 2\theta = \sin(90° - 3\theta) = \cos 3\theta$ বা, $2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

যেহেতু $\cos\theta$, অর্থাৎ $\cos 18°$ এর মান শূন্য নয়, অতএব উভয়পক্ষকে $\cos\theta$ দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 = 4(1-\sin^2\theta) - 3$ বা, $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$$

অর্থাৎ, $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$. [$\because$ $\sin 18°$ ধনাত্মক]

আবার $\cos 18° = \sqrt{1-\sin^2 18°} = \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

$$\sin 36° = 2\sin 18°\cos 18° = 2\cdot\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

এবং $\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - 2\cdot\frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$.

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর : $\tan 7\frac{1}{2}° = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$.

সমাধান : আমরা পাই, $\tan 7\frac{1}{2}° = \frac{\sin 7\frac{1}{2}°}{\cos 7\frac{1}{2}°} = \frac{2\sin^2 7\frac{1}{2}°}{2\sin 7\frac{1}{2}°\cos 7\frac{1}{2}°} = \frac{1-\cos 15°}{\sin 15°}$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$$ [$\sin 15°$ এবং $\cos 15°$ এর মান স্থাপন করে]

$$= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-4}{2} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2.$$

উদাহরণ 2. যদি $\sin\alpha + \sin\beta = a$ এবং $\cos\alpha + \cos\beta = b$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$$ [কু. '১১]

সমাধান : আমরা জানি, $\sin\alpha + \sin\beta = a$ ....(i) এবং $\cos\alpha + \cos\beta = b$ ..... (ii)

প্রথমে (i) এবং (ii) কে বর্গ এবং পরে যোগ করে আমরা পাই

$2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = a^2 + b^2$ বা, $2 + 2\cos(\alpha-\beta) = a^2+b^2$

বা, $2\{1+\cos(\alpha-\beta)\} = a^2+b^2$ বা, $4\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = a^2+b^2$

বা, $\sec^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{4}{a^2+b^2}$ বা, $\tan^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{4}{a^2+b^2} - 1$

বা, $\tan^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}$ $\therefore \tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$.

প্রশ্নমালা 7.5

প্রমাণ কর : (প্রশ্ন 1-9)

1. $\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}=\cot\dfrac{\alpha}{2}$.

2. $\cos^2\dfrac{A}{2}\left(1+\tan\dfrac{A}{2}\right)^2=1+\sin A$.

3. $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. [য. '১২]

4. $\cos^4\dfrac{A}{2}+\sin^4\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{4}(3+\cos 2A)$.

5. $\cos 2A=8\cos^4\dfrac{A}{2}-8\cos^2\dfrac{A}{2}+1$.

6. $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+60°\right)+\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-60°\right)=\dfrac{3}{2}$. [ব. '১১]

7. (i) $2\sin\dfrac{\pi}{16}=2\sin 11°15'=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, [রা. '১২; ঢা. '০৮; দি. ব. '১০]

(ii) $2\cos\dfrac{\pi}{16}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. [কু. '১৩] (iii) $2\cos 7\dfrac{1°}{2}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. [কু. চ. '১০]

8. $\cos^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\cos^4\dfrac{5\pi}{8}+\cos^4\dfrac{7\pi}{8}=\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\sin^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\sin^4\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{3}{2}$.

9. $\tan 6°\tan 42°\tan 66°\tan 78°=1$.

10. যদি $\sin\alpha+\sin\beta=a$ এবং $\cos\alpha+\cos\beta=b$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$ [রা. '০৩, '০৮; সি. '১১]

11. যদি $\tan\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\tan\dfrac{\varphi}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos\varphi=\dfrac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}$ [সি. '১২; রা. '০৯]

12. $(A+B)\neq 0$ এবং $\sin A+\sin B=2\sin(A+B)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{3}$

7.2.8. বিশেষ ধরনের ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি

উদাহরণ 1. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$$

সমাধান : যেহেতু $A+B+C=\pi$, $\therefore \dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}$

$$\therefore \tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cot\frac{A}{2}\quad\text{বা,}\ \frac{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$$

$$\text{বা,}\ \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\therefore \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$$

উদাহরণ 2. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$ [চ. '১১]

সমাধান : বা, প, $=(\sin 2A+\sin 2B)+\sin 2C=2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin 2C$

$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C=2\sin C[\cos(A-B)+\cos C]$

$=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

$=2\sin C.2\sin A\sin B=4\sin A\sin B\sin C.$

উদাহরণ 3. যদি $A + B + C = \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$ [চ. '১৩; ব. '১২]

সমাধান : বাম পক্ষ $= (\cos A + \cos B) + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2} + \cos C$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} \quad \left[\because \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right] + 1 = 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\right] + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 1 = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

উদাহরণ 4. যদি $A + B + C = \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1.$$ [রা. '১৩; চা. '১১, '১৩; দি. '০৯]

সমাধান : $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 A + 2\cos^2 B) + \cos^2 C = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}(2 + \cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C = 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C$

$= 1 + \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C$

$= 1 - \cos C \cos(A - B) + \cos^2 C \quad [\because \cos(A + B) = -\cos C]$

$= 1 - \cos C[\cos(A - B) - \cos C] = 1 - \cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

$= 1 - \cos C.\, 2\cos A \cos B = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$

এখন পক্ষান্তর করে আমরা পাই

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1.$

উদাহরণ 5. যদি $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1.$$ [ঢা. ব. '০১]

সমাধান : $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1}{2}(2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta) + \sin^2\gamma$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta) + \sin^2\gamma$ [$\because 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$ এবং $2\sin^2\beta = 1 - \cos 2\beta$]

$= \frac{1}{2}\{2 - (\cos 2\alpha + \cos 2\beta)\} + \sin^2\gamma = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \sin^2\gamma$

$= 1 - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin^2\gamma$

$= 1 - \sin\gamma\cos(\alpha - \beta) + \sin^2\gamma$ [$\because \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$, অর্থাৎ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin\gamma$]

$= 1 - \sin\gamma[\cos(\alpha - \beta) - \sin\gamma] = 1 - \sin\gamma[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

$= 1 - \sin\gamma.\, 2\sin\alpha\sin\beta = 1 - 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

এখন পক্ষান্তর করে আমরা পাই

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1.$

প্রশ্নমালা 7.6

$A+B+C=\pi$ হলে, প্রমাণ কর: (প্রশ্ন 1-10)

1. $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$.
2. $\tan 3A + \tan 3B + \tan 3C = \tan 3A \tan 3B \tan 3C$.
3. $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \sin B \cos C$. [কু. '০১]
4. $\cos A - \cos B + \cos C + 1 = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.
5. (i) $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$. [য. '০৮]

   (ii) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$. [য. '০২]
6. $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A \cos B \sin C$. [রা. '১১, সি. '০৭, '১৩]
7. $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2 \sin A \sin B \cos C$.
8. $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C$.
9. $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$. [য. '০৪; কু. '০৯]
10. $\sin(B+C-A) + \sin(C+A-B) + \sin(A+B-C) = 4 \sin A \sin B \sin C$. [চ. '০৪, ব.'০৬]

$A+B+C=\frac{\pi}{2}$ হলে, প্রমাণ কর : (প্রশ্ন 11-12)

11. $\tan B \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B = 1$.
12. $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \sin C = 0$. [কু. '১১; সি. '১২; ব. '১৩]
13. যদি $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ হয়, তবে দেখাও যে,

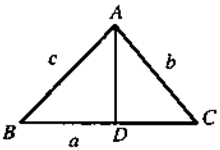
    $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$. [সি. '০১]
14. যদি $\alpha+\beta+\gamma=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

    (i) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} - 1$. [রা. '০২, কু. '০৩]

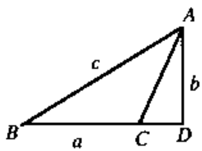
    (ii) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)(1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$.
15. যদি $\alpha+\beta=\gamma$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

    $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.
16. যদি $A+B+C=n\pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.
17. যদি $A+B+C=\pi$ এবং $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$ হয়, তবে দেখাও যে, $A=B=C$. [ব. '০৭]

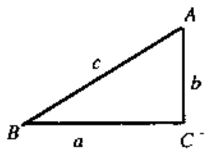
7.3. ত্রিভুজের সাইন সূত্র : ABC ত্রিভুজে, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ [ঢা. '১৩; রা. '১২; কু. ব. '১০]



চিত্র 1



চিত্র 2



চিত্র 3

(a) ABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ (চিত্র 1)। শীর্ষ A থেকে BC এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করি।

ABD ত্রিভুজ থেকে, $AD = c \sin B$, ACD ত্রিভুজ থেকে, $AD = b \sin C$

$\therefore c \sin B = b \sin C \Rightarrow \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ ...... (i)

অনুরূপভাবে, শীর্ষ B থেকে AC এর উপর লম্ব অঙ্কন করে পাই, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ ...... (ii)

$\therefore$ (i) এবং (ii) থেকে $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

ABC ত্রিভুজের C কোণটি স্থূল (চিত্র 2)। শীর্ষ A থেকে BC এর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব অঙ্কন করি।

ABD ত্রিভুজ থেকে, $AD = c \sin B$

ACD ত্রিভুজ থেকে, $AD = b \sin (180° - C) = b \sin C$

$\therefore c \sin B = b \sin C \Rightarrow \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

অনুরূপভাবে, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ $\therefore \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

চিত্র 3 এর ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ। শীর্ষ A থেকে BC এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলে তা AC এর সঙ্গে মিলে যাবে।

$\therefore AD = b = b \sin C$ [$\because C = 90°$]

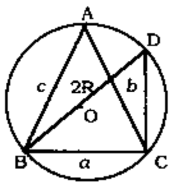
আবার, ABC ত্রিভুজ থেকে $AD = c \sin B$ $\therefore b \sin C = c \sin B \Rightarrow \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

অনুরূপভাবে, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ $\therefore \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

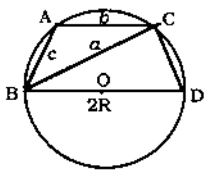
সুতরাং, যেকোনো ধরনের ABC ত্রিভুজ থেকে $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sin A}} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{\sin B}} = \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{\sin C}}$.

(b) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \mathbf{2R}$, যখন ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের ব্যাসার্ধের পরিমাপ R হয়। [রা. '০৮]

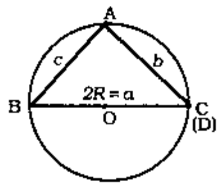
প্রমাণ :



প্রথম চিত্র



দ্বিতীয় চিত্র



তৃতীয় চিত্র

প্রথম চিত্রে $\angle A$ সূক্ষ্ম এবং দ্বিতীয় চিত্রে $\angle A$ স্থূল।

মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ R.

প্রথম এবং দ্বিতীয় চিত্রে BO যোগ করে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন তা বৃত্তের পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। D, C যোগ করি।

তৃতীয় চিত্রানুযায়ী, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং এক্ষেত্রে BD রেখা BC এর সঙ্গে মিলে যাবে।

এখন প্রথম এবং দ্বিতীয় চিত্র থেকে আমরা পাই

$$BD = 2R \text{ এবং } \angle BCD = 90°.$$

সুতরাং, BCD ত্রিভুজ থেকে $\sin \angle BDC = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{a}{2R}$ .... (i)

যেহেতু প্রথম চিত্রানুযায়ী, $\angle BDC = \angle A$ এবং দ্বিতীয় চিত্রানুযায়ী $\angle BDC = \pi - A$; অতএব, উভয়ক্ষেত্রে $\sin \angle BDC = \sin A$.

সুতরাং, (i) থেকে আমরা পাই $\sin A = \frac{a}{2R}$ বা, $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

এখন তৃতীয় চিত্রানুযায়ী, $BD = a$ অর্থাৎ, $2R = a$ বা, $\frac{a}{1} = 2R$

অর্থাৎ, $\frac{a}{\sin 90^\circ} = 2R$, $\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$. সুতরাং, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই আমরা পাই, $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

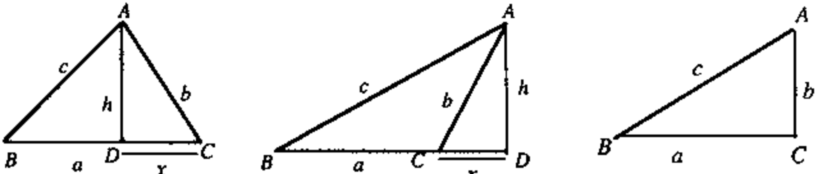
অনুরূপভাবে, A, O যোগ করে বর্ধিত করলে তা বৃত্তের পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করবে। এখন C, E এবং B, E যথাক্রমে যোগ করে দেখান যায় যে,

$\frac{b}{\sin B} = 2R$ এবং $\frac{c}{\sin C} = 2R$. অতএব, আমরা পাই $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

7.4. ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র : ABC ত্রিভুজে

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \ \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

প্রমাণ :



k´go KY© KÆtL- KY© চিত্র 3

BC বাহুর উপর AD লম্ব অঙ্কন করি [প্রথম চিত্র]। মনে করি, $CD = x$ এবং $AD = h$.

ADC ত্রিভুজ থেকে $h^2 = b^2 - x^2$

ADB ত্রিভুজ থেকে $h^2 = c^2 - (a - x)^2$

$\therefore b^2 - x^2 = c^2 - (a - x)^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 + 2ax$ ...... (i)

আবার ACD ত্রিভুজ থেকে, $\frac{x}{b} = \cos C$ অর্থাৎ, $x = b \cos C$

$\therefore$ (i) থেকে আমরা পাই $b^2 = c^2 - a^2 + 2ab \cos C$. [x-এর মান বসিয়ে]

$$\Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব অঙ্কন করি [দ্বিতীয় চিত্র]। ADC ত্রিভুজ থেকে $h^2 = b^2 - x^2$

ADB ত্রিভুজ থেকে $h^2 = c^2 - (a + x)^2$

$\therefore b^2 - x^2 = c^2 - (a + x)^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 - 2ax$ ...... (i)

আবার ACD ত্রিভুজ থেকে, $\frac{x}{b} = \cos(180^\circ - C) = -\cos C$ অর্থাৎ, $x = -b \cos C$

$\therefore$ (i) থেকে $b^2 = c^2 - a^2 + 2ab \cos C$. [x-এর মান বসিয়ে]

$$\Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

মন্তব্য : যখন $C = 90°$, সূত্রটি হবে $c^2 = a^2 + b^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

অর্থাৎ, $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C \therefore \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

সুতরাং, যেকোনো ধরনের ত্রিভুজ থেকে $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

অনুরূপভাবে, $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ এবং $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ সূত্র দুইটি প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

7.4.1. যে কোন ত্রিভুজ ABC–এ প্রমাণ কর :

$a = b \cos C + c \cos B$, $\quad b = c \cos A + a \cos C$,

$c = a \cos B + b \cos A$.

প্রমাণ : অনুচ্ছেদ 7.4 এর চিত্রগুলি লক্ষ করি।

যদি C একটি সূক্ষ্মকোণ হয়, তবে ১ম চিত্রানুযায়ী,

$$BC = BD + DC = AB \cos \angle ABD + AC \cos \angle ACD \quad \therefore a = c \cos B + b \cos C.$$

যদি C একটি স্থূলকোণ হয়, তবে ২য় চিত্রানুযায়ী,

$$BC = BD - CD = AB \cos \angle ABD - AC \cos \angle ACD$$
$$= c \cos B - b \cos(\pi - C) = c \cos B + b \cos C \quad \therefore a = c \cos B + b \cos C.$$

আবার C একটি সমকোণ হলে, ৩য় চিত্রানুযায়ী,

$$BC = AB \cos B, \therefore a = c \cos B = c \cos B + b \cos C. \; [\because \cos C = \cos 90° = 0]$$

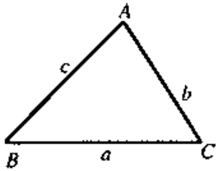
সুতরাং, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই আমরা পাই, $a = b \cos C + c \cos B$.

অনুরূপভাবে, অন্যান্য সম্পর্কও গঠন করা যায়।

7.4.2. যেকোনো ত্রিভুজ ABC–এ

$$\tan \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cot \frac{A}{2}, \; \tan \frac{C - A}{2} = \frac{c - a}{c + a} \cot \frac{B}{2}, \; \tan \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cot \frac{C}{2},$$

প্রমাণ : যে কোন ত্রিভুজ ABC–এ



$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ [ত্রিভুজ সূত্র থেকে] বা, $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$

$$\therefore \frac{b - c}{b + c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{2 \cos \frac{B + C}{2} \sin \frac{B - C}{2}}{2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{b - c}{b + c} = \cot \frac{B + C}{2} \tan \frac{B - C}{2} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B - C}{2} \quad [\because A + B + C = \pi]$$

$$\therefore \tan \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cot \frac{A}{2}.$$

অনুরূপভাবে অন্য দুইটি সূত্রও প্রমাণ করা যায়।

7.4.3. $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ অনুপাতগুলিকে ত্রিভুজের বাহুর পরিমাপে প্রকাশ করা

(i) আমরা জানি, $2\sin^2\frac{A}{2} = 1-\cos A = 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}.$$

যদি ত্রিভুজের পরিসীমার অর্ধেককে s দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে

$$2s = a+b+c$$

এখন $a-b+c = a+b+c-2b = 2s-2b = 2(s-b)$ এবং

$$a+b-c = a+b+c-2c = 2s-2c = 2(s-c).$$

সুতরাং, $2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2(s-b).2(s-c)}{2bc}$

বা, $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$, $\therefore \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$.

[$\because$ ত্রিভুজের যে কোন কোণ $180°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, $\therefore \frac{A}{2} < 90°$, অর্থাৎ $\sin\frac{A}{2}$ এর মান ধনাত্মক]

(ii) আমরা জানি $2\cos^2\frac{A}{2} = 1+\cos A = 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2s(2s-2a)}{2bc}$$

$\therefore 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2s.\,2(s-a)}{2bc}$ অর্থাৎ, $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$, $\therefore \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$.

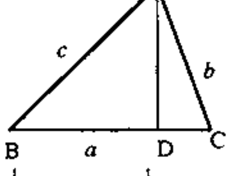
(iii) আবার $\tan\frac{A}{2} = \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.

অনুরূপভাবে, $\sin\frac{B}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, $\tan\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$ ইত্যাদির মান ত্রিভুজের বাহুর পরিমাপে প্রকাশ করা যায়। সুতরাং, আমরা পাই

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},\ \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},\ \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},\ \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},\ \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

7.4.3. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল



মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ এবং এর ক্ষেত্রফলকে Δ দ্বারা সূচিত করা হল। BC বাহুর উপর লম্ব, AD অঙ্কন করি।

তাহলে, ACD ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই

$AD = AC \sin\angle ACD = b\sin C.$

এখন জ্যামিতি থেকে আমরা জানি, $\Delta = \frac{1}{2}BC.\,AD$ $\therefore \Delta = \frac{1}{2}a.b\sin C = \frac{1}{2}ab\sin C.$

আবার যেহেতু ABC ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই $AD = c \sin B$, $\therefore \Delta = \frac{1}{2} ca \sin B$.

অনুরূপভাবে, B বিন্দু থেকে AC এর উপর লম্ব অঙ্কন করে দেখান যায় যে, $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A$.

সুতরাং, $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$.

অর্থাৎ, $\Delta = \frac{1}{2} \times$ (দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের গুণফল) $\times$ (এদের অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইন অনুপাত)।

আবার $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} bc.2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$

$$= bc.\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$ [অনুচ্ছেদ 6.6 অনুযায়ী]

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

উপরোক্ত সম্পর্কে $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ স্থাপন করে আমরা পাই

$$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

$$= \frac{1}{4}\{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4\}^{1/2}.$$

সমস্যা ও সমাধান ঃ

উদাহরণ 1. ABC ত্রিভুজে দেখাও যে, $a(\cos B + \cos C) = 2(b+c)\sin^2 \frac{A}{2}$.

সমাধান ঃ বা, প, $= a \cos B + a \cos C = (c - b \cos A) + (b - c \cos A)$ [অনুচ্ছেদ 6.5 অনুযায়ী]

$= (b+c) - (b+c)\cos A = (b+c)(1-\cos A) = (b+c).\, 2\sin^2 \frac{A}{2} = 2(b+c)\sin^2 \frac{A}{2}$.

উদাহরণ 2. যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে, $bc \cos^2 \frac{A}{2} + ca \cos^2 \frac{B}{2} + ab \cos^2 \frac{C}{2} = s^2$.

সমাধান ঃ বামপক্ষ $= bc \cdot \frac{s(s-a)}{bc} + ca \cdot \frac{s(s-b)}{ca} + ab \cdot \frac{s(s-c)}{ab} = s(s-a) + s(s-b) + s(s-c)$

$$= 3s^2 - s(a+b+c) = 3s^2 - 2s^2 = s^2. \ [\because 2s = a+b+c]$$

উদাহরণ 3. যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে, $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A + \frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B + \frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = 0$.

সমাধান ঃ বাম পক্ষের ১ম পদ $= \frac{b^2-c^2}{a^2} \cdot \sin 2A = \frac{4R^2\sin^2 B - 4R^2 \sin^2 C}{4R^2 \sin^2 A} \cdot 2\sin A \cos A$

$= \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{\sin A} \cdot 2\cos A = \frac{\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin A} \cdot 2\cos A$

$= 2\sin(B-C)\cos A \quad [\because \sin(B+C) = \sin A]$

$= -2\sin(B-C)\cos(B+C) [\because \cos A = -\cos(B+C)]$

$= -(\sin 2B - \sin 2C) = \sin 2C - \sin 2B$

অনুরূপভাবে, ২য় পদ $= \sin 2A - \sin 2C$ এবং ৩য় পদ $= \sin 2B - \sin 2A$.

এখন তিনটি পদ যোগ করলে বাম পক্ষ $= 0$.

উদাহরণ 4. যদি একটি ত্রিভুজে $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $C = 45°$ বা, $135°$.

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2a^2 + 2b^2c^2$

বা, $a^4 + b^4 + c^4 - 2c^2a^2 - 2b^2c^2 = 0$ বা, $(a^2 + b^2 - c^2)^2 = 2a^2b^2$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = \pm \sqrt{2}ab$ বা, $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos C = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \cos 45° = \cos 45°$, বা $\cos(180° - 45°)$ $\therefore C = 45°$ বা, $135°$.

প্রশ্নমালা 7.7

ABC ত্রিভুজ থেকে প্রমাণ কর ঃ (প্রশ্ন 1 – 22)

1. $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}$.

2. $\sin\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{a}\cos\dfrac{A}{2}$. [দি. '০৯; কু. '১৩]

3. $\cos(B-C) + \cos A = \dfrac{bc}{2R^2}$.

4. $a\sin\left(\dfrac{A}{2} + B\right) = (b + c)\sin\dfrac{A}{2}$. [য. চা. '১০; চ. সি.'১১]

5. $\cos C - \cos B = 2\left(\dfrac{b-c}{a}\right)\cos^2\dfrac{A}{2}$. [দি. '১০; চা. '১১]

6. যে কোন ত্রিভুজ ABC এ $\angle A = 60°$ হলে, দেখাও যে $b + c = 2a\cos\dfrac{B-C}{2}$. [ঢা. '১০; কু. '১১]

7. $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a + b + c$. [সি. '০৭]

8. $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$.

9. $a^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + b^2(\sin^2 C - \sin^2 A) + c^2(\sin^2 A - \sin^2 B) = 0$.

10. $\dfrac{(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \dfrac{a}{\sin A} = 2R$.

11. $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin A} = \dfrac{b\cos C - c\cos B}{b\cos C + c\cos B}$.

12. $a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0$.

13. $a\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2} + b\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C-A}{2} + c\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} = 0$.

14. $b^2\sin 2C + c^2\sin 2B = 2bc\sin A$.

15. $a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$.

16. $a^3\sin(B-C) + b^3\sin(C-A) + c^3\sin(A-B) = 0$.

17. $a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B) = 0$. [রা. '১৩]

18. $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = 0$.

19. $c^2 = (a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}$. [কু. '০৯]

20. $(b-c)\cot\dfrac{A}{2} + (c-a)\cot\dfrac{B}{2} + (a-b)\cot\dfrac{C}{2} = 0$.

21. $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{s}{R}$.

22. $\frac{1}{a}\sin A + \frac{1}{b}\sin B + \frac{1}{c}\sin C = \frac{6\Delta}{abc}$.

23. (*a*) ABC ত্রিভুজের বাহুগুলি a, b, c এবং $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ হলে, দেখাও যে, ABC ত্রিভুজে $C = 60°$. [ঢা. '১২; ব. চ. '১১]

(*b*) ABC ত্রিভুজের বাহুগুলি a, b, c এবং $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$ হলে, A কোণের মান নির্ণয় কর। [সি. '১০; দি. '১১]

(*c*) যদি $a = 2b$, এবং $A = 3B$ হয়, তবে ত্রিভুজের কোণগুলি নির্ণয় কর। [কু. '১২]

24. যদি ABC ত্রিভুজে $A = 75°, B = 45°$ হয়, তবে দেখাও যে $c : b = \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

25. যদি ABC ত্রিভুজে $\cos A = \sin B - \cos C$ হয়, তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী। [চ. '১২; ব. '১০; সি. '১১; কু. '১৩]

26. যদি একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে m, n এবং $\sqrt{m^2 + mn + n^2}$ হয়, তবে ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ নির্ণয় কর।

27. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির পরিমাপ যথাক্রমে 3, 5 ও 7 হলে, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি স্থূলকোণী। স্থূলকোণটি নির্ণয় কর। [কু. চ. '১০]

28. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির পরিমাপ যথাক্রমে 13, 14 ও 15 হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা. '০৯]

প্রশ্নমালা 7.8

সৃজনশীল প্রশ্ন :

1. ক্যালকুলেটার ব্যবহার না করে মান নির্ণয় কর :

(*a*) $\cot 855°$ (*b*) $\sin 15°$ (*c*) $\frac{\sin 135° + \cot 830°}{\sec 600° + \operatorname{cosec} 930°}$

2. (*a*) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ থেকে $\sin(A-B)$ নির্ণয় কর।

(*b*) $\cot 2\theta$ কে $\cot\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(*c*) $\sin 4A$ কে $\sin A$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

3. (*a*) একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে 30° এবং 60° হলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটির বাহুগুলির অনুপাত হবে $1 : \sqrt{3} : 2$.

(*b*) ABC ত্রিভুজে $a = 3$ cm., $b = 4$ cm,, $c = \sqrt{19}$ cm. হলে, A কোণের মান নির্ণয় কর।

(*c*) একটি ত্রিভুজের বাহুগলি a, b, c এবং $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$ হলে, A কোণের মান নির্ণয় কর।

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন :

4. নিচের কোন দুইটি সঠিক –

(a) $\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$; (b) $\cos(-\theta) = -\cos\theta$;

(c) $\tan(180° + \theta) = \tan\theta$; (d) $\tan(360° - \theta) = \tan\theta$.

5. $\sin 50° + \sin 70° - \cos 80°$ এর মান –

(a) 1 (b) 0 (c) $\sin 10°$ (d) $\frac{1}{2}$.

6. $\tan 40° \tan 50° \tan 60°$ এর মান –

(a) $\tan 10°$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $-\sqrt{3}$.

7. $\sin 26° 20' \cos 63° 40' + \sin 153° 40' \sin 423° 40'$ এর মান –

(a) -1 (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$.

8. $\tan 17° + \tan 28° + \tan 17° \tan 28° =$ কত?

(a) 1 (b) -1 (c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. $\frac{1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta}{1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta} =$ কত?

(a) $\cos\theta$ (b) $\sin\theta$ (c) $\cot\theta$ (d) $-\cos\theta$.

10. $A \neq B$ এবং $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ হলে, $A + B =$ কত?

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $-\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $-\frac{\pi}{4}$.

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 7.1

1. **(i)** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, **(ii)** 1, **(iii)** $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, **(iv)** $\sqrt{2}$, **(v)** $-\sqrt{3}$, **(vi)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$, **(vii)** 2, **(viii)** 0, **(ix)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $-\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3. (i)** 0, **(ii)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, **(iii)** 1, **(iv)** $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 4\right)$.

5. $-\cos 25°$, **(ii)** $-\cot 24°$, **(iii)** $\cos 33°$, **(iv)** $\cot 26°$, **(v)** $-\operatorname{cosec} 23°$, **(vi)** $-\operatorname{cosec} 36°$.
6. (i) 2, **(ii)** 2, **(iii)** 2, **(iv)** 2. **(u).** 0.

প্রশ্নমালা 7.2

1. **(i)** $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, **(ii)** $\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, **(iii)** $2 + \sqrt{3}$, **(iv)** $\sqrt{2} - \sqrt{6}$, **(v)** $\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

2. **(i)** 1 এবং 0, **(ii)** $-\frac{278}{29}$ এবং $\frac{1}{2}$ **(iii)** $-\frac{85}{36}$ **3. (i)** $\frac{1}{2}$, **(ii)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, **(iii)** 1.

21. **(i)** $\cos A \cos B \cos C (\tan A - \tan B - \tan C - \tan A \tan B \tan C)$;
এবং $\cos A \cos B \cos C (1 + \tan A \tan B + \tan B \tan C - \tan C \tan A)$.

(ii) $\frac{\cot A \cot B \cot C - \cot A - \cot B - \cot C}{\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B - 1}$.

প্রশ্নমালা 7.7

23. *(b)* 60°, *(c)* 90°, 30°, 60°. **26.** 120°. **27.** 120°. **28.** 84 বর্গ একক।

প্রশ্নমালা 7.8

1. **(a)** -1; **(b)** $\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$; **(c)** $-\frac{1}{24}\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

2. **(a)** $\sin A \cos B - \cos A \sin B$; **(b)** $\frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$; **(c)** $4 \sin A (1 - 2\sin^2 A)\sqrt{1 - \sin^2 A}$.

3. (b) 77°.98; (c) 60°. **4.** (a) ও (c). **5.** (b). **6.** b. **7.** c. **8.** a. **9.** c. **10.** c.

ব্যবহারিক

ত্রিভুজে তিনটি কোণ ও তিনটি বাহু আছে। এদের মধ্যে যেকোনো চারটি ত্রিকোণমিতিক সূত্রের সাহায্যে পরস্পর সম্পর্কযুক্ত। সুতরাং ত্রিভুজের তিনটি রাশি (তাদের মধ্যে কমপক্ষে একটি বাহু) জানা থাকলে সংশ্লিষ্ট সূত্রের সাহায্যে চতুর্থটি নির্দিষ্টভাবে নির্ণয় করা যায়। ত্রিভুজের তিনটি রাশির পরিমাপ (প্রদত্ত) ব্যবহার করে ত্রিভুজের অপর তিনটির পরিমাপ নির্ণয় করাকেই ত্রিভুজের সমাধান বোঝায়।

ত্রিভুজের যে তিনটি রাশির মান জানা থাকলে এর অপর রাশিগুলি নির্দিষ্টভাবে নির্ণয় করা সম্ভব তা শ্রেণিভুক্ত করে নিচে দেওয়া হলো :

(ক) তিনটি বাহু, অথবা

(খ) দুইটি বাহু এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ, অথবা

(গ) দুইটি কোণ ও একটি বাহু, অথবা

(ঘ) দুইটি বাহু ও এদের একটির বিপরীত কোণ।

7.5. ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে

মনে করি, যেকোনো ত্রিভুজ, ABC এর তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c. এখন ত্রিভুজের পরিসীমার অর্ধেককে s অর্থাৎ, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ধরলে, ত্রিকোণমিতি থেকে আমরা পাই,

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \text{ এবং}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

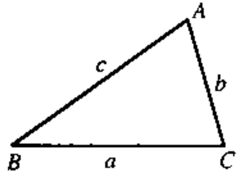
সূত্রগুলির যেকোনো একটি ব্যবহার করে A কোণের পরিমাপ নির্ণয় করা যায়।

অনুরূপ সূত্র থেকে B এবং C কোণদ্বয় নির্ণয় করা হয়।

সমস্যা নং 7.5	তারিখ : ....

সমস্যা : একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 9cm, 10 cm, 11cm. হলে, দ্বিতীয় বাহুর বিপরীত কোণ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : মনে করি, $a = 9$ cm. $b = 10$ cm. এবং $c = 11$ cm. তাহলে, b এর বিপরীত কোণ B নির্ণয় করতে হবে। পর্যায়ক্রমে অনুচ্ছেদ 7.5 এ উল্লেখিত চারটি সূত্র এবং 'সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটার' ব্যবহার করে B এর মান নির্ণয় করি।



(a) প্রথম পদ্ধতি :

তত্ত্ব : সূত্র $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$, যেখানে $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

কার্যপদ্ধতি :

1. প্রদত্ত তথ্য থেকে $s = \frac{1}{2}(9+10+11)$ cm. = 15 cm. নির্ণয় করি।

2. সূত্রে a, b, c, s এর মান বসিয়ে

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(15-11)(15-9)}{11\times 9}} = \sqrt{\frac{4\times 6}{11\times 9}} = 0.492366$$

$\therefore \frac{B}{2} = 29°29'46''$ (প্রায়) বা, B = 58°59'32'' (প্রায়)।

ফল সংকলন :

a	b	c	s	দ্বিতীয় বাহু, b	$\sin\frac{B}{2}$	$\frac{B}{2}$	B
9 cm.	10 cm.	11 cm.	15 cm.	10 cm.	0.492366	29°29′46″	58°59′32″

(b) দ্বিতীয় পদ্ধতি :

তত্ত্ব : সূত্র $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$, যেখানে $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

কার্যপদ্ধতি :

1. প্রদত্ত তথ্য থেকে $s = \frac{1}{2}(9+10+11)$ cm. = 15 cm. নির্ণয় করি।

2. সূত্রে a, b, c, s এর মান বসিয়ে

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{15(15-10)}{9\times 11}} = \sqrt{\frac{15\times 5}{9\times 11}} = 0.870388$$

$\therefore \frac{B}{2} = 29°29'46''$ (প্রায়) বা, $B = 58°59'32''$ (প্রায়)।

ফল সংকলন :

a	b	c	s	দ্বিতীয় বাহু, b	$\cos\frac{B}{2}$	$\frac{B}{2}$	B
9 cm.	10 cm.	11 cm.	15 cm.	10 cm.	0.870388	29°29′46″	58°59′32″

(c) তৃতীয় পদ্ধতি :

তত্ত্ব : সূত্র $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$, যেখানে $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

কার্যপদ্ধতি :

1. প্রদত্ত তথ্য থেকে $s = \frac{9+10+11}{2}$ cm. = 15 cm. নির্ণয় করি।

2. সূত্রে a, b, c, s এর মান বসিয়ে $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(15-11)(15-9)}{15(15-10)}} = \sqrt{\frac{4\times 6}{15\times 5}} = 0.565685$

$\therefore \frac{B}{2} = 29°29'46''$ (প্রায়) বা, $B = 58°59'32''$ (প্রায়)

ফল সংকলন :

a	b	c	s	দ্বিতীয় বাহু, b	$\tan \frac{B}{2}$	$\frac{B}{2}$	B
9 cm.	10 cm.	11 cm.	15 cm.	10 cm.	0.565685	29°29′46″	58°59′32″

(d) চতুর্থ পদ্ধতি :

তত্ত্ব : সূত্র $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

কার্যপদ্ধতি :

1. সূত্রে a, b, c এর মান বসিয়ে

$\cos B = \dfrac{11^2 + 9^2 - 10^2}{2 \times 11 \times 9} = \dfrac{121 + 81 - 100}{2 \times 11 \times 9} = 0.515151 \therefore B = 58°59'32''$ (প্রায়)।

a	b	c	$\cos B$	B
9 cm.	10 cm.	11 cm.	0.515151	58°59′32″

শ্রেণির কাজ :

1. ABC ত্রিভুজে $a = 74$ cm. $b = 26$ cm. $c = 60$ cm. হলে, $\angle A$ এর মান নির্ণয় কর।
উ : 112°37′12″(প্রায়)
2. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 5 cm., 6 cm. এবং 7 cm. হলে, ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।
উ : 78°27′48″(প্রায়)
3. একটি ত্রিভুজের বাহগুলি যথাক্রমে 24 cm., 19 cm. এবং 15 cm. হলে, ঐ ত্রিভুজের প্রথম বাহুর বিপরীত কোণ নির্ণয় কর। উ : 88°59′42″(প্রায়)

4. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 56 cm, 65 cm. এবং 33 cm. হলে, ঐ ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম কোণটি নির্ণয় কর। উ : 30°30′38″ (প্রায়)

7.6. ত্রিভুজের তিনটি কোণের পরিমাপ দেওয়া আছে

মনে করি, যেকোনো ত্রিভুজ, ABC এর তিনটি কোণ যথাক্রমে A, B, C. তাহলে, ত্রিভুজ সূত্র $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ অর্থাৎ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ থেকে $a : b : c$ নির্ণয় করা যায়।

সমস্যা নং 7.6	তারিখ : ....

সমস্যা : একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের পরিমাপ যথাক্রমে **50°, 60°, 70°** . বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অণুপাত $a : b : c$ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : তত্ত্ব : সূত্র $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

অর্থাৎ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

কার্য পদ্ধতি :

1. $\sin 50° = 0.766$, $\sin 60° = 0.866$ এবং $\sin 70° = 0.940$ নির্নয় করি।
2. সূত্রে $\sin 50°$, $\sin 60°$, $\sin 70°$ এর মান বসিয়ে $a : b : c = 0.766 : 0.866 : 0.940$ নির্ণয় করি।

সুতরাং $a : b : c = 766 : 866 : 940 = 383 : 433 : 470$.

ফল সংকলন :

$\sin A$	$\sin B$	$\sin C$	$a : b : c$
0.766	0.866	0.940	$766 : 866 : 940 = 383 : 433 : 470$

শ্রেণির কাজ :

1. ABC ত্রিভুজের তিনটি কোণ যথাক্রমে $70°, 80°, 30°$ হলে, $a : b : c$ নির্ণয় কর।

উ : $188 : 177 : 100$.

2. একটি ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ দুইটি যথাক্রমে $95°$ ও $30°$. ত্রিভুজটির বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।

উ : $996 : 819 : 500$.

3. ABC ত্রিভুজের তিনটি কোণ যথাক্রমে $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{18}$ এবং $\frac{17\pi}{36}$ হলে, $a : b : c$ নির্ণয় কর।

উ : $707 : 766 : 996$.

7.7. দুইটি কোণ ও একটি বাহু দেওয়া আছে

আমরা জানি, $A + B + C = 180°$, যেখানে প্রদত্ত কোণদ্বয়ের মান বসিয়ে তৃতীয় কোণের মান বের করা যায়। এরপর $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ সূত্র প্রয়োগ করে অপর বাহুদ্বয়ের মান নির্ণয় করতে হবে।

সমস্যা নং 7.7	তারিখ :

সমস্যা : ABC ত্রিভুজে $a = 39$ cm., $A = 81°$ এবং $B = 27°$ হলে, ত্রিভুজটির অপর বাহুদ্বয় নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান :

তত্ত্ব : সূত্র $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

কার্যপদ্ধতি :

1. $A + B + C = 180°$ থেকে $C = 180° - 81° - 27° = 72°$ নির্ণয় করি।
2. প্রদত্ত সূত্র থেকে $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ বা, $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{39 \sin 27°}{\sin 81°}$ [a, A, B এর মান বসিয়ে]

   $\therefore b = 17.93$ cm. (প্রায়)।
3. আবার প্রদত্ত সূত্রে থেকে $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ বা, $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{39 \sin 72°}{\sin 81°}$ [a, C, A এর মান বসিয়ে]

   $\therefore c = 37.55$ cm. (প্রায়)।

ফল সংকলন :

a	A	B	$C = 180° - A - B$	$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$	$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$
39 cm.	$81°$	$27°$	$72°$	17.93 cm.	37.55 cm.

শ্রেণির কাজ :

1. ABC ত্রিভুজে $A = 38°20'$, $B = 45°$ এবং $b = 64$ cm. হলে, c এর মান নির্ণয় কর।

উ: 89.9 cm. (প্রায়)।

2. ABC ত্রিভুজে $B = 45°$, $C = 10°$ এবং $a = 200$ cm. হলে, b এর মান নির্ণয় কর।

উ: 172.64 cm. (প্রায়)।

3. ABC ত্রিভুজে $B = 70°30'$, $C = 78°10'$ এবং $a = 102$ cm. হলে, b ও c এর মান নির্ণয় কর।

উ: $b = 185$ cm. $c = 192$ cm.

4. ABC ত্রিভুজের $B = 52°28'$, $C = 93°40'$ এবং $a = 19$ সে.মি. হলে, অপর বাহুদ্বয় নির্ণয় কর।

উ: $b = 27.04$ সে.মি., $c = 34.02$ সে.মি.।

7.8.1. ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে

মনে করি, যে কোন ত্রিভুজ ABC এর দুইটি বাহু a, b এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ C দেওয়া আছে। আমরা জানি, $\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$. এ সূত্রে প্রদত্ত a, b, C এর মান বসিয়ে $(A - B)$ নির্ণয় করা যায়।

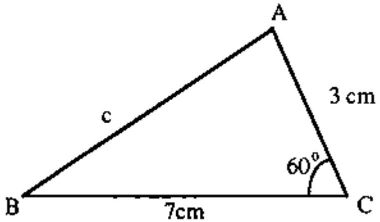
আবার $A + B + C = 180^\circ$. যা থেকে $A + B$ নির্ণয় করা যায় [$\because \angle C$ দেওয়া আছে]। এরপর সমাধান করে A ও B এর মান নির্ণয় করা হয়।

সমস্যা নং 7.8.1	তারিখ :

সমস্যা : ABC ত্রিভুজে $a = 7$ cm., $b = 3$ cm. এবং $C = 60^\circ$ হলে, A এবং B এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান :

তত্ত্ব : সূত্র $\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$.



কার্যপদ্ধতি :

1. সূত্রে a, b এবং C এর মান বসিয়ে

$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{7-3}{7+3}\cot 30^\circ = \frac{4}{10\tan 30^\circ} = 0.692820$

$\therefore \frac{A-B}{2} = 34^\circ.42'54''$ বা, $\frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 34^\circ.42'54''$ .... (i)

2. যেহেতু $A + B + C = 180^\circ$, সুতরাং $A + B + 60^\circ = 180^\circ$ বা, $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 60^\circ$ ....(ii)

3. (i) এবং (ii) সমাধান করে, $A = 94^\circ 42'54''$, $B = 25^\circ.17'6''$.

ফল সংকলন :

a	b	$\angle C$	$\frac{A}{2} - \frac{B}{2}$	$\frac{A}{2} + \frac{B}{2}$	$\angle A$	$\angle B$
7 cm.	3 cm.	60°	$34^\circ.42'54''$	60°	$94^\circ.42'54''$	$25^\circ.17'6''$

শ্রেণির কাজ :

1. ABC ত্রিভুজে $a = 100$ cm., $b = 80$ cm. এবং $C = 60^\circ$ হলে, ত্রিভুজটি সমাধান কর।

উ : $A = 70^\circ 53'36''$, $B = 49^\circ 6'24''$, $c = 91.5$ cm.

2. ABC ত্রিভুজে $b = 9$ cm., $c = 6$ cm. এবং $A = 60^\circ$ হলে, B এবং C এর মান নির্ণয় কর।

উ : $B = 79^\circ 6'24''$, $C = 40^\circ 53'36''$.

3. ABC ত্রিভুজে $a = 21$, $b = 11$ এবং $C = 34^\circ 42'30''$ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

উ : $A = 117^\circ 38'44''$, $B = 27^\circ 38'46''$.

7.8.2. দুইটি বাহু এবং তাদের একটির বিপরীত কোণ দেওয়া আছে

মনে করি, ABC ত্রিভুজের b, c এবং B দেওয়া আছে। তাহলে, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ থেকে ত্রিভুজের অপর রাশিগুলো নির্ণয় করা যায়।

সমস্যা নং 7.8.2	তারিখ :

সমস্যা : ABC ত্রিভুজে $b = 16$ cm., $c = 25$ cm. এবং $B = 33^\circ$ হলে, C এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান :

তত্ত্ব : সূত্র $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

কার্যপদ্ধতি :

1. প্রদত্ত তথ্য সূত্রে বসিয়ে $\frac{16}{\sin 33^\circ} = \frac{25}{\sin C}$

বা, $\sin C = \frac{25 \sin 33^\circ}{16} = 0.850998$

$\therefore C = 58^\circ 19' 13''$ (প্রায়)।

2. আমরা পাই $\sin C = \sin 58^\circ 19' 13'' = \sin (180^\circ - 58^\circ 19' 13'')$

সুতরাং, $C = 58^\circ 19' 13''$ বা, $121^\circ 40' 47''$.

যেহেতু $c > b$ (প্রদত্ত), $\therefore C > B$. সুতরাং, C এর উভয় মানই গ্রহণযোগ্য।

ফল সংকলন : $C = 58^\circ 19' 13''$ বা, $121^\circ 40' 47''$.

মন্তব্য : সূত্র থেকে আমরা পাই $\sin C = \frac{c \sin B}{b}$

(i) যদি $c \sin B > b$ হয়, তবে ডানপক্ষের মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হবে। যেহেতু $\sin C$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না, সুতরাং এক্ষেত্রে C এর সমাধান পাওয়া যাবে না। অর্থাৎ প্রদত্ত তথ্য নিয়ে কোন ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় না।

(ii) যদি $c \sin B = b$ হয়, তবে C এর মান 90° হবে। অর্থাৎ, ত্রিভুজটি হবে সমকোণী।

(iii) যদি $c \sin B < b$ হয়, এবং $b < c$ হয়, তবে C এর জন্য প্রাপ্ত স্থূলকোণটি গ্রহণযোগ্য হবে না।

(iv) যদি $c \sin B < b$ হয়, এবং $b < c$ হয়, তবে C এর জন্য প্রাপ্ত উভয় মানই গ্রহণযোগ্য। এক্ষেত্রে ত্রিভুজ সমাধানে দ্ব্যর্থক্ষেত্র (ambiguous case) বলা হয়।

শ্রেণির কাজ :

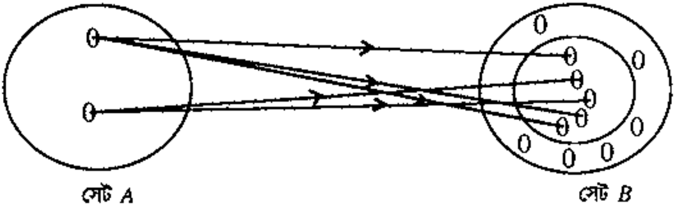
1. যদি ABC ত্রিভুজে $A = 30^\circ$, $a = 4$ cm, $b = 8$ cm. হয়, তাহলে C এর মান নির্ণয় কর। উঃ 60°.
2. যদি ABC ত্রিভুজে $a = 5$ cm., $b = 4$ cm. এবং $A = 45^\circ$ হয়, তাহলে ত্রিভুজটির অপর কোণগুলি নির্ণয় কর। উঃ $B = 34^\circ 26' 58''$, $C = 100^\circ 33' 2''$.
3. ABC ত্রিভুজে $a = 9$ cm., $b = 12$ cm. এবং $A = 30^\circ$ হলে, C এর মান নির্ণয় কর। উঃ $11^\circ 48' 36''$, $C = 108^\circ 11' 24''$.

অষ্টম অধ্যায়

ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র
(Functions and graph of Functions)

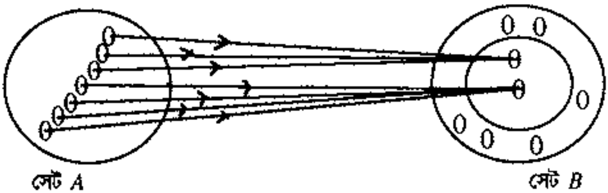
8.1. অন্বয় ও ফাংশন

অন্বয় : মনে করি, A দ্বারা কলেজের কয়েকজন শিক্ষার্থীর সেট এবং B দ্বারা শিক্ষার্থীদের নিজস্ব পাঠ্যপুস্তকের সেট সূচিত করা হলো। ভেনচিত্রের সাহায্যে নিচে A ও B সেট দেখানো হলোঃ

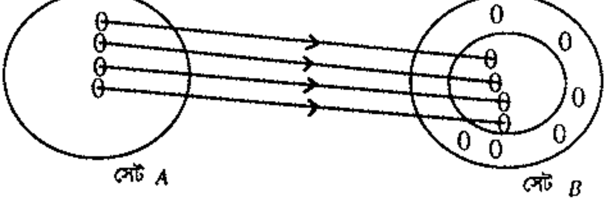


উপরের 'তীর চিহ্ন' পর্যবেক্ষণ করে আমরা সহজেই বলতে পারি A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের সাথে B সেটের একাধিক উপাদানের অন্বয় রয়েছে। কারণ একজন শিক্ষার্থীর একাধিক পাঠ্যপুস্তক থাকতে পারে।

(খ) মনে করি, A দ্বারা শিক্ষার্থীদের এবং B দ্বারা কলেজের ছাত্রাবাসগুলির সেট সূচিত করা হলো। নিচে ভেনচিত্র ও তীরচিহ্ন দ্বারা A সেট থেকে B সেটে অন্বয় দেখানো হলো। একটি ছাত্রাবাসে একাধিক শিক্ষার্থী বাস করতে পারে। সুতরাং A সেটের একাধিক উপাদান B সেটের যে কোন অনন্য *(unique)* উপাদানের সাথে অন্বয় রয়েছে।



(গ) মনে করি, A দ্বারা শিক্ষার্থীদের এবং B দ্বারা তাদের রোল নম্বরের সেট সূচিত করা হলো। ভেনচিত্র ও তীরচিহ্ন দ্বারা নিচে A সেট থেকে B সেটে তা দেখানো হলো। একজন শিক্ষার্থীর কেবল একটি রোল নম্বর থাকতে পারে। সুতরাং A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের সাথে B সেটের যে কোন অনন্য উপাদানের অন্বয় রয়েছে।



(ক) থেকে (গ) উদাহরণের অন্বয়কে ক্রমজোড়ের সেটের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

অন্বয় : ফাঁকা (*Empty*) নয় এরূপ দুইটি সেট A এবং B হলে, গুণজ সেট $A \times B$ অথবা এর উপসেটকে A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয় বলা হয়।

যদি এ অন্বয়কে R দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে $\boldsymbol{R \subseteq A \times B}$.

মনে করি, A সেট থেকে B সেটে R একটি অন্বয়। তাহলে, $R \subseteq A \times B$.

এখন যদি, $a \in A$, $b \in B$ এবং $(a,b) \in R$ হয়, তবে আমরা বলি 'b' এর সাথে 'a' অন্বিত (*Related*) এবং লেখি $a\,R\,b$.

আবার যদি $(a,b) \notin R$, তাহলে আমরা বলি b এর সাথে a অন্বিত নয় এবং লেখি $a \not R\, b$.

মন্তব্য : দুইটি সেটের মাঝখানে '$\subseteq$' ব্যবহার করা হলে বুঝতে হবে যে প্রথম সেটটি দ্বিতীয় সেটের উপসেট অথবা সমান।

অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ : মনে করি, $R \subseteq A \times B$. তাহলে, আমরা জানি R কে বলা হয় A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয়। এখানে

$\boldsymbol{R}$ এর ডোমেন $= \{a : (a, b) \in R\}$; $\boldsymbol{R}$ এর রেঞ্জ $= \{b : (a, b) \in R\}$.

উদাহরণ 1. মনে করি, $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{2, 3, 4\}$ তাহলে,

$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1,4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$.

A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয় R_1 হলে,

$R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$ [$\because R_1$ হলো $A \times B$ এর একটি উপসেট]

উদাহরণ 2. মনে করি, N হলো সব স্বাভাবিক সংখ্যার সেট এবং অন্বয় R_2

$= \{(a, b) : a \in \boldsymbol{N},\ b \in \boldsymbol{N},\ b$ এর একটি উৎপাদক $a\}$.

তাহলে, $2R_2\,6$, $6 \not R_2\, 2$, $5R_2\,15$, $7 \not R_2\, 18$. ইত্যাদি।

বিপরীত অন্বয় : A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয় যদি R, অর্থাৎ $R = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ হয়, তবে B সেট থেকে A সেটের অন্বয় হচ্ছে R এর বিপরীত অন্বয়, যা R^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং, $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$.

ফাংশন (*Function*)

অনুচ্ছেদ 8.1 এর উদাহরণ (খ) ও (গ) থেকে দেখা যাচ্ছে A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের সাথে B সেটের যে কোন অনন্য উপাদান সম্পর্কিত। এ ধরনের অন্বয়কে (*Relation*) বলা হয় A সেট থেকে B সেটে একটি ফাংশন (*a function of A into B*). এ ফাংশনকে সাধারণত f দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং লেখা হয়: $f: A \rightarrow B$.

মন্তব্য : $f: A \rightarrow B$ কে সাধারণভাবে বলা হয় A সেট থেকে B সেটে চিত্রণ (*Mapping of A into B*).

সংজ্ঞা : একটি অন্বয় (***Relation***) যদি এরূপ হয় যে A সেটের প্রত্যেক উপাদান B সেটের অনন্য (***Unique***) উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট (***Associated***) থাকে, তাহলে ঐ অন্বয়কে A সেট থেকে B সেটে একটি ফাংশন বলা হয়।

মন্তব্য : ফাংশনের সংজ্ঞা ক্রমজোড়ের সাহায্যেও দেওয়া যায়। যদি কোন অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় না থাকে, তবে ঐ অন্বয়কে ফাংশন বলা হয়।

সংজ্ঞা : যদি $(a, b) \in f : A \rightarrow B$ হয়, তবে b-কে f এর অধীনে a এর প্রতিচ্ছবি (***image***) বলা হয় এবং $b = f(a)$ লেখা হয়।

উদাহরণ। মনে করি, x হলো $\mathbf{R}$ সেটের উপাদান এবং $\mathbf{R}$ হলো বাস্তব সংখ্যার সেট। $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। যেহেতু $-3 \in R$, $\therefore -3$ এর প্রতিচ্ছবি $f(-3)=(-3)^2 = 9$.

8.2. ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ (*Domain and range of a function*).

মনে করি, A সেট থেকে B সেটে f একটি ফাংশন, অর্থাৎ $f: A \to B$. তাহলে f এর অধীনে A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি B সেটের উপাদানের অন্তর্ভুক্ত থাকে। A সেটের সব উপাদানের প্রতিচ্ছবিগুলো দ্বারা গঠিত সেটকে

f এর রেঞ্জ বলা হয়। A সেটকে f এর ডোমেন বলা হয়। এক্ষেত্রে রেঞ্জকে $f(A)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং, $f(A) \subset B$.

সাধারণভাবে, f এর ডোমেন ও রেঞ্জকে যথাক্রমে ডোম f এবং রেঞ্জ f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ। (a) মনে করি $\mathbf{R}$ বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। তাহলে, ফাংশন f এর রেঞ্জ হলো সব ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং 0(শূন্য) দ্বারা গঠিত সেট।

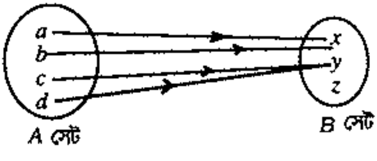
(b) R বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $f: R \to R$ কে $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে, f এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : $-1 \le x \le 1$ এর সীমাবদ্ধতার মধ্যে $f(x)$ এর মান বাস্তব হবে। $\therefore f(x)$ এর ডোমেন : $-1 \le x \le 1$.

আবার, ডোমেনের যেকোনো মানের জন্য f এর প্রতিচ্ছবি 0 থেকে 1 হবে।

$\therefore f$ এর রেঞ্জ : 0 থেকে 1.

(c) নিচের স্কেচ থেকে $f: A \to B$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে হবে।



$\therefore f: A \to B$ এর ডোমেন : $\{a, b, c, d\}$ এবং রেঞ্জ : $\{x, y\}$.

8.3. ফাংশনের প্রকারভেদ

এক–এক ফাংশন (*One-One function*) :

মনে করি, প্রদত্ত ফাংশন হলো $f: A \to B$. যদি $a_1 \in A$ ও $a_2 \in A$ এর ক্ষেত্রে $a_1 \ne a_2$ হলে, $f(a_1) \ne f(a_2)$ হয়, তবে f কে এক–এক ফাংশন বলা হয়। যেমন, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^3$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করলে f এক–এক ফাংশন হবে; কারণ $x = 3, -3$ হলে, $f(3) = 27$ এবং $f(-3) = -27$; এবং অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার জন্য এদের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব সংখ্যা হবে।

সংজ্ঞা : যদি f ফাংশন এর অধীনে তার ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন হয়, তবে f কে এক–এক ফাংশন বলা হয়।

সার্বিক ফাংশন (*Onto function*)

মনে করি, প্রদত্ত ফাংশন হলো $f:A \to B$. তাহলে, f এর রেঞ্জ $f(A)$ হবে B এর উপসেট। যদি $f(A) = B$ হয়, অর্থাৎ B এর সব উপাদানই A এর কমপক্ষে একটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি হয়, তবে f কে সার্বিক ফাংশন বলা হয়।

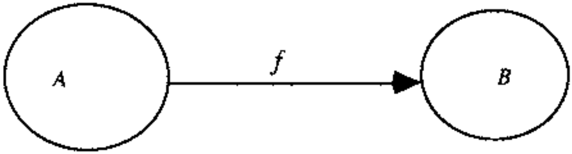
উদাহরণ। মনে করি, $A = [-1,1]$ এবং $f : A \to A$ কে $f(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো।

তাহলে, f একটি সার্বিক ফাংশন, কারণ $f(A) = A$.

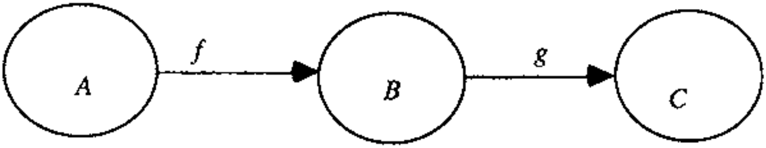
সংযোজিত ফাংশন (*Composition function*):

মনে করি, A সেট থেকে B সেটে বর্ণিত ফাংশনকে f এবং B সেট থেকে C সেটে বর্ণিত ফাংশনকে g দ্বারা সূচিত করা হলো।

A সেট থেকে B সেটে বর্ণিত ফাংশনকে নিচের চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়:



এবং f এবং g ফাংশনদ্বয়কে একত্রে নিচের চিত্রের সাহায্যে দেখানো যেতে পারেঃ



যদি $a \in A$ হয়, তবে f এর অধীনে a–এর প্রতিচ্ছবি অর্থাৎ $f(a)$ হবে B সেটের একটি উপাদান। যেহেতু ফাংশন g এর ডোমেন B এবং B এর একটি উপাদান $f(a)$. সুতরাং g এর অধীনে $f(a)$ এর প্রতিচ্ছবি হবে $g(f(a))$; অর্থাৎ $g(f(a))$ হবে C এর একটি উপাদান। এভাবে A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানকে C সেটের যে কোন অনন্য (*unique*) উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট করা যেতে পারে। অর্থাৎ A সেট থেকে C সেটে একটি ফাংশন পাওয়া যাবে।

এ নতুন ফাংশনকে বলা হয় f এর সাথে g এর সংযোজিত ফাংশন। এটিকে সাধারণত $(g \circ f)$ বা gf দ্বারা সূচিত করা হয়। সংক্ষেপে, $x \in A$ হলে, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

উদাহরণ। A, B, C এর প্রত্যেকে বাস্তব সংখ্যার সেট। $f : A \to B$ কে $f(x) = x^2$ দ্বারা এবং $g : B \to C$ কে $g(x) = x + 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো।

এখন $2 \in A$ হলে, $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 9$.

মন্তব্য : সংজ্ঞা থেকে $(fog)(x) = f(g(x))$ এবং $(gof)(x) = g(f(x))$. সুতরাং $(fog) \neq (gof)$.

অভেদক ফাংশন (*identity function*) ঃ

মনে করি, A একটি সেট এবং $f : A \to A$ কে $f(x) = x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। তাহলে, A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি ঐ একই উপাদান হবে। এ ধরনের ফাংশনকে অভেদ ফাংশন বলা হয়। অভেদ ফাংশনকে সাধারণত I_A দ্বারা সূচিত করা হয়।

ধ্রুব ফাংশন (constant *function*) :

যদি ফাংশন f এর অধীনে A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি B সেটের কেবল একটি উপাদান হয়, তবে $f : A \to B$ কে ধ্রুব ফাংশন বলা হয়। অন্যভাবে বলা যায় যে ফাংশন f একটি ধ্রুব ফাংশন, যদি f এর রেঞ্জে কেবল একটি উপাদান অন্তর্ভুক্ত থাকে।

উদাহরণ। মনে করি, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। তাহলে, f একটি ধ্রুব ফাংশন; কারণ x এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান সব সময় 7 হবে।

একটি ফাংশনের বিপরীত (Inverse *of* a *function*)

মনে করি, A সেট থেকে B সেটে f একটি ফাংশন এবং $b \in B$. তাহলে, f এর অধীনে A সেটের যে সকল উপাদানের প্রত্যেকের প্রতিচ্ছবি b হবে ঐ উপাদানগুলোর সেটকে b এর বিপরীত (*inverse of b*) বলা হয় এবং $f^{-1}(b)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। গাণিতিকভাবে, যদি $f : A \to B$ হয়, তবে $f^{-1}(b) = \{x : x \in A, f(x) = b\}$.

উদাহরণ। মনে করি, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ বাস্তব সংখ্যার সেট) কে $f(x) = x^2$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। তাহলে, $f(2) = 4$ এবং $f(-2) = 4$. যেহেতু -2 এবং 2 এর উভয়ের প্রতিচ্ছবি 4, সুতরাং $f^{-1}(4) = \{2, -2\}$.

আবার $f^{-1}(-9) = \varnothing$ (ফাঁকা সেট), কারণ $\mathbf{R}$ এ কোন উপাদান নেই যার বর্গ হলো -9.

বিপরীত ফাংশন (Inverse *function*) :

ধরি, A সেট থেকে B সেটে f একটি ফাংশন। তাহলে, $f^{-1}(b)$ দ্বারা A সেটের এমন এক বা একাধিক উপাদান সূচিত করে যার বা যাদের প্রতিচ্ছবি হচ্ছে b. b যদি A সেটের কোন উপাদানের প্রতিচ্ছবি না হয় তবে $f^{-1}(b)$ একটি ফাঁকা সেট। যদি $f : A \to B$ এক–এক এবং সার্বিক উভয় ধরনের ফাংশন হয়, তবে প্রত্যেকটি $b \in B$ এর জন্য $f^{-1}(b)$ এর অনন্য উপাদান A সেটে অন্তর্ভুক্ত থাকবে। সুতরাং প্রত্যেকটি $b \in B$ এর জন্য A সেটে অনন্য **(Unique)** উপাদান পাওয়া যায়। তাহলে, f^{-1} হলো B সেট থেকে A সেটে একটি ফাংশন। এ ফাংশনকে $f^{-1} : B \to A$ দ্বারা সূচিত করা হয়। f^{-1} কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হয়। সুতরাং $f : A \to B$ এক–এক এবং সর্বগ্রাহী উভয় ধরনের ফাংশন না হলে বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান থাকে না।

উদাহরণ। মনে করি, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^3 + 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে। তাহলে f এক–এক এবং সার্বিক উভয় ধরনের ফাংশন। অতএব, f এর বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান।

এখন f এর অধীনে x এর প্রতিচ্ছবি y হলে, আমরা পাই, $y = f(x) = x^3 + 7$ ... (i)

সুতরাং f^{-1} এর অধীনে y এর প্রতিচ্ছবি x হলে, $x = f^{-1}(y)$

(i) থেকে আমরা পাই, $x^3 = y - 7$

বা, $x = \sqrt[3]{y - 7}$

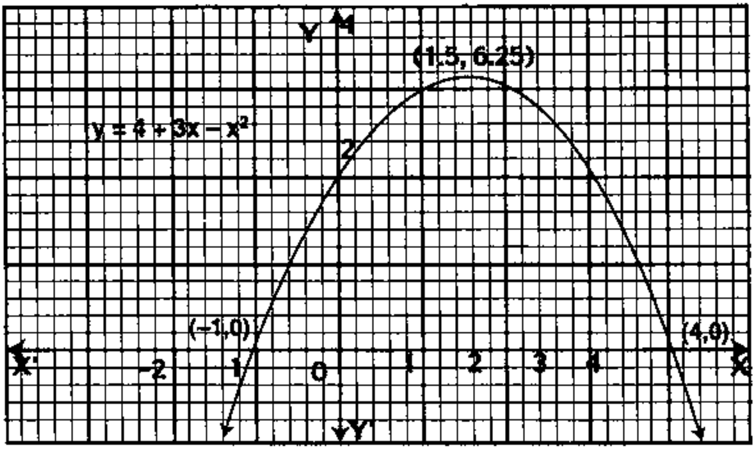
$\therefore f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y - 7}$.

সুতরাং $f(x)$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 7}$.

8.4 সর্বদা প্রয়োজনীয় (Elementary) ফাংশনের স্কেচ

8.4.1 দ্বিঘাত ফাংশনের স্কেচ :

মনে করি, $y = 4 + 3x - x^2$



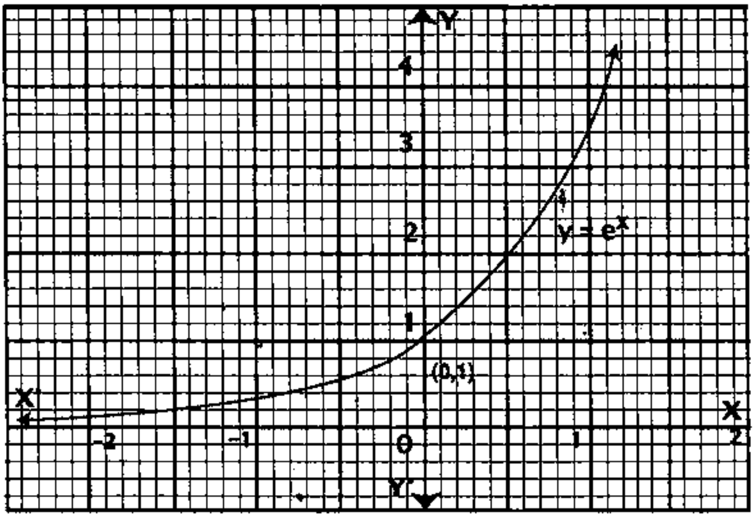
বৈশিষ্ট্য : (i) স্কেচটি একটি পরাবৃত্ত যার অক্ষটি y-অক্ষের সমান্তরাল।

(ii) স্কেচটি x-অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে এবং y–অক্ষকে একটি বিন্দুতে ছেদ করে।

(iii) স্কেচটি x-অক্ষের নিচের দিকে তৃতীয় ও চতুর্থ চর্তুভাগে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

8.4.2 সূচক ফাংশনের স্কেচ :

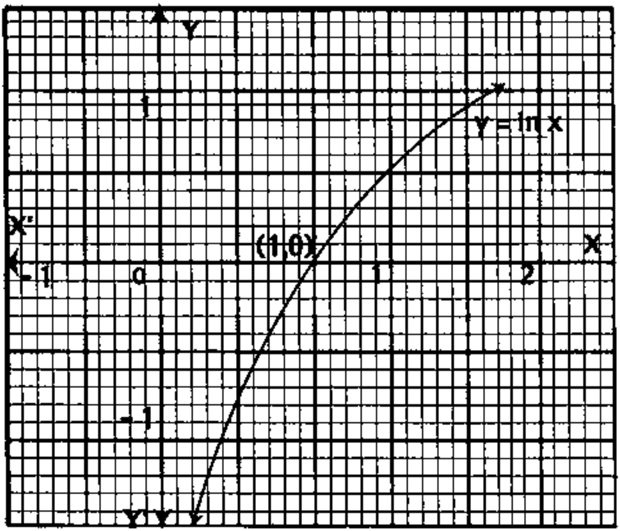
মনে করি, $y = e^x$.



বৈশিষ্ট্য : (i) সম্পূর্ণ স্কেচটি x-অক্ষের উপরিভাগে অবস্থিত।
(ii) স্কেচটি x-অক্ষের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয়দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।
(iii) যেহেতু $y \to 0$, যখন $x \to -\infty$, সুতরাং স্কেচটি x-অক্ষকে ছেদ করবে না।

8.4.3. লগারিদম ফাংশনের স্কেচ :

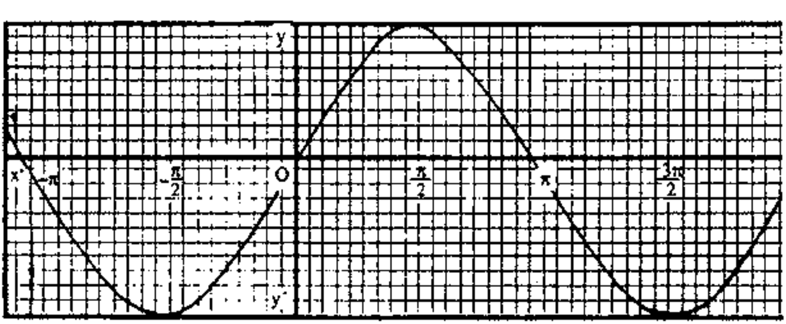
মনে করি, $y = ln\ x$.



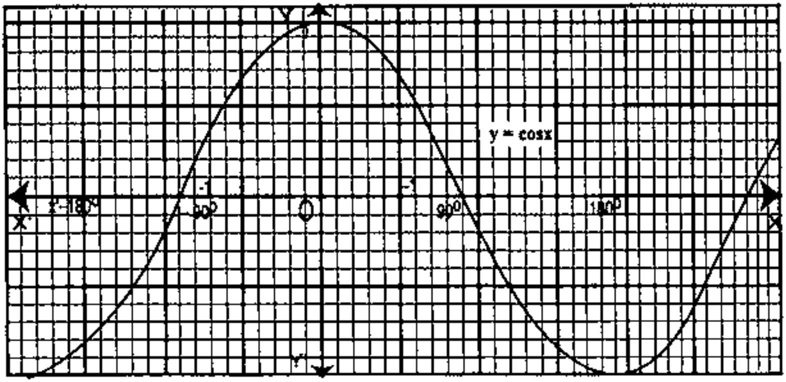
বৈশিষ্ট্য : (i) কেবল $x > 0$ হলেই $ln\ x$ সংজ্ঞায়িত। সুতরাং স্কেচের সব অংশই y-অক্ষের ডানদিকে থাকবে।
(ii) x এর মান যতই ক্ষুদ্র হবে স্কেচটি ততই y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে অগ্রসর হবে কিন্তু কখনই y-অক্ষকে ছেদ করবে না।

8.4.4. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের স্কেচ :

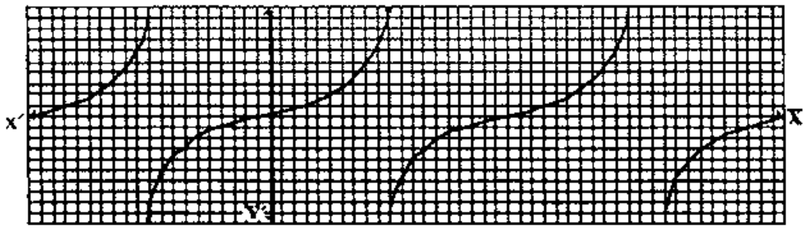
নিচে **$\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \operatorname{cosec} x, \sec x$** এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো :



$\sin x$ এর স্কেচ



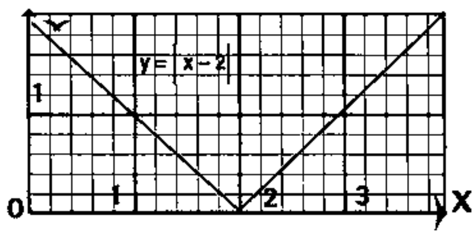
cos x এর স্কেচ



tan x এর স্কেচ

8.4.5. পরম মান ফাংশনের স্কেচ :

মনে করি, $y = |x - 2|$



8.5. ফাংশন ও রূপান্তরিত ফাংশনের স্কেচ

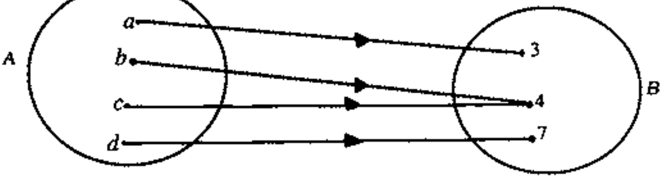
মনে করি, A সেট থেকে B সেটে বর্ণিত ফাংশন হলো f, অর্থাৎ $f : A \rightarrow B$. তাহলে, f থেকে ক্রমজোড় (a, b) পাই, যেখানে ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান $a \in A$ এবং ক্রমজোড়ের দ্বিতীয় উপাদান b হলো a এর প্রতিচ্ছবি অর্থাৎ $b \in B$.

এভাবে প্রাপ্ত সব ক্রমজোড়ের প্রতিরূপী বিন্দুগুলো কার্তেসীয় সমতলে স্থানাঙ্কিত করে f এর চিত্ররূপ নির্ণয় করা যায়। এ চিত্ররূপকেই f এর লেখচিত্র বলা হয়। এ লেখচিত্রকে সাধারণভাবে f^* দ্বারা সূচিত করা হয়। অর্থাৎ

$$f^* = \{(a, b) : a \in A, b = f(a)\}$$

মন্তব্য : ফাংশনের লেখচিত্রে $A \times B$ এর কয়েকটি উপাদান অন্তর্ভুক্ত থাকে। $\therefore f: A \rightarrow B$ এর লেখচিত্র f^* হলো $A \times B$ এর উপসেট।

উদাহরণ। নিচের চিত্র দ্বারা $f: A \rightarrow B$ কে সংজ্ঞায়িত করা হলোঃ



তাহলে, $f(a) = 3, f(b) = 4, f(c) = 4$ এবং $f(d) = 7$. সুতরাং, $f^* = \{(a, 3), (b, 4), (c, 4), (d, 7)\}$.

উপরের চিত্র থেকে লক্ষ করি :

(1) A সেটে একটি মান প্রদানের ফলে B সেট থেকে একটি প্রতিসঙ্গী মান পাওয়া গেছে।

(2) A সেটে একটি মান প্রদানের জন্য B সেট থেকে অনন্য *(unique)* মান নির্ণীত হয়েছে।

f এর এ দুইটি বৈশিষ্ট্যের জন্য f এর লেখচিত্র থেকে নিচের দুইটি বৈশিষ্ট্য পাওয়া যায় :

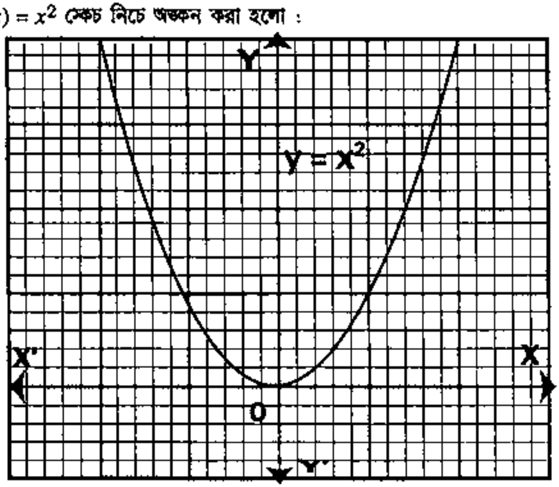
(i) প্রত্যেকটি $a \in A$ এর জন্য লেখচিত্রে একটি ক্রমজোড় (a, b) পাওয়া যায়, অর্থাৎ $(a, b) \in f^*$.

(ii) প্রত্যেকটি $a \in A$ এর জন্য f^* সেটের ক্রমজোড়গুলোর কেবল একটি ক্রমজোড়ে a প্রথম উপাদান হিসাবে থাকে। অর্থাৎ, $(a, b) \in f^*$ এবং $(a, c) \in f^*$ হলে, $b = c$.

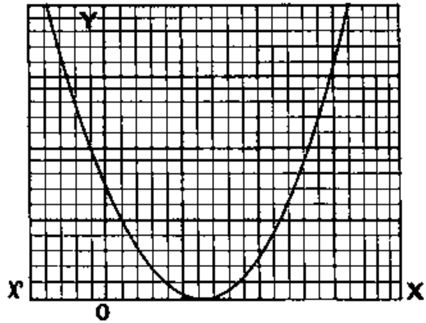
8.5.1 একটি প্রদত্ত ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন করে উক্ত ফাংশনের রূপান্তরিত ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন করা :

উদাহরণ : $f(x) = x^2$ এর স্কেচ থেকে রূপান্তরিত $g(x) = (x-2)^2$ এবং $g(x) + 3 = (x-2)^2 + 3$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।

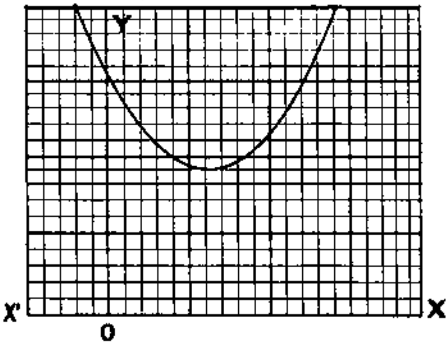
সমাধান : (i) $f(x) = x^2$ স্কেচ নিচে অঙ্কন করা হলো :



(ii) এখন স্কেচটি আনুভূমিক দিকে $+ 2$ একক সরালে $g(x) = (x - 2)^2$ এর স্কেচ পাওয়া যাবে। স্কেচটি হলো :



(iii) উপরের (ii) এর স্কেচ উল্লম্বভাবে $+ 3$ একক সরালে $g(x) + 3 = (x - 2)^2 + 3$ এর স্কেচ পাওয়া যাবে। পাশে স্কেচটি অঙ্কন করা হলো। স্কেচটি হলো :



8.6 ফাংশন ও তার বিপরীত ফাংশনের স্কেচ :

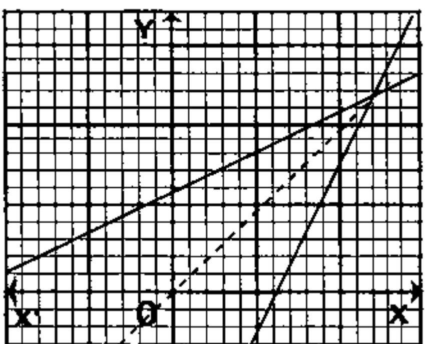
মনে করি, একটি ফাংশন $g(x) = 2x - 4$, যেখানে $x \in \boldsymbol{R}$ এবং $x \geq 0$ দ্বারা সজ্ঞায়িত। এখন $g(x)$ এর বিপরীত ফাংশন $g^{-1}(x)$ নির্ণয় করি।

মনে করি, $y = 2x - 4$

$\Rightarrow y + 4 = 2x$

$\Rightarrow x = \dfrac{y + 4}{2}$

$\therefore g^{-1}(x) = \dfrac{x + 4}{2}$, যেখানে $x \geq -4$.



পাশে একই লেখচিত্রে $g(x)$ এবং $g^{-1}(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো :

পাশের চিত্র দুইটি থেকে লক্ষ করি :

(i) $g(x)$ এর ডোমেনের সেটের একটি উপাদান 0 এর জন্য $g(x)$ এর রেঞ্জের উপাদান -4, যা $g^{-1}(x)$ এর ডোমেনের একটি উপাদান।

(ii) $g^{-1}(x)$ এর ডোমেনের সেটের একটি উপাদান 0 এর জন্য $g^{-1}(x)$ এর রেঞ্জের উপাদান 2, যা $g(x)$ এর ডোমেনের একটি উপাদান।

এভাবে দেখানো যায় যে, $g(x)$ এর ডোমেনের সেটের প্রত্যেক উপাদানের রেঞ্জ হবে $g^{-1}(x)$ এর ডোমেনের সেটের উপাদান এবং বিপরীতক্রমে।

8.7 . ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায় নির্ণয়

ত্রিকোণমিতিক ফাংশন F এর ডোমেনের দুইটি উপাদান (সদস্য) θ এবং $(\theta + P)$, যেখানে $P > 0$, এর জন্য $F(\theta + P) = F(\theta)$ হলে, F কে বলা হয় পর্যায়বৃত্ত ফাংশন (***Periodic function***). যদি P ধনাত্মক ও ক্ষুদ্রতম পর্যায় (***period***) হয়, তবে P কে মৌলিক পর্যায় বলা হয়।

সুতরাং, আমরা দ্বিতীয় অধ্যায়ের আলোচনা থেকে সহজেই বলতে পারি ছয়টি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনই পর্যায়বৃত্ত ফাংশন (*Periodic function*).

প্রতিজ্ঞা : সাইন, কোসাইন, সেকেন্ট এবং কোসেকেন্ট ফাংশনের প্রত্যেকের মৌলিক পর্যায় 2π এবং টেনজেন্ট ও কোটেনজেন্ট ফাংশনের মৌলিক পর্যায় π.

প্রমাণ : (ক) মনে করি, $\theta\ (0 \le \theta \le 2\pi)$ এবং $(\theta + 2\pi)$ হলো সাইন ফাংশনের ডোমেনের দুইটি সদস্য।

এখন $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$.

$\therefore$ সাইন ফাংশনের পর্যায় 2π.

আবার যদি P একটি বাস্তব সংখ্যা হয় যেন $0 < P < 2\pi$, তাহলে,

$\sin(\theta + P) = \sin\theta\cos P + \cos\theta\sin P$ .... (i)

এখন (i) এর ডান পক্ষ $= \sin\theta$ হতে পারে যদি একই সংগে $\sin P = 0$ এবং $\cos P = 1$.

কিন্তু $0 < P < 2\pi$ ব্যবধিতে P এর এমন কোন মান নেই যেন একই সংগে $\sin P = 0$ এবং $\cos P = 1$ হতে পারে।

সুতরাং, P অর্থাৎ 2π অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা সাইন ফাংশনের পর্যায় হতে পারে না।

$\therefore$ সাইন ফাংশনের মৌলিক পর্যায় 2π হবে।

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে কোসাইন ফাংশনের মৌলিক পর্যায় 2π.

(খ) মনে করি, $\theta\ (0 \le \theta \le 2\pi)$ এবং $(\theta + 2\pi)$ হলো সেকেন্ট ফাংশনের ডোমেনের দুইটি সদস্য।

এখন $\sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta$ **$\therefore$ সেকেন্ট ফাংশনের পর্যায় 2π.**

আবার যদি P একটি বাস্তব সংখ্যা হয় যেন $0 < P < 2\pi$, তাহলে

$$\sec(\theta + P) = \frac{1}{\cos(\theta + P)} = \frac{1}{\cos\theta\cos P - \sin\theta\sin P} \text{ .... (ii)}$$

এখন ডানপক্ষ, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ হতে পারে যদি একই সংগে $\cos P = 1$ এবং $\sin P = 0$. কিন্তু তা সম্ভব নয়। সুতরাং, P অর্থাৎ 2π অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোন বাস্তব সংখ্যা সেকেন্ট ফাংশনের পর্যায় হতে পারে না।

$\therefore$ সেকেন্ট ফাংশনের মৌলিক পর্যায় 2π.

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে কোসেকেন্ট ফাংশনের মৌলিক পর্যায় 2π.

(গ) আবার $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$ এবং $\cot(\theta + \pi) = \cot\theta$.

সুতরাং, টেনজেন্ট ফাংশন ও কোটেনজেন্ট ফাংশনের মৌলিক পর্যায় π.

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. ফাংশন f কে $f(x)=x^2$, যেখানে $-2\leq x\leq 8$, দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f(2), f(y-5)$ এবং $f(-5)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $f(2) = (2)^2 = 4.$

$f(y-5) = (y-5)^2 = y^2-10y+25.$ কিন্তু এ সূত্রটি সত্য হবে যদি $-2 \leq y-5 \leq 8,$

অর্থাৎ $3 \leq y \leq 13.$

$f(-5)$ এর মান সংজ্ঞায়িত নয়, কারণ -5 ফাংশনের ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত নয়।

উদাহরণ 2. R বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ কে $f(x)=x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যা a এর একটি ঘনমূল $\sqrt[3]{a}$ আছে, যা একটি বাস্তব সংখ্যা।

$\therefore f(\sqrt[3]{a}) = (\sqrt[3]{a})^3 = a.$

অর্থাৎ প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যা (বাস্তব সংখ্যার সেটের একটি উপাদান) থেকে যে প্রতিচ্ছবি পাওয়া যায় তাও বাস্তব সংখ্যা। সুতরাং f এর রেঞ্জ হলো বাস্তব সংখ্যার সেট।

উদাহরণ 3. A, B, C এর প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যার সেট। $f:A\to B$ এবং $g:B\to C$ ফাংশনদ্বয়কে যথাক্রমে

$f(x)=x+1$ এবং $g(x)=x^2+2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। সংযোজিত ফাংশন (gof) নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি $(gof)(x) = g(f(x)).$

$$\therefore (gof)(x) = g(x+1) = g(z) \quad [z = x+1 \text{ ধরে}]$$
$$= z^2+2 \quad [\because g(x) = x^2+2]$$
$$= (x+1)^2 + 2 = x^2+2x+3.$$

উদাহরণ 4. R বাস্তব সংখ্যার সেট, $A = \mathbf{R}-\{3\}, B=\mathbf{R}-\{1\}$ এবং $f: A\to B$ কে $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। প্রমাণ কর যে, f এক–এক এবং সর্বগ্রাহী উভয় ধরণের ফাংশন। যে সূত্র দ্বারা f^{-1} কে সংজ্ঞায়িত করা যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান : (i) মনে করি, x_1 এবং x_2 দুইটি ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব সংখ্যা, যেখানে $x_1 \neq 3$ এবং $x_2 \neq 3.$

তাহলে, $f(x_1) = f(x_2)$ হলে, আমরা পাই

$\dfrac{x_1-2}{x_1-3} = \dfrac{x_2-2}{x_2-3} \Rightarrow (x_1-2)(x_2-3) = (x_1-3)(x_2-2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \therefore f$ এক এক ফাংশন।

আবার মনে করি, $y = \dfrac{x-2}{x-3}$, যেখানে $y \in \boldsymbol{R} \ (y \neq 1)$

তাহলে, $y(x-3) = x-2 \Rightarrow x = \dfrac{3y-2}{y-1}$

$$\therefore f\left(\frac{3y-2}{y-1}\right) = \frac{\dfrac{3y-2}{y-1}-2}{\dfrac{3y-2}{y-1}-3} = y \text{ অর্থাৎ } f(A) = B\ .$$

সুতরাং f হলো সার্বিক ফাংশন।

(ii) মনে করি, $y = \dfrac{x-2}{x-3}$

তাহলে, $y(x-3) = x-2$ বা, $yx-3y = x-2$ বা, $x(y-1) = 3y-2$

বা, $x = \dfrac{3y-2}{y-1} \quad \therefore f^{-1}(y) = \dfrac{3y-2}{y-1}$ অর্থাৎ, $f^{-1}(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}.$

প্রশ্নমালা 8.1

1. (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ সেট থেকে $B = \{1, 2, 5\}$ সেটে F একটি অন্বয়, যেখানে $F = \{(x, y) : x \in A, y \in B, x < y\}$, F সেট নির্ণয় কর।

   (b) নিচের ফাংশনগুলি এক এক এবং সার্বিক কিনা তা কারণসহ উল্লেখ কর :

   (i) $f_1 : R \to R$, $f_1(x) = x^5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। (ii) $f : R \to R$, $f(x) = x^3 + 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। [ঢা. ব. সি. '১৩]

2. মনে কর, একটি ফাংশনকে $-1 \leq x \leq 7$ ব্যবধিতে $f(x) = x^2 + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। তাহলে, মান নির্ণয় কর:

   (i) $f(5)$ (ii) $f(-7)$ (iii) $f(-0{\cdot}5)$ (iv) $f(t - 3)$.

3. (i) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x \geq 2 \\ x + 2, & x < 2. \end{cases}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f(7)$, $f(0)$, $f(5)$ এবং $f(-2)$ নির্ণয় কর। [সি. '১১; রা. '১২]

   (ii) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{যখন } x \geq 2 \\ x + 2, & \text{যখন } x < 2. \end{cases}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। [ব. '১০]

   $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(-4)$, $f(5)$ ও $f(-2)$ এর মান নির্ণয় কর।

4. মনে কর, বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbf{R}$ এবং $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে নিচের সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{যদি } x > 3 \\ x^2 - 2 & \text{যদি } -2 \leq x \leq 3 \\ 2x + 3 & \text{যদি } x < -2. \end{cases}$$

   মান নির্ণয় কর : (ক) $f(2)$ (খ) $f(4)$ (গ) $f(-1)$ (ঘ) $f(-3)$ (ঙ) $f(4.5)$ (চ) $f(0)$.

   [রা. চ. '০৮; ঢা. চ. '১২; কু. '১৩]

5. সব বাস্তব সংখ্যার সেট R এবং $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$, $f : A \to R$ কে $f(x) = x^2 + x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, f এর রেঞ্জ (*Range*) নির্ণয় কর।

6. $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ এবং $f : A \to B$ কে $f(x) = x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [কু. '১২]

7. মনে কর, $A = \{-2, -1, 0\}$, $f : A \to \mathbf{R}$, (যেখানে $\mathbf{R}$ বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং f কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

8. মনে কর, $A = \{-4, -3, -2, 0, 3, 4\}$ এবং $f : A \to B$ কে $f(x) = x^2 + x - 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

9. $f : R \to \mathbf{R}$, কে (i) $f(x) = x^5$, (ii) $f(x) = \cos x$ (iii) $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। [কু. '০৭]

10. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 5\}$ এবং $f : A \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

11. মনে কর সেট $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ এবং $f : A \to \mathbf{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + 2x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

12. X, Y বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbf{R}$ এর দুইটি উপসেট এবং $f : X \to Y$, যেখানে $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$, ফাংশন f এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [সি. '১১; কু. '১০; দি. '১২; য. '১৩]

13. মনে কর, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2 - 4x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। মান নির্ণয় কর ঃ
(ক) $f(4)$ (খ) $f(-3)$ (গ) $f(y - 2z)$.

14. (ক) $f: R \to \mathbf{R}$, ফাংশনটি $f(x) = 2x - 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, প্রমাণ কর যে, ফাংশনটি এক–এক এবং সার্বিক। f^{-1} নির্ণয় কর। [চ. '১০; '১৩; রা. '১১]
(খ) $f: R - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ফাংশনটি $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ হলে, $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

15. $A = \{x : -1 \le x \le 1\}, f: A \to A$ এবং $g: A \to A$ কে যথাক্রমে $f(x) = x^4$ এবং $g(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এবং g এর মধ্যে কোন্‌টি সার্বিক ফাংশন ?

16. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। মান নির্ণয় কর ঃ
(ক) $f^{-1}(5)$ (খ) $f^{-1}(0)$ (গ) $f^{-1}(10)$. [ব. কু.'১১]

17. (i) বাস্তব সংখ্যার দুইটি ফাংশন f এবং g কে যথাক্রমে $f(x) = x^2 + 2x - 3$ এবং $g(x) = 3x - 4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। যে সূত্রদ্বয় দ্বারা $g \circ f$ এবং $f \circ g$ ফাংশনদ্বয়কে সংজ্ঞায়িত করা যায় তা নির্ণয় কর এবং প্রাপ্ত সূত্রদ্বয় থেকে $(g \circ f)(2)$ এবং $(f \circ g)(2)$ এর মান নির্ণয় কর। [দি. '১০, '১৩; ব. সি.'১২]
(ii) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + 1$ হলে, $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ এবং $(f \circ g)(2)$ এর মান নির্ণয় কর। [ঢা.'১১; ব. '০৯]
(iii) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এবং $g(x) = 2x - 3$ হলে, (ক) $(f \circ g)(x)$, (খ) $(g \circ f)(x)$, [সি.'১০]
(গ) $(f \circ f)(x)$, (ঘ) $(gof)(2)$ এবং (ঙ) $(fog)(2)$ নির্ণয় কর। [রা.'১৩]
(iv) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, যেখানে $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = x^3 + 1$, যখন $x = -3$ হলে, দেখাও যে, $f \circ g \neq g \circ f$.
(v) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ এবং $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 2|x|$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ হলে, $(f \circ g)(-2)$, $(fog)(5)$, $(g \circ f)(-4)$ এবং $(g \circ f)(3)$ নির্ণয় কর। [সি.'০৮]

18. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ এবং $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে যথাক্রমে $f(x) = 2x - 5$ এবং $g(x) = x^2 + 6$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। মান নির্ণয় কর ঃ
(i) $f(7)$ (ii) $g(-2)$ (iii) $(gof)(2)$, [রা.'১৩] $(fog)(2)$ (iv) $(fog)(5)$ [রা.'১৩]
(v) $g(t-1)$ (vi) $f(g(t-1))$ (vii) $f(g(x+2))$ (viii) $g(g(x))$.

19. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$ হলে, সংযোজিত ফাংশন (i) fog (ii) gof নির্ণয় কর। প্রত্যেকটি সংযোজিত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

20. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2$ দ্বারা সূত্রায়িত করা হলো। মান নির্ণয় কর :
(ক) $f^{-1}(36)$, $f^{-1}(16)$, $f^{-1}(-16)$
(গ) $f^{-1}([-\infty, 0])$ (ঘ) $f^{-1}([1, 16])$.

21. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2 - 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f^{-1}(2)$ এর মানকে সেটে প্রকাশ কর। [রা.'১০]

22. $M = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $f: \mathbf{M} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2 + 2x - 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f^* নির্ণয় কর।

23. নিচের সূত্রগুলোর প্রত্যেকটি $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে সংজ্ঞায়িত করে। কার্তেসীয় সমতল, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ এ সূত্রগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর : (ক) $f(x) = 2x - 1$ (খ) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ (গ) $f(x) = x - 3|x|$.

24. $y = 3x - 5, (x \in \boldsymbol{R})$ এর স্কেচ অঙ্কন করে ঐ স্কেচ থেকে $y = |3x - 5|$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।

25. $y = \cos x \ (x \in \boldsymbol{R})$ এর স্কেচ অঙ্কন করে ঐ স্কেচ থেকে $y = \cos 2x$ এবং $y = \cos 2x + 3$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।

26. যদি $g(x)$ ফাংশনকে $g(x) = 3x - 6 \ (x \in \boldsymbol{R}, x \geq 2)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়, তাহলে,

   (i) $g^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

   (ii) একই লেখচিত্রে উভয় ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন কর।

   (iii) স্কেচ দুইটি থেকে কি ধরনের সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয়?

27. নিচের ফাংশন $f(x)$ থেকে একই লেখচিত্রে $f(x)$ এবং $f^{-1}(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন কর। $f^{-1}(x)$ সূত্র ও এর সমীকরণও নির্ণয় কর।

   (i) $f(x) = 2x - 5 \ (x \in \boldsymbol{R})$

   (ii) $f(x) = 5 - x \ (x \in \boldsymbol{R})$

   (iii) $f(x) = x^2 + 3 \ (x \in \boldsymbol{R}, x \geq 0)$

28. নিচের ফাংশনগুলির মৌলিক পর্যায় (যদি থাকে) নির্ণয় কর :

   (i) $2 \cos \frac{\theta}{2}$; (ii) $\frac{1}{2} \cos \frac{2\theta}{3}$; (iii) $\sin \left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$; (iv) $\cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; (v) $7 \sec \frac{\theta}{8}$.

প্রশ্নমালা 8.2

সৃজনশীল প্রশ্ন :

1. (a) এক-এক ফাংশনের সংজ্ঞা লেখ।

   (b) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ফাংশনকে $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। প্রমাণ কর যে, $f(x)$ এক-এক ফাংশন নয়।

   (c) সেট $A = \boldsymbol{R} - \{1\}$ এবং সেট $B = \boldsymbol{R} - \{1\}$ এবং $f: A \to B$ কে $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

2. (a) উদাহরণের মাধ্যমে অন্বয় ও ফাংশনের পার্থক্য ব্যাখ্যা কর।

   (b) সেট $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 5, 6, 7, 13, 15, 22\}$ এবং $f: A \to B$ ফাংশনকে $f(x) = x^2 - 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় কর।

   (c) বাস্তব সংখ্যার দুইটি ফাংশন f এবং g কে যথাক্রমে $f(x) = 2x + 1$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। প্রমাণ কর যে, $(gof)(2) \neq (fog)(2)$;

3. (a) উদাহরণের মাধ্যমে অভেদ ফাংশন ব্যাখ্যা কর।

(b) ফাংশন f কে $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$ $\{x \in \boldsymbol{R}, x \neq 5\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f^{-1} এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(c) ফাংশন f কে $f(x) = 2x - 3$ $\{x \in \boldsymbol{R}, x \geq \frac{3}{2}\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। একই লেখচিত্রে f এবং f^{-1} এর স্কেচ অঙ্কন কর।

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন :

4. $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ $\{x \in \boldsymbol{R}, x \geq 3\}$, f এর রেঞ্জ—

(a) $\frac{5}{6}$ (b) $\boldsymbol{R}$

(c) $\frac{5}{6}$ এর চেয়ে বৃহত্তর সব বাস্তব সংখ্যা (d) $\frac{5}{6}$ এর ক্ষুদ্রতর সব বাস্তব সংখ্যা।

5. $f(x) = 2x - 3$ এবং $g(x) = x^2 - 2$ হলে, $(gof)(-5)$ এর মান —

(a) 43 (b) 167 (c) -43 (d) -167

6. f এবং g বাস্তব সংখ্যার ফাংশন। $f(x) = x^2 - 2$ এবং $g(x) = x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $(fog)(x)$ এর মান—

(a) $x^2 + 9x + 7$ (b) $x^2 + 1$ (c) $x^2 - 9x + 7$ (d) $x^2 + 2x + 3$

7. $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ কে $f(x) = 5x - 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f^{-1}(3)$ এর মান----

(a) 12 (b) -12 (c) $\frac{6}{5}$ (d) $-\frac{6}{5}$

8. $f(x) = \cos x$ এবং $g(x) = x^2$ হলে, $fog\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ এর মান----

(a) $\cos x^2$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) 1 (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ $\{x \in \boldsymbol{R}, x \neq \frac{1}{2}\}$ হলে, $f^{-1}(x)$ এর মান —

(a) $\frac{2x-1}{x+3}; x \neq -3$ (b) $\frac{x+3}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$

(c) $\frac{2x-1}{x+3}$ (d) $\frac{x+3}{2x-1}$

10. $f(x) = 2x + 1$ এবং $g(x) = x - 3$ হলে, $(gof)(2)$ এর ক্ষেত্রে কোন দুইটি সঠিক ?

(a) 2 (b) $(gof)(2) = (fog)(2)$

(c) -1 (d) $(fog)(2) \neq (gof)(2)$

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 8.1

1. (a) $\{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$. **(b)** (i), (ii), (iii) ফাংশনগুলো এক এক এবং সার্বিক কারণ ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব সংখ্যার প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব সংখ্যা এবং $f(R)= R$. **2.(i)** 28; **(ii)** সংজ্ঞায়িত নয়; **(iii)** 3·25; **(iv)** $t^2 - 6t + 12$, যদি $2 \le t \le 10$ হয়। **3. (i)** 70, 2, 40, 0. **(ii)** 2, 1, –2, 4, –2, 10, 0. **4. (ক)** 2, **(খ)** 11, **(গ)** –1, **(ঘ)** – 3, **(ঙ)** 12.5, **(চ)** – 2. **5.** $\{7, 1, 3, 13\}$. **6.** ডোমেন $=\{ 1, 2, 3 \}$ এবং রেঞ্জ $= \{ 2, 3, 4 \}$. **7.** $\{ 5, 2, 1 \}$. **8.** $\{- 3, - 1, 3, 9, 17 \}$. **9. (i)** R **(ii)** $[-1, 1]$ **(iii)** $\{y : y \in R, y \ge 1\}$. **10.** $\{5, 2, 1, 26\}$. **11.** $\{11, 3, 27\}$. **12.** ডোমেন $= R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, রেঞ্জ $= R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. **13. (ক)** 3, **(খ)** 24, **(গ)** $y^2 - 4yz + 4z^2 - 4y + 8z + 3$. **14. (ক)** $\frac{x + 3}{2}$ **(খ)** $\frac{x + 3}{1 - 2x}$. **15.** g সার্বিক ফাংশন। **16. (ক)** $\{- 2, 2\}$, **(খ)** $\varnothing$, **(গ)** $\{3, - 3\}$. **17. (i)** $(g\ o f)(x)= 3x^2 + 6x - 13$, $(f\ o\ g)(x) = 9x^2-18x + 5$, $(g\ o f)(2) =11$, $(fog)(2) = 5$; **(ii)** $(fog)(x) =x^6+ 2x^3+1$, $(gof)(x) =x^6+ 1$, 81. **(iii) (ক)** $(fog)(x) = 4x^2- 6x + 1$, **(খ)** $(gof)(x) = 2x^2 + 6x - 1$, **(গ)** $(fof)(x) = x^4 +6x^3 + 14x^2 + 15x + 4$. **(ঘ)** 19. **(ঙ)** 5. **(iv)** 15, 624, 65, 10. **18. (i)** 9, **(ii)** 10, **(iii)** 7, 15; **(iv)** 57, **(v)** $t^2-2t +7$. **(vi)** $2t^2- 4t+ 9$, **(vii)** $2x^2 + 8x + 15$, **(viii)** $x^4 + 12x^2 + 42$. **19. (i)** $\sqrt{x^2 - 1}$; ডোমেন, $x \le -1$ অথবা $x \ge 1$; রেঞ্জ : সকল অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট। **(ii)** $x- 1$, ডোমেন : R, রেঞ্জ: R. **20. (ক)** $\{6,-6\}$, $\{4, - 4\}$, $\varnothing$; **(খ)** $[-1,1]$; **(গ)** $\{0\}$; **(ঘ)** $\{x : 1 \le x \le 4$ অথবা $- 4 \le x \le -1\}$. **21.** $\{ - 3, 3\}$. **22.** $\{(1, 2), (2,7), (3,14), (4,23)\}$. **27.** (i) $f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{2}$; (ii) $f^{-1}(x) = 5 - x$; (iii) $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 3}$. **28.** (i) 6π; (ii) $\frac{3\pi}{2}$; (iii) π; (iv) 4π; (v) 16π.

প্রশ্নমালা 8.2

1. (c) $\frac{x + 2}{x - 1}$; **2.** (*b*) $\{1, 6, 13, 22\}$; **3.** (*b*) ডোমেন : $R - \{2\}$; রেঞ্জ : $R - \{5\}$; **4.** *c*. **5.** *b*. **6.** *a*. **7.** *c*. **8.** *b*. **9.** *b*. **10.** (*a*) এবং (*d*).

ব্যবহারিক

8.8. অক্ষরেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় (তৃতীয় অধ্যায় দ্রষ্টব্য।)

8.9. নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় (তৃতীয় অধ্যায় দ্রষ্টব্য।)

8.10. ফাংশন ও রূপান্তরিত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

মনে করি, $f(x) = \cos x$ এবং রূপান্তরিত ফাংশন $g(x) = \cos 2x$ এবং $g(x) - 1 = \cos 2x - 1$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমস্যা নং 8.10.1	তারিখ :

সমস্যা : $f(x) = \cos x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান : তত্ত্ব : $f(x) = y = \cos x$, যখন $-180° \leq x \leq 180°$.

কার্যপদ্ধতি :

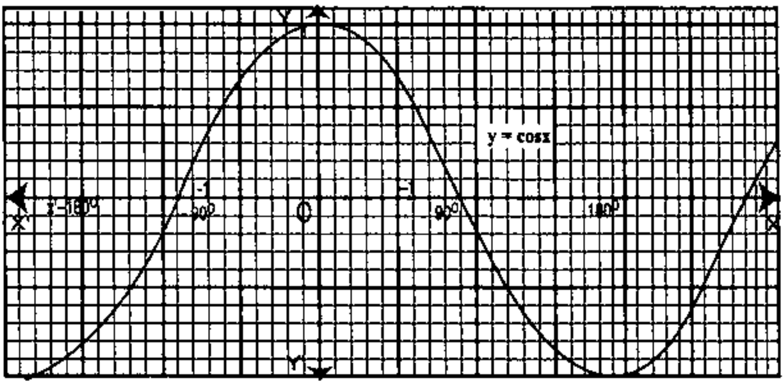
1. ছক কাগজে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ অঙ্কন করি।
2. x-এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = \cos x$ থেকে y এর আনুষঙ্গিক মান বের করি।
3. x-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতর বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 10° এবং y-অক্ষের দিকে 10 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 ধরি
4. প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে সাবলীলভাবে বিন্দুগুলি সংযুক্ত করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি

ফলাফল :

x	− 180°	− 150°	− 120°	− 90°	− 60°	− 30°	0	30°	60°
y	− 1	− 0.87	− 0.5	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5

x	90°	120°	150°	180°
y	0	− 0.5	− 0.87	− 1

লেখচিত্র অঙ্কন :



সমস্যা নং 8.10.2	তারিখ :

সমস্যা : $g(x) = \cos 2x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান : তত্ত্ব : $g(x) = y = \cos 2x$, যখন $-180° \leq x \leq 180°$.

কার্যপদ্ধতি :

1. ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ অঙ্কন করি।

2. x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = \cos 2x$ এর আনুষঙ্গিক মান নির্ণয় করি।

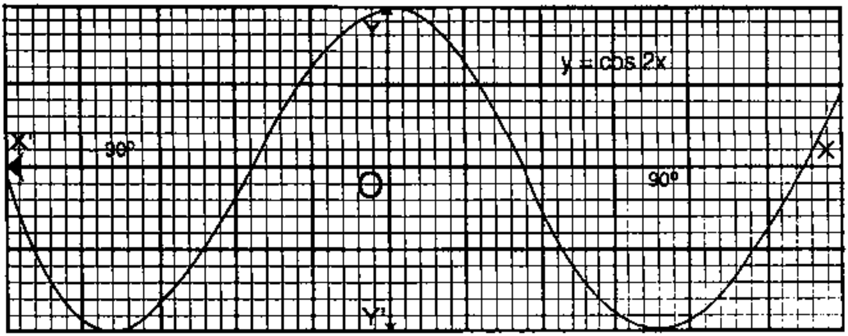
3. x-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতর বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 5° এবং y-অক্ষের দিকে 10 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 ধরি।

4. প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে সাবলীলভাবে বিন্দুগুলি সংযুক্ত করে লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ফলাফল :

x	$-180°$	$-150°$	$-135°$	$-120°$	$-90°$	$-60°$	$-30°$	0
y	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0.5	1
x	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
y	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0	0.5	1

লেখচিত্র অঙ্কন :



সমস্যা নং 8.10.3	তারিখ :

সমস্যা : $g(x) = \cos 2x - 1$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান : তত্ত্ব : $g(x) - 1 = y = \cos 2x - 1$, যখন $-180° \le x \le 180°$.

কার্যপদ্ধতি :

1. ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ অঙ্কন করি।

2. x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = \cos 2x - 1$ এর আনুষঙ্গিক মান নির্ণয় করি।

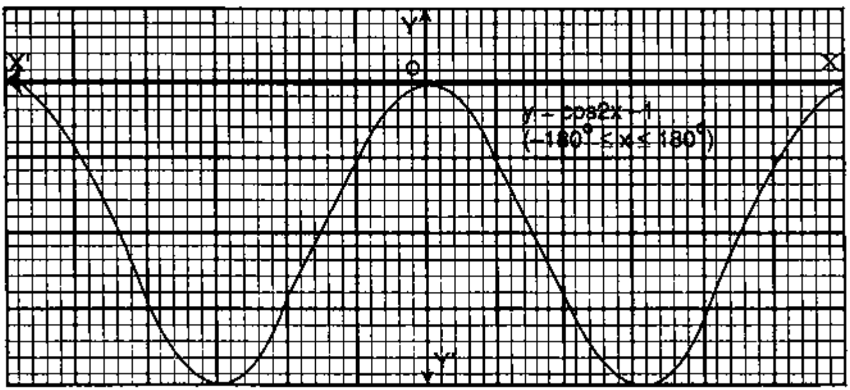
3. x-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতর বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 6° এবং y-অক্ষের দিকে 10 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 ধরি।

4. প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে সাবলীলভাবে বিন্দুগুলি সংযুক্ত করে লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ফলাফল :

x	$-180°$	$-150°$	$-135°$	$-120°$	$-90°$	$-60°$	$-30°$	0
y	0	-0.5	-1	-1.5	-2	-1.5	-0.5	0
x	30°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	
y	-0.5	-1.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	

লেখ অঙ্কন :



8.11. একই লেখচিত্রে ফাংশন ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

সমস্যা নং 8.11	তারিখ : ....

সমস্যা : $f(x) = 2x + 1$ এবং এর বিপরীত ফাংশনের লেখ অঙ্কন করতে হবে।

তত্ত্ব : মনে করি, $y = f(x) = 2x + 1$........ (i)

তাহলে, $x = \frac{1}{2}(y - 1)$

বা, $y = \frac{1}{2}(x - 1)$ [y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে]

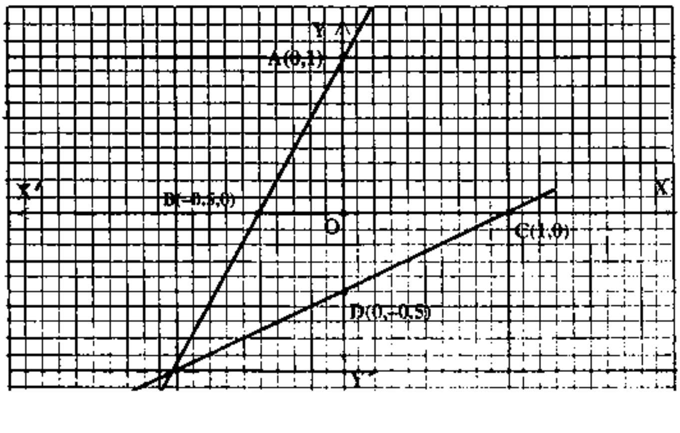
$\therefore$ f এর বিপরীত ফাংশন, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$ ...... (ii)

কার্যপদ্ধতি :

1. ছক কাগজে x–অক্ষ ও y–অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। উভয় অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম দশ বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1(একক) ধরে (i) সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত $A(0, 1)$ এবং $B\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$ বিন্দু দুইটি স্থাপন করি। এ বিন্দু দুইটি সংযোগ করে $y = f(x)$ এর লেখ AB অঙ্কন করি।

2. (ii) নং সমীকরণ থেকে একই স্কেলে প্রাপ্ত দুইটি বিন্দু $C(1, 0)$ এবং $D\left(0, \frac{-1}{2}\right)$ ছক কাগজে স্থাপন করে $f^{-1}(x)$ এর লেখ CD অঙ্কন করি।

লেখ অঙ্কন:



8.12.1. দ্বিঘাত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

সমস্যা নং 8.12.1	তারিখ :

সমস্যা : $f(x) = 4 + 3x - x^2$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান : তত্ত্ব : $y = f(x) = 4 + 3x - x^2$, যখন $x \in R$

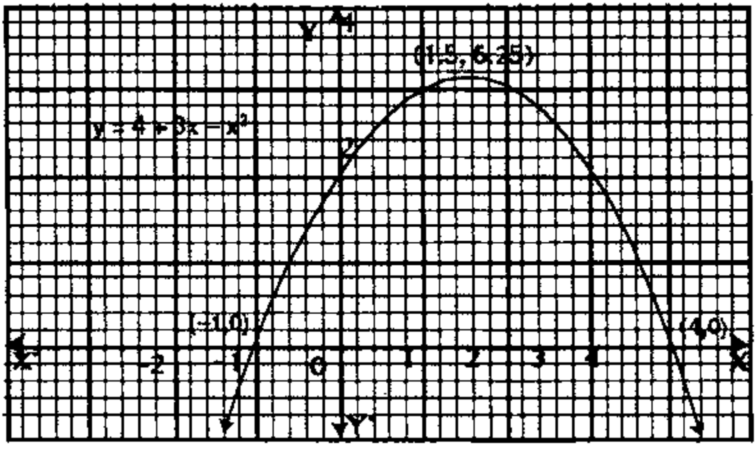
কার্যপদ্ধতি :

1. ধরি, $y = f(x) = 4 + 3x - x^2$, যা দ্বিঘাত ফাংশন। সুতরাং এর লেখ পরাবৃত্ত *(Parabola)* আকৃতির হবে। প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায় : $y - \frac{25}{4} = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$
2. ছক কাগজে x – অক্ষ ও y – অক্ষ অঙ্কন করি।
   $y = 0$ বসিয়ে, $4 + 3x - x^2 = 0$
   $\Rightarrow (x + 1)(x - 4) = 0 \therefore x = -1, 4.$
   আবার, $x = 0$ বসিয়ে, $y = 4.$
   $\therefore$ ফাংশনের লেখটি x- অক্ষের সাথে $(-1, 0)$ ও $(4, 0)$ এবং y –অক্ষের সাথে $(0, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
3. প্রদত্ত সমীকরণে x এর বিভিন্ন বাস্তব মান বসিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।
4. x–অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম 5 ঘরের দৈর্ঘ্যকে একক এবং y–অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম 5 ঘরের দৈর্ঘ্যকে 2 একক ধরি। এরপর উক্ত স্কেল অনুসারে ছক কাগজে বিন্দুগুলি স্থাপন করি। চিহ্নিত বিন্দুগুলো যুক্ত করে প্রদত্ত ফাংশনের লেখ অঙ্কন করি।

ফল সংকলন :

x	0	1	2	3	4	5	– 1	– 2	– 3
y	4	6	6	4	0	– 6	0	– 6	– 14

লেখ অঙ্কন :



8.12.2 : সূচক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

সমস্যা নং 8.12.2	তারিখ :

সমস্যা : $f(x) = e^x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান :

তত্ত্ব : ধরি, $y = f(x) = e^x$, যখন $x \in R$ এবং e একটি অমূলদ সংখ্যা যা $2 < e < 3$.

কার্যপদ্ধতি :

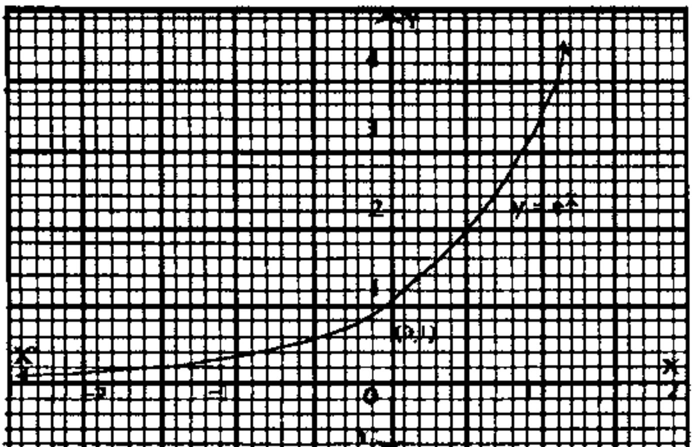
1. $y = f(x) = e^x$ এ x এর বিভিন্ন বাস্তব মান বসিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

2. x-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম 10 ঘরের দৈর্ঘ্য = 1 ও y-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম 5 ঘরের দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ চিহ্নিত করে প্রাপ্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করি। উক্ত বিন্দুগুলি সাবলীলভাবে সংযুক্ত করি। প্রাপ্ত বক্ররেখাটি নির্ণেয় লেখচিত্র।

ফল সংকলন :

x	-3	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	3
y	.049	0.135	0.367	0.61	1	1.65	2.71	4.48	7.38	20.08

লেখ অংকন :



সমস্যা নং 8.12.3(a)	তারিখ :

সমস্যা : $y = f(x) = ln\, x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান :

তত্ত্ব : ধরি, $y = f(x) = ln\, x$, যখন $x \in \boldsymbol{R}$ এবং $x > 0$.

কার্যপদ্ধতি :

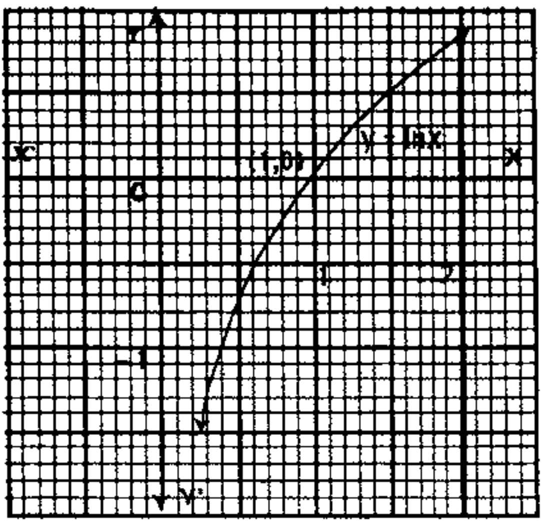
1. $y = f(x) = ln\, x$ এ x এর বাস্তব ও ধনাত্মক মান বসিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

2. x-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম 10 ঘরের দৈর্ঘ্য = 1 ও y-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম 5 ঘরের দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ চিহ্নিত করে প্রাপ্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করি। উক্ত বিন্দুগুলি সাবলীলভাবে সংযুক্ত করি। প্রাপ্ত বক্ররেখাটি নির্ণেয় লেখচিত্র।

ফল সংকলন :

x	0.25	0.75	1	1.25	1.50	2	2.25	2.50	3
y	−1.38	− 0.28	0	0.22	0.41	0.69	0.81	0.92	1.1

লেখ অঙ্কন :



সমস্যা নং 8.12.3(b)	তারিখ :

সমস্যা : $y = f(x) = log_2 x$ এর লেখ অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান :

তত্ত্ব : $y = f(x) = log_2 x.$

$\Rightarrow y = log_2 x = log_{10} x \times log_2 10 = \dfrac{log_{10} x}{log_{10} 2}$, যখন x যেকোন ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

কার্যপদ্ধতি :

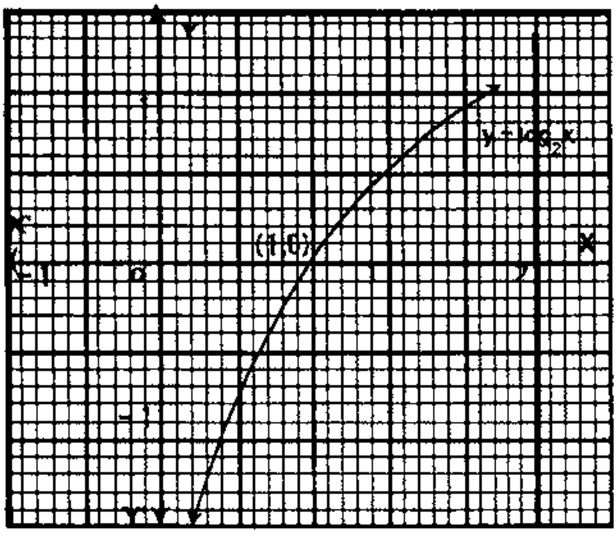
1. $y = \dfrac{log_{10} x}{log_{10} 2}$ ফাংশনে x এর বিভিন্ন ধনাত্মক বাস্তব মান নিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

2. উভয় অক্ষরেখার ক্ষুদ্রতম 10 ঘরের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। ছক কাগজে x- অক্ষ ও y- অক্ষচিহ্নিত করে প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলি স্থাপন করি। চিহ্নিত বিন্দুগুলি সাবলীলভাবে সংযুক্ত করলে প্রাপ্ত বক্ররেখাটি নির্ণেয় লেখচিত্র।

ফল সংকলন :

x	≤ 0	0.125	0.25	0.5	1	2	3	4	8	12	16
y	মান বিদ্যমান নেই	– 3	– 2	– 1	0	1	1.59	2	3	3.	4

লেখ অঙ্কন :



8.12.4. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।

ষষ্ঠ অধ্যায় অনুচ্ছেদ 6.8 দ্রষ্টব্য

8.12.5 . পরমমান ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

সমস্যা নং 8.12.5	তারিখ : ....

সমস্যা : $f(x) = |x|$; $x \in R$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

তত্ত্ব : $f(x) = |x|$, যখন x এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য y এর মান সর্বদা ধনাত্মক অথবা শূন্য হবে। পরম মানের সংজ্ঞা থেকে $f(x) = |x|$ কে নিম্নরূপে লেখা যায় :

$$y = \begin{cases} x \text{ যখন } x > 0 \\ x \text{ যখন } x < 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \end{cases}$$

কার্যপদ্ধতি :

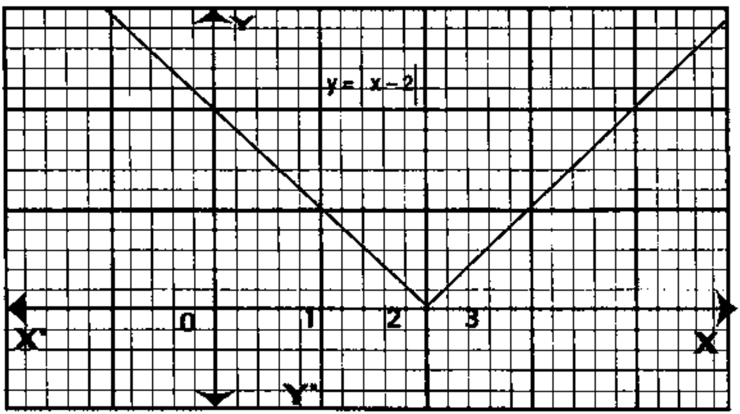
1. $y = |x|$ সমীকরণে x এর ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব মান বসিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

2. ছক কাগজে x ও y অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম পাঁচ বর্গের দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে উপরোক্ত পদ্ধতিতে প্রাপ্ত সকল (x, y) বিন্দু স্থানাঙ্কায়িত করি। অতঃপর উক্ত বিন্দুগুলি পেন্সিল দ্বারা সংযোজন করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ফলসংকলন :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	3	2	1	0	1	2	3	...

লেখ অঙ্কন :



নবম অধ্যায়

অন্তরীকরণ (Differentiation)

9.1. লিমিট

মনে করি, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. তাহলে, $f(2) = \frac{0}{0}$, যা অসংজ্ঞায়িত (undefined).

এখন $x = 1{\cdot}99,\ 1{\cdot}999,\ 1{\cdot}9999$ ইত্যাদি বসিয়ে আমরা পাই, $f(x) = 3{\cdot}99,\ 3{\cdot}999,\ 3{\cdot}9999$ ইত্যাদি।

আবার $x = 2{\cdot}01,\ 2{\cdot}001,\ 2{\cdot}0001$ ইত্যাদি বসিয়ে আমরা পাই, $f(x) = 4{\cdot}01,\ 4{\cdot}001,\ 4{\cdot}0001$ ইত্যাদি

উভয়ক্ষেত্রে দেখা যায় যে x এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা 2 এর কাছাকাছি অগ্রসর হলে, ফাংশন $f(x)$ এর মান ক্রমশঃ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা 4 এর কাছাকাছি হয়। এক্ষেত্রে আমরা বলি x এর মান ক্রমশঃ 2 এর দিকে অগ্রসর হলে, অর্থাৎ $|x-2|$ যে কোন ক্ষুদ্রতর সংখ্যা থেকে ক্ষুদ্রতর হলে, $f(x)$ এর সীমাস্থ মান (limiting value) বা, সংক্ষেপে লিমিট 4 হয়। নিচের প্রতীক দ্বারা তা প্রকাশ করা হয় :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$

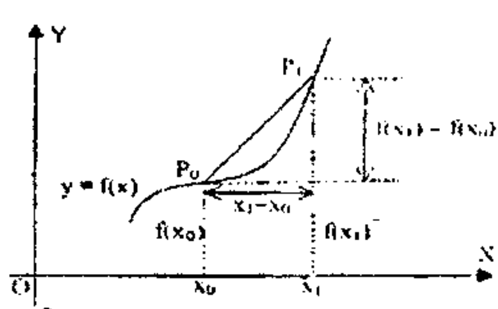
লিমিট এর সংজ্ঞা : যে কোন যথেচ্ছ ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা, $\varepsilon > 0$ এর জন্য একটি নির্দিষ্ট প্রতিরূপী সংখ্যা, $\delta > 0$ আছে, যখন $x \to a$ এবং $|x-a| < \varepsilon$ হলে $f(x) \to l$ এবং $|f(x) - l| < \delta$ হয়;

অর্থাৎ $|f(x) - l| < \varepsilon$ যদি $|x-a| < \delta$.

এক্ষেত্রে l কে $f(x)$ এর লিমিট বলে এবং লেখা হয় $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

সাধারণভাবে, চলমান রাশি x এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a এর দিকে অগ্রসর হয়ে a এর যথেষ্ট সন্নিকটবর্তী হওয়ায় যদি একটি প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর যথেষ্ট সন্নিকটবর্তী হয়, তাহলে l কে a বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের লিমিট (limit) বলা হয় এবং লেখা হয় : $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

9.2. ঢাল



মনে করি, বক্ররেখার সমীকরণ, $y = f(x)$.

উপরের চিত্রে লক্ষ করি : x এর প্রেক্ষিতে $f(x)$ এর পরিবর্তনের গড় হার $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, যা জ্যা, $P_1 P_0$ এর ঢাল (slope) এর সমান।

এখন $x_1 \to x_0$ হলে, P_1 ক্রমশঃ P_0 এর সন্নিকটবর্তী হয়। ফলে জ্যাটি P_0 বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের যথেষ্ট সন্নিকটবর্তী হয়। অর্থাৎ $f(x)$ এর পরিবর্তনের হার তখন $x = x_0$ এ অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল (slope) এর সমান হয়। সুতরাং, ঐক্ষেত্রে স্পর্শকের ঢাল = $\lim\limits_{x_1 \to x_0} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

9.3. ফাংশনের লিমিট

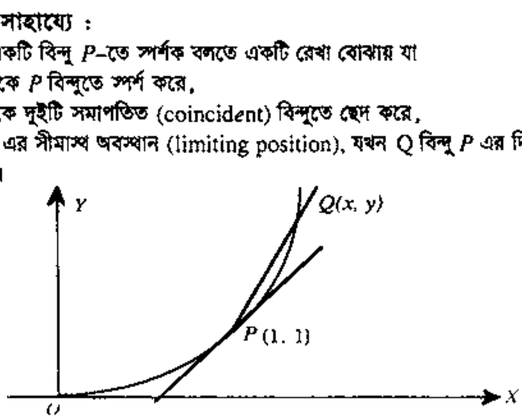
(i) লেখচিত্রের সাহায্যে :

কোন বক্ররেখার একটি বিন্দু P–তে স্পর্শক বলতে একটি রেখা বোঝায় যা

(ক) বক্ররেখাকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে,

বা, (খ) বক্ররেখাকে দুইটি সমাপতিত (coincident) বিন্দুতে ছেদ করে,

বা, (গ) জ্যা PQ এর সীমাস্থ অবস্থান (limiting position), যখন Q বিন্দু P এর দিকে ক্রমশঃ অগ্রসর হয়ে P এর সন্নিকটবর্তী হয়।



মনে করি, ফাংশন f কে $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো এবং P এবং Q বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (1, 1) এবং (x, y). তাহলে, PQ রেখার ঢাল = $\dfrac{y-1}{x-1} = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ [বক্ররেখার সমীকরণ, $y = x^2$ থেকে]

স্পষ্টতঃ, ঢাল = $\dfrac{0}{0}$ [অসংজ্ঞায়িত, যখন $x = 1$]

এখন x এর মান যতই 1 এর সন্নিকটবর্তী হয়, PQ এর ঢাল ততই 2 এর সন্নিকটবর্তী হয়। যেমন, $x = 1{\cdot}1$, $1{\cdot}01$, $1{\cdot}001$, $1{\cdot}0001$, ... হলে, PQ এর ঢাল = $2{\cdot}1$, $2{\cdot}01$, $2{\cdot}001$, $2{\cdot}0001$, ... হবে। অর্থাৎ জ্যা, PQ এর জন্য আমরা যে ঢালই নির্ণয় করি তা 2 এর খুব কাছাকাছি হবে কিন্তু 2 এর সমান হবে না। সুতরাং, আমরা এ সিদ্ধান্তে পৌঁছতে পারি যে, স্পর্শকের ঢালই কেবল 2 হবে। অর্থাৎ, স্পর্শকের ঢাল = $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ এর লিমিট নির্ণয় করার সাধারণ নিয়ম

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ এর মান নির্ণয় করতে হলে x এর পরিবর্তে একটি নতুন চলক h যার সীমা শূন্য (0) নেয়া সুবিধাজনক হবে। এখন $x = a + h$, অর্থাৎ $h = x - a$, যা শূন্যের দিকে অগ্রসর হয়, যখন $x \to a$. এরপর ফাংশনটিকে সরল করে h এর উচ্চতর ঘাতের সমন্বিত পদগুলো বর্জন করতে হয়, কারণ অন্য সংখ্যার তুলনায় h এর উচ্চতর ঘাতের সমন্বিত পদের মান যথেষ্ট ক্ষুদ্র।

উদাহরণ : $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(4+h)^2-16}{4+h-4}$ [$x = 4 + h$ ধরে, $\because$ $x \to 4$ হলে, $h \to 0$]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8h+h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (8 + h) = 8.$$

9.4. এক দিকবর্তী লিমিট

কখনও কখনও ফাংশন, $f(x)$ কে একাধিক সূত্র দ্বারা সূচিত করা হয়। ঐ সব ক্ষেত্রে ফাংশনের বামদিকের এবং ডানদিকের লিমিট সম্পর্কিত ধারণা থাকা খুবই দরকার। $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ কে $f(x)$ এর বাম দিকবর্তী লিমিট বলা হয়, যেখানে x এর মান a এর যথেষ্ট সন্নিকটবর্তী কিন্তু a থেকে ক্ষুদ্রতর। অর্থাৎ, $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a-h)$.

অনুরূপ $f(x)$ এর ডানদিকবর্তী লিমিটের ক্ষেত্রে x সব সময় a থেকে বৃহত্তর থাকে।

ডানদিকবর্তী লিমিটকে $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। অর্থাৎ, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$

উদাহরণ : $\lim\limits_{x\to 2-} (x^2+3)$ এবং $\lim\limits_{x\to 2+} (x^2+3)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\lim\limits_{x\to 2-} (x^2+3) = \lim\limits_{h\to 0} \{(2-h)^2+3\}$, যখন $x = 2-h$.

$= 7.$

এবং $\lim\limits_{x\to 2+} (x^2+3) = \lim\limits_{h\to 0} \{(2+h)^2+3\}$, যখন $x = 2+h$.

$= 7.$

মন্তব্য : ফাংশনের সীমাস্থ মান (limiting *value*) কে সংক্ষেপে লিমিট বলা হয়।

9.5. লিমিটের মৌলিক ধর্মাবলি

নিচে লিমিটের কয়েকটি মৌলিক ধর্মাবলি দেয়া হল :

(i) দুইটি বা ততোধিক (সসীম সংখ্যক) ফাংশনের বীজগণিতীয় সমষ্টির লিমিট তাদের প্রত্যেকের আলাদা আলাদা লিমিটের বীজগণিতীয় সমষ্টির সমান।

অর্থাৎ, u, v, w এর প্রত্যেকে একই চলক x এর ফাংশন হলে,

$\lim \{u(x) \pm v(x) \pm w(x)\} = \lim \{u(x)\} \pm \lim \{v(x)\} \pm \lim \{w(x)\}$.

(ii) দুইটি বা ততোধিক (সসীম সংখ্যক) ফাংশনের গুণফলের লিমিট, তাদের আলাদা আলাদা লিমিটের গুণফলের সমান।

অর্থাৎ, $\lim \{ u(x) \times v(x) \} = \lim \{ u(x)\} \times \lim \{v(x)\}$.

(iii) দুইটি ফাংশনের ভাগফলের লিমিট, তাদের লিমিটের ভাগফলের সমান, যদি হরের লিমিট শূন্য না হয়।

অর্থাৎ, $\lim \left\{\dfrac{u(x)}{v(x)}\right\} = \dfrac{\lim \{u(x)\}}{\lim \{v(x)\}}$, যদি $\lim \{v(x)\} \neq 0$.

Sandwich Theorem

বর্ণনা : মনে করি, I ব্যবধিতে a একটি লিমিট বিন্দু এবং I ব্যবধিতে (a ব্যতিত) f, g, h ফাংশনগুলি সংজ্ঞায়িত।

ধরি, I ব্যবধিতে প্রত্যেকটি x ($x \neq a$) এর জন্য $g(x) \le f(x) \le h(x)$ এবং আরও মনে করি,

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$

তাহলে, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

মন্তব্য : (i) g এবং h ফাংশনদ্বয়কে যথাক্রমে f এর নিম্নসীমা ও ঊর্ধ্বসীমা বলা হয়।

(ii) এখানে I এর মধ্যবর্তী মান a হওয়ার প্রয়োজন নেই। বাস্তবে যদি I এর সর্বশেষ মান a হয়, তাহলে, উপরের লিমিট বাম দিকবর্তী অথবা ডান দিকবর্তী লিমিট।

(iii) অসীম ব্যবধির জন্যও একই বর্ণনা প্রযোজ্য। যেমন : যদি $I = (0, \infty)$ হয়, তাহলে একই সিদ্ধান্ত প্রযোজ্য যখন $x \to \infty$

উদাহরণ 1. $\lim\limits_{x \to a} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : লিমিটের বিধি

$\lim\limits_{x \to a} (f(x). g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x). \lim\limits_{x \to a} g(x)$ এর মাধ্যমে $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ এর মান নির্ণয় করা সম্ভব নয়, কারণ $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ এর মান অনির্ণেয়।

সাইন ফাংশনের সংজ্ঞানুযায়ী, $-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1 \Rightarrow -x^2 \le x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$ [x^2 দ্বারা গুণ করে]

যেহেতু $\lim\limits_{x \to 0} (-x^2) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0,$

অতএব Sandwich Theorem অনুযায়ী $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

9.6. অসীম লিমিট

(i) মনে করি, $f(x) = \frac{1}{x}.$

এখন $x = \cdot 00001$ হলে, $f(x) = 100000$; $x = \cdot 0000001$ হলে, $f(x) = 10000000$ ইত্যাদি।

অতএব, $x \to 0_+$ হলে, $f(x) \to \infty$. অর্থাৎ x কেবল ধনাত্মক মান গ্রহণ করে ক্ষুদ্রতর থেকে ক্ষুদ্রতর হয়ে 0 এর সন্নিকটবর্তী হলে, $f(x) \to \infty$. হবে।

(ii) x সব সময় a অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর মানগুলি নিয়ে a এর সন্নিকটবর্তী হলে, যদি $f(x)$ এর মানগুলি ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর থেকে ক্ষুদ্রতর হয় তবে আমরা বলি $x \to a$ হলে, $f(x) \to -\infty$.

(iii) x সব সময় ধনাত্মক মানগুলি গ্রহণ করে সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পেতে থাকলে যদি একটি সসীম রাশি l পাওয়া যায় যেন $|f(x) - l|$ এর মান কোন ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা (যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর হয়, তাহলে $f(x)$ এর লিমিট l, যখন $x \to \infty$ এবং এটিকে $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

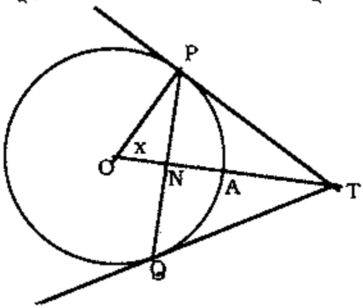
উদাহরণ। $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+5}{5x-3}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+5}{5x-3} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{5}{x}}{5 - \frac{3}{x}}$ [লব ও হরকে x দ্বারা ভাগ করে]

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(3 + \frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(5 - \frac{3}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty}(3) + \lim\limits_{x \to \infty}\frac{5}{x}}{\lim\limits_{x \to \infty}5 - \lim\limits_{x \to \infty}\frac{3}{x}} = \frac{3+0}{5-0} = \frac{3}{5}.$$

9.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}$ এবং অনুরূপ লিমিট :

(ক) মনে করি, একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O এবং PAQ এ বৃত্তের একটি চাপ। মনে করি, OA ব্যাসার্ধ PQ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। তাহলে, OA ব্যাসার্ধ A বিন্দুতে PAQ চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে। P ও Q বিন্দুতে অঙ্কিত PT ও QT স্পর্শক দুইটি OA এর বর্ধিতাংশের সাথে T বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।



মনে করি, $\angle AOP = x$ রেডিয়ান।

এখন $PQ <$ চাপ $PAQ < PT + QT$ ..... (i)

(i) এর অসমতার অর্ধেক নিয়ে আমরা পাই $PN <$ চাপ $PA < PT$ .... (ii)

আমরা পাই, $\sin x = \dfrac{PN}{OP} = PN$ [$\because OP = 1$]

তদ্রূপ $x = \dfrac{\text{চাপ } PA}{OP} =$ চাপ PA এবং $\tan x = \dfrac{PT}{OP} = PT$

$\therefore$ (ii) থেকে $\sin x < x < \tan x$ .... (iii)

বা, $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ [$\sin x$ দ্বারা ভাগ করে] .... (iv) [এখানে $\sin x \neq 0$]

x এর মান যতই ক্ষুদ্রতর হউক না কেন (iv) সম্পর্কটি সত্য। x এর মান ক্ষুদ্রতর থেকে ক্ষুদ্রতর করলে OP এবং ON সীমাস্থ অবস্থায় মিলে যাবে। সেক্ষেত্রে $\cos x \to 1$.

$\therefore$ যখন $x \to 0$, তখন $1 < \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} < 1$. $\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$, অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

বিকল্প পদ্ধতি : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$, যখন x এর মান ক্ষুদ্রতম কিন্তু $x \neq 0$

এখন $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$

সুতরাং, Sandwich উপপাদ্য অনুযায়ী $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

(খ) অনুরূপভাবে, (iii) নং কে $\tan x$ দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x} = 1$.

অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$.

(গ) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ নির্ণয় :

সমাধান : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\dots\infty)-1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\dots\infty}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots\dots\infty\right) = 1.$$

(ঘ) $\lim_{x\to 0}\frac{ln\,(1+x)}{x}$ নির্ণয় :

এখানে $x = 0 + h$ বসিয়ে [যখন $x\to 0, h\to 0$] আমরা পাই

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln\,(1+x)}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{ln\,(1+h)}{h}$$

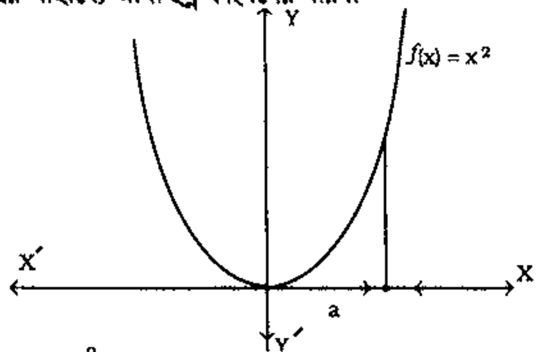
$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}(h-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{3}h^3-\dots\infty)\right\} = \lim_{h\to 0}(1-\frac{1}{2}h+\frac{1}{3}h^2-\dots\infty) = 1.$$

9.8. অবিচ্ছিন্ন ফাংশন

$f(x)$ ফাংশনের $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হয় হয়, যদি

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x).$$

9.8.1. লেখচিত্রের সাহায্যে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের ধারণা



মনে করি, ফাংশন, $f(x) = x^2$.

এখন $f(a) = a^2$ এবং $\lim_{x\to a}(x^2) = a^2$.

আবার $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a-}(x^2) = a^2$ এবং $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+}(x^2) = a^2$

$\therefore \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

সুতরাং $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এবং $\lim_{x\to a} f(x)$ পরস্পর সমান। এক্ষেত্রে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনটিকে অবিচ্ছিন্ন (contin*uous*) বলা হয়। লেখচিত্রটি লক্ষ করলে দেখা যায় যে তা $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন (**contin*uous***).

9.8.2. মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য (Intermediate Value theorem)

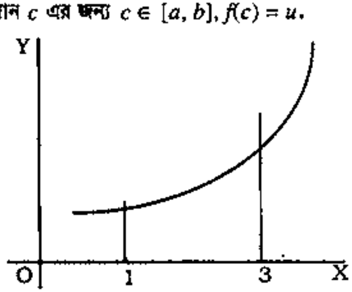
বর্ণনা (Statement) : বাস্তব সংখ্যার অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের প্রতিচ্ছবির ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা ও বৃহত্তম নিম্নসীমার মধ্যবর্তী প্রত্যেক মানের জন্য ফাংশনের ডোমেনের কমপক্ষে একটি বিন্দুর মধ্য দিয়ে ফাংশনের লেখচিত্রটি অতিক্রম করে।

ব্যাখ্যা : *(i)* মনে করি, $[a, b]$ ব্যবধিতে f একটি বাস্তব মানের অবিচ্ছিন্ন ফাংশন এবং $f(a)$ ও $f(b)$ এর একটি মধ্যবর্তী মান u তাহলে, $c \in [a, b]$, একটি মান পাওয়া যাবে যেন $f(c) = u$.

উপপাদ্যটি প্রায়শ নিম্নোক্তভাবে বর্ণনা করা হয় :

মনে করি, $f : [a, b] \rightarrow \boldsymbol{R}$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন এবং u একটি বাস্তব সংখ্যা যা $f(a) < u < f(b)$ অথবা, $f(a) > u > f(b)$ সিদ্ধ করে। তাহলে, যেকোনো বাস্তব মান c এর জন্য $c \in [a, b], f(c) = u$.

উদাহরণ : দেওয়া আছে, $[1, 3]$ ব্যবধিতে f একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন, যা $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। সুতরাং, $f(1) = 2$ এবং $f(3) = 10$ হয়। তাহলে 1 এবং 3 এর মধ্যবর্তী একটি মান 2 পাওয়া যায় যার জন্য f এর প্রতিচ্ছবি 5. অর্থাৎ একটি বন্ধ ব্যবধিতে f এর লেখচিত্র অবিচ্ছিন্নভাবে অঙ্কন করা যায়।



9.8.3. *Lagrange's Mean Value Theorem* এর বর্ণনা

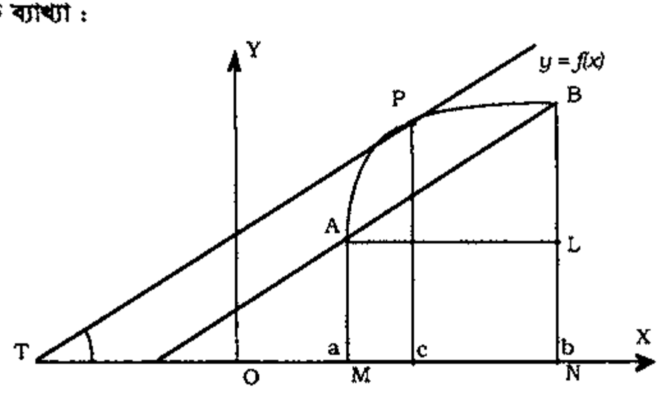
যদি $f(x)$ একটি ফাংশন হয় যেন,

(i) $f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং

(ii) (a, b) ব্যবধিতে $f'(x)$ বিদ্যমান, তাহলে (a, b) ব্যবধির মধ্যে কমপক্ষে একটি বিন্দু c পাওয়া যাবে যেন,

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f(c)$, যেখানে $a < c < b$.

জ্যামিতিক ব্যাখ্যা :



$y = f(x)$ ফাংশনটি APB বক্ররেখা দ্বারা সূচিত হলো, যেখানে $x = a, x = b$ এবং $x = c$ এর সংশ্লিষ্ট বিন্দুগুলি যথাক্রমে A, B এবং P যেন, গড়মান উপপাদ্যটি $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ সিদ্ধ হয়।

OX এর উপর AM ও BN লম্ব টানা হলো।

তাহলে $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{BN - AM}{ON - OM} = \frac{BN - LN}{MN} = \frac{BL}{AL} = \tan \angle BAL$

এবং $f'(c) = \tan\angle PTX$, যেখানে P বিন্দুতে PT স্পর্শক।

সুতরাং আমরা পাই, $\tan\angle BAL = \tan\angle PTX$,

অর্থাৎ $\angle BAL = \angle PTX$, অর্থাৎ $x = c$ এর সংশ্লিষ্ট বিন্দু P তে অঙ্কিত স্পর্শক AB জ্যায়ের সমান্তরাল।

Mean Value theorem এর প্রয়োগ

উদাহরণ। $f(x) = x(x - 2)$ ফাংশনের জন্য $[1, 2]$ ব্যবধিতে একটি বিন্দু $x = c$ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = x(x - 2) = x^2 - 2x$

(i) $f(x)$ একটি বহুপদী। সুতরাং $[1, 2]$ ব্যবধিতে $f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।

(ii) $f'(x) = 2x - 2$ যা $(1, 2)$ ব্যবধিতে বিদ্যমান।

তাহলে, $f(x)$ ফাংশনটি *Mean Value theorem* এর শর্ত পূরণ করে।

$\therefore$ আমরা পাই, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, যেখানে $a < c < b$

এখানে, $a = 1, b = 2 \Rightarrow f(a) = f(1) = 1 - 2 = -1$, যেহেতু $f(x) = x^2 - 2x$

$f(b) = f(2) = 4 - 4 = 0$ এবং $f'(c) = 2c - 2$

$$\therefore \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{0 - (-1)}{2 - 1} = 2c - 2$$

$$\Rightarrow 1 = 2c - 2 \Rightarrow c = \frac{3}{2}.$$

$\therefore$ $1 < \frac{3}{2} < 2$ অর্থাৎ $(1, 2)$ ব্যবধির মধ্যে $\frac{3}{2}$ আছে।

9.8.4. অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের ধর্মাবলি

যদি $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ এবং $g(x)$ অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে,

(i) $x = c$ বিন্দুতে $f(x) + g(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

(ii) $x = c$ বিন্দুতে $f(x) - g(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

(iii) $x = c$ বিন্দুতে $f(x). g(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$. [ঢা. '০৯]

সমাধান : মনে করি, $\sqrt{x} = y$ এবং $\sqrt{a} = b$. তাহলে, যদি $x = a$ হয় তবে $y = \sqrt{x} = \sqrt{a} = b$.

$\therefore y\to b$, যেহেতু $x\to a$.

এখন $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \lim\limits_{y\to b} \dfrac{y^5-b^5}{y-b}$

$= \lim\limits_{y\to b} (y^4+by^3+b^2y^2+b^3y+b^4)$ [লবকে হর দ্বারা ভাগ করে]

$= 5b^4 = 5(\sqrt{a})^4 = 5a^2$.

উদাহরণ 2. মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$.

সমাধান : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \times \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \dfrac{5}{4}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \times \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \dfrac{5}{2} = 1\times 1\times \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2}$.

উদাহরণ 3. মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{h}$

সমাধান : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

উদাহরণ 4. মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\tan x$.

সমাধান : মনে করি, $x = \frac{\pi}{2} + h$. তাহলে, যখন $x\to\frac{\pi}{2}$, তখন $h\to 0$.

$\therefore \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\tan x = \lim\limits_{h\to 0} (-h)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+h\right) = \lim\limits_{h\to 0} (-h)(-\cot h)$

$= \lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{\sin h}{h}\times\cos h\right) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} \times \lim\limits_{h\to 0} \cos h = 1$.

উদাহরণ 5. মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-e^{-2y}}{ln\,(1+y)}$ $[0<y<1]$

সমাধান : $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-e^{-2y}}{ln\,(1+y)} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\left\{1-2y+\dfrac{(2y)^2}{2!}-\dfrac{(2y)^3}{3!}+\ldots\ldots\right\}}{y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\ldots\ldots}$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{2-\dfrac{2^2}{2!}y+\dfrac{2^3}{3!}y^2-\ldots\ldots}{1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{4}y^3+\ldots} = \frac{2}{1} = 2.$$

উদাহরণ 6. মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 9x}{\cos 3x-\cos 5x}$.

সমাধান : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 9x}{\cos 3x-\cos 5x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin 8x}{2\sin x\sin 4x}\left[\because \cos C-\cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 4x\cos 4x}{\sin 4x} = 2\times\lim_{x\to 0}(\cos 4x) = 2\times 1 = 2.$$

প্রশ্নমালা 9.1

লিমিট নির্ণয় কর : (প্রশ্ন 1–46)

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+2x^2-12x-9}{x^2-x-6}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+5}{2x^2+9x-4}$.

5. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$. [কু. '১৩] (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

6. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x}}{x}$. [সি. '০৩] (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+5x}-\sqrt{4-7x}}{3x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x}}$.

8. $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^2-1}{\sqrt{3y+1}-\sqrt{5y-1}}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right\}$.

10. $\lim\limits_{b\to 0}\dfrac{1}{b}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x+b}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$.

11. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+y^3}-\sqrt{1+y}}$.

12. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\frac{9}{2}}-a^{\frac{9}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6^x-6^{-x}}{6^x+6^{-x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{2x+5}{x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{a}}$, যখন $a > 0$ এবং $b > 0$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$. [রা. '১২]

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \{ln(4x-1) - ln(x+7)\}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 7x}{3x^2}$. [দি. কু. '১১; ঢা. '১০; সি. ব. '১২]

23. $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{1-\cos 2\theta}{\sin^2 5\theta}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$. [ঢা. ব. '১১; কু. '১০; চ. সি. '১১]

25. (*a*) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 9x}{\sin 4x}$. (*b*) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x}$. [দি. '১২]

26. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx}$. [ঢা. '০৬]

27. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{x}$.

28. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x - \tan x}{\frac{\pi}{2} - x}$.

29. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2}$. [কু. '০৩]

32. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$. [ব. '১২; য. '১৩]

33. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

34. $\lim\limits_{y\to 0} \frac{y(\cos y + \cos 2y)}{\sin y}$. [রা. '১১]

35. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$. [ঢা. '১৩]

36. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^3\theta - \tan^3\theta}{\tan\theta}$. [কু. চ. '১২]

37. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x^2 + x}$.

38. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}x}{x}$.

39. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$. [ব. '১১; ঢা. '১২]

40. $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{b}{2^x}$. [সি. '০৫]

41. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{(\pi - x)^2}$.

42. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin\theta}{\left(\frac{1}{2}\pi - \theta\right)^2}$. [ব '১০]

43. $\lim\limits_{k\to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k}$, যখন $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

44. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log\left(1-\frac{x}{4}\right) - (1-x)^{\frac{1}{4}} + 1}{x^2}$.

45. $\lim\limits_{x\to y} \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$. [কু. '০৫]

46. $\lim\limits_{y\to x} \frac{\tan y - \tan x}{y - x}$.

47. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right]$. [ব. '১০; রা. '১৩]

উত্তরমালা

1. $-\frac{1}{6}$. **2.** $\frac{27}{5}$ **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** (a) $-\frac{1}{2}$. (b) 1. **6.** (a) $\frac{7}{2}$. (b) 1. **7.** -2. **8.** -4. **9.** $\frac{1}{2}$.
10. $-\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}$. **11.** 1 . **12.** $9a^4$. **13.** 1. **14.** 1. **15.** e^{10}. **16.** $e^{\frac{b}{a}}$. **17.** 2. **18.** 0. **19.** 1.
20. 2 log 2. **21.** 1. **22.** $\frac{49}{6}$. **23.** $\frac{2}{25}$. **24.** $\frac{1}{2}$. **25.** (a) -2. (b) 1. **26.** $\frac{a}{b}$.
27. $\frac{1}{2}$. **28.** $\frac{1}{2}$. **29.** 1. **30.** 0. **31.** 6 . **32.** $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$. **33.** $\frac{a^2}{b^2}$. **34.** 2 . **35.** 0.
36. $\frac{3}{2}$. **37.** 2 . **38.** 1 . **39.** $\frac{1}{2}$. **40.** b . **41.** $\frac{1}{2}$. **42.** $\frac{1}{2}$. **43.** $\frac{2}{(1-x)^2}$. **44.** $\frac{1}{16}$.
45. $\cos y$. **46.** $\sec^2 x$. **47.** 0.

9.9. লিমিট হিসেবে অন্তরজ

মনে করি, $f(x)$ হলো x এর একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন। তাহলে x এর অতি ক্ষুদ্রতর বৃদ্ধির জন্য ফাংশনটির বৃদ্ধি হবে $f(x+\delta x)-f(x)$.

সুতরাং ফাংশন $f(x)$ এর বৃদ্ধি ও চলক x এর বৃদ্ধির অনুপাত $=\dfrac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$.

$\therefore$ যখন $\delta x \to 0$ অনুপাতের লিমিট

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

এই লিমিটকে x এর প্রেক্ষিতে $f(x)$ এর অন্তরজ বলা হয়।

যদি $f(x)$ কে y দ্বারা সূচিত করা হয়, অর্থাৎ $y=f(x)$, তাহলে, x এর অতি ক্ষুদ্রতর বৃদ্ধি δx এর জন্য y এর আনুসঙ্গিক বৃদ্ধি δy (ধনাত্মক বা ঋনাত্মক) দ্বারা সূচিত করা হলে,

$$y+\delta y=f(x+\delta x)$$
$$\Rightarrow \delta y=f(x+\delta x)-f(x)$$
$$\Rightarrow \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\ [\delta x \text{ দ্বারা ভাগ করে }]$$
$$\Rightarrow \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

x এর প্রেক্ষিতে y এর অন্তরজকে $\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}$ বা $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

9.10. মূল নিয়মে x^n এর অন্তরজ [ঢা. '১২]

মনে করি, $f(x)=x^n$, যখন n একটি মূলদ সংখ্যা।

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n\left(1+\frac{h}{x}\right)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n\left(1 + n.\frac{h}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{h^2}{x^2} + \ldots\ldots\right) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{n.h\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot h^2 x^{n-2} + \text{--------}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot hx^{n-2} + \text{--------}\right) = nx^{n-1}.$$

$\therefore \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$

মন্তব্য : যেহেতু $h \to 0$, সুতরাং $\frac{h}{x}$ এর সাংখ্যিক মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হবে। অতএব n যে কোন মূলদ সংখ্যা হলে, দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে $\left(1+\frac{h}{x}\right)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ। x এর প্রেক্ষিতে নিচের ফাংশনগুলোর অন্তরজ নির্ণয় কর :

(i) $f(x) = x^3$, **(ii)** $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, **(iii)** $f(x) = \frac{1}{x^4}$.

সমাধান : (i) $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$. [অনুচ্ছেদ 9.10 থেকে]

(ii) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$.

(iii) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-4}) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$.

9.10.1. ধ্রুবকের অন্তরজ

মনে করি, $f(x) = c$, যেখানে c একটি ধ্রুবক।

সংজ্ঞানুসারে, $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$

যে কোন চলকের প্রেক্ষিতে ধ্রুবকের অন্তরজ শূন্য।

9.10.2. ফাংশনের যোগফলের অন্তরজ

মনে করি, u এবং v উভয়ে x এর ফাংশন।

ধরি, $y = u \pm v$. ----- (i); তাহলে y, x এর ফাংশন।

মনে করি, x এর অতি সামান্য বৃদ্ধি Δx এর জন্য y, u, v এর অনুরূপ (corresponding) বৃদ্ধি যথাক্রমে $\Delta y, \Delta u, \Delta v$, যারা যথেষ্ট ক্ষুদ্র।

$\therefore y = u \pm v$ থেকে আমরা পাই, $y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)$. --------- (ii)

(ii) থেকে (i) বিয়োগ করে, $\Delta y = \Delta u \pm \Delta v$ $\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$ [উভয়পক্ষকে Δx দ্বারা ভাগ করে]

সুতরাং, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$ অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$.

এ সূত্রটি যে কোন সসীম সংখ্যক ফাংশনের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায়।

9.11. বহুপদী ফাংশনের অন্তরীকরণ

মনে করি, $f(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^3 + x^2 + x + 5$, যা একটি বহুপদী ফাংশন। তাহলে,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^n) + \frac{d}{dx}(x^{n-1}) + \ldots + \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 3x^2 + 2x + 1 \quad [\because \frac{d}{dx}(5) = 0]$$

9.12. মূল নিয়মে e^x, a^x, $ln\ x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ এবং $\text{cosec}\ x$ এর অন্তরজ নির্ণয়

(i) মনে করি, $f(x) = e^x \quad \therefore f(x+h) = e^{x+h}$ [রা. '১০; সি. '১১]

অন্তরজের সংজ্ঞা থেকে পাই, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

$$= e^x \times \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left\{\left(1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots\right) - 1\right\}$$

$$= e^x \times \lim_{h \to 0} \left\{1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots\right\} = e^x.$$

(ii) মনে করি, $f(x) = a^x$ [ব. '১৩]

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

$$= a^x . \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \quad [\because h \text{ এর সাথে } a^x \text{ সম্পর্কিত নয়}]$$

$$= a^x . \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left\{\left(1 + \frac{h}{1!} ln\ a + \frac{h^2}{2!}(ln\ a)^2 + \text{---------}\right) - 1\right\} \quad [a^h \text{ এর বিস্তৃতি থেকে}]$$

$$= a^x . \lim_{h \to 0} \{ln\ a + \frac{h}{2!}(ln\ a)^2 + \text{---------}\} = a^x\ ln\ a.$$

(iii) মনে করি, $f(x) = ln\ x$ [ব. '১০; চ. কু. '১১; রা. '১২; সি. '১৩]

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{ln(x+h) - ln\ x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{x} - \frac{1}{2}.\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}.\frac{h^3}{x^3} - \text{---------}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}.\frac{h}{x^2} + \frac{1}{3}.\frac{h^2}{x^3} - \ldots\ldots\right) = \frac{1}{x}$$

(iv) মনে করি, $f(x) = \sin x$

$$\therefore f'(x) = \lim,\ h\to 0)\ \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$\left[\because \sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\left\{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x\ .\ 1 = \cos x.$$ [অনুচ্ছেদ 1.8 থেকে]

(v) মনে করি, $f(x) = \cos x$ [দি. কু. '১০; দি. '১৩]

$$\therefore f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\}\times\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = -\sin x\times 1 = -\sin x.$$

$$\left[\because \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1\right]$$

(vi) মনে করি, $f(x) = \tan x$ [কু. '১৩]

$$\therefore f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h\cos(x+h)\cos x} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1\times\frac{1}{\cos x\ .\ \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

(vii) মনে করি, $f(x) = \cot x$

$$\therefore f'(x) = \lim,\ h\to 0)\frac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)\sin x - \sin(x+h)\cos x}{h\sin(x+h)\sin x} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(-h)}{h\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{-\sin h}{h}\right)\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -1.\frac{1}{\sin^2 x} = -1.\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

$$\therefore \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x\ .$$

(viii) মনে করি, $f(x) = \sec x$ [সি. য. '১০]

$$\therefore f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h\cos(x+h)\cos x} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\} \times \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) \times \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \sin x \times 1 \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \sec x \tan x.$$

(ix) মনে করি, $f(x) = \operatorname{cosec} x$ [সি. চ. '১৩]

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{cosec}(x+h) - \operatorname{cosec} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{-h}{2}\right)}{h\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\} \times \lim_{h\to 0}\left(\frac{-\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) \times \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sin(x+h)\sin x}$$

বি. দ্র. (i) $\log_x a = \log_e a \times \log_x e = \log_e a \times \frac{1}{\log_e x} = \frac{\log_e a}{\ln x}$

(ii) $\log_a x = \log_a e \times \log_e x = \log_a e \ln x$

প্রশ্নমালা 9.2

মূল নিয়মে অন্তরজ নির্ণয় কর ঃ

1. e^{mx}. [য. সি. '১১; কু. '১৩] 2. (a) $\sin bx$. (b) $\cos ax$. (c) $\cos 3x$. [রা. '১১]

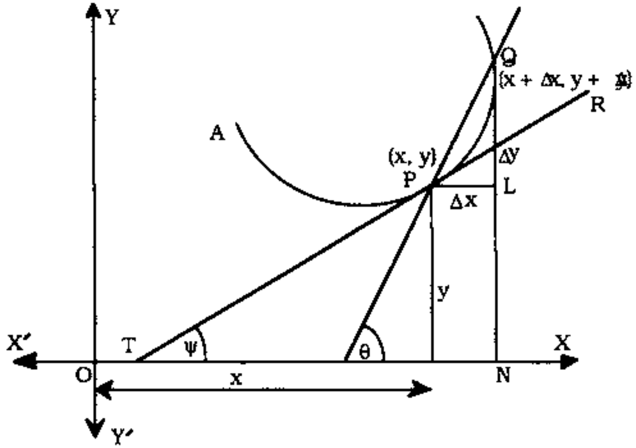
3. $\sec 2x$. $\tan 2x$. $\log_a x$. [ঢা. '১১; ব. '১২] 4. $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\sin 2x$. [ঢা. '০৫; ব. '১৩]

5. $e^x \cos x$.

উত্তরমালা

1. me^{mx}. 2. (a) $b\cos bx$, (b) $-a\sin ax$; (c) $-3\sin 3x$. 3. $2\sec 2x\tan 2x$, $2\sec^2 2x$, $\frac{\log_a e}{x}$. 4. $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$, $2\cos 2x$. 5. $e^x\cos x - e^x\sin x$.

9.13. স্পর্শকের নতি হিসেবে অন্তরজ



মনে করি, $y = f(x)$ সমীকরণ দ্বারা APQ বক্ররেখা সূচিত করা হল। এ বক্ররেখার খুব কাছাকাছি দুইটি বিন্দু $P(x,y)$ এবং $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ নেয়া হল। এখানে $\Delta x \to 0$ হলে, $\Delta y \to 0$ হবে।

Q থেকে OX এর উপর QN লম্ব আঁকি। এখন P থেকে QN এর উপর PL লম্ব টানা হল।

তাহলে, স্পষ্টত $QL = \Delta y$ এবং $PL = \Delta x$.

আবার মনে করি, বক্ররেখার QP জ্যা X–অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, PQ সরলরেখার ঢাল (slope), $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ [QPL সমকোণী ত্রিভুজ থেকে]। যখন $\Delta x \to 0$ হয়, তখন Q বিন্দুটি ক্রমশঃ P এর দিকে অগ্রসর হয়ে P এর সাথে প্রায় মিলে যাবে। অর্থাৎ QP জ্যা বক্ররেখার P বিন্দুতে স্পর্শক হয়। সুতরাং, যখন $\Delta x \to 0$, তখন $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ হবে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল। এখন x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের (positive direction of x– axis) সাথে স্পর্শকটি ψ কোণ উৎপন্ন করলে, স্পর্শক রেখার ঢাল (slope) $= \tan\psi$.

$$\therefore \tan\psi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}. \text{ [সংজ্ঞানুসারে]}$$

সুতরাং $y = f(x)$ সমীকরণবিশিষ্ট বক্ররেখার উপরিস্থিত (x,y) বিন্দুতে কাংশন, $f(x)$ এর অন্তরক সহগ ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x–অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ত্রিকোণমিতিক টেনজেন্ট এর সমান।

উদাহরণ। $y = \frac{2}{x}$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে $x = \frac{1}{3}$, ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে $y = \frac{2}{x}$. $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = 2(-1)x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$.

যখন $x = \frac{1}{3}$, তখন $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -18$. সুতরাং, স্পর্শকের ঢাল = -18.

9.14.1. দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ

মনে করি, $y = uv$ ... (i), যেখানে u এবং v এর উভয়ে x এর ফাংশন। তাহলে, y হবে x এর ফাংশন।

এখন x এর অতি সামান্য বৃদ্ধি Δx এর জন্য y, u, v এর অনুরূপ বৃদ্ধি হবে যথাক্রমে $\Delta y, \Delta u, \Delta v$, যারা যথেষ্ট ক্ষুদ্র।

$\therefore y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$ [$\because$ $y = uv$ ধরা হয়েছে।

$= uv + u.\Delta v + v.\Delta u + (\Delta u)(\Delta v)$ ----- (ii)

(ii) থেকে (i) বিয়োগ করে আমরা পাই,

$\Delta y = u.\Delta v + v.\Delta u + (\Delta u)(\Delta v)$

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = u.\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + v.\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u.\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ [উভয়পক্ষকে Δx দ্বারা ভাগ করে]

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(u.\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\left(v.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta u.\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

[লিমিটের সূত্র থেকে]

$$= u.\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + v.\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta u) \times \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) \text{ ------- (iii)}$$

যেহেতু $\Delta x \to 0$ হলে, $\Delta u \to 0$; $\therefore \lim_{\Delta x\to 0} \Delta u = 0$.

অর্থাৎ, $\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta u) \times \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = 0.$

সুতরাং, (iii) থেকে সংজ্ঞানুসারে

$$\frac{d}{dx}(y) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0 \quad \therefore \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

অর্থাৎ, দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ

= প্রথম ফাংশন × দ্বিতীয় ফাংশনের অন্তরজ + দ্বিতীয় ফাংশন × প্রথম ফাংশনের অন্তরজ।

9.14.2. দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরজ

মনে করি, $y = \dfrac{u}{v}$ ----- (i), যেখানে u এবং v এর উভয়ে x এর ফাংশন। তাহলে, y হবে x এর ফাংশন।

মনে করি, x এর অতি সামান্য বৃদ্ধি Δx এর জন্য y, u, v এর অনরূপ বৃদ্ধি যথাক্রমে $\Delta y, \Delta u, \Delta v$.

$\therefore y + \Delta y = \dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$ ------ (ii)

(ii) থেকে (i) বিয়োগ করে আমরা পাই,

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v.\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u.\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$ [উভয়পক্ষকে Δx দ্বারা ভাগ করে]

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{\lim_{\Delta x\to 0}\left(v.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) - \lim_{\Delta x\to 0}\left(u.\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim_{\Delta x\to 0}\{v(v + \Delta v)\}}$$ [লিমিটের সূত্র থেকে]

এখন সংজ্ঞানুসারে, $\frac{d}{dx}(y) = \frac{v.\frac{du}{dx} - u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$ [$\because \Delta x \to 0$ হলে, $\Delta v \to 0$]

সুতরাং, $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$.

অর্থাৎ, দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরজ = $\frac{\text{(হর × লবের অন্তরজ)– (লব× হরের অন্তরজ)}}{\text{(হর)}^2}$

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. x এর প্রেক্ষিতে অন্তরজ নির্ণয় কর :

$3\ ln\ x - 5 \sec x + 2 \cot x - b^x + \log_a x.$

সমাধান : মনে করি, $y = 3\ ln\ x - 5 \sec x + 2 \cot x - b^x + \log_e x \times \log_a e$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3\ ln\ x) - \frac{d}{dx}(5 \sec x) + \frac{d}{dx}(2 \cot x) - \frac{d}{dx}(b^x) + \frac{d}{dx}(\log_a e.\ ln\ x)$

$= 3.\frac{1}{x} - 5 \sec x \tan x + 2(-\text{cosec}^2 x) - b^x \log_e b + \log_a e.\frac{1}{x}$

$= \frac{3}{x} - 5 \sec x \tan x - 2\ \text{cosec}^2 x - b^x \log_e b + \frac{\log_a e}{x}.$

উদাহরণ 2. x এর প্রেক্ষিতে অন্তরজ নির্ণয় কর :

(i) $(x^2 + 3)(2x^2 - 1)$; (ii) $x^2 \log_e x - 8 e^x \cos x + 7.$

সমাধান : (i) মনে করি, $y = uv$, যেখানে $u = x^2 + 3$ এবং $v = 2x^2 - 1.$

$\therefore \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ [অনুচ্ছেদ 2.7 থেকে]

$= (x^2 + 3)\frac{d}{dx}(2x^2 - 1) + (2x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^2 + 3)$

$= (x^2 + 3).\ 4x + (2x^2 - 1).\ 2x = 4x^3 + 12x + 4x^3 - 2x = 8x^3 + 10x.$

(ii) মনে করি, $y = x^2\ ln\ x - 8 e^x \cos x + 7.$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2\ ln\ x) - 8.\frac{d}{dx}(e^x \cos x) + \frac{d}{dx}(7)$

$= x^2 . \frac{d}{dx}(ln\ x) + \log_e x.\frac{d}{dx}(x^2) - 8\left\{e^x.\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x.\frac{d}{dx}(e^x)\right\} + 0$

$= x^2 . \frac{1}{x} + ln\ x.\ 2x - 8\left\{e^x.(-\sin x) + \cos x.\ e^x\right\}$

$= x + 2x\ ln\ x + 8 e^x \sin x - 8e^x \cos x = x(1 + 2\ ln\ x) + 8 e^x (\sin x - \cos x).$

উদাহরণ 3. t এর প্রেক্ষিতে অন্তরজ নির্ণয় কর : $\frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t}$.

সমাধান : মনে করি, $y = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t}$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{(\sin t - \cos t)\frac{d}{dt}(\sin t + \cos t) - (\sin t + \cos t)\frac{d}{dt}(\sin t - \cos t)}{(\sin t - \cos t)^2}$$

$$= \frac{(\sin t - \cos t)(\cos t - \sin t) - (\sin t + \cos t)(\cos t + \sin t)}{(\sin t - \cos t)^2}$$

$$= \frac{-(\sin t - \cos t)^2 - (\sin t + \cos t)^2}{(\sin t - \cos t)^2}$$

$$= \frac{-2(\sin^2 t + \cos^2 t)}{(\sin t - \cos t)^2} = \frac{-2}{(\sin t - \cos t)^2}.$$

প্রশ্নমালা 9.3

প্রত্যেকটির অন্তর্ভুক্ত চলকের প্রেক্ষিতে অন্তরজ নির্ণয় কর :

1. $\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.
2. $6x^4 - 3x^3 - 4x^{-\frac{1}{2}} + 5$.
3. $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + \frac{3}{x}$.
4. $(ax)^n + (b^2x^2)^m$.
5. $\frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9}$.
6. $(y+1)^2(y+2)$.
7. $2x^b - 5e^x + b\tan x$.
8. $7\log_b x - 6\ln(x) + 8\cos x$.
9. $8\cot x - 6\ln(x^n) + 3\sec x$.
10. $x - 3\log_a x + 7\cos x$.
11. $7\log_a x - 5\operatorname{cosec} x + 7\cot x - 2e^x$.
12. $8\log_a x - 3\ln x + 4\sin x$.
13. (i) $\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ [দি. '০১] (ii) $\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$ [ঢা. '০৯]
14. $e^x \sin x$, $5e^x \ln x$
15. (i) $4e^t \sin t$, (ii) $\log_x a$. [ঢা. '১৩]
16. $e^x \log_a x$ [দি. '১২] $(\log_a x)(\ln x)$. [দি. '০৫]
17. $\log_a x \ln(5x)$.
18. $3\sqrt{x}\sin x - 8$.
19. $7\sqrt{x}\cos x + e^x \sin x$.
20. (a) $x^3\log_a x + 9e^x\cos x$. (b) $x^3\log_a x + 7e^x\cos x$.
21. $\frac{\ln x}{\cos x}$.
22. $\frac{e^t + \ln(t)}{\sin t}$.
23. $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. [চ. '১৩; কু. য. '১২]
24. $7x^3\log_a x + 8e^x\sec x$.
25. $\frac{1 - \cot x}{1 + \cot x}$.
26. $\frac{\sin x}{x + \cos x}$.
27. $\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ [ঢা. '১৩; ব. '১২]

28. $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$ · [কু. '০৪]

29. $\dfrac{e^x + ln(x)}{\log_a x}$.

30. $\dfrac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x}$ [ব. '১০; য. '১৩]

31. $\dfrac{x\cos x}{(x+1)\sin x}$.

32. $\dfrac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$

33. $\dfrac{\operatorname{cosec} x}{1+\operatorname{cosec} x}$.

34. $\dfrac{x^n + \tan x}{e^x - \cot x}$.

35. (i) $\dfrac{x^n + \cot x}{e^x - \tan x}$, (ii) $x^n ln(2x)$

36. $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ (যেখানে u এবং f ধ্রুবক) হলে, প্রমাণ কর যে, $\dfrac{ds}{dt} = u + ft$.

37. $f(x) = 80x - 16x^2$ হলে , $f'(x)$ এর মান নির্ণয় কর। $f'(x) = 16$ হলে, x এর মান কত?

38. $y = x(x^2 - 12)$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর যার জন্য $\dfrac{dy}{dx} = 0$.

39. একটি বক্ররেখার সমীকরণ $y = 4x^2$ দেয়া আছে। বক্ররেখাটির $x = 2$ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর।

40. $s = \sqrt{t} + 7$ হলে, $\dfrac{ds}{dt}$ এর মান নির্ণয় কর, যখন $t = 9$.

41. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $2x\dfrac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{x}$.

উত্তরমালা

1. $\frac{1}{4}x^{-3/4} - \frac{1}{4}x^{-5/4}$. 2. $24x^3 - 9x^2 + 2x^{\frac{-3}{2}}$. 3. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{3}{x^2}$.

4. $na^n x^{n-1} + 2m\, b^{2m} x^{2m-1}$ 5. 1. 6. $3y^2 + 8y + 5$. 7. $2b\,x^{b-1} - 5e^x + b\sec^2 x$. 8. $\dfrac{7\log_b e}{x} - \dfrac{6}{x} - 8\sin x$. 9. $-8\operatorname{cosec}^2 x - \dfrac{6n}{x} + 3\sec x\tan x$. 10. $1 - \dfrac{3}{x}\log_a e - 7\sin x$. 11. $\dfrac{7}{x}\log_a e + 5\operatorname{cosec} x\cot x - 7\operatorname{cosec}^2 x - 2e^x$. 12. $\dfrac{8\log_a e}{x} - \dfrac{3}{x} + 4\cos x$.
13. (i) $\sin x$. (ii) 0. 14. $e^x(\sin x + \cos x)$. 15. (i) $4e^t(\cos t + \sin t)$. (ii) $-\ln(a)/x\,\{\ln(x)\}^2$.
16. $e^x\left(\log_a x + \dfrac{\log_a e}{x}\right)$; $\dfrac{2}{x}\log_a x$. 17. $\dfrac{\log_a x}{x} + \dfrac{\log_a e\, ln(5x)}{x}$. 18. $\dfrac{3\sin x}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\cos x$.

19. $\dfrac{7\cos x}{2\sqrt{x}} - 7\sqrt{x}\sin x + e^x(\sin x + \cos x)$. 20. (a) $3x^2\log_a x + x^2\log_a e + 9e^x(\cos x - \sin x)$.
(b) $3x^2\log_a x + x\log_a e + 7e^x\cos x - 7e^x\sin x$. 2 22. $\dfrac{(te^t + 1)\sin t - t\{e^t + ln(t)\}\cos t}{t\sin^2 t}$.

23. $\dfrac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}$ 24. $7x^2\log_a e + 21x^2\log_a x + 8e^x\sec x\tan x + 8e^x\sec x$.

25. $\dfrac{2\operatorname{cosec}^2 x}{(1+\cot x)^2}$. 26. $\dfrac{x\cos x - \sin x + 1}{(x+\cos x)^2}$.. 27. $\dfrac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$ 28. $\dfrac{\cos x + \sin x + 1}{(1+\cos x)^2}$.

29. $\dfrac{\left(e^x + \frac{1}{x}\right)\log_a x - (e^x + \log x)\ \frac{1}{x}\log_a e}{(\log_a x)^2}$. **30.** $-2\sin x$. **31.** $\dfrac{\sin x\cos x - x(x+1)}{(x+1)^2\sin^2 x}$.

32. $\dfrac{(\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)(\tan x + \cot x) - (\tan x - \cot x)(\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x)}{(\tan x + \cot x)^2}$.

33. $\dfrac{-\operatorname{cosec} x\cot x}{(1 + \operatorname{cosec} x)^2}$. **34.** $\dfrac{(nx^{n-1} + \sec^2 x)(e^x - \cot x) - (x^n + \tan x)(e^x + \operatorname{cosec}^2 x)}{(e^x - \cot x)^2}$.

35. (i) $\dfrac{(nx^{n-1} - \operatorname{cosec}^2 x)(e^x - \tan x) - (e^x - \sec^2 x)(x^n + \cot x)}{(e^x - \tan x)^2}$. (ii) $x^{n-1}\{1 + n\ ln\ (2x)\}$

37. $80 - 32x$, 2. **38.** $x = 2$, অথবা -2. **39.** 16. **40.** $\frac{1}{6}$.

9.15. সংযোজিত (Composite) ফাংশনের এবং বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

সংযোজিত ফাংশনের অন্তরজ : মনে করি, $y = f(z)$ এবং $z = g(x)$

x, y, z এর পরিবর্তন যথাক্রমে $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ এবং এ পরিবর্তনগুলো খুব ক্ষুদ্র ও সসীম।

যখন $\Delta x \to 0$, তখন $\Delta z \to 0$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \times \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \times \dfrac{dz}{dx}$ অনুরূপভাবে, $\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{du}} \cdot \dfrac{\mathbf{du}}{\mathbf{dv}} \cdot \dfrac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dx}}$ ইত্যাদি।

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ :

মনে করি, A সেট থেকে B সেটে বর্ণিত একটি ফাংশন f এবং $y \in$ B. তাহলে, y এর বিপরীত (inverse) কে $f^{-1}(y)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং $f^{-1}(y)$ হল A সেটের ঐ উপাদানগুলো যাদের প্রতিচ্ছবি (image) y.

সংক্ষেপে, যদি f: A $\to$B হয়, তাহলে, $f^{-1}(y) = \{x : x \in \text{A এবং } f(x) = y\}$. এক্ষেত্রে f^{-1} কে বলা হয় B সেট থেকে A সেটে f এর বিপরীত ফাংশন।

প্রতিজ্ঞা : যদি ফাংশন, f এর বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান থাকে, অর্থাৎ $y = f(x)$ এবং $f^{-1}(y) = x$ হয়, তবে $\dfrac{d}{dy}\{f^{-1}(y)\} = \dfrac{1}{f'(x)}$,

অর্থাৎ $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ .... (i) এবং $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ ....(ii)

প্রমাণ : যেহেতু $y = f(x)$, $\therefore 1 = f'(x).\dfrac{dx}{dy}$ [y এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে]

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad [\text{প্রমাণিত}]$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

9.15.1. লগারিদমের সাহায্যে অন্তরীকরণ

কোন ফাংশনের সূচক যদি অপর একটি ফাংশন অথবা একটি ফাংশন কয়েকটি ফাংশনের গুণফল দ্বারা গঠিত হয়, তবে প্রথমে ফাংশনটির লগারিদম নিয়ে পরে অন্তরজ নির্ণয় করা সহজতর হয়।

উদাহরণ। $(\cos x)^{\tan x}$ **এর অন্তরজ নির্ণয় কর।**

সমাধান : মনে করি, $y = (\cos x)^{\tan x}$

উভয়পক্ষের লগারিদম নিয়ে, $\ln y = \tan x \ \ln(\cos x)$ ...(i)

এখন (i) এর উভয়পক্ষকে x-এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে $\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\{\tan x . \ln(\cos x)\}$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln(\cos x) . \sec^2 x + \tan x . \frac{1}{\cos x} . (-\sin x) = \ln(\cos x) . \sec^2 x - \tan^2 x .$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (\cos x)^{\tan x} \{\ln(\cos x) . \sec^2 x - \tan^2 x\} .$$

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. x **এর প্রেক্ষিতে** $(\sin x)^2$ **এর অন্তরজ নির্ণয় কর।**

সমাধান : মনে করি, $y = (\sin x)^2 = z^2$, যখন $z = \sin x$.

সুতরাং, $\frac{dy}{dz} = 2z$ এবং $\frac{dz}{dx} = \cos x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 2z . \cos x = 2 \sin x \cos x \ [z = \sin x \text{ বসিয়ে}] = \sin 2x .$$

উদাহরণ 2. x **এর প্রেক্ষিতে** $\ln(\tan 5x)$ **এর অন্তরজ নির্ণয় কর।**

সমাধান : মনে করি, $y = \ln(\tan 5x) = \ln u$, $\quad u = \tan v$ এবং $v = 5x$.

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dv} = \sec^2 v . \frac{dv}{dx} = 5$$

সুতরাং, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dv} . \frac{dv}{dx} = \frac{1}{u} . \sec^2 v . 5 = \frac{1}{\tan 5x} . \sec^2 5x . 5 = \frac{5 \sec^2 5x}{\tan 5x} .$

বিকল্প পদ্ধতি : মনে করি, $y = \ln(\tan 5x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\ln(\tan 5x)\} = \frac{d}{d(\tan 5x)}\{\ln(\tan 5x)\} \times \frac{d}{d(5x)}(\tan 5x) \times \frac{d}{dx}(5x)$$

$$= \frac{1}{\tan 5x} \times \sec^2 5x \times 5 = \frac{5 \sec^2 5x}{\tan 5x} .$$

উদাহরণ 3. $\sin^{-1} x$ **এর অন্তরজ নির্ণয় কর।**

সমাধান : মনে করি, $y = \sin^{-1} x$. তাহলে, $x = \sin y$ .... (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে y এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে আমরা পাই

$$\frac{dx}{dy} = \cos y \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \quad \left[\because \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right]$$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ [(i) থেকে]

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, যখন $-1< x< 1$.

মন্তব্য : $\sin^{-1}x$ কে $x = \pm 1$ বিন্দুতে অন্তরীকরণ করা যায় না, কারণ ঐ বিন্দুতে $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$ সংজ্ঞায়িত নয়।

উদাহরণ 4. $\cos^{-1} x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি $y = \cos^{-1} x$. তাহলে, $x = \cos y$.

$\therefore \frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ অর্থাৎ, $\frac{d(\cos^{-1}x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

উদাহরণ 5. $\tan^{-1} x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $y = \tan^{-1} x$. তাহলে, $x = \tan y$.

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2} \text{ অর্থাৎ, } \frac{d(\tan^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

উদাহরণ 6. x এর প্রেক্ষিতে $\cot^{-1} \frac{1-x}{1+x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $y = \cot^{-1} \frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1} \frac{1-x}{1+x} = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

মন্তব্য : ত্রিকোণমিতিক ফাংশন এবং বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন সরল আকারে প্রকাশ করে অন্তরীকরণ করা সুবিধাজনক।

উদাহরণ 7. x এর প্রেক্ষিতে $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $y = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$ [$x = \sec \theta$ ধরে]

$$= \tan^{-1} \frac{1}{\tan \theta} = \tan^{-1} \cot \theta = \tan^{-1} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

প্রশ্নমালা 9.4

x এর প্রেক্ষিতে অন্তরজ নির্ণয় কর :

প্রথম ভাগ :

1. $(3x-5)^4$. $e^{3x}, e^{\sqrt{x}}, e^{\sin x}$

2. (i) $\sin(ax)$, (ii) $\sec(5x+3)$, (iii) $\tan(ax+b)$. (iv) $\cos x^\circ$, (v) $5e^x \ln x$

3. (i) $\sin\sqrt{x}$, [সি. '১২; কু. '১৩] (ii) $\cos\sqrt{x}$, $\sin^2 x^2$, $\log_{10} 3x$ [ঢা. '১১; য. '১৩]

4. $\dfrac{\cot x - \tan x}{\cot x + \tan x}$.

5. $\dfrac{1}{(3-x^2)^3}$, $\sin^2(ax+b)$.

6. $\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$. [রা. '১৩; চ. ব. '১১; সি. '১০]

7. $\sqrt{(x-3)(x-4)}$.

8. $\operatorname{cosec}\sqrt{x}$; $\ln(\sin 2x)$

9. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$ [ব. '১৩; ঢা. '০৯]

10. $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$

11. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$.

12. $\left(\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2$.

13. $\ln(\ln x)$.

14. $\ln(x-\sqrt{x^2-1})$. [কু. '১০]

15. $\ln\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\right)$.

16. $\ln\dfrac{a+x}{a-x}$

17. $\sin^2\{\ln(\sec x)\}$, [দি. রা. '১৩; সি. ঢা. '১২]

18. (i) $\sin^2\{\ln(x^2)\}$. [চ. '১৩] (ii) $\{\ln(\sin x^2)\}^n$. [সি. '০৬]

19. $2x^0\cos 3x^0$. [কু. '১৩; দি. সি. '১১; ব. '১২]

20. $e^{5x}\sin x^0$

21. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

22. $\ln\left\{e^x\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{3/2}\right\}$.

23. $\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$ [ব. '১০; সি. '১১]

24. $\cos(\ln x)+\ln(\tan x)$. [সি. '০৬]

25. $2\operatorname{cosec} 2x\cos\{\ln(\tan x)\}$ [রা. '০৬]

দ্বিতীয় ভাগ :

26. (i) $\sin^{-1}3x$. (ii) $\sin^{-1}\sqrt{xe^x}$. [ব. '১০]

27. $\tan^{-1}(e^x)$. [ঢা. '০৮]

28. (i) $\tan(\sin^{-1}x)$. [ঢা. ব. '১২; দি. ব. ঢা. '১০; কু. '১১] (ii) $\sqrt{\sin^{-1}x^5}$.

29. (i) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$. (ii) $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$. [ঢা. য. '১০]

30. $\tan^{-1}\dfrac{4x}{1-4x^2}$

31. (i) $\sin^{-1}(\tan x)$ (ii) $\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$. [চ. '১৩]

32. (i) $\sin^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ [রা. '১২] (ii) $\sec^{-1}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$. [সি. '১১]

33. $\tan^{-1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

34. (i) $\tan^{-1}\dfrac{2\sqrt{x}}{1-x}$ [চ. সি. '১১; কু. '১২] (ii) $\tan^{-1}\dfrac{6\sqrt{x}}{1-9x}$. [সি. '১২]

35. $\cot^{-1}\dfrac{1+x}{1-x}$

36. $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

37. $\tan^{-1}\dfrac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$.

38. $\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$. [ব. '১১]

39. $\sin^{-1}\frac{4x}{1+4x^2}$

40. $\tan^{-1}\frac{a+bx}{a-bx}$. [কু. '১৩; ঢা. '০৯, '১১; রা. '১২]

41. (i) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ [রা. '১০; কু. '১১; ব. '১২] (ii) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$ [ঢা. '১৩]

42. $(x^2+1)\tan^{-1}x-x$. [কু. '১২]

তৃতীয় ভাগ :

43. $ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ [রা. '১১; ঢা. '১২]

44. (i) x^x. [কু. '১২; সি. রা. '১৩] (ii) $x^{\frac{1}{x}}$.

45. $a^{\cos x}$.

46. $e^{2\ln(\tan 5x)}$ [ব. '১১; সি. '১০]

47. a^{px+q}. a^{a^x} [চ. '১৩; সি. '১২]

48. $(\sin x)^{\tan x}$.

49. $x^{\cos(ax+b)}$.

50. (i) x^{e^x}. (ii) e^{e^x}.

51. $e^{5\ ln(\tan 5x)}$. [ঢা. '০৮; চ. '১২]

52. (i) e^{x^x} (ii) $\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$ [চ. '১০; কু. '১১; ব. '১২]

53. $(x^x)^x$. [ঢা. ব. সি. '১১; রা. '১২]

54. $a^{ln(\cos x)}$.

55. $x^{ln\, x}$. [সি. '১১]

56. $(1+x^2)^{2x}$.

57. $10^{ln\,(\sin x)}$.

58. $(\cot x)^{\tan x}$.

59. $(\sin x)^{ln\, x}$.

60. x^{x^x}. [য. '১১]

61. $x^{\cos^{-1}x}$. [ব. রা. ঢা. '১০; চ. '১১]

62. $x^{\sin^{-1}x}$. [ঢা. কু. '১৩]

63. $e^{x^2}+x^{x^2}$. [ঢা. '১২]

উত্তরমালা

প্রথম ভাগ :

1. $12(3x-5)^3$, $3e^{3x}$, $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, $\cos x e^{\sin x}$ 2. (i) $a\cos(ax)$, (ii) $5\sec(5x+3)\tan(5x+3)$, (iii) $a\sec^2(ax+b)$. (iv) $-\frac{\pi}{180}\sin\frac{\pi x}{180}$. 3. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$, $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$, $4x\sin x^2\cos x^2$, $\frac{\log_e 10}{x}$.

4. $-2\sin 2x$. 5. $\frac{6x}{(3-x^2)^4}$, $2a\sin(ax+b)\cos(ax+b)$. 6. $\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sec^2\frac{x}{2}$.

7. $\frac{2x-7}{2\sqrt{(x-3)(x-4)}}$. 8. $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{cosec}\sqrt{x}\cot\sqrt{x}$; $2\cot 2x$. 9. $\frac{1}{4\sqrt{x}}\sqrt{\left(e^{\sqrt{x}}\right)}$.

10. $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$ 11. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$. 12. $2\tan x\sec^2 x$ 13. $\frac{1}{x\,ln\,(x)}$. $\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$.

14. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. 15. $\frac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ 16. $\frac{2a}{a^2-x^2}$.

17. $\tan x \sin 2\{(ln (\sec x)\}$. **18.** (i) $\frac{2 \sin \{ ln (x^4)\}}{x}$. (ii) $2nx \cot x^2 \{ln (\sin x^2)\}^{n-1}$

19. $\frac{\pi}{90}\left(\cos\frac{\pi x}{60} - \frac{\pi x}{60}\cdot \sin\frac{\pi x}{60}\right)$. **20.** $5 e^{5x} \sin\frac{\pi x}{180} + \frac{\pi \cos\frac{\pi x}{180}\cdot e^{5x}}{180}$. **21.** $(1 + x^2)^{-3/2}$.

22. $\frac{x^2+2}{x^2-1}$. **23.** $\frac{-\{x \tan x + ln (\cos x)\}}{x^2}$. **24.** $-\frac{\sin (ln\, x)}{x} + \frac{\sec^2 x}{\tan x}$.

25. $-4\operatorname{cosec} 2x \cot 2x \cos \{ln (\tan x)\} - \frac{2 \operatorname{cosec} 2x \sin \{ln (\tan x)\}}{\sin x \cos x}$.

দ্বিতীয় ভাগ :

26. (i) $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$. (ii) $\frac{e^x(1+x)}{2\sqrt{xe^x}\sqrt{1-xe^x}}$ **27.** $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$. **28.** (i) $(1-x^2)^{\frac{-3}{2}}$. (ii) $\frac{5x^4}{2\sqrt{\sin^{-1} x^5 (1-x^{10})}}$

29. (i) $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$. (ii) $\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$. **30.** (i) $\frac{4}{1+4x^2}$. (ii) $\frac{1}{2(1+x^2)}$. (iii) $\sec^2 x \sin^{-1} x + \frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}$

31. (i) $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$ (ii) $\frac{1}{2}$. **32.** (i) $-\frac{2}{1+x^2}$ (ii) $\frac{2}{1+x^2}$. **33.** $-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

34. (i) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$. (ii) $\frac{3}{\sqrt{x}(1+9x)}$. **35.** $-\frac{1}{1+x^2}$. **36.** $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. **37.** $\frac{2}{1+12x^2}$.

38. $\frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)}$. **39.** $\frac{4}{1+4x^2}$. **40.** $\frac{ab}{a^2+b^2x^2}$. **41.** (i) $\frac{1}{2}$. (ii) $-\frac{1}{2}$. **42.** $2x \tan^{-1} x$.

তৃতীয় ভাগ :

43. $\operatorname{cosec} x$. **44.** (i) $x^x (1+\log x)$; (ii) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$. **45.** $-a^{\cos x} \sin x \log_e a$. **46.** $-\frac{\log_x a}{x \log_e x}$.

47. $p \ln a.\ a^{px+q}$. $a^{a^x}.a^x (\ln a)^2$ **48.** $(\sin x)^{\tan x} \{1 + \sec^2 x . \log (\sin x)\}$

49. $x^{\cos (ax+b)}\left\{\frac{\cos (ax+b)}{x} - a \sin(ax+b).ln (x)\right\}$. **50.**(i) $x^{e^x}.e^x\left\{\frac{1}{x} + ln (x)\right\}$. (ii) $e^{e^x}.e^x$

51. $25\sec^2 5x (\tan 5x)^4$. **52.** (i) $e^{x^x}.x^x\{1+ ln (x)\}$. (ii) $\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2} ln\, x\right)$.

53. $x^{x^2}.x\ \{1+ 2\, ln (x)\}$. **54.** $-a^{ln(\cos x)}. \tan x. ln(a)$. **55.** $x^{ln\, x}.\frac{2\, ln\, x}{x}$.

56. $2(1+x^2)^{2x}\cdot\left\{\frac{2x^2}{1+x^2} + ln (1+x^2)\right\}$. **57.** $10^{ln(\sin x)}. \cot x.) ln (10)$.

58. $(\cot x)^{\tan x}. \sec^2 x \{ ln (\cot x) - 1\}$. **59.** $(\sin x)^{ln\, x}\left\{\frac{ln (\sin x)}{x} + \cot x . \ln x\right\}$.

60. $x^{x^x}.x^x\left[ln (x)\{ ln (x) + 1\} + \frac{1}{x}\right]$. **61.** $x^{\cos^{-1}x}\left\{-\frac{ln\, x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\cos^{-1} x}{x}\right\}$.

62. $x^{\sin^{-1}x}\left\{\frac{ln\, x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1} x}{x}\right\}$. **63.** $2xe^{x^2} + x^{x^2}(2x\, ln\, x + x)$.

9.15.2. অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় :

দুইটি চলক x ও y দ্বারা একটি সমীকরণ প্রকাশ করা হলে যদি y কে সরাসরি x এর মাধ্যমে প্রকাশ করা না যায়, তবে y কে x এর অব্যক্ত ফাংশন বলা হয়। একে সাধারণত $f(x,y) = 0$ আকারে লেখা হয়।

y কে x এর একটি অজ্ঞাত ফাংশনরূপে গণ্য করে x এর প্রেক্ষিতে সমীকরণের প্রত্যেক পদের অন্তরক সহগ নির্ণয় করে $\frac{dy}{dx}$ এর মান সমাধান করে পাওয়া যায়।

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ ৪. $\sqrt{x} + \sin y = x^2$ সমীকরণ থেকে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $u = \sin y$, $\therefore \frac{du}{dy} = \cos y$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{[অনুচ্ছেদ 2.11 থেকে]}$$

অর্থাৎ, $$\frac{d}{dx}(\sin y) = \cos y \cdot \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের উভয়পক্ষকে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ (differentiation) করে আমরা পাই,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{[(i) থেকে]}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 1/2\sqrt{x}}{\cos y}.$$

প্রশ্নমালা 9.5

নিচের ফাংশনগুলো থেকে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর : (প্রশ্ন 1 – 14)

1. $x^4 + y^4 = 3axy$.
2. $1 + xy^2 + x^2y = 0$.
3. $x^y = y^x$. [রা. বো. ২০০০; চ. বো.' ০৩]
4. (a) $\ln(xy) = x + y$. [চা. '০৩, বা. '০৫, কু. '০৬] (b) $\ln(xy) = x^2 + y^2$. (c) $x^y = e^{x+y}$. [ব. '০৫]
5. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.
6. $x + y = xy^2$.
7. $e^{xy} - 4xy = 2$.
8. $x^2 + y^2 = \sin(xy)$.
9. $y = x^y$.
10. $y = \cot(x + y)$.
11. $(\sin x)^y = (\cos y)^x$.
12. $\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{a}$.
13. $x^y + y^x = a^b$. [রা. '১১]
14. $y = \sin(x + y)^2$. [রা. '০৪]

উত্তরমালা

1. $\frac{y(y^4 - 3x^4)}{x(3y^4 - x^4)}$. 2. $\frac{-y(y + 2x)}{x(x + 2y)}$. 3. $\frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}$ 4. (a) $\frac{y(x - 1)}{x(1 - y)}$; (b) $\frac{y(2x^2 - 1)}{x(1 - 2y^2)}$; (c) $\frac{x - y}{x(\ln x - 1)}$

5. $-\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}$. 6. $\frac{y^2 - 1}{1 - 2xy}$. 7. $-\frac{y}{x}$. 8. $\frac{y\cos(xy) - 2x}{2y - x\cos(xy)}$. 9. $\frac{y^2}{x[1 - \ln(y)]}$. 10. $-\frac{1 + y^2}{2 + y^2}$.

11. $\frac{\ln(\cos y) - y\cot x}{\ln(\sin x) + x\tan y}$. 12. $\frac{y}{x}$. 13. $-\frac{y x^{y-1} + y^x \ln(y)}{x^y \ln(x) + x y^{x-1}}$. 14. $\frac{2(x + y)\cos(x + y)^2}{1 - 2(x + y)\cos(x + y)^2}$

9.16. পর্যায়ক্রমিক অন্তরজ

যদি $y = f(x)$ হয়, তবে x এর প্রেক্ষিতে ফাংশনের প্রথম অন্তরজ সাধারণত $f'(x), \frac{dy}{dx}, y_1$ বা y' দ্বারা সূচিত করা হয়।

আবার প্রথম অন্তরজকে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করলে যে ফাংশান পাওয়া যায় তাকে দ্বিতীয় অন্তরজ বলা হয় এবং লেখা হয় : $f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}, \ y_2$ বা y''.

অনুরূপভাবে, পর্যায়ক্রমে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে তৃতীয়, চতুর্থ, পঞ্চম ইত্যাদি অন্তরজ নির্ণয় করা যায়। যে পর্যায়ে অন্তরজের মান শূন্য হয় তার পরের পর্যায়ের প্রত্যেকটি অন্তরজের মান শূন্য হবে। তৃতীয় পর্যায়ের অন্তরজকে সাধারণত $\frac{d^3y}{dx^3}$ বা y_3 দ্বারা সূচিত করা হয়। সাধারণভাবে, nতম পর্যায়ের অন্তরজকে $\frac{d^n y}{dx^n}$ বা, y_n দ্বারা সূচিত করা হয়।

উদাহরণ 1. $y = x^3 + 5x^2 + 10x + 14$ **থেকে** $\frac{dy}{dx}, \ \frac{d^2y}{dx^2}, \ \frac{d^4y}{dx^4}$ **এবং** $\frac{d^3y}{dx^3}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান : x প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে,

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 10x + 10.$

$\frac{dy}{dx}$ কে x প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 10$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ কে x প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে, $\frac{d^3y}{dx^3} = 6.$

$\frac{d^3y}{dx^3}$ কে x প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে, $\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$

উদাহরণ 2. $y = x^3 \log x$ **হলে,** $\frac{d^4y}{dx^4}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান : এখানে $y = x^3 \log x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 \log x + x^3 . \frac{1}{x} = 3x^2 \log x + x^2$$

x এর প্রেক্ষিতে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x \log x + 3x^2 . \frac{1}{x} + 2x = 6x \log x + 5x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6x. \frac{1}{x} + 6 \log x + 5 = 11 + 6 \log x \qquad \therefore \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{6}{x} .$$

উদাহরণ 3. $y = ax \sin x$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $x^2y_2 - 2xy_1 + (x^2 + 2)y = 0.$

সমাধান : $y = ax \sin x.$ [দেওয়া আছে] -------- (i)

$\therefore y_1 = a(\sin x + x \cos x)$ ------ (ii)

আবার x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে

$y_2 = a(\cos x + \cos x - x \sin x) = 2a \cos x - ax \sin x$ ----- (iii)

$\therefore x^2y_2 - 2xy_1 + (x^2 + 2)y$

$= x^2(2a \cos x - ax \sin x) - 2x(a \sin x + ax \cos x) + (x^2 + 2)\, ax \sin x$

[(i) , (ii) এবং (iii) থেকে]

$= 2ax^2 \cos x - ax^3 \sin x - 2ax \sin x - 2ax^2 \cos x + a x^3 \sin x + 2ax \sin x = 0$ [প্রমাণিত]

প্রশ্নমালা 9.6

1. $y = x^2 - 5 + \frac{1}{x^2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}$ এবং $\frac{d^3y}{dx^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

2. যদি $y = x^3 \log x$ হয়, তবে $\frac{d^3y}{dx^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

3. $y = \tan x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 = 2y(1 + y^2)$.

4. $y = \sqrt{(1-x)(1+x)}$ হলে, $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$

5. $y = \sqrt{4 + 3\sin x}$ হলে, দেখাও যে, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$. [য. '১৩]

6. (i) $y = \sin x$ হলে, দেখাও যে, $y_4 - y = 0$.
   (ii) $y = a\cos x + b\sin x$ হলে, দেখাও যে, $y_4 - y = 0$.

7. $\cos 3x$ এর n–তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

8. $\frac{1}{x}$ এর n–তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

9. $y = px + \frac{q}{x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2y_2 + xy_1 = y$. [ঢা. '০৯]

10. $y = \tan^{-1} x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$.

11. $y = \sin^{-1}x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$.

12. $\cos\sqrt{y} = x$ বা, $y = (\cos^{-1}x)^2$ হলে, দেখাও যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 2$. [চ. '১৩; দা. '১১; কু. দি. ব. '১০]

13. $\sin\sqrt{y} = x$ বা, $y = (\sin^{-1}x)^2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$. [কু. '১১, '১৩; চ. '১১]

14. $y = (a + bx)e^{2x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 - 2y_1 - 2be^{2x} = 0$.

15. যদি $y = \frac{\ln x}{x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $y_2 = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$.

16. $y = Ae^{mx} + Be^{-mx}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 - m^2y = 0$. [দি. '১০; কু. '১১]

17. $\ln y = \tan^{-1}x$ হলে, $(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0$. [রা. য. '১০; কু. '১১]

18. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$.

19. $y = x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} +$ হলে, প্রমাণ কর যে, $3x\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^{\frac{2}{3}}$.

20. $y = \tan x + \sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$ [রা. '১০]

21. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$ হলে, দেখাও যে, $(a^2 + x^2)y_2 + xy_1 = 0$. [চ. '১০]

22. $y = \sin(\sin x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}.\tan x + y\cos^2 x = 0$. [সি. '১১]

23. $y = e^x\cos x$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$. [সি. '১০]

24. $y = e^{ax}\sin bx$ হলে, দেখাও যে, $y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$.

25. $y = e^{\tan^{-1}x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x - 1)\frac{dy}{dx} = 0$.

26. $y = \sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = y(2y^2 - 1)$. [কু. '১০; য. '১১]

27. $y = \sin(m \sin^{-1}x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$. [রা '১৩; ঢা. '১০; ব. '১১]

28. $y = \tan(m \tan^{-1}x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)y_2 + 2(x - my)y_1 = 0$. [ঢা. '১৩; য. '১১]

29. $y = x^m \ln(x)$ হলে, দেখাও যে, $xy_1 = my + x^m$.

30. $y = e^x \cos x$ হলে, দেখাও যে $y_2 - 2y_1 + 2y = 0$.

31. $y = ax^2 + bx^{-\frac{1}{2}}$ হলে, দেখাও যে $2x^2y_2 - xy_1 - 2y = 0$. [ঢা. চ. '১৩; দি. চ. '১১; সি. ১০]

32. $y = (a + bx)e^{-2x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$.

33. $y = (e^x + e^{-x})\sin x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_4 + 4y = 0$.

34. $y = (p + qx)e^{-2x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$.

35. $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$ হলে, দেখাও যে, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$. [রা. '১৩; ঢা. '০৯]

36. $y = e^{a\sin^{-1}t}$ হলে, দেখাও যে $(1 - t^2)y_2 - ty_1 = a^2y$. [ঢা. ব. '১১]

37. $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$. [ব. য. '১০]

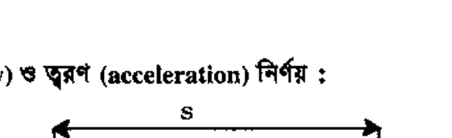
38. $y = e^x x^6$ হলে, y_3 এর মান নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. $2 + \frac{6}{x^4}; -\frac{24}{x^5}$. 2. $11 + 6\log x$. 7. $3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$. 8. $\frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$.

38. $e^x(x^6 + 18x^5 + 90x^4 + 120x^3)$.

9.16.1. অন্তরজ এর সাহায্যে বেগ (velocity) ও ত্বরণ (acceleration) নির্ণয় :



মনে করি, একটি কণা O বিন্দু থেকে একটি সরলরেখা OP বরাবর অবিরাম গতিতে চলছে। যদি t সময় পরে কণার অবস্থান P বিন্দুতে হয় এবং $OP = s$ হয় এবং স্থির বিন্দু O থেকে s কে ডানদিকে ধনাত্মক ও বামদিকে ঋণাত্মক ধরা হয়, তবে $s = f(t)$. তাহলে, P বিন্দুতে $\frac{ds}{dt}$ দ্বারা চলমান কণার বেগ, v প্রকাশ করে। v এর পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বা মন্দন বলা হয়।

$\therefore$ ত্বরণ বা, মন্দন $= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} = a$ (মনে করি)

এখন a এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে। যখন a এর মান ধনাত্মক তখন v এর মান বাড়ে । আবার v এর মান কমে যখন a এর মান ঋণাত্মক । প্রথম ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $\frac{d^2s}{dt^2}$ দ্বারা যথাক্রমে ত্বরণ ও মন্দন বোঝায়।

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. কোন সরলরেখায় একটি গতিশীল কণার t সেকেন্ড সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব s কে $s = 63t - 6t^2 - t^3$ দ্বারা প্রকাশ করা হল। 2 সেকেন্ডের শেষে কণাটির বেগ কত ? কণাটি কত সময় পরে থেমে যাবে?

সমাধান : এখানে $s = 63t - 6t^2 - t^3$

$\therefore$ t সেকেন্ড পরে কণাটির বেগ, $\frac{ds}{dt} = 63 - 12t - 3t^2$

সুতরাং 2 সেকেন্ডের শেষে বেগ $= 63 - 12.\ 2 - 3.(2)^2 = 63 - 24 - 12 = 27$ একক/সেকেন্ড।

আবার কণাটি থেমে যাবে যখন বেগ $\frac{ds}{dt} = 0$

বা, $63 - 12t - 3t^2 = 0$ বা, $t^2 + 4t - 21 = 0$

বা, $(t + 7)(t - 3) = 0$ $\therefore t - 3 = 0\ [\because t \neq -7]$

$\therefore t = 3.$

অর্থাৎ, 3 সেকেন্ড পরে কণাটি থেমে যাবে।

উদাহরণ 2. $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x–অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : দেয়া আছে $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 12x^2 + 6x - 6$

স্পর্শক রেখা x অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

অর্থাৎ $12x^2 + 6x - 6 = 0$ বা, $6(x + 1)(2x - 1) = 0$ $\therefore x = -1, \frac{1}{2}$

যখন $x = -1,\ y = 6$ [বক্ররেখার সমীকরণ থেকে]

আবার যখন $x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{3}{4}$ $\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $(-1, 6)$ এবং $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$

প্রশ্নমালা 9.7

1. $y = 3x^2 + 2x - 1$ বক্ররেখার $(-1, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।
2. $x^2 + xy + y^2 = 4$ বক্ররেখার $(2, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।
3. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপর $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।
4. $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ বক্ররেখাটি $(2, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে; উক্ত বিন্দুতে তার স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।
5. $y = \sqrt{x}$ বক্ররেখার উপর কোন বিন্দুতে স্পর্শক x – অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে?
6. $y = x^3 - 3x + 2$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x–অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [দি. '১২; রা. '১০]
7. $y = (x - 3)^2 (x - 2)$ বক্ররেখার যেসব বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
8. $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক y- অক্ষের সমান্তরাল, তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর।
9. $x^2 + 4x + y^2 = 0$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব, তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর।
10. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x- অক্ষের সমান্তরাল, তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর।
11. $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলো অক্ষদ্বয়ের সঙ্গে সমান সমান কোন উৎপন্ন করে তাদের ভুজ নির্ণয় কর। [দি. '১০; ঢা. '১১; রা. '১২]

12. $x^2 + 4y^2 = 8$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাংকে নির্ণয় কর।

13. $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখাটির উপর এমন বিন্দুগুলো নির্ণয় কর যেখানে স্পর্শকগুলো x- অক্ষের উপর লম্ব। [ব. '১০]

14. a এর মান কত হলে $y = ax(1 - x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x–অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। [ব. কু. '১২; ঢা. '০৮; সি. '১০; য. '১১]

15. $y = (x+1)(x-1)(x-3)$ বক্ররেখাটি যে সব বিন্দুতে x–অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [কু. ঢা. '১০; সি. '১১]

16. c এর মান কত হলে, $y = cx(1+x)$ বক্ররেখা এবং x–অক্ষের ছেদবিন্দুতে অঙ্কিত বক্ররেখার স্পর্শক x–অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করবে?

17. $y = x^2 + \sqrt{1-x^2}$ বক্ররেখাটির যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x–অক্ষের উপর লম্ব, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. '১০; সি. চ. '১২]

18. $y = ax^2 + bx + c$ বক্ররেখাটি মূলবিন্দু ও $(1,1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। যদি মূলবিন্দুতে বক্ররেখাটির ঢাল 2 হয়, তবে a, b ও c এর মান নির্ণয় কর।

19. একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $\left(3t + \frac{1}{8}t^2\right)$ মিটার অতিক্রম করে। 5 মিনিট পর তার বেগ কত হবে? [কু. '১১]

20. একটি কণা সোজা পথে এমনভাবে চলে যেন t সময় পরে এর অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = \sqrt{t}$. দেখাও যে ঐ কণার ত্বরণ ঋণাত্মক এবং তা কণাটির বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক।

21. একটি কণা t সময়ে $s = at^2 + bt + c$ পথ অতিক্রম করে। t সময় শেষে কণাটির শেষ বেগ v হলে, দেখাও যে, $v^2 - b^2 = 4a(s - c)$, যেখানে a, b, c ধ্রুবক।

22. যদি একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল সমহারে (সময় t এর প্রেক্ষিতে) বাড়ে, তবে প্রমাণ কর যে, এর পরিধির বৃদ্ধির হার ব্যাসার্ধের ব্যস্ত অনুপাতে বাড়ে।

23. একটি বস্তুর গতির সমীকরণ $s = t^3 + \frac{1}{t^3}$ হলে, দেখাও যে এর ত্বরণ সব সময় ধনাত্মক এবং $t = 10$ সেকেন্ড হলে, এর গতিবেগ কত হবে?

24. কোন সরলরেখায় একটি কণা এমনভাবে চলছে যেন তা $s = 3{\cdot}8t + 1{\cdot}5\,t^2$ শর্তানুসারে t সেকেন্ডে s সে. মি. অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, এর ত্বরণ ধ্রুবক রাশি। ত্বরণের মানও বাহির কর।

25. যদি কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায়, তবে দেখাও যে তার ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধি হার তার ব্যাসার্ধের সাথে সমানুপাতিক হবে। [সি. '১১; চ. '১২]

26. একটি পাথরখণ্ড 98 মিটার/ সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। t সময়ে এর গতি সমীকরণ $s = 98t - 4{\cdot}9t^2$ রূপে প্রকাশিত হলে, যে সময়ে (i) এর বেগ 49 মিটার/ সে. হয়, (ii) পাথরখণ্ডটি তার উচ্চতম বিন্দুতে পৌঁছে তা নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. -4. **2.** 1. **3.** $\frac{1}{t}$. **4.** 3. **5.** $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. **6.** $(1,2)$; $(1,-2)$, **7.** $(3, 0)$; $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right)$. **8.** $(0, 0)$, $(-2a, 0)$,

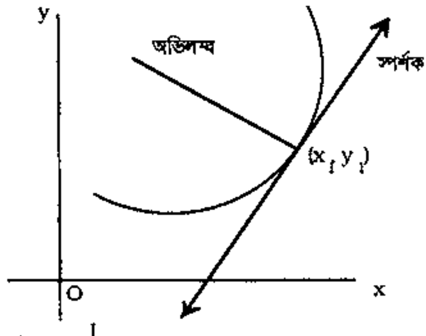
9. $(0, 0)$, $(-4, 0)$, **10.** $(1, 0)$; $(-1, 4)$. **11.** $1 \pm \sqrt{2}$; $1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ **12.** $(2\sqrt{2}, 0)$; $(-2\sqrt{2}, 0)$

13. $(0, 0)$, $(-2a, 0)$. **14.** $\sqrt{3}$. **15.** 8, -4, 8. **16.** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **17.** $(1, 1)$, $(-1, 1)$.

18. $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$. **19.** 78 মিটার/ সে. **23.** 60·00012 একক। **24.** 3 সে. মি./সে.^{2}

26. (i) 5 সেকেন্ড (ii) 10 সেকেন্ড.

9.16.2. স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ



মনে করি, একটি বক্ররেখার সমীকরণ, $y = f(x)$ এবং এর উপরিস্থিত একটি বিন্দু (x_1, y_1).

(x_1, y_1) বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$, যেখানে রেখার ঢাল $= m$.

এ রেখাটি (x_1,y_1) বিন্দুতে প্রদত্ত বক্ররেখার স্পর্শক হলে, $m = \frac{dy}{dx}$ [(x_1,y_1) বিন্দুতে]

$\therefore$ **স্পর্শকের সমীকরণ,** $\mathbf{y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)}$

(x_1,y_1) বিন্দুগামী এবং ঐ একই বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাকে অভিলম্ব বলা হয়।

$\therefore$ অভিলম্বের ঢাল $\times \frac{dy}{dx} = -1. \Rightarrow$ অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

সুতরাং অভিলম্বের সমীকরণ, $(y - y_1) = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1)$

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 3. $\mathbf{x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0}$ **বৃত্তের উপরিস্থিত (1,2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান **:** $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$ কে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 6 - 10\frac{dy}{dx} = 0$$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y - 10) = 6 - 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6 - 2x}{2y - 10} = \frac{6 - 2}{4 - 10} = -\frac{2}{3}$ { (1,2) বিন্দুতে }

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$ [অনুচ্ছেদ 3.6 থেকে]

$$\Rightarrow 3y - 6 = -2x + 2 \Rightarrow 2x + 3y - 8 = 0.$$

অভিলম্বের সমীকরণ, $(x - 1) + \left(-\frac{2}{3}(y - 2)\right) = 0$ [অনুচ্ছেদ 3.6 থেকে]

$$\Rightarrow 3x - 3 = 2y - 4 = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 1 = 0.$$

উদাহরণ 4. $\mathbf{x^2y + xy^2 - 2x - 3y - 17 = 0}$ **বক্ররেখার উপরিস্থিত (2,3) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান **:** $x^2y + xy^2 - 2x - 3y - 17 = 0$ কে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে আমরা পাই

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} - 2 - 3\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x^2 + 2xy - 3) = -2xy - y^2 + 2$$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy - y^2 - 2}{x^2 + 2xy - 3} = \frac{-12 - 9 - 2}{4 + 12 - 3} = -\frac{23}{13}$ [(2,3) বিন্দুতে]

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 3 = -\frac{23}{13}(x - 2) \Rightarrow 13y - 39 = -23x + 46$

$$\Rightarrow 23x + 13y - 85 = 0.$$

অভিলম্বের সমীকরণ, $y - 3 = \frac{13}{23}(x - 2)$ $\quad 3x - 26 = 23y - 69 = 0$

$$\Rightarrow 13x - 23y + 43 =$$

প্রশ্নমালা 9.8

1. (2, 4) বিন্দুতে $y = x^3 - 3x + 2$ বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
2. দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $yy_1 = 2a(x + x_1)$.
3. $y = x^3 - 2x^2 + 2$ বক্ররেখার $(2, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
4. $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার $(-4, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '১২]
5. $y = x^3 - 2x^2 + 5$ বক্ররেখার $(2, 5)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
6. $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ বক্ররেখাটির $(1, -1)$ বিন্দু অতিক্রমকারী স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
7. $x^2 - 5xy + y^2 - 5x + 6y + 9 = 0$ বক্ররেখার $(2, 1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
8. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ বৃত্তের উপরিস্থিত $(-1, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
9. $y^2 - 4x - 6y + 20 = 0$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত (3,2) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
10. $3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 49 = 0$ উপবৃত্তের উপরিস্থিত $(-1,2)$বিন্দুতে সস্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
11. $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ বের কর।
12. $x^3 - 6x^2y + 5xy - 2x + 3y - 17 = 0$ দ্বারা বর্ণিত বক্ররেখার $(-1, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
13. $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ বক্ররেখার $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '০৮; ব. '১১]
14. $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 9 = 0$ বৃত্তটি যে বিন্দুতে y–অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
15. $y(x - 1)(x - 2) - x + 3 = 0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x- অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
16. $y(x - 2)(x - 3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x- অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '০৯; চ. য. '১০; দি. '১১]
17. দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার যে কোন স্পর্শক দ্বারা অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের যোগফল একটি ধ্রুবক।
18. $x^2 + y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$ বৃত্তের $(1, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '১১]

উত্তরমালা

1. $9x - y - 14 = 0$. **3.** $4x - y - 6 = 0$. **4.** $4x + 3y + 7 = 0$, $3x - 4y + 24 = 0$. **5.** $8x - y - 21 = 0$.
6. $x - 1 = 0$. **7.** $x - 3y + 1 = 0$. **8.** $y + 2 = 0$, $x + 1 = 0$. **9.** $2x + y - 8 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$.
10. $3x - 5y + 13 = 0$, $5x + 3y - 1 = 0$. **11.** $(x - x_1)(y_1^2 - ax_1) + (y - y_1)(ay_1 - x_1^2) = 0$.
12. $33x + 8y + 49 = 0$, $8x - 33y - 58 = 0$. **13.** $2x + 3y + 1 = 0$, $3x - 2y - 5 = 0$.
14. $x - 5y + 45 = 0$ এবং $x + 5y + 5 = 0$; $5x + y - 9 = 0$ এবং $5x - y - 1 = 0$. **15.** $x - 2y - 3 = 0$.
16. $x - 20y - 7 = 0$, $20x + y - 140 = 0$. **18.** $8x + y - 10 = 0$, $x - 8y + 15 = 0$.

9.17. অন্তরজের আদর্শ প্রতীক হিসেবে $f'(x)$, $f''(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ইত্যাদির ব্যবহার

যেসব ক্ষেত্রে পর্যায়ক্রমিক অন্তরজের প্রয়োজন হয়, ঐসব ক্ষেত্রে $f'(x), f''(x) \ldots f^n(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$, ইত্যাদি প্রতীকগুলি ব্যবহৃত হয়। যেমন :

ম্যাকলরিনের ধারা

মনে করি, $f(x)$ ফাংশনটির সকল পর্যায়ের অন্তরজ বিদ্যমান এবং $f(x)$-কে x এর ঘাতের উর্ধক্রমে অসীম বা, অনন্ত ধারায় প্রকাশ করা যায়। তাহলে,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + \ldots \infty .$$

উপরে প্রাপ্ত ধারাটি ম্যাকলরিনের ধারা নামে পরিচিত।

9.18. স্বাধীন ও অধীন চলকের অন্তরক

পূর্ববর্তী অধ্যায়গুলিতে আমরা $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা স্বাধীন চলক, x এর প্রেক্ষিতে y এর অন্তরজ হিসেবে সূচিত করেছি। অর্থাৎ $\frac{dy}{dx}$ কে একটি একক সত্ত্বা (Single entity) বিবেচনা করা হয়েছে। অধীন চলক, y এর অন্তরক dy এবং স্বাধীন চলক x এর অন্তরক dx সম্পর্কে আলোচনা করা হয়নি। এখন dy এবং dx প্রতীককে এমনভাবে সংজ্ঞায়িত করব যেন $\frac{dy}{dx}$ কে একটি যথার্থ অনুপাত (Actual ratio) হিসেবে বিবেচনা করা যায়।

মনে করি, x বিন্দুতে ফাংশন f অন্তরীকরণযোগ্য এবং "dx" একটি স্বাধীন চলক যার যেকোনো মান বাস্তব এবং "dy" কে নিচের সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো :

$$dy = f'(x)\, dx \quad \ldots\ldots (i)$$

যদি $dx \neq 0$, তাহলে, (i) এর উভয় পক্ষকে dx দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) .$$

সুতরাং, আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হয়েছি যে, "dy" এবং "$dx \neq 0$," এর অনুপাত হলো $f'(x)$.

উদাহরণ : $y = x^2$ এর অন্তরজকে অন্তরক আকারে প্রকাশ কর এবং $x = 1$ বিন্দুতে dy এবং dx এর সম্পর্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : x এর প্রেক্ষিতে y এর অন্তরজ, $\frac{dy}{dx} = 2x$

$\therefore$ অন্তরক আকারে : $dy = 2x\, dx$

যখন $x = 1$, $dy = 2\, dx$.

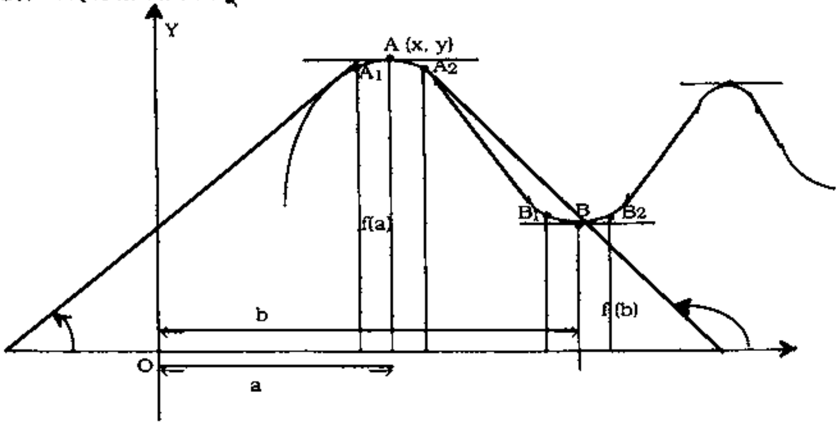
9.19. ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন

মনে করি, $y = f(x)$. তাহলে, $x = x_1$ বিন্দুতে y কে x এর ক্রমবর্ধমান ফাংশন বলা হয়, যদি $x = x_1$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} > 0$, অর্থাৎ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} > 0$. সুতরাং, $a < x < b$ ব্যবধির x এর সব মানের জন্য যদি $\frac{dy}{dx} > 0$ হয়, তবে (a, b) ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান।

আবার, y কে x এর ক্রমহ্রাসমান ফাংশন বলা হয়, যদি $x = x_2$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} < 0$,

অর্থাৎ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_2} < 0$. সুতরাং, $a < x < b$ ব্যবধির x এর সব মানের জন্য যদি $\frac{dy}{dx} < 0$ হয়, তবে (a, b) ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান।

9.20. ফাংশনের চরম বিন্দু



গরিষ্ঠ মান : উপরে $y = f(x)$ এর লেখচিত্র $A_1 A\, A_2 B_1 B\, B_2$ অঙ্কন করা হয়েছে। লেখচিত্রটি লক্ষ করলে দেখা যায় যে, $A\ (x = a)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি x-অক্ষের সমান্তরাল। তাহলে, এ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি, অর্থাৎ $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x) = 0$. আবার, $A_1\ (x = a - h$, যেখানে h যথেষ্ট ক্ষুদ্র কিন্তু $h > 0)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে, অতএব A_1 বিন্দুতে $f'(x) > 0$; এবং $A_2(x = a + h)$বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে, অতএব A_2 বিন্দুতে $f'(x) < 0$.

লেখচিত্র থেকে স্পষ্টত বুঝা যায় যে $a - h < a < a + h$ ব্যবধিতে $A(x = a)$ বিন্দুতে y, অর্থাৎ $f(x)$ এর মান বৃহত্তম। এ মান অর্থাৎ $f(a)$ কে বলা হয় ফাংশন $f(x)$ এর **গরিষ্ঠ মান (Maximum value).**

> **যদি $f(x)$ এমন একটি ফাংশন হয় যেন (i) $x = a$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$**
> **(ii) x এর সকল মান (a থেকে ক্ষুদ্রতর কিন্তু a এর সন্নিকটবর্তী) এর জন্য $f'(x) > 0$**
> **(iii) x এর সকল মান (a থেকে বৃহত্তর কিন্তু a এর সন্নিকটবর্তী) এর জন্য $f'(x) < 0$**
> **হয়, তবে $x = a$ এ প্রদত্ত ফাংশনের একটি গরিষ্ঠ মান আছে এবং তা $a - h < a < a + h$ ব্যবধিতে $f(a)$.**

লঘিষ্ঠ মান : অনুরূপভাবে, $B\ (x = b)$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$. আবার $B_1(x = b - h)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে, অতএব B_1 বিন্দুতে $f'(x) < 0$ এবং $B_2\ (x = b + h)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে, অতএব B_2 বিন্দুতে $f'(x) > 0$. লেখচিত্র থেকে স্পষ্টত বুঝা যায় যে $b - h < b < b + h$ ব্যবধিতে $B\ (x = b)$ বিন্দুতে y, অর্থাৎ $f(x)$ এর মান ক্ষুদ্রতম। এ মান অর্থাৎ $f(b)$ কে বলা হয় ফাংশন $f(x)$ এর **লঘিষ্ঠ মান (Minimum value).**

> **যদি $f(x)$ এমন একটি ফাংশন হয় যেন (i) $x = b$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$**
> **(ii) x এর সকল মান (b থেকে ক্ষুদ্রতর কিন্তু b এর সন্নিকটবর্তী) এর জন্য $f'(x) < 0$**
> **(iii) x এর সকল মান (b থেকে বৃহত্তর কিন্তু b এর সন্নিকটবর্তী) এর জন্য $f'(x) > 0$,**
> **তবে $x = b$ এ প্রদত্ত ফাংশনের একটি লঘিষ্ঠ মান আছে এবং তা $b - h < b < b + h$ ব্যবধিতে $f(b)$.**

যে সব বিন্দুতে ফাংশনের মান গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ হয়, ঐ সব বিন্দুকে চরম বিন্দু বলা হয়।

9.21. ফাংশনের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান

চরম মান (Extreme value or extremum) :

ফাংশনের সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মানকে সম্মিলিতভাবে (*collectively*) সাধারণত বলা হয় ফাংশনের চরম মান।

অনুচ্ছেদ 9.20 থেকে লক্ষ করেছি যে বিন্দুতে $f(x)$ এর মান সর্বোচ্চ হয় তার সন্নিকটবর্তী বিন্দুগুলিতে $f'(x)$ এর চিহ্ন ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক হয়, সুতরাং $f'(x)$ একটি ক্রমহ্রাসমান ফাংশন।

$\therefore f'(x)$ এর অন্তরজ $f''(x) < 0.$

আবার যে বিন্দুতে $f(x)$ এর মান সর্বনিম্ন হয় তার সন্নিকটবর্তী বিন্দুগুলিতে $f'(x)$ এর চিহ্ন ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মক হয়, সুতরাং $f'(x)$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

$\therefore f'(x)$ এর অন্তরজ $f''(x) > 0.$

চরম মান নির্ণয় পদ্ধতি :

মনে করি, $y = f(x)$ ফাংশনটি কোন নির্দিষ্ট ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত ও অবিচ্ছিন্ন।

(a) $f'(x) = 0$ থেকে x এর মান নির্ণয় করা। x এর এ মানগুলির জন্য ফাংশনের গরিষ্ঠ মান বা লঘিষ্ঠ মান থাকতে পারে। ধরি, x এর মানগুলি হলো a, b, c ইত্যাদি।

(*b*) $y = f(x)$ থেকে দ্বিতীয় পর্যায়ের অন্তরজ অর্থাৎ $f''(x)$ নির্ণয় করে x এর প্রাপ্ত মানগুলি বসিয়ে $f''(x)$ এর মানগুলি পরীক্ষা করতে হবে।

(i) যদি $f''(\mathrm{a}) < 0$ হয়, তবে $x = \mathrm{a}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর একটি গরিষ্ঠ মান আছে।

(ii) যদি $f''(\mathrm{a}) > 0$ হয়, তবে $x = \mathrm{a}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর একটি লঘিষ্ঠ মান আছে।

অনুরূপভাবে $x = b, c$ ইত্যাদি বসিয়ে চরম মান নির্ণয় করতে হবে।

মন্তব্য : $f'(x) = 0$ হলে, ফাংশন থেকে $f''(x)$ নির্ণয় করে $f''(\mathrm{a})$ এর প্রাপ্ত মান পরীক্ষা করতে হবে। যদি $f''(\mathrm{a}) = 0$ হয়, তবে পরবর্তী পর্যায়ের অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে হবে এবং তদ্রূপ।

উদাহরণ : কোন ফার্ম যা তৈরি করে তার সব কয়টি প্রতি একক 10 টাকা হিসাবে বিক্রয় করে। x একক তৈরি করতে মোট খরচ যদি $c(x) = 30 + 2x + 0.02x^2$ হয় তবে

(i) কত একক তৈরি করলে সর্বাধিক আয় হবে?

(ii) সর্বাধিক আয় কত?

সমাধান : (i) মোট বিক্রয় আয় $R = 10x$

P = প্রকৃত আয় ফাংশন $= R - C = 10x - (30 + 2x + 0.02\,x^2) = 8x - 0.02x^2 - 30$

সর্বাধিক আয় হওয়ার শর্ত হলো,

$\frac{dp}{dx} = 0$ এবং $\frac{d^2p}{dx^2} < 0$

এখন $\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}(8x - 0.02x^2 - 30) = 8 - 0.04x = 8 - \frac{1}{25}x$

প্রথম শর্তানুসারে, $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow 8 - \frac{1}{25}x = 0$

$\Rightarrow x = 200$

দ্বিতীয় শর্ত : $\frac{d^2p}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(8 - \frac{x}{25}\right) = -\frac{1}{25} < 0$

অতএব, x = 200 একক হলে আয় সর্বাধিক হবে।

(ii) সর্বাধিক আয় = $8 \times 200 - 0.02\,(200)^2 - 30 = 770$ টাকা।

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 5. নিচের ফাংশনের গুরু ও লঘু মান নির্ণয় কর :

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2;$

সমাধান : $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ এর উভয়পক্ষকে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

যে সব বিন্দুর জন্য $f'(x) = 0$ ঐ সব বিন্দুতে $f(x)$ এর গরিষ্ঠ মান বা লঘিষ্ঠ মান থাকবে।

এখন $f'(x) = 0$ হলে, $3x^2 - 10x + 3 = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(3x - 1) = 0 \qquad \therefore x = 3, \frac{1}{3}$

আবার (1) এর উভয়পক্ষকে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে আমরা পাই $f''(x) = 6x - 10$

$\therefore$ যখন $x = 3$, $f''(3) = 8 > 0$; এবং যখন $x = \frac{1}{3}$, $f''(\frac{1}{3}) = -8 < 0.$

অর্থাৎ, $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর লঘিষ্ঠ মান এবং $x = \frac{1}{3}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর গরিষ্ঠ মান আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় লঘিষ্ঠ মান $= f(3) = 27 - 45 + 9 + 2 = -7$

এবং গরিষ্ঠ মান $= f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} - \frac{5}{9} + 1 + 2 = \frac{67}{27}.$

উদাহরণ 6. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5$ এর গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5$ এর উভয়পক্ষকে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে আমরা পাই

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x \ldots\ldots\ldots(1)$

$\therefore$ চরম মানের জন্য $f'(x) = 0$, অর্থাৎ $4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$

$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow x(x - 1)(x - 2) = 0. \quad \therefore x = 0, 1, 2.$

(1) এর উভয়পক্ষকে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে $f''(x) = 12x^2 - 24x + 8.$

যখন $x = 0$, " $f''(0) = 8 > 0$

" $x = 1$, " $f''(1) = -4 < 0$

" $x = 2$, " $f''(2) = 8 > 0.$

$\therefore x = 0$ এবং $x = 2$ বিন্দুদ্বয়ে $f(x)$ এর লঘিষ্ঠ মান এবং $x = 1$ বিন্দতে গরিষ্ঠ মান আছে।

$x = 0$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠ মান $= f(0) = 5$

$x = 2$ " " " $= f(2) = 5$

$x = 1$ " গরিষ্ঠ মান $= f(1) = 6.$

প্রশ্নমালা 9.9

1. $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$ ফাংশনটির লঘুমান ও গুরুমান x এর কোন মানের জন্য পাওয়া যেতে পারে তা বের কর।
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$ এর লঘু মান ও গুরু মান নির্ণয় কর। [রা. '১০]
3. $x(12 - 2x)^2$ এর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর।
4. $f(x) = 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$, ($0 \le x \le \frac{\pi}{2}$) ফাংশনটির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। [ঢা. '০৮]
5. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$ এর গরিষ্ঠ মান ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।
6. $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ এর গরিষ্ঠ মান ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। [ঢা. '০৯]
7. $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ ফাংশনটির লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।
8. $2x^3 - 9x^2 + 12x + 5 = f(x)$ ফাংশনটির লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। [রা. '১১]
9. প্রমাণ কর যে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 27x + 5$ এর কোন চরম মান থাকবে না।
10. প্রমাণ কর যে, $f(x) = \sqrt{3}\sin x + 3\cos x\ (0 \le x \le 2\pi)$ এর মান বৃহত্তম হবে যদি $x = \frac{\pi}{6}$ হয়।
11. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$ এর লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর।
12. $y = 4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান নির্ণয় কর। [ব. কু. '১০]
13. দেখাও যে, $x + \frac{1}{x}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [সি. চ. ব. '১০; ঢা. '১১]
14. দেখাও যে, $x^3 - 3x^2 + 6x + 3$ এর কোন গুরু অথবা লঘু মান নেই। [ব. '১১]
15. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ এর গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর। [সি. '১০]
16. মুনাফা ফাংশন $P = 300 + 1200x - x^2$ কি পরিমাণ উৎপাদন করা হলে, মুনাফা সর্বাধিক হবে, যখন $x =$ উৎপাদিত দ্রব্য।
17. একটি খামারের মোট ব্যয় ফাংশন $C = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 12x$, যখন x উৎপাদিত এককের সংখ্যা নির্দেশ করে। আয় ফাংশন $R = 12x - x^2$ হলে সর্বোচ্চ উৎপাদন নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. 1, 2, 3. **2.** লঘু মান = − 162, গুরু মান = 94. **3.** বৃহত্তম মান = 128, ক্ষুদ্রতম মান = 0, **4.** $4\frac{1}{3}$, 3.
5. লঘিষ্ঠ মান = − 4, গরিষ্ঠ মান = − 3. **6.** গরিষ্ঠ মান = −3, লঘিষ্ঠ মান = −128. **7.** − 28, 0.
8. লঘিষ্ঠ মান = 9, গরিষ্ঠ মান = 10. **11.** $21\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$. **12.** 12. **15.** গুরু মান = $\frac{81}{16}$, লঘু মান = 0.
16. 600 একক। **17.** $x = 4$.

প্রশ্নমালা 9.10

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ এর মান –

(a) 0 (b) – 1 (c) 1 (d) 2

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x}$ এর মান –

(a) – 1 (b) 1 (c) 2 (d) 3

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}, (a > 1)$ এর মান –

(a) 0 (b) 1 (c) $ln\ a$ (d) $-\ ln\ a$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ এর মান –

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) – 2

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{2x^2 + 9x - 4}$ এর মান –

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{-5}{4}$

6. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) কোনোটিই নয়

7. $y = ln\ (x - \sqrt{x^2 - 1}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) $1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (c) $\frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (d) $\frac{x}{2\sqrt{x^2 - 1}}$

8. $y = \cot^{-1} \frac{1 - x}{1 + x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) $\frac{1}{1 + x^2}$ (b) $\frac{-1}{1 + x^2}$ (c) $\frac{1}{1 + x}$ (d) $\frac{1}{1 - x}$

9. $y = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{-1}{2}$ (d) কোনোটিই নয়

10. $y = \sqrt{\sin 2x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) $\frac{\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{\sin 2x}}$ (c) $\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2\,x}}$ (d) $\frac{\tan 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$

11. $y = \cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $2\sqrt{1-x^2}$ (d) $\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

12. $y = \tan^{-1}\frac{a+x}{a-x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) $\frac{a}{a^2+x^2}$ (b) $\frac{1}{1+x^2}$

(c) $\frac{1}{a(+x^2)}$ (d) $\frac{1}{1+a^2x^2}$

13. $y = \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) $\frac{3}{1+x^2}$ (b) $\frac{1}{1+x^2}$

(c) $\frac{1}{1+9x^2}$ (d) $\frac{9}{1+x^2}$

14. $y = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) $\cos x$ (b) $-\sin x$

(c) $\sin x$ (d) $-\cos x$

15. একটি গাড়ি সোজা রাস্তায় t সেকেন্ডে $(3t + \frac{1}{8}t^2)$ মিটার অতিক্রম করলে, 5 মিনিটে তার বেগ কত হবে?

(a) 60 m/sec (b) 72 m/sec

(c) 78 m/sec (d) 80 m/sec

সৃজনশীল প্রশ্ন

1. (a) Sadwitch উপপাদ্যটি কী।

(b) এটি প্রয়োগ করে $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$ নির্ণয় কর।

(c) $y = \sqrt{4 + 3\sin x}$ হলে, দেখাও যে, $2yy_2 + 2y_1^2 + y^2 = 4$.

2. (a) ফাংশনের সীমার সংজ্ঞা লিখ।

(b) $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{2x}{a^2+x^2}$ হলে, $f(x)$ নির্ণয় কর।

(c) $y = x^3 - 3x + 2$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

3. (a) মান নির্ণয় কর : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

(b) মূল নিয়মে $\cos 2x$-এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$ এর লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর।

ব্যবহারিক

9.22. নির্দিষ্ট বিন্দুর সন্নিকটে ফাংশনের লেখকে আসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন

সমস্যা নং 9.22		তারিখ :

সমস্যা : (4, 4) বিন্দুর সন্নিকটে $y = (x-2)^2$ এর লেখকে আসন্নভাবে (4, 4) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের লেখ দ্বারা প্রতিস্থাপন করতে হবে।

তত্ত্ব : $y = (x-2)^2$ এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ, $y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$

কার্যপদ্ধতি : **1.** $y = (x-2)^2$ থেকে $\frac{dy}{dx} = 2(x-2)$ নির্ণয় করি।

2. (4, 4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করি।

$$y - 4 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=4} = 4(x-4)$$

$$\Rightarrow y - 4 = 4(x-4)$$

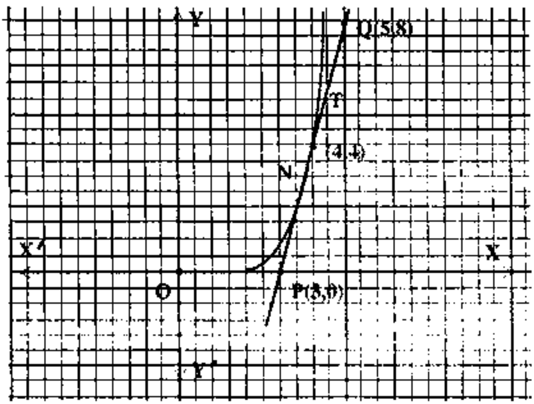
$$\Rightarrow 4x - y = 12$$

3. স্পর্শকের সমীকরণ থেকে (3, 0), (4, 4) এবং (5, 8) বিন্দুগুলি নির্ণয় করি।

4. x-অক্ষ এবং y-অক্ষ (আয়তাকার) অঙ্কন করি। উভয় অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের 2 বাহুকে একক ধরে উপরে প্রাপ্ত বিন্দুগুলি স্থানাঙ্কায়িত এবং সাবলীলভাবে সংযুক্ত করে PQ স্পর্শক অঙ্কন করি।

5. (4, 4) বিন্দুর সন্নিকটে TN লেখ অঙ্কন করি। এই লেখই নির্ণেয় লেখচিত্র।

লেখচিত্র অঙ্কন :



9.23. ফাংশনের লেখকে আসন্নভাবে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশের সমন্বয়ে গঠিত লেখ দ্বারা প্রতিস্থাপন।

সমস্যা নং 9.23		তারিখ :

সমস্যা : $y = x^2$ ফাংশনের লেখকে আসন্নভাবে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশের সমন্বয়ে গঠিত লেখ দ্বারা প্রতিস্থাপন করতে হবে।

তত্ত্ব : $y = x^2$ এবং (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}(x - x_1)$.

কার্যপদ্ধতি :

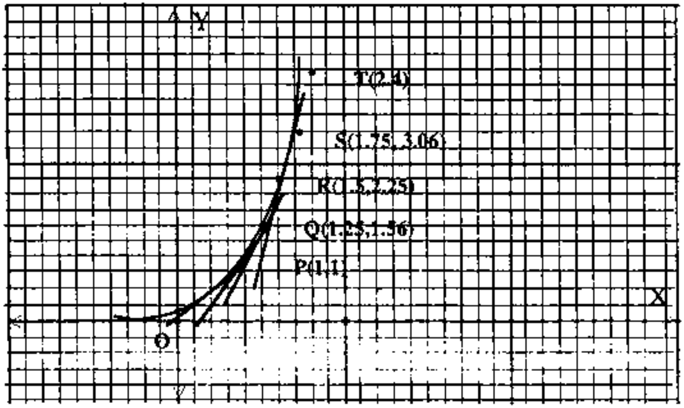
1. ছক কাগজে x অক্ষ ও y অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি।

2. $y = x^2$ সমীকরণে x এর বিভিন্ন মান বসিয়ে y এর আনুষঙ্গিক মান বের করে নিচের ছক তৈরি করি।

x	1	1.25	1.5	1.75	2
y	1	1.56	2.25	3.06	4

3. ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম 4 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 (একক) ধরে $y = x^2$ লেখের $P(1, 1)$, $Q(1.25, 1.56)$, $R(1.5, 2.25)$, $S(1.75, 3.06)$ এবং $T(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করি।

বিন্দুগুলি খুব নিকটবর্তী হওয়ায় পাশাপাশি যেকোনো দুইটি স্পর্শবিন্দুর সংযোগে PQ, QR, RS, ST... ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশে উৎপন্ন হলো, যা ফাংশনটির লেখের সাথে আসন্নভাবে সমাপতিত।



সুতরাং $y = x^2$ এর লেখটি আসন্নভাবে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশের সমন্বয়ে গঠিত লেখ দ্বারা প্রতিস্থাপিত হলো।

9.24. আসন্ন মান নির্ণয়

সমস্যা নং 9.24(a)		তারিখ :

সমস্যা : $f(x) = y = \sqrt{x}$ থেকে $x = 4$ বিন্দুতে dy নির্ণয় করতে হবে, যখন $dx = 3$.

তত্ত্ব : $dy = f'(x)dx$.

কার্যপদ্ধতি :

1. $f(x) = \sqrt{x}$ কে অন্তরীকরণ করে পাই, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $x = 4$ বিন্দুতে $dy = f'(x)dx$ এর আসন্ন মান নির্ণয় করি। .

ফলাফল : $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4} = 0.75.$

সমস্যা নং 9.24(b)		তারিখ :

সমস্যা : $f(x) = y = \sqrt{x}$ থেকে $x = 4$ বিন্দুতে δy নির্ণয় করতে হবে, যখন $\delta x = 3$.

তত্ত্ব : $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$.

কার্যপদ্ধতি : $x = 4$ বিন্দুতে $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$ নির্ণয় করি।

ফলাফল : $\delta y = f(x + \delta x) - f(x) = f(4 + 3) - f(4) = f(7) - f(4) = \sqrt{7} - \sqrt{4} = 0.65.$

শ্রেণির কাজ :

1. $y = -x^2$.
2. $y = (x - 1)^2$.
3. $y = x^2 + 1$.

দশম অধ্যায়

যোগজীকরণ (Integration)

10.1. নির্দিষ্ট যোগজ (ক্ষেত্রফল হিসাবে নির্দিষ্ট যোগজ)

ধরি, $y = f(x)$ সমীকরণটি একটি বক্ররেখা নির্দেশ করে এবং $f(x)$ ফাংশনটি $a \le x \le b$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন। a ও b নির্দিষ্ট এবং $b > a$.

$x = a, x = b$ বিন্দুতে দুইটি কোটি যথাক্রমে AC ও BE অঙ্কন করি। তাহলে $OA = a$ এবং $OB = b$, যখন O মূলবিন্দু। সুতরাং $AB = b - a$.

আমরা AB কে $x = a + h, a + 2h$...বিন্দুতে h দৈর্ঘ্যের n সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করি যেন $nh = b - a$ বা, $b = a + nh$ হয়।

এখন $x = a + h, a + 2h$...... বিন্দুতে A_1D_1, A_2D_2..... কোটি অঙ্কন করি। তাহলে $[a, b]$ ব্যবধির মধ্যে ক্ষেত্রটি কতকগুলি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র আয়তক্ষেত্রে বিভক্ত হলো।

মনে করি, $y = f(x)$ বক্ররেখা এবং x- অক্ষ ও $x = a, x = b$ দুইটি কোটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র S দ্বারা সূচিত হলো।

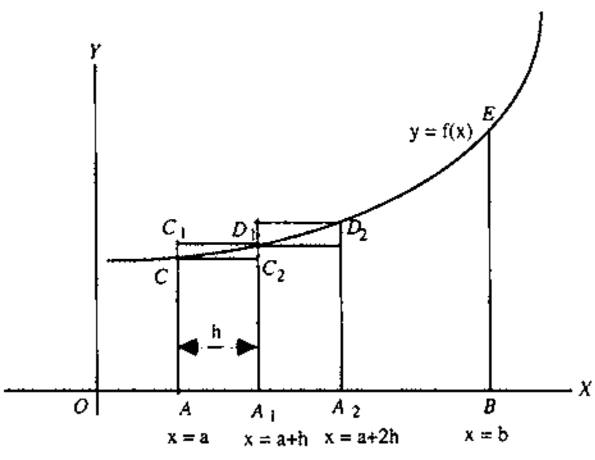
আবার, নিচের ক্ষুদ্র আয়তক্ষেত্রগুলির (যথা : ACC_2A_1.....) ক্ষেত্রফলের সমষ্টি S_1 এবং উপরিভাগের ক্ষুদ্র আয়তক্ষেত্রগুলির (যথা : $AC_1D_1A_1$....) ক্ষেত্রফলের সমষ্টি S_2 দ্বারা সূচিত হলে স্পষ্টত: $S_2 > S > S_1$. যেখানে,

$$S_1 = hf(a) + hf(a + h) + ... + h(a + \overline{n-1}.h) = h\sum_{r=0}^{n-1} f(a + rh) \;.....\; \text{(i)}$$

এবং $S_2 = hf(a + h) + hf(a + 2h) + ... + h(a + nh) = h\sum_{r=1}^{n} f(a + rh)$

$$= hf(a) + hf(a + h) + hf(a + 2h) + ... + h(a + \overline{n-1}.h) + hf(b) - hf(a) \quad [\because b = a + nh]$$

$$= h\sum_{r=0}^{n-1} f(a + rh) + hf(b) - hf(a) \;.....\; \text{(ii)}$$



এখন n এর মান খুব বেশি বৃদ্ধি করলে অর্থাৎ $n \to \infty$ হলে $h \to 0$ হবে এবং (i) থেকে আমরা পাই,

$$S_1 = \lim_{h \to 0} h \sum_{r=0}^{n-1} f(a + rh) = \int_a^b f(x)\, dx$$

আবার (ii) থেকে পাই,

$$S_2 = \lim_{h \to 0} h \sum_{r=0}^{n-1} f(a + rh) = \int_a^b f(x)\, dx \text{ যেহেতু } \lim_{h \to 0} hf(a) = 0 \text{ এবং } \lim_{h \to 0} hf(b) = 0$$

$\Rightarrow S_1 = S_2 = S$

সুতরাং $S = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx$

জ্যামিতিকভাবে, নির্দিষ্ট যোগজ $\int_a^b f(x)\, dx$ কে $y = f(x)$, x-অক্ষ, $x = a$ এবং $x = b$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে। এখানে a কে নিম্নপ্রান্ত এবং b কে উর্ধ্বপ্রান্ত বলা হয়।

10.2. প্রতিঅন্তরজ হিসাবে যোগজ

যোগজীকরণ হলো অন্তরীকরণের বিপরীত বা প্রতিঅন্তরজ প্রক্রিয়া (Integration is the inverse process of differentiation). যদি $\frac{d}{dx} \phi(x) = \phi'(x) = f(x)$ হয়, তবে $f(x)$ এর যোজিত ফল হবে $\phi(x)$. এ বিবৃতিটি আমরা $\int f(x)\, dx = \phi(x)$ সংকেতে লিখি। এখানে $\int$ প্রতীকটি লম্বা S বুঝায়। কারণ এটি Summation শব্দটির প্রথম অক্ষর যা যোগজ প্রক্রিয়ার অন্যদিক। কাজেই এ প্রতীকটি যোগজীকরণের জন্য ব্যবহার করা হয়। ফাংশন $f(x)$-এর পরে dx দ্বারা x-এর সাপেক্ষে যোগজীকরণ বুঝায়। ফাংশন $f(x)$ কে যোজ্য রাশি (Integrand) বলা হয়।

যেমন, $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, কাজেই $\cos x$ এর যোজিত ফল $\sin x$. অর্থাৎ, $\int \cos x\, dx = \sin x$.

10.3. নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য

মনে করি, x একটি স্বাধীন চলক এবং ফাংশন $f(x)$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ $F(x)$. চলক x এর মান a থেকে b-তে পরিবর্তনের ফলে $F(x)$ এর মানের যে পরিবর্তন হয় তাকে অর্থাৎ $F(b) - F(a)$ কে a এবং b সীমার মধ্যে $f(x)$ এর নির্দিষ্ট যোগজ বলে এবং একে $\int_a^b f(x)\, dx$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

$G(x)$ যদি $f(x)$ এর যেকোনো প্রতিঅন্তরজ হয় তবে, $\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a)$ এ ফলটি নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য নামে পরিচিত। অর্থাৎ $\int_a^b f(x)\, dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$; এখানে a কে নিম্নপ্রান্ত এবং b কে উর্ধ্বপ্রান্ত বলে।

দ্রষ্টব্য : $\int_a^b f(x)\, dx$ এর মান নির্ণয়ের জন্য নিচের তিনটি ধাপে সমস্যাটি সমাধান করতে হবে ।

(i) অনির্দিষ্ট যোগজ $\int f(x)\, dx = F(x)$ নির্ণয় করতে হবে।

(ii) $F(x)$ কে তৃতীয় বন্ধনীর মধ্যে লিখে দক্ষিণ পার্শ্বে উপরে উর্ধ্বপ্রান্ত b এবং নিচে নিম্নপ্রান্ত a লিখতে হবে।

(iii) $F(x)$-এ $x = b$ এবং $x = a$ বসিয়ে $F(b) - F(a)$ নির্ণয় করতে হবে। এই মানটি নির্ণেয় নির্দিষ্ট যোগজ।

10.4. নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল

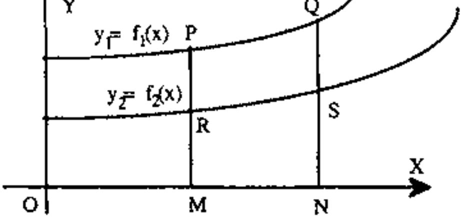
অনুচ্ছেদ 10.1 থেকে আমরা পেয়েছি, $y = f(x)$ বক্ররেখা, $x = a$, $x = b$ এবং x–অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y\,dx.$

10.4.1. দুইটি বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

মনে করি, $y_1 = f_1(x)$ ও $y_2 = f_2(x)$ দুইটি বক্ররেখা এবং $OM = a$, $ON = b$, $x = a$, $x = b$ বিন্দুতে x-অক্ষের উপর PM ও QN দুইটি লম্ব অংকন করি, যা বক্ররেখা দুইটিকে যথাক্রমে P, R এবং Q, S বিন্দুতে ছেদ করে।

$y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ বক্ররেখা এবং $x = a$, $x = b$ বিন্দুতে অংকিত দুইটি কোটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র PRSQ-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

এখন PRSQ-এর ক্ষেত্রফল = (PMNQ এর ক্ষেত্রফল) – (RMNS এর ক্ষেত্রফল)



$$= \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \{f_1(x) - f_2(x)\}\,dx$$

$$= \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx,$$

যেখানে $y_1 = f_1(x)$ এবং $y_2 = f_2(x)$

মন্তব্য : নির্দিষ্ট যোগজ এবং নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উদাহরণ ও অনুশীলনীর জন্য অনুচ্ছেদ 10.7.1 ও 10.7.2 দ্রষ্টব্য।

10.5. অনির্দিষ্ট যোগজ

$F(x)$ ফাংশনটির অন্তরজ $F'(x) = f(x)$ অর্থাৎ $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ হলে, $F(x)$ ফাংশনটিকে $f(x)$ এর প্রতিঅন্তরজ বা অনির্দিষ্ট যোগজ বলে।

অনির্দিষ্ট যোগজ অনন্য নয়। কারণ x^3, $x^3 + 4$, $x^3 + 7$ এ তিনটি ফাংশনের প্রতিটির অন্তরজ $3x^2$. উপরে উল্লিখিত তিনটি ফাংশনই হলো $3x^2$ এর প্রতিঅন্তরজ বা অনির্দিষ্ট যোগজ।

$f(x)$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ প্রকাশ করার জন্য $\int f(x)\,dx$ চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। সুতরাং $\int 3x^2 dx = x^3 + c,$ যেখানে c এর মান যথাক্রমে 0, 4, 7. এজন্য অনির্দিষ্ট যোগজীকরণের ক্ষেত্রে সর্বদাই একটি ধ্রুবক c অন্তর্ভুক্ত থাকবে।

যোগজীকরণ ধ্রুবক (Constant of integration)

আমরা জানি, $\frac{d}{dx}\phi(x) = \phi'(x) = f(x)$ (ধরি) এবং যে–কোন ধ্রুবক c এর জন্য

$$\frac{d}{dx}\{\phi(x) + c\} = f(x).\ \text{কাজেই}\ \int f(x)\,dx = \phi(x) + c$$

c কে যোগজীকরণের ধ্রুবক (constant of integration) বলা হয়।

লক্ষণীয় : $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}\{\phi(x) + c\} = \phi'(x) + 0 = f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$

দ্রষ্টব্য : অনির্দিষ্ট যোগজের ক্ষেত্রে যোগজীকরণ ধ্রুবক c অবশ্যই লিখতে হবে। সুবিধার জন্য উত্তরমালাতে ধ্রুবক বাদ দেয়া হয়েছে।

10.5.1. যোগজের ধর্ম :

(1) যে কোন ধ্রুবক a এর জন্য $\int a\,\phi(x)\,dx = a\int \phi(x)\,dx$

প্রমাণ : যেহেতু $\frac{d}{dx}\left[a\int \phi(x)\,dx\right] = a\frac{d}{dx}\left[\int \phi(x)\,dx\right] = a\,\phi(x)$

সুতরাং $\int a\,\phi(x)\,dx = a\int \phi(x)\,dx$

(2) $\int [\phi(x) + \psi(x) + f(x) + \ldots]\,dx = \int \phi(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx + \int f(x)\,dx + \ldots$

প্রমাণ : $\frac{d}{dx}\left[\int \phi(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx + \int f(x)\,dx + \ldots\right]$

$= \frac{d}{dx}\int \phi(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int \psi(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx + \ldots = \phi(x) + \psi(x) + f(x) + \ldots$

অতএব, $\int [\phi(x) + \psi(x) + f(x) + \ldots]\,dx = \int \phi(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx + \int f(x)\,dx + \ldots\ldots$

$\int x^n\,dx$ নির্ণয় কর :

আমরা জানি, $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = (n+1)\frac{x^n}{n+1} = x^n \quad \therefore \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$. [যখন $n \neq -1$]

কতিপয় ফাংশনের অন্তরজ ও প্রতিঅন্তরজ নিচে প্রদত্ত হলো :

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\Rightarrow \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ [যখন $n \neq -1$]
$\frac{d}{dx}(x) = 1, \frac{d}{dx}(c) = 0.$	$\Rightarrow \int dx = x + c$
$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, (x > 0)$	$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln x + c$
$\frac{d}{dx}(e^{mx}) = me^{mx}$	$\Rightarrow \int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx} + c$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\Rightarrow \int e^x\,dx = e^x + c$
$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x . \ln a$	$\Rightarrow \int a^x dx = a^x/\ln a + c$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\Rightarrow \int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\Rightarrow \int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\frac{d}{dx}(\sin mx) = m\cos mx$	$\Rightarrow \int \cos mx\,dx = \frac{1}{m}\sin mx + c$
$\frac{d}{dx}(\cos mx) = -m\sin mx$	$\Rightarrow \int \sin mx\,dx = -\frac{1}{m}\cos mx + c$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\Rightarrow \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\Rightarrow \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\Rightarrow \int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$

$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$

$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x,$ $\Rightarrow \int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$

$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$

$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + c$

$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + c$

$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$ $\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + c$

$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\Rightarrow \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{cosec}^{-1} x + c$

$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. $\int 5x^7 dx$ **নির্ণয় কর**

সমাধান **:** $\int 5x^7\, dx = \frac{5x^{7+1}}{7+1} + c = \frac{5}{8}x^8 + c$, যেখানে c যোগজীকরণ ধ্রুবক।

উদাহরণ 2. $\int (ax^3 + bx^2 + cx)\, dx$ **নির্ণয় কর**

সমাধান **:** $\int ax^3 dx + \int bx^2\, dx + \int cx dx \quad = a\int x^3\, dx + b\int x^2\, dx + c\int x\, dx$

$$= \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + c_1$$

উদাহরণ 3. $\int (3\cos x - 5\sec^2 x)\, dx$ **নির্ণয় কর**

সমাধান **:** $\int (3\cos x - 5\sec^2 x)\, dx$

$$= \int 3\cos x\, dx - \int 5\sec^2 x\, dx = 3\int \cos x\, dx - 5\int \sec^2 x\, dx = 3\sin x - 5\tan x + c.$$

উদাহরণ 4. $\int \frac{t^2+3t+1}{\sqrt{t}}\, dt$ **নির্ণয় কর**

সমাধান **:** $\int \frac{t^2+3t+1}{\sqrt{t}}\, dt = \int (t^{3/2} + 3t^{1/2} + t^{-1/2})\, dt$

$$= \frac{t^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} + 3\,\frac{t^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{t^{-1/2+1}}{\frac{-1}{2}+1} + c = \frac{2}{5}\, t^{5/2} + 2t^{3/2} + 2\sqrt{t} + c$$

প্রশ্নমালা 10.1

অনির্দিষ্ট যোগজগুলি নির্ণয় কর :

1. $\int 5x^9 dx.$ 2. $\int \frac{dx}{6}.$ 3. $\int dt.$

4. $\int (4\sin x + 3\cos x)\, dx.$ 5. $\int \frac{dx}{x^4}.$ 6. $\int (1 + x^{-1} + x^{-2})\, dx.$ [রা. '০৯]

7. $\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx.$ 8. $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1}\, dx.$ 9. $\int \frac{x^3 + 4}{x^2}\, dx.$

10. $\int \frac{3 + 4x^2 + 5x^4}{\sqrt[3]{x}}\, dx.$ 11. $\int (x^3 - 5e^x + 8)\, dx.$ 12. $\int \frac{dx}{1 - \cos 2x}.$

13. $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx.$ 14. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}\, dx.$ 15. $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$ [কু. '০৮]

16. $\int \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx.$ [চ. '১২] 17. $\int (\sec x \tan x - 3\,\mathrm{cosec}^2 x)\, dx.$

18. $\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}\, dx.$ 19. $\int \tan^2 x\, dx.$ [ঢা. '০৫] 20. $\int \sec x(\sec x + \tan x)\, dx.$

21. $\int (\tan x + \cot x)^2\, dx.$ 22. $\int \sec^2 x\,\mathrm{cosec}^2 x\, dx.$ [সি. '১০; কু. দি. '১১; ঢা. '১২; কু. '১৩]

23. $\int \frac{\sin x - \mathrm{cosec}\, x}{\tan x}\, dx.$ 24. $\int \mathrm{cosec}\, x\,(\mathrm{cosec}\, x - \cot x + \sin x)\, dx.$

25. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx.$ 26. $\int \frac{\cos\theta - \cos 2\theta}{1 - \cos\theta}\, d\theta.$ 27. $\int \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) dx.$ [ঢা. '০৫]

28. $\int \cos^2 x\, dx.$ [ঢা. '০৮] 29. $\int \frac{d\theta}{5\tan^2\theta}.$ 30. $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta.$

31. $\int 3\sin^2\frac{\theta}{2}\, d\theta.$ 32. $\int \sin x^\circ\, dx$ [চ. '০৪] 33. $\int \frac{\tan x}{\cot x}\, dx.$

34. $\int (x - 2)^3 dx.$ 35. $\int \sqrt{x}(x - 3)dx.$ 36. $\int x(1 + \sqrt{x})\, dx.$ [ব. '০৪]

উত্তরমালা

1. $\frac{1}{2}x^{10}$. **2.** $\frac{1}{6}x$. **3.** t. **4.** $3\sin x - 4\cos x$. **5.** $-\frac{1}{3x^3}$. **6.** $x + \ln x - \frac{1}{x}$. **7.** $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3x^3} + 2x$.
8. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$. **9.** $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{x}$. **10.** $\frac{9}{2}x^{2/3} + \frac{3}{2}x^{8/3} + \frac{15}{14}x^{14/3}$. **11.** $\frac{1}{4}x^4 - 5e^x + 8x$. **12.** $-\frac{1}{2}\cot x$.
13. $\sin x + \cos x$. **14.** x **15.** $\frac{1}{2}\tan x$. **16.** $-\sqrt{2}\cos x$. **17.** $\sec x + 3\cot x$. **18.** $\tan x - x$.
19. $\tan x - x$. **20.** $\tan x + \sec x$. **21.** $\tan x - \cot x$. **22.** $\tan x - \cot x$. **23.** $\sin x + \mathrm{cosec}\, x$.
24. $-\cot x + \mathrm{cosec}\, x + x$ **25.** $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{2/3}$. **26.** $\theta + 2\sin\theta$. **27.** $x - \frac{1}{x}$.
28. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$. **29.** $\frac{-1}{5}(\cot\theta + \theta)$ **30.** $-\mathrm{cosec}\,\theta$ **31.** $\frac{3}{2}(\theta - \sin\theta)$ **32.** $\frac{-180}{\pi}\cos\frac{\pi x}{180}$
33. $\tan x - x$ **34.** $\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x$ **35.** $\frac{2}{5}x^{5/2} - 2x^{3/2}$ **36.** $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{5}x^{5/2}$.

10.6. অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়

[প্রতিস্থাপন, আংশিক ভগ্নাংশ, অংশায়ন Integration by parts সূত্রের সাহায্যে]

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে (Method of substitution) যোগজ নির্ণয় :

প্রমাণ কর : 1. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\ |(f(x))|$. 2. $\int \sin mx\ dx = -\frac{1}{m}\cos mx + c$.

3. $\int \cos mx\ dx = \frac{1}{m}\sin mx + c$. 4. $\int e^{mx}\ dx = \frac{1}{m}e^{mx} + c$.

প্রমাণ :

1. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dz}{z} = ln\ z = ln\ [f(x)]$. | ধরি, $f(x) = z$ বা, $f'(x)\ dx = dz$

2. $\int \sin mx\ dx$ | ধরি, $mx = z \Rightarrow m\ dx = dz \Rightarrow dx = \frac{1}{m} dz$

$= \frac{1}{m}\int \sin z\ dz = \frac{1}{m}(-\cos z) + c = -\frac{1}{m}\cos mx + c$.

3. $\int \cos mx\ dx$ | ধরি, $mx = z \Rightarrow m\ dx = dz \Rightarrow dx = \frac{1}{m} dz$

$= \frac{1}{m}\int \cos z\ dz = \frac{1}{m}\sin z + c = \frac{1}{m}\sin mx + c$.

4. $\int e^{mx}\ dx$ | ধরি, $mx = z \Rightarrow m\ dx = dz \Rightarrow dx = \frac{1}{m} dz$

$= \frac{1}{m}\int e^{z}\ dz = \frac{1}{m}e^{z} + c = \frac{1}{m}e^{mx} + c$.

লক্ষণীয় : অন্তরীকরণে x এর সহগ m দ্বারা গুণ এবং যোগজীকরণে m দ্বারা ভাগ করতে হয়।

যেমন : $\frac{d}{dx}(e^{mx}) = m\ e^{mx} \Rightarrow \int e^{mx}\ dx = \frac{1}{m}e^{mx} + c$.

উদাহরণ 1. $\int (1-2x)^4\ dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $1 - 2x = z$ বা, $-2dx = dz$ বা, $dx = -\frac{dz}{2}$

$\therefore \int (1-2x)^4\ dx = -\frac{1}{2}\int (z)^4 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{z^5}{5} + c = -\frac{1}{10}(1-2x)^5 + c$.

উদাহরণ 2. $\int \sin^3 2x\ dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\int \sin^3 2x\ dx = \frac{1}{4}\int (3\sin 2x - \sin 6x)dx$ [$\sin^3 A = \frac{1}{4}(3\sin A - \sin 3A)$ প্রয়োগ করে]

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{-3\cos 2x}{2} + \frac{\cos 6x}{6}\right) + c = -\frac{3}{8}\cos 2x + \frac{1}{24}\cos 6x + c$$

উদাহরণ 3. $\int \sin 3x \cos 5x\ dx$ নির্ণয় কর। [ঢা. '০৪; কু. '০৬; দি. সি. '১২]

সমাধান : $\int \sin 3x \cos 5x\ dx$

$$= \frac{1}{2}\int 2\cos 5x \sin 3x\ dx = \frac{1}{2}\int \{\sin(5x+3x) - \sin(5x-3x)\}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (\sin 8x - \sin 2x)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 8x}{8} + \frac{\cos 2x}{2}\right) + c = -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + c.$$

উদাহরণ 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ নির্ণয় কর। [দি. '১০]

সমাধান : $\int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} = \int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx}{(x+1)-(x-1)}$

$$= \frac{1}{2}\int \{(x+1)^{1/2}-(x-1)^{1/2}\}\, dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}-\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\right\}+c$$

$$= \frac{1}{3}\{(x+1)^{3/2}-(x-1)^{3/2}\}+c$$

প্রশ্নমালা 10.2

নিম্নলিখিত অনির্দিষ্ট যোগজগুলো নির্ণয় কর :

1. $\int (5x+2)^3\, dx$ 2. $\int (2-7x)^4\, dx$ 3. $\int \sqrt{1-x}\, dx$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$ 5. $\int \frac{dx}{(1-x)^2}$ 6. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sqrt{1-\sin 2x}}$

7. (i) $\int \cos\left(5x+\frac{\pi}{3}\right) dx$ (ii) $\int \sin 5x\, dx$ 8. (i) $\int \sec^2 (ax+b)\, dx$

(ii) $\int \sec^2 x \tan^2 x\, dx$. 9. $\int \cos^2 2x\, dx$ 10. $\int \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^x+e^{-x}}\, dx$

11. $\int \frac{(x^2-1)^2}{\sqrt{x}}\, dx$. 12. (i) $\int \frac{(e^x+1)^2}{\sqrt{e^x}}\, dx$. (ii) $\int \frac{e^x+1}{\sqrt{e^x}}\, dx$

13. (i) $\int 3\sin^2 x\, dx$. (ii) $\int 4\sin^3 x\, dx$. 14. (i) $\int \sin^4 x\, dx$. [কু. '০৯]

(ii) $\int \cos^4 x\, dx$. [দি. '০৮] 15. (i) $\int 4\sin x \cos x\, dx$.

(ii) $\int 5\sin 3x \cos 2x\, dx$. (iii) $\int \cos ax \cos bx\, dx$, $(a > b)$ (iv) $\int \sin 2x \sin 4x\, dx$. [ঢা. '১১]

(v) $\int \sin 5x \sin 3x\, dx$. [য. ব. '১২] 16. (i) $\int \sin^2 x \cos 2x\, dx$. [কু. '১০; সি. '১১; বা. '১২] (ii) $\int (2\cos x + \sin x)\cos x\, dx$ [ঢা. '০৫]

17. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$. [চ. '০৬; ঢা. রা. '১৩] 18. $\int \sqrt{1+\sin x}\, dx$.

19. $\int \frac{1}{1+\sin x}\, dx$ [চ. '১০; য. '১৩] 20. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$. [য. '১১; বা. '১০; কু. '১৩] 21. $\int \frac{dx}{1-\cos 3x}$.

22. $\int 5\cos 4x \sin 3x\, dx$ [সি. '১০; চ. '১১; য. '১২] 23. $\int \sin^2 3\theta\, d\theta$.

24. $\int \frac{1+e^{5x}}{\sqrt{e^{3x}}}\, dx$. 25. $\int \frac{2x+1}{2x+3}\, dx$. 26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$.

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-3}}$ 28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$

উত্তরমালা

1. $\frac{1}{20}(5x+2)^4$ 2. $-\frac{1}{35}(2-7x)^5$ 3. $-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ 4. $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}$ 5. $\frac{1}{1-x}$ 6. $-\sqrt{1-\sin 2x}$

7. $\frac{1}{5}\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$. 8. (i) $\frac{1}{a}\tan(ax+b)$ (ii) $\frac{1}{3}\tan^3 x$ 9. $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)$ 10. $\frac{1}{4}e^{4x}$.

11. $\frac{2}{9}x^{9/2}-\frac{4}{5}x^{5/2}+2\sqrt{x}$. 12. (i) $\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x}+4e^{\frac{1}{2}x}-2e^{-\frac{1}{2}x}$. (ii) $2e^{\frac{1}{2}x}-2e^{-\frac{1}{2}x}$

13. (i) $\frac{3}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)$ (ii) $\frac{\cos 3x}{3}-3\cos x$. 14. (i) $\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)$

(ii) $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)$ 15. (i) $-\cos 2x$ (ii) $-\frac{5}{2}\left(\frac{\cos 5x}{5}+\cos x\right)$

(iii) $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b}+\frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right]$ (iv) $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 6x}{6}\right)$. (v) $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 8x}{8}\right)$

16. (i) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}\sin 4x$. (ii) $x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x$

17. $\frac{1}{32}(4x-\sin 4x)$ 18. $-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}$ 19. $\tan x-\sec x$ 20. $\tan\frac{x}{2}$ 21. $\frac{-1}{3}\cot\frac{3x}{2}$

22. $\frac{-5}{14}\cos 7x+\frac{5}{2}\cos x$. 23. $\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{1}{6}\sin 6\theta\right)$ 24. $\frac{-2}{3}e^{-3x/2}+\frac{2}{7}e^{7x/2}$. 25. $x-ln|(2x+3)|$.

26. $\frac{2}{3}(x+2)^{3/2}-\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$. 27. $\frac{1}{24}[(2x+5)^{3/2}+(2x-3)^{3/2}]$ 28. $\frac{1}{3}[(x+2)^{3/2}+x^{3/2}]$

10.7. অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়ের বিভিন্ন কৌশল

1. $\int \tan x\, dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\int\frac{dz}{z}$ | ধরি, $z = \cos x \Rightarrow dz = -\sin x\, dx$

$$= -ln|z| + c = -ln|\cos x| + c = ln\left|\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right| + c = ln|\sec x| + c.$$

2. তদ্রূপ $\int \cot x\, dx = ln|\sin x| + c = -ln|\operatorname{cosec} x| + c$.

3. $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$= \int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{\tan\frac{x}{2}}$$ [লব ও হরকে $\sec^2\frac{x}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \int\frac{dz}{z}$$; [$\tan\frac{x}{2} = z$ ধরলে $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = dz$] $= ln|z| + c = ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

4. ১ম পদ্ধতি : $\int \sec x\, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$

$$= \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} \quad [\because \sin 2A = 2\sin A\cos A]$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)dx}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} \quad \left[\text{হর ও লবকে } \sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \text{ দ্বারা গুণ করে}\right]$$

ধরি, $z = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dz = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)dx$

$\therefore \int \sec x\, dx = \int \frac{dz}{z} = ln\ |z| + c = ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c$

২য় পদ্ধতি : $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)\,dx}{\sec x + \tan x}$ [হর ও লবকে ($\sec x + \tan x$) দ্বারা গুণ করে]

ধরি, $z = \sec x + \tan x \Rightarrow dz = (\sec x\ \tan x + \sec^2 x)\,dx = \sec x\,(\sec x + \tan x)\,dx$

$\therefore \int \sec x\, dx = \int \frac{dz}{z} = ln\ |z| + c = \boldsymbol{ln\ |(\sec x + \tan x)| + c}$

সুতরাং $\boldsymbol{\int \sec x\, dx = ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c = ln\ |(\sec x + \tan x)| + c}$

5. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\sec^2\theta} = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$ | ধরি, $x = a\tan\theta$. $\Rightarrow dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

অনুসিদ্ধান্ত : $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + c$

6. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int\left\{\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right\}dx = \frac{1}{2a}\left\{\int\frac{dx}{a+x}+\int\frac{dx}{a-x}\right\}$ [আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করে]

$$= \frac{1}{2a}\{ln\ |(a+x)| - ln\ |(a-x)|\} + c = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c.$$ এখানে $a > x$.

7. $\boldsymbol{\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln\frac{x-a}{x+a}\ (x > a > 0)}$ [7 এর প্রমাণ 6-এর অনুরূপ]

৪. $\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}} = \int \frac{a\cos\theta \, d\theta}{a\cos\theta}$ ধরি, $x = a \sin\theta$;

$= \int d\theta = \theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ | $\Rightarrow dx = a \cos\theta \, d\theta$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sin^{-1}x + c.$

সহজ কৌশল ঃ লক্ষ করলে দেখা যাবে যে, প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয়ের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটিতে $f(x)$ এবং এর অন্তরজ সহগ $f'(x)$ একত্রে বিদ্যমান থাকে। এক্ষেত্রে $f(x)$-কে z ধরে সহজেই যোগজ নির্ণয় করা যায়।

যদি ফাংশনটিতে $f(x)$ এবং $f'(x)$ একত্রে বিদ্যমান না থাকে, তাহলে সরাসরি সূত্র প্রয়োগ করে যোগজ নির্ণয় করতে হবে।

উদাহরণ । অনির্দিষ্ট যোগজগুলি নির্ণয় কর ঃ

(i) $\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ (ii) $\int \frac{\cos x \, dx}{9 + \sin^2 x}$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$ [চ. '১৩]

সমাধান ঃ (i) মনে করি, $I = \int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$. [এখানে $f(x) = \sin^{-1}x$ এবং $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$]

ধরি, $z = \sin^{-1}x \quad \therefore dz = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \therefore I = \int z \, dz = \frac{1}{2} z^2 + c = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2 + c$

(ii) মনে করি, $I = \int \frac{\cos x \, dx}{9 + \sin^2 x}$. [এখানে $f(x) = \sin x$ এবং $f'(x) = \cos x$ বিদ্যমান]

ধরি, $z = \sin x \quad \therefore dz = \cos x \, dx$

$\therefore I = \int \frac{dz}{9 + z^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{z}{3} + c = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{3}\right) + c$

(iii) মনে করি, $I = \int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$. [এখানে $f(x)$ এবং $f'(x)$ একত্রে বিদ্যমান নাই]

$\therefore$ ধরি, $x = 5 \sin\theta \Rightarrow dx = 5 \cos\theta d\theta$

$$\therefore I = \int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}} = \int \frac{5\cos\theta d\theta}{\sqrt{25(1 - \sin^2\theta)}}$$
$$= \int d\theta = \theta + c = \sin^{-1}\frac{x}{5} + c.$$

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. $\int \frac{3x^2}{1 + x^6} dx$ নির্ণয় কর। [চ. '০৮; সি. '১২]

সমাধান : মনে করি, $z = x^3 \quad \therefore dz = 3x^2 \, dx$

$$\therefore \int \frac{3x^2 \, dx}{1 + x^6} = \int \frac{dz}{1 + z^2} = \tan^{-1} z + c = \tan^{-1}(x^3) + c$$

উদাহরণ 2. $\int \frac{e^{a \sin^{-1}x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\int \frac{e^{a \sin^{-1}x}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{a}\int e^y\, dy = \frac{1}{a}e^y + c$

$= \frac{1}{a}e^{a \sin^{-1}x} + c.$

ধরি, $y = a \sin^{-1} x$

$\therefore\ dy = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

বা, $\frac{dy}{a} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

উদাহরণ 3. $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$ নির্ণয় কর। [য. '১০]

সমাধান : $\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{dx}{(x^2+6x+9)+16}$

$= \int \frac{dx}{(x+3)^2+(4)^2} = \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x+3}{4} + c$

উদাহরণ 4. $\int \sin^5 x\, dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $I = \int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x \,.\, \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\, dx$

ধরি, $y = \cos x \Rightarrow \sin x\, dx = -dy$

$\therefore\quad I = -\int (1-y^2)^2\, dy, = -\int (1-2y^2+y^4)\, dy = -y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 + c$

$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$

উদাহরণ 5. $\int \frac{2x \tan^{-1} x^2}{1+x^4}dx$ নির্ণয় কর। [রা. '১১]

সমাধান : ধরি, $z = \tan^{-1} x^2 \quad \therefore\ dz = \frac{2x\, dx}{1+x^4}$

$\therefore \int \frac{2x \tan^{-1} x^2}{1+x^4}dx = \int z\, dz = \frac{1}{2}z^2 + c = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}x^2\right)^2 + c$

উদাহরণ 6. $\int \frac{dx}{9-16x^2}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\int \frac{dx}{9-16x^2} = \int \frac{dx}{16\left(\frac{9}{16}-x^2\right)} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - x^2}$

$= \frac{1}{16} \times \frac{4}{2.3}\left| ln \frac{\frac{3}{4}+x}{\frac{3}{4}-x}\right| + c = \frac{1}{24} ln \left|\frac{3+4x}{3-4x}\right| + c$

উদাহরণ 7. নিচের অনির্দিষ্ট যোগজগুলি নির্ণয় কর।

(i) $\int \frac{e^x\, dx}{1 + e^x}$ [দি. চ. '১২] (ii) $\int e^x \tan e^x \sec^2 e^x\, dx$

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{24 + 6x - 9x^2}}$

সমাধান : (i) ধরি, $I = \int \frac{e^x\, dx}{1 + e^x}$ মনে করি, $z = 1 + e^x \therefore dz = e^x\, dx$

$$\therefore I = \int \frac{dz}{z} = \ln z + c = \ln(1 + e^x) + c.$$

(ii) মনে করি, $I = \int e^x \tan e^x \sec^2 e^x\, dx.$

ধরি, $z = \tan e^x \therefore dz = e^x \sec^2 e^x\, dx$

$I = \int z\, dz = \frac{1}{2} z^2 + c = \frac{1}{2} (\tan e^x)^2 + c$

(iii) ধরি, $I = \int \frac{dx}{\sqrt{24 + 6x - 9x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{25 - (1 - 6x + 9x^2)}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(5)^2 - (3x-1)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{\sqrt{(5)^2 - z^2}}$$

মনে করি, $z = 3x - 1$

$\therefore dz = 3\, dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{3}$

$$= \frac{1}{3} \sin^{-1} \frac{z}{5} + c = \frac{1}{3} \sin^{-1} \frac{3x - 1}{5} + c$$

উদাহরণ 8. $\int \frac{dx}{4x^2 + 25}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $I = \int \frac{dx}{4x^2 + 25} = \int \frac{dx}{4\left(x^2 + \frac{25}{4}\right)} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{10} \tan^{-1} \frac{2x}{5} + c$

প্রশ্নমালা 10.3

1. $\int x e^{x^2}\, dx.$ 2. $\int \cos x \cos (\sin x)\, dx.$ 3. $\int \sin^2 x \cos x\, dx.$ [ঢা. '০২]

4. $\int x \sin x^2\, dx.$ 5. $\int e^x \tan e^x\, dx.$ 6. $\int \sec^2 x\, e^{\tan x}\, dx.$

7. (i) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$ [ঢা. '০৪] (ii) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$ (iii) $\int \frac{x^2 dx.}{1 - x^6}$ [রা. '১২]

8. (i) $\int \tan^4 x \sec^2 x\, dx.$ (ii) $\int \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} dx.$ (iii) $\int \frac{\tan (\sin^{-1} x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ [কু. '১২; রা. '১১; কা. ব. '১৩]

9. (i) $\int \frac{1}{x \sqrt{1 + \ln x}} dx$ [কু. '০৩] (ii) $\int \frac{\ln (x)}{x} dx$ (iii) $\int \cos x\, e^{\sin x} dx.$ [রা. '১১]

(iv) $\int \frac{e^x\, dx}{1 + e^{2x}}$ [ব '০৪] 10. (i) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} - 1} dx.$ (ii) $\int \frac{dx}{(x - 3)\sqrt{x + 1}}$ [ঢা. '১০]

11. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx.$ 12. (i) $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$ [ব. '১০] (ii) $\int \frac{dx}{1 + e^{-x}}$

(iii) $\int \frac{dx}{x\{1 + \ln(x)\}^3}.$ 13. $\int \frac{dx}{9x^2 + 4}$ [ব. '০৭] 14. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 16x^2}}$

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}.$ [ঢা. ব. '১২] 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}.$ [চ. ব. '১১; কু.'১২] 16. $\int \frac{dx}{16 - 4x^2}$

17. (i) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x}}$ [চ. '০২] (ii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 - 1}}$ [রা. '১১] (iii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3 + 4}}$

18. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$ [সি. '১০; কু. ব. '১২] 19. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{3 - 4e^{2x}}}$ 20. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\tan^{-1} x}$ [সি. '১১]

21. (i) $\int \frac{\sin x}{a + b\cos x} dx.$ (ii) $\int \frac{\sin 2x}{3 + 5\cos x} dx.$ 22. (i) $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx.$

(ii) $\int \frac{\tan^2(\ln x)}{x} dx$ 23. $\int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx.$ [ব. '০৪] 24. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1 - \sin x)^2}.$ [ব. '১১]

25. $\int \frac{e^x(1 + x)\,dx}{\cos^2(xe^x)}$ 26. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{\tan^{-1} x + 3}}$ 27. $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1 + x^6} dx.$ [কু. '০৮]

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{(\sin^{-1} x)}\sqrt{1 - x^2}}$ 29. $\int (1 + \cos x)^5 \sin x\, dx.$ 30. $\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)} dx.$ [ব. চ. '০৬]

31. $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x}} dx.$ [চ. '১১] 32. $\int \frac{\sin x\,dx}{a^2 + b^2\cos^2 x}$ 33. $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}.$ [য. '০২]

34. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1 - 2x^4}}$ [চ. '০১] 35. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$ 36. $\int \frac{dx}{\sqrt{15 - 4x - 4x^2}}$

37. $\int \frac{2x\sin^{-1} x^2}{\sqrt{1 - x^4}} dx.$ 38. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2}}$ 39. (i) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{16 - \tan^2 x}}$

(ii) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{3 - 5\tan x}}$ 40. $\int \frac{d\theta}{4 - 5\sin^2\theta}$ 41. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$ [ঢা. '১২; চ. '১৩]

42. $\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$ [চ. '০৩] 43. $\int \frac{dx}{1 + \tan x}.$ [সি. '১১; রা. ব. ব. '১২] 44. (i) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{5 - \cos^2 x}}$ [কু. '০৪]

(ii) $\int \frac{\cos x\,dx}{3 + \cos^2 x}$ (iii) $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\, dx$ 45. $\int \sqrt{1 + \sec x}\, dx.$

46. (i) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$ (ii) $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}}$ [চ. ব. '১০] 47. (i) $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$

(ii) $\int \frac{1 - \cos 5x}{1 + \cos 5x} dx.$ [ব. '০১] 48. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^6}}.$ [ব. '১১] 49. $\int \frac{(\sec^{-1} x)^4}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx.$

50. $\int \frac{3\sin x\,dx}{4 + 5\cos x}.$ 51. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x - 1}}.$ 52. (i) $\int e^{a\sin^{-1} x} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$ [দি. '১১]

53. $\int \frac{dx}{9x^2 - 16}$. [ঢা. '০৩]

54. $\int \left(e^x + \frac{1}{x}\right)(e^x + \ln x)\, dx$.

55. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\left(\sqrt{2 + \sin 2x}\right)^3}$.

56. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin x}}$ [রা. '১০]

57. $\int \sqrt{1 - \sin x}\, \cos x\, dx$

58. $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$.

59. $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$. [য. '০৬]

60. (i) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$. [দি. '১১]

(ii) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^6}}$ [দি. '১২]

61. $\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\, dx$.

62. $\int \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$) [কু. '১২]

63. $\int \frac{\sin(2 + 3\ln x)}{x}\, dx$.

64. $\int \frac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

65. $\int \sqrt{16 - 9x^2}\, dx$

66. $\int \frac{\sec x\, dx}{\ln(\sec x + \tan x)}$

67. $\int \frac{dx}{3 + 4\sin x}$

68. $\int \frac{\sqrt{\tan x}\, dx}{\sin x \cos x}$ [য. '০৫]

69. $\int \operatorname{cosec} x\, dx$ [কু. '০২]

70. $\int \tan x\, dx$ [দি. '০১]

71. $\int \frac{e^{a \tan^{-1} x}}{1 + x^2}\, dx$

72. $\int \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{a + x}}\, dx$ [কু. '১১]

[সংকেত : $x = a \tan^2 \theta$]

73. $\int \frac{x\, dx}{x^4 + 1}$

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ [য. '০৯]

উত্তরমালা

1. $\frac{1}{2} e^{x^2}$. 2. $\sin(\sin x)$ 3. $\frac{1}{3}\sin^3 x$. 4. $\frac{-1}{2}\cos x^2$, 5. $\ln|\sec e^x|$. 6. $e^{\tan x}$. 7. (i) $\cos\frac{1}{x}$.

(ii) $2\sin\sqrt{x}$. (iii) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1 + x^3}{1 - x^3}\right|$. 8. (i) $\frac{1}{5}\tan^5 x$. (ii) $-\frac{1}{2}\ln|(1 + 2\cos x)|$ (iii) $\ln|\sec(\sin^{-1} x)|$.

9 (i) $2\sqrt{1 + \ln x}$. (ii) $\frac{1}{2}\{\ln(x)\}^2$. (iii) $e^{\sin x}$.. (iv) $\tan^{-1} e^x$. 10. (i) $\frac{1}{3}\ln(e^{3x} - 1)$. (ii) $\frac{1}{3}$

11. $\ln|(e^x + e^{-x})|$. 12. (i) $-\ln|1 + e^{-x}|$. (ii) $\ln|e^x + 1|$. (iii) $\frac{-1}{2\{1 + \ln(x)\}^2}$. 13. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{3x}{2}$

14. (i) $\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{3}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}x$. 15. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{5}}$ 16. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{2 + x}{2 - x}\right|$.

17. (i) $\frac{-2}{3}(x + 2)\sqrt{1 - x}$. (ii) $\frac{1}{2}\sec^{-1} x^2$. (iii) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{x^3 + 4} - 2}{\sqrt{x^3 + 4} + 2}\right|$. 18. $\tan^{-1}(e^x)$.

19. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2e^x}{\sqrt{3}}\right)$ 20. $\ln(\tan^{-1} x)$. 21. (i) $-\frac{1}{b}\ln|a + b\cos x|$.

(ii) $\frac{2}{25}\{3\ ln\ |3 + 5\cos x| - (3 + 5\cos x)\}$. **22.** (i) $\frac{2}{3}(1 + ln\ x)^{3/2}$. (ii) $\tan(ln\ x) - ln\ x$.

23. $ln\ |x + \sin x|$. **24.** $\frac{1}{1 - \sin x}$. **25.** $\tan(xe^x)$ **26.** $2\sqrt{\tan^{-1} x + 3}$.

27. $\frac{1}{6}(\tan^{-1} x^3)^2$. **28.** $2\sqrt{\sin^{-1} x}$. **29.** $-\frac{1}{6}(1 + \cos x)^6$. **30.** $-ln(ln\ |\cos x|)$.

31. $\frac{1}{2}\tan^{-1}(e^{2x})$. **32.** $-\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b\cos x}{a}\right)$. **33.** $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}}$. **34.** $-\frac{1}{4}\sqrt{1 - 2x^4}$.

35. $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x + 2}{3}\right)$. **36.** $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x + 1}{4}\right)$. **37.** $\frac{1}{2}(\sin^{-1} x^2)^2$. **38.** $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x - 2}{2}\right)$

39. (i) $\sin^{-1}\left(\frac{\tan x}{4}\right)$. (ii) $-\frac{2}{5}\sqrt{3 - 5\tan x}$. **40.** $\frac{1}{4}ln\left|\frac{2 + \tan\theta}{2 - \tan\theta}\right|$. **41.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$.

42. $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$. **43.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}ln\ |\cos x + \sin x|$. **44.** (i) $-\sin^{-1}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{5}}\right)$

(ii) $\frac{1}{4}ln\left|\frac{2 + \sin x}{2 - \sin x}\right|$. (iii) $\frac{2}{3}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^3$ **45.** $2\sin^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right)$

46. (i) $6\left[\frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{3}\sqrt{x} - x^{\frac{1}{6}} + \tan^{-1} x^{\frac{1}{6}}\right]$. (ii) $2\sqrt{x} - 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ ln\ |x^{\frac{1}{4}} - 1|$.

47. (i) $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right)$. (ii) $\frac{2}{5}\tan\frac{5x}{2} - x$. **48.** $\frac{1}{3}\sin^{-1}(x^3)$ **49.** $\frac{1}{5}(\sec^{-1} x)^5$.

50. $-\frac{3}{5}ln\ |4 + 5\cos x| + c$. **51.** $2\sqrt{\tan x - 1}$. **52**(i) $\frac{1}{a}e^{a\sin^{-1}x}$ (ii) $\sin^{-1}\frac{x}{5}$.

53. $\frac{1}{24}ln\left|\frac{3x - 4}{3x + 4}\right|$. **54.** $\frac{1}{2}(e^x + ln\ x)^2$ **55.** $\frac{-1}{\sqrt{2 + \sin 2x}}$. **56.** $2\sqrt{\sin x}$. **57.** $-\frac{2}{3}(1 - \sin x)^{3/2}$

58. $\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$. **59.** $\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x$. **60.** (i) $-\sqrt{1 - x^2}$. (i) $\frac{1}{3}\sin^{-1}x^3$.

61. $\sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$ **62.** $ln\ (1 + ln\ x)$. **63.** $\frac{-1}{3}\cos(2 + 3ln\ x)$ **64.** $e^{\sin^{-1} x}$

65. $\frac{8}{3}\left\{\sin^{-1}\frac{3x}{4} + \frac{3x}{16}\sqrt{16 - 9x^2}\right\}$ **66.** $ln\ [ln\ |\sec x + \tan x|]$ **67.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}\right)$.

68. $2\sqrt{\tan x}$. **69.** $ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$. **70.** $ln|\sec x|$. **71.** $\frac{1}{a}e^{a\tan^{-1}x}$. **72.** $(a + x)\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax}$.
73. $\frac{1}{2}\tan^{-1}x^2$. **74.** $\sin^{-1}\frac{x - a}{a}$.

আংশিক ভগ্নাংশ

কোন মূলদ বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করতে হলে প্রথমে তাকে আংশিক ভগ্নাংশে বিশ্লেষণ করে প্রত্যেক অংশের জন্য পৃথক যোজিত মান নির্ণয় করতে হবে।

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x-3)(x+2)}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $\frac{x+1}{(x-3)(x+2)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$ বা, $x + 1 \equiv A(x+2) + B(x-3)$..... (i)

$(x-3) = 0$ বা, $x = 3$ বসিয়ে আমরা পাই, $4 = 5A \Rightarrow A = 4/5$

আবার, $(x+2) = 0$ বা, $x = -2$ বসিয়ে আমরা পাই, $-1 = -5B$ বা, $B = \frac{1}{5}$

$\therefore \quad \frac{x+1}{(x-3)(x+2)} \equiv \frac{4/5}{x-3} + \frac{1/5}{x+2}$

$\therefore \quad \int \frac{(x+1)\,dx}{(x-3)(x+2)} = \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{4}{5} ln|x-3| + \frac{1}{5} ln|x+2| + c.$

উদাহরণ 2. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$ নির্ণয় কর। [কু. '১১; ঢা. রা. য. '১৩]

সমাধান : ধরি, $I = \int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$ এবং $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$\therefore \; x \equiv A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$ ... ... (i)

(i) এ $(x-1) = 0$ অর্থাৎ $x = 1$ বসিয়ে আমরা পাই, $1 = A(1+1) + 0$ বা, $2A = 1$ বা, $A = \frac{1}{2}$

আবার $x = 0$ বসিয়ে আমরা পাই, $0 = A - C$ বা, $C = A = \frac{1}{2}$

(i) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $0 = A + B$ বা, $B = -A = -\frac{1}{2}$

$\therefore \; I = \int \left\{ \frac{1/2}{x-1} + \frac{-x/2 + 1/2}{x^2+1} \right\} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$

$= \frac{1}{2} ln|x-1| - \frac{1}{4} ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + c.$

উদাহরণ 3. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+x)(x^2-3)}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $I = \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+4)(x^2-3)}$ এবং $x^2 = y$

$\therefore \; \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2-3)} = \frac{y}{(y+4)(y-3)}$

মনে করি, $\frac{y}{(y+4)(y-3)} \equiv \frac{A}{y+4} + \frac{B}{y-3}$. $\quad \therefore\ y \equiv A(y-3) + B(y+4)$ ……… (i)

(i) এ $y = 3$ বসিয়ে, $3 = 7B$ বা, $B = \frac{3}{7}$ এবং $y = -4$ বসিয়ে, $-4 = -7A$ বা, $A = \frac{4}{7}$

$$\therefore\ I = \int \frac{x^2\, dx}{(x^2+4)(x^2-3)} = \frac{4}{7}\int \frac{dx}{x^2+4} + \frac{3}{7}\int \frac{dx}{x^2-3}$$

$$= \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\, ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + c$$

$$= \frac{2}{7}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{14}\, ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + c.$$

প্রশ্নমালা 10.4

নিচের অনির্দিষ্ট যোগজগুলি নির্ণয় কর ঃ

1. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-5)}$. **2.** $\int \frac{dx}{x^2+x}$. **3.** $\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\, dx$.

4. $\int \frac{(2x-1)}{x(x-1)(x-2)}\, dx$. [ঢা. '০৯] **5.** $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$ **6.** $\int \frac{x-3}{(1-2x)(1+x)}\, dx$.

7. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$. **8.** $\int \frac{x+35}{x^2-25} dx$. [চ. '০৪] **9.** $\int \frac{2x+3}{x^3-x}\, dx$.

10. $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$. [ব. '১০] **11.** $\int \frac{(x+1)dx}{x^2-5x+6}$. **12.** $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$

13. $\int \frac{x\, dx}{(x-1)(x-2)}$. **14.** $\int \frac{x}{x^2-5x-6}\, dx$ **15.** $\int \frac{x^2\, dx}{x^2-16}$.

16. $\int \frac{2x+1}{(2x+3)^2}\, dx$. **17.** $\int \frac{(2x+3)\, dx}{x^3+x^2-2x}$. **18.** $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. [রা. '১১]

19. $\int \frac{x+1}{x^2-7x+10}\, dx$ **20.** $\int \frac{x\, dx}{(x-1)(x^2+4)}$. **21.** $\int \frac{x^2\, dx}{x^4-1}$.

22. $\int \frac{(x+1)\, dx}{3x^2-x-2}$ **23.** $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2}\, dx$. **24.** $\int \frac{x^2\, dx}{x^2-4}$. [ব. '০৪]

25. $\int \frac{x^2-1}{x^2-4}\, dx$. [ঢা. '১১; সি. '১২] **26.** $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$. **27.** $\int \frac{x\, dx}{(1-x)^2}$.

উত্তরমালা

1. $\frac{1}{6} ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|$. **2.** $ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$. **3.** $2\, ln|x-3| - ln|x-2|$. **4.** $\frac{3}{2} ln|x-2| - \frac{1}{2} ln|x| - ln|x-1|$.

5. $ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$. **6.** $\frac{5}{6} ln|1-2x| - \frac{4}{3} ln|1+x|$. **7.** $ln\left|\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right|$. **8.** $4\, ln|x-5| - 3\, ln|x+5|$.

9. $\frac{1}{2} ln|x+1| + \frac{5}{2} ln|x-1| - 3\, ln|x|$. **10.** $ln\left|\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x}\right|$. **11.** $4\, ln|x-3| - 3\, ln|x-2|$.

12. $\frac{1}{4} ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|$. **13.** $2\ ln|x-2| - ln|x-1|$. **14.** $\frac{1}{7} ln|x+1| + \frac{6}{7} ln\ |x-6|$.

15. $x + 2\ ln\ \left|\frac{x-4}{x+4}\right|$. **16.** $\frac{1}{2} ln\ |2x+3| + \frac{1}{2x+3}$. **17.** $-\frac{3}{2} ln|x| + \frac{5}{3} ln\ |x-1| - \frac{1}{6} ln\ |x+2|$.

18. $ln|x| - \frac{1}{2} ln|x^2+1|$. **19.** $2\ ln|x-5 - ln|x-2|$. **20.** $\frac{1}{5} ln|x-1| - \frac{1}{10} ln|x^2+4| + \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2}$

21. $\frac{1}{4} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1} x$. **22.** $\frac{2}{5} ln|x-1| - \frac{1}{15} ln|3x+2|$ **23.** $3\ ln|x+1| + \frac{2}{x+1}$.

24. $x + ln\ \left|\frac{x-2}{x+2}\right|$. **25.** $x + \frac{3}{4} ln\ \left|\frac{x-2}{x+2}\right|$. **26.** $\frac{2}{9} ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9} ln|x+2|$.

27. $\frac{1}{1-x} + ln|1-x|$.

অংশায়ন সূত্রের সাহায্যে যোগজীকরণ(Integration by parts)

অংশায়ন সূত্রের সাহায্যে যোগজীকরণ (Integration by parts) একটি বিশেষ পদ্ধতি যার সাহায্যে দুইটি ফাংশনের গুণফলের যোগজ নির্ণয় করা যায়। এ পদ্ধতি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ নির্ণয়ের উপর ভিত্তি করে প্রতিষ্ঠিত।

অংশায়ন সূত্র : যদি u এবং v এর উভয় x- এর ফাংশন হয়, তাহলে

$$\int uv\ dx = u\int v\ dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v\ dx\right\} dx.$$

অর্থাৎ দুইটি ফাংশনের গুণফলের যোগজ = ১ম ফাংশন × (২য় ফাংশনের যোগজ) – {১ম ফাংশনের অন্তরজ × ২য় ফাংশনের যোগজ} এর যোগজ।

প্রমাণ : দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ থেকে আমরা জানি, $\frac{d}{dx}(uw) = u\frac{dw}{dx} + w\frac{du}{dx}$,

যখন u এবং w উভয়ে x- এর ফাংশন এবং অন্তরীকরণযোগ্য। x- এর সাপেক্ষে (with respect to x) উভয়পক্ষকে যোগজীকরণ করে পাই

$$uw = \int\left(u\frac{dw}{dx}\right) dx + \int\left(w\frac{du}{dx}\right) dx$$

$$\Rightarrow \int\left(u\frac{dw}{dx}\right) dx = uw - \int\left(w\frac{du}{dx}\right) dx \text{............ (i)}$$

ধরি, $\frac{dw}{dx} = v \Rightarrow w = \int v\ dx$, এখন (i) এ w এবং $\frac{dw}{dx}$ এর মান বসিয়ে পাই,

$$\int uv\ dx = u\int v dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v\ dx\right\} dx.$$

দ্রষ্টব্য : (1) u এবং v এর মধ্যে যে ফাংশনটি সহজে যোগজীকরণ যোগ্য নয় ঐ ফাংশনটি ১ম ফাংশন u বিবেচনা করতে হবে।

(2) যদি u এবং v এর উভয়ে যোগজীকরণ যোগ্য হয় অর্থাৎ সহজে সূত্রের সাহায্যে যোগজ নির্ণয় করা যায়, তাহলে x^n আকারের ফাংশনটিকে ১ম ফাংশন u ধরতে হবে, যেখানে n = 1, 2, ইত্যাদি।।

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. $\int x\, ln\, x\, dx$ নির্ণয় কর। [ঢা. রা. '১৩]

[এখানে $ln\, x$ কে সহজে Integration করা যায় না। সুতরাং $ln\, x$ কে ১ম ফাংশন বিবেচনা করতে হবে।]

সমাধান : $\int x\, ln\, x\, dx = ln\, x \int x\, dx - \int\left\{ \frac{d}{dx}(ln\, x) \int x\, dx \right\}dx.$

$$= ln\, x. \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} . \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{x^2}{2}\, ln\, x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2}{2}\, ln|x| - \frac{x^2}{4} + c.$$

উদাহরণ 2. $\int x \cos x\, dx$ নির্ণয় কর।

[এখানে x ও $\cos x$ এর উভয়কে সহজে যোগজীকরণ করা যায়। সুতরাং x কে ১ম ফাংশন অর্থাৎ $u = x$ ধরতে হবে।]

সমাধান : $\int x \cos x\, dx = x \int \cos x\, dx - \int\left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \cos x\, dx \right\}dx.$

$$= x \sin x - \int 1. \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + c.$$

উদাহরণ 3. $\int x^2 \sin x\, dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\int x^2 \sin x\, dx = x^2 \int \sin x\, dx - \int\left\{ \frac{d}{dx}(x^2) \int \sin x\, dx \right\}dx.$

$$= -x^2 \cos x - \int 2x. (-\cos x)\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\,[x \int \cos x\, dx - \int 1. \sin x\, dx] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c.$$

উদাহরণ 4. $\int \tan^{-1} x\, dx$ নির্ণয় কর। [ঢা. '০৪; ব. '১০; দি. '১২; য. '১৩]

সমাধান : $\int \tan^{-1} x\, dx = \tan^{-1} x \int 1\, dx - \int\left\{ \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) \int 1\, dx \right\}dx.$

$$= x \tan^{-1} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\, ln\,(1+x^2) + c.$$

উদাহরণ 5. $\int e^x \sin x\, dx$ নির্ণয় কর। [ঢা. '১২; কু. '১৩]

সমাধান : মনে করি, $I = \int e^x \sin x\, dx$

$\therefore I = \sin x \int e^x\, dx - \int\left\{ \frac{d}{dx}(\sin x) \int e^x\, dx \right\}dx = \sin x.\, e^x - \int \cos x\, e^x\, dx$

$= e^x \sin x - \left[\cos x \int e^x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\cos x) \int e^x\, dx\right\}dx\right]$

$= e^x \sin x - \left[\cos x\, e^x - \int (-\sin x) .\, e^x\, dx \right] = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx + c_1$

$\Rightarrow I = e^x \sin x - e^x \cos x - I + c_1 \Rightarrow 2I = e^x \sin x - e^x \cos x + c_1$

$\therefore I = \int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c.$ যেখানে $c = \frac{c_1}{2}$

একটি বিশেষ সূত্র : $\int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c.$

প্রমাণ : দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ নির্ণয়ের সূত্র থেকে আমরা পাই,

$$\frac{d}{dx}\{e^x f(x)\} = e^x \frac{d}{dx}\{f(x)\} + f(x)\frac{d}{dx}(e^x) = e^x f'(x) + f(x)\, e^x = e^x \{f(x) + f'(x)\}$$

এখন উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে যোগজীকরণ করে পাই,

$\int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c$ অর্থাৎ $\int e^x \{f(x) + f(x)$ এর অন্তরজ $\} dx = e^x f(x).$

উদাহরণ 6. $\int e^x \sec x\,(1 + \tan x) dx$ নির্ণয় কর। [চ. '১৩]

সমাধান : $I = \int e^x (\sec x + \sec x \tan x) dx$ ধরি, $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x.$

$$\therefore \int e^x (\sec x + \sec x \tan x)\, dx = \int e^x \{f(x) + f'(x)\}\, dx = e^x f(x) + c = e^x \sec x + c.$$

প্রশ্নমালা 10.5

1. $\int x e^x dx$

2. $\int x \cos^2 x\, dx$ [সি. '০৭]

3. $\int x \sin x \cos x\, dx$

4. $\int \ln x\, dx$ [চ. ব. '০৪; কু. '০৬]

5. (i) $\int \sin^{-1} x\, dx$ [ব. '১২] (ii) $\int \cos^{-1} x\, dx$ [চ. সি. '১২]

6. $\int x \tan^{-1} x\, dx$ [কু. '১০; দি. '১১]

7. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

8. $\int x \sec x \tan x\, dx$

9. $\int x \tan^2 x\, dx.$ [রা. সি. '০৫]

10. $\int x \sin 2x\, dx$

11. $\int e^x (\sin x + \cos x)\, dx$ [ঢা. '১০; দি. '১১]

12. $\int e^x (\tan x - \ln \cos x)\, dx$ [কু. '০১]

13. $\int x^3 e^{x^2} dx$

14. $\int e^x \left(\ln x + \frac{1}{x}\right) dx$ [ব. '০৭]

15. $\int \sec^3 x\, dx$

16. (i) $\int x \sin^{-1} x^2\, dx$ [রা. '০৬, '১৩]

(ii) $\int x \sin^{-1} x\, dx.$ [ঢা. '০৭]

17. $\int \frac{\ln (\sec^{-1} x)}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$ [ঢা. '০৮]

18. $\int e^x \cos x\, dx$ [দি. '১০]

19. $\int x^2 \cos x\, dx$

20. $\int x \sin^2 \frac{x}{2} dx$ [য. '০১]

21. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

22. $\int \operatorname{cosec}^3 x\, dx$

23. $\int e^{2x} \sin x\, dx$ [সি. '০২]

24. $\int x^2 e^x\, dx$ [কু. '০৪]

25. $\int e^{2x} \cos e^x\, dx$

26. $\int x \cos 2x \cos 3x\, dx$

27. $\int x \sin 2x \cos 3x\, dx$

28. $\int x \tan^{-1} x^2\, dx.$

29. $\int x \cos^{-1} x\, dx.$ [আলিম '১১]

30. $\int x^2\, ln\, x\, dx.$

31. $\int (ln\, x)^2\, dx.$ [য. '০৫; চ. '০৭]

32. $\int \frac{ln(ln\, x)}{x} dx.$

33. $\int e^{5x} \left\{5\, ln\, x + \frac{1}{x}\right\} dx.$ [চ. '০৯]

34. $\int e^{-2x} \left(\frac{1}{x} - 2\, ln\, x\right) dx.$

35. $\int x \sec^2 3x\, dx.$

36. $\int x \sin x \sin 2x\, dx.$ [চ. '০২]

37. $\int e^x \sin 2x\, dx.$ [সি. '১০]

38. $\int e^x \left\{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}\right\} dx.$

39. $\int e^x \frac{(x+1)}{(x+2)^2} dx.$

40. $\int \frac{xe^x\, dx}{(1+x)^2}.$ [ঢা. কু. চ. '১১; রা. য. '১২; চ. '১৩]

উত্তরমালা

1. $e^x(x-1)$. 2. $\frac{1}{4}(x^2 + x \sin 2x) + \frac{1}{8} \cos 2x$. 3. $\frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x$. 4. $xlnx - x$.
5. (i) $x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$. (ii) $x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2}$. 6. $\frac{1}{2}(x^2+1) \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x$.
7. $x \tan x - ln|\sec x|$. 8. $x \sec x - ln|\sec x + \tan x|$. 9. $x \tan x + ln|\cos x| - \frac{x^2}{2}$.
10. $-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x$.. 11. $e^x \sin x$. 12. $e^x\, ln|\sec x|$. 13. $\frac{1}{2}(1-x^2)$. 14. $e^x\, ln|x|$.
15. $\frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|$. 16. (i) $\frac{1}{2} x^2 \sin^{-1} x + \frac{1}{4} x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4} \sin^{-1} x$.
(ii) $\frac{1}{2} x^2 \sin^{-1} x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}$ 17. $\sec^{-1} x[ln|\sec^{-1} x| - 1]$. 18. $\frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$.
19. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$. 20. $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{2} \cos x$. 21. $-x \cot x + ln|\sin x|$.
22. $\frac{1}{2} ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2} \operatorname{cosec} x \cot x$. 23. $\frac{e^{2x}}{5}(2 \sin x - \cos x) + c$. 24. $x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x$.
25. $e^x \sin e^x + \cos e^x + c$. 26. $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{5} \sin 5x + \sin x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{25} \cos 5x + \cos x\right)$.
27. $\frac{1}{2}(x \cos x - \sin x) + \left(\frac{1}{50} \sin 5x - \frac{x}{10} \cos 5x\right)$. 28. $\frac{x^2}{2} \tan^{-1} x^2 - \frac{1}{4} ln|1+x^4|$.

29. $\frac{x^2}{2}\cos^{-1}x+\frac{1}{4}\sin^{-1}x-\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$. **30.** $\frac{x^3}{3}ln|x|-\frac{1}{9}x^3$. **31.** $x(lnx)^2-2x\,ln|x|+2x$.

32. $ln\,x\,|ln(ln\,x)-1|$. **33.** $e^{5x}ln|x|$. **34.** $e^{-2x}ln|x|$. **35.** $\frac{x}{3}\tan 3x-\frac{1}{9}ln|\sec 3x|$.

36. $\frac{1}{2}(x\sin x+\cos x-\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{9}\cos 3x$.

37. $\frac{1}{5}e^x(\sin 2x-2\cos 2x)$. **38.** $\frac{e^x}{1-x}$. **39** $\frac{e^x}{x+2}$. **40.** $\frac{e^x}{x+1}$.

নির্দিষ্ট যোগজে ধ্রুবক c অন্তর্ভুক্ত থাকে না।

মনে করি, $\int f(x)\,dx$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ $=G(x)+c$

$\therefore \int_a^b f(x)\,dx=[G(x)+c]_a^b$

$=\{G(b)+c\}-\{G(a)+c\}=G(b)-G(a)$. অর্থাৎ নির্দিষ্ট যোগজ এর মান c এর উপর নির্ভরশীল নয়। সুতরাং, নির্দিষ্ট যোগজে c অন্তর্ভুক্ত করার প্রয়োজন হয় না।

10.7.1. নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত উদাহরণ ও অনুশীলনী

উদাহরণ 1. $\int_0^{\pi/2}\sin^2x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. '০২]

সমাধান : মনে করি, $I=\int_0^{\pi/2}\sin^2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}2\sin^2x\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right]=\frac{\pi}{4}.$$

উদাহরণ 2. $\int_2^3\frac{2x\,dx}{1+x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. '০৩; সি. '০৬]

সমাধান : ধরি, $z=1+x^2$, $\therefore 2x\,dx=dz$ সীমাঃ $x=2$ হলে $z=5$ এবং $x=3$ হলে $z=10$

$$\therefore \int_2^3\frac{2x\,dx}{1+x^2}=\int_5^{10}\frac{dz}{z}=[lnz]_5^{10}=ln\,10-ln\,5=ln\,\frac{10}{5}=ln\,2$$

উদাহরণ 3. $\int_0^1\frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx$ এর মান নির্ণয় কর। [সি. চ. ব. '১০; ঢা. কু. '১১; ব. '১২; চ. '১৩]

সমাধান : মনে করি, $y=\tan^{-1}x$, $\therefore dy=\frac{dx}{1+x^2}$

এখন $x=0$ হলে $y=\tan^{-1}0=0$ এবং $x=1$ হলে $y=\tan^{-1}1=\tan^{-1}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore \int_0^1\frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx=\int_0^{\pi/4}y^2dy=\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\pi/4}=\left[\frac{\pi^3}{3\times 64}-\frac{0}{3}\right]=\frac{\pi^3}{192}.$$

উদাহরণ 4. $\int_0^{\pi/2} (1+\cos x)^2 \sin x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। [সি. '০৫; চ. '১১]

সমাধান : মনে করি, $z = 1 + \cos x \quad \therefore \sin x\, dx = -dz$

এখন $x = 0$ হলে $z = 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$, এবং $x = \frac{\pi}{2}$ হলে $z = 1 + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} (1+\cos x)^2 \sin x\, dx = -\int_2^1 z^2\, dz = -\left[\frac{z^3}{3}\right]_2^1 = -\frac{1}{3}[1^3 - 2^3] = \frac{7}{3}.$$

উদাহরণ 5. $\int_{-2}^{5} \frac{7x}{\sqrt{x^2+3}}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. ২০০০]

সমাধান : ধরি, $y^2 = x^2 + 3 \Rightarrow 2y\, dy = 2x\, dx \quad \therefore y dy = x\, dx$

প্রান্তঃ যখন $x = 5$, তখন $y = \sqrt{25+3} = 2\sqrt{7}$. যখন $x = -2$, তখন $y = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$

$$\therefore \int_{-2}^{5} \frac{7x\, dx}{\sqrt{x^2+3}} = \int_{\sqrt{7}}^{7} \frac{7y\, dy}{\sqrt{y^2}} = 7\int_{\sqrt{7}}^{2\sqrt{7}} dy = 7[y]_{\sqrt{7}}^{2\sqrt{7}} = 7[2\sqrt{7} - \sqrt{7}] = 7\sqrt{7}.$$

উদাহরণ 6. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :
$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2\sin 2x \cos x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin 3x + \sin x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 3x\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}[-\cos x]_0^{\pi/2}$$
$$= -\frac{1}{6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos 0\right) - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$$
$$= -\frac{1}{6}(0-1) - \frac{1}{2}(0-1) = \frac{2}{3}.$$

উদাহরণ 7. $\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta$ এর মান নির্ণয় কর। [সি. '১২; য. '১৩]

সমাধান : $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \cos\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\theta)\cos\theta\, d\theta$

ধরি, $y = \sin\theta, \therefore dy = \cos\theta\, d\theta$

প্রান্তঃ

θ	0	$\pi/2$
y	0	1

$$\therefore I = \int_0^1 (1-y^2)\, dy = \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}$$

উদাহরণ ৪. $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [য. '০২]

সমাধান : $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

ধরি, $x = 3\sin\theta \Rightarrow dx = 3\cos\theta\, d\theta$

$x = 3$ হলে $\sin\theta = \frac{3}{3} = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$x = 0$ হলে $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 - 9\sin^2\theta}\; 3\cos\theta\, d\theta$$

$$= 3\times 3\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\, d\theta = 9\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{9}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{9}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - 0\right] = \frac{9\pi}{4}.$$

প্রশ্নমালা 10.6

নিচের নির্দিষ্ট যোগজগুলি নির্ণয় কর :

1. $\int_0^2 5x^4\, dx$
2. $\int_1^2 \frac{(x^2-1)^2}{x^2}\, dx$
3. $\int_1^4 \frac{(2-x)^2}{\sqrt{x}}\, dx$
4. $\int_0^3 (3 - 2x + x^2)\, dx$ [ব. '০৪; কু. '০৬]
5. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$ [ব. '১১]
6. $\int_0^1 x\, e^{x^2} dx$ [সি. কু. চ. '১২; ঢা. য. কু. '১৩]
7. $\int_0^{\pi/2} (\sin\theta + \cos\theta)\, d\theta$ [চ. '০৪]
8. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}\, dx.$ [ঢা. সি. '১১]
9. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$ [সি. '১১]
10. $\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}\, d\theta$
11. $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx$
12. $\int_0^4 y\sqrt{4-y}\, dy$ [ঢা. ব. '১০; ঢা. '১২; রা. '১৩]
13. $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \sec^2 x\, dx$ [চ. '১১; ঢা. '১৩]
14. $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1-\sin x}$ [সি. '১০; ঢা. রা. '১৩]
15. $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos 3x\, dx$
16. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \sin x\, dx$
17. $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2}\, dx$ [ঢা. ব. '০৮; ব. '০৯]
18. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\sqrt{\sin x}\, dx$ [কু. সি. '১১; ব. '১২; কু. '১৩]
19. $\int_0^1 \frac{(\cos^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
20. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{9-2x^2}}\, dx$ [কু. '১২; ঢা. '১৩]

21. $\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx$ [রা. '০৬; ব. '১০]

22. $\int_0^{\pi/4} (\tan^3 x + \tan x)dx$ [য. '০৫; কু. '০৮]

23. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x} dx$ [দি. '১১; ঢা. '১২]

24. (i) $\int_1^4 \frac{ln x}{\sqrt{x}} dx$ [ঢা. '১২]

(ii) $\int_a^b \frac{ln\, x}{x} dx$.

25. $\int_1^{\sqrt{e}} x\, ln\, x\, dx$.

26. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{9 - \sin^2 t}}$ [চ. '০২]

27. $\int_1^3 \frac{1}{x} \cos (ln\, x)dx$ [ব. '১২; চ. '১৩]

28. (i) $\int_0^1 x\, e^{-3x} dx$ [দি. '১০]

(ii) $\int_0^1 xe^x dx$.

29. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin \theta + \cos \theta)^2 d\theta$

30. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x\, dx$

31. $\int_0^1 \frac{2x(\tan^{-1}x^2)^2}{1 + x^4} dx$. [চ. '০৫]

32. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta\, d\theta$.

33. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin 3x\, dx$ [ব. '০৫]

34. $\int_1^{\sqrt{3}} x \tan^{-1}x\, dx$. [ব. '১১; দি. রা. চ. '১২]

35. (i) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ [কু. '১০; রা. '১১] (ii) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{9 - x^2}}$ [ঢা. '১০] (iii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

36. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sqrt[3]{\sin x}\, dx$

37. $\int_2^5 \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}$.

38. (i) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \sin \theta} d\theta$. [রা. দি. '১০; ঢা. ব. '১২]

(ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$.

39. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta} d\theta$ [ব. '১৩]

40. $\int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 3x^4}\, dx$. [কু. '১০; রা. '১১; দি. ব. '১২]

41. (i) $\int_1^4 ln\, x\, dx$ (ii) $\int_2^4 ln\, 2x\, dx$ [ব. '০৯] (iii) $\int_0^1 ln\, (x^2 + 1)dx$ [ঢা. '০৭]

42. $\int_0^{\pi/2} \cos 3\theta \cos 2\theta\, d\theta$

43. $\int_0^1 \frac{1 + x}{1 + x^2} dx$ [ঢা. রা. '০৯; কু. দি. '১২]

44. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^3 x\, dx$

45. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin x\, dx$ [য. '১১]

46. $\int_0^{\pi/4} \tan^3x \sec^2x\, dx$ [ঢা. ব. '১১] 47. (i) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ [রা. '০৩] (ii) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ [চ. '০৭]

48. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3x\, dx}{\sqrt{\sin x}}$ [ব. চ. '১০; রা. '১২] 49. (i) $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x\, dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \cos 4x\, dx$ [রা. '০৪; কু. '০৬] 50. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{9-\sin^2 x} dx$ [কু. ব. '১০]

51. $\int_0^{\pi/2} e^x (\sin x + \cos x)\, dx$ [কু. '১১] 52. $\int_0^{ln 2} \frac{e^x dx}{1+e^x}$ [ব. য. চ. যা. '১১; দি. '১২; কু. '১৩]

53. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+ln\, x)^2}$ [দি. '১১; কু. ব. '১২; রা. চ. '১৩] 54. $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\, dx$ [রা. '১১]

55. (i) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\, dx$ [কু. সি. '১১] (ii) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$. [য. চ. ব. দি. '১২; কু. '১৩]

56. $\int_0^{\pi} \cos^3 x\, dx$ 57. (i) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ (ii) $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} dx$ [য. '১২]

58. $\int_0^1 2x^3 e^{-x^2} dx$. 59. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ [রা. '১২]

60. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{1+x^4}$ [রা. '১১] 61. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta} d\theta$ [ব. '১১]

62. $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos x\, dx$. 63. $\int_{-1}^{4} \frac{dx}{(2x+3)^2}$ [য. '০৭]

64. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin^3 x\, dx$ [য. '১০; চ. '১৩] 65. $\int_0^{\pi/2} \cos^4x\, dx$ [য. '০৪]

66. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x} dx$. [য. '০৪] 67. (i) $\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ [রা. '১১]

(ii) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2} dx$ 68. (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{(1+\sin x)^2}$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x}$ [রা. '১৩] (iii) $\int_0^{\pi} 3\sqrt{(1-\cos x)} \sin x\, dx$

69. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx$ [ঢা. '০৬] 70. দেখাও যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta} = \frac{\pi}{2ab}$ [রা. '১১]

71. দেখাও যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos^2\theta + b \sin^2\theta)\, d\theta = \frac{1}{4}(a+b)\pi$. [চ. '০৩]

উত্তরমালা

1. 32. **2.** $\frac{5}{6}$. **3.** $1\frac{11}{15}$. **4.** 9. **5.** 2. **6.** $\frac{1}{2}(e-1)$. **7.** 2. **8.** 1. **9.** $\frac{\pi}{4}$. **10.** $1-\frac{\pi}{4}$. **11.** $\frac{\pi}{2}$. **12.** $\frac{128}{15}$.

13. $\frac{1}{3}$. **14.** $\sqrt{3}+1$. **15.** $\frac{1}{6}$. **16.** $\frac{2}{3}$. **17.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **18.** $\frac{8}{21}$. **19.** $\frac{\pi^4}{64}$. **20.** 1. **21.** $\frac{1}{3}(e^8-e)$.

22. $\frac{1}{2}$. **23.** $\frac{1}{162}$. **24.** (i) $8\ln 2-4$. (ii) $\frac{1}{2}\ln(ab).\ln\left(\frac{b}{a}\right)$. **25.** $\frac{1}{4}$. **26.** $\sin^{-1}\frac{1}{3}$.

27. $\sin(\ln 3)$. **28.** (i) $\frac{1}{9}-\frac{4}{9}e^{-3}$. (ii) 1. **29.** π. **30.** $\frac{1}{4}$. **31.** $\frac{\pi^3}{192}$. **32.** $\frac{\pi}{4}$. **33.** $\frac{-2}{15}$.

34. $\frac{1}{12}(5\pi-6\sqrt{3}+6)$. **35.**(i) $2-\sqrt{3}$. (ii) $3-2\sqrt{2}$. (iii) $\frac{\pi}{2}$ **36.** $\frac{9}{20}$. **37.** $\frac{\pi}{12}$ **38.**(i) $(2-\sqrt{2})$.

(ii) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **39.** $(\pi+2)$. **40.** $\frac{7}{18}$. **41.** (i) $8\ln(2)-3$. (ii) $8\ln(2)-2$. (iii) $\ln(2)+\frac{\pi}{2}-2$.
42. $\frac{3}{5}$. **43.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$. **44.** $\frac{1}{24}$. **45.** $\frac{1}{6}$. **46.** $\frac{1}{7}$. **47.** (i) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. (ii) 1. **48.** $\frac{8}{5}$. **49.** (i) $\frac{2}{3}$. (ii) 0.
50. $\frac{1}{6}(\ln 2)$. **51.** $e^{\pi/2}$. **52.** $\ln\frac{3}{2}$. **53.** $\frac{2}{3}$. **54.** $\frac{25\pi}{4}$. **55.** (i) 4π. (ii) $\frac{1}{4}\pi a^2$. **56.** 0. **57.** (i) $2(e-1)$
(ii) $\frac{\pi^3}{192}$. **58.** $\left(1-\frac{2}{e}\right)$. **59.** $\left(\tan^{-1}e-\frac{\pi}{4}\right)$. **60.** $\frac{\pi}{8}$. **61.** $\frac{\pi}{2}-1$. **62.** $\frac{5}{16}$. **63.** $\frac{4}{33}$. **64.** $\frac{8}{21}$. **65.** $\frac{3\pi}{16}$

66. $\ln\frac{4}{e}$. **67** (i). $\frac{\pi^3}{24}$. (ii). $\frac{\pi^3}{81}$. **68.** (i) $\frac{1}{2}$. (ii) $\frac{\pi}{4}$. (iii) $4\sqrt{2}$. **69.** $\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$.

10.7.2. নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উদাহরণ ও অনুশীলনী

উদাহরণ 1. $y^2=4ax$ এবং $x^2=4ay$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [রা. '১৩]

সমাধান : $y^2=4ax$ .... (i) $x^2=4ay$ .... (ii)

(ii) – (i) $\Rightarrow x^2-y^2=-4a(x-y)$

$\Rightarrow x^2-y^2+4a(x-y)=0$

$\Rightarrow (x-y)(x+y+4a)=0$

$\therefore x-y=0 \Rightarrow x=y$

(i) থেকে, $y^2=4ax \Rightarrow x^2=4ax$, $y=x$ বসিয়ে

$\Rightarrow x(x-4a)=0$

$\Rightarrow x=4a$ অথবা, $x=0=y$

$\therefore$ পরাবৃত্ত দুইটির ছেদবিন্দু O(0, 0), B(4a, 4a)

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \int_0^{4a} (y_1 - y_2)dx$, যখন $y_1 = PR = \sqrt{4ax}$ এবং $y_2 = QR = \frac{x^2}{4a}$.

x এর সীমা : $x = 0$ থেকে $OA = 4a$

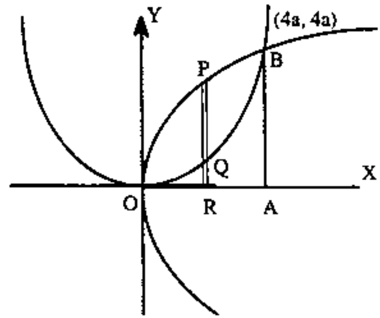
$= \int_0^{4a} \left(\sqrt{4ax} - \frac{x^2}{4a}\right)dx$

$= 2\sqrt{a}\int_0^{4a} \sqrt{x}\, dx - \frac{1}{4a}\int_0^{4a} x^2\, dx$

$= 2\sqrt{a}\left[\frac{2x^{3/2}}{3}\right]_0^{4a} - \frac{1}{4a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{4a}$

$= \frac{4\sqrt{a}}{3}\left\{\left(\sqrt{4a}^3\right) - 0\right\} - \frac{1}{12a}\{(4a)^3 - 0\}$

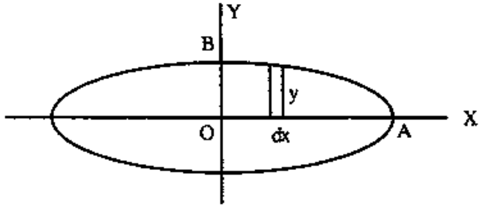
$= \frac{32}{3}a^2 - \frac{16}{3}a^2 = \frac{16}{3}a^2$ বর্গএকক।



উদাহরণ 2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [দি. দি. '১১; রা. রা. ব. চ. ব. '১২]

সমাধান : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ বা, $\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{9}$ বা, $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$

(+) নিয়ে , $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ [(–) বাদ দেওয়ার কারণ ক্ষেত্র OAB তে y ধনাত্মক এবং আবদ্ধ ক্ষেত্রটি OAB ক্ষেত্রের 4 গুণ]



সীমা : $x = 0$ এবং $x = OA = 3$ এখানে মোট ক্ষেত্রফল $= 4 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 4\int_0^3 y\, dx = 4\int_0^3 \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\, dx$

$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \sqrt{9 - 9\sin^2\theta}\; 3\cos\theta\, d\theta$

ধরি, $x = 3\sin\theta$
$dx = 3\cos\theta\, d\theta$
$x = 0$ হলে, $\theta = 0$
$x = 3$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$= \frac{8}{3} \times 3 \times 3\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2\theta}\; \cos\theta\, d\theta$

$= 24\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, \cos\theta\, d\theta = 12\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\, d\theta$

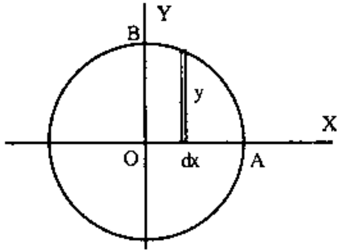
$= 12\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta = 12\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 12\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0\right)$

$= 6\pi$ বর্গ একক।

উদাহরণ 3. $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা. কু. ব. '১১; দি. '১২]

সমাধান : $x^2 + y^2 = 16$ বা, $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$

(+) নিয়ে, $y = \sqrt{16 - x^2}$ [(–) বাদ দেয়ার করণ OAB ক্ষেত্রের জন্য y ধনাত্মক]



$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = $4 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$$= 4\int_0^4 y\, dx = 4\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{16 - 16\sin^2\theta}\,.\, 4\cos\theta\, d\theta$$

$$= 4 \times 4 \times 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2\theta}\,.\cos\theta\, d\theta$$

$$= 32\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\, d\theta = 32\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 32\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 32\left\{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right)\right\}$$

$= 16\pi$ বর্গ একক।

সীমা ঃ $x = 0$ থেকে, $OA = 4$
মনে করি, $x = 4\sin\theta$
$\Rightarrow dx = 4\cos\theta\, d\theta$
$x = 0$ হলে, $\theta = 0$
$x = 4$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{2}$

প্রশ্নমালা 10.7

1. $y = 0, y = x$ এবং $x = 6$ রেখাত্রয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
2. $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [চ. '১১; সি. '১২]
3. $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ব. '০৬]
4. (i) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তটি দ্বারা আবদ্ধ প্রথম চতুর্ভাগের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু. '১২]
   (ii) $x^2 + y^2 = 1$ এবং $y^2 = 1 - x$ বক্ররেখা দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
5. $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরল রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ব. '১০; সি. '১১; ঢা. কু. চ. '১৩]
6. $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = 2x$ সরল রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [চ. '১০]
7. (i) $y^2 = 4x$ এবং $x^2 = 4y$ পরাবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
   (ii) $y^2 = x$ এবং $x^2 = y$ পরাবৃত্তদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য. '১০]
8. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি. '০৫]
9. $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
10. $y = 2\sin x$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ থেকে এর মধ্যে সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
11. $3x + 4y = 12$ সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
12. বক্ররেখা $y = 2x - x^2$ এবং x- অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [রা. '০১]
13. বক্ররেখা $x^2 = 4y$, x- অক্ষ, $x = 2$ এবং $x = 4$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

14. $y = 4x^2$ ও $y = 4$ দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু. '০১]

15. $9x^2 + 4y^2 = 36$ উপবৃত্ত দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি. '০১]

16. (i) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি. '০২]

(ii) $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা. '০৯; কু. '১০; ব. '১৩]

17. $y = x^2$ বক্ররেখা x- অক্ষ এবং $x = 1, x = 7$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু. '০২]

18. $x - y + 2 = 0$ এবং $y = x^2$ দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি. '০৩]

19. $xy = c^2$ অধিবৃত্ত, x- অক্ষ এবং $x = a$ ও b রেখা দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [দি. '১০]

20. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি. '০৪]

উত্তরমালা

1. 18 বর্গ একক **2.** πr^2 বর্গ একক **3.** 4π বর্গ একক **4.** (i) $\frac{1}{4}\pi ab$ বর্গ একক (ii) $\frac{1}{6}(3\pi - 8)$বর্গ একক। **5.** $\frac{8}{3}$ বর্গ একক **6.** $\frac{1}{3}$ বর্গ একক **7.** (i) $\frac{16}{3}$ বর্গ একক (ii) $\frac{1}{3}$ বর্গ একক **8.** $\frac{128}{3}$ বর্গ একক **9.** $\frac{8a^2}{3}$ বর্গ একক **10.** 4 বর্গ একক **11.** 6 বর্গ একক।**12.** $\frac{8}{3}$ বর্গ একক **13.** $\frac{14}{3}$ বর্গ একক **4.** $\frac{16}{3}$ **15.** 6π **16.**(i) $\frac{128}{3}$ (ii) $\frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 12$ **17.** $\frac{342}{3}$ **18.** $\frac{9}{2}$ বর্গ একক। **19.** $c^2 ln\left(\frac{b}{a}\right)$. **20.** $\frac{1}{6}a^2$

সৃজনশীল প্রশ্ন :

1. (a) নির্দিষ্ট যোগজে ধ্রুবক c থাকে না কেন?

(b) প্রমাণ কর যে, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c.$

(c) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উ: $\frac{128}{3}$ বর্গ একক।

2. (a) দেখাও যে, $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}\, dx = e^x f(x) + c.$

(b) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx$ নির্ণয় কর। উ : $\frac{e^x}{(1+x)}$

(c) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1 + ln\, x)^2}$ এর মান নির্ণয় কর। উ : $\frac{2}{3}$.

3. (a) $\int \frac{dx}{1 + 9x^2}$ নির্ণয় কর। উ : $\frac{1}{3}\tan^{-1} 3x$

(b) $\int f(x)dx = ln\,(x + \sqrt{x^2 - 1})$ হলে $f(x)$ নির্ণয় কর। উ : $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

(c) $4x^2 + 9y^2 = 36$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ : 6π বর্গ একক।

বহুনির্বচনী প্রশ্ন :

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ = কত?

(a) $\frac{2}{\sqrt{1+\ln x}}$ (b) $2\sqrt{1+\ln x}$

(c) $\sqrt{1+\ln x}$ (d) $\left(\sqrt{1+\ln x}\right)^{3/2}$

2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x - 1}} = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ = কত?

(a) $\sqrt{\tan x - 1}$ (b) $2\sqrt{\tan x - 1}$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{\tan x - 1}}$ (d) $\left(\sqrt{\tan x - 1}\right)^{3/2}$

3. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ = কত?

(a) $\cos^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$ (b) $\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$

(c) $\sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2}$ (d) $\cot^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$

4. $\int e^x \sec x(1+\tan x)\, dx = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ = কত?

(a) $e^x \tan x$ (b) $e^x \sec x$

(c) $\frac{e^x}{\tan x}$ (d) কোনোটিই নয়

5. $\int \cos^{-1} x\, dx = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ = কত?

(a) $\cos^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$ (b) $x\cos x - \sqrt{1-x^2}$

(c) $x\cos^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$ (d) কোনোটিই নয়

6. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\, dx$ এর মান কত?

(a) $\ln\left(\frac{2}{e}\right)$ (b) $\ln\left(\frac{4}{e}\right)$

(c) $\ln\left(\frac{3}{e}\right)$ (d) কোনোটিই নয়

7. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ এর মান কত?

(a) $\tan^{-1} e + \frac{\pi}{4}$ (b) $\tan^{-1} e - \frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} e$ (d) $\frac{\pi}{3} + \tan^{-1} e$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin x}\, dx$ এর মান কত?

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) 2 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

9. $y^2 = 4x$ এবং $y = x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

(a) $\frac{4}{3}$ বর্গএকক (b) $\frac{8}{3}$ বর্গএকক (c) $\frac{5}{6}$ বর্গএকক (d) $\frac{4}{9}$ বর্গএকক

10. $y^2 = 16x$ এবং $y = 4x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

(a) $\frac{1}{3}$ বর্গএকক (b) $\frac{2}{3}$ বর্গএকক (c) $\frac{4}{3}$ বর্গএকক (d) $\frac{5}{3}$ বর্গএকক

ব্যবহারিক

10.8. $y = f(x)$ সমীকরণের লেখ ও x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয়

ক্ষেত্রফলের আসন্নমান নির্ণয়ের জন্য ট্রাপিজিয়াম সূত্র (*Trapezoidal Rule*) আলোচনা করা হল।

মনে করি, $[a, b]$ ব্যবধির মধ্যে $y = f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন (Continuous) ফাংশন। অর্থাৎ a এবং b এর মধ্যে ফাংশনটির লেখে কোথায়ও ছেদ নেই।

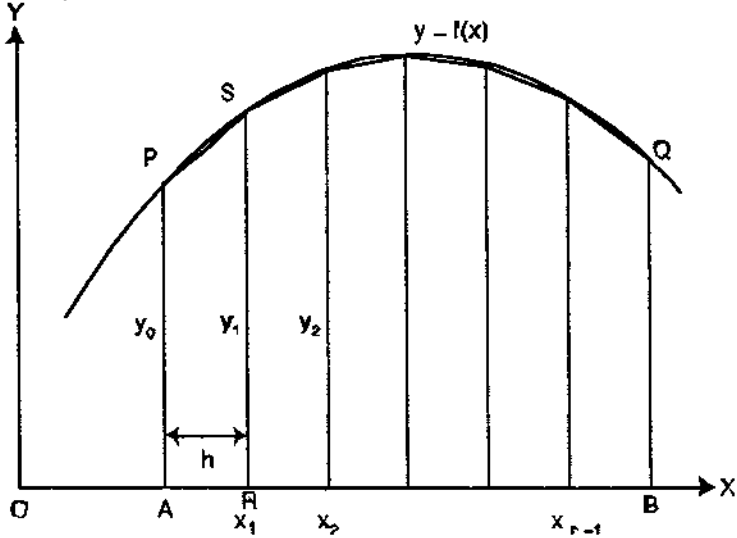
$y = f(x)$ এর লেখ, x-অক্ষ, $x_0 = a$ এবং $x_n = b$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রটি চিত্রে দেখান হল।

ক্ষেত্র $ABQP$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে। $[a, b]$ ব্যবধিকে $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n = b$ বিন্দুদ্বারা n সংখ্যক ক্ষুদ্র ব্যবধিতে বিভক্ত করা হল। তাহলে, $nh = x_n - x_0$ অর্থাৎ $h = \frac{1}{n}(x_n - x_0)$.

আবার ক্ষেত্রটি n সংখ্যক ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ট্রাপিজিয়ামে বিভক্ত করা হল। ধরি, প্রত্যেক ক্ষুদ্র ব্যবধির দৈর্ঘ্য $= h$ অর্থাৎ $x_1 - x_0 = h, x_2 - x_1 = h$ ইত্যাদি।

$\therefore x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h \ldots$

প্রথমে একটি ক্ষুদ্র ট্রাপিজিয়াম $ARSP$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।



প্রথম কোটি $y_0 = f(x_0) = AP$ এবং ২য় কোটি $y_1 = f(x_1) = RS \ldots n$ তম কোটি $y_n = f(x_n) = BQ$

এখন ট্রাপিজিয়াম $ARSP$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{y_0 + y_1}{2} \times AR$

$$= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\, h, \text{ যখন } AR = h$$

তদ্রূপ ২য় ক্ষুদ্র ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\ h\ (y_1 + y_2)$ ইত্যাদি।

অতএব সমগ্র $ABQP$ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= A$ হলে,

$$A = \frac{1}{2} h\ (y_0 + y_1) + \frac{1}{2} h(y_1 + y_2) + \frac{1}{2} h\ (y_2 + y_3) + ... + \frac{1}{2} h\ (y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{1}{2} h\ \{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + ... + 2\ y_{n-1} + y_n\}$$

$$= h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right]$$ যা ট্রাপিজিয়াম সূত্র হিসেবে পরিচিত।

সুতরাং ট্রাপিজিয়াম সূত্রটি $A = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right]$

$\int_a^b f(x)\ dx$ নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রালটি $y = f(x)$, x-অক্ষ, $x = a$ এবং $x = b$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

সুতরাং $\int_a^b f(x)\ dx = h\ \left(\frac{1}{2}\, y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{1}{2}\, y_n\right)$

2. n এর মান যত বেশি হবে অর্থাৎ h এর মান যত ছোট হবে আসন্নীকরণ তত শুদ্ধ হবে।

সমস্যা নং 2.1	তারিখ :

সমস্যা : ছয়টি কোটি ব্যবহার করে ট্রাপিজিয়াম সূত্রের সাহায্যে $y = \sin x$, x-অক্ষ এবং $x = 0$, $x = \pi/4$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান অর্থাৎ, $\int_0^{\pi/4} \sin x\, dx$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : মনে করি, $y = f(x) = \sin x$ এবং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= A$.

তত্ত্ব : $A = h\ \left(\frac{1}{2}\, y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2}\, y_5\right)$

কার্যপদ্ধতি :

1. $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ ব্যবধিকে সমদূরবর্তী 6টি কোটি $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ এর জন্য $(6 - 1) = 5$টি ক্ষুদ্র ব্যবধিতে বিভক্ত করি যার প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য h নির্ণয় করি।

2. $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র প্রয়োগ করে x_1, x_2 .... নির্ণয় করি।

$h = \frac{x_n - x_0}{n}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{20}$	0	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{20}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$

3. $y = f(x) = \sin x$ ফাংশনে উপরোক্ত ছয়টি x এর মান বসিয়ে প্রতিসঙ্গী ছয়টি কোটি y নির্ণয় করি।

x	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{\pi}{20}$	$x_2 = \frac{\pi}{10}$	$x_3 = \frac{3\pi}{20}$	$x_4 = \frac{\pi}{5}$	$x_5 = \frac{\pi}{4}$
$y = \sin x$	$y_0 = 0$	$y_1 = 0.15643$	$y_2 = 0.30902$	$y_3 = 0.45399$	$y_4 = 0.58778$	$y_5 = 0.70711$

4. ট্রাপিজিয়াম সূত্র $A = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2}y_5\right)$ প্রয়োগ করে A এর মান নির্ণয় করি।

ফল সংকলন :

ট্রাপিজিয়াম সূত্র (যখন কোটি 6 টি) : $A = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2}y_5\right)$

$$\therefore A = \int_0^{\pi/4} \sin x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{20}\left(\frac{1}{2}\times 0 + 0.15643 + 0.30902 + 0.45399 + 0.58778 + \frac{1}{2}\times 0.70711\right)$$

$$= \frac{\pi}{20}\times 1.86077 = 0.2924 = 0.30 \text{ (প্রায়)}$$

উত্তর : নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $A = 0.30$ বর্গ একক (প্রায়)।

সমস্যা নং 2.2	**তারিখ :**

সমস্যা : পাঁচটি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^{0.8} e^{x^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : ধরি $A = \int_0^{0.8} e^{x^2}\,dx.$

তত্ত্ব : $A = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2}\right)$

কার্যপদ্ধতি :

1. $0 \le x \le 0.8$ ব্যবধিতে সমদূরবর্তী 5টি কোটি $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$ এর জন্য 4টি ক্ষুদ্র ব্যবধিতে বিভক্ত করে প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য h নির্ণয় করি।

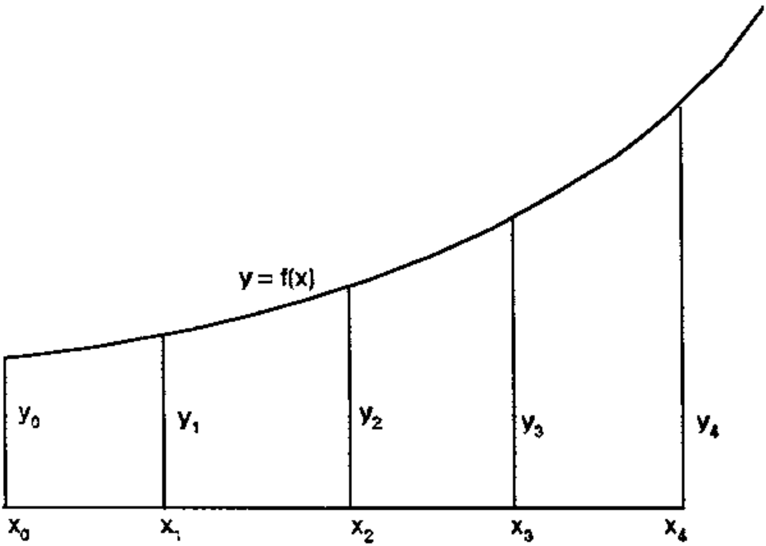
2. $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র প্রয়োগ করে $x_1, x_2, \ldots$ নির্ণয় করি।

3. $y = f(x) = e^{x^2}$ সমীকরণে উপরোক্ত পদ্ধতিতে প্রাপ্ত $x_1, x_2 \ldots$ স্থাপন করে y এর অনুসঙ্গী মান নির্ণয় করি।

4. ট্রাপিজিয়াম সূত্র: $A = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{1}{2}y_4\right)$ ব্যবহার করে A এর মান নির্ণয় করি।

ফল সংকলন :

$h = \frac{x_n - x_0}{n}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
$\frac{0.8}{4} = 0.2$	0	0.2	0.4	0.6	0.8



x	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.2$	$x_2 = 0.4$	$x_3 = 0.6$	$x_4 = 0.8$
$y = e^{x^2}$	$y_0 = 1$	$y_1 = 1.0408$	$y_2 = 1.1735$	$y_3 = 1.4333$	$y_4 = 1.8964$

ট্রাপিজিয়াম সূত্র থেকে $A = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2}\right)$, যখন $n = 4$

$$= 0.2\left(\frac{1}{2} + 1.0408 + 1.1735 + 1.4333 + \frac{1.8964}{2}\right)$$

$$= 0.2 \times 5.0958 = 1.0192 = 1.02 \text{ (প্রায়)}$$

$\therefore A = 1.02$ (প্রায়)।

উত্তর : নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $A = 1.02$ বর্গ একক (প্রায়)

শ্রেণির কাজ

1. পাঁচটি কোটি ব্যবহার করে মান নির্ণয় কর :

$$\text{(i)} \int_0^2 x^3 dx \quad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{(iii)} \int_1^2 \ln x \, dx \quad \text{(iv)} \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \quad \text{(v)} \int_0^1 x e^{x^2} dx.$$

উত্তর : (i) 4.25 (ii) 0.69 (iii) 0.16704 (iv) 0.98705 (v) 1.237

2. ট্রাপিজিয়াম সূত্রের সাহায্যে $y = \sin x$, x-অক্ষ, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয় কর, যখন $n = 5$. উত্তর : 0.99298

3. ট্রাপিজিয়াম সূত্র ব্যবহার করে $y = x^2$, x-অক্ষ, $x = -2$ এবং $x = 2$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল। আসন্ন মান নির্ণয় কর, যখন $n = 5$. উত্তর : 5.92

4. ট্রাপিজিয়াম সূত্রের সাহায্যে $\int_0^3 \sqrt{x}\, dx$ নির্ণয় কর, যখন $n = 10$. উত্তর : 1.8746.

5. ছয় কোটি ব্যবহার করে $\int_0^6 x^2 \, dx$ এর মান নির্ণয় কর। উত্তর : 73.44.

আ প্র

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক অনুমোদিত

আলফা প্রকাশনী - ঢাকা