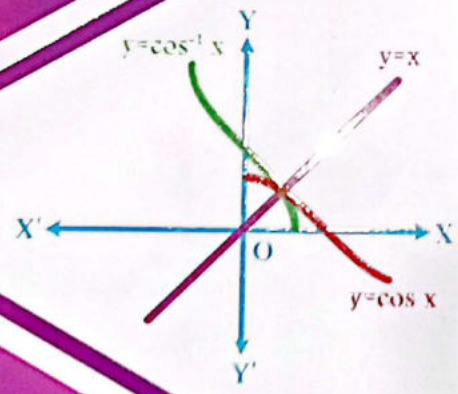
Educationblog24.com

HSC 2025

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

প্রশ্নব্যাংক

শর্ট সিলেবাস



উদ্ভাস
একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

Educationblog24.com

HSC 2025

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

প্রশ্নব্যাংক

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
সর্বশেষ সংস্করণ: নভেম্বর, ২০২৪ ইং

কপিরাইট © উদ্ভাস

সমস্ত অধিকার সংরক্ষিত। এই বইয়ের কোনো অংশই প্রতিষ্ঠানের লিখিত অনুমতি ব্যতীত ফটোকপি, রেকর্ডিং, বৈদ্যুতিক বা যান্ত্রিক পদ্ধতিসহ কোনো উপায়ে পুনরুৎপাদন বা প্রতিলিপি, বিতরণ বা প্রেরণ করা যাবে না। এই শর্ত লঙ্ঘিত হলে উপযুক্ত আইনি ব্যবস্থা গ্রহণ করা হবে।

Educationblog24.com

সূচিপত্র

শর্ট সিলেবাস ২০২৫

ক্র.নং	বিষয়বস্তু	পৃষ্ঠা
০১	অধ্যায়-০১ : ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক	০১-৫১
০২	অধ্যায়-০৩ : সরলরেখা	৫২-১০৬
০৩	অধ্যায়-০৪ : বৃত্ত	১০৭-১৪৫
০৪	অধ্যায়-০৭ : সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	১৪৬-১৮৪
০৫	অধ্যায়-০৯ : অন্তরীকরণ	১৮৫-২৩০
০৬	অধ্যায়-১০ : যোগজীকরণ	২৩১-২৭৫
০৭	মডেল টেস্ট	২৭৬-২৭৮

Educationblog24.com

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

- বিগত বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আগত প্রশ্নের পরিসংখ্যান:

বোর্ড	অধ্যায়	২০২৩				২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
		CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
		a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c	
ঢাকা	০১	2	2	2	5	2	2	2	3	2	2	2	5	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	1	4
	০২													1	1	1			1		2	1			2
	০৩	1	1	1	5	1	1	1	5	2	2	2	7	1	1	1	3	1	2	1	7		1	1	4
	০৪	1	1	1	4	1	1	1	4					1	1	1	3	1		1	3	1	1	1	3
	০৫																2	1		1	2	1	1	1	3
	০৬																2		1	1		1	1	1	
	০৭	2	2	2	3	2	2	2	4					1	1	1	3	2	1	1	1	1	1	1	3
	০৮													1	1	1	3				3				2
	০৯	1	1	1	4	2	1	1	5	2	2	2	6	1	1	1	4	2	1	1	2	1	1	1	2
	১০	1	1	1	4		1	1	4	2	2	2	7	1	1	1	3		1	1	2	1	1	1	2
রাজশাহী	০১	2	2	2	4	2	2	2	4	2	2	2	7	1	1	1	3		1	1	3	1	1		4
	০২													1	1		2	1			2	1	1	1	2
	০৩	1	1	1	3	1	1	1	6	2	2	2	8	1	1	1	5		1	1	7	1	1	1	3
	০৪	1	1	1	4	1	1	1	3						1		2	1	1	1	3	1	1	1	4
	০৫													1		2	2	1	1	1	2				2
	০৬													1	1	1	1			1		1	1	1	1
	০৭	1	1	1	5	2	2	2	2					1	1	1	3	2	2	1	1				2
	০৮																2	1			3			1	3
	০৯	2	2	2	4	2	1	1	5	2	2	2	5	1	1	1	2	1	1	1	2	2	1	1	3
	১০	1	1	1	4		1	1	5	2	2	2	5	1	1	1	3	1	1	1	2	1	2	2	1
চট্টগ্রাম	০১	2	2	2	4	2	3	3	4	2	2	2	6	1	1	1	3		1	1	3		1	1	3
	০২													1			2	1			2				2
	০৩	1	1	1	4	1			5	2	2	2	5			2	3		1	1	7	1	1	1	4
	০৪	1	1	1	5	1	1	1	2						1		2	1	1	1	3	1	1	1	2
	০৫													1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	3
	০৬													1	1	1	2			1				1	3
	০৭	1	1	1	5	1	1	1	4					1	1	1	3	2	2	1	1	2	2	1	
	০৮													1	1		2	1			3	1			3
	০৯	2	2	1	2	2	2	1	6	2	2	2	6	1	1	1	3	1	1	1	2	1	1	1	3
	১০	1	1	2	5	1	1	2	4	2	2	2	8	1	1	1	3	1	1	1	2	1	1	1	2
সিলেট	০১	2	2	2	4	2	2	2	5	2	2	2	5	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	1	3
	০২													1			2		1		2	1	1	1	3
	০৩	1	1	1	6	1	1	1	4	2	2	2	9		1		4	1	2	1	7	1	1	1	3
	০৪	1	1	1	5	1	1	1	4					1	1	2	2	1		1	3				3
	০৫													1	1	1	2	1		1	2			1	1
	০৬													1	1	1			1	1		1	1	1	2
	০৭	2	2	2	4	2	2	2	4					1	1	1	5	2	1	1	1	1	1	1	3
	০৮																3				3	1	1		4
	০৯	1	1	1	3	1	1	1	4	2	2	2	5	2	1		2	2	1	1	2	1	1	1	3
	১০	1	1	1	3	1	1	1	4	2	2	2	6		1	2	3		1	1	2	1	1	1	
বরিশাল	০১	1	1	1	5	1	1	1	4	2	2	2	7	1	1	1	2		1	1	3	1	1	1	3
	০২													1			3	1			2			1	2
	০৩	1	2	1	4	1	3	1	5	2	2	2	5		1	1	5		1	1	7	1	1	1	4
	০৪	2	1	2	5	2		2	5						1	1	2	1	1	1	3	1	1		2
	০৫													1			2	1	1	1	2	1	1		2
	০৬													2	1	1	2			1		1	1	1	1
	০৭	1	1	1	4	1	1	1	3					1	1	1		2	2	1	1		1		3
	০৮														1	1	3	1			3			1	2
	০৯	1	2	1	5	1	2	2	4	2	2	2	7	1	1	1	5	1	1	1	2	2	1	1	3
	১০	2	1	2	2	2	1	1	4	2	2	2	6	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	3

Educationblog24.com

বোর্ড	অধ্যায়	২০২৩				২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
		CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
		a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c	
যশোর	০১	1	1	1	7	2	2	2	4	2	2	2	5	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	2
	০২																2		1		2	1			2
	০৩	1	2	1	4	1	1	1	5	2	2	2	7	1	1	1	3	1	2	1	7	1	1	1	2
	০৪	2	1	2	4	1	1	1	4					1	1	1	2	1		1	3		1	1	3
	০৫															1	3	1		1	2		1	1	2
	০৬													1	1		3		1	1		1	1	1	
	০৭	1	1	1	5	1	1	1	4					1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	4
	০৮													1	1	1	3				3	1			4
	০৯	1	1	1	2	2	1	2	4	2	2	2	7	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	1	3
	১০	2	2	2	3	1	2	1	4	2	2	2	6	1	1	1	2		1	1	2			1	3
কুমিল্লা	০১	2	2	2	4	1	1	1	5	2	2	2	7	1	1	1	3		1	1	3	1	1	1	3
	০২													1			2	1			2				3
	০৩	1	1	1	6	2	2	1	5	2	2	2	6		1		3		1	1	7	2	1	1	4
	০৪	1	1	1	3	1	1	2	3					1	1	2	2	1	1	1	3		1	1	2
	০৫													1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2
	০৬													2	1	1	3			1		1	1	1	1
	০৭	2	2	2	3	1	1	1	4						1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	2
	০৮																2	1			3				5
	০৯	1	1	1	5	2	2	2	5	2	2	2	6	1	1	1	4	1	1	1	2	1	1	1	1
	১০	1	1	1	4	1	1	1	3	2	2	2	6	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2
দিনাজপুর	০১	1	1	1	5	1	1	1	4	2	2	2	5	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3
	০২													1			2		1		2	1	1	1	3
	০৩	2	2	2	4	2	2	2	3	2	2	2	7	1	1	1	2	1	2	1	7				4
	০৪	1	1	1	4	1	1	1	5						1	1	3	1		1	3	1	1	1	3
	০৫														1	1	1	1		1	2	1	1	1	3
	০৬													1	1	1	3		1	1		1			1
	০৭	1	1	1	4	1	1	1	5					1	1	1	2	2	1	1	1				3
	০৮													1			2				3		2	2	1
	০৯	2	2	2	4	1	2	2	6	2	2	2	6	1	1	1	4	2	1	1	2	2	1	1	3
	১০	1	1	1	4	2	1	1	2	2	2	2	7	1	1	1	3		1	1	2	1	1	1	1
ময়মনসিংহ	০১	2	2	2	5	1	1	1	5	2	2	2	5												
	০২																								
	০৩	1	1	1	4	1	1	1	7	2	2	2	8												
	০৪	1	1	1	2	2	2	2	1																
	০৫																								
	০৬																								
	০৭	1	1	1	4	1	1	1	4																
	০৮																								
	০৯	2	2	2	4	2	2	2	5	2	2	2	6												
	১০	1	1	1	6	1	1	1	3	2	2	2	6												
মাদ্রাসা	০১				6																				
	০২																								
	০৩				6																				
	০৪				3																				
	০৫																								
	০৬																								
	০৭				3																				
	০৮																								
	০৯				4																				
	১০				3																				

[বি.দ্র.- ২০২০ ও ২০২৪ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই।]

Educationblog24.com

অধ্যায় ০১

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

- সৃজনশীল (ক), (খ) ও (গ) নং প্রশ্নের জন্য এ অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	টাইপের নাম	যতবার প্রশ্ন এসেছে			যে বোর্ডে যে বছর এসেছে
			ক	খ	গ	CQ
✪✪✪	T-01	ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ ও বৈশিষ্ট্য	13	-	-	RB'23, 22; SB'23; DB'22, 21, 19; Ctg.B'22, 21; BB'21, 19; JB'21; MB'21
✪✪✪	T-02	ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগ ও সমতা	10	-	-	JB'23, 19, 17; Din.B'23; SB'22, 21; CB'22, 21, 19; Ctg.B'19
✪	T-03	ম্যাট্রিক্সের ট্রেস সংক্রান্ত	02	-	-	DB'23; Ctg.B'21
✪✪✪	T-04	ম্যাট্রিক্সের গুণফল ও ক্রম সংক্রান্ত	9	18	06	DB'23, 21, 18, 17; Ctg.B'23, 22, 21, 19, 17; SB'23, 19, 18; BB'23, 22, 21, 17; CB'23, 21, 17; MB'23; RB'22, 21, 17; JB'22, 21, 18; Din.B'21, 19, 18
✪	T-05	ম্যাট্রিক্স এর ভুক্তি নির্ণয়		2	-	MB'23; CB'21
✪	T-06	নির্ণায়কের অনুরাশি ও সহগুণক	1	1	-	SB'22; RB'19
✪✪✪	T-07	ব্যতিক্রমী, অব্যতিক্রমী এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্স	11	10	17	DB'23, 22, 21, 19, 18; RB'23, 21, 17; Ctg.B'23, 22, 21, 17; CB'23, 22, 21, 19, 17; Din.B'23, 22, 21, 18, 17; BB'22, 21, 19; JB'22, 21, 19, 18, 17; SB'21, 18, 17
✪✪✪	T-08	নির্ণায়ক সম্বলিত অভেদ ও মান নির্ণয়	11	10	13	DB'23, 22, 21; RB, Ctg.B, BB, MB'23, 22, 21; SB'23, 22, 21, 19, 17; JB'23, 22, 21, 17; CB'23, 21; Din.B'23, 21, 19
✪✪	T-09	নির্ণায়কবিশিষ্ট সমীকরণ সমাধান	1	1	3	RB'23, 22; Ctg.B'23; DB, SB'22; JB'19
✪✪✪	T-10	বহুচলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান	1	10	15	DB'23, 22, 21; RB'23, 21, 19, 17; Ctg.B'23, 22, 19; SB'23, 22, 21, 19, 17; BB'23, 21, 19, 17; JB'23, 22; CB'23, 22, 19; MB'23; Din.B'22

Educationblog24.com

CQ প্রশ্ন ও সমাধান (ক, খ ও গ)

T-01: ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ ও বৈশিষ্ট্য

Concept

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 10 & 14 \end{bmatrix}$ একটি 3×4 ক্রমের ম্যাট্রিক্স কেননা এতে 3 টি সারি ও 4 টি কলাম আছে।

সংক্ষেপে $A_{m,n} = [a_{ij}]_{i,j,m,n \in N}^{1 \le i \le m \; 1 \le j \le n}$ আকারে প্রকাশ করা যায়। যেখানে, a_{ij} ম্যাট্রিক্সটির উপাদান প্রকাশ করে এবং m ম্যাটিক্সটির সারি সংখ্যা ও n কলাম সংখ্যা নির্দেশ করে। ম্যাট্রিক্সকে [ ] বা ( ) দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

◈ ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স: কোনো ম্যাট্রিক্স-এর সারি ও কলাম পরস্পর interchange করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়, তাকে ট্রান্সপোজ (Transpose) ম্যাট্রিক্স বলে। একে A' বা A^T দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এর অপর নাম বিম্ব ম্যাট্রিক্স। $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \therefore A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$

◈ মূখ্য কর্ণ: কোনো ম্যাট্রিক্স এর যে কর্ণ এমন সব ভুক্তিদের বরাবর যায় যেন ভুক্তিগুলো a_{ij} এর জন্য $i = j$ হয়। তখন তাকে ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণ বলে।

◈ কিছু বিশেষ ম্যাট্রিক্স:

(i) **প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetric Matrix):** একটি ম্যাট্রিক্স A প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে যদি $A = A^T$ হয়। যেমন: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

(ii) **বিপ্রতিসম/ বক্র-প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Skew-Symmetric matrix):** একটি ম্যাট্রিক্স A বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে যদি $A = -A^T$ হয়। যেমন: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ একটি বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স। [**Note:** বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের প্রতিটি ভুক্তির মান শূন্য (0)]

(iii) **লম্ব (Orthogonal) ম্যাট্রিক্স:** একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A লম্ব ম্যাট্রিক্স হবে যদি $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$ হয়। অর্থাৎ, যদি $A^T = A^{-1}$ হয়।

(iv) **সমঘাতি/একক্ষম (Idempotent) ম্যাট্রিক্স:** কোনো A ম্যাট্রিক্স একক্ষম হবে, যদি $A^2 = A$ হয়।

(v) **শূন্যঘাতি/অক্ষম বা বিনাশক (Nilpotent) ম্যাট্রিক্স:** p একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, যদি $A^p = 0$ (শূন্য ম্যাট্রিক্স) হয়, তবে A একটি বিনাশক ম্যাট্রিক্স। একে p ক্রমের শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্সও বলে।

(vi) **অভেদঘাতি/উদঘাতিক (Involuntary) ম্যাট্রিক্স:** কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে $A^2 = I$ হলে, A একটি উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) দেখাও যে, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ একটি অভেদঘাতি (involutory) ম্যাট্রিক্স। [RB'23]

(ক) **Sol^n:** আমরা জানি, অভেদঘাতি (involuntory) ম্যাট্রিক্সের শর্ত $A^2 = I$

ধরি, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$; $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

অতএব, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স। (Showed)

02. (ক) প্রমাণ কর যে, $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স। [SB'23]

(ক) **Sol^n:** ধরি, $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16-12 & 12-9 \\ -16+12 & -12+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

আমরা জানি, একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে সমঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^2 = A \cdot A = A$ হয়।

সুতরাং, এটি একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স। (Ans.)

03. (ক) বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স ব্যাখ্যা কর। [RB'22]

(ক) **Sol^n:** বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Skew-symmetric matrix): একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স A^T এবং $A = -A^T$ হলে তাকে বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে। বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে মূখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলো শূন্য হয় এবং (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তি পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হয় সেখান $i \neq j$।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ হলে

$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -A$

অর্থাৎ $A = -A^T$; সুতরাং A ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম।

Educationblog24.com

04. (ক) $\begin{pmatrix} c & -5 & -6 \\ 5 & 2c & 3 \\ a & -3 & c \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম হলে, $c + a = ?$ [Ctg.B'22]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix} c & -5 & -6 \\ 5 & 2c & 3 \\ a & -3 & c \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম।

অর্থাৎ, $c = 0, a = -(-6) = 6$

$\therefore c + a = 0 + 6 = 6$ **(Ans.)**

05. (ক) ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়কের মধ্যে দুইটি পার্থক্য লিখ। [Ctg.B'21; BB'19]

(ক) **Sol^n:**

ম্যাট্রিক্স	নির্ণায়ক
(i) ম্যাট্রিক্স কতগুলো সংখ্যার আয়তাকার/বর্গাকার সজ্জা যার নিজের কোনো মান নেই।	(i) নির্ণায়ক কতগুলো সংখ্যার বর্গাকার সজ্জা যার নিজস্ব মান আছে।
(ii) ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম সংখ্যা সমান হতেও পারে নাও পারে।	(ii) নির্ণায়কের সারি ও কলামের সংখ্যা সমান।

06. (ক) $P = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে, P একটি শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স। [BB'21]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $P = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$

$P^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ P একটি শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স **(Showed)**।

07. (ক) $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 10 \\ -7 & 0 & 15 \\ -10 & -15 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম কিনা যাচাই কর। [MB'21]

(ক) **Sol^n:** ধরি, $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 10 \\ -7 & 0 & 15 \\ -10 & -15 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore A^T = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -10 \\ 7 & 0 & -15 \\ 10 & 15 & 0 \end{bmatrix}$

$-A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -10 \\ 7 & 0 & -15 \\ 10 & 15 & 0 \end{bmatrix} \therefore A^T = -A$

$\therefore$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম।

08. (ক) $R = \begin{bmatrix} 0 & 3 & x \\ -3 & y & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স বক্রপ্রতিসম হলে x ও y এর মান নির্ণয় কর। [ঢাকা কলেজ]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $R = \begin{bmatrix} 0 & 3 & x \\ -3 & y & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

R ম্যাট্রিক্সটি বক্রপ্রতিসম হলে এর মুখ্য কর্ণ বরাবর সকল ভুক্তি শূন্য হবে এবং মুখ্য কর্ণের উপর লম্ব অঙ্কন করলে লম্বের উপর অবস্থিত ভুক্তিগুলো পরস্পর সমান ও বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হবে।

$\therefore y = 0; x = -2$ **(Ans.)**

09. (ক) k এর মান কত হলে $\begin{bmatrix} 3 & k-1 \\ 2k+3 & k-2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হবে? [আদমজী ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, ঢাকা]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix} 3 & k-1 \\ 2k+3 & k-2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম।

$\therefore 2k + 3 = k - 1 \Rightarrow k = -1 - 3 = -4 \therefore k = -4$ **(Ans.)**

নিজে করো

10. $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$ [DB'22]
(ক) দেখাও যে, B একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স।

11. (ক) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স। [DB'21]

12. (ক) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি (involutory) কি-না যাচাই কর। [JB'21] [Ans: ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি]

13. (ক) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & m \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম হলে m এর মান নির্ণয় কর। [JB'21] [Ans: −4]

14. $A = \begin{bmatrix} a & a+1 \\ -a+1 & -a \end{bmatrix}$ [DB'19]
(ক) $a = 5$ হলে দেখাও যে, A একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স।

T-02: ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগ ও সমতা

Concept

(i) দুইটি ম্যাট্রিক্স যোগ-বিয়োগ করা যাবে যদি ম্যাট্রিক্স দুইটির ক্রম (order) সমান থাকে। দুইটি ম্যাট্রিক্সের একই স্থানের ভুক্তিগুলো যোগ বা বিয়োগ করে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাই উক্ত ম্যাট্রিক্স দুইটির যোগফল বা বিয়োগফল।

(ii) দুইটি ম্যাট্রিক্স পরস্পর সমান হতে হলে তাদের ক্রম এবং অনুরূপ ভুক্তিগুলো পরস্পর সমান হবে।

Educationblog24.com

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $3\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 4\end{pmatrix} + E = I_2$ হলে E ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। [JB'23]

(ক) **Soln:** দেওয়া আছে, $3\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 4\end{bmatrix} + E = I_2$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}3 & -3\\6 & 12\end{bmatrix} + E = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow E = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & -3\\6 & 12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-3 & 0-(-3)\\0-6 & 1-12\end{bmatrix}$

$\therefore E = \begin{bmatrix}-2 & 3\\-6 & -11\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

02. (ক) $\begin{bmatrix}x-5 & 8\\-1 & y+3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y-1 & 8\\-1 & 7\end{bmatrix}$ হলে (x, y) এর মান নির্ণয় কর। [Din.B'23]

(ক) **Soln:** দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix}x-5 & 8\\-1 & y+3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y-1 & 8\\-1 & 7\end{bmatrix}$

$\therefore x-5 = y-1 \ldots\ldots\ldots$ (i) এবং $y+3 = 7 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(ii) নং হতে, $y+3 = 7 \Rightarrow y = 7-3 \therefore y = 4$

y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $x-5 = 4-1$

$\Rightarrow x = 4-1+5 \therefore x = 8$

$\therefore (x, y) = (8, 4)$ **(Ans.)**

03. (ক) $A = \begin{pmatrix}3 & -1\\2 & -4\end{pmatrix}$ হলে $A + A^T$ নির্ণয় কর। [SB'22]

(ক) **Soln:** $A = \begin{bmatrix}3 & -1\\2 & -4\end{bmatrix} \therefore A^T = \begin{bmatrix}3 & 2\\-1 & -4\end{bmatrix}$

$\therefore A + A^T = \begin{bmatrix}3 & -1\\2 & -4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 2\\-1 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 1\\1 & -8\end{bmatrix}$

04. $A = \begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\4 & 2 & 1\\2 & 1 & -2\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}2 & 10 & 3\\3 & 8 & 2\\1 & 8 & 1\end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix}a & 12 & 6\\b & 10 & 3\\3 & 9 & -1\end{bmatrix}$ [CB'22]

(ক) $A + B = C$ হলে a, b এর মান নির্ণয় কর।

(ক) **Soln:** $A + B = \begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\4 & 2 & 1\\2 & 1 & -2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 10 & 3\\3 & 8 & 2\\1 & 8 & 1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}5 & 12 & 6\\7 & 10 & 3\\3 & 9 & -1\end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $\begin{bmatrix}5 & 12 & 6\\7 & 10 & 3\\3 & 9 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & 12 & 6\\b & 10 & 3\\3 & 9 & -1\end{bmatrix}$

সুতরাং, $a = 5, b = 7$ **(Ans.)**

05. $A = \begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\4 & 3 & 7\\-3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\7 & 2 & 5\\-1 & 8 & 9\end{bmatrix}$ দুটি ম্যাট্রিক্স। [SB'21]

(ক) $(2A - B)^T$ নির্ণয় কর।

(ক) **Soln:** $(2A - B)^T$

$= \left(2\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\4 & 3 & 7\\-3 & 4 & 5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\7 & 2 & 5\\-1 & 8 & 9\end{bmatrix}\right)^T$

$= \left(\begin{bmatrix}2 & 10 & -4\\8 & 6 & 14\\-6 & 8 & 10\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\7 & 2 & 5\\-1 & 8 & 9\end{bmatrix}\right)^T$

$= \begin{bmatrix}0 & 13 & -5\\1 & 4 & 9\\-5 & 0 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & 1 & -5\\13 & 4 & 0\\-5 & 9 & 1\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

06. (ক) $B + 2I = \begin{pmatrix}4 & 3\\2 & 5\end{pmatrix}$ হলে B নির্ণয় কর। [JB'19]

(ক) **Soln:** $B + 2I = \begin{pmatrix}4 & 3\\2 & 5\end{pmatrix}$

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix}4 & 3\\2 & 5\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\2 & 3\end{pmatrix}$ **(Ans.)**

07. দৃশ্যকল্প-২: $P = \begin{bmatrix}3 & -1\\2 & -2\end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix}2 & -1\\2 & -3\end{bmatrix}$ [CB'19]

(ক) P – Q ম্যাট্রিক্সটির নাম কী?

(ক) **Soln:** $P - Q = \begin{bmatrix}3 & -1\\2 & -2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & -1\\2 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ এটি একটি 2×2 পর্যায়ের অভেদক ম্যাট্রিক্স।

08. (ক) $M - 3I = \begin{bmatrix}2 & 5\\4 & 3\end{bmatrix}$ হলে, M নির্ণয় কর। [বরিশাল ক্যাডেট কলেজ]

(ক) **Soln:** দেওয়া আছে, $M - 3I = \begin{bmatrix}2 & 5\\4 & 3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow M = \begin{bmatrix}2 & 5\\4 & 3\end{bmatrix} + 3I = \begin{bmatrix}2 & 5\\4 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$

$\therefore M = \begin{bmatrix}2+3 & 5+0\\4+0 & 3+3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 5\\4 & 6\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

নিজে করো

09. (ক) $A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\-7 & 1 & 8\end{bmatrix}$ হলে, $2A + B$ নির্ণয় কর। [CB'21] [Ans: $\begin{bmatrix}5 & -4 & 6\\-1 & 9 & 18\end{bmatrix}$]

10. (ক) দুইটি ম্যাট্রিক্স সমান হওয়ার শর্তগুলো কী কী? [Ctg.B'19]

11. (ক) $2\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & -1\end{bmatrix} + F = I_2$ হলে, F ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর; যেখানে I_2 একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স। [JB'17] [Ans: $\begin{bmatrix}-1 & 4\\-4 & 3\end{bmatrix}$]

Educationblog24.com

T-03: ম্যাট্রিক্সের ট্রেস সংক্রান্ত

Concept

ম্যাট্রিক্সের ট্রেস (Trace of a matrix): কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলোর যোগফলকে ট্রেস বলে।

যেমন, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}_{3\times3}$ (a, e, i মূখ্য কর্ণ)

A একটি ম্যাট্রিক্স হলে, A ম্যাট্রিক্সের ট্রেস, $Tr(A) = a + e + i$

- **Trace এর কতিপয় বৈশিষ্ট্য:**
  - $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
  - $Tr(nA) = n \cdot Tr(A)$
  - $\therefore Tr(mA + nB) = m \cdot Tr(A) + n \cdot Tr(B)$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $P = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $Q = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ DB'23]

(ক) $P + Q$ ম্যাট্রিক্সের ট্রেস নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** $P + Q = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore P + Q$ ম্যাট্রিক্সের ট্রেস $= (4 + 3 + 4) = 11$

02. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & M \end{bmatrix}$ [Ctg.B'21]

(ক) M এর মান কত হলে A ম্যাট্রিক্সের ট্রেস 5 হবে?

(ক) **Sol^n:** এখানে, $4 + M = 5 \Rightarrow M = 1$

T-04: ম্যাট্রিক্সের গুণফল ও ক্রম সংক্রান্ত

Concept

(i) একটি ম্যাট্রিক্সের সাথে কোনো সংখ্যা গুণ করা হলে, ম্যাট্রিক্সের সবগুলো ভুক্তির সাথে সংখ্যাটি গুণ হয়ে যাবে।

$$k\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}$$

(ii) দুইটি ম্যাট্রিক্স গুণ করা যাবে যদি প্রথমটির কলাম সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারি সংখ্যার সমান হয়। A এর ক্রম $m \times n$ এবং B এর ক্রম $n \times p$ হলে, AB নির্ণয়যোগ্য কিন্তু BA নির্ণয়যোগ্য নয়। AB গুণফল ম্যাট্রিক্সটির ক্রম হবে $= m \times p$

$A \times B = C$

A এর Column সংখ্যা = B এর Row এর সংখ্যা

$m \times \boxed{n \quad n} \times p$

$m \times p$ (C এর ক্রম)

যেমন, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3}$ ও $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1}$ হলে (AB) সম্ভব কিন্তু (BA) সম্ভব না। AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×1।

(iii) দুইটি ম্যাট্রিক্স $A_{m\times n}$ ও $B_{n\times p}$ এর গুণন করে C ম্যাট্রিক্স পেলে $C_{m\times p}$ এর ভুক্তিগুলো এমন যে, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}$

Educationblog24.com

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $A = (1 \quad 2 \quad 3)$ এবং $B = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, হলে $(AB)^t$ নির্ণয় কর। [DB'23]

(ক) **Sol^n:** $AB = [1 \quad 2 \quad 3]\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} = [3+4+3] = [10]$

$\therefore AB^t = [10]^t = [10]$

02. $P = \begin{bmatrix}4 & -1 & 3\\0 & 7 & 5\\6 & -2 & 2\end{bmatrix}$ এবং $Q = \begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\-3 & -4 & -5\\-2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ [DB'23]

(খ) প্রমাণ কর যে, $(PQ)^t = Q^tP^t$

(খ) **Sol^n:** $PQ = \begin{bmatrix}4 & -1 & 3\\0 & 7 & 5\\6 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\-3 & -4 & -5\\-2 & 1 & 2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}0+3-6 & 16+4+3 & 12+5+6\\0-21-10 & 0-28+5 & 0-35+10\\0+6-4 & 24+8+2 & 18+10+4\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-3 & 23 & 23\\-31 & -23 & -25\\2 & 34 & 32\end{bmatrix}$

$\therefore (PQ)^t = \begin{bmatrix}-3 & 23 & 23\\-31 & -23 & -25\\2 & 34 & 32\end{bmatrix}^t$

$= \begin{bmatrix}-3 & -31 & 2\\23 & -23 & 34\\23 & -25 & 32\end{bmatrix}$ ....(i)

আবার, $Q^t = \begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\-3 & -4 & -5\\-2 & 1 & 2\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}0 & -3 & -2\\4 & -4 & 1\\3 & -5 & 2\end{bmatrix}$

এবং $P^t = \begin{bmatrix}4 & -1 & 3\\0 & 7 & 5\\6 & -2 & 2\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}4 & 0 & 6\\-1 & 7 & -2\\3 & 5 & 2\end{bmatrix}$

$\therefore Q^tP^t = \begin{bmatrix}0 & -3 & -2\\4 & -4 & 1\\3 & -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0 & 6\\-1 & 7 & -2\\3 & 5 & 2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}0+3-6 & 0-21-10 & 0+6-4\\16+4+3 & 0-28+5 & 24+8+2\\12+5+6 & 0-35+10 & 18+10+4\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-3 & -31 & 2\\23 & -23 & 34\\23 & -25 & 32\end{bmatrix}$ ....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই, $(PQ)^t = Q^t P^t$ [প্রমাণিত]

03. $Q = \begin{bmatrix}3+x & 4 & 2\\4 & 2+x & 3\\2 & 3 & 4+x\end{bmatrix}$ [Ctg.B'23]

(খ) যদি $x = 7$ হয়, $Q^2 - 5Q + 3I_3$ এর মান নির্ণয় কর যেখানে I_3 একক ম্যাট্রিক্স।

(খ) **Sol^n:** $x = 7$ হলে

$Q = \begin{bmatrix}3+7 & 4 & 2\\4 & 2+7 & 3\\2 & 3 & 4+7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & 4 & 2\\4 & 9 & 3\\2 & 3 & 11\end{bmatrix}$

$\therefore Q^2 = \begin{bmatrix}10 & 4 & 2\\4 & 9 & 3\\2 & 3 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 4 & 2\\4 & 9 & 3\\2 & 3 & 11\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}100+16+4 & 40+36+6 & 20+12+22\\40+36+6 & 16+81+9 & 8+27+33\\20+12+22 & 8+27+33 & 4+9+121\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}120 & 82 & 54\\82 & 106 & 68\\54 & 68 & 134\end{bmatrix}$

$\therefore Q^2 - 5Q + 3I_3$

$= \begin{bmatrix}120 & 82 & 54\\82 & 106 & 68\\54 & 68 & 134\end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix}10 & 4 & 2\\4 & 9 & 3\\2 & 3 & 11\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}120-50+3 & 82-20+0 & 54-10+0\\82-20+0 & 106-45+3 & 68-15+0\\54-10+0 & 68-15+0 & 134-55+3\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}73 & 62 & 44\\62 & 64 & 53\\44 & 53 & 82\end{bmatrix}$

04. $C = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 0\\2 & 0 & 4\end{pmatrix}$ এবং $f(x) = x^2 + 5x + 6$. [MB'23]

(গ) $f(C)$ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 5x + 6$

এবং $C = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 0\\2 & 0 & 4\end{pmatrix}$ $\therefore f(C) = C^2 + 5C + 6I_3$

$= \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 0\\2 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 0\\2 & 0 & 4\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 0\\2 & 0 & 4\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}5 & 2 & 8\\2 & 5 & 2\\8 & 2 & 20\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 5 & 10\\5 & 10 & 0\\10 & 0 & 20\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}11 & 7 & 18\\7 & 21 & 2\\18 & 2 & 46\end{pmatrix}$ (Ans.)

05. (ক) কী শর্তে দুইটি ম্যাট্রিক্সের যোগ ও গুণ করা সম্ভব? [CB'23]

(ক) **Sol^n:** দুইটি ম্যাট্রিক্স যোগ করার জন্য ম্যাট্রিক্স দুটির ক্রম এক হতে হবে।

আবার দুটি ম্যাট্রিক্স গুণের যোগ্য হবে যদি প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা ও দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা সমান হয়।

06. $N = \begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\2 & 1 & 0\\4 & -2 & 5\end{bmatrix}$ [CB'23]

(খ) $N^2 - 5N + 4I$ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** $N = \begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\2 & 1 & 0\\4 & -2 & 5\end{bmatrix}$

$N^2 = \begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\2 & 1 & 0\\4 & -2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\2 & 1 & 0\\4 & -2 & 5\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1+4-12 & -2+2+6 & 3+0-15\\-2+2+0 & 4+1+0 & -6+0+0\\-4-4+20 & 8-2-10 & -12+0+25\end{bmatrix}$

Educationblog24.com

$$= \begin{bmatrix} -7 & 6 & -12 \\ 0 & 5 & -6 \\ 12 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\therefore N^2 - 5N + 4I = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -12 \\ 0 & 5 & -6 \\ 12 & -4 & 13 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7+5+4 & 6-10+0 & -12+15+0 \\ 0-10+0 & 5-5+4 & -6+0+0 \\ 12-20+0 & -4+10+0 & 13-25+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -10 & 4 & -6 \\ -8 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

07. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ [RB'22]

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $A^2 - 5A - 14I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+9+9 & 3+3+9 & 3+9+3 \\ 3+3+9 & 9+1+9 & 9+3+3 \\ 3+9+3 & 9+3+3 & 9+9+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 15 & 15 \\ 15 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \end{bmatrix}$$

প্রদত্ত রাশি $= A^2 - 5A - 14I$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 15 & 15 \\ 15 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} - 14\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 15 & 15 \\ 15 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 15 & 15 \\ 15 & 5 & 15 \\ 15 & 15 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 15 & 15 \\ 15 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19 & 15 & 15 \\ 15 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19-19 & 15-15 & 15-15 \\ 15-15 & 19-19 & 15-15 \\ 15-15 & 15-15 & 19-19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^2 - 5A - 14I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স (প্রমাণিত)।

08. (ক) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ হলে $B.B^t$ নির্ণয় কর। [RB'22]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \therefore B^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

এখন, $B.B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2\times2+1\times1 & 2\times0+1\times2 \\ 0\times2+2\times1 & 0\times0+2\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 0+2 \\ 0+2 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$ (Ans.)

09. (ক) দুইটি ম্যাট্রিক্সের গুণন যোগ্যতা ব্যাখ্যা কর। [JB'22]

(ক) **Sol^n:** দুটি ম্যাট্রিক্স কেবল তখনই গুণ করা যায় যখন প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারির সমান হবে। অর্থাৎ, $A_{m\times n}$ এবং $B_{r\times p}$ ম্যাট্রিক্স দুটির ম্যাট্রিক্স গুণন করা যাবে যদি ও কেবল যদি $n = r$ হয় এবং গুণফল $AB_{m\times p}$ আকারের হবে।

10. দৃশ্যকল্প: $A = [a_{ij}]_{3\times3}$; যেখানে $a_{ij} = 2i - j$. [DB'21]

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^2 + 3x$.

(খ) $f(A) + 2I_3$ নির্ণয় কর।

(গ) $(A + I_3) \cdot (A^T - I_3)$ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** $A = \begin{bmatrix} 2\times1-1 & 2\times1-2 & 2\times1-3 \\ 2\times2-1 & 2\times2-2 & 2\times2-3 \\ 2\times3-1 & 2\times3-2 & 2\times3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 14 & 8 & 2 \\ 32 & 20 & 8 \end{bmatrix}$$

$\therefore f(A) + 2I_3 = A^2 + 3A + 2I_3$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 14 & 8 & 2 \\ 32 & 20 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 9 & 6 & 3 \\ 15 & 12 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 & -7 \\ 23 & 16 & 5 \\ 47 & 32 & 19 \end{bmatrix}$$ (Ans.)

(গ) **Sol^n:** $(A + I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^T - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A + I_3)(A^T - I_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0+1 & 6+0-1 & 10+0-2 \\ 0+0-1 & 9+3+1 & 15+12+2 \\ 0+0-4 & 15+4+4 & 25+16+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ -1 & 13 & 29 \\ -4 & 23 & 49 \end{bmatrix}$$ (Ans.)

11. (ক) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হলে BA নির্ণয় কর। [RB'21]

(ক) **Sol^n:** $BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0+8 & 0+10 & 0+12 \\ 1+8 & 2+10 & 3+12 \\ 0-4 & 0-5 & 0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$ (Ans.)

Educationblog24.com

12. দৃশ্যকল্প: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -4 & -9 \end{bmatrix}$

এবং $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2I$, যেখানে I অভেদ ম্যাট্রিক্স। [JB'21]

(খ) $f(A^T)$ নির্ণয় কর, যেখানে A^T হচ্ছে A এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স।

(খ) Sol^n: $A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix}$; $(A^T)^2 = A^T \cdot A^T$

$= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & -15 & -7 \\ -17 & 11 & 43 \\ -28 & 20 & 108 \end{bmatrix}$

$(A^T)^3 = (A^T)^2 \cdot A^T$

$= \begin{bmatrix} 29 & -15 & -7 \\ -17 & 11 & 43 \\ -28 & 20 & 108 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 66 & -22 & 210 \\ 158 & -106 & -482 \\ 448 & -288 & -1136 \end{bmatrix}$

$\therefore f(A^T) = (A^T)^3 - 2(AT)^2 + A^T - 2I$

$= \begin{bmatrix} 66 & -22 & 210 \\ 158 & -106 & -482 \\ 448 & -288 & -1136 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 58 & -30 & -14 \\ -34 & 22 & 86 \\ -56 & 40 & 216 \end{bmatrix}$

$+ \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 & 6 & 227 \\ 193 & -131 & -572 \\ 509 & -331 & -1363 \end{bmatrix}$ (Ans.)

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ [Ctg.B'19]

(খ) $AB + B^t - 2C$ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $AB + B^t - 2C$ এখন, $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3-4 & 1\times 7 - 2\times 1 \\ 3\times 3 + 6\times 2 & 3\times 7 + 6\times 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 21 & 27 \end{bmatrix}$; $B^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$; $2C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$

$\therefore AB + B^t - 2C$

$= \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 21 & 27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 24 & 12 \end{bmatrix}$ (Ans.)

14. দৃশ্যকল্প-১: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ [Din.B'19]

(খ) $C = A - B$ হলে $C^2 + 5B + 3I$ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $C = A - B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$C^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore C^2 + 5B + 3I = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 18 & 5 \\ 20 & 23 \end{bmatrix}$ (Ans.)

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ [DB'17]

(ক) $A \times C$ নির্ণয় করে উহার মাত্রা নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: $AC = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+20+8 \\ 8+0+12 \\ 4+15+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 27 \end{bmatrix}$

$\therefore A \times C$ এর মাত্রা 3×1 (Ans.)

16. নিচের সারণিটি 2023 সালে একটি কোম্পানির বিভিন্ন শাখায় কর্মরত শ্রমিকের সংখ্যা নির্দেশ করে।

শাখা	শ্রমিকের সংখ্যা		
	গ্রেড-১	গ্রেড-২	গ্রেড-৩
উৎপাদন	4	8	4
বিপণন	0	4	4
বিতরণ	8	0	8

উপরের সারণিটি একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স 'A' নির্দেশ করে। সমগ্রেডের শ্রমিকের মাসিক বেতন একই, সে উৎপাদন, বিপণন এবং বিতরণের যে শাখারই হোক না কেন।

[ফৌজদারহাট ক্যাডেট কলেজ, চট্টগ্রাম]

(খ) যদি $A^2 - 7A + 6I_3 = 2X$ হয়, তবে ম্যাট্রিক্স X নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: প্রদত্ত 3×3 ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16+0+32 & 32+32+0 & 16+32+32 \\ 0+0+32 & 0+16+0 & 0+16+32 \\ 32+0+64 & 64+0+0 & 32+0+64 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 48 & 64 & 80 \\ 32 & 16 & 48 \\ 96 & 64 & 96 \end{bmatrix}$

$A^2 - 7A + 6I_3 = \begin{bmatrix} 48 & 64 & 80 \\ 32 & 16 & 48 \\ 96 & 64 & 96 \end{bmatrix}$

$-7\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 48 & 64 & 80 \\ 32 & 16 & 48 \\ 96 & 64 & 96 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 28 & 56 & 28 \\ 0 & 28 & 28 \\ 56 & 0 & 56 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 26 & 8 & 52 \\ 32 & -6 & 20 \\ 40 & 64 & 46 \end{bmatrix}$

দেওয়া আছে, $A^2 - 7A + 6I_3 = 2X$

$\Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 26 & 8 & 52 \\ 32 & -6 & 20 \\ 40 & 64 & 46 \end{bmatrix}$ $\therefore X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 26 & 8 & 52 \\ 32 & -6 & 20 \\ 40 & 64 & 46 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 13 & 4 & 26 \\ 16 & -3 & 10 \\ 20 & 32 & 23 \end{bmatrix}$ (Ans.)

Educationblog24.com

17. $F(x) = 2x^2 - 3$ এবং $P = \begin{bmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{bmatrix}$

[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ]

(খ) $F(Q)$ নির্ণয় করো। যেখানে, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

এবং $f(x) = 2x^2 - 3$

$\therefore Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+6+2 & 3+15-2 & 2+9+4 \\ 2+10+3 & 6+25-3 & 4+15+6 \\ 1-2+3 & 3-5-2 & 2-3+4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & 16 & 15 \\ 15 & 28 & 25 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ $\therefore F(Q) = 2Q^2 - 3I$

$= 2\begin{bmatrix} 9 & 16 & 15 \\ 15 & 28 & 25 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 18 & 32 & 30 \\ 30 & 56 & 50 \\ 2 & -8 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 32 & 30 \\ 30 & 53 & 0 \\ 2 & -8 & 3 \end{bmatrix}$

18. দৃশ্যকল্প-I: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ]

(ক) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$

$C = [1 \quad 2 \quad -5 \quad 6]$ হলে, $(AB)C$ নির্ণয় কর।

(খ) দৃশ্যকল্প-I হতে, $A^3 - 2A^2 + A - 2I$ এর মান নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+6-3 \\ 16+30-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 40 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB)C = \begin{bmatrix} 7 \\ 40 \end{bmatrix}[1 \quad 2 \quad -5 \quad 6]$

$= \begin{bmatrix} 7 & 14 & -35 & 42 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$ (Ans.)

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+6+2 & 3+0-2 & 2+9+2 \\ 2+0+3 & 6+0-3 & 4+0+3 \\ 1-2+0 & 3-0-1 & 2-3+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9+2+13 & 27+0-13 & 18+3+13 \\ 5+6+7 & 15+0-7 & 10+9+7 \\ 0+4+0 & 0+0+0 & 0+6+0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$\therefore A^3 - 2A^2 + A - 2I = \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$-2\begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 24-18+1-2 & 14-2+3-0 & 34-26+2-0 \\ 18-10+2-0 & 8-6+0-2 & 26-14+3-0 \\ 4-0+1-0 & 0-4-1-0 & 6-0+1-2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 10 & 0 & 15 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ (Ans.)

19. দৃশ্যকল্প-২: $D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -4 & -9 \end{bmatrix}$ এবং

$h(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2I$

[বিএএফ শাহীন কলেজ, মৌলভীবাজার]

(গ) দৃশ্যকল্প-২: হতে $h(D^T)$ নির্ণয় কর, যেখানে D^T হচ্ছে D এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -4 & -9 \end{bmatrix}$

$\therefore D^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix}$

$\therefore (D^T)^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16-2+15 & -8+2-9 & 12+8-27 \\ 4-1-20 & -2+1+12 & 3+4+36 \\ 20-3-45 & -10+3+27 & 15+12+81 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 29 & -15 & -7 \\ -17 & 11 & 43 \\ -28 & 20 & 108 \end{bmatrix}$ $\therefore (D^T)^3 = (D^T)^2 \times D^T$

$= \begin{bmatrix} 29 & -15 & -7 \\ -17 & 11 & 43 \\ -28 & 20 & 108 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 145-15-35 & -58+15+21 & 87+60+63 \\ -68+11+215 & 28-11-129 & -51-44-387 \\ -112+20+540 & 56-20-324 & -84-80-972 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 66 & -22 & 210 \\ 158 & -106 & -482 \\ 448 & -288 & -1136 \end{bmatrix}$

$\therefore h(D^T) = (D^T)^3 - 2(D^T)^2 + D^T - 2I$

$= \begin{bmatrix} 66 & -22 & 210 \\ 158 & -106 & -482 \\ 448 & -288 & -1136 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 29 & -15 & -7 \\ -17 & 11 & 43 \\ -28 & 20 & 108 \end{bmatrix}$

$+ \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 & 6 & 227 \\ 193 & -131 & -572 \\ 509 & -331 & -1363 \end{bmatrix}$ (Ans.)

Educationblog24.com

নিজে করো

20. $A = \begin{bmatrix} p & p+1 & p+1 \\ p+1 & p & p+1 \\ p+1 & p+1 & p \end{bmatrix}$ [SB'23]

(খ) উদ্দীপকের আলোকে $A^2 - 7A - 8I_3$ নির্ণয় কর; যখন $p = 2$. [Ans: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$]

21. (ক) $M = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$, $N = [-3 \ 5 \ 6]$ হলে $[MN]^T$ নির্ণয় কর।

[BB'23] [Ans: $\begin{bmatrix} -6 & -27 & 9 \\ 10 & 45 & -15 \\ 12 & 54 & -18 \end{bmatrix}$]

22. (ক) $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ এবং $Q = (4 \ 5 \ 6)$ হলে $(PQ)^T$ নির্ণয় কর।

[MB'23] [Ans: $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$]

23. $N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ [Ctg.B'22]

(গ) $MN = I_3$ (অভেদক ম্যাট্রিক্স) হলে M ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর।

[Ans: $M = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -5 & 2 & -6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$]

24. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 + 3x - 5I$. [BB'22]

(খ) f(A) নির্ণয় কর। [Ans: $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 \\ 31 & 25 & 23 \\ 19 & 10 & 17 \end{bmatrix}$]

25. $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ [JB'22]

(খ) $f(x) = x^2 - 3x$ হলে f(P) নির্ণয় কর।

[Ans: $\begin{bmatrix} 6 & -9 & 9 \\ 3 & 21 & -51 \\ -5 & -13 & 55 \end{bmatrix}$]

26. $P = \begin{bmatrix} 1 + x^2 - y^2 & 2xy & 2y \\ 2xy & 1 - x^2 + y^2 & -2x \\ -2y & 2x & 1 - x^2 - y^2 \end{bmatrix}$

এবং $f(x) = x^3 - 3x + 2I$ [RB'21]

(গ) $x = 1, y = 2$ হলে f(P) নির্ণয় কর, যেখানে I একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স। [Ans: $\begin{bmatrix} 192 & 4 & 100 \\ 4 & 198 & -50 \\ -100 & 50 & 190 \end{bmatrix}$]

27. $x + 3y + 2z = 5$
$2x + y + 3z = 1$
$3x + 2y + z = 4$ [Ctg.B'21]

(গ) প্রদত্ত সমীকরণ জোটের চলকসমূহের সহগগুলো দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সটি M হলে $M^2 - 2M + 3I$ এর মান নির্ণয় কর। [Ans: $\begin{bmatrix} 14 & 4 & 9 \\ 9 & 14 & 4 \\ 4 & 9 & 14 \end{bmatrix}$]

28. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 - x + 3$. [BB'21]

(খ) f(A) নির্ণয় কর। [Ans: $\begin{bmatrix} 23 & 16 & -14 \\ 16 & 18 & -4 \\ -14 & -4 & 58 \end{bmatrix}$]

29. (ক) $P = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ এবং $Q = [-2 \ -1 \ 0]$ হলে, $[PQ]^T$ নির্ণয় কর। [CB'21] [Ans: $\begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$]

30. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ [Din.B'21]

(গ) $C = A'$ হলে $C^2 - 5C + 6I$ নির্ণয় কর।

[Ans: $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 7 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$]

31. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; $f(t) = t^2 - 3t + 2$ [SB'19]

(খ) f(A) নির্ণয় কর। [Ans: $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 0 & 4 & -8 \\ -5 & 9 & -3 \end{bmatrix}$]

32. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = 3x^2 + 5x$. [DB, SB, JB, Din.B'18]

(খ) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ হলে f(A) মান নির্ণয় কর।

[Ans: $\begin{bmatrix} 79 & -82 & 139 \\ 13 & 2 & 81 \\ 125 & -212 & 97 \end{bmatrix}$]

33. $f(x) = x^2 + 3x$ এবং $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ [RB'17]

(খ) f(A) + I নির্ণয় কর। [Ans: $\begin{bmatrix} 25 & 4 & -8 \\ 2 & 41 & 46 \\ -38 & 56 & 79 \end{bmatrix}$]

34. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = A^t$, $f(x) = x^2 - 4x$. [Ctg.B'17]

(খ) f(B) নির্ণয় কর। [Ans: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$]

35. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ [BB'17]

(খ) উদ্দীপকের আলোকে, $A^2 - 5A + 6I$ নির্ণয় কর, যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$। [Ans: $\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$]

36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ [CB'17]

(খ) $AB - C^2 + 2I_2$ নির্ণয় কর। [Ans: $\begin{bmatrix} -46 & 14 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$]

Educationblog24.com

T-05: ম্যাট্রিক্স এর ভুক্তি নির্ণয়

Concept

এখানে প্রশ্নে প্রদত্ত শর্ত অনুসারে যোগ, বিয়োগ বা গুণ করে ম্যাট্রিক্সের অজানা ভুক্তিগুলো নির্ণয় করতে হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

11. $A = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & n\end{pmatrix}$ [MB'23]

(খ) $AB = I_2$ হলে m ও n এর মান বের কর।

(খ) **Sol^n:** প্রশ্নমতে, $AB = I_2$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\times1+4\times0 & 1\times m+4\times n\\ 1\times0+1\times0 & 0\times m+1\times n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & m+4n\\ 0 & n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

অর্থাৎ, $m + 4n = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$n = 1 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(ii) হতে প্রাপ্ত $n = 1$ (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$m + 4 \times 1 = 0 \therefore m = -4$

সুতরাং, $m = -4$ ও $n = 1$ **(Ans.)**

02. $A = \begin{bmatrix}4 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & p\end{bmatrix}$ [CB'21]

(খ) $AB = I$ হলে, n ও p এর মান নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** $AB = A^{-1}\cdot AB = A^{-1}\cdot I \Rightarrow I\cdot B = A^{-1}$

হলে $B = A^{-1}I = A^{-1}$

$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\\ 0 & 1\end{bmatrix} \therefore n = -\frac{3}{4}, p = 1$

[N.B: প্রশ্নে একটু অসঙ্গতি রয়েছে। প্রশ্নে $B = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & n\\ 0 & p\end{bmatrix}$ হওয়া উচিত ছিল]

T-06: নির্ণায়কের অনুরাশি ও সহগুণক

Concept

মনে করি, $D = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ একটি 3×3 ক্রমের নির্ণায়ক (নির্ণায়ককে || চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়)।

- a_1 এর অনুরাশি নির্ণয়ের জন্য a_1 এর সারি এবং কলাম বাদ দিতে হবে এভাবে $\begin{vmatrix}\cancel{a_1} & \cancel{b_1} & \cancel{c_1}\\ \cancel{a_2} & b_2 & c_2\\ \cancel{a_3} & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

  এরপর $\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান $b_2c_3 - b_3c_2$-ই a_1 এর অনুরাশি।

  অর্থাৎ, একটি নির্ণায়কে কোনো ভুক্তি যে সারি ও কলামে অবস্থিত, সেই সারি ও কলামকে বাদ দিয়ে যে নির্ণায়কটি পাওয়া যায়, তাকে ঐ ভুক্তির অনুরাশি (Minor) বলে।

- কোনো ভুক্তির সহগুণক $= (-1)^{r+c} \times$ অনুরাশি ; চিহ্নের প্রথা: $\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}$
- $a_1, b_1, c_1, a_2 \ldots\ldots$ এর সহগুণককে সাধারণত $A_1, B_1, C_1, A_2 \ldots\ldots$ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- a_1 এর সহগুণক, $A_1 = (-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} = b_2c_3 - c_2b_3$ এভাবে প্রত্যেকটির জন্য নির্ণয় করা যাবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $B = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ [SB'22]

(খ) B নির্ণায়কের ২য় সারির উপাদানগুলোর সহগুণক যথাক্রমে A_2, B_2 এবং C_2 হলে, $a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** $A_2 = -\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} = -(b_1c_3 - b_3c_1)$

$= b_3c_1 - b_1c_3$; $B_2 = \begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix} = a_1c_3 - a_3c_1$

$C_2 = -\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} = -(a_1b_3 - a_3b_1)$

$= a_3b_1 - a_1b_3$

Educationblog24.com

প্রদত্ত রাশি $= a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2$
$= a_3(b_3c_1 - b_1c_3) + b_3(a_1c_3 - a_3c_1) + c_3(a_3b_1 - a_1b_3)$
$= a_3b_3c_1 - a_3b_1c_3 + a_1b_3c_3 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 = 0$ **(Ans.)**

02. $A = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **[RB'19]**

(ক) $|A|$ এর $(3, 2)$ তম ভুক্তির সহগুণক নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** $(3,2)$ তম ভুক্তি $= 1$
সহগুণক $= (-1)^{3+2}(12 \times 1 - 1 \times 0) = -12$ **(Ans.)**

03. $A = \begin{bmatrix} 3+a & 4 & 2 \\ 4 & 2+a & 3 \\ 2 & 3 & 4+a \end{bmatrix}$ **[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ]**

(ক) যদি $A_{13} = 0$ হয়, তবে a এর মান নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $A_{13} = 0$

$\Rightarrow (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2+a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12 - 2 \cdot (2 + a) = 0$

$\Rightarrow 12 - 4 - 2a = 0 \Rightarrow 8 - 2a = 0 \therefore a = 4$ **(Ans.)**

T-07: ব্যতিক্রমী, অব্যতিক্রমী এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্স

Concept

- A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের ($n \times n$ আকারের) জন্য A এর সহগুণকগুলোকে (cofactor) এর ভুক্তিগুলোর পরিবর্তে বসালে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে সহগুণক ম্যাট্রিক্স বলা হয়। A এর সহগুণক ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সকে A ম্যাট্রিক্সের **Adjoint** ম্যাট্রিক্স বলা হয়। ইহাকে লেখা হয়, adj(A).

  যেমন: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ হলে, $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 15 & 4 & -11 \\ -9 & -8 & 13 \\ -3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

- যে বর্গ ম্যাট্রিক্স-এর নির্ণায়কের মান শূন্য (0) (অর্থাৎ $|A| = 0$), তাকে ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স **(Singular Matrix)** বলে।
- যে বর্গ ম্যাট্রিক্স-এর নির্ণায়কের মান শূন্য (0) নয় (অর্থাৎ $|A| \neq 0$), তাকে অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স **(Non-Singular Matrix)** বলে।
- A একটি বর্গ ($n \times n$ আকারের) ম্যাট্রিক্সের জন্য $AX = XA = I$ হলে X কে A এর Inverse/বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং প্রকাশ করা হয় A^{-1} দ্বারা অর্থাৎ $X = A^{-1} \Rightarrow A(A^{-1}) = (A^{-1})A = I$

  ➢ বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের সূত্র: $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$

  ➢ বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকার শর্তসমূহ: A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকবে যদি এবং কেবল যদি

  (i) A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয়

  (ii) A একটি অব্যতিক্রমী (Non-singular) ম্যাট্রিক্স হয় (অর্থাৎ $|A| \neq 0$)

  ➢ বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের ধাপগুলো:

  (i) ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান নির্ণয় করতে হবে।

  (ii) ম্যাট্রিক্সটির সহগুণক ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করতে হবে। [যদি, $|A| \neq 0$ হয়]

  (iii) সহগুণক ম্যাট্রিক্সটিকে Transpose/বিন্যস্ত করে Adjoint ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করতে হবে।

  (iv) Adjoint ম্যাট্রিক্সটিকে ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান দ্বারা ভাগ করতে হবে।

  Note: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A)$ এবং $A = \frac{1}{|A^{-1}|}\text{adj}(A^{-1})$

Shortcut: (2×2) ম্যাট্রিক্স, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ এর জন্য A^{-1} নির্ণয় করতে হলে, মুখ্য কর্ণের ভুক্তিদ্বয় a ও d এর অবস্থান স্থান বিনিময় এবং গৌণ কর্ণের ভুক্তিদ্বয় b ও c এর চিহ্ন পরিবর্তন করতে হবে। একে ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়কের মান, $(ad - bc)$ দ্বারা ভাগ করতে হবে। $\therefore A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Educationblog24.com

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $P = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ [DB'23]

(গ) $PR = RP = I$ হলে R ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। যেখানে I একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $PR = RP = I$

$\therefore R = IP^{-1} = P^{-1}$ [$\because AI = A$]

এখানে, $|P| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

$= 4(14 + 10) + 1(0 - 30) + 3(0 - 42)$

$= 96 - 30 - 126 = -60$

এখানে, (1, 1) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$

$= (14 + 10) = 24$

(1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $= -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$

$= -(0 - 30) = 30$

(1, 3) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$

$= (0 - 42) = -42$

(2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক $= -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$

$= -(-2 + 6) = -4$

(2, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$

$= (8 - 18) = -10$

(2, 3) তম ভুক্তির সহগুণক $= -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$

$= -(-8 + 6) = 2$

(3, 1) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$

$= (-5 - 21) = -26$

(3, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $= -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

$= -(20 - 0) = -20$

(3, 3) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$

$= (28 - 0) = 28$

$\text{Adj}(P) = \begin{bmatrix} 24 & 30 & -42 \\ -4 & -10 & 2 \\ -26 & -20 & 28 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 24 & -4 & -26 \\ 30 & -10 & -20 \\ -42 & 2 & 28 \end{bmatrix}$

$\therefore P^{-1} = \frac{1}{|P|}\text{adj}(P) = \frac{1}{-60}\begin{bmatrix} 24 & -4 & -26 \\ 30 & -10 & -20 \\ -42 & 2 & 28 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -12 & 2 & 13 \\ -15 & 5 & 10 \\ 21 & -1 & -14 \end{bmatrix} = R$ (Ans.)

02. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ [RB'23]

(ক) K এর কোন মানের জন্য $A = \begin{bmatrix} K-3 & -1 \\ -2 & K-2 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হবে?

(খ) উদ্দীপক হতে $A^3 - 3A^2 - A + 9I = 0$ এর সাহায্যে A^{-1} নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A ব্যতিক্রমী হবে যদি $|A| = 0$ হয়

দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} K-3 & -1 \\ -2 & K-2 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

$|A| = \begin{vmatrix} K-3 & -1 \\ -2 & K-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (K-3)(K-2) - 2 = 0$

$\Rightarrow K^2 - 2K - 3K + 6 - 2 = 0 \Rightarrow K^2 - 5K + 4 = 0$

$\Rightarrow (K-4)(K-1) = 0 \therefore K = 4, 1$ (Ans.)

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

এবং $A^3 - 3A^2 - A + 9I = 0$

$\Rightarrow (A^{-1}A)A^2 + 3(A^{-1}A)A - A^{-1}A + 9A^{-1}I = 0$

$\Rightarrow IA^2 - 3A - I + 9A^{-1} = 0$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9}(3A + I - A^2) \ldots\ldots\ldots (i)$

এখন, $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

আবার, $3A = 3 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 9 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

এখন, $(3A + I - A^2) = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 9 & -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$- \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -7 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -7 & -1 \end{bmatrix}$ (Ans.)

03. $2x - y - z = 6, x + 3y + 2z = 1$ এবং $3x - y - 5z = 1$. [Ctg.B'23]

(খ) x, y ও z এর সহগগুলো নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে A^{-1} নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** প্রশ্নমতে $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

$|A| = 2\{3 \times (-5) - 2(-1)\} - (-1)\{(-5)1 - 3 \times 2\}$

$+(-1)\{(-1) \cdot 1 - 3 \times 3\}$

$= 2(-15 + 2) + (-5 - 6) - (-1 - 9)$

$= -26 - 11 + 10 = -27$

Educationblog24.com

এখন $|A|$ নির্ণায়কে

(1, 1) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$
$= (-15 + 2) = -13$

(1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$
$= -(-5 - 6) = 11$

(1, 3) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$
$= (-1 - 9) = -10$

(2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক $= -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$
$= -(5 - 1) = -4$

(2, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$
$= (-10 + 3) = -7$

(2, 3) তম ভুক্তির সহগুণক $= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$
$= -(-2 + 3) = -1$

(3, 1) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$
$= (-2 + 3) = 1$

(3, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$
$= -(4 + 1) = -5$

(3, 3) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (6 + 1) = 7$

$\therefore \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -13 & 11 & -10 \\ -4 & -7 & -1 \\ 1 & -5 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -13 & -4 & 1 \\ 11 & -7 & -5 \\ -10 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A) = \frac{1}{-27}\begin{bmatrix} -13 & -4 & 1 \\ 11 & -7 & -5 \\ -10 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

04. (ক) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -k \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে k এর মান নির্ণয় কর। **[Ctg.B'23]**

(ক) **Sol^n:** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -k \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হবে যদি এর নির্ণায়কের মান শূন্য হয়।

$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -k - 2 = 0 \Rightarrow -k + 2 = 0 \therefore k = 2$

05. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **[CB'23]**

(গ) A^{-1} নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
$= 2(2 + 1) + 1(2 - 1) + 3(-1 - 1) = 6 + 1 - 6 = 1$

$|A|$ নির্ণায়কে,

(1, 1) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (2 + 1) = 3$

(1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1$

(1, 3) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1 - 1) = -2$

(2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক $= -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 + 3) = -1$

(2, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 3) = 1$

(2, 3) তম ভুক্তির সহগুণক $= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 + 1) = 1$

(3, 1) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1 - 3) = -4$

(3, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 3) = 1$

(3, 3) তম ভুক্তির সহগুণক $= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 1) = 3$

$\therefore \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

06. $A = \begin{bmatrix} x - 1 & 1 & 2 \\ -2 & x + 1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$ **[DB'22]**

(গ) $(A^T)^{-1}$ নির্ণয় কর যখন, $x = 0$ হয়।

(গ) **Sol^n:** ধরি, $C = A^T$

এখন, $x = 0$ হলে, $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore C = A^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$|C| = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(3 - 2) = 2$

$|C| \neq 0$ অর্থাৎ C^{-1} নির্ণয়যোগ্য।

এখন, $c_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $c_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$c_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$

$c_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 6) = 6$

$c_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4$

$c_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-3 + 4) = -1$

$c_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$

$c_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2$

$c_{33} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1 + 2) = 1$

$\therefore C^{-1} = \frac{1}{|C|}\text{Adj}C = \frac{1}{|C|}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^T$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$

$C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Educationblog24.com

07. $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ [JB'22]

(খ) দেখাও যে, $(ST)^{-1} - T^{-1}S^{-1}$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$ST = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3-1 & 5+2 \\ 6+3 & -10-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 9 & -16 \end{pmatrix}$

$|ST| = \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 9 & -16 \end{vmatrix} = -4 \times -16 - 7 \times 9$

$= 64 - 63 = 1 \neq 0$

$ST_{11} = -16, ST_{12} = -9, ST_{21} = -7, ST_{22} = -4$

$\therefore (ST)^{-1} = \frac{\text{Adj}(ST)}{|ST|} = \frac{\begin{pmatrix} -16 & -9 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}^T}{1} = \begin{pmatrix} -16 & -7 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$

আবার, $T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, |T| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5$

$= 1 \neq 0$

$T_{11} = 2, T_{12} = 1, T_{21} = 5, T_{22} = 3$

$\therefore T^{-1}\frac{\text{Adj}(T)}{|T|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^T}{1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ এবং $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\therefore |S| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$

$S_{11} = -3, S_{12} = -2, S_{21} = -1, S_{22} = -1$

$S^{-1} = \frac{\text{Adj}(S)}{|S|} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

এখন, $(ST)^{-1} - T^{-1}S^{-1}$

$= \begin{pmatrix} -16 & -7 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -16 & -7 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6-10 & -2-5 \\ -3-6 & -1-3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -16+16 & -7+7 \\ -9+9 & -4+4 \end{pmatrix} = 0$ **(Showed)**

08. (ক) $\begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর। [SB'21]

(ক) **Sol^n:** শর্তমতে, $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x(2x-2) - (x-1) = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - x + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x(x-1) - 1(x-1) = 0 \therefore x = 1, \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

09. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ [BB'21]

(গ) প্রমাণ কর যে, $A^{-1} \cdot A = I_3$

(গ) **Sol^n:**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ $A_{11} = -19$ $A_{12} = 22$ $A_{13} = -2$

$A_{21} = 22$ $A_{22} = -21$ $A_{23} = 5$

$A_{31} = -2$ $A_{32} = 5$ $A_{33} = -2$

$|A| = -19 + 44 - 8 = 17 \neq 0$; A^{-1} নির্ণয়যোগ্য

$\therefore A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -19 & 22 & -2 \\ 22 & -21 & 5 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

L. H. S $= A^{-1} \cdot A = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -19 & 22 & -2 \\ 22 & -21 & 5 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$

= R. H. S **(Proved)**

10. $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ [DB'19]

(খ) B^T এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** ধরি, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} = B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} = P$

$|P| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \therefore P^{-1}$ বিদ্যমান।

$P_{11} = (0 \times -5 - 4 \times 2) = -8$

$P_{12} = -(-5 - 12) = 17$

$P_{13} = 2 \times 1 - 0 = 2$; $P_{21} = -(1 \times -5 - 3 \times 2) = +11$

$P_{22} = -5 \times 2 - 3 \times 3 = -19$

$P_{23} = -(2 \times 2 - 3 \times 1) = -1$

$P_{31} = 4 \times 1 = 4$; $P_{32} = -(4 \times 2 - 3) = -5$

$P_{33} = -1$

$\text{Adj}(P) = \begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 \\ 11 & -19 & -1 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -8 & 11 & 4 \\ 17 & -19 & -5 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore P^{-1} = \frac{1}{|P|}\text{Adj}(P) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -8 & 11 & 4 \\ 17 & -19 & -5 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

11. (ক) যদি $\begin{pmatrix} x & 2 \\ x & 2 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হয় তবে x-এর মান নির্ণয় কর। [DB, SB, JB, Din.B'18]

(ক) **Sol^n:** $\begin{vmatrix} x & 2 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ সুতরাং x এর যে কোনো মানের জন্য ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে।

12. দৃশ্যকল্প-২: $R = [r_{ij}]_{3\times3}$ $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; যেখানে $r_{ij} = i + 2j$ [আইডিয়াল স্কুল অ্যান্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে $R^T + 54S^{-1}$ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $R = [r_{ij}]_{3\times3}$; $r_{ij} = i + 2j$

$\therefore R = \begin{bmatrix} 1+2 & 1+4 & 1+6 \\ 2+2 & 2+4 & 2+6 \\ 3+2 & 3+4 & 3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

$\therefore R^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Educationblog24.com

দেওয়া আছে, $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore |S| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(6-1) - 2(4-3) + 3(2-9)$

$= (-18) \neq 0$

অর্থাৎ, S একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স এবং এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান।

S এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স নির্ণয়-

$S_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$

$S_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$

$S_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7$

$S_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$

$S_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7$

$S_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1-6) = 5$

$S_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7$

$S_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-6) = 5$

$S_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$

$\therefore \text{Adj}(S) = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore S^{-1} = \frac{1}{|S|}\text{Adj}(S) = -\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore 54S^{-1} = -\frac{54}{18}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -15 & 3 & 21 \\ 3 & 21 & -15 \\ 21 & -15 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore R^T + 54s^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & 3 & 21 \\ 3 & 21 & -15 \\ 21 & -15 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -12 & 7 & 26 \\ 8 & 27 & -8 \\ 28 & -7 & 12 \end{bmatrix}$ (Ans.)

13. $M = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & y^2 \\ x^2 & y^2 & 2xy \\ y^2 & 2xy & x^2 \end{bmatrix}$ [আদমজী ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, ঢাকা]

(খ) $x = 0$ এবং $y = 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $M^{-1} = M$

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $x = 0$ এবং $y = 1$

$\therefore M = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & y^2 \\ x^2 & y^2 & 2xy \\ y^2 & 2xy & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore |M| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 1(0-1) = -1 \neq 0$

$\therefore$ M এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান।

M এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স নির্ণয়-

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $M_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $M_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $M_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \text{Adj}(M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore M^{-1} = \frac{1}{|M|}\text{Adj}(M)$

$= -\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M$ (Proved)

নিজে করো

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ [Din.B'23]

(খ) A^{-1} নির্ণয় কর। [Ans: $\frac{1}{22}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -11 & -11 & 11 \\ 1 & -9 & 5 \end{bmatrix}$]

15. $M = \begin{bmatrix} a-5 & 2 \\ 2 & a-2 \end{bmatrix}$ [CB'23]

(ক) a এর মান কত হলে M একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হবে? [Ans: 6, 1]

16. (ক) $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 5 & x-2 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, x এর মান নির্ণয় কর। [DB'22] [Ans: 5, −3]

17. $N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ [Ctg.B'22]

(গ) $MN = I_3$ (অভেদক ম্যাট্রিক্স) হলে M ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। [Ans: $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -5 & 2 & -6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$]

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ [BB'22]

(গ) A^{-1} নির্ণয় কর। [Ans: $\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 10 & 1 & -4 \\ -5 & 4 & -1 \\ -5 & -2 & 8 \end{bmatrix}$]

Educationblog24.com

19. $B = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ [CB'22]

(খ) B^{-1} নির্ণয় কর। [Ans: $\frac{1}{22}\begin{bmatrix} -8 & 14 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 16 & -6 & -14 \end{bmatrix}$]

20. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ [Din.B'22]

(ক) $B = \begin{bmatrix} k+4 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$, B ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে k এর মান নির্ণয় কর। [Ans: -1]

(খ) A নির্ণয় কর। [Ans: $\frac{1}{23}\begin{bmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & -7 \\ 12 & -7 & -3 \end{bmatrix}$]

21. (ক) k-এর কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix} k+3 & -1 \\ k & k+2 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী হবে? [DB'21] [Ans: $-3 \pm \sqrt{3}$]

22. $A = \begin{bmatrix} 1+m & 2 & 3 \\ 2 & 3+m & 1 \\ 3 & 1 & 2+m \end{bmatrix}$ [RB'21]

(খ) $m = 0$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর। [Ans: $\frac{1}{18}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$]

23. $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ [Ctg.B'21]

(গ) C^{-1} নির্ণয় কর। [Ans: $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$]

24. (ক) $\begin{pmatrix} -a & 6 \\ 2 & -a+1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে a এর মান বের কর। [BB'21] [Ans: 4, -3]

25. দৃশ্যকল্প: $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ [JB'21]

(গ) এমন ম্যাট্রিক্স C নির্ণয় কর যেন, $BC = CB = I_3$ হয়।

[Ans: $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$]

26. $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ [CB'21]

(গ) C^{-1} নির্ণয় কর। [Ans: $\begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$]

27. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ [Din.B'21]

(ক) $\begin{bmatrix} x^2 & x \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর। [Ans: 0, -3]

(খ) $AB = BA = I_3$ হলে, B নির্ণয় কর; যেখানে B একটি 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স। [Ans: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$]

28. $x - y + z = 2 ; 2x + z = 5 ; x + 2y - 3z = -4$. [BB'19]

(গ) প্রদত্ত সমীকরণজোটের চলকসমূহের সহগগুলো নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

[Ans: $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$]

29. $A = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$ [JB'19]

(গ) $x = -1$ হলে, A^{-1} নির্ণয় কর।

[Ans: $\begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{-5}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-5}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{7}{8} \end{bmatrix}$]

30. দৃশ্যকল্প-১: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ [CB'19]

(গ) বিপরীতকরণ যোগ্যতা যাচাইপূর্বক A^{-1} নির্ণয় কর।

[Ans: $\begin{bmatrix} -26 & -7 & 12 \\ 11 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$]

31. $\vec{P} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{Q} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{R} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$. [RB'17]

(গ) উদ্দীপকে উল্লিখিত ভেক্টরগুলোর $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে A^{-1} নির্ণয় কর।

[Ans: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$]

32. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = A^t$ [Ctg.B'17]

(গ) B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

[Ans: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$]

33. $x + y + z = 1$ ..... (i) [JB'17]

$lx + my + nz = k$ ..... (ii)

$l^2x + m^2y + n^2z = k^2$ ..... (iii)

(গ) x, y, z এর সহগ নিয়ে গঠিত A একটি ম্যাট্রিক্স। A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর; যেখানে $l = 1, m = 2, n = -1$

[Ans: $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$]

Educationblog24.com

34. $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ [CB'17]

(ক) x এর যেসব মানের জন্য $\begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স ব্যতিক্রমী হবে তা নির্ণয় কর। [Ans: $0, \frac{10}{3}$]

(গ) D^{-1} নির্ণয় কর। [Ans: $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$]

35. $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ [Din.B'17]

(গ) M এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান থাকলে তা নির্ণয় কর।

[Ans: $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$]

36. দৃশ্যকল্প-১: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ [SB']

(খ) $A = B + C$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর।

[Ans: $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$]

T-08: নির্ণায়ক সম্বলিত অভেদ ও মান নির্ণয়

Concept

নির্ণায়ক সম্বলিত অভেদ	উদাহরণ
◆ কোনো নির্ণায়কের সারিগুলো এদের অনুরূপ কলামসমূহে পরিবর্তিত হলে এবং কলামগুলো ইহাদের অনুরূপ সারিসমূহে পরিবর্তিত হলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ বা, $\lvert A \rvert = \lvert A^T \rvert$
◆ কোনো নির্ণায়কের একটি সারি অথবা কলামের সবগুলো উপাদান শূন্য হলে নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে।	যেমন: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$
◆ কোনো নির্ণায়কে পাশাপাশি দুইটি সারি অথবা কলাম পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের চিহ্ন বদলে যায়।	যেমন: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ [r_1 ও r_2 এর স্থান বিনিময়]
◆ কোনো নির্ণায়কের দুটি সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলো অভিন্ন হলে এর মান শূন্য হবে।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$ কারণ, $r_1 \equiv r_3$ এবং $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ কারণ $c_1 \equiv c_2$.
◆ কোনো নির্ণায়কের যে কোনো সারি অথবা কলামের প্রত্যেক উপাদানকে একই রাশিদ্বারা গুণ করলে নির্ণায়কটির মানও ঐ রাশি দ্বারা গুণ হয়।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
◆ নির্ণায়কের কোনো সারি অথবা কলামের উপাদানগুলো অপর একটি সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলোর সমানুপাতিক হলে নির্ণায়কটির মান শূন্য।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & b_1 \\ a_2 & ka_2 & b_2 \\ a_3 & ka_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$
◆ নির্ণায়কটির কোনো সারি অথবা কলামের প্রতিটি উপাদান দুইটি রাশির সমষ্টি হিসেবে প্রকাশিত হলে, নির্ণায়কটিকে একই ক্রমের দুটি পৃথক নির্ণায়কের যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা হয়।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
◆ যদি দুইটি নির্ণায়ক এরূপ হয় যে, এদের প্রত্যেকের একটি মাত্র সারি অথবা কলামের উপাদানগুলো ভিন্ন হয়, তবে এই ভিন্ন সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলো একত্রে যোগ করে নির্ণায়ক দুটির সমষ্টি পাওয়া যায়।	ধরি, $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ও $D_2 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এদের শুধু প্রথম কলাম ভিন্ন। তাহলে, $D_1 + D_2 = \begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Educationblog24.com

নির্ণায়ক সম্বলিত অভেদ	উদাহরণ
♦ কোনো নির্ণায়কে কোনো সারি অথবা কলামের উপাদানগুলো একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করে অপর কোনো সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলোর সাথে যোগ/ বিয়োগ করলে, নির্ণায়কটির মানের পরিবর্তন হয় না।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm xb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm xb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm xb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; [c_1' = c_1 \pm xc_2]$
♦ কোনো নির্ণায়কের পাশাপাশি 2 টি সারি/কলাম এর ভুক্তিগুলো যদি সমান্তর প্রগমনে থাকে এবং অপর 2 টি সারি/কলাম এর ভুক্তিগুলোও যদি সমান্তর প্রগমনে থাকে, তাহলে উক্ত নির্ণায়কের মান 0 হবে।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a & a+d & a+2d \\ b & b+d & b+2d \\ c & c+d & c+2d \end{vmatrix} = 0$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. দৃশ্যকল্প-২: $D = 8\begin{vmatrix} \frac{p-q-r}{2} & p & p \\ q & \frac{q-r-p}{2} & q \\ r & r & \frac{r-p-q}{2} \end{vmatrix}$ **[DB'23]**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে প্রমাণ কর যে, $D = S^3$ যেখানে $S = p + q + r$.

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $D = 8\begin{vmatrix} \frac{p-q-r}{2} & p & p \\ q & \frac{q-r-p}{2} & q \\ r & r & \frac{r-p-q}{2} \end{vmatrix}$

$= 8\begin{vmatrix} \frac{p+q+r}{2} & \frac{p+q+r}{2} & \frac{p+q+r}{2} \\ q & \frac{q-r-p}{2} & q \\ r & r & \frac{r-p-q}{2} \end{vmatrix}$ $[r'_1 \to r_1 + r_2 + r_3$ করে$]$

$= 8 \times \frac{1}{2}(p+q+r)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q & \frac{q-r-p}{2} & q \\ r & r & \frac{r-p-q}{2} \end{vmatrix}$

$= 4(p+q+r)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ q & \frac{-q-r-p}{2} & q \\ r & 0 & \frac{r-p-q}{2} \end{vmatrix}$ $[c'_2 \to c_2 - c_1$ করে$]$

$= 4(p+q+r)\left\{\frac{-q-r-p}{2}\left(\frac{r-p-q}{2} - r\right)\right\}$

$= 4(p+q+r)\left(\frac{-q-r-p}{2} \times \frac{-r-p-q}{2}\right)$

$= 4(p+q+r) \times \frac{-(p+q+r)}{2} \times \frac{-(p+q+r)}{2} = (p+q+r)^3$

$\therefore D = (p+q+r)^3 = S^3$

[$\because S = p + q + r$ দেওয়া আছে] (প্রমাণিত)

02. দৃশ্যকল্প- ২: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}$. **[RB'23]**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ ব্যবহার করে দেখাও যে, $\Delta + \Delta_1 = 0$.

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}$

এখন, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} r'_1 = r_1 - r_2 \\ r'_2 = r_2 - r_3 \end{bmatrix}$

$= (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & y+z \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

$= (x-y)(y-z)(y+z-x-y)$

$= (x-y)(y-z)(z-x)$

আবার, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ yz-zx & zx-xy & xy \\ x-y & y-z & z \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} c'_1 = c_1 - c_2 \\ c'_2 = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ z(y-x) & -x(y-z) & xy \\ x-y & y-z & z \end{vmatrix}$

$= (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -z & -x & xy \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = -(x-y)(y-z)(z-x)$

এখন প্রশ্নমতে, $\Delta + \Delta_1 = (x-y)(y-z)(z-x)$

$-(x-y)(y-z)(z-x) = 0 \therefore \Delta + \Delta_1 = 0$ **(Showed)**

03. (ক) বিস্তার না করে $\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় কর। **[Ctg.B'23]**

(ক) **Sol^n:** $\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & 1 & b+c \\ a+b+c & 1 & c+a \\ a+b+c & 1 & a+b \end{vmatrix}$ $[c'_1 = c_1 + c_3]$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b+c) \times 0 = 0.$

Educationblog24.com

04. (ক) বিস্তার না করে $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\6&7&8\end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় কর। [SB'23]

(ক) **Sol^n:** $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\6&7&8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1\\4&1&1\\6&1&1\end{vmatrix} = 0$ **(Ans.)**

$[c_3' = c_3 - c_2, c_2' = c_2 - c_1]$

[নির্ণায়কে যেকোনো দুটি কলমের অনুরূপ ভুক্তিগুলো সমান হলে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।]

05. $px + qy + rz = 1$; $p^2x + q^2y + r^2z = a$;
$(p^3 - 1)x + (q^3 - 1)y + (r^3 - 1)z = a^2$. [SB'23]

(খ) উদ্দীপকের সমীকরণগুলোকে $AX = B$ আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে, $pqr = 1$, যখন $\text{Det}(A) = 0$ এবং $p \neq q \neq r$.

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $px + qy + rz = 1$,
$p^2x + q^2y + r^2z = a$ এবং
$(p^3 - 1)x + (q^3 - 1)y + (r^3 - 1)z = a^2$

$$\therefore \begin{bmatrix}p&q&r\\p^2&q^2&r^2\\p^3-1&q^3-1&r^3-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\a\\a^2\end{bmatrix}$$

যেখানে, $A = \begin{bmatrix}p&q&r\\p^2&q^2&r^2\\p^3-1&q^3-1&r^3-1\end{bmatrix}$

$$\therefore \text{Det}(A) = \begin{vmatrix}p&q&r\\p^2&q^2&r^2\\p^3-1&q^3-1&r^3-1\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}p&q&r\\p^2&q^2&r^2\\p^3&q^3&r^3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}p&q&r\\p^2&q^2&r^2\\1&1&1\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow pqr\begin{vmatrix}1&1&1\\p&q&r\\p^2&q^2&r^2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}p&q&r\\p^2&q^2&r^2\\1&1&1\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow pqr\begin{vmatrix}1&1&1\\p&q&r\\p^2&q^2&r^2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}p&q&r\\1&1&1\\p^2&q^2&r^2\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow pqr\begin{vmatrix}1&1&1\\p&q&r\\p^2&q^2&r^2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&1&1\\p&q&r\\p^2&q^2&r^2\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (pqr-1)\begin{vmatrix}1&1&1\\p&q&r\\p^2&q^2&r^2\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (pqr-1)\begin{vmatrix}0&0&1\\p-q&q-r&r\\p^2-q^2&q^2-r^2&r^2\end{vmatrix} = 0$$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$$\Rightarrow (pqr-1)(p-q)(q-r)\begin{vmatrix}0&0&1\\1&1&r\\p+q&q+r&r^2\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (pqr-1)(p-q)(q-r)(q+r-p-q) = 0$$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে]

$$\Rightarrow (pqr-1)(p-q)(q-r)(r-p) = 0$$

$\Rightarrow pqr - 1 = 0$ $[(p-q)(q-r)(r-p) \neq 0, \because p \neq q \neq r]$

$\therefore pqr = 1$ **(Showed)**

06. সমীকরণ জোট: $tx + uy + vz = 5$, [BB'23]
$t^2x + u^2y + v^2z = 5$ এবং
$(t^3 - 1)x + (u^3 - 1)y + (v^3 - 1)z = -5$

(গ) x, y, z এর সহগগুলো দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক D হলে প্রমাণ কর, $D = (tuv - 1)(t - u)(u - v)(v - t)$।

(গ) **Sol^n:** x, y, z এর সহগগুলো দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক,

$$D = \begin{vmatrix}t&u&v\\t^2&u^2&v^2\\t^3-1&u^3-1&v^3-1\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}t&u&v\\t^2&u^2&v^2\\t^3&u^3&v^3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}t&u&v\\t^2&u^2&v^2\\1&1&1\end{vmatrix}$$

$$= tuv\begin{vmatrix}1&1&1\\t&u&v\\t^2&u^2&v^2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&1&1\\t&u&v\\t^2&u^2&v^2\end{vmatrix}$$

$$= (tuv-1)\begin{vmatrix}1&1&1\\t&u&v\\t^2&u^2&v^2\end{vmatrix}$$

$$= (tuv-1)\begin{vmatrix}1-1&1-1&1\\t-u&u-v&v\\t^2-u^2&u^2-v^2&v^2\end{vmatrix}$$

$[\because c_1' = c_1 - c_2\ c_2' = c_2 - c_3]$

$$= (tuv-1)\begin{vmatrix}0&0&1\\t-u&u-v&v\\(t+u)(t-u)&(u-v)(u+v)&v^2\end{vmatrix}$$

$$= (tuv-1)(t-u)(u-v)\begin{vmatrix}0&0&1\\1&1&v\\t+u&u+v&v^2\end{vmatrix}$$

$$= (tuv-1)(t-u)(u-v)(u+v-t-u)$$

$$= (tuv-1)(t-u)(u-v)(v-t)$$ (প্রমাণিত)

07. $C = \begin{pmatrix}(m+n)^2&l^2&l^2\\m^2&(n+l)^2&m^2\\n^2&n^2&(l+m)^2\end{pmatrix}$ [JB'23]

(গ) দেখাও যে, $|C| = 2lmn(l + m + n)^3$.

(গ) **Sol^n:** $|C| = \begin{vmatrix}(m+n)^2&l^2&l^2\\m^2&(n+l)^2&m^2\\n^2&n^2&(l+m)^2\end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix}(m+n)^2-l^2&l^2-l^2&l^2\\m^2-m^2&(n+l)^2-m^2&m^2\\n^2-(l+m)^2&n^2-(l+m)^2&(l+m)^2\end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_3$ এবং $c_2' = c_2 - c_3]$

$$= \begin{vmatrix}(m+n+l)(m+n-l)&0&l^2\\0&(m+l+n)(n+l-m)&m^2\\(n+l+m)(n-l-m)&(n+l+m)(n-l-m)&(l+m)^2\end{vmatrix}$$

$$= (m+n+l)^2\begin{vmatrix}m+n-l&0&l^2\\0&-m+n+l&m^2\\-m+n-l&-m+n-l&(l+m)^2\end{vmatrix}$$

$$= (m+n+l)^2\begin{vmatrix}m+n-l&0&l^2\\0&-m+n+l&m^2\\-2m&-2l&2ml\end{vmatrix}$$

$[r_3' = r_3 - r_1 - r_2]$

Educationblog24.com

$$= 2(m+n+l)^2\begin{vmatrix} m+n-l & 0 & l^2 \\ 0 & -m+n+l & m^2 \\ -m & -l & ml \end{vmatrix}$$

$$= 2(m+n+l)^2\begin{vmatrix} m+n & \frac{l^2}{m} & l^2 \\ \frac{m^2}{l} & n+l & m^2 \\ 0 & 0 & ml \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 + \frac{c_3}{l} \\ c_2' = c_2 + \frac{c_3}{m} \end{bmatrix}$$

$= 2(m+n+l)^2\, ml\{(m+n)(n+l) - ml\}$
[৩য় সারি বরাবর বিস্তার করে]
$= 2(m+n+l)^2 \cdot ml(mn + ml + n^2 + nl - ml)$
$= 2(m+n+l)^2 \cdot mln(m+n+l)$
$= 2mnl(m+n+l)^3$ **(Showed)**

08. $A = \begin{pmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{pmatrix}$ **[MB'23]**

(ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = 0$

(খ) দেখাও যে, $\det A = (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$.

(ক) **Sol^n:** $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & abc & abc(b+c) \\ b & abc & abc(c+a) \\ c & abc & abc(a+b) \end{vmatrix} = \frac{abc\cdot abc}{abc}\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (abc)\begin{vmatrix} a+b+c & 1 & b+c \\ a+b+c & 1 & c+a \\ a+b+c & 1 & a+b \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 + c_3]$$

$$= (abc)(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$= (abc)(a+b+c) \times 0 = 0$ **[Proved]**
[∵ একটি নির্ণায়কের দুটি কলাম একই হলে তার মান শূন্য হয়]

(খ) **Sol^n:** $\det A = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 - b^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 - c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 - c_2]$$

$$= \begin{vmatrix} (b+c-a)(a+b+c) & a^2 & bc \\ (c+a-b)(a+b+c) & b^2 & ca \\ (a+b-c)(a+b+c) & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} b+c-a & a^2 & bc \\ c+a-b & b^2 & ca \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -2(a-b) & a^2-b^2 & -c(a-b) \\ -2(b-c) & b^2-c^2 & -a(b-c) \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2;\ r_2' = r_2 - r_3]$

$$= (a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & a-c & -c+a \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2]$

$$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)[-(-1)(-2ab + a^2 + ab - ca) - \{-2c^2 - (b+c)(a+b-c)\}]$
$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)[-2ab + a^2 + ab - ca + 2c^2 + ab + ca + b^2 - c^2]$
$= (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$
(Showed)

09. $B = \begin{bmatrix} p^2 & qr & 2p \\ q^2 & rp & 2q \\ r^2 & pq & 2r \end{bmatrix}$. **[Din.B'23]**

(গ) প্রমাণ কর যে, $|B| = -2(p-q)(q-r)(p-r)(pq+qr+rp)$.

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} p^2 & qr & 2p \\ q^2 & rp & 2q \\ r^2 & pq & 2r \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} p^2-q^2 & qr-rp & 2p-2q \\ q^2-r^2 & rp-pq & 2q-2r \\ r^2 & pq & 2r \end{bmatrix}$$

$[\because r_1' = r_1 - r_2 \text{ ও } r_2' = r_2 - r_3]$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} (p-q)(p+q) & -r(p-q) & 2(p-q) \\ (q-r)(q+r) & -p(q-r) & 2(q-r) \\ r^2 & pq & 2r \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = 2(p-q)(q-r)\begin{bmatrix} p+q & -r & 1 \\ q+r & -p & 1 \\ r^2 & pq & r \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = 2(p-q)(q-r)\begin{bmatrix} p+q-q-r & p-r & 1-1 \\ q+r & -p & 1 \\ r^2 & pq & r \end{bmatrix}$$

$[\because r_1' = r_1 - r_2]$

$$\Rightarrow B = 2(p-q)(q-r)\begin{bmatrix} p-r & p-r & 0 \\ q+r & -p & 1 \\ r^2 & pq & r \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = 2(p-q)(q-r)(p-r)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ q+r & -p & 1 \\ r^2 & pq & r \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = 2(p-q)(q-r)(p-r)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q+r & -p-q-r & 1 \\ r^2 & pq-r^2 & r \end{bmatrix}$$

$[\because c_2' = c_2 - c_1]$

$\Rightarrow |B| = 2(p-q)(q-r)(p-r)\{1(-pr - qr - r^2 - pq + r^2)\}$
$\therefore |B| = -2(p-q)(q-r)(p-r)(pq+qr+rp)$
(প্রমাণিত)

Educationblog24.com

10. $P = \begin{bmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{bmatrix}$ [CB'23]

(গ) দেখাও যে, $|P| = (c-a)(a^2+b^2+c^2)$।

(গ) **Sol^n:** $|P| = \begin{vmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b+c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & a-c & -c+a \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$ $[r_1' = r_1 - r_2]$

$= (c-a)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= (c-a)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & a+b+c & -a \\ a+b-c & c^2-ab & ab \end{vmatrix}$ $[c_2' = c_2 - c_3]$

$= (c-a)(-1)\begin{vmatrix} -2 & a+b+c \\ a+b-c & c^2-ab \end{vmatrix}$

$= (c-a)(-1)\{(-2)(c^2-ab) - (a+b+c)(a+b-c)\}$

$= (c-a)\{2c^2 - 2ab + (a+b)^2 - c^2\}$

$= (c-a)(a^2+b^2+c^2)$ **(Showed)**

11. $M = \begin{bmatrix} p-q-r & 2q & 2r \\ 2p & q-r-p & 2r \\ 2p & 2q & r-p-q \end{bmatrix}$ [DB'22]

(খ) প্রমাণ কর যে, $|M| = (p+q+r)^3$.

(খ) **Sol^n:** এখানে, $|M| = \begin{vmatrix} p-q-r & 2q & 2r \\ 2p & q-r-p & 2r \\ 2p & 2q & r-p-q \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} p+q+r & 2q & 2r \\ p+q+r & q-r-p & 2r \\ p+q+r & 2q & r-p-q \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$= (p+q+r)\begin{vmatrix} 1 & 2q & 2r \\ 1 & q-r-p & 2r \\ 1 & 2q & r-p-q \end{vmatrix}$

$= (p+q+r)\begin{vmatrix} 0 & p+q+r & 0 \\ 0 & -(p+q+r) & p+q+r \\ 1 & 2q & r-p-q \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$|M| = (p+q+r).1\begin{vmatrix} p+q+r & 0 \\ -(p+q+r) & p+q+r \end{vmatrix}$

[১ম কলাম বরাবর বিস্তার করে]

$= (p+q+r)\{(p+q+r)(p+q+r) - 0\}$

$\therefore |M| = (p+q+r)^3$ (প্রমাণিত)

12. $B = \begin{bmatrix} 2+x & b+x & c+x \\ 2+y & b+y & c+y \\ 4 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ [RB'22]

(খ) দেখাও যে, $\det(B) = (2-b)(b-c)(c-2)(x-y)$

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 2+x & b+x & c+x \\ 2+y & b+y & c+y \\ 4 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$

$\therefore \det(B) = \begin{vmatrix} 2+x & b+x & c+x \\ 2+y & b+y & c+y \\ 4 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2-b & b-c & c+x \\ 2-b & b-c & c+y \\ 4-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2,\ c_2' = c_2 - c_3]$

$= \begin{vmatrix} 2-b & b-c & c+x \\ 2-b & b-c & c+y \\ (2+b)(2-b) & (b+c)(b-c) & c^2 \end{vmatrix}$

$= (2-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c+x \\ 1 & 1 & c+y \\ 2+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$

$= (2-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & x-y \\ 1 & 1 & c+y \\ 2+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$ $[r_1' = r_1 - r_2]$

$= (2-b)(b-c)\{0 + 0 + (x-y)(b+c-2-b)\}$

$= (2-b)(b-c)\{(x-y)(c-2)\}$

$\therefore \det(B) = (2-b)(b-c)(c-2)(x-y)$ **(Showed)**

13. $A = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^4-2a & b^4-2b & c^4-2c \end{bmatrix}$ [Ctg.B'22]

(গ) প্রমাণ কর যে, $\det(A) = abc(abc-2)(a-b)(b-c)(c-a)$.

(গ) **Sol^n:** $|A| = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^4-2a & b^4-2b & c^4-2c \end{vmatrix}$

$= abc\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3-2 & b^3-2 & c^3-2 \end{vmatrix}$

$= abc\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} - abc\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= abc \times abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} - abc \times 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= abc(abc-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= abc(abc-2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 - c_2]$ $[c_2' = c_2 - c_3]$

$= abc(abc-2)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix}$

$= abc(abc-2)(a-b)b-c)(b+c-a-b)$

$= abc(abc-2)(a-b)(b-c)(c-a)$ (প্রমাণিত)

14. (ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & a & a-2 \\ 2 & b & b-4 \\ 3 & c & c-6 \end{vmatrix} = 0$

[BB'22]

Educationblog24.com

(ক) Sol^n: $\begin{vmatrix}1 & a & a-2\\2 & b & b-4\\3 & c & c-6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & a & a-2\\b & b & b-4\\c & c & c-6\end{vmatrix}$ $[c_1' = 2c_1 + c_3]$

$= \begin{vmatrix}0 & a & a-2\\0 & b & b-4\\0 & c & c-6\end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 - c_2]$

যেহেতু, নির্ণায়কটির একটি কলামের সকল ভুক্তি শূন্য, তাই নির্ণায়কটির মান শূন্য (প্রমাণিত)

15. $U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a^3+1 & 2b^3+1 & 2c^3+1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$. [JB'22]

(ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর $\begin{vmatrix}a & -x & a+x\\b & -y & b+y\\c & -z & c+z\end{vmatrix} = 0$.

(গ) প্রমাণ কর যে, $|U| = -(2abc-1)(a-b)(b-c)(c-a)$.

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, $\begin{vmatrix}a & -x & a+x\\b & -y & b+y\\c & -z & c+z\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}a & -x & a\\b & -y & b\\c & -z & c\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a & -x & x\\b & -y & y\\c & -z & z\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}0 & -x & a\\0 & -y & b\\0 & -z & c\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a & 0 & x\\b & 0 & y\\c & 0 & z\end{vmatrix}$

$[C_1' = C_1 - C_3]\ [C_2' = C_2 + C_3]$

$= 0 + 0 = 0$ (প্রমাণিত)

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a^3+1 & 2b^3+1 & 2c^3+1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$

$\therefore |U| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a^3+1 & 2b^3+1 & 2c^3+1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a^3 & 2b^3 & 2c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= 2abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= 2abc\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \\ a-b & b-c & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & b-c & c \\ 0 & 0 & 1 \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= 2abc(b-c)(a-b)\begin{vmatrix} a+b & b+c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$

$= 2abc(b-c)(a-b)(a+b-b-c) + (a-b)(b-c)(b+c-a-b)$

$= 2abc(b-c)(a-b)(a-c) + (a-b)(b-c)(c-a)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(-2abc+1)$

$= -(2abc-1)(a-b)(b-c)(c-a)$ (প্রমাণিত)

16. $B = \begin{vmatrix} a^2 & bc & ca+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$ [MB'22]

(গ) প্রমাণ কর যে, $|B| = 4a^2b^2c^2$.

(গ) Sol^n: L.H.S $= |B| = \begin{vmatrix} a^2 & bc & ca+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2(a^2+ab) & 2(b^2+bc) & 2(c^2+ca) \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 + r_2 + r_3$ প্রয়োগ করে]

$= 2\begin{vmatrix} 0 & bc & c^2 \\ a^2 & -bc & ca-c^2 \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2$ এবং $r_2' = r_2 - r_3$ প্রয়োগ করে]

$= 2abc\begin{vmatrix} 0 & c & c \\ a & -c & a-c \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$

$= 2abc\{0 - a(c^2 - bc - c^2) + b(ca - c^2 + c^2)\}$

$= 2abc\{abc + abc\} = (2abc)(2abc)$

$= 4a^2b^2c^2 =$ R.H.S (প্রমাণিত)

17. দৃশ্যকল্প-২: $\Delta = \begin{vmatrix} (s-x)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (s-y)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (s-z)^2 \end{vmatrix}$ [DB'21]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ, যদি $s = x + y + z$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\Delta = 2xyzs^3$.

(গ) Sol^n: $\begin{vmatrix} (s-x)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (s-y)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (5-z)^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} (y+z+x)(y+z-x) & 0 & x^2 \\ 0 & (x+y+z)(x-y+z) & y^2 \\ (z-x-y)(z+x+y) & (z-x-y)(z+x+y) & (x+y)^2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_3 ; c_2' = c_2 - c_3]$

$= (x+y+z)^2\begin{vmatrix} y+z-x & 0 & x^2 \\ 0 & x-y+z & y^2 \\ z-x-y & z-x-y & (x+y)^2 \end{vmatrix}$

$= (x+y+z)^2\begin{vmatrix} y+z-x & 0 & x^2 \\ 0 & x+z-y & y^2 \\ -2y & -2x & 2xy \end{vmatrix}$

$[r_3' = r_3 - r_1 - r_2]$

১ম সারির সাপেক্ষে বিস্তার করে, $(x+y+z)^2[(y+z-x)\{2xy(x+z-y) + 2xy^2\} + x^2(2y)(x+z-y)]$

$= (x+y+z)^2[(y+z-x)(2x^2y + 2xyz - 2xy^2) + 2yx^3 + 2yx^2z - 2y^2x^2]$

$= 2(x+y+z)^2[x^2y^2 + xy^2z + x^2yz + xyz^2 - x^3y - x^2yz + x^3y + x^2yz - x^2y^2]$

$= 2(x+y+z)^2[xy^2z + x^2yz + xyz^2]$

$= 2xyz(x+y+z)^3 = 2xyzs^3$ **(Proved)**

Educationblog24.com

18. (ক) প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & p & p^2\\ 1 & p^2 & p^4\end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$ [RB'21]

(ক) **Sol^n:** $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & p & p^2\\ 1 & p^2 & p^4\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & p-1 & p^2-1\\ 0 & p^2-1 & p^4-1\end{vmatrix}$ $[r_2' = r_2 - r_1,\ r_3' = r_3 - r_1]$

১ম কলামের সাপেক্ষে বিস্তার করে

$= \begin{vmatrix}(p-1) & (p-1)(p+1)\\ (p-1)(p+1) & (p-1)(p+1)(p^2+1)\end{vmatrix}$

$= (p+1)(p-1)^2\begin{vmatrix}1 & 1\\ p+1 & p^2+1\end{vmatrix}$

$= (p+1)(p-1)^2(p^2+1-p-1)$

$= p(p-1)^2(p^2-1)$ **(Proved)**

19. $P = \begin{bmatrix}1+x^2-y^2 & 2xy & 2y\\ 2xy & 1-x^2+y^2 & -2x\\ -2y & 2x & 1-x^2-y^2\end{bmatrix}$ [RB'21]

(খ) $\det(P) = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = -1$.

(খ) **Sol^n:**

$$\det(P) = \begin{vmatrix}1+x^2-y^2 & 2xy & 2y\\ 2xy & 1-x^2+y^2 & -2x\\ -2y & 2x & 1-x^2-y^2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1+x^2+y^2 & 0 & 2y\\ 0 & 1+x^2+y^2 & -2x\\ -y(1+x^2+y^2) & x(1+x^2+y^2) & 1-x^2-y^2\end{vmatrix}$$ $[c_1' = c_1 + yc_3,\ c_2' = c_2 - xc_3]$

$$= (1+x^2+y^2)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 2y\\ 0 & 1 & -2x\\ -y & x & 1-x^2-y^2\end{vmatrix}$$

১ম সারির সাপেক্ষে বিস্তার করে,

$= (1+x^2+y^2)^2\{1-x^2-y^2+2x^2+2y^2\}$

$= (1+x^2+y^2)^3$

প্রশ্নমতে, $(1+x^2+y^2)^3 = 0 \Rightarrow x^2+y^2+1=0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = -1$ (প্রমাণিত)

20. $B = \begin{bmatrix}p & q & r\\ p^2 & q^2 & r^2\\ p^3-1 & q^3-1 & r^3-1\end{bmatrix}$ [Ctg.B'21]

(খ) দেখাও যে, $|B| = (pqr-1)(p-q)(q-r)(r-p)$.

(খ) **Sol^n:** $|B| = \begin{vmatrix}p & q & r\\ p^2 & q^2 & r^2\\ p^3-1 & q^3-1 & r^3-1\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}p-q & q-r & r\\ p^2-q^2 & q^2-r^2 & r^2\\ p^3-q^3 & q^3-r^3 & r^3-1\end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 - c_2;\ c_2' = c_2 - c_3]$

$= \begin{vmatrix}p-q & q-r & \\ (p-q)(p+q) & (q-r)(q+r) & r^2\\ (p-q)(p^2+pq+q^2) & (q-r)(q^2+qr+r^2) & r^3-1\end{vmatrix}$

$= (p-q)(q-r)\begin{vmatrix}1 & 1 & r\\ p+q & q+r & r^2\\ p^2+pq+q^2 & q^2+qr+r^2 & r^3-1\end{vmatrix}$

$= (p-q)(q-r)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ p+q & r-p & -qr\\ p^2+pq+r^2 & (r^2+qr-p^2-pq) & (-q^2r-qr^2-1)\end{vmatrix}$ $[c_2' = c_2 - c_1;\ c_3' = c_3 - rc_2]$

$= (p-q)(q-r)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ p+q & r-p & -qr\\ p^2+pq+r^2 & (r-p)(r+p+q) & -q^2r-qr^2-1\end{vmatrix}$

$= (r-p)(p-q)(q-r)\begin{vmatrix}1 & -qr\\ p+q+r & -q^2r-qr^2-1\end{vmatrix}$

$= (p-q)(q-r)(r-p)\{-q^2r-qr^2-1+pqr+q^2r+qr^2\}$

$= (pqr-1)(p-q)(q-r)(r-p)$ **[Showed]**

21. $A = \begin{bmatrix}p & q & r\\ p^2 & q^2 & r^2\\ p^3 & q^3 & r^3\end{bmatrix}$ [BB'21]

(খ) প্রমাণ কর যে, $|A| = pqr(p-q)(q-r)(r-p)$.

(খ) **Sol^n:** L. H. S $= \begin{vmatrix}p & q & r\\ p^2 & q^2 & r^2\\ p^3 & q^3 & r^3\end{vmatrix} = pqr\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ p & q & r\\ p^2 & q^2 & r^2\end{vmatrix}$

$= pqr\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ p & q-p & r-p\\ p^2 & q^2-p^2 & r^2-p^2\end{vmatrix}$ $[c_2' = c_2 - c_1,\ c_3' = c_3 - c_1]$

$= pqr(q-p)(r-p)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ p & 1 & 1\\ p^2 & p+q & r+p\end{vmatrix}$

$= pqr(q-p)(r-p)(r+p-p-q)$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে

$= pqr(q-p)(r-p)(r-q)$

$= pqr(p-q)(q-r)(r-p)$ = R. H. S **(Proved)**

22. $R = \begin{bmatrix}a & b & a+b+2c\\ b & b+c+2a & c\\ c+a+2b & a & c\end{bmatrix}$ [CB'21

(গ) প্রমাণ কর যে, $|R| = 2(a+b+c)^3$

(গ) **Sol^n:** L. H. S $= |R|$

$= \begin{vmatrix}a & b & a+b+2c\\ b & b+c+2a & c\\ c+a+2b & a & c\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}2(a+b+c) & b & a+b+2c\\ 2(a+b+c) & b+c+2a & c\\ 2(a+b+c) & a & c\end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

Educationblog24.com

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & b & a+b+2c\\ 1 & b+c+2a & c\\ 1 & a & c\end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & b & a+b+2c\\ 0 & c+2a & -(a+b+c)\\ 0 & a-b & -(a+b+c)\end{vmatrix}$$

$[r_2' = r_2 - r_1;\ r_3' = r_3 - r_1]$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix}c+2a & -(a+b+c)\\ a-b & -(a+b+c)\end{vmatrix}$$

$$= -2(a+b+c)^2\begin{vmatrix}c+2a & 1\\ a-b & 1\end{vmatrix}$$

$= -2(a+b+c)^2(c+2a-a+b) = -2(a+b+c)^3$

[Note: প্রশ্নের (গ) হতে R.H.S $= -2(a+b+c)^3$ হবে]

$=$ R.H.S (প্রমাণিত)

23. (ক) বিস্তার না করে $\begin{vmatrix}y+z & x & 1\\ z+x & y & 1\\ x+y & z & 1\end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান নির্ণয় কর। [Din.B'21]

(ক) Sol^n: $\begin{vmatrix}y+z & x & 1\\ z+x & y & 1\\ x+y & z & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x+y+z & x & 1\\ x+y+z & y & 1\\ x+y+z & z & 1\end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 + c_2]$

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix}1 & x & 1\\ 1 & y & 1\\ 1 & z & 1\end{vmatrix}$$

$= (x+y+z) \times 0 = 0$ (Ans.)

24. দৃশ্যকল্প: $\left.\begin{aligned} x+y+z &= 3\\ x+ay+a^2z &= \ell\\ x+a^2y+a^4z &= m\end{aligned}\right\}$ [MB'21]

(ক) প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix}x+y & 3(y+z) & z+x\\ 1 & 3 & 1\\ z & 3x & y\end{vmatrix} = 0.$

(খ) সমীকরণগুলোকে $AX = B$ আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে, $\text{Det}(A) = a(a-1)^2(a^2-1)$.

(ক) Sol^n: $\begin{vmatrix}x+y & 3(y+z) & z+x\\ 1 & 3 & 1\\ z & 3x & y\end{vmatrix}$

$$= 3\begin{vmatrix}x+y & y+z & z+x\\ 1 & 1 & 1\\ z & x & y\end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix}x+y+z & y+z+x & z+x+y\\ 1 & 1 & 1\\ z & x & y\end{vmatrix}\ [r_1' = r_1 + r_3]$$

$$= 3(x+y+z)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ z & x & y\end{vmatrix}$$

$= 3(x+y+z) \times 0\ [r_1 = r_2] = 0$ (Proved)

(খ) Sol^n: $x+y+z = 3,\ x+ay+a^2z = \ell,$

$x+a^2y+a^4z = m$

$AX = B$ আকার হবে: $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ \ell\\ m\end{bmatrix}$

$$\therefore \det(A) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a^4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a-1 & a^2-1\\ 1 & a^2-1 & a^4-1\end{vmatrix}$$

$[c_2' = c_2 - c_1;\ c_3' = c_3 - c_1]$

$$= \begin{vmatrix}a-1 & (a-1)(a+1)\\ (a-1)(a+1) & (a-1)(a+1)(a^2+1)\end{vmatrix}$$

$$= (a-1)(a-1)(a+1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ a+1 & a^2+1\end{vmatrix}$$

$= (a-1)^2(a+1)(a^2+1-a-1)$

$= a(a-1)^2(a^2-1)$ (Showed)

25. (ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}xy(x+y) & yz(y+z) & zx(z+x)\\ xy & yz & zx\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$= xyz\begin{vmatrix}x+y & y+z & z+x\\ 1 & 1 & 1\\ z & x & y\end{vmatrix}$$ [SB'19]

(ক) Sol^n: $\begin{vmatrix}xy(x+y) & yz(y+z) & zx(z+x)\\ xy & yz & zx\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix}xyz(x+y) & xyz(y+z) & xyz(z+x)\\ xyz & xyz & xyz\\ z & x & y\end{vmatrix}$$

$$= \frac{(xyz)^2}{xyz}\begin{vmatrix}x+y & y+z & z+x\\ 1 & 1 & 1\\ z & x & y\end{vmatrix}$$

$$= xyz\begin{vmatrix}x+y & y+z & z+x\\ 1 & 1 & 1\\ z & x & y\end{vmatrix}$$ (Proved)

26. (ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix}2 & a & 6-a\\ 3 & b & 9-b\\ 9 & c & 27-c\end{vmatrix} = 0.$ [Din.B'19]

(ক) Sol^n: $\begin{vmatrix}2 & a & 6-a\\ 3 & b & 9-b\\ 9 & c & 27-c\end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix}6 & a & 6-a\\ 9 & b & 9-b\\ 27 & c & 27-c\end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\begin{vmatrix}6-a & a & 6-a\\ 9-b & b & 9-b\\ 27-c & c & 27-c\end{vmatrix}\ [c_1' = c_1 - c_2]$$

$= 0$ (Proved)

27. $x+y+z = 1 \ldots\ldots\ldots$ (i) [JB'17]

$lx+my+nz = k \ldots\ldots\ldots$ (ii)

$l^2x+m^2y+n^2z = k^2 \ldots\ldots\ldots$ (iii)

(খ) সমীকরণগুলোকে $AX = B$ আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে, $\det(A) = (l-m)(m-n)(n-l)$.

(খ) Sol^n: $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ l & m & n\\ l^2 & m^2 & n^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ k\\ k^2\end{bmatrix}$

$$\therefore A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ l & m & n\\ l^2 & m^2 & n^2\end{bmatrix}$$

$$\therefore \det(A) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ l & m & n\\ l^2 & m^2 & n^2\end{vmatrix}$$

Educationblog24.com

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ l-m & m-n & n \\ l^2-m^2 & m^2-n^2 & n^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c'_1 = c_1 - c_2 \\ c'_2 = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} l-m & m-n \\ (l+m)(l-m) & (m+n)(m-n) \end{vmatrix}$$

$$= (l-m)(m-n)(m+n-l-m)$$

$$= (l-m)(m-n)(n-l)$$ **(Showed)**

28. $P = \begin{bmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ [রংপুর ক্যাডেট কলেজ]

(খ) দেখাও যে, $|P| = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$

(খ) **Sol^n:** $P = \begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a-b & b-c & c+x \\ a-b & b-c & c+y \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c+x \\ 1 & 1 & c+y \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-y)(b+c-a-b)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$$ **(Showed)**

29. $F(x) = 2x^2 - 3$ এবং $P = \begin{bmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{bmatrix}$

[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ]

(গ) প্রমাণ কর যে, $\frac{|P|}{a^2+b^2+c^2} = (a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $P = \begin{bmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{bmatrix} = |P|$

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2-b^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2-c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} [c'_1 = c_1 - c_2]$$

$$= \begin{bmatrix} (b+c-a)(b+c+a) & a^2 & bc \\ (c+a-b)(c+a+b) & b^2 & ca \\ (a+b-c)(a+b+c) & c^2 & ab \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} b+c-a & a^2 & bc \\ c+a-b & b^2 & ca \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 2b-2a & a^2-b^2 & bc-ca \\ 2c-2b & b^2-c^2 & ca-ab \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$[r'_1 = r_1 - r_2; r'_2 = r_2 - r_3]$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 2(b-a) & (a+b)(a-b) & -c(a-b) \\ 2(c-b) & (b+c)(b-c) & -a(b-c) \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & a-c & -c+a \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$[r'_1 = r'_1 - r_2]$

$$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)\{(-2ab+a^2+ab-ac)-(-2c^2-ab-b^2+bc-ac-bc+c)\}$$

$$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)(-ab+a^2-ac+2c^2+ab+b^2-bc+ac+bc-c^2)$$

$$= (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\therefore \frac{|P|}{a^2+b^2+c^2} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

(Proved)

30. $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$Q = \begin{bmatrix} ap^3-m^3 & aq^3-m^3 & ar^3-m^3 \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p & q & r \end{bmatrix}$ [ঢাকা কলেজ]

(গ) প্রমাণ কর যে,

$|Q| = (apqr - m^3)(p-q)(q-r)(p-r)$

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $Q = \begin{bmatrix} ap^3-m^3 & aq^3-m^3 & ar^3-m^3 \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p & q & r \end{bmatrix}$

$$\text{L.H.S} = |Q| = \begin{vmatrix} ap^3-m^3 & aq^3-m^3 & ar^3-m^3 \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ap^3 & aq^3 & ar^3 \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p & q & r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m^3 & m^3 & m^3 \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$= apqr\begin{vmatrix} p^2 & q^2 & r^2 \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - m^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$= -apqr\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix} + m^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix}$$

$$= (m^3 - apqr)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix}$$

Educationblog24.com

$$= (m^3 - apqr)\begin{vmatrix} o & 0 & 1 \\ p-q & q-r & r \\ (p+q)(p-q) & (q+r)(q-r) & r^2 \end{vmatrix}$$

$$= (m^3 - apqr)(p-q)(q-r)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & r \\ p+q & q+r & r^2 \end{vmatrix}$$

$$= (m^3 - apqr)(p-q)(q-r)(q+r-p-q)$$

$$= (m^3 - apqr)(p-q)(q-r)(r-p)$$

$$= (apqr - m^3)(p-q)(q-r)(p-r) = \text{R.H.S}$$

(Proved)

31. $M = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & y^2 \\ x^2 & y^2 & 2xy \\ y^2 & 2xy & x^2 \end{bmatrix}$ [আদমজী ক্যান্টনমেন্ট কলেজ]

(গ) দেখাও যে, $\det(M) = -(x^3 + y^3)^2$

(গ) **Soln:** দেওয়া আছে, $M = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & y^2 \\ x^2 & y^2 & 2xy \\ y^2 & 2xy & x^2 \end{bmatrix}$

$$\text{L.H.S} = \det(M) = \begin{vmatrix} 2xy & x^2 & y^2 \\ x^2 & y^2 & 2xy \\ y^2 & 2xy & x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x^2+2xy+y^2 & x^2 & y^2 \\ x^2+2xy+y^2 & y^2 & 2xy \\ x^2+2xy+y^2 & 2xy & x^2 \end{vmatrix} \quad [c_1 = c_1 + c_2 + c_3]$$

$$= \begin{vmatrix} (x+y)^2 & x^2 & y^2 \\ (x+y)^2 & y^2 & 2xy \\ (x+y)^2 & 2xy & x^2 \end{vmatrix} = (x+y)^2\begin{vmatrix} 1 & x^2 & y^2 \\ 1 & y^2 & 2xy \\ 1 & 2xy & x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+y)^2\begin{vmatrix} 0 & x^2-y^2 & y^2-2xy \\ 0 & y^2-2xy & 2xy-x^2 \\ 1 & 2xy & x^2 \end{vmatrix}$$

$$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$$

$$= (x+y)^2\{(x^2-y^2)(2xy-x^2) - (y^2-2xy)^2\}$$

$$= (x+y)^2(2x^3y - 2xy^3 - x^4 + x^2y^2 - y^4 + 4xy^3 - 4x^2y^2)$$

$$= (x+y)^2(-x^4 - x^2y^2 - y^4 + 2x^3y + 2xy^3 - 2x^2y^2)$$

$$= -(x+y)^2(x^4 + x^2y^2 + y^4 - 2x^3y - 2xy^3 + 2x^2y^2)$$

$$= -(x+y)^2\{(x^2)^2 + (-xy)^2 + (y^2)^2 + 2\cdot x^2(-xy) + 2\cdot(-xy)\cdot y^2 + 2\cdot x^2\cdot y^2\}$$

$$= -(x+y)^2(x^2 - xy + y^2)^2$$

$$= -\{(x+y)(x^2 - xy + y^2)\}^2$$

$$= -(x^3 + y^3)^2 = \text{R.H.S}$$ **(Showed)**

নিজে করো

32. $P = \begin{vmatrix} 2x-s & 2x & 2x \\ 2y & 2y-s & 2y \\ 2z & 2z & 2z-s \end{vmatrix}$ [SB'22]

(গ) $x + y + z = S$ হলে, দেখাও যে, $P = S^3$.

33. সমীকরণ জোট: $px + qy + rz = 5$, [Din.B', SB'21]

$p^2x + q^2y + r^2z = 5$,

$(p^3 - 1)x + (q^3 - 1)y + (r^3 - 1)z = -5$.

(গ) x, y ও z এর সহগগুলো দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক D হলে প্রমাণ কর যে, $D = (pqr - 1)(p - q)(q - r)(r - p)$.

34. দৃশ্যকল্প: $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 2x^3+1 & 2y^3+1 & 2z^3+1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix}$ [JB'21]

(খ) প্রমাণ কর যে,

$\det(A) = -(2xyz + 1)(x - y)(y - z)(z - x)$.

35. (ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix} x & -a & x+a \\ y & -b & y+b \\ z & -c & z+c \end{vmatrix} = 0$

[SB'17]

T-09: নির্ণায়কবিশিষ্ট সমীকরণ সমাধান

Concept

এসব ক্ষেত্রে চেষ্টা করবে যেন বিভিন্ন সারি/কলামের ভুক্তিগুলো যোগ/বিয়োগ করে বা common নিয়ে একটি কলাম বা একটি সারির 2 টি ভুক্তির মান 0 তৈরি করতে। তাহলে বিস্তার করতে সুবিধা হবে।

Educationblog24.com

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $\Delta = \begin{bmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 3 & 2 & x-1 \end{bmatrix}$. [RB'23]

(গ) উদ্দীপকের সাহায্যে $|\Delta + I| = 0$ সমীকরণের সমাধান কর। যেখানে I একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $\Delta = \begin{bmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 3 & 2 & x-1 \end{bmatrix}$

এবং $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Delta + I = \begin{bmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 3 & 2 & x-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{bmatrix}$

আবার, দেওয়া আছে, $|\Delta + I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - 2) - 2(x - 3) + 3(2 - 3x) = 0$

$\Rightarrow x^3 - 2x - 2x + 6 + 6 - 9x = 0$

$\Rightarrow x^3 - 13x + 12 = 0$

$\Rightarrow x^3 - x^2 + x^2 - x - 12x + 12 = 0$

$\Rightarrow x^2(x - 1) + x(x - 1) - 12(x - 1) = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x - 12) = 0 \therefore x = 1$

এবং $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1(-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 7}{2} \therefore x = 3, -4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $-4, 1, 3$ **(Ans.)**

02. $Q = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$ [Ctg.B'23; JB'19]

(গ) $|Q| = 0$ হলে সমাধান সেট নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $|Q| = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 9+x & 4 & 2 \\ 9+x & 2+x & 3 \\ 9+x & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0 \ [c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$\Rightarrow (9+x) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (9+x) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 0 \ \begin{bmatrix} r_2' = r_2 - r_1 \\ r_3' = r_3 - r_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (x + 9)\{(x - 2)(1 + x) - (1 - x)\} = 0$

$\Rightarrow (x + 9)\{x^2 - x - 2 - 1 + x\} = 0$

$\Rightarrow (x + 9)(x^2 - 3) = 0 \therefore x = -9, \pm\sqrt{3}$ **(Ans.)**

03. (ক) $2\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = x^2$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। [SB'22]

(ক) **Sol^n:** $2\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = x^2 \Rightarrow 2(3 - 2x) = x^2$

$\Rightarrow 6 - 4x = x^2 \Rightarrow x^2 + 4x - 6 = 0$

$\therefore x = -2 \pm \sqrt{10}$ **(Ans.)**

নিজে করো

04. $A = \begin{bmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -2 & x+1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$ [DB'22]

(খ) $|A| = 0$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। [Ans: 1, −2]

05. $A = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 1 \\ 4 & 1+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$ [RB'22]

(গ) $\det(A) = 0$ সমীকরণের বাস্তব মূল নিয়ে A এর ট্রেস নির্ণয় কর। [Ans: $x = -8$ হলে, Trace (A) $= -16$; $x = \sqrt{7}$ হলে, Trace(A) $= 8 + 3\sqrt{7}$; $x = -\sqrt{7}$ হলে, Trace(A) $= 8 - 3\sqrt{7}$]

T-10: বহুচলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান

Concept

Process-1: ক্রেমারের (Cramer) সূত্রের সাহায্যে:

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, a_2x + b_2y + c_2z = d_2, a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ (ক্রেমারের সূত্রানুসারে উপরোক্ত সমীকরণগুলো সমাধান করার জন্য নিম্নলিখিত নির্ণায়কগুলো তৈরি করতে হবে।)

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \therefore x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$ এবং $z = \frac{D_z}{D}$

Educationblog24.com

Process-2: Inverse ম্যাট্রিক্সের ধারণা ব্যবহার করে:

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ ধরি, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$
$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

এখানে, $\boxed{AX = B} \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. দৃশ্যকল্প-১: $x + y + z = 1$ [DB'23]
$x + 2y + z = 2$
$x + y + 2z = 0$

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লিখিত সমীকরণ জোট নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর।

(খ) **Sol^n**: $x + y + z = 1; x + 2y + z = 2; x + y + 2z = 0$

এখানে, $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1(4 - 1) - 1(2 - 1) + 1(1 - 2) = 3 - 1 - 1 = 1.$
[r_1 বরাবর বিস্তার করে]

আবার, $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(4 - 1) - 2(2 - 1)$
$= 3 - 2 = 1.$ [c_1 বরাবর বিস্তার করে]

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1(2 - 1) + 2(2 - 1)$
$= -1 + 2 = 1.$ [c_2 বরাবর বিস্তার করে]

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(1 - 2) - 2(1 - 1) = -1.$
[c_3 বরাবর বিস্তার করে]

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{1} = 1; y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{1} = 1; z = \frac{D_z}{D} = \frac{-1}{1} = -1$

$\therefore$ সমাধান $(x, y, z) = (1, 1, -1)$ **(Ans.)**

02. $A = \begin{bmatrix} p & p+1 & p+1 \\ p+1 & p & p+1 \\ p+1 & p+1 & p \end{bmatrix}$ [SB'23]

(গ) $AX = B$ হলে নির্ণায়কের সাহায্যে 'x' নির্ণয় কর যেখানে $p = 1, B = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$.

(গ) **Sol^n**: দেওয়া আছে, $AX = B$

যেখানে, $A = \begin{bmatrix} p & p+1 & p+1 \\ p+1 & p & p+1 \\ p+1 & p+1 & p \end{bmatrix}$; $p = 1$

এবং $B = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$ $\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ধরি, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $\therefore AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x + 2y + 2z \\ 2x + y + 2z \\ 2x + 2y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

$\therefore x + 2y + 2z = 11, 2x + y + 2z = 10,$
$2x + 2y + z = 9$

$\therefore D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
$= 1(1 - 4) - 2(2 - 4) + 2(4 - 2) = 5$

$D_x = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 2 \\ 10 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
$= 11(1 - 4) - 2(10 - 18) + 2(20 - 9) = 5$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 2 & 10 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix}$
$= 1(10 - 18) - 11(2 - 4) + 2(18 - 20) = 10$

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 2 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix}$
$= 1(9 - 20) - 2(18 - 20) + 11(4 - 2) = 15$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{5}{5} = 1$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{10}{5} = 2; z = \frac{D_z}{D} = \frac{15}{5} = 3$ $\therefore X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

03. সমীকরণ জোট: $tx + uy + vz = 5,$ [BB'23]
$t^2x + u^2y + v^2z = 5,$
$(t^3 - 1)x + (u^3 - 1)y + (v^3 - 1)z = -5$

(খ) $t = 1, u = 2, v = 3$ হলে ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটের সমাধান কর।

(খ) **Sol^n**: দেওয়া আছে, $tx + uy + vz = 5,$
$t^2x + u^2y + v^2z = 5,$
$(t^3 - 1)x + (u^3 - 1)y + (v^3 - 1)z = -5$
$t = 1, u = 2$ এবং $v = 3$
হলে, $1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 5$ ..... (i)
$1^2x + 2^2y + 3^2z = 5 \Rightarrow x + 4y + 9z = 5$ ..... (ii)
$(1^3 - 1)x + (2^3 - 1)y + (3^3 - 1)z = -5$
$\Rightarrow 0 \cdot x + 7y + 26z = -5$ ..... (iii)

$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 0 & 7 & 26 \end{vmatrix}$
$= 1(4 \times 26 - 9 \times 7) - 1(2 \times 26 - 3 \times 7) = 10$

Educationblog24.com

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 9 \\ -5 & 7 & 26 \end{vmatrix}$$

$= 5(4 \times 26 - 7 \times 9) - 2(8 \times 26 - 9 \times (-5))$
$+ 3(8 \times 7 - 4 \times (-5)) = 20$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 8 & 9 \\ 0 & -5 & 26 \end{vmatrix}$$

$= 1(8 \times 26 - 9 \times (-5)) - 1(5 \times 26 - 3 \times (-5)) = 30$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 1(4 \times (-5) - 8 \times 7)$$

$-1(2 \times (-5) - 5 \times 7) = -10$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{20}{10} = 2; y = \frac{D_y}{D} = \frac{30}{10} = 3; z = \frac{D_z}{D} = \frac{-10}{10} = -1$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $x = 2, y = 3, z = -1$ (Ans.)

04. $A = (1 \quad -2 \quad 3)$, $X = (x \quad y \quad z)$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ [JB'23]

(ঘ) ক্রেমারের নিয়মে $BX^T = A^T$ সমীকরণ জোট সমাধান কর।

(ঘ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $A = (1 \quad -2 \quad 3) \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

আবার, $X = (x \quad y \quad z) \Rightarrow X^T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

প্রশ্নমতে, $BX^T = A^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

অর্থাৎ, $x - 2y + 3z = 1$ ..... (i)

$x + 5y = -2$ ..... (ii)

$4x - 2y + z = 3$ ..... (iii)

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1 \times (5 - 0) + (-2)(0 - 1) + 3 \times (-2 - 20) = -59$

$$\therefore \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1 \times (5 - 0) + (-2) \times \{0 - (2)\} + 3(4 - 15) = -32$

$$\therefore \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1 \times (-2 - 0) + 1(0 - 1) + 3 \times (3 + 8) = 30$

$$\therefore \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times (15 - 4) + (-2)$$

$\times (-8 - 3) + 1 \times (-2 - 20) = 11$

এখন, $\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-32}{-59} = \frac{32}{59}$ $\therefore y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{30}{-59} = -\frac{30}{59}$

$\therefore z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{11}{-59} = -\frac{11}{59}$ (Ans.)

05. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ [CB'23]

(খ) $AB = C$ হলে ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটটির সমাধান কর।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

$AB = C \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x - y + 3z \\ x + y + z \\ x - y + 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\therefore 2x - y + 3z = 2; x + y + z = 5; x - y + 2z = 4$

x, y ও z এর সহগগুলো নিয়ে নির্ণায়ক,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2 + 1) + (2 - 1) + 3(-1 - 1$$

$= 6 + 1 - 6 = 1 \neq 0$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2 + 1) + 1(10 - 4) + 3(-5 - 4$$

$= 6 + 6 - 27 = -15$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(10 - 4) - 2(2 - 1) + 3(4 - 5$$

$= 12 - 2 - 3 = 7$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2(4 + 5) + 1(4 - 5) + 2(-1 - 1$$

$= 18 - 1 - 4 = 13$ $\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-15}{1} = -15$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{7}{1} = 7$; $z = \frac{D_z}{D} = \frac{13}{1} = 13$

06. $M = \begin{bmatrix} p - q - r & 2q & 2r \\ 2p & q - r - p & 2r \\ 2p & 2q & r - p - q \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

এবং $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ [DB'22]

(গ) উদ্দীপকে $p = q = r = 1$ হলে, $MX = N$ কে ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর।

(গ) **Sol^n:** $p = q = r = 1$ হলে,

$$M = \begin{bmatrix} 1 - 1 - 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 - 1 - 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 - 1 - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

শর্তমতে, $MX = N \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} -x + 2y + 2z \\ 2x - y + 2z \\ 2x + 2y - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Educationblog24.com

$\therefore -x + 2y + 2z = -3 ; 2x - y + 2z = 0$
$2x + 2y - z = 3$
এখানে, $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$
$= -1(1-4) - 2(-2-4) + 2(4+2)$
$= 3 + 12 + 12 = 27 \neq 0$
$\therefore$ সমীকরণ জোটটির সমাধান বিদ্যমান।
$\therefore D_x = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$
$= -3(1-4) - 2(0-6) + 2(0+3)$
$= 9 + 12 + 6 = 27$
আবার, $D_y = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$
$= -1(0-6) + 3(-2-4) + 2(6-0) = 6 - 18 + 12 = 0$
এবং, $D_z = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
$= -1(-3-0) - 2(6-0) - 3(4+2)$
$= 3 - 12 - 18 = -27$
$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{27}{27} = 1, y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{27} = 0$ এবং $z = \frac{D_z}{D}$
$= -\frac{27}{27} = -1$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = (1, 0, -1)$

07. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & 2 & -2 \\ y & 5 & -4 \\ z & 7 & -5 \end{bmatrix}$ [SB'22]

(গ) $AB = I_3$ থেকে ক্রেমারের সূত্রের সাহায্যে (x, y, z) নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** $AB = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 2 & -2 \\ y & 5 & -4 \\ z & 7 & -5 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 3x - 4y + 2z & 6 - 20 + 14 & -6 + 16 - 10 \\ -2x + y + 0 & -4 + 5 + 0 & 4 - 4 + 0 \\ -x - y + z & -2 - 5 + 7 & 2 + 4 - 5 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 3x - 4y + 2z & 0 & 0 \\ -2x + y & 1 & 0 \\ -x - y + z & 0 & 1 \end{bmatrix}$
দেওয়া আছে, $AB = I_3$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3x - 4y + 2z & 0 & 0 \\ -2x + y & 1 & 0 \\ -x - y + z & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
অর্থাৎ, $3x - 4y + 2z = 1; -2x + y = 0 ; -x - y + z = 0$
এখন, $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
$= 3(1-0) + 4(-2-0) + 2(2+1) = 3 - 8 + 6 = 1$
$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
$= 1(1-0) + 4(0-0) + 2(0-0) = 1$
$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
$= 3(0-0) - 1(-2-0) + 2(0-0) = 2$
$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$
$= 3(0-0) + 4(0-0) + 1(2+1) = 3$
$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1 \therefore y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2 \therefore z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

08. $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. [JB'22]

(গ) $P^TR = Q$ থেকে প্রাপ্ত সমীকরণ জোটকে নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}; Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$\therefore P^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$
$\therefore P^TR = Q \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$
আবার, $P^TR = Q \Rightarrow (P^T)^{-1}P^TR = (P^T)^{-1}Q$
$\Rightarrow R = (P^T)^{-1}Q$
$\therefore |P^T| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}$
$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \\ -3 & 11 & -5 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} C_1' = C_1 - C_2 \\ C_2' = C_2 - C_3 \end{bmatrix}$
$= 1\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = 66 - 9 = 57 \neq 0$
$\therefore P^T$ ম্যাট্রিক্সটি অব্যতিক্রমী; অর্থাৎ, $(P^T)^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।
$P_{11}^T = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = -7 ; P_{12}^T = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 31$
$P_{13}^T = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 33 ; P_{21}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 11$
$P_{22}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -8; P_{23}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3$
$P_{31}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3; P_{32}^T = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3$
$P_{33}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -6$
$\therefore (P^T)^{-1} = \frac{\text{adj}(P^T)}{|P^T|} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & 31 & 33 \\ 11 & -8 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}^T}{57} = \frac{1}{57}\begin{pmatrix} -7 & 11 & 3 \\ 31 & -8 & 3 \\ 33 & -3 & -6 \end{pmatrix}$
$\therefore (P^T)^{-1}Q = \begin{pmatrix} -\frac{7}{57} & \frac{11}{57} & \frac{1}{19} \\ \frac{31}{57} & \frac{-8}{57} & \frac{1}{19} \\ \frac{11}{19} & \frac{-1}{19} & \frac{-2}{19} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
$(x, y, z) = (1, 2, 3)$

Educationblog24.com

09. $\frac{x}{5} - \frac{2y}{5} + z = 1 ; x + \frac{y}{4} + \frac{3z}{4} = 1 ; \frac{x}{3} - y + \frac{2z}{3} = 1$ [Din.B'22]

(গ) উদ্দীপকে বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $\frac{x}{5} - \frac{2y}{5} + z = 1$

$x + \frac{y}{4} + \frac{3z}{4} = 1 ; \frac{x}{3} - y + \frac{2z}{3} = 1$

অথবা, $x - 2y + 5z = 5 ; 4x + y + 3z = 4$

$x - 3y + 2z = 3$

x, y ও z এর সহগগুলি নিয়ে নির্ণায়ক,

ধরি, $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

$= 1(2 \times 1 - 3 \times (-3)) - (-2)(4 \times 2 - 3 \times 1) + 5\{4 \times -3 - 1 \times 1\} = 11 + 10 - 65 = -44 \neq 0$

এখন, $\Delta_x = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

$= 5\{2 - (-9)\} - (-2)(4 \times 2 - 9) + 5\{(-3) \times 4 - 3\}$

$= 55 - 2 - 75 = -22$

$\therefore \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1(8 - 9) - 5(8 - 3) + 5(12 - 4)$

$= -1 - 25 + 40 = 14$

$\therefore \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1(3 + 12) - (-2)(12 - 4) + 5(-12 - 1)$

$= 15 + 16 - 65 = -34$

$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-22}{-44} = \frac{1}{2} \therefore y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{14}{-44} = \frac{-7}{22}$

$\therefore z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-34}{-44} = \frac{17}{22}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-7}{22}, \frac{17}{22}\right)$

10. সমীকরণ জোট: $x + y + z = 6 ; x - 2y + 2z = 3$

$2x + y - z = 1$ [SB'19]

(গ) সমীকরণ জোটটি বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর।

(গ) **Sol^n:** $x + y + z = 6 ; x - 2y + 2z = 3 ; 2x + y - z = 1$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\therefore (x, y, z) = (1, 2, 3)$ **(Ans.)**

11. (ক) নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর: $x + 3y + 2 = 0$, $2x + y + 3 = 0$ [RB'17]

(ক) **Sol^n:** $x + 3y + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

$2x + y + 3 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) থেকে $x + 3y = -2$; (ii) থেকে $2x + y = -3$

x ও y এর সহগ নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক,

$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$

এখন, $D_x = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 9 = 7$

$D_y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = -3 + 4 = 1 \therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{7}{-5}$

এবং $y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{-5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = \left(-\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ **(Ans.)**

12. নিচের সারণিটি 2023 সালে একটি কোম্পানির বিভিন্ন শাখায় কর্মরত শ্রমিকের সংখ্যা নির্দেশ করে।

শাখা	শ্রমিকের সংখ্যা		
	গ্রেড-১	গ্রেড-২	গ্রেড-৩
উৎপাদন	4	8	4
বিপণন	0	4	4
বিতরণ	8	0	8

উপরের সারণিটি একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স 'A' নির্দেশ করে সমগ্রেডের শ্রমিকের মাসিক বেতন একই, সে উৎপাদন, বিপণ এবং বিতরণের যে শাখারই হোক না কেন।

[ফৌজদারহাট ক্যাডেট কলেজ, চট্টগ্রাম

(গ) যদি উৎপাদন, বিপণন ও বিতরণ শাখার শ্রমিকের মো বেতন যথাক্রমে 196000 টাকা, 88000 টাকা ও 200000 টা হয় তবে নির্ণায়কের সাহায্যে গ্রেড-১, গ্রেড-২ এবং গ্রেড-৩ এ প্রত্যেক শ্রমিকের বেতন নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** ধরি, কর্মরত শ্রমিকের সংখ্যা নির্দেশক ম্যাট্রিক্স,

$P = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

প্রত্যেক গ্রেডের শ্রমিকের বেতন নির্দেশক ম্যাট্রিক্স, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

যেখানে, x = গ্রেড-১ শ্রমিকের বেতন

y = গ্রেড-২ শ্রমিকের বেতন

z = গ্রেড-৩ শ্রমিকের বেতন

মোট বেতন নির্দেশক ম্যাট্রিক্স, $Q = \begin{bmatrix} 196000 \\ 88000 \\ 200000 \end{bmatrix}$

$\therefore PX = Q \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 196000 \\ 88000 \\ 200000 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 196000 \\ 88000 \\ 200000 \end{bmatrix}$

Educationblog24.com

∴ P ম্যাট্রিক্সের সহগুণকগুলো নিয়ে ম্যাট্রিক্স গঠন-

$P_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 0 = 32$

$P_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = -(-32) = 32$

$P_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -32$

$P_{21} = -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -(64 - 0) = -64$

$P_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 32 = 0$

$P_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 64) = 64$

$P_{31} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 16 = 16$

$P_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -(16 - 0) = -16$

$P_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 0 = 16$

$\therefore \text{Adj}(P) = \begin{bmatrix} 32 & 32 & -32 \\ -64 & 0 & 64 \\ 16 & -16 & 16 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 32 & -64 & 16 \\ 32 & 0 & -16 \\ -32 & 64 & 16 \end{bmatrix}$

$\therefore P^{-1} = \frac{1}{|P|}\text{Adj}(P)$

$= \frac{1}{256}\begin{bmatrix} 32 & -64 & 16 \\ 32 & 0 & -16 \\ -32 & 64 & 16 \end{bmatrix}$

এখানে,

$|P| = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

$= 4(32 - 0) - 8(0 - 32) + 4(0 - 32)$

$= 256$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 196000 \\ 88000 \\ 200000 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 15000 \\ 12000 \\ 10000 \end{bmatrix}$

∴ গ্রেড-১, গ্রেড-২ এবং গ্রেড-৩ প্রত্যেক শ্রমিকের বেতন যথাক্রমে 15000, 12000 এবং 10000 টাকা। **(Ans.)**

13. $A = \begin{bmatrix} a & a^2 & a^3+1 \\ b & b^3 & b^3+1 \\ c & c^2 & c^3+1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

[হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]

(গ) $a = 1, b = -1, c = 2$ হলে, ক্রেমারের সূত্র হতে $AX = B$ সমীকরণ জোটের সমাধান কর।

(গ) Sol": দেওয়া আছে, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

এবং $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$a = 1, b = -1, c = 2$

$\therefore A = \begin{bmatrix} a & a^2 & a^3+1 \\ b & b^3 & b^3+1 \\ c & c^2 & c^3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

$\therefore AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

সমীকরণজোট গঠন করে পাই,

$x + y + 2z = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$-x - y + 0 \cdot z = -2 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$2x + 4y + 9z = -2 \ldots\ldots\ldots (iii)$

ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে পাই,

$\therefore D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

$= 1(-9 - 0) - 1(-9 - 0) + 2(-4 + 2)$

$= -9 + 9 - 4 = -4$

$\therefore D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

$= 0(-9 - 0) - 1(-18 + 0) + 2(-8 - 2)$

$= 18 - 20 = -2$

$\therefore D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix}$

$= 1(-18 - 0) - 0(-9 - 0) + 2(2 + 4)$

$= -18 + 12 = -6$

$\therefore D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1(2 + 8) - 1(2 + 4) + 0(-4 + 2)$

$= 10 - 6 = 4$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$\therefore y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

$\therefore z = \frac{4}{-4} = -1$

∴ সমীকরণ জোটের সমাধান: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$ **(Ans.)**

নিজে করো

14. দৃশ্যকল্প- ১: $x - 2y + 2z = 1$; $2x + 6y - z = 2$; $x + 3y - 3z = 3$ [RB'23]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত সমীকরণ জোটটি নির্ণায়ক পদ্ধতিতে সমাধান কর। [Ans: $\frac{9}{5}; -\frac{2}{5}; -\frac{4}{5}$]

15. $2x - y - z = 6, x + 3y + 2z = 1$ এবং $3x - y - 5z = 1$. [Ctg.B'23]

(গ) ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোট সমাধান কর। [Ans: $(3, -2, 2)$]

16. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ [MB'23]

(গ) $BC = D$ হলে ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোট সমাধান কর। [Ans: $(0, 1, 1)$]

17. $N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ [Ctg.B'22]

(খ) $NX = B$ হলে ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর। [Ans: $\left(\frac{-29}{11}, \frac{17}{11}, \frac{48}{11}\right)$]

18. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$ [CB'22]

(গ) নির্ণায়কের সাহায্যে $AX = D$ এর সমাধান কর। [Ans: $(-3, 13, -4)$]

19. দৃশ্যকল্প-১: $\frac{x}{5} + \frac{3y}{10} + \frac{z}{10} = \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = \frac{3y}{7} + \frac{4z}{7} = 1$. [DB'21]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর।

20. $A = \begin{bmatrix} 1+m & 2 & 3 \\ 2 & 3+m & 1 \\ 3 & 1 & 2+m \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$ [RB'21]

(গ) $AB = C$ হলে নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর, যখন, $m = 1$. [Ans: $(1, -1, 2)$]

21. সমীকরণ জোট: $px + qy + rz = 5$, [SB'21]
$p^2x + q^2y + r^2z = 5$,
$(p^3 - 1)x + (q^3 - 1)y + (r^3 - 1)z = -5$.

(খ) $p = 1, q = 2, r = 3$ হলে ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় কর। [Ans: $(2, 3, -1)$]

22. $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$
এবং $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ [BB'2

(গ) ক্রেমারের সূত্র ব্যবহার করে $BX = C$ সমীকরণ জোটটি সমাধান কর। [Ans: $\left(-12, \frac{19}{2}, -10\right.$

23. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ [RB'1

(গ) $BC = D$ হলে, ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর। [Ans: $(0, 1, 1$

24. $M = [x + 2y + 3z \quad 2x + y + 4z \quad 3x + 2y + z]$ এ
$N = [-1 \ 2 \ 3]$. [Ctg.B'1

(গ) $M = N$ হলে ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। [Ans: $\left(\frac{15}{8}, \frac{-5}{4}, \frac{-1}{8}\right.$

25. $x - y + z = 2$, [BB'1
$2x + z = 5$,
$x + 2y - 3z = -4$.

(খ) ক্রেমার-এর প্রক্রিয়ায় প্রদত্ত সমীকরণজোট সমাধান কর [Ans: $(1, 2, 3$

26. দৃশ্যকল্প-১: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{bmatrix}$,
$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 28 \\ 14 \end{bmatrix}$ [CB'1

(খ) $AX = B$ সমীকরণ জোট ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর [Ans: $(-2, 3,$

27. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ এবং $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. [BB'1

(গ) উদ্দীপকের আলোকে, $AX = B$ হলে ক্রেমার পদ্ধতিতে y নির্ণয় কর। [Ans: $(2, -$

28. দৃশ্যকল্প-২: $\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{5}{7}z = \frac{x}{4} - y + \frac{z}{4}$
$= \frac{3x}{5} - \frac{y}{5} - \frac{2z}{5} = 1$. [SB'1

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়ম সমাধান কর। [Ans: $(-1, -2, -$

- MCQ প্রশ্নের জন্য এই অধ্যায়ের বিভিন্ন টাইপের তুলনামূলক গুরুত্ব:

গুরুত্ব	টাইপ	টাইপের নাম	যতবার প্রশ্ন এসেছে	যে বোর্ডে যে বছর এসেছে
				MCQ
✪✪✪	T-01	ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ ও বৈশিষ্ট্য	25	RB'23, 21; SB'23, 21, 19, 17; JB'23, 22, 21, 19, 17; CB'23, 22, 21, 19, 17; MB'23, 22, 21; Mad'23; BB'22; DB'21, 19; All.B'18; Din.B'17
✪✪✪	T-02	ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগ ও সমতা	14	DB'23; Ctg.B'23, 21; BB'23, 21, 19; Din.B'23; Mad.B'23; RB'22, 21, 17; SB'22; MB'21; JB'19
✪✪✪	T-03	ম্যাট্রিক্সের ট্রেস সংক্রান্ত	20	BB'23, 22, 19; JB'23, 22; Din.B'23; DB'22, 21, 17; RB'22, 21, 19, 17; CB'22, 17; MB'22; Ctg.B'21, 19; SB'21, 17
✪✪✪	T-04	ম্যাট্রিক্সের গুণফল ও ক্রম সংক্রান্ত	25	DB'23, 22, 21, 17; BB'23, 21, 19; Din.B, Mad'23; JB'23, 22, 19; RB'22, 21, 19, 17; CB'22, 19; MB'22; Ctg.B'21, 19; SB'21, 17
✪✪✪	T-05	ম্যাট্রিক্স এর ভুক্তি নির্ণয়	13	Ctg.B'23, 22, 17; SB'23; CB'23, 21; Din.B' 22, 21; MB'23, 21; BB'22; DB'21, 17; All.B'18
✪✪✪	T-06	নির্ণায়কের অনুরাশি ও সহগুণক	17	Ctg.B'23, 17; SB'23, 22, 19; BB'23, 17; CB'23, 21, 17; MB'23; Mad.B'23; RB'21; Din.B'21, 19, 17; JB'17
✪✪✪	T-07	ব্যতিক্রমী, অব্যতিক্রমী এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্স	31	DB'23, 22, 21, 17; RB'23, 22, 21, 19, 17; Ctg.B'23, 22, 21, 17; SB'23, 22, 21; BB'23, 21, 17; JB'23, 21; CB'23, 21, 19; Din.B'23, 22, 21, 19, 17; MB'21; All.B'18
✪✪	T-08	নির্ণায়ক সম্বলিত অভেদ ও মান নির্ণয়	08	DB'23, 21; JB'23, 21; Mad.B'23; Din.B'22; Ctg.B'21, 19
✪	T-09	নির্ণায়কবিশিষ্ট সমীকরণ সমাধান	02	MB'21; RB'17
✪✪✪	T-10	বহুচলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান	09	Ctg.B22, 21; SB'22, 17; CB'22, 21; RB'21, 19; Din.B'21

Educationblog24.com

বিগত বোর্ড পরীক্ষামূহের MCQ প্রশ্ন

01. $A = [2 \quad 1 \quad -1]$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ হলে, BA =? [DB, Mad.B'23; JB'19]

(a) [1] (b) $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

(c) $[4 \quad 0 \quad -3]$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

02. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কে- [DB'23]

(i) (1,2) তম ভুক্তির সহগুণক 3

(ii) (2,2) তম ভুক্তির অনুরাশি 1 (iii) নির্ণায়কের মান 12

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

03. $\begin{bmatrix} m & -1 \\ m-2 & m-2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে, m এর মান কোনটি? [DB, RB'23; Ctg.B'23, 21; Din.B'19; All B'18]

(a) $1, -2$ (b) $-1, -2$ (c) $-1, 2$ (d) $1, 2$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

04. A^{-1} = কত? [DB'23]

(a) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

05. $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ এবং AP = B হলে, $x + y$ = কত? [DB'23]

(a) 2 (b) 8 (c) 10 (d) 12

06. বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে কোনটি সত্য? [RB'23]

(a) $a_{ij} = a_{ji}$ (b) $a_{ij} = 0$

(c) $a_{ij} = -a_{ji}$ (d) $a_{ij} \neq a_{ji}$

07. 3×3 মাত্রার একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স I_3 হলে $(I_3)^{-1}$ কত? [RB'23]

(a) $3I_3$ (b) 0 (c) $\frac{I_3}{3}$ (d) I_3

08. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ হলে A^{-1} =? [RB'2

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{210}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{210}\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

09. $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি- [Ctg.B'2

(i) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (ii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(iii) ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, i

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

10. |A| এর মান কত? [Ctg.B'2

(a) -23 (b) -7 (c) -3 (d) 7

11. |A| এর (1,2) তম ভুক্তির সহগুণক- [Ctg.B'2

(a) -15 (b) -5 (c) 5 (d) 15

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

01. d	02. d	03. c	04. a	05. a	06. c	07. d	08. c	09. d	10. d	11. a

01. B এর ক্রম 3×1, A এর ক্রম $1 \times 3 \therefore$ BA ম্যাট্রিক্সের ক্রম হবে 3×3 অর্থাৎ (d) সঠিক।

02. (i) (1,2) তম ভুক্তির সহগুণক $= (-1)^{1+2}(-3) = 3$

(ii) (2, 2) তম ভুক্তির অনুরাশি $= 1$; (iii) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12$

03. ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে, $\begin{vmatrix} m & -1 \\ m-2 & m-2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow m(m-2) + (m-2) = 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \therefore m = 2, -1$

04. $A^{-1} = \frac{1}{10-3}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

05. $AP = B; \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3x + 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$

অর্থাৎ $2x + y = 2$ এবং $3x + 5y = 10$ সমাধান করে পাই, $x = 0$ এবং $y = 2 \therefore x + y = 2$; (a) সঠিক

06. একটি ম্যাট্রিক্স $D = \begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ হলে,

$D^T = \begin{bmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = -D$; অর্থাৎ, D ম্যাট্রিক্সটি বক্র-প্রতিসম কারণ $a_{ij} = -a_{ji}$

07. প্রশ্নমতে, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \therefore I_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$ [using calculator]

08. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

[কর্ণ ম্যাট্রিক্স $= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ এর জন্য $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$]

10. $|A| = 1(-7 - 6) + 1(0 + 15) + 1(0 + 5)$
$= -13 + 15 + 5 = 7$

11. $|A|_{(1,2)} = -1(0 + 15) = -15$

Educationblog24.com

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে $A^{-1} = ?$ [Din.B, CB, SB'23; JB'23, 21; Ctg.B'17]

(a) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের (2, 3) তম ভুক্তির সহগুণক কত? [SB, JB'23; CB, MB'21]

(a) −8 (b) −4 (c) 4 (d) 8

14. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-2i \\ 1+2i & i-2 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের অনুবন্ধী (conjugate) ম্যাট্রিক্স কোনটি? [SB'23]

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3+2i \\ 1-2i & i+2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3-2i & 2 \\ i-2 & 1+2i \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1+2i \\ 3-2i & i-2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 3+2i \\ 1-2i & -i-2 \end{pmatrix}$

15. A একটি 2 × 2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং |A| = 5 হলে |3A| এর মান কত? [SB'23]

(a) $\frac{5}{9}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) 15 (d) 45

16. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ এবং $B = [a \quad b]$ হলে BA = কত? [BB'23]

(a) $[-b \quad a]$ (b) $\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$

(c) $[b \quad -a]$ (d) $\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$

17. A ও B ম্যাট্রিক্সের ক্রম যথাক্রমে 5 × 3 ও 3 × 4 হলে AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম কোনটি? [BB, JB'23]

(a) 4 × 5 (b) 5 × 4

(c) 3 × 3 (d) 4 × 3

18. A একটি 3 × 3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং |A| = 1 হলে $|(3A)^{-1}|$ এর মান কত? [BB'23]

(a) $\frac{1}{27}$ (b) $\frac{1}{9}$ (c) 9 (d) 27

19. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, A = কত? [BB'23]

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} p-3 & -1 \\ -8 & p+4 \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স হলে- [BB'23]

(i) p = 4 এর জন্য A^{-1} নির্ণয় করা যায় না

(ii) p = −5 এর জন্য A একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

(iii) |A| এর (2, 1) তম ভুক্তির অনুরাশি 1

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

21. $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ একটি— [JB'23]

(i) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (ii) বর্গ ম্যাট্রিক্স

(iii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

22. x এর কোন মানের জন্য $\begin{vmatrix} x^2 & x & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0$ হবে? [JB'23]

(a) 0, 3 (b) −3, 0 (c) 0, 1 (d) −1, 0

23. $A = \begin{bmatrix} x+4 & 4 \\ -4 & x-4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি অব্যতিক্রমী হওয়ার শর্ত কোনটি? [JB'23]

(a) $x \neq -4$ (b) $x \neq 0$ (c) $x \neq 4$ (d) $x \neq 4\sqrt{2}$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

12. a	13. d	14. d	15. d	16. c	17. b	18. a	19. b	20. a	21. a	22. c	23. b

12. $A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T}{1+1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

13. $|A|_{(2,3)} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1(4-12) = 8$

15. |A| যদি n × n ক্রমের হয় আর |A| = m হয় তাহলে, $|PA| = P^n \cdot m$ হবে।
সুতরাং $|3A| = 3^2 \cdot 5 = 45$

16. $BA = [a \quad b]\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$= [a \times 0 + b \times 1 \quad a \times (-1) + b \times 0] = [b \quad -a]$

17. A B
$\downarrow \quad \downarrow$
$5 \times 3 \quad 3 \times 4$; AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম হবে 5 × 4

18. $|(3A)^{-1}| = \left|\frac{1}{3A}\right| = \frac{1}{3^3 \times 1} = \frac{1}{27}$

19. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \therefore (A^{-1})^{-1} = A$
$= \frac{1}{|A^{-1}|}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3-2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

20. A^{-1} নির্ণয়যোগ্য নয়, যখন $(p-3)(p+4) - 8 = 0$
$\Rightarrow p^2 + p - 20 = 0 \Rightarrow (p+5)(p-4) = 0 \therefore p = 4, -5$; (i) সঠিক।
P = −5 হলে, $A = \begin{bmatrix} -5-3 & -1 \\ -8 & -5+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$
$|A| = (-8)(-1) - (-8)(-1) = 0$; (ii) সঠিক।
(iii) সঠিক নয়, কারণ (2, 1) তম রাশির অনুরাশি −1।

22. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-6)(3x^2 - 3x) = 0$
$\Rightarrow 3x(x-1) = 0 \therefore x = 0, 1$

23. একটি ম্যাট্রিক্সকে অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স বলা হয় যদি এর নির্ণায়কের মান শূন্য না হয়।
অর্থাৎ, $|A| \neq 0$; $A = \begin{vmatrix} x+4 & 4 \\ -4 & x-4 \end{vmatrix} \neq 0$
$\Rightarrow x^2 - 4^2 + 16 \neq 0 \therefore x \neq 0$; সুতরাং $x \neq 0$ এর জন্য ম্যাট্রিক্সটি অব্যতিক্রমী হবে।

Educationblog24.com

24. P এর কোন মানের জন্য $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & P\\3 & 5 & 0\end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে? [JB'23; BB'21; Din.B'19; RB'17]

(a) −3 (b) −1 (c) 1 (d) 3

25. $\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\0 & 5 & m\\-2 & 4 & 5\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হলে m = কত? [CB'23]

(a) −2 (b) 0 (c) 4 (d) 5

26. $\begin{vmatrix}+7 & -7 & 0\\-1 & 2 & -1\\5 & P & 3\end{vmatrix}$ এ P এর সহগুণক কোনটি? [CB'23]

(a) −7 (b) −6 (c) 6 (d) 7

27. $\begin{bmatrix}6 & 0 & -3\\0 & 7 & 0\\-3 & 0 & 5\end{bmatrix}$ একটি [CB'23]

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(iii) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

28. ম্যাট্রিক্স A এর মাত্রা 4 × 5, ম্যাট্রিক্স B এর মাত্রা 5 × 4 হলে BA এর মাত্রা কত? [Din.B'23]

(a) 4 × 4 (b) 5 × 5 (c) 4 × 5 (d) 5 × 4

29. $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & -1 & 2\\0 & 1 & -5\end{bmatrix}$ হলে A + 3I =? [Din.B'23]

(a) $\begin{bmatrix}-2 & 2 & 3\\4 & -4 & 2\\0 & 1 & -8\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-2 & 2 & 3\\4 & 2 & 2\\0 & 1 & -2\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\4 & 2 & 2\\0 & 1 & -2\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}-2 & 5 & 3\\4 & -1 & 5\\0 & 4 & -2\end{bmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\-1 & 2 & m\\4 & 1 & 0\end{bmatrix}$

30. (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশির মান কত? [Din.B, MB'23]

(a) 11 (b) 5 (c) −5 (d) −11

31. নির্ণায়কের মান শূন্য হলে m এর মান কত? [Din.B'23]

(a) $-\frac{9}{11}$ (b) $\frac{5}{9}$ (c) $\frac{9}{11}$ (d) $\frac{9}{5}$

32. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 5\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}$ এটি কোন ধরনের ম্যাট্রিক্স? [MB'23]

(a) স্কেলার (b) নিম্ন ত্রিভুজাকার

(c) উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার (d) কর্ণ

33. $\begin{vmatrix}x+4 & 2\\4x & 6\end{vmatrix} = 0$, x-এর মান কত? [MB, Mad.B'23]

(a) 12 (b) 6 (c) 4 (d) −12

34. $\begin{vmatrix}0 & 1 & \omega\\1 & \omega & \omega^2\\\omega & 1 & \omega^2\end{vmatrix}$ এর মান কত? [MB'23]

(a) $\omega - \omega^2$ (b) ω^2 (c) $\omega + \omega^2$ (d) $\omega^2 - \omega$

35. কোনটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স? [MB'23]

(a) $\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}-7 & 16\\-3 & 7\end{pmatrix}$

(c) [5 7 9] (d) [0 0 0]

36. $\begin{vmatrix}1 & -1 & 5\\-1 & 1 & 2\\2 & -3 & x\end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির (2, 1) তম অনুরাশি 1 হলে, x এর মান কত? [Mad.B'23]

(a) −16 (b) −14 (c) 14 (d) 16

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

24. d	25. c	26. d	27. a	28. b	29. c	30. c	31. d	32. c	33. a	34. a	35. b	36. c

24. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & P\\3 & 5 & 0\end{vmatrix} = 0$ এখানে P = 3 হলে দুটি সারি একই হবে এবং তখন নির্ণায়কের মান শূন্য হবে। ∴ P = 3

25. $\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\0 & 5 & m\\-2 & 4 & 5\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\0 & 5 & 4\\-2 & m & 5\end{bmatrix}$,

ম্যাট্রিক্সের সমতা করে পাই, m = 4

26. P এর সহগুণক = −(−7 + 0) = 7

27. $\begin{vmatrix}6 & 0 & -3\\0 & 7 & 0\\-3 & 0 & 5\end{vmatrix} \neq 0$, ইহা ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স নয়। (i) ও (ii) সঠিক।

28. B (5×4) A (4×5) ; ∴ BA এর মাত্রা 5 × 5

31. 3য় কলামের সাপেক্ষে নির্ণায়কের মান বের করি।

$1(-1-8) - m(3-8) + 0 = -9 + 5m$

এখন, নির্ণায়কের মান = 0 তাহলে, $-9 + 5m = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{5}$

32. যদি $a_{ij} = 0$ যখন i > j হয় তবে তাকে উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স বলে।

33. $(x + 4) \times 6 - 4x \times 2 = 0$

$\Rightarrow 6x + 24 - 8x = 0$

$\Rightarrow -2x = -24 \therefore x = 12$

34. $\begin{vmatrix}0 & 1 & \omega\\1 & \omega & \omega^2\\\omega & 1 & \omega^2\end{vmatrix} = 0 - 1(\omega^2 - \omega^3) + \omega(1 - \omega^2)$

$= -\omega^2 + \omega^3 + \omega - \omega^3 = \omega - \omega^2$

35. সঠিক উত্তর (b), কারণ 2 × 2 বর্গাকার ম্যাট্রিক্স ছাড়া অন্য অপশনগুলোর জন্য অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স নির্ণয় অসম্ভব।

$\begin{bmatrix}-7 & 16\\-3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 16\\-3 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}49-48 & -112+112\\21-21 & -48+49\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

∴ (b) সঠিক।

36. (2, 1) তম অনুরাশি হলো $\begin{vmatrix}-1 & 5\\-3 & x\end{vmatrix} = (-x + 15)$

এখন $-x + 15 = 1 \Rightarrow x = 14$

Educationblog24.com

37. A ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম হলে নিচের কোনটি সঠিক? [Mad.B'23]
(a) $A^T = -A$ (b) $A = -A$ (c) $A^T = A$ (d) $A^2 = A$

38. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 8 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির- [Mad.B'23]
(i) মান = 49
(ii) (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক = −11
(iii) (2, 1) তম ভুক্তি = 11
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

39. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান কত? [Mad.B'23]
(a) −7 (b) 3 (c) 7 (d) 11

40. A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর মাত্রা যথাক্রমে 4 × 3, 3 × 4 এবং 7 × 4 হলে $(B + A^T).C^T$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা কত? [DB, JB'22; RB, SB'21; BB'19]
(a) 3 × 4 (b) 3 × 7 (c) 4 × 3 (d) 4 × 7

41. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ হলে, নিচের কোনটির A^{-1}? [DB'22; DB, CB, MB'21; DB, Ctg.B, CB'19]
(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

42. $\begin{bmatrix} a-3 & -1 \\ -8 & a+4 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে a =? [DB, Ctg.B'22; JB, Din.B'21]
(a) 4, −5 (b) −4, 5 (c) −4, −5 (d) 4, 5

43. $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স কোনটি? [RB, Ctg.B, Din.B'22; SB'21; Din.B'17]
(a) $\begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

44. A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর আকার যথাক্রমে m × n, n × m এবং m × s হলে $(A^T + B)C$ ম্যাট্রিক্সের আকার হবে- [RB'22]
(a) m × s (b) s × n (c) n × m (d) n × s
নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$A = \begin{bmatrix} x+4 & 8 \\ 2 & x-2 \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স।

45. যদি A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হয়, তবে x এর মান নিচের কোনটি? [RB'22]
(a) −4, 2 (b) −2, 4 (c) −4, 6 (d) −6, 4

46. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সে x = 3 হলে A^2 নিচের কোনটি? [RB'22]
(a) $\begin{bmatrix} 65 & 64 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 49 & 46 \\ 41 & 43 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 40 & 48 \\ 52 & 64 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 64 & 49 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

47. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ হয়, তবে- [Ctg.B'22]
(i) A একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স
(ii) |A| = 15
(iii) A একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স নয়
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

37. a	38. d	39. b	40. b	41. c	42. a	43. b	44. d	45. d	46. a	47. c

38. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times 8 + 3 \times 11 = 49$
∴ (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক = $(-1)^{1+2}(11) = -11$ ∴ (2, 1) তম ভুক্তি = 11

39. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1(15 - 8) - 1(6 - 4) + 1(8 - 10)$
$= 7 - 2 - 2 = 3$

40. A ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 4 × 3 হলে, A^T ম্যাট্রিক্সের মাত্রা = 3 × 4, B ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 3 × 4, C ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 7 × 4 হলে, C^T ম্যাট্রিক্সের মাত্রা = 4 × 7, তাহলে, $B + A^T$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 3 × 4
∴ $(B + A^T)_{3\times4} \cdot C^T_{4\times7}$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 3 × 7

41. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ হলে,
$|A| = 2(-3) - (-1) \cdot 5 = -6 + 5 = -1 \neq 0$
∴ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

42. $\begin{bmatrix} a-3 & -1 \\ -8 & a+4 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে,
$(a - 3)(a + 4) - (-8)(-1) = 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 3a - 12 - 8 = 0$
$\Rightarrow a^2 + a - 20 = 0 \Rightarrow a^2 + 5a - 4a - 20 = 0$
$\Rightarrow a(a + 5) - 4(a + 5) = 0 \Rightarrow (a - 4)(a + 5) = 0$ ∴ a = 4, −5

43. $A^{-1} = \frac{1}{7\times7-8\times6}\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$

44. A^T এর আকার = n × m
∴ $A^T + B$ এর আকার = n × m
∴ $(A^T + B)_{n\times m} \cdot C_{m\times s}$ এর আকার = n × s

45. $|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+4 & 8 \\ 2 & x-2 \end{vmatrix} = 0$
$\Rightarrow (x + 4)(x - 2) - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 2x - 8 - 16 = 0$
$\Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\,1(-24)}}{2\,1} = \frac{-2\pm10}{2} = -1 \pm 5$
∴ x = 4, −6

46. $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
∴ $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 & 64 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$

47. ∵ $A^T \neq -A$, ∴ ইহা বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স নয়।
∴ $|A| = 2 \times 6 + 3 = 15$
∴ $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -24 \\ 8 & 33 \end{bmatrix} \neq I$
অর্থাৎ, A অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স নয়।

Educationblog24.com

48. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\1 & 5 & 7\end{vmatrix}$ নির্ণায়কের (3, 2) তম সহগুণক কোনটি?
[Ctg.B, JB, BB, Din.B'22; DB, RB, SB, Din.B'21; All.B'18; DB, Ctg.B'17]
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

49. বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে $A^2 = I$ হলে, $A^{-1} = ?$ [SB'22]
(a) 2A (b) A (c) 0 (d) A + I

50. $\begin{bmatrix}1 & 3 & \lambda+2\\2 & 4 & 8\\3 & 5 & 10\end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, λ-এর মান-
(a) −2 (b) 2 [SB'22]
(c) 4 (d) −4

51. $A^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ হলে, $(AB)^{-1}$ এর মান কত? [SB'22]
(a) $\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

52. A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং K একটি স্কেলার হলে- [SB'22]
(i) $(A')' = A$ (ii) $(KA)' = KA'$
(iii) যদি $|A| = 0$ হয়, তবে $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

53. $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\e & \pi & \sqrt{3}\\3 & 3 & 3\end{bmatrix}$ হলে, $|A| = ?$ [SB'22]
(a) e (b) π (c) $2(e - \pi + \sqrt{3})$ (d) 0

54. $A = \begin{bmatrix}8 & -5\\7 & 2\end{bmatrix}$ হলে, Adj A = কোনটি? [BB'22]
(a) $\begin{bmatrix}2 & 5\\-7 & -8\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-2 & 5\\-7 & 8\end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix}8 & 7\\-5 & 2\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}2 & 5\\-7 & 8\end{bmatrix}$

55. $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$ হলে, AB এর ক্রম কত? [BB'22]
(a) 2 × 1 (b) 1 × 2 (c) 3 × 1 (d) 2 × 3

56. $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & -6\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$ হলে, Det (A) এর মান কত? [BB'22]
(a) −48 (b) 0 (c) 48 (d) 60

57. যদি A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $A^2 = I$ হয়, তবে A কে বলে- [JB'22]
(a) শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স (b) অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স
(c) শূন্য ম্যাট্রিক্স (d) বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স

58. $\begin{bmatrix}2 & -4\\-4 & -8\end{bmatrix}$ একটি- [JB'22]
(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স
(iii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

59. দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B এর মাত্রা যথাক্রমে p × q এবং n × r হলে AB নির্ণয়ের শর্ত কোনটি? [CB'22]
(a) p = r (b) p = n (c) q = r (d) q = n

60. $A = \begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\4 & 6 & 8\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$ একটি- [CB'22]
(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স
(iii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

61. নিচের কোনটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স? [CB'22]
(a) $\begin{bmatrix}-2 & -1\\-2 & -1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2 & 1\\-2 & -1\end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\-2 & -1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}2 & 1\\-2 & 1\end{bmatrix}$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

48. a	49. b	50. c	51. a	52. a	53. d	54. d	55. a	56. b	57. b	58. d	59. d	60. a	61. b

48. $|A|_{(3,2)} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{vmatrix} = -1(4 - 6) = 2$

49. $A^2 = I$ হলে A অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স। অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্সের জন্য $A^{-1} = A$

50. $\therefore \begin{vmatrix}1 & 3 & \lambda+2\\2 & 4 & 8\\3 & 5 & 10\end{vmatrix} = 0$
$\Rightarrow 1(40 - 40) - 3(20 - 24) + (\lambda + 2)(10 - 12) = 0$
$\Rightarrow 2(\lambda + 2) = 12 \Rightarrow \lambda = 4 \therefore \lambda = 4$

51. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ [বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য]
$= \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}$

52. $|A| = 0$ হলে A^{-1} সম্ভব নয়।

53. $|A| = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\e & \pi & \sqrt{3}\\3 & 3 & 3\end{vmatrix} = 0, \because r_3 = 3 \times r_1 \therefore |A| = 0$

54. $A = \begin{bmatrix}8 & -5\\7 & 2\end{bmatrix}$; adj $A = \begin{bmatrix}2 & 5\\-7 & 8\end{bmatrix}$

55. $A \to 2 \times 3$ এবং $B \to 3 \times 1 \therefore AB \to 2 \times 1$

58. $\because A = A^T, \therefore$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স $\therefore |A| = 16 - 16 = 0$
$\therefore$ ইহা একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।
A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স

60. (i) A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স ; (ii) $A = \begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\4 & 6 & 8\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$
$\therefore |A| = 2(12 - 8) - 3(8 - 24) + 4(4 - 18) = 0$
(iii) প্রতিসম নয়

61. সমঘাতি ম্যাট্রিক্স, $A^2 = A$
ধরি, $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\-2 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\-2 & -1\end{bmatrix}$

Educationblog24.com

62. $\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\0 & 3 & 6\\1 & -1 & -2\end{bmatrix}$ নির্ণায়কটির- [CB'22]

(i) মান = 0

(ii) (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি = 5

(iii) (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক = 0

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

63. $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -4\end{bmatrix}$ এর অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স কোনটি? [CB'22; JB'21; JB;19]

(a) $\begin{bmatrix}-4 & 2\\3 & -1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-4 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}-4 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}-4 & -2\\3 & 1\end{bmatrix}$

64. যদি $\begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\-5 & 0 & y\\x & 4 & 0\end{bmatrix}$ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) =? [Din.B'22]

(a) (−3, −4) (b) (−3, 4)

(c) (3, −4) (d) (3, 4)

65. $\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\2 & -1 & x\\6 & 2 & 8\end{bmatrix}$ এর (1, 1) তম ভুক্তির অনুরাশি −4 হলে x এর মান কত? [Din.B'22; DB'21; JB'19]

(a) 6 (b) 2 (c) −2 (d) −6

66. $A^2 = A$ হলে A ম্যাট্রিক্সটি- [MB'22]

(a) সমঘাতি (b) ব্যতিক্রমী

(c) প্রতিসম (d) অব্যতিক্রমী

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\begin{bmatrix}3 & -3 & 0\\5 & 4 & 3\\7 & -2 & -4\end{bmatrix}$ একটি নির্ণায়ক।

67. (2,1) তম ভুক্তির অনুরাশি- [MB'22]

(a) −41 (b) −12 (c) 12 (d) 41

68. (3,2) তম ভুক্তির সহগুণক- [MB'22]

(a) −12 (b) −9 (c) 9 (d) 12

69. A, B, C ম্যাট্রিক্সত্রয়ের মাত্রা যথাক্রমে 3 × 4, 4 × 5 ও 5 × 2 হলে, (AB)C এর মাত্রা- [MB'22]

(a) 4 × 5 (b) 3 × 2 (c) 2 × 3 (d) 3 × 5

70. $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\-1 & 4 & 5\\3 & 5 & 1\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি- [MB'22]

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(iii) অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

71. $A = \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\4 & 6 & 8\end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix}6\\7\\8\end{bmatrix}$ হলে, AB এর ক্রম কত? [DB'21]

(a) 2 × 1 (b) 1 × 2

(c) 3 × 1 (d) 1 × 3

72. $\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 10 & 0\\0 & 0 & 20\end{bmatrix}$ একটি- [DB'21]

(i) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (ii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(iii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

62. b	63. c	64. c	65. c	66. a	67. c	68. b	69. b	70. d	71. a	72. a

62. ধরি, $A = \begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\0 & 3 & 6\\1 & -1 & -2\end{bmatrix}$

(i) $|A| = 3(-6+6) - 2(0-6) + 4(0-3) = 0$

(ii) (2,3) তম ভুক্তির অনুরাশি $= \begin{vmatrix}3 & 2\\1 & -1\end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$

(iii) (2,1) তম ভুক্তির সহগুণক $= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 4\\-1 & -2\end{vmatrix}$

$= (-1)\{(-4) - (-4)\} = 0$

63. $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -4\end{bmatrix} \therefore \text{Adj } A = \begin{bmatrix}-4 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}$

64. বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের জন্য, $A^t = -A$

এখানে, $A = \begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\-5 & 0 & y\\x & 4 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow -A = -\begin{bmatrix}0 & -5 & 3\\5 & 0 & -y\\-x & -4 & 0\end{bmatrix}$

আবার, $A^t = \begin{bmatrix}0 & -5 & x\\5 & 0 & 4\\-3 & y & 0\end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $-x = -3 \therefore x = 3$ এবং $y = -4$

$\therefore (x, y) = (3, -4)$

65. (1,1) তম ভুক্তির অনুরাশি = −4

$\Rightarrow -8 - 2x = -4 \Rightarrow -2x = 4 \therefore x = -2$

67. (2,1) তম ভুক্তির অনুরাশি $= \begin{vmatrix}-3 & 0\\-2 & -4\end{vmatrix} = 12 - 0 = 12$

68. (3,2) তম ভুক্তির সহগুণক $= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 0\\5 & 3\end{vmatrix} = -9$

69. $A_{3\times4} \cdot B_{4\times5} \cdot C_{5\times2} = (AB)C_{3\times2} \therefore$ আকার = 3 × 2

70. ইহা একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স $\because A = A^T$,

$\therefore$ ইহা একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

$\therefore |A| = \begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\-1 & 4 & 5\\3 & 5 & 1\end{vmatrix} = -109 \neq 0$

$\therefore$ ইহা একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

71. $A_{(2\times3)} \times B_{(3\times1)} = C_{(2\times1)}$

72. (i) কর্ণ বাদে সব ভুক্তি শূন্য

(ii) সারি ও কলাম পরিবর্তনে একই থাকে

(iii) কর্ণের সব ভুক্তি সমান নয়

Educationblog24.com

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

73. A ম্যাট্রিক্সটি হলো- [RB'21]

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) কর্ণ ম্যাট্রিক্স

(iii) সমঘাতি ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

74. $|A|$ এর মান কত? [RB'21]

(a) 0 (b) 3 (c) 9 (d) 27

75. নিচের কোনটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স? [RB'21]

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

76. AB ম্যাট্রিক্সটি হবে- [RB'21]

(a) $\begin{bmatrix} 28 \\ 22 \\ 40 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 22 \\ 28 \\ 40 \end{bmatrix}$

(c) $[22 \quad 28 \quad 40]$ (d) $[28 \quad 22 \quad 40]$

77. উপরের তথ্যের আলোকে- [RB'21]

(i) $|A| = 0$ (ii) AB এর ক্রম 3×1

(iii) BA নির্ণয়যোগ্য

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

78. $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ হলে, $P^2 - 2I$ এর মান হবে- [Ctg.B'21]

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

79. $A = [a_{ij}]_{3\times2}$ এবং $B = [b_{ij}]_{2\times4}$ হলে, AB ম্যাট্রিক্সটির আকার- [Ctg.B'21]

(a) 3×2 (b) 2×4 (c) 4×3 (d) 3×4

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

80. C এর ক্ষেত্রে- [Ctg.B'21]

(i) (2, 2) তম অনুরাশি 1 (ii) $|C| = 2$

(iii) $3C = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

81. C^{-1} এর সমান- [Ctg.B'21]

(a) $\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

82. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ y & 6 & x \\ -3 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের (3, 2) তম অনুরাশির মান 2 হলে, x ও y এর মধ্যে সম্পর্কটি- [Ctg.B'21]

(a) $2x + 5y = 2$ (b) $3x + y = 2$

(c) $x - 2y = 2$ (d) $x - 2y = 1$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

73. a	74. d	75. c	76. b	77. a	78. b	79. d	80. b	81. a	82. d

73. A বর্গ এবং কর্ণ ম্যাট্রিক্স (iii) এর ক্ষেত্রে $A = 3I$

$A^2 = 3^2I = 3 \cdot 3I = 3A \neq A \therefore$ A সমঘাতি ম্যাট্রিক্স নয়।

74. $|A| = 3 \times 3 \times 3 = 27$

Note: $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ হলে, $|A| = abc$

75. ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে $|A| \neq 0$ হলে ইহা অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

$\therefore \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10; \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$

75. $|A| = 4 \times 3 - 2 = 10 \neq 0$

76. AB = ক্যালকুলেটরের সাহায্যে $= \begin{bmatrix} 22 \\ 28 \\ 40 \end{bmatrix}$

77. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 1(32 - 36) - 3(16 - 24) + 5(12 - 16) = 0$

(ii) $A_{(3\times3)} \times B_{(3\times1)} = (AB)_{(3\times1)}$; (iii) $B_{(3\times1)} \times A_{(3\times3)}$; B এর কলাম সংখ্যা $\neq$ A এর সারি সংখ্যা $\therefore$ BA অনির্ণেয়।

78. $P^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+0 & -1-3 \\ 0+0 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

$\therefore P^2 - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

79. $A_{(3\times2)} \times B_{(2\times4)} = (AB)_{(3\times4)}$

80. (ii) এর ক্ষেত্রে $|C| = -2$

$\therefore 3C = 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

(2, 2) তম অনুরাশি = 1

81. $C^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

82. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ y & x \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow 2x - 4y = 2$

$\therefore x - 2y = 1$

Educationblog24.com

83. $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ হলে, A একটি- [SB'21]

(i) বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (ii) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

(iii) কর্ণ ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

84. $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির -4 ভুক্তির অনুরাশি কত? [SB'21]

(a) 24 (b) 6 (c) -6 (d) -24

85. $A = [1 \quad -2 \quad 3], B = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$ হলে, $3AB$ = কত? [BB'21]

(a) $[-27]$ (b) $[-7]$ (c) $[7]$ (d) $[21]$

86. নিচের কোনটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স? [BB, CB'21]

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

87. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের- [BB'21]

(i) (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি +2

(ii) (2, 2) তম ভুক্তির সহগুণক 3

(iii) নির্ণায়কটির মান -1

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

88. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -d \end{bmatrix}$ এর অনুবন্ধী (Adjoint) ম্যাট্রিক্স কোনটি? [BB'21]

(a) $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & -a \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -d & b \\ c & a \end{bmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

89. $A + B$ = কত? [BB'21]

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

90. $A' - B'$ = কত? [BB'21]

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও।

$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হলে-

91. M ম্যাট্রিক্সটি- [JB'21]

(a) প্রতিসম (b) শূন্যঘাতি

(c) সমঘাতি (d) অভেদঘাতি

92. $\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি- [JB'21]

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) অভেদক ম্যাট্রিক্স

(iii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

83. a	84. b	85. d	86. d	87. d	88. c	89. c	90. a	91. d	92. b

83. মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলো 0 অন্যান্য ভুক্তি অশূন্য। ∴ A কর্ণ ম্যাট্রিক্স নয়।

$|A| = 3(0 + 8) + 2(-12 + 0) = 0$

∴ A ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। আবার, $A^T = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -A$ ∴ A বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

84. অনুরাশিটি $= \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6$

85. $3AB = 3[1 \quad -2 \quad 3]\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} = 3[7] = [21]$

86. ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে $|A| = 0$ হলে, সেটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 ; \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -4 ; \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 ; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$

87. (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$

নির্ণায়কের মান $= 1 \cdot (9 - 10) = -1$

আবার, (2, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$

88. 2×2 Matrix এর ক্ষেত্রে $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -d \end{bmatrix}$ এর Adjoint ম্যাট্রিক্স

$= \begin{bmatrix} -d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

89. $A + B = \begin{bmatrix} 1 - 2 & 2 + 3 \\ 0 - 1 & -3 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

90. $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$B' = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore A' - B' = \begin{bmatrix} 1 + 2 & 0 + 1 \\ 2 - 3 & -3 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$

91. $M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $[A^2 = I]$

$= \begin{bmatrix} 1 + 0 & 3 - 3 \\ 0 - 0 & 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

∴ ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি।

92. $\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ একটি বর্গ এবং স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

Educationblog24.com

93. A ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে যখন- [CB'21]

(i) A বর্গ (ii) $A^2 = A$ (iii) $A^T = A$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

94. $\begin{vmatrix} x & y+z & 1 \\ y & x+z & 1 \\ z & x+y & 1 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান কোনটি? [CB'21]

(a) $4x^2y^2z^2$ (b) $4xyz$ (c) 1 (d) 0

95. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ হলে- [CB'21]

(i) Det P = 1 (ii) $P^T = P$ (iii) $P = I_3$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

96. নিচের কোনটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স? [CB'21]

(a) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & a \end{bmatrix}$

97. B একটি 2×2 আকারের ম্যাট্রিক্স এবং $|B| = 5$ হলে, $|3B|$ এর মান কত? [Din.B'21]

(a) 5 (b) 15 (c) 20 (d) 45

98. $P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ হলে, $|P|$ এর মান কত? [Din.B'21]

(a) 12 (b) 20 (c) 60 (d) 120

99. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ও $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ হলে- [Din.B'21]

(i) $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) A^TB এর মাত্রা 2×3 (iii) AB নির্ণয়যোগ্য

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

100. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; A হলো- [MB'21]

(i) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (ii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

(iii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

101. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & x \\ 3 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 8 & 7 \\ 2 & y & -9 \\ z & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 7 \\ 8 & 8 & -18 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

হলে, x, y ও z এর মান কত? [MB'21]

(a) $-4, 8, 2$ (b) $14, 12, 4$

(c) $0, 4, -4$ (d) $0, -4, 4$

102. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, IA =? [MB'21]

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

103. কর্ণ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- [DB'21]

(i) $a_{ij} \neq 0, i = j$ (ii) $a_{ij} = 0, i > j$

(iii) $a_{ij} = 0, i < j$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

93. b	94. d	95. d	96. c	97. d	98. c	99. c	100. b	101. c	102. d	103. d

93. $A^2 = A$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হওয়ার শর্ত নয়।

94. $\begin{vmatrix} x & y+z & 1 \\ y & x+z & 1 \\ z & x+y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z & y+z & 1 \\ x+y+z & x+z & 1 \\ x+y+z & x+y & 1 \end{vmatrix}$

$= (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y+z & 1 \\ 1 & x+z & 1 \\ 1 & x+y & 1 \end{vmatrix} = 0$

95. (i) $\text{Det}(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 = 1$

(ii) $P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P$

(iii) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$

96. $A^T = -A$ হলে, এটি বিপ্রতিসম: $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$

97. $|3B| = 3^2|B| = 9 \times 5 = 45$

98. $|P| = 3(20 - 0) = 60$

99. ম্যাট্রিক্স এর বিয়োগ শুধু সম আকারের (ক্রম/মাত্রা সমান) ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে করা যায়
তাই (i) নং অপশনটি ভুল।

(ii) $A^T_{2\times2} B_{2\times3} = (A^TB)_{2\times3}$

(iii) $A_{2\times2}$ এবং $B_{2\times3}$ যেহেতু A এর Column সংখ্যা = B এর Row সংখ্যা

$\therefore$ AB নির্ণয়যোগ্য।

100. (ii) এর ক্ষেত্রে কর্ণের সব ভুক্তি সমান নয়

$\therefore$ A স্কেলার ম্যাট্রিক্স নয়।

(iii) এর ক্ষেত্রে $A^T = A$

101. $x + 7 = 7$

$\therefore x = 0, 4 + z = 0 \therefore z = -4$

$\therefore (x, y, z) \equiv (0, 4, -4); 4 + y = 8 \therefore y = 4$

[বি.দ্র: প্রশ্নে ত্রুটি আছে।

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & x \\ 3 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 8 & 7 \\ 2 & y & -9 \\ z & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 11 & 7 \\ 5 & 8 & -14 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ হওয়া উচিত।]

102. $IA = A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Educationblog24.com

104. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ এর A^{-1} কোনটি? [RB'19; DB'17]

(a) $\frac{1}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$ (b) $\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $24\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

105. A ম্যাট্রিক্সের $p \times n$ এবং B ম্যাট্রিক্সের ক্রম $n \times m$ হলে, AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম কোনটি? [RB, Ctg.B'19; DB, RB, SB'17]

(a) $p \times m$ (b) $n \times p$ (c) $m \times n$ (d) $m \times p$

106. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির- [RB'19]

(i) মান 0 (ii) (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি 5

(iii) (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক 0

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

107. x এর কোন মানের জন্য $|A| = D$ হবে? [Ctg.B'19]

(a) -5 (b) -1 (c) 1 (d) 5

108. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ একটি- [SB'19]

(a) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (b) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(c) স্কেলার ম্যাট্রিক্স (d) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

109. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ = কত? [SB'19]

(a) a (b) ab (c) $-abc$ (d) abc

110. $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $A - B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ হলে, নিচের কোনটি B ম্যাট্রিক্স? [BB'19]

(a) $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

111. $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ হলে, PQ এর ক্রম কত? [CB'19]

(a) 1×2 (b) 2×1 (c) 4×1 (d) 4×4

112. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$ একটি- [CB'19]

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

(iii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

113. $2\begin{vmatrix} 2 & 5 & x \\ 3 & 6 & y \\ 4 & 7 & z \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের সমান কোনটি? [Din.B'19]

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 10 & x \\ 6 & 12 & y \\ 8 & 14 & z \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 4 & 10 & 2x \\ 6 & 12 & 2y \\ 8 & 14 & 2z \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 4 & 7 & x+2 \\ 6 & 8 & y+2 \\ 8 & 9 & z+2 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 2 & 10 & x \\ 3 & 12 & y \\ 4 & 14 & z \end{vmatrix}$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

104. d	105. a	106. c	107. d	108. b	109. d	110. a	111. b	112. c	113. d

104. **Shortcut:** $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ [কর্ণ ম্যাট্রিক্স]

এর জন্য $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$ $\therefore A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

105. $A_{p\times n} \times B_{n\times m} = AB_{p\times m}$

106. (i) নির্ণায়কের মান $= 3(-6+6) ; +1(12-12) = 0$

(ii) (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$

(iii) (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক $= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4+4) = 0$

107. $|A| = 6 + 4 = 10 ; |D| = x(0+2) = 2x$

$\therefore 2x = 10 \Rightarrow x = 5$

[বি.দ্র: $|A| = |D|$ ধরে ম্যাথ করা হয়েছে।]

108. মূখ্য কর্ণের সাপেক্ষে ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম বা $A = A^T$। তাই এটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়কের মান

$= 2(4-0) - 0 + 1(0-2) = 6$ $\therefore$ এটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

109. $a(bc - 0) - 0 + 0 = abc$

অথবা, স্কেলার ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান = মূখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলোর গুণফল

110. $(A + B) - (A - B) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 2B = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

$\therefore B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

111. $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 4}$ এবং $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4\times 1}$

$\therefore$ PQ এর আকার 2×1

112. $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = -32$

$\therefore$ অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$

$\therefore$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম।

113. d-এ প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের শুধুমাত্র C_2 কে 2 দ্বারা গুণ করা হয়েছে।

Educationblog24.com

114. $\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি- [All.B'18]

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) অভেদক ম্যাট্রিক্স

(iii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

115. $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স হলে, A একটি- [DB'17]

(i) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(ii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

(iii) কর্ণ ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

116. $A=\begin{bmatrix}3&1\\2&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ এবং $AX=B$ হলে, (x,y) = কত? [RB'17]

(a) (2, 0) (b) (2, 2)

(c) (2, 4) (d) (4, −3)

117. $A=\begin{bmatrix}3&5&1\\4&0&2\\1&6&4\end{bmatrix}$ হলে, $A-2I=?$ [RB'17]

(a) $\begin{bmatrix}5&5&1\\4&2&2\\1&6&6\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1&5&1\\4&-2&2\\1&6&2\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1&3&-1\\4&0&2\\1&6&4\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1&3&-1\\2&-2&0\\-1&4&2\end{bmatrix}$

118. a এর মান কত হলে $\begin{bmatrix}-4&0&-2\\0&5&a\\-2&4&0\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হবে? [Ctg.B'17]

(a) −4 (b) −2

(c) 0 (d) 4

119. $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ একটি- [Sy

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

(iii) কর্ণ ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

120. $A=\begin{bmatrix}2&3\\5&4\end{bmatrix}$ হলে- [SB'

(i) $|A|$ এর মান −7

(ii) (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক 5

(iii) (2, 1) তম ভুক্তির অনুরাশি 3

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

121. যদি I_3 একটি ৩য় ক্রমের ম্যাট্রিক্স হয় তবে $(I_3)^{-1}=?$ [BB'

(a) 0 (b) I_3 (c) $\frac{1}{3}I_3$ (d) $3I_3$

122. A ও B দুটো 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে, $|A-B|=0$ এর সমার্থক- [BB'

(a) $A=0_{mat}$ বা $B=0_{mat}$

(b) $|A|=0$ বা $|B|=0$

(c) $|A|=0$ এবং $|B|=0$

(d) $A=0_{mat}$ এবং $B=0_{mat}$

123. নিচের কোন নির্ণায়কের মান শূন্য? [BB'

(a) $\begin{vmatrix}1&0&2\\2&0&1\\1&3&0\end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix}4&0&8\\2&3&4\\1&5&2\end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix}0&0&1\\1&2&3\\0&6&0\end{vmatrix}$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

114. b	115. b	116. a	117. b	118. d	119. b	120. b	121. b	122. d	123. c

115. A কর্ণ ম্যাট্রিক্স; $A^T=A$ হওয়ায় A প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং মুখ্য কর্ণের সকল ভুক্তি সমান না হওয়ায় A স্কেলার ম্যাট্রিক্স নয়।

116. $AX=\begin{bmatrix}3x+y\\2x\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}; AX=B$

$\therefore 3x+y=6$ এবং $2x=4$

$\therefore x=2; y=0$

বিকল্প: $AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{0-2}\begin{bmatrix}0&-1\\-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$

$\therefore x=2, y=0$

117. $A-2I=\begin{bmatrix}3&5&1\\4&0&2\\1&6&4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5&1\\4&-2&2\\1&6&2\end{bmatrix}$

118. ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হলে, $\begin{bmatrix}-4&0&-2\\0&5&a\\-2&4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0&-2\\0&5&4\\-2&a&0\end{bmatrix}$

$\therefore a=4$

120. (i) $|A|=8-15=-7$

(ii) (1, 2) এর সহগুণক $=(-1)^{1+2}[5]=-5$

(iii) (2, 1) এর অনুরাশি $=3$

121. I একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স হলে, $I^{-1}=I$

122. A ও B উভয়ে শূন্য ম্যাট্রিক্স হলেই $|A-B|=0$ হতে বাধ্য।

123. $\begin{vmatrix}4&0&8\\2&3&4\\1&5&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}4&0&4\\2&3&2\\1&5&1\end{vmatrix}\left[c_3=\frac{c_3}{2}\right]=0$ [∵ 2টি Column একই]

Educationblog24.com

124. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ এর মান কোনটি? [JB'17]

(a) −3 (b) −2 (c) 2 (d) 3

125. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ একটি– [JB'17]

(i) বর্গ Matrix (ii) কর্ণ Matrix (iii) স্কেলার Matrix

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

126. $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{N}$ একটি- [CB'17]

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স

(ii) অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

(iii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) i (d) i, ii, iii

127. $A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \forall s \in \mathbb{R}$ এবং $s \neq 0$ হলে, A^{-1} কোনটি? [CB'17]

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{s} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{s} & 0 \\ 0 & -s \end{bmatrix}$

128. $A = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & -\beta_2 & \gamma_2 \\ -\alpha_3 & \beta_3 & -\gamma_3 \end{vmatrix}$ এর মান- [CB'17]

(i) $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3 \\ \beta_1 & -\beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\gamma_3 \end{vmatrix}$ এর মানের সমান

(ii) $\begin{vmatrix} \alpha_1 + c\alpha_2 & \alpha_2 & -\alpha_3 \\ \beta_1 - c\beta_2 & -\beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 + c\gamma_2 & \gamma_2 & -\gamma_3 \end{vmatrix}$ এর মানের সমান

(iii) $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ -\alpha_3 & \beta_3 & -\gamma_3 \\ \alpha_2 & -\beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ এর মানের সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) ii (c) i, ii (d) i, ii, iii

129. $\begin{vmatrix} p & 2 & q+r \\ q & 2 & r+p \\ r & 2 & p+q \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান কত? [Din.B'17]

(a) 0 (b) 1 (c) pqr (d) p + q + r

130. (i) প্রত্যেক অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান [Din.B'17]

(ii) A ও B বর্গাকার অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iii) কোনো নির্ণায়কের অনুরূপ সারি এবং কলামসমূহ পরস্পর অবস্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের মানের পরিবর্তন হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

124. b	125. d	126. d	127. b	128. c	129. a	130. a

126. [Note: ∀ চিহ্নের অর্থ 'for all']

(ii) $|A| = \alpha^2 \neq 0 [\because \alpha \in \mathbb{N}$ তাই, $\alpha \neq 0]$

127. এখানে $A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ হওয়ায়

$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \because A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ হলে, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$

128. (i) $r \leftrightarrow c$ করলে নির্ণায়কের মান অপরিবর্তিত থাকে।

(ii) $r \leftrightarrow c$ এর পর $c_1' = c_1 + c.c_2$ করলে নির্ণায়কের মান অপরিবর্তিত থাকে।

(iii) $r_2 \leftrightarrow r_3$ করলে নির্ণায়কের মাঝের চিহ্ন পরিবর্তিত হয়।

129. $\begin{vmatrix} p & 2 & q+r \\ q & 2 & r+p \\ r & 2 & p+q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p+q+r & 2 & q+r \\ p+q+r & 2 & r+p \\ p+q+r & 2 & p+q \end{vmatrix} [c_1' = c_1 + c_3]$

$= 2(p+q+r)\begin{vmatrix} 1 & 1 & q+r \\ 1 & 1 & r+p \\ 1 & 1 & p+q \end{vmatrix} = 0 \left[c_1' = \frac{c_1}{p+q+r}, c_2' = \frac{c_2}{2}\right]$

বিভিন্ন কলেজের টেস্ট পরীক্ষার MCQ প্রশ্ন

131. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটিতে 3 এর অনুরাশি কত? [মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]

(a) 1 (b) −2

(c) 2 (d) −4

132. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি কী ধরনের? [মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]

(a) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (b) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

(c) স্কেলার ম্যাট্রিক্স (d) শূন্য ম্যাট্রিক্স

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

131. a	132. b

Educationblog24.com

133. $A = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সে $x = 0$ হলে, (2, 2) তম ভুক্তির সহগুণক কত?

[ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ]

(a) -2 (b) 2 (c) -8 (d) 8

134. A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে, অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্সের জন্য নিচের কোনটি সঠিক? [রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ]

(a) $A^2 = A$ (b) $A^2 = I$ (c) $A^2 = 0$ (d) $AI = 0$

135. A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর মাত্রা যথাক্রমে 4×3, 3×4 এবং 7×4 হলে, $(B + A^T)C^T$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা কত?

[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]

(a) 3×4 (b) 3×7 (c) 4×3 (d) 4×7

136. $A = \begin{bmatrix} x & -2 & -9 \\ 2 & y & a \\ 9 & -2 & z \end{bmatrix}$ যদি বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয়, তবে $x + y + z + a =$ কত? [নটর ডেম কলেজ, ঢাকা]

(a) -2 (b) 0
(c) 2 (d) 1

137. যদি $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $P = \begin{bmatrix} a-4 & 0 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix}$ হয়, তবে- [নটর ডেম কলেজ, ঢাকা]

(i) $N^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $MN = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) P ব্যতিক্রমী হলে, $a = 2, -4$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

138. $P = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $PQ = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ হলে, Q ম্যাট্রিক্স কোনটি? [ঢাকা কলেজ]

(a) $\begin{bmatrix} 20 \\ -10 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (d) $[20, -1]$

139. $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ হলে, A একটি-

[আদমজী ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, ঢাকা]

(i) বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স
(ii) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স
(iii) কর্ণ ম্যাট্রিক্স
নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

140. যদি $A = [a_{ij}]$ একটি 2×2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স হয়; যেখানে $[a_{ij}] = i + 2j$, তবে A নিচের কোনটি? [হলি ক্রস কলেজ, ঢ

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & \\ 6 & \end{bmatrix}$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

141. $A_{(1,3)}$ তম ভুক্তির সহগুণক নিচের কোনটি? [হলি ক্রস কলেজ, ঢ

(a) -13 (b) -2 (c) 2 (d) 13

142. $A_{(2,3)}$ তম ভুক্তির অনুরাশি নিচের কোনটি? [হলি ক্রস কলেজ, ঢ

(a) 26 (b) 33 (c) -26 (d) -33

143. $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $A - B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ হলে, নি কোনটি B ম্যাট্রিক্স? [বীরশ্রেষ্ঠ মুন্সী আব্দুর রউফ পাবলিক কলেজ, ঢ

(a) $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

144. নিচের কোনটি শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স? [চৌদ্দগ্রাম সরকারি কলেজ, কুমি

(a) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

145. নিচের কোনটি উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স? [বাংলাদেশ নৌবাহিনী স্কুল এন্ড কলেজ, রাঙ্গাম

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 9 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

146. $\begin{bmatrix} i & i \\ 2i & i \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স কোনটি? [যশোর সরকরি মহিলা কলে

(a) $\begin{bmatrix} i & -i \\ 2i & -i \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -i & 2i \\ i & i \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} i & 2i \\ i & i \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} i & -i \\ -2i & i \end{bmatrix}$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

133. d	134. b	135. b	136. c	137. a	138. c	139. a
140. c	141. a	142. c	143. a	144. a	145. d	146. d

8. $P = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

$\therefore Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{32-12}\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 40 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

143. $A + b - (A - B) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 2B = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} \therefore B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

Educationblog24.com

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট: অধ্যায়-০১

পূর্ণমান: ২৫ | MCQ | সময়: ২৫ মিনিট

01. $\begin{bmatrix}1 & 8\\3 & 4\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ট্রেস হলো-
(a) 5 (b) 11 (c) 9 (d) 7

02. ম্যাট্রিক্স গঠনকারী সংখ্যাগুলিকে বলা হয়-
(a) ঘাত (b) ভুক্তি (c) সারি (d) কলাম

03. কোন নির্ণায়কের একটি সারি বা কলামের সকল ভুক্তি 0 হলে, নির্ণায়কটির মান-
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) 1 (d) 10

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{pmatrix}5 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$$

04. $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}$ এবং $AX = B$ হলে $x + y =$ কত?
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 7

05. A ম্যাট্রিক্সের ক্রম 1×3 এবং B ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×3 হলে নিচের কোন ম্যাট্রিক্স গুণনটি নির্ণয় করা সম্ভব?
(a) AB (b) BA (c) A^TB (d) AB^T

06. $A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$ হলে $A^3 - A^2$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) I (b) 2I (c) A (d) 2A

07. $\begin{bmatrix}a+5 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}$ একটি–
(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) $a = 1$ হলে ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে
(iii) $a = 1$ হলে ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হবে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) i, ii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

08. $A_{2\times3}$ এবং $B_{3\times2}$ ম্যাট্রিক্স হলে-
(i) AB নির্ণয় সম্ভব (ii) A + B নির্ণয় সম্ভব
(iii) A, B এর গুণফল $C_{2\times2}$ হবে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

09. $A = \begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\-2 & 0 & 4\\-3 & -4 & 0\end{bmatrix}$ এর জন্য-
(i) $\det(A) = 0$ (ii) $A.A^{-1} = I_3$
(iii) $A^T = -A$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

10. a এর মান কত হলে $\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & a\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতকরণযোগ্য নয়?
(a) $\frac{3}{2}$ (b) $-\frac{3}{2}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

11. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\x & a & b\\x^2 & a^2 & b^2\end{bmatrix} = 0$ হলে, x এর মান কত?
(a) a, b − a (b) a, −b (c) −a, b (d) −a, −b

12. $A = (a_{ij})_{m\times m}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে-
(i) A কে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হয় যদি $A^T = A$ হয়
(ii) A কে বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^T = -A$ হয়
(iii) A কে অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^n = 0$ হয়
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

13. নিচের কোনটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স?
(a) $\begin{pmatrix}-2 & 1\\-2 & -1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}4 & 3\\-4 & -3\end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix}4 & -4\\4 & -4\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}-2 & -1\\-2 & -1\end{pmatrix}$

14. যদি $A = \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$ হয় তাহলে-
(i) $|A^2| = |A|$ (ii) $|A^2| = 2|A|$
(iii) $|A^3| = 8$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

15. A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স B হলে-
(i) $AB = BA = I$ (ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
(iii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

16. $\begin{vmatrix}1 & bc & bc(b+c)\\1 & ca & ca(c+a)\\1 & ab & ab(a+b)\end{vmatrix}$ এর মান কোনটি?
(a) 1 (b) abc
(c) abc (a + b + c) (d) 0

17. $A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ হলে $(AB)^{-1}$ এর মান কত?
(a) $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$A = \begin{bmatrix}51 & 26\\13 & 12\end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix}12 & 13\\26 & 51\end{bmatrix}$ দুটি ম্যাট্রিক্স।

18. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর:
(i) $(A + B)^T = A + B$ (ii) A হল B এর Transpose
(iii) $|A| = |B|$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

19. $\begin{bmatrix}2 & 0 & -4\\3 & 0 & 0\\1 & 0 & -2\end{bmatrix}$ এর শূন্যঘাতির সূচক কত?
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

20. ω এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল এবং $A = \begin{bmatrix}\omega & 0\\0 & \omega\end{bmatrix}$ হলে, $A^{100} = ?$
(a) A (b) A^7 (c) A^{10} (d) সবগুলো

Educationblog24.com

21. $\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 1\\-1 & z\\y & -3\end{bmatrix}$ হলে $(x, y, z) = ?$

(a) $(3, 3, 4)$ (b) $(3, 4, 3)$
(c) $(3, -3, 4)$ (d) $(1, -3, -1)$

22. নিচের কোনটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স?

(a) $\begin{bmatrix}0 & b\\-b & 0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}b & 0\\0 & -b\end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix}b & -b\\-b & 0\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0 & -b\\-b & b\end{bmatrix}$

23. a এর কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix}-3 & 0 & -1\\0 & 3 & a\\-1 & 4 & 0\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হবে?

(a) 4 (b) 0 (c) -1 (d) -4

24. $A=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}, B=[3 \quad -2 \quad -1]$ এবং $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 9 & 4\\5 & 0 & 1\end{bmatrix}$ হলে কোনটি নির্ণয়যোগ্য?

(a) AB (b) $B + A$ (c) $A - C$ (d) CB

25. $A=\begin{bmatrix}a & 2 & 5\\-2 & b & -3\\-5 & 3 & c\end{bmatrix}$ একটি বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে, a, b, c এর মানগুলি–

(a) $-2, -5, 3$ (b) $0, 0, 0$
(c) $1, 1, 1$ (d) $2, 5, 3$

পূর্ণমান: ৫০ **CQ** সময়: ২:৩৫ ঘ

(যেকোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও)

01. $A=\begin{bmatrix}1+x & 2 & 3\\2 & 3+x & 1\\3 & 1 & 2+x\end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স।

(ক) বর্গ ম্যাট্রিক্স বলতে কী বোঝায়? 2
(খ) $x = 1$ হলে $A^2 - 2A - 3I$ এর মান নির্ণয় কর। 4
(গ) উদ্দীপকের উল্লিখিত ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে x এর মানসমূহ নির্ণয় কর। 4

02. একটি দোকানে পর পর তিন দিনের পদার্থবিজ্ঞান, রসায়ন ও গণিত বিষয়ে বই বিক্রয়ের হিসাব নিম্নরূপ:

দিন	পদার্থবিজ্ঞান	রসায়ন	গণিত
প্রথম দিন	x খানা	y খানা	z খানা
দ্বিতীয় দিন	x^2 খানা	y^2 খানা	z^2 খানা
তৃতীয় দিন	$(x^3 - 1)$ খানা	$(y^3 - 1)$ খানা	$(z^3 - 1)$ খানা

পদার্থবিজ্ঞান, রসায়ন ও গণিত বিষয়ের প্রতিখানা বই বিক্রয়ের লাভ যথাক্রমে 5 টাকা, 7 টাকা ও 4 টাকা। বিক্রয় ম্যাট্রিক্সকে A দ্বারা প্রকাশ করা হল।

(ক) $C=\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 4\end{bmatrix}$ হলে $C^2 - I$ নির্ণয় কর। 2
(খ) দেখাও যে, $\frac{|A|}{(xyz-1)} = (x-y)(y-z)(z-x)$ 4
(গ) যদি $x = 2, y = 5, z = 4$ হয় এবং যদি অপর একটি দোকান একই পরিমাণ বই বিক্রয় করে প্রতিখানা বই থেকে 2 টাকা করে বেশি লাভ করে, তবে ম্যাট্রিক্স এর সাহায্যে দুই দোকানে লাভের তুলনা কর। 4

03. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\3 & -1 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}5\\7\\11\end{bmatrix}; X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ এবং $C = [1 \ 2 \ 3]$.

(ক) অভেদক ম্যাট্রিক্স এর সংজ্ঞা দাও। 2
(খ) প্রমাণ কর যে, $A(BC) = (AB)C$ 4
(গ) নির্ণায়কের সাহায্যে $AX = B$ সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় কর। 4

04. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & 5 & -1\\2 & 3 & 4\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 3\\7 & -2 & 1\\2 & 0 & -3\end{bmatrix}$ দুটি 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

(ক) A^T ও B^T নির্ণয় কর।
(খ) AB ও $(AB)^T$ নির্ণয় কর।
(গ) প্রমাণ কর যে, $(AB)^T = B^T A^T$।

05. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, R=\begin{bmatrix}4\\6\\5\end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

(ক) $\begin{bmatrix}1 & 7\\P & 4\end{bmatrix}$ প্রতিসম হলে P এর মান কত?
(খ) $AX = R$ সমীকরণটি ক্রেমারের নিয়মের সাহায্যে সমাধ কর।
(গ) $f(A) = I$ হলে সমীকরণটি হতে A^{-1} নির্ণয় কর।

06. $f(p, q, r)=\begin{bmatrix}p & p^2 & 1+p^3\\q & q^2 & 1+q^3\\r & r^2 & 1+r^3\end{bmatrix}$

(ক) দেখাও যে, $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -2 & -3\end{bmatrix}$ একটি Idempo Matrix (সমঘাতি ম্যাট্রিক্স)।
(খ) $p = 1, q = 2, r = 3$ ও $B = f(p, q, r)$ হলে B^{-1} নি কর।
(গ) $p \neq q \neq r$ ও $|f(p, q, r)| = 0$ হলে দেখাও যে, $1 + pqr = 0$

Educationblog24.com

07. দুইটি নির্ণায়ক যথাক্রমে:

(i) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$ এবং

(ii) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix}$

(ক) প্রথম নির্ণায়ক থেকে $(a+b+c)^2$ উৎপাদক পৃথক কর। 2

(খ) দেখাও যে, প্রথম নির্ণায়কটির মান $2abc(a+b+c)^3$ 4

(গ) দ্বিতীয় নির্ণায়ক প্রথম নির্ণায়কে রূপান্তর কর। 4

08. $f(x) = \log x$; $g(x) = \cos(2x)$; $h(x) = \sin(x)$ এবং $a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n = 0$

(ক) $\begin{vmatrix} f(x) & f(y) & f(z) \\ f(2x) & f(2y) & f(2z) \\ f(3x) & f(3y) & f(3z) \end{vmatrix} = ?$ 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & g(\alpha) & h(\alpha) \\ 1 & g(\beta) & h(\beta) \\ 1 & g(\gamma) & h(\gamma) \end{vmatrix} = 2\{h(\beta) - h(\gamma)\}\{h(\gamma) - h(\alpha)\}\{h(\alpha) - h(\beta)\}$ 4

(গ) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}$ কে বিস্তার কর। 4

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

MCQ

01. a	02. b	03. b	04. c	05. d	06. d	07. b	08. b	09. b	10. c	11. a	12. a	13. b	14. b	15. d
16. d	17. a	18. b	19. b	20. d	21. b	22. a	23. a	24. a	25. b					

01. Trace হল মূখ্য কর্ণের উপাদানগুলোর যোগফল।

04. $AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5x+2y \\ 3x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} \therefore 5x+2y=7\ ;\ 3x+4y=7\ ; x=1$

$y=1 \therefore x+y=2$

05. $B^T = 3\times 2; A = 1\times 3 \therefore AB^T$ সম্ভব।

06. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$\therefore A^3 - A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2A$

07. $a=1$ হলে $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; |A| = 6-6 = 0 \therefore$ ব্যতিক্রমী।

09. $\det(A) = 0 \therefore A^{-1}$ সংজ্ঞায়িত নয়। ; $A^T = -A$

10. $a=0$ হলে $|A| = 0$ হয়।

11. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & x-a & b \\ x^2 & x^2-a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b(x-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & x+a & b \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow b(x-a)(x-b+a) = 0 \Rightarrow x = a, b-a$

13. $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = A \therefore$ সমঘাতি ম্যাট্রিক্স।

14. $|A| = 2$; $|A^2| = |A||A| = 4$

$2|A| = 4$; $|A^3| = 2^3 = 8$

16. $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & bc & bc(b+c) \\ abc & ca & ca(c+a) \\ abc & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & bc & bc(a+b+c) \\ abc & ca & ca(a+b+c) \\ abc & ab & ab(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & bc & bc \\ 1 & ca & ca \\ 1 & ab & ab \end{vmatrix} = 0$

17. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. $(A+B)^T = \begin{bmatrix} 63 & 39 \\ 39 & 63 \end{bmatrix}^T = (A+B)\ ; B^T = \begin{bmatrix} 12 & 26 \\ 13 & 51 \end{bmatrix} \neq A$

$|A| = \begin{vmatrix} 51 & 26 \\ 13 & 12 \end{vmatrix} = 51\times 12 - 13\times 26 = \begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 26 & 51 \end{vmatrix} = |B|$

19. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \therefore$ সূচক $= 3$

20. $A = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$; $A^{100} = \begin{bmatrix} \omega^{100} & 0 \\ 0 & \omega^{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$

অনুরূপভাবে, $A^7 = A^{10} = A = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \therefore x=3\ ; y=4\ ; z=3$

25. $\begin{bmatrix} a & 2 & 5 \\ -2 & b & -3 \\ -5 & 3 & c \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a & -2 & -5 \\ 2 & b & 3 \\ 5 & -3 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 2 & 5 \\ -2 & -b & -3 \\ -5 & 3 & -c \end{bmatrix}$

$\therefore a = -a \therefore a = 0$; $b = -b \therefore b = 0$; $c = -c \therefore c = 0$

CQ

01. (খ) $\begin{vmatrix} 10 & 11 & 11 \\ 11 & 10 & 11 \\ 11 & 11 & 10 \end{vmatrix}$ (গ) $x = -6, \pm\sqrt{3}$

02. (ক) $\begin{bmatrix} 3 & 18 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$ (গ) 500 টাকা।

03. (গ) $x=2, y=2, z=1$

04. (ক) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \therefore B^T = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(খ) $AB = \begin{bmatrix} 15 & 1 & -4 \\ 35 & -20 & 2 \\ 27 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ $(AB)^T \begin{bmatrix} 19 & 35 & 27 \\ 1 & -20 & 4 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

05. (ক) $P = 7$ (খ) $x=1, y=2, z=3$

(গ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

06. (খ) $\begin{bmatrix} \frac{31}{14} & \frac{-5}{7} & \frac{1}{14} \\ \frac{-29}{14} & \frac{11}{7} & \frac{-5}{14} \\ \frac{3}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

07. (ক) $(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a-b-c & a-b-c \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$

08. (ক) 0 (গ) 0

Educationblog24.com

অধ্যায় ০৩ সরলরেখা

- সৃজনশীল (ক), (খ) ও (গ) নং প্রশ্নের জন্য এ অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	টাইপের নাম	যতবার প্রশ্ন এসেছে			যে বোর্ডে যে বছর এসেছে
			ক	খ	গ	CQ
✪✪✪	T-01	কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক এবং সমীকরণ সংক্রান্ত	11	-	-	BB'23; Din.B'23, 22, 18; SB'22, 18, 17; DB 21, 19, 18; Ctg.B'21; JB'21, 19, 18, CB'21
✪✪	T-02	দুইটি বিন্দুর দূরত্ব সম্পর্কিত	4	-	-	SB'23; DB'21; Ctg.B'21; RB' 17
✪✪✪	T-03	বিভক্তিকরণ বিন্দু ও অনুপাত সংক্রান্ত	5	-	-	JB'23; CB'22; MB'21; RB'19; BB'17
✪✪✪	T-04	ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত	2	4	1	Din.B'22, 21; CB'21; DB'19; JB'19, 17; Ctg.B'17
✪✪	T-05	সঞ্চারপথের সমীকরণ সংক্রান্ত	3	-	-	Ctg.B'22; JB'22; CB'21
✪✪	T-06	ঢাল সংক্রান্ত	4	-	-	Din.B'23, 21; DB'22; RB'21
✪✪✪	T-07	বিভিন্ন ধরনের সরলরেখার সমীকরণ সংক্রান্ত	4	11	8	DB'23, 22, 21, 18; BB'23, 22, 19, JB'23; Din.B'23, 22, 18; RB'22; CB'22, 21; MB'22 21; SB'19, 18
✪✪✪	T-08	সমান্তরাল ও লম্ব হবার শর্ত এবং সমীকরণ নির্ণয়	8	21	7	RB'23, 22, 21, 19, 17; Ctg.B'23, 17; CB'23, 17; MB'23, 22, 21; SB'22, 21, 17; BB'22; JB'22, 21; Din.B'22, 21; DB'21
✪✪	T-09	বহিঃস্থ বিন্দু হতে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় সংক্রান্ত	-	3	2	DB'23, 22, 17; CB'22; BB'17
✪✪✪	T-10	দুইটি সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব নির্ণয় সংক্রান্ত	3	4	2	Ctg.B'23, 17; SB'23, 18; RB'22, 21; JB'21, 18; CB'21; BB'19; DB'18; Din.B'18
✪✪	T-11	ত্রিভুজের বিভিন্ন ধরনের কেন্দ্র নির্ণয় সংক্রান্ত	2	2	5	BB'23, 22, 21; Ctg.B'21; JB'21, 17; RB'19
✪✪✪	T-12	দুইটি রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত	1	5	12	DB'23; RB'23; JB'23, 22, 21; Din.B'22, 21, 19; Ctg.B'21; SB'21; BB'21, 17; CB'21; MB'21
✪✪✪	T-13	কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ এবং কোণের সাপেক্ষে বিভিন্ন বিন্দুর অবস্থান সংক্রান্ত	-	6	17	JB'23, 17; CB'23, 22, 19; Din.B'23, 21; MB'23, 21; Ctg.B'22, 21, 19; SB'22, 21; DB'19, 17
✪	T-14	বিবিধ	1	-	1	Ctg.B'23; SB'23

Educationblog24.com

CQ প্রশ্ন ও সমাধান (ক, খ ও গ)

T-01: কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক এবং সমীকরণ সংক্রান্ত

Concept

- কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) এর পোলার রূপ (r, θ) যেখানে, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
  স্থানাঙ্কটি 1st Quadrant এর হলে, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
  স্থানাঙ্কটি 2nd Quadrant এর হলে, $\theta = \pi - \tan^{-1}\frac{|y|}{|x|}$
  স্থানাঙ্কটি 3rd Quadrant এর হলে, $\theta = -\pi + \tan^{-1}\frac{|y|}{|x|}$; [ঋণাত্মক কোণ] অথবা $\theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [ধনাত্মক কোণ]
  স্থানাঙ্কটি 4th Quadrant এর হলে, $\theta = -\tan^{-1}\frac{|y|}{|x|}$; [ঋণাত্মক কোণ] অথবা $\theta = 2\pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [ধনাত্মক কোণ]
- (r, θ) পোলার স্থানাঙ্কের কার্তেসীয় রূপ (x, y) হলে, $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $(-1, -1)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [BB'23]

(ক) **Sol^n:** $(-1, -1)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, বিন্দুটি ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore \alpha = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{-1}{-1}\right|$

$= -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

$\therefore$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক $(r, \alpha) = \left(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}\right)$ **(Ans.)**

02. (ক) $x^2 + y^2 - 4y = 0$ সমীকরণকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর। [Din.B'23]

(ক) **Sol^n:** পোলার সমীকরণে, $r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r\cos\theta$

এবং $y = r\sin\theta$

এখন, $x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 - 4y = 0$

$\Rightarrow (r)^2 - 4 \cdot r \cdot \sin\theta = 0 \Rightarrow r^2 - 4r\sin\theta = 0$

$\therefore r - 4\sin\theta = 0$ **(Ans.)**

03. $L = (4, 3)$ [MB'23]

(ক) L বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** L(4, 3) বিন্দুটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

এবং $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{3}{4}\right| = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

$\therefore$ L বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(5, \tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$ **(Ans.)**

04. (ক) $(-4, -4)$ কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে রূপান্তর কর। [CB'21; DB, SB, JB, Din.B'18]

(ক) **Sol^n:** $r = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$

$\theta = -\left\{\pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)\right\} = -\frac{3\pi}{4}$

$\therefore$ পোলার স্থানাঙ্ক $\left(4\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}\right)$ **(Ans.)**

05. (ক) $(-1, \sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [JB'19]

(ক) **Sol^n:** $r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right| = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ **(Ans.)**

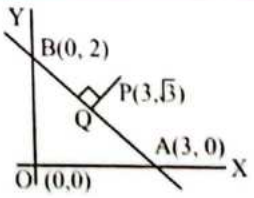
নিজে করো

06. (ক) $x^2 + y^2 - 3y = 0$ কে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর। [SB'22] [Ans: $r - 3\sin\theta = 0$]

07. (ক) $(5, -5)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [Din.B'22] [Ans: $5\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$]

08. (ক) $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [DB, Ctg.B'21] [Ans: $\left(2, -\frac{5\pi}{6}\right)$]

09. (ক) $(-3, -3)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [JB'21] [Ans: $\left(3\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}\right)$]

10. 

[DB'19]

(ক) P বিন্দুর পোলার-স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [Ans: $\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$]

11. (ক) $(-2, -\sqrt{2})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [SB'17]

[Ans: $\left(\sqrt{6}, -\pi + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$]

T-02: দুইটি বিন্দুর দূরত্ব সম্পর্কিত

Concept

(i) x-অক্ষ হতে P(x, y) বিন্দুর লম্ব দূরত্ব = |y| একক

(ii) y-অক্ষ হতে P(x, y) বিন্দুর লম্ব দূরত্ব = |x| একক

(iii) যদি (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) দ্বিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় দুইটি বিন্দু হয়, তাহলে বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ বা, $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ একক।

(iv) যদি (r_1, θ_1) এবং (r_2, θ_2) দ্বিমাত্রিক পোলার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় দুইটি বিন্দু হয় তাহলে বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 \sim \theta_2)}$ একক। [Note: ~ চিহ্ন পার্থক্য নির্দেশ করে।]

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) x- অক্ষ এবং (5, 4) বিন্দু হতে (1, t) বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে t এর মান নির্ণয় কর। [SB'23]

(ক) **Sol^n:** x-অক্ষ হতে (1, t) বিন্দুর দূরত্ব = t

(5, 4) বিন্দু হতে (1, t) বিন্দুর দূরত্ব

$= \sqrt{(5-1)^2 + (4-t)^2} = \sqrt{16 + (4-t)^2}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{16 + (4-t)^2} = t$

$\Rightarrow 16 + 16 + t^2 - 8t = t^2 \Rightarrow 8t = 32 \therefore t = 4$ (Ans.)

02. (ক) y-অক্ষ ও (2, 2) বিন্দু থেকে (a, 5) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান নির্ণয় কর। [DB'21]

(ক) **Sol^n:** y-অক্ষ থেকে (a, 5) বিন্দুর দূরত্ব a একক।

$\therefore \sqrt{(a-2)^2 + (5-2)^2} = a$

$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 + 9 = a^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow -4a + 4 + 9 = 0 \Rightarrow a = \frac{13}{4}$ (Ans.)

03. (ক) (3, 4) এবং (−1, 1) বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। [Ctg.B'2

(ক) **Sol^n:** (3, 4) ও (−1, 1) বিন্দুর দূরত্ব

$D = \sqrt{\{3-(-1)\}^2 + (4-1)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ একক (Ans.)

নিজে করো

04. (ক) y-অক্ষ এবং (k, 4) বিন্দু থেকে A (2, 4) বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে k এর মান নির্ণয় কর। [RB'17] [Ans: 0,

T-03: বিভক্তিকরণ বিন্দু ও অনুপাত সংক্রান্ত

Concept

◆ অন্তর্বিভক্ত:

(i) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে (x, y) বিন্দুটি $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে,

$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$; $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

(ii) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে (x, y) বিন্দুটি k : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে,

$x = \frac{kx_2 + x_1}{k+1}$; $y = \frac{ky_2 + y_1}{k+1}$

(iii) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু (x, y) হলে, $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

◆ বহির্বিভক্তি:

(i) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে (x, y) বিন্দুটি $m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে,

$x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$; $y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$

(ii) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে (x, y) বিন্দুটি k : 1 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে, $x = \frac{kx_2 - x_1}{k-1}$; $y = \frac{ky_2 - y_1}{k-1}$

Educationblog24.com

Shortcut: $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ এর সংযোগ সরলরেখাকে-

(i) $ax + by + c = 0$ সরলরেখাটি যদি $m_1 : m_2$ অনুপাতে বিভক্ত করে তাহলে, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$

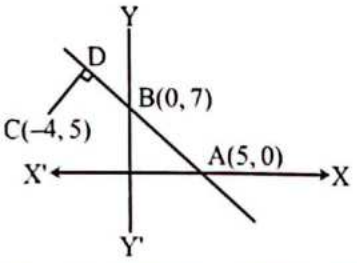
(ii) x-অক্ষ [$y = 0$ রেখা] যদি $m_1 : m_2$ অনুপাতে বিভক্ত করে তাহলে, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y_1}{y_2}$ [কোটিদ্বয়ের অনুপাত]

(iii) y-অক্ষ [$x = 0$ রেখা] যদি $m_1 : m_2$ অনুপাতে বিভক্ত করে তাহলে, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{x_1}{x_2}$ [ভুজদ্বয়ের অনুপাত]

Note: অনুপাতে (+ ve) হলে বহির্বিভক্তি এবং অনুপাত (−ve) হলে অন্তর্বিভক্তি নির্দেশ করে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

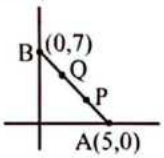
01.



[JB'23]

(ক) AB সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের ত্রিখণ্ডক বিন্দু নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** ধরি, P ও Q বিন্দুদ্বয়



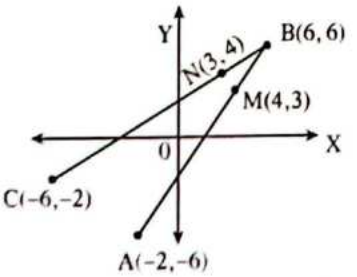
AB রেখাংশকে ত্রিখণ্ডিত করে। এখানে P বিন্দুটি AB কে 1:2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{1\times0+2\times5}{1+2}, \frac{1\times7+2\times0}{1+2}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$

আবার, Q বিন্দুটি AB রেখাকে 2:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{2\times0+1\times5}{2+1}, \frac{2\times7+1\times0}{2+1}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{14}{3}\right)$ **(Ans.)**

02.



[CB'22]

(ক) AM রেখাটি x- অক্ষ দ্বারা যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়, তা নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $A(-2,-6)$ ও $M(4,3)$

মনে করি, AM রেখাটি x-অক্ষ দ্বারা k: 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

প্রশ্নমতে, $\frac{3k-6}{k+1} = 0 \Rightarrow 3k = 6 \therefore k = 2$

$\therefore$ (2: 1) অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। **(Ans.)**

03. (ক) $(-2, 3)$ ও $(1, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 3: 2 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [MB'21]

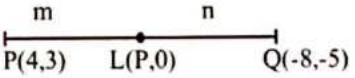
(ক) **Sol^n:** নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y) \equiv \left(\frac{3\times1-2(-2)}{3-2}, \frac{3\times2-2\times3}{3-2}\right)$

$\equiv (7,0)$ **(Ans.)**

04. একটি সরলরেখার সমীকরণ $4x - 3y + c = 0$ এর উপর দুটি বিন্দু P(4, 3) এবং Q(−8, −5)। [RB'19]

(ক) PQ রেখাকে x-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা বের কর।

(ক) **Sol^n:** ধরি, L হলো নির্ণেয় বিন্দু



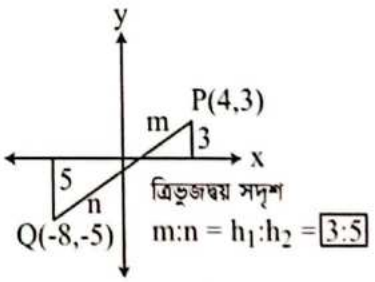
যা x - অক্ষের উপর অবস্থিত, যা m: n অনুপাত বিভক্ত করেছে।

$\therefore \frac{-5m+3n}{m+n} = 0$; $5m = 3n \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{3}{5}$

[x-অক্ষের উপর কোনো বিন্দুর কোটি 0]

$\therefore$ PQ রেখাকে x অক্ষ 3: 5 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

বিকল্প:



05. (ক) (1, 2) এবং (3, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে যে বিন্দু 2:3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [BB'17]

(ক) **Sol^n:** ধরি, $A \equiv (1,2), B \equiv (3,6)$

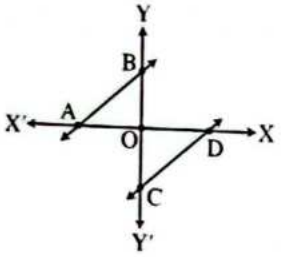
ধরি, $D(x, y)$ বিন্দু AB কে 2: 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে।

$\therefore x = \frac{2\cdot3+3\cdot1}{2+3} = \frac{6+3}{5} = \frac{9}{5}$ এবং

$y = \frac{2\cdot6+3\cdot2}{2+3} = \frac{12+6}{5} = \frac{18}{5}$ $\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $\left(\frac{9}{5}, \frac{18}{5}\right)$ **(Ans.)**

Educationblog24.com

06.



[আদমজী ক্যান্টনমেন্ট কলেজ]

AB রেখার সমীকরণ $4x - 3y + 12 = 0$ এবং AB|| CD

(ক) AB রেখাংশ যে বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, AB রেখার সমীকরণ,

$4x - 3y + 12 = 0 \Rightarrow 4x - 3y = -12 \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$

$\therefore A \equiv (-3, 0)$ এবং $B \equiv (0, 4)$

ধরি, (x, y) বিন্দুটি AB কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore x = \frac{-3+0}{2+1} = -1$ এবং $y = \frac{0+4\times2}{3} = \frac{8}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $\equiv \left(-1, \frac{8}{3}\right)$ **(Ans.)**

07. (ক) দেখাও যে, $(2, -2)$ এবং $(-1, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা অক্ষদ্বয় দ্বারা সমত্রিখণ্ডিত।

[সেন্ট যোসেফ উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা]

(ক) **Sol^n:** প্রদত্ত বিন্দু দুটি হলো $(2, -2)$ এবং $(-1, 4)$

ধরি, y-অক্ষ বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাকে $k : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore 0 = \frac{2-k}{k+1} \Rightarrow k = 2$

$\therefore$ y-অক্ষ বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

আবার, ধরি x-অক্ষ বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাকে q : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore 0 = \frac{-2+4q}{q+1} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$\therefore$ x-অক্ষ বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাকে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

অতএব, $(2, -2)$ এবং $(-1, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা অক্ষদ্বয় দ্বারা সমত্রিখণ্ডিত হয়। **(Showed)**

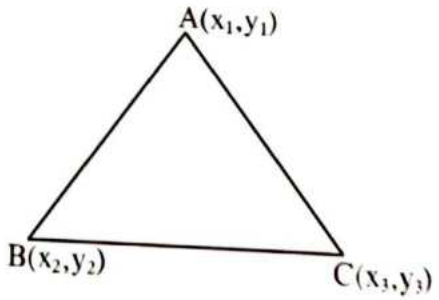
T-04: ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত

Concept

(i) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল:

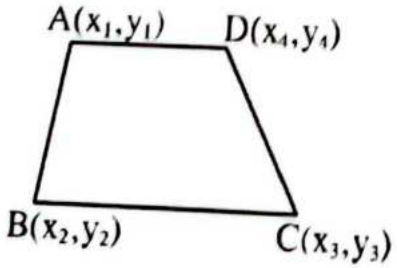
$\Delta ABC = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ বর্গ একক



$= \frac{1}{2}$ x_1 x_2 x_3 x_1
y_1 y_2 y_3 y_1
(−) (−) (−) (+) (+) (+)

(ii) চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল:



চতুর্ভুজ ABCD $= \frac{1}{2}$ x_1 x_2 x_3 x_4 x_1
y_1 y_2 y_3 y_4 y_1
(−) (−) (−) (+) (+) (+) (+)

$= \frac{1}{2}[x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4]$

Educationblog24.com

(iii) ▪ বহুবিশিষ্ট বহুভুজের ক্ষেত্রফল:

মনে করি, বহু বিশিষ্ট বহুভুজের প্রান্ত বিন্দুগুলো যথাক্রমে $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, ... $A_n(x_n, y_n)$ হলে,

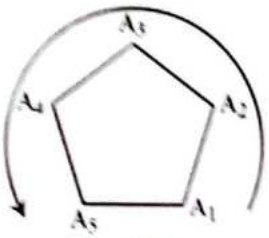
$$\text{বহুভুজীয় ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & \cdots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

(−) (+)

প্রথম বিন্দু, দ্বিতীয় বিন্দু, তৃতীয় বিন্দু, n-তম বিন্দু, প্রথম বিন্দু

সতর্কতা: এক্ষেত্রে খেয়াল রাখতে হবে যেন, $A_1(x_1, y_1)$ ..... $A_n(x_n, y_n)$ বিন্দুগুলো ঘড়ির কাঁটার বিপরীত ক্রমে থাকে। প্রয়োজনে চিত্র এঁকে নিশ্চিত হতে হবে।

অর্থাৎ,



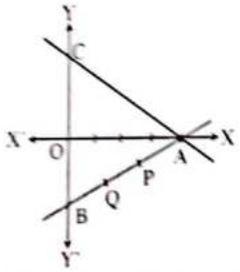
এভাবে বিন্দু নির্বাচন করতে হবে

ভুল পদ্ধতি

ক্রম ঠিক রেখে ঘড়ির কাঁটার দিকে না বিপরীতদিকে এই ঝামেলা এড়ানোর জন্য মডুলাস (| |) ব্যবহার করা যেতে পারে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01



[Din.B'22]

চিত্রে OA = 4, OB = 2 এবং OC = 3

(খ) AP = PQ = QB হলে ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

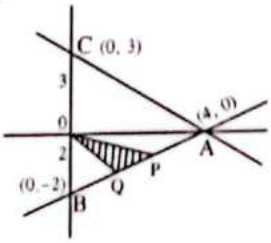
(খ) **Sol":** দেওয়া আছে, OA = 4, OB = 2, OC = 3

এবং AP = PQ = QB

O বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0,0) ; A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 0)

B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, −2) ; C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 3)

চিত্র হতে পাই,



BA রেখাংশকে Q বিন্দু 1:2 এবং P বিন্দু 2:1 অনুপাত অন্তর্বিভক্ত করে।

∴ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{1\times4+2\times0}{1+2}, \frac{1\times0+2\times(-2)}{1+2}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{-4}{3}\right)$

∴ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{2\times4+1\times0}{1+2}, \frac{2\times0+1\times(-2)}{1+2}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

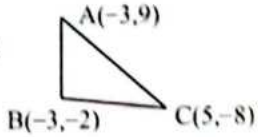
∴ ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{-8}{9} + \frac{32}{9}\right) = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$ বর্গ একক।

∴ ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল $\frac{4}{3}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

02.

উদ্দীপক ১:



[CB'21]

(খ) উদ্দীপক-১ এর প্রদর্শিত ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সাহায্যে A বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) **Sol":** ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 9 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & 1 \end{vmatrix}$

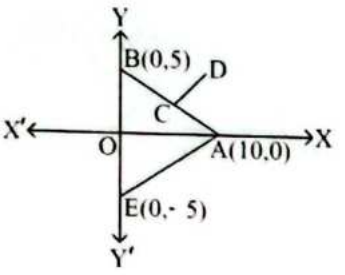
$= \frac{1}{2}|-3(-2+8) - 9(-3-5) + 1(24+10)|$

$= \frac{1}{2}(88)$ বর্গ একক $= 44$ বর্গ একক

শর্তমতে, $\frac{1}{2} \times \sqrt{(-3-5)^2 + (8-2)^2} \times h = 44$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 10 \times h = 44 \Rightarrow h = \frac{44}{5}$ একক **(Ans.)**

03.



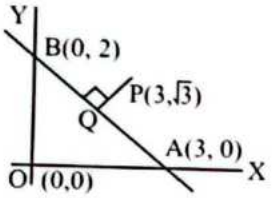
[Din.B'21]

(ক) ΔABE এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BE \times OA$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$ বর্গ একক **(Ans.)**

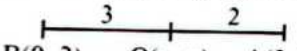
04.



[DB'19]

(খ) $AQ : QB = 2 : 3$ হলে, ΔPQB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** ধরি, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)



$\frac{AQ}{BQ} = \frac{2}{3}$

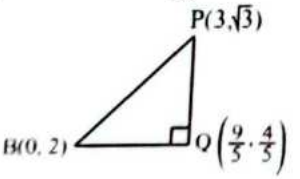
$\therefore$ Q এর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{2\times0+3\times3}{2+3}, \frac{2\times2+3\times0}{2+3}\right) \equiv \left(\frac{9}{5}, \frac{4}{5}\right)$

এখন, ΔPQB এ, $P(3, \sqrt{3})$; $Q\left(\frac{9}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ও $B(0, 2)$

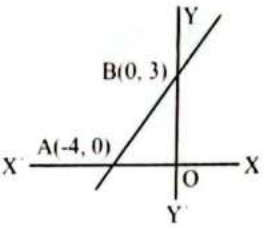
$\therefore \Delta PQB$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{3} & 1 \\ \frac{9}{5} & \frac{4}{5} & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ বর্গ একক।

$= \frac{1}{2}\left|3\left(\frac{4}{5}-2\right) - \sqrt{3}\left(\frac{9}{5}\right) + 1\left(\frac{9}{5}\times 2\right)\right|$ বর্গ একক।

$= \frac{1}{2}\left|-\frac{9\sqrt{3}}{5}\right|$ বর্গ একক। $= \frac{9\sqrt{3}}{10}$ বর্গ একক। **(Ans.)**



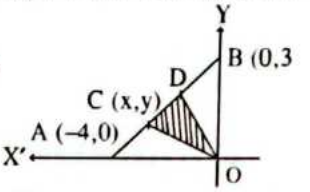
05.



[JB'1

(খ) AB রেখার সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:**



C ও D বিন্দু AB রেখাকে সমত্রিখণ্ডিত করে।

অর্থাৎ, C বিন্দু AB কে 1: 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$x = \frac{1\cdot0+2(-4)}{1+2} = -\frac{8}{3}$ এবং $y = \frac{1\cdot3+2\cdot0}{1+2} = 1$

$\therefore$ C বিন্দু $\left(-\frac{8}{3}, 1\right)$; D, BC রেখার মধ্যবিন্দু

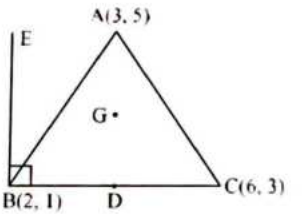
$\therefore$ D বিন্দুটি হল $\left(\frac{-\frac{8}{3}+0}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ বা, $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

$\therefore$ সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয় $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$ ও $\left(-\frac{8}{3}, 1\right)$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & 2 \\ -\frac{8}{3} & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2} \times 4 = 2$ বর্গ একক **(Ans.)**

06.



[JB'

চিত্রে: G, ΔABCএর ভরকেন্দ্র; D, BC এর মধ্যবিন্দু, EB⊥BC

(ক) ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

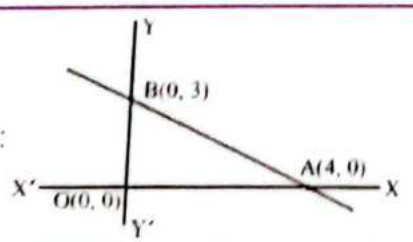
(ক) **Sol^n:** Δ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}|3 + 6 + 30 - 9 - 6 - 10|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times |14|$ বর্গ একক $= 7$ বর্গ একক **(Ans.)**

নিজে করো

07. দৃশ্যকল্প:



[Ctg.B'

(গ) দৃশ্যকল্পের মূলবিন্দু ও AB রেখাংশের সমত্রিখণ্ডন বিন্দুদ্বয় যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans

Educationblog24.com

T-05: সঞ্চারপথের সমীকরণ সংক্রান্ত

Concept

প্রশ্নে প্রদত্ত শর্তসমূহ ব্যবহার করে একটি সেটের সকল P(x, y) বিন্দুর জন্য x ও y এর মধ্যে সাধারণ সম্পর্ক বের করতে হবে। x ও y সম্বলিত এই সমীকরণটিই হবে সঞ্চারপথ।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $(3, -11)$ বিন্দু থেকে সর্বদা 5 একক দূরত্বে অবস্থিত কোনো চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Ctg.B'22]

(ক) **Sol^n:** মনে করি, বিন্দুটি (x, y)

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(3-x)^2 + (-11-y)^2} = 5$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+11)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 22y + 121 = 25$

$\therefore x^2 + y^2 - 6x + 22y + 105 = 0$ **(Ans.)**

02. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \ldots\ldots\ldots (ii)$ [সেন্ট যোসেফ উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা]

(গ) যদি সমীকরণ (ii) অক্ষদ্বয়কে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখাও যে, AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ, $p^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$.

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \ldots\ldots\ldots (ii)$

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}} = 1$ এই সমীকরণটি অক্ষদ্বয়কে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore A \equiv \left(\frac{p}{\cos\alpha}, 0\right), B \equiv \left(0, \frac{p}{\sin\alpha}\right)$

ধরি, A ও B এর মধ্যবিন্দু (x, y)

$\therefore x = \frac{\frac{p}{\cos\alpha}+0}{2} \Rightarrow x = \frac{p}{2\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{p}{2x}$

এবং $y = \frac{0+\frac{p}{\sin\alpha}}{2} \Rightarrow y = \frac{p}{2\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{p}{2y}$

$\therefore \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{p}{2y}\right)^2 + \left(\frac{p}{2x}\right)^2$

$\Rightarrow 1 = \frac{p^2}{4y^2} + \frac{p^2}{4x^2}$

$\Rightarrow 1 = \frac{p^2x^2 + p^2y^2}{4x^2y^2} \Rightarrow p^2x^2 + p^2y^2 = 4x^2y^2$

$\therefore p^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$ **(Showed)**

নিজে করো

03. (ক) $(1, 1)$ বিন্দু থেকে যে সকল বিন্দুর দূরত্ব সর্বদাই 5 একক, ঐ সকল বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [JB'22] [Ans: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$]

04. (ক) $(2, -1)$ বিন্দু থেকে যে সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব 1 একক সেই সেটের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [CB'21] [Ans: $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$]

T-06: ঢাল সংক্রান্ত

Concept

কোনো সরলরেখা (যা x-অক্ষের উপর লম্ব নয়) x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণের ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্টের মানকে রেখাটির ঢাল বলে।

ঢালকে সাধারণত m দ্বারা সূচিত করা হয়। AB সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\theta (0° \le \theta < 180° ; \theta \ne 90°)$ কোণ উৎপন্ন করলে, তার ঢাল $m = \tan\theta$। ভুজ এর প্রতি একক পরিবর্তনের সাপেক্ষে কোটির পরিবর্তনের হারই ঢাল।

(i) (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল, $m = \frac{(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)} = \frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)} = \frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}}$

(ii) $ax + by + c = 0$ সরলরেখার ঢাল, $m = -\frac{a}{b} = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}}$

Educationblog24.com

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $(3,-1)$ এবং $(2,-2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগরেখা x-অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। [Din.B'23]

(ক) **Sol^n:** $(3,-1)$ ও $(2,-2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগরেখার ঢাল:

$m = \frac{-2+1}{2-3} = \frac{-1}{-1} = 1$

উক্ত রেখা x অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে তাহলে

$\tan\theta = m \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(m) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

02. $AB = 4x + 3y - 12 = 0$ [DB'22]

(ক) AB কে ঢাল আকারে প্রকাশ করে ইহার ঢাল নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $AB = 4x + 3y - 12 = 0$

$\Rightarrow 3y = -4x + 12$

$\therefore y = -\frac{4}{3}\cdot x + 4 \ldots\ldots\ldots (i)$

(i) নং সমীকরণটি AB কে ঢাল আকারে প্রকাশিত রূপ।

(i) কে $y = mx + c$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$m = -\frac{4}{3}$ এবং $c = 4$ **(Ans.)**

03. AB রেখার সমীকরণ $x + y = 4$ [RB

(ক) AB রেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

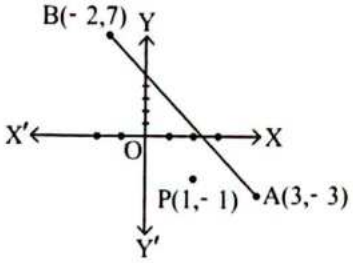
(ক) **Sol^n:** AB রেখার ঢাল, $m = -\frac{1}{1} = -1$

ধরি, x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ তৈরি করে,

$\therefore m = \tan\theta$ বা, $\tan\theta = -1 = \tan 135°$

$\therefore \theta = 135°$ **(Ans.)**

04.



[Din.B

(ক) AB সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** AB রেখার ঢাল $m_{AB} = \frac{-3-7}{3+2} = -2$ **(Ans.)**

T-07: বিভিন্ন ধরনের সরলরেখার সমীকরণ সংক্রান্ত

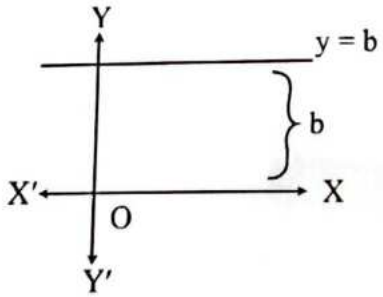
Concept

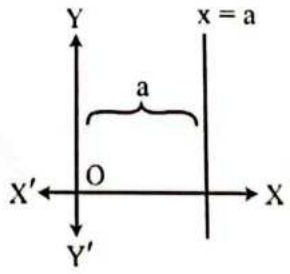
(i) অক্ষের সমীকরণ: x-অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$ এবং y-অক্ষের সমীকরণ, $x = 0$

(ii) অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল সরলরেখাঃ

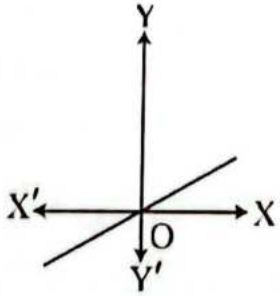
(a) একটি সরলরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ b হলে, রেখাটির সমীকরণ, $y = b$

(b) একটি সরলরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ a হলে, রেখাটির সমীকরণ, $x = a$

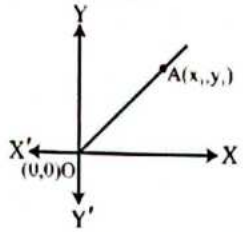




(iii) মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ: একটি সরলরেখা যদি মূলবিন্দুগামী হয় এবং এর ঢাল m হয় তবে রেখাটির সমীকরণ, $y =$

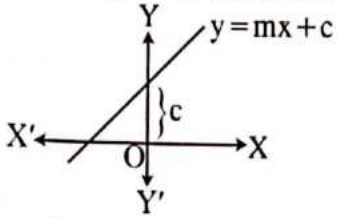


(iv) মূলবিন্দু এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ:

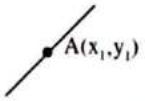


একটি সরলরেখা যদি মূলবিন্দু O(0,0) এবং $A(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী [নির্দিষ্ট বিন্দু] হয় তাহলে তার সমীকরণ, $y = \frac{y_1}{x_1}x$

(v) সরলরেখার ঢাল সমীকরণ: একটি সরলরেখার ঢাল m এবং y- অক্ষের খণ্ডিতাংশ c হলে, সরলরেখাটির সমীকরণ হবে, $y = mx + c$

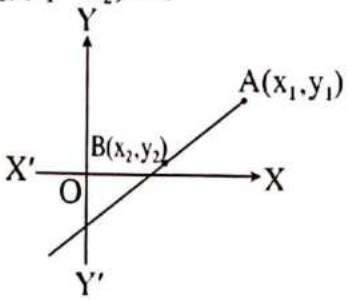


(vi) এক বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ: যদি একটি সরলরেখার ঢাল m এবং রেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হয়, তবে রেখাটির সমীকরণ হবে, $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

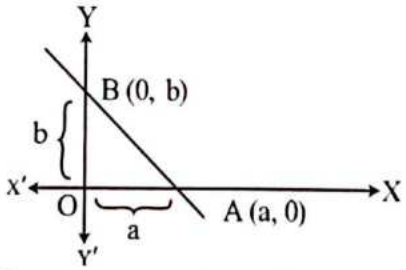


(vii) দুই বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ: $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ হলে, AB সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}$

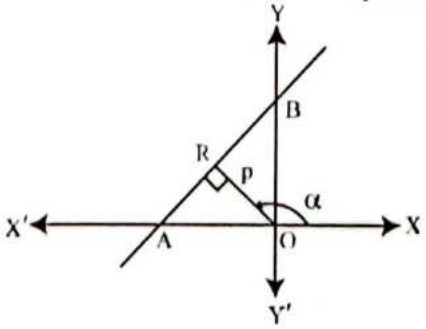
অথবা, $(x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = 0$



(viii) সরলরেখার ছেদক আকৃতির সমীকরণ: একটি সরলরেখার x এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ যথাক্রমে a এবং b হলে রেখাটির সমীকরণ হবে, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

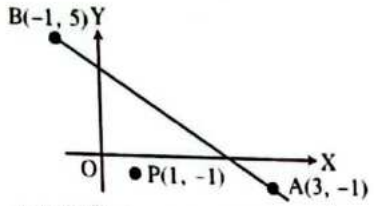


(ix) সরলরেখার লম্ব আকৃতির সমীকরণ: মূলবিন্দু থেকে যে রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং উক্ত লম্ব যদি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ তৈরি করে, তাহলে এরূপ রেখার সমীকরণ হলো, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$



সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01.



[DB'23]

(ক) উদ্দীপকের AB সরলরেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $B = (-1, 5), A = (3, -1)$

$\therefore$ AB সরলরেখার সমীকরণ $\Rightarrow \frac{y+1}{-1-5} = \frac{x-3}{3+1}$

$\Rightarrow 4(y + 1) = -6(x - 3) \Rightarrow 6x + 4y - 14 = 0$

$\Rightarrow 3x + 2y - 7 = 0 \ldots (i)$

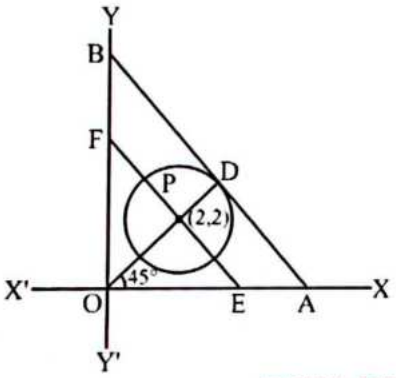
y-অক্ষে ভুজ শূন্য।

$\therefore x = 0$ সমীকরণ (i) এ বসিয়ে পাই,

$3 \times 0 + 2y - 7 = 0 \therefore y = \frac{7}{2}$

$\therefore$ ছেদবিন্দু (y-অক্ষে) $\equiv \left(0, \frac{7}{2}\right)$ **(Ans.)**

02.



[BB'23; DB, SB, JB, Din.B'18]

(খ) যদি P বিন্দুটি EF রেখাংশের একটি সমত্রিখণ্ডক হয় তবে OP রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

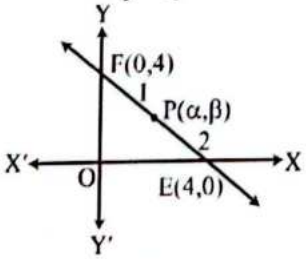
(খ) **Sol^n:** P বিন্দুটি EF রেখাংশের একটি সমত্রিখণ্ডক।

EF রেখার ঢাল: -1 [$\because$ OD $\perp$ EF এবং $m_{OD} = 1 = \tan 45°$]

(2, 2) বিন্দুগামী EF রেখার সমীকরণ:

$y - 2 = -1(x - 2) \Rightarrow y - 2 = -x + 2$

$\Rightarrow x + y - 4 = 0 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$



P বিন্দু EF কে 2:1 এ অন্তর্বিভক্ত করে,

$\alpha = \frac{2\times0+1\times4}{2+1} = \frac{4}{3}$

$\beta = \frac{2\times4+1\times0}{2+1} = \frac{8}{3}$

$P(\alpha, \beta) \equiv P\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

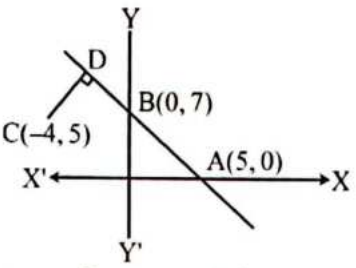
$O(0, 0)$ ও $P\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ বিন্দুগামী OP রেখার সমীকরণ,

$\frac{y-\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}-0} = \frac{x-\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}-0} \Rightarrow \frac{3y-8}{8} = \frac{3x-4}{4}$

$\Rightarrow 3y - 8 = 6x - 8 \Rightarrow y = 2x$

অথবা, OP রেখার সমীকরণ: $\frac{x}{\frac{8}{3}} = \frac{4}{\frac{4}{3}} \Rightarrow x = 2y$ **(Ans.)**

03.



[J

(গ) D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** AB সরলরেখার ঢাল $= \frac{0-7}{5-0} = -\frac{7}{5}$

$\therefore$ CD রেখার ঢাল $= \frac{5}{7} \therefore$ CD রেখার সমীকরণ, $\frac{y-5}{x+4} = \frac{5}{7}$

$\Rightarrow 7y - 35 = 5x + 20 \Rightarrow 5x - 7y = -55 \ldots\ldots$

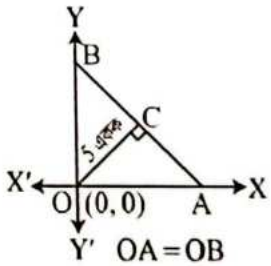
আবার, AB সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 1$

$\Rightarrow 7x + 5y = 35 \ldots\ldots (ii)$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে (i) ও (ii) নং সমীকরণের সমাধা

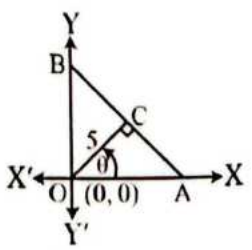
$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{15}{37}, \frac{280}{37}\right)$ **(Ans.)**

04. দৃশ্যকল্প-১: [Din.



(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে AB সরলরেখার উপর
OC এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:**



দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, OA = OB

তাহলে, $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\pi}{4}$

আর ΔOAC তে, $\angle A + \angle C + \theta = 180°$

$\Rightarrow \theta = 180° - \angle A - \angle C$

$\therefore \theta = 180° - 90° - 45° = 45°$

AB এর সমীকরণ হবে $= x\cos 45° + y\sin 45°$

$= OC = 5$

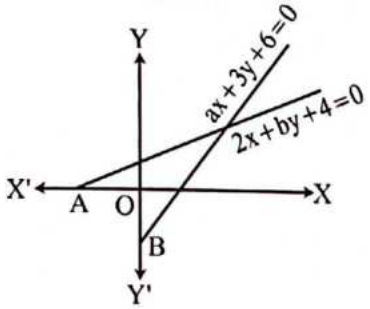
$\Rightarrow x\frac{1}{\sqrt{2}} + y\frac{1}{\sqrt{2}} = 5 \therefore x + y = 5\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 5\sqrt{2}$ এর রেখার উপর লম্ব ও $(0, 0)$ দিয়ে যায়, এমন OC রেখার সমীকরণ,

$(x - 0) - (y - 0) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \therefore x = y$

$\therefore$ OC রেখার সমীকরণ হলো, $x = y$ **(Ans.)**

05. দৃশ্যকল্প-১: **[Din.B'23]**

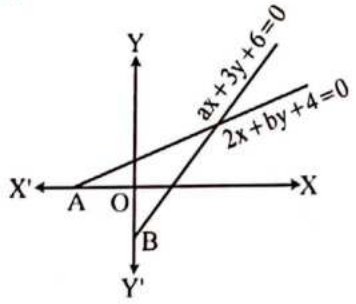


দৃশ্যকল্প-২: $3x + 4y - 24 = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশকে সমান তিনভাগে বিভক্ত করে এমন বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^{n}:**



$2x + by + 4 = 0$ এর x এর অক্ষের ছেদ বিন্দু হলো A.

x অক্ষের ছেদ বিন্দুতে $y = 0$ তাহলে $2 \cdot x + b \cdot 0 + 4 = 0$

$\therefore x = -2 \therefore A \equiv (-2, 0)$

আবার, $ax + 3y + 6 = 0$ এর y অক্ষের ছেদ বিন্দু হলো B

আর y অক্ষের ছেদ বিন্দুতে $x = 0$

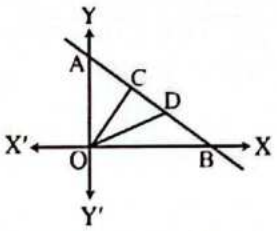
তাহলে $a \cdot 0 + 3 \cdot y + 6 = 0 \Rightarrow 3y = -6$

$\therefore y = -2 \because B \equiv (0, -2)$

AB এর সমীকরণ হবে: $\frac{x-(-2)}{-2-0} = \frac{y-0}{0-(-2)} \Rightarrow \frac{x+2}{-2} = \frac{y}{2}$

$\Rightarrow x + 2 = -y \therefore x + y = -2$ **(Ans.)**

(গ) **Sol^{n}:**

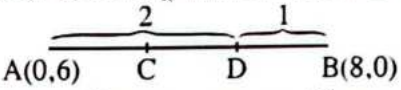


দৃশ্যকল্প-২ এর সরলরেখা হলো, $3x + 4y - 24 = 0$

ধরি, সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়কে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

$3x + 4y = 24 \Rightarrow \frac{3x}{24} + \frac{4y}{24} = 1 \therefore \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$

অর্থাৎ $A = (0, 6)$ এবং $B(8, 0)$। এখন অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ AB কে C ও D বিন্দু সমান তিন ভাগে বিভক্ত করে।



ধরি, AB কে D বিন্দু 2:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

তাহলে, $D \equiv (D_x, D_y) \equiv \left(\frac{2\times8+0}{2+1}, \frac{6\times1+0}{2+1}\right) \equiv \left(\frac{16}{3}, 2\right)$

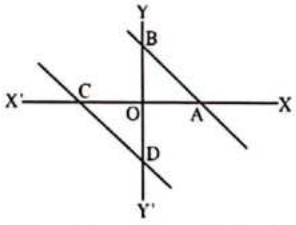
আবার, C, AD এর মধ্যবিন্দু তাহলে

$C \equiv (C_x, C_y) \equiv \left(\frac{\frac{16}{3}+0}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \equiv \left(\frac{8}{3}, 4\right)$

OD রেখার সমীকরণ হবে $y = \frac{2-0}{\frac{16}{3}-0} \times x \therefore y = \frac{3}{8}x$

OC রেখার সমীকরণ হবে $y = \frac{4-0}{\frac{8}{3}-0} \times x \therefore y = \frac{3}{2}x$ **(Ans.)**

06.

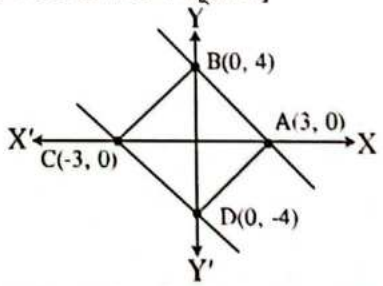


[DB'22]

AB = $4x + 3y - 12 = 0$ এবং AB ∥ CD

(গ) দেখাও যে, **ABCD** একটি রম্বস।

(গ) **Sol^{n}:** [**Note:** প্রশ্নটির 'খ' নং প্রশ্নে দেওয়া ছিলো মূলবিন্দু হতে AB ও CD রেখাদ্বয় সমদূরবর্তী]



AB: $4x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow 4x + 3y = 12$

$\therefore \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \ldots\ldots\ldots (i)$

CD: $4x + 3y + 12 = 0 \Rightarrow 4x + 3y = -12$

$\therefore \frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} = 1 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) সমীকরণ হতে A, B, C, D বিন্দুসমূহ চিহ্নিত করে পাই,

Educationblog24.com

A(3, 0), B(0, 4), C(−3, 0), D(0, −4)

এখন, $AB = \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2} = 5$ একক

$BC = \sqrt{(0+3)^2 + (4-0)^2} = 5$ একক

$CD = \sqrt{(-3-0)^2 + (0+4)^2} = 5$ একক

$AD = \sqrt{(3-0)^2 + (0+4)^2} = 5$ একক

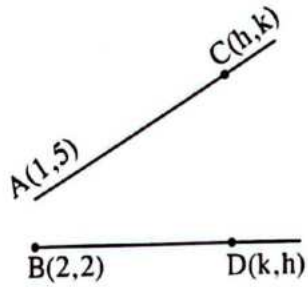
আবার, $AC = \sqrt{(3+3)^2 + 0} = 6$ একক

$BD = \sqrt{0 + (4+4)^2} = 8$ একক

এখানে, AB = BC = CD = AD এবং AC ≠ BD

অর্থাৎ, ABCD চতুর্ভুজের চারটি বাহু পরস্পর সমান এবং কর্ণদ্বয় অসমান। সুতরাং, ABCD একটি রম্বস। **(Showed)**

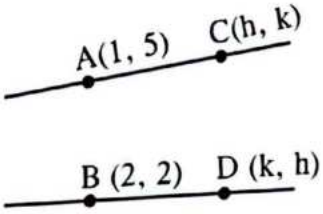
07.



[RB'22]

(খ) **AC এবং BD রেখাদ্বয়ের ঢাল যথাক্রমে −2 এবং −1 হলে x-অক্ষকে CD রেখা যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।**

(খ) **Sol^n:**



ঢাল $= \frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}}$

∴ AC এর ঢাল $= \frac{k-5}{h-1}$ ∴ BD এর ঢাল $= \frac{h-2}{k-2}$

দেওয়া আছে, AC এর ঢাল = −2 এবং BD এর ঢাল = −1

শর্তমতে, $\frac{k-5}{h-1} = -2 \Rightarrow k - 5 = -2h + 2$

$\therefore k + 2h = 7 \ldots\ldots\ldots (i)$

আবার, $\frac{h-2}{k-2} = -1 \Rightarrow h - 2 = -k + 2$

$\therefore h + k = 4 \ldots\ldots\ldots (ii)$

এখন, (i) − (ii) ⇒ (k + 2h) − (h + k) = 7 − 4

⇒ k + 2h − h − k = 3 ∴ h = 3

(ii) ⇒ 3 + k = 4 ∴ k = 1

∴ C ও D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে C(3,1) এবং D(1,3)

∴ CD রেখার সমীকরণ, $\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$

$\Rightarrow \frac{x-3}{3-1} = \frac{y-1}{1-3} \Rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-2}$

⇒ x − 3 = −(y − 1) ⇒ x + y = 1 + 3

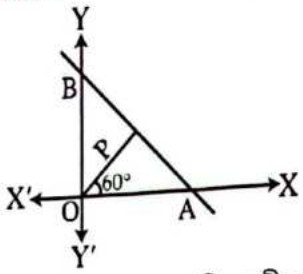
$\Rightarrow x + y = 4 \therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$

∴ CD রেখা x অক্ষকে (4,0) বিন্দুতে ছেদ করে। **(Ans.)**

08. উদ্দীপকে-১: AB সরলরেখাটি প্রথম চতুর্ভাগে $\frac{32}{\sqrt{3}}$ বর্গ ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ΔOAB গঠন করে এবং মূলবিন্দু হতে এর উপর লম্ব OP যা x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কোণে আনত। **[CB**

(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত AB এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:**



মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ:

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$

$x\cos 60° + y\sin 60° = P$ [প্রদত্ত $\alpha = 60°$]

$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} = P \Rightarrow \frac{x}{2P} + \frac{\sqrt{3}y}{2P} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2P} + \frac{y}{\frac{2P}{\sqrt{3}}}$

এটিকে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 2P, b = \frac{2P}{\sqrt{3}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} \times 2P \times \frac{2P}{\sqrt{3}} = \frac{32}{\sqrt{3}}$; $2P^2 = 32 \Rightarrow P^2 = 16$

∴ P = 4 [∵ P সর্বদা ধনাত্মক]

∴ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ: $\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} = 4$

$\Rightarrow x + \sqrt{3}y - 8 = 0$ **(Ans.)**

09. (ক) (2, −3) বিন্দুগামী এবং x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সা 45° কোণ এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[Din.E**

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, কোনো সরলরেখা (2, −3) বিন্দুগামী এবং x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন

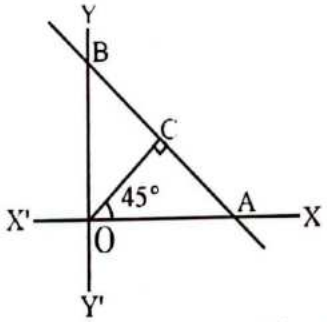
∴ সরলরেখাটির ঢাল, m = tan 45° = 1

∴ সরলরেখাটির সমীকরণ: (y + 3) = 1(x − 2)

⇒ y + 3 = x − 2 ⇒ x − y − 5 = 0

∴ সরলরেখাটির সমীকরণ হলো x − y − 5 = 0 **(Ans.)**

10.



[MB

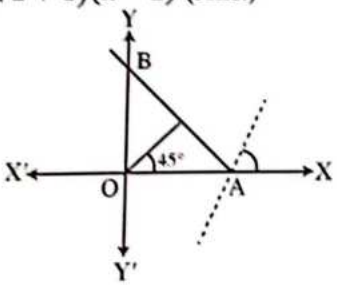
(খ) যদি ΔAOB = 8 বর্গ একক হয়, তবে AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) ∠BAX এর সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

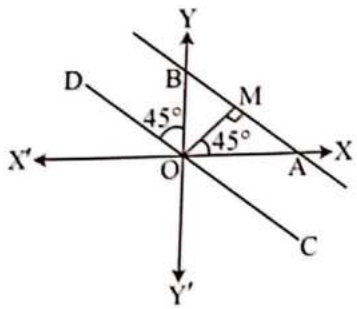
Educationblog24.com

(খ) Sol^n: মনে করি, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$
$\Rightarrow x\cos 45^\circ + y\cos 45^\circ = P$
$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = P \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}P} + \frac{y}{\sqrt{2}P} = 1$
প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} \times \sqrt{2}P \times \sqrt{2}P = 8 \Rightarrow P^2 = 8 \therefore P = 2\sqrt{2}$
$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ: $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x + y = 4$
$\therefore x + y - 4 = 0$ (Ans.)

(গ) Sol^n: (খ) হতে পাই,
AB রেখার সমীকরণ, $x + y - 4 = 0 \Rightarrow x + y = 4$
$\Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$
$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক হলো, $(4, 0)$
B বিন্দুর স্থানাঙ্ক হলো, $(0, 4)$
$\therefore \angle BAX$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখা A বিন্দুগামী এবং এর ধনাত্মক x অক্ষের সাথে আনতি কোণ AB রেখার আনতি কোণের অর্ধেক।
AB রেখার x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ,
$\theta_1 = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{1}{1}\right| = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$
এর সমদ্বিখণ্ডকের ঢাল, $\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = (\sqrt{2}+1)$
$\therefore \angle BAX$ এর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,
$(y - 0) = (\sqrt{2}+1)(x - 2)$
$\Rightarrow y = (\sqrt{2}+1)(x - 2)$ (Ans.)



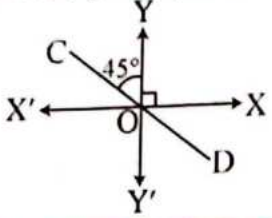
11.



[DB'21]

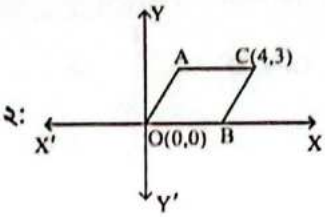
(খ) উদ্দীপক হতে, CD সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: x-অক্ষের সাথে CD সরলরেখার উৎপন্ন কোণ $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$
আবার, CD সরলরেখা $(0,0)$ বিন্দুগামী
$\therefore$ CD সরলরেখার সমীকরণ, $y - 0 = (\tan 135^\circ)(x - 0)$
$\Rightarrow y = -(x) \Rightarrow x + y = 0$ (Ans.)



12.

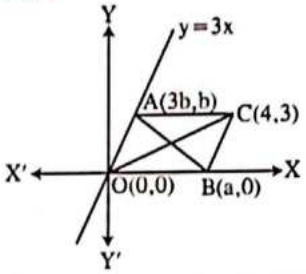
উদ্দীপক ২:



[CB'21]

(গ) উদ্দীপক-2 এ প্রদর্শিত OBCA একটি সামান্তরিক এবং OA রেখার সমীকরণ $y = 3x$. AB কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

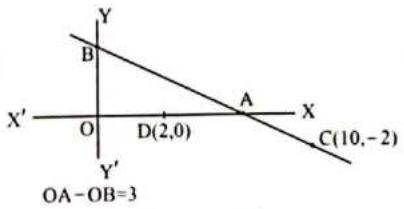
(গ) Sol^n:



$B = (a, 0)$ এবং $A = (b, 3b)$
এখানে, AB এর মধ্যবিন্দু = OC এর মধ্যবিন্দু
$O = (0,0)$ এবং $C = (4,3)$
$\frac{0+3b}{2} = \frac{3+0}{2} \Rightarrow 3b = 3 \therefore b = 1$
$\therefore \frac{a+b}{2} = \frac{4+0}{2} \Rightarrow a + 1 = 4 \Rightarrow a = 3$
$A = (1,3), B = (3,0)$
$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $y - 3 = \frac{3-0}{1-3}(x - 1)$
$\Rightarrow y - 3 = \frac{3}{-2}(x - 1) \Rightarrow -2y + 6 = 3x - 3$
$\Rightarrow 3x + 2y - 9 = 0$ (Ans.)

13.

দৃশ্যকল্প:



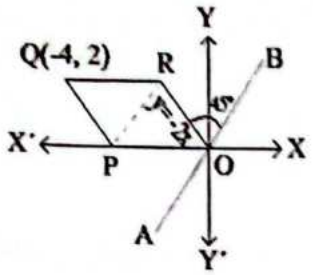
[MB'21]

(খ) AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: ধরি, AB সরলরেখার সমীকরণ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ldots\ldots (i)$
$\therefore OA = a, OB = b \therefore a - b = 3 \ldots\ldots\ldots (ii)$
এবং (i) নং রেখা $(10, -2)$ বিন্দুগামী, $\therefore \frac{10}{a} + \frac{-2}{b} = 1$
$\Rightarrow 10b - 2a = ab \Rightarrow 10b - 2(b+3) = b(b+3)$
$\Rightarrow 8b - 6 = b^2 + 3b \Rightarrow b^2 - 5b + 6 = 0$
$\Rightarrow b^2 - 3b - 2b + 6 = 0$
$\Rightarrow b(b-3) - 2(b-3) = 0$
$\Rightarrow (b-3)(b-2) = 0 \therefore b = 3$ অথবা $b = 2$
$\therefore a = 6$ অথবা $a = 5 \therefore$ AB এর সমীকরণ: $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$
$\Rightarrow x + 2y - 6 = 0$ অথবা, $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$
$\Rightarrow 2x + 5y - 10 = 0$ (Ans.)

Educationblog24.com

14. চিত্রে OPQR একটি সামান্তরিক। [Din.B'19]



(গ) উদ্দীপক হতে PR কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** QR সরলরেখার সমীকরণ $y = 2$; $y = 2$ হলে $y = -2x$ হতে $x = -1$

$\therefore$ R বিন্দুটি $(-1, 2)$; $O(0, 0)$ এবং $Q(-4, 2)$ এর মধ্যবিন্দু $(-2, 1)$

ধরি, P বিন্দু (x_1, y_1) $\therefore \frac{x_1-1}{2} = -2$

$\Rightarrow x_1 = -3$; $\frac{y_1+2}{2} = 1$ $\therefore y_1 = 0$

$\therefore P(-3,0)$ ও $R(-1, 2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ:

$y - 0 = \frac{2-0}{-1+3}(x + 3) \Rightarrow y = x + 3$ **(Ans.)**

15. (ক) $(-1, 2)$ ও $(3, -5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [CB'17]

(ক) **Sol^n:** $(-1, 2)$ ও $(3, -5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$\frac{x-(-1)}{-1-3} = \frac{y-2}{2-(-5)} \Rightarrow \frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{2+5} \Rightarrow \frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{7}$

$\Rightarrow 7x + 7 = -4y + 8$

$\Rightarrow 7x + 4y - 1 = 0$ **(Ans.)**

16. একটি সরলরেখা $(-2, -5)$ বিন্দুগামী এবং x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA + 2OB = 0$ হয়, যখন O মূলবিন্দু। [ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ]

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** ধরি, সরলরেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ..... (i)

এবং $OA = a, OB = b$

প্রশ্নমতে, $a + 2b = 0 \Rightarrow a = -2b$

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, $\frac{x}{-2b} + \frac{y}{b} = 1$

$(-2, -5)$ বিন্দুগামী হলে, $\frac{-2}{-2b} + \frac{-5}{b} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{5}{b} = 1$

$\Rightarrow b = (1 - 5) = -4 \therefore a = -2(-4) = 8$

(i) নং সমীকরণে a ও b এর মান বসিয়ে পাই, $\frac{x}{8} + \frac{y}{-4} = 1$

$\Rightarrow x - 2y = 8$ **(Ans.)**

17. (ক) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যা x-অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং $(4, 5)$ বিন্দু দিয়ে যায়। [ঢাকা সিটি কলেজ]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, সরলরেখাটি x-অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

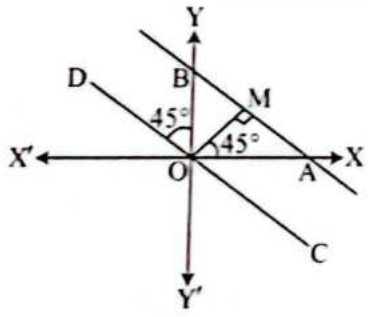
এখন, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করলে ঢাল $= \tan 45° = 1$ আর ঋনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করলে ঢাল $= \tan 135° = -1$

যেহেতু $(4, 5)$ বিন্দুগামী, $\therefore y - 5 = \pm(x - 4)$

$\Rightarrow y - 5 = x - 4 \Rightarrow x - y + 1 = 0$

অথবা, $y - 5 = -(x - 4) \Rightarrow x + y - 9 = 0$ **(Ans.)**

নিজে করো

18. 

[DB'21]

(গ) উদ্দীপক বর্ণিত ΔOAB এর ক্ষেত্রফল 18 বর্গ একক হলে, AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

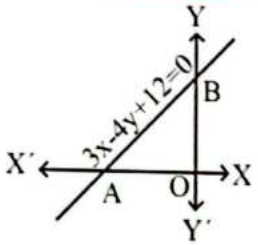
[Ans: $x + y - 6 = 0$]

19. (ক) $(-6, 2)$ বিন্দুগামী এবং X-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [SB'21] **[Ans: $\sqrt{3}x - y + 6\sqrt{3} + 2 = 0$]**

20. দৃশ্যকল্প: $3x + 8y - 24 = 0$. [MB'21]

(খ) প্রদত্ত রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের মধ্যবিন্দু ও মূলবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

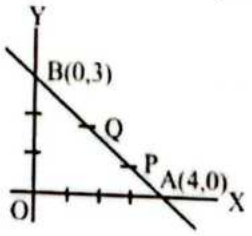
[Ans: $3x - 8y = 0$]

21. 

[SB'19]

(খ) AB রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $3x + 2y = 0; 3x + 8y = 0$]

22. 

[BB'19]

P এবং Q বিন্দু দুটি AB কে সমান তিনভাগ করে।

(খ) OP ও OQ সরলরেখার সমীকরণসমূহ নির্ণয় কর।

[Ans: $3x - 8y = 0; 3x - 2y = 0$]

Educationblog24.com

T-08: সমান্তরাল ও লম্ব হবার শর্ত এবং সমীকরণ নির্ণয়

Concept

- **সমান্তরাল হবার শর্ত:**

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ঢাল যথাক্রমে, $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ এবং $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$.

সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হবার শর্ত, $\boxed{m_1 = m_2}$ বা, $\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}}$

- **সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয়:**

$ax + by + c = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $\boxed{ax + by + k = 0}$ [x ও y এর সহগ ও চিহ্ন একই থাকবে এবং c এর পরিবর্তে নতুন ধ্রুবক k বসবে]

Shortcut: $ax + by + c = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\boxed{ax + by = ax_1 + by_1}$ [x ও y এর সহগ ও চিহ্ন একই থাকবে, বামপক্ষে প্রাপ্ত রাশিমালার (x, y) এর পরিবর্তে (x_1, y_1) বসিয়ে ডানপক্ষে লিখতে হবে]

- **লম্ব হবার শর্ত:** $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ঢাল যথাক্রমে $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ এবং $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$.

সরলরেখাদ্বয় লম্ব হবার শর্ত, $\boxed{m_1m_2 = -1}$ [তাদের ঢালের গুণফল $= -1$] $\therefore \boxed{a_1a_2 + b_1b_2 = 0}$

- **লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয়:**

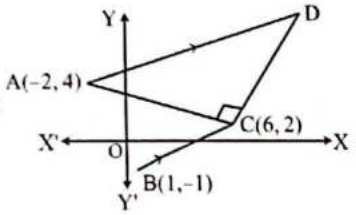
$ax + by + c = 0$ এর লম্ব রেখার সমীকরণ, $\boxed{bx - ay + k = 0}$ [x ও y এর সহগ interchange করতে হবে, x বা y এর যেকোনো একটির চিহ্ন বিপরীত করতে হবে এবং c এর স্থানে নতুন ধ্রুবক k যোগ করতে হবে]

Shortcut: $ax + by + c = 0$ এর লম্ব এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\boxed{bx - ay = bx_1 - ay_1}$ [x ও y এর সহগ interchange করতে হবে, x ও y এর যেকোনো একটির চিহ্ন বিপরীত করতে হবে এবং বামপক্ষের রাশিমালাতে (x, y) এর পরিবর্তে (x_1, y_1) বসিয়ে ডানপক্ষে লিখতে হবে।]

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01.

দৃশ্যকল্প-১:



$AD \parallel BC, \angle ACD = 90°$ [RB'23]

দৃশ্যকল্প-২: A(8, 3) এবং B(p, q), AB এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $y = -2x + 4$.

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ ব্যবহার করে p এবং q এর মান নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, B(1, −1); C(6, 2); A(−2, 4)

এখন, $m_{BC} = \frac{2+1}{6-1} = \frac{3}{5}$; $m_{AC} = \frac{2-4}{6+2} = -\frac{1}{4}$

চিত্র হতে, $AC \perp CD \therefore m_{AC} \cdot m_{CD} = -1 \therefore m_{CD} = 4$

ধরি, D = (x, y); $m_{CD} = \frac{y-2}{x-6} = 4$

$\Rightarrow 4x - 24 = y - 2 \Rightarrow 4x - y = 22 \ldots\ldots\ldots$ (i)

আবার, দেওয়া আছে, $AD \parallel BC$

অতএব, $m_{AD} = m_{BC}$; $m_{AD} = \frac{3}{5} \therefore m_{AD} = \frac{y-4}{x+2} = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow 3x + 6 = 5y - 20 \Rightarrow 3x - 5y = -26 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) ও (ii) সমাধান করে পাই, D ≡ (8, 10) **(Ans.)**

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $A \equiv (8, 3); B \equiv (p, q); m_{AB} = \frac{q-3}{p-8}$

প্রশ্নমতে, $\frac{q-3}{p-8} \times -2 = -1 \Rightarrow 2q - 6 = p - 8$

$\therefore 2q + 2 = p \ldots\ldots\ldots$ (i)

আবার, AB এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$y = -2x + 4 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের বিন্দু $\equiv \left(\frac{p+8}{2}, \frac{q+3}{2}\right)$

(ii) এ বসিয়ে পাই, $\frac{q+3}{2} = -2\left(\frac{p+8}{2}\right) + 4$

$\Rightarrow q + 3 = -2p - 16 + 8$

$\Rightarrow 2p + q = -11 \ldots\ldots\ldots$ (iii)

(i) ও (iii) সমাধান করে পাই, $B = (p, q) = (-4, -3)$ **(Ans.)**

02. দুইটি সরলরেখার সমীকরণ:

$x - 2y + 3 = 0,\ 2x + 3y = 1$ [Ctg.B'23]

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত সমীকরণ দুইটি কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং উক্ত সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু (2, −3) হলে অপর বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

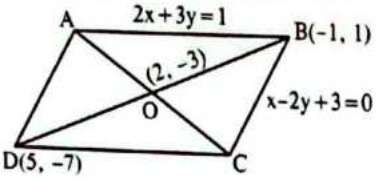
(খ) **Sol^n:** সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু-

$x - 2y + 3 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

$2x + 3y = 1 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

সমীকরণ দুটি সমাধান করে পাই, $x = -1; y = 1$

$\therefore$ সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দু অর্থাৎ একটি শীর্ষ, B = (−1, 1)



চিত্রে $O \equiv (2, -3)$ বিন্দুটি B ও D বিন্দুর মধ্যবিন্দু।

ধরি, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β) $\therefore 2 = \frac{-1+\alpha}{2}$ এবং $-3 = \frac{1+\beta}{2}$

$\therefore \alpha = 5 \therefore \beta = -7 \therefore D \equiv (5, -7)$

এখন, AD বাহু BC বাহুর সমান্তরাল।

$\therefore AD \Rightarrow x - 2y + k = 0$ যা $(5, -7)$ বিন্দুগামী

$\Rightarrow 5 - 2(-7) + k = 0 \therefore k = -19$

$\therefore$ AD বাহুর সমীকরণ $\Rightarrow x - 2y - 19 = 0$

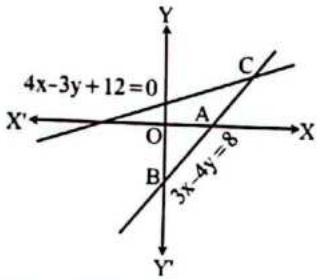
আবার, CD বাহু AB বাহুর সমান্তরাল।

$\therefore CD \Rightarrow 2x + 3y + k = 0$ যা $(5, -7)$ বিন্দুগামী

$\Rightarrow 2 \times 5 + 3(-7) + k = 0 \therefore k = 11$

$\therefore$ CD বাহুর সমীকরণ $\Rightarrow 2x + 3y + 11 = 0$ **(Ans.)**

03.



[CB'23]

(খ) এরূপ একটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা C বিন্দুগামী এবং $x - y + 2 = 0$ রেখার সমান্তরাল।

(খ) **Sol^n:** C বিন্দুটি $4x - 3y + 12 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $3x - 4y = 8 \ldots\ldots\ldots$ (ii) এর ছেদবিন্দু।

(i)$\times 4 \Rightarrow 16x - 12y + 48 = 0$

(i)$\times 3 \Rightarrow$ $9x - 12y - 24 = 0$ [বিয়োগ করে পাই]

$\underset{(-)\ (+)\ (+)}{}$

$7x + 72 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-72}{7}$

x এর মান (i) এ বসিয়ে পাই, $4 \times \frac{-72}{7} - 3y + 12 = 0$

$\Rightarrow 3y = \frac{-288}{7} + 12 \therefore y = \frac{-68}{7}$

$\therefore C \equiv \left(-\frac{72}{7}, \frac{-68}{7}\right)$

ধরি, $x - y + 2 = 0$ সমীকরণের সমান্তরাল রেখা

$x - y + k = 0$ যা C বিন্দুগামী

$\therefore \frac{-72}{7} + \frac{68}{7} + k = 0 \therefore k = \frac{4}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখা: $x - y + \frac{4}{7} = 0$

$\Rightarrow 7x - 7y + 4 = 0$ **(Ans.)**

04. $L = (4, 3), M = (3, 5)$ [MB'23]

(খ) LM রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** L(4, 3) ও M(3, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{4+3}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$

বা $\left(\frac{7}{2}, 4\right)$

LM রেখাংশের ঢাল $= \frac{5-3}{3-4} = -2$

$\therefore$ লম্বদ্বিখণ্ডকের ঢাল $= -\frac{1}{(-2)} = \frac{1}{2}$

$\because$ লম্বদ্বিখণ্ডক $\left(\frac{7}{2}, 4\right)$ বিন্দুগামী।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $y - 4 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{7}{2}\right)$

$\Rightarrow 2y - 8 = x - \frac{7}{2} \Rightarrow 4y - 16 = 2x - 7$

$\therefore 2x - 4y + 9 = 0$ **(Ans.)**

05. (ক) $(3, 6)$ বিন্দুগামী $\frac{1}{3}x + 5y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Ctg.B

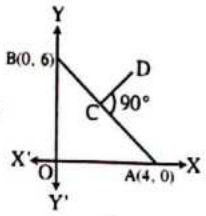
(ক) **Sol^n:** $(3, 6)$ বিন্দুগামী $\frac{1}{3}x + 5y + 8 = 0$ রেখার সমান্তর

রেখার সমীকরণ $\frac{x}{3} + 5y = \frac{3}{3} + 5 \times 6$

$\Rightarrow \frac{x}{3} + 5y = 31 \therefore \frac{x}{3} + 5y = 31$ **(Ans.)**

06.

দৃশ্যকল্প-১:



[BB'

এখানে C, AB এর মধ্যবিন্দু

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে CD সরলরেখার সমীকরণ ও তার ঢা নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** AB এর ঢাল, $M_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-0}{0-4} = -\frac{3}{2}$

যেহেতু, CD $\perp$ AB তাই CD এর ঢাল M_{CD} হলে,

$M_{AB} \times M_{CD} = -1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \times M_{CD} = -1 \therefore M_{CD} = \frac{2}{3}$

আবার, C, AB এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (2, 3)$

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ, $y - 3 = M_{CD}(x - 2)$

$\Rightarrow y - 3 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y - 9 = 2x - 4$

$\therefore 2x - 3y + 5 = 0$ **(Ans.)**

07. (ক) (4,2) বিন্দুগামী এবং $6x + 8y + 17 = 0$ রেখার স সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [CB'

(ক) **Sol^n:** মনে করি, $6x + 8y + 17 = 0$ রেখার সমান্তরাল

রেখার সমীকরণ $6x + 8y + k = 0$ ও ইহা (4, 2) বিন্দুগা

$\therefore 24 + 16 + k = 0 \Rightarrow k = -40$

$\therefore$ নির্ণেয় সমান্তরাল রেখার সমীকরণ: $6x + 8y - 40 = 0$ (An

08. (ক) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা x -অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা ঐ বিন্দুগামী। [MB'2

(ক) Sol^{n}: $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow bx - ay - ab = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

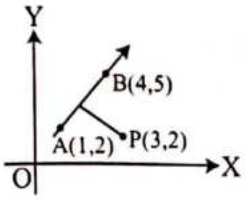
∴ প্রদত্ত রেখার সমীকরণ $bx - ay - ab = 0$ ও ইহা x-অক্ষকে $(a, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(i) নং রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $ax + by + k = 0$ ও ইহা $(a, 0)$ বিন্দুগামী।

∴ $a^2 + k = 0 \Rightarrow k = -a^2$

∴ নির্ণেয় লম্ব রেখার সমীকরণ $ax + by - a^2 = 0$ **(Ans.)**

09.



[DB'21]

(খ) উদ্দীপক হতে, $AB = 3BC$ হলে, AC এর লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) উদ্দীপক হতে, P বিন্দু থেকে AB রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) Sol^{n}: $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{1}$ এবং $A(1, 2), B(4, 5)$

ধরি, $C \equiv (x, y)$

A(1,2) B(4,5) C(x,y)

∴ $\frac{3x+1}{3+1} = 4$ এবং $\frac{3y+2}{3+1} = 5$

$\Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 6$ ∴ $C \equiv (5, 6)$

∴ AC রেখার মধ্যবিন্দু $R(x, y) \equiv \left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \equiv (3, 4)$

AC রেখার ঢাল $= \frac{6-2}{5-1} = 1$

∴ AC রেখার লম্বসমদ্বিখণ্ডকের ঢাল $= -1$ ও এটি $(3, 4)$ বিন্দুগামী।

∴ AC রেখার লম্বসমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$(y - 4) = -(x - 3) \Rightarrow x + y - 7 = 0$ **(Ans.)**

(গ) Sol^{n}: AB রেখার ঢাল $m = \frac{5-2}{4-1} = 1$

ধরি, পাদবিন্দু $Q(x, y)$

∴ PQ রেখার ঢাল -1 ও এটি $P(3, 2)$ বিন্দুগামী

∴ PQ রেখার সমীকরণ, $y - 2 + x - 3 = 0$

$\Rightarrow x + y - 5 = 0 \cdots\cdots\cdots$ (i)

আবার, AB রেখার সমীকরণ, $\frac{y-2}{5-2} = \frac{x-1}{4-1}$

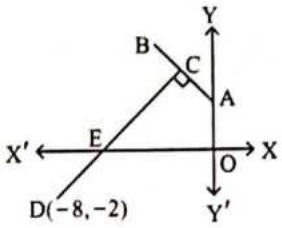
$\Rightarrow x - y + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots$ (ii)

∴ (i) ও (ii) হতে পাই, $x + 1 = 5 - x \Rightarrow x = 2$

এবং $y = 3$

∴ P থেকে AB এর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু $(2, 3)$ **(Ans.)**

10.



[RB'21]

AB রেখার সমীকরণ $x + y = 4$; C, AB এর মধ্যবিন্দু।

(খ) E বিন্দুগামী AB এর সমান্তরাল সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) Sol^{n}: AB রেখার ঢাল $= -1$, CD রেখার ঢাল m হলে

$m(-1) = -1$ বা, $m = 1$, CD রেখা $(-8, -2)$ বিন্দুগামী

∴ CD রেখার সমীকরণ $y + 2 = x + 8$

বা, $x - y + 6 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)

(ii) নং রেখায় $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x = -6$

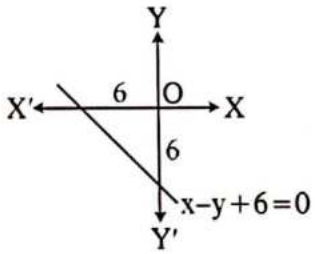
∴ $E = (-6, 0)$

∴ E বিন্দুগামী ও AB এর সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ,

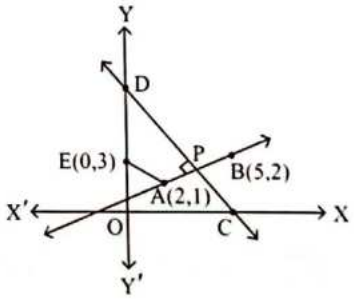
$y = -1(x + 6)$ বা, $x + y = -6$ বা, $\frac{x}{-6} + \frac{y}{-6} = 1$

∴ উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$\Delta = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$ বর্গ একক **(Ans.)**



11.



[RB'21]

(খ) P, AB এর মধ্যবিন্দু হলে CD রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^{n}: $A(2, 1)$ ও $B(5, 2)$ এর মধ্যবিন্দু $P(x, y)$

∴ $P(x, y) \equiv \left(\frac{5+2}{2}, \frac{2+1}{2}\right) \equiv \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

আবার, AB রেখার ঢাল: $m_1 = \frac{2-1}{5-2} = \frac{1}{3}$

$CD \perp AB$

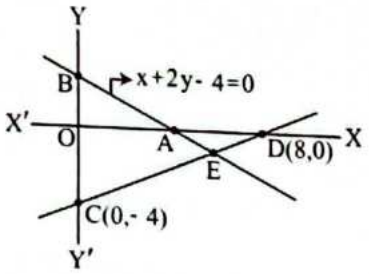
∴ CD রেখার ঢাল, -3 এবং CD রেখা $P\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ বিন্দুগামী।

∴ CD রেখার সমীকরণ: $y - \frac{3}{2} = -3\left(x - \frac{7}{2}\right)$

বা, $3x + y - 12 = 0$ **(Ans.)**

Educationblog24.com

12.



[SB'21]

(খ) E বিন্দুগামী এবং AB রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** DC রেখার সমীকরণ $\frac{x}{8}+\frac{y}{-4}=1$

$\Rightarrow x-2y-8=0 \cdots\cdots$ (i)

AB রেখার সমীকরণ $x+2y-4=0 \cdots\cdots$ (ii)

(i) + (ii) করে, $2x-12=0 \Rightarrow x=6$

(ii) − (i) করে, $4y+4=0 \Rightarrow y=-1$

$\therefore E=(6,-1)$

AB রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$2x-y+k=0 \ldots\ldots\ldots$ (iii)

(iii) নং রেখাটি E(6, −1) বিন্দুগামী

$\therefore 2\cdot 6+1+k=0 \Rightarrow k=-13$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব রেখার সমীকরণ, $2x-y-13=0$ **(Ans.)**

13. $7x-y=5 \cdots\cdots$ (i)
$x+y=-7 \cdots\cdots$ (ii) [SB'21]

(খ) $(-1,5)$ বিন্দুগামী এবং (i) নং রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে বিন্দুটি হতে রেখাটির লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** নির্ণেয় লম্ব রেখাটি $x+7y=-1+35$

$\Rightarrow x+7y-34=0 \cdots\cdots$ (iii)

$7x-y-5=0 \cdots\cdots$ (i)

(i) ও (iii) নং সমাধান করে, পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{69}{50},\frac{233}{50}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব দূরত্ব $=\sqrt{\left(\frac{69}{50}+1\right)^2+\left(\frac{233}{50}-5\right)^2}$ একক

$=\frac{17}{5\sqrt{2}}$ একক **(Ans.)**

14. (ক) $(0,-3)$ ও $(5,0)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমান্তরাল এবং $(3,5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [BB'21]

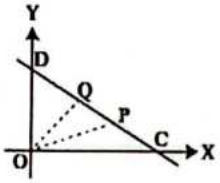
(ক) **Sol^n:** নির্ণেয় রেখাটির ঢাল, $m=\frac{0-(-3)}{5-0}=\frac{3}{5}$

$\therefore$ রেখাটি: $y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-5=\frac{3}{5}(x-3)$

$\Rightarrow 5y-25=3x-9 \Rightarrow 3x-5y+16=0$ **(Ans.)**

15.

দৃশ্যকল্প:



[JB'21]

AB রেখার সমীকরণ $2x+3y=12$ এবং CD রেখার উপর (6, 4) একটি বিন্দু।

(খ) AB ∥ CD এবং CD রেখার সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয় P ও Q হলে, ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল বের কর।

(খ) **Sol^n:** CD ∥ AB

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ, $2x+3y=k \cdots\cdots$ (i)

এটি (6, 4) বিন্দুগামী। $\therefore k=2\times 6+3\times 4=24$

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ $2x+3y=24$

$\Rightarrow \frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1 \cdots\cdots$ (ii)

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক, (12, 0) ; D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 8)

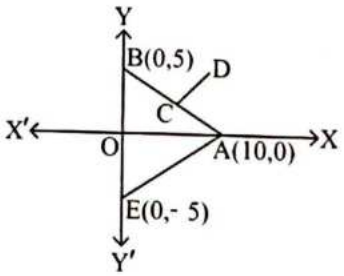
$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $\left(\frac{12\times 2+0}{2+1},\frac{0\times 2+8}{2+1}\right)\equiv\left(8,\frac{8}{3}\right)$

Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $\left(\frac{12+0\times 2}{1+2},\frac{0\times 1+8\times 2}{1+2}\right)=\left(4,\frac{16}{3}\right)$

$\therefore$ OPQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 8 & \frac{8}{3} & 1\\ 4 & \frac{16}{3} & 1\end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{128}{3}-\frac{32}{3}\right)$ বর্গ একক $=16$ বর্গ একক **(Ans.)**

16.



[Din.B'21]

(গ) CD ⊥ AB এবং AC: BC = 2: 3 হলে CD রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** AB রেখাকে C বিন্দুটি 2: 3 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore C=\left(\frac{2\cdot 0+3\cdot 10}{2+3},\frac{2\cdot 5+3\cdot 0}{2+3}\right)$ A(10,0) — 2 — C — 3 — B(0,5)

$=(6,2)$

AB রেখার ঢাল, $m_{AB}=\frac{5-0}{0-10}=-\frac{1}{2}$

$\because$ AB ⊥ CD $\therefore m_{AB}\times m_{CD}=-1 \therefore m_{CD}=\frac{-1}{-\frac{1}{2}}=2$

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ, $y-2=2(x-6)$

$\Rightarrow y-2=2x-12 \Rightarrow 2x-y-10=0$ **(Ans.)**

17. দৃশ্যকল্প: $3x+8y-24=0$. [MB'21]

(ক) দৃশ্যকল্পের রেখাটির উপর লম্ব এবং (3, 8) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ক) Soln: $3x + 8y - 24 = 0 \dots\dots\dots\dots$ (i)
(i) এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,
$8x - 3y = k \dots\dots\dots\dots$ (ii)
এটি (3, 8) বিন্দুগামী∴ $k = 3 \times 8 - 3 \times 8 = 0$
∴ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $8x - 3y = 0$ (Ans.)

18. একটি সরলরেখার সমীকরণ $4x - 3y + c = 0$ এর উপর দুটি বিন্দু $P(4, 3)$ এবং $Q(-8, -5)$। [RB'19]
(খ) PQ রেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দ্বারা x -অক্ষের ছেদাংশ নির্ণয় কর।

(খ) Soln: PQ এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{4-8}{2}, \frac{3-5}{2}\right) \equiv (-2, -1)$.
PQ এর ঢাল, $m_1 = \frac{3-(-5)}{4-(-8)} = \frac{2}{3}$
PQ এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের ঢাল, $m_2 = \frac{-3}{2}$
$(-2, -1)$ বিন্দুগামী PQ এর লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,
$y - (-1) = m_2(x + 2) \Rightarrow y + 1 = \frac{-3}{2}(x + 2)$
$\Rightarrow 3x + 2y + 8 = 0 \dots\dots\dots$ (i)
$y = 0$ হলে, (i) $\Rightarrow x = -\frac{8}{3}$
∴ x অক্ষের ছেদাংশ $= \frac{8}{3}$ একক। (Ans.)

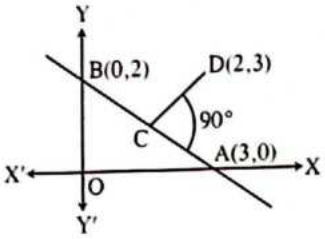
19. তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(a, -1), B(0, -2)$ এবং $C(-2, -4)$। [SB'17]
(খ) উদ্দীপকের আলোকে AB এর মধ্যবিন্দুর ভুজ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ হলে, C বিন্দুগামী AB-এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) Soln: ∴ $\frac{a+0}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; ∴ $a = \sqrt{5}$
$(\sqrt{5}, -1)$ & $(0, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,
$\frac{x-\sqrt{5}}{0-\sqrt{5}} = \frac{y+1}{-2+1} \Rightarrow x - \sqrt{5}y - 2\sqrt{5} = 0$
উক্ত রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $\sqrt{5}x + y + k = 0$ যা $(-2, -4)$ বিন্দুগামী।
∴ $k = 2\sqrt{5} + 4$
∴ সরলরেখার সমীকরণ, $\sqrt{5}x + y + 2\sqrt{5} + 4 = 0$ (Ans.)

20. $5x - 4y - 1 = 0$ ও $-8x + 7x + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু স্টেশন মাস্টারের কক্ষে অবস্থিত। [CB'17]
$4x + 3y - 5 = 0$ রেখা বরাবর রেলপথের একটি লাইন অবস্থিত।
(খ) স্টেশন মাস্টারের কক্ষ বিন্দু হতে রেললাইনের উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) Soln: $5x - 4y - 1 = 0 \dots\dots\dots$ (i)
$-8x + 7y + 1 = 0 \dots\dots\dots$ (ii)
(i) ও (ii) সমাধান করে পাই, $\frac{x}{-4+7} = \frac{y}{8-5} = \frac{1}{35-32}$
∴ $x = 1$ এবং $y = 1$
∴ ছেদবিন্দু $= (1, 1)$
এখন, $4x + 3y - 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,
$3x - 4y + k = 0 \dots\dots\dots$ (iii),
যা (1,1) বিন্দুগামী।
∴ সিদ্ধ করে পাই, $3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + k = 0$
$\Rightarrow 3 - 4 + k = 0 \Rightarrow k = 1$
k এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই নির্ণেয় লম্ব রেখার সমীকরণ, $3x - 4y + 1 = 0$ (Ans.)

21.

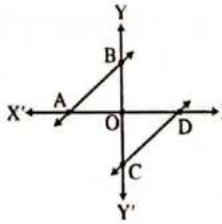


[ঢাকা সিটি কলেজ, ঢাকা]

(খ) CD এর পাদবিন্দুর স্থানাংক ও এর মাধ্যমে CD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) Soln: AB রেখার সমীকরণ, $\frac{y-0}{x-3} = \frac{0-2}{3-0}$
$\Rightarrow 3y = -2x + 6 \Rightarrow 2x + 3y - 6 = 0 \dots\dots\dots$ (i)
যেহেতু AB ⊥ CD এবং CD রেখাটি (2, 3) বিন্দুগামী,
∴ CD $\Rightarrow 3x - 2y = 3 \times 2 - 2 \times 3$
$\Rightarrow 3x - 2y = 0 \dots\dots\dots$ (ii)
AB এর ওপর CD এর পাদবিন্দু হলে (i) ও (ii) নং সমীকরণের ছেদবিন্দু।
$2x + 3y - 6 = 0 \dots\dots\dots$ (i)
$3x - 2y = 0 \dots\dots\dots$ (ii)
$\frac{x}{0-12} = \frac{y}{-18-0} = \frac{1}{-4-9} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{18} = \frac{1}{13}$
∴ $x = \frac{12}{13}, y = \frac{18}{13}$ ∴ $C \equiv \left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right)$ (Ans.)
∴ $CD = \sqrt{\left(2 - \frac{12}{13}\right)^2 + \left(3 - \frac{18}{13}\right)^2}$
$= \sqrt{\frac{196}{169} + \frac{441}{169}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$ (Ans.)

22.



[আদমজী ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, ঢাকা]

AB রেখার সমীকরণ $4x - 3y + 12 = 0$ এবং AB || CD
(গ) $(2, -1)$ বিন্দু থেকে AB রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Educationblog24.com

(গ) Sol": দেওয়া আছে, AB রেখার সমীকরণ,

$4x - 3y + 12 = 0$ ..... (i)

AB রেখার উপর লম্ব ও $(2, -1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $3x + 4y = (3 \times 2) + 4(-1)$

$\Rightarrow 3x + 4y = 2 \Rightarrow 3x + 4y - 2 = 0$ ..... (ii)

$(2, -1)$ বিন্দু হতে AB রেখার উপর লম্বের পাদবিন্দু হবে সমীকরণ (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু।

$4x - 3y + 12 = 0$ ..... (i)

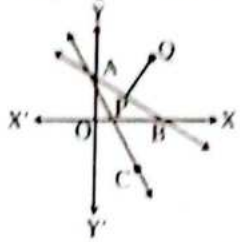
$3x + 4y - 2 = 0$ ..... (ii)

$\frac{x}{6-48} = \frac{y}{36+8} = \frac{1}{16+9} \Rightarrow \frac{x}{-42} = \frac{1}{44} = \frac{1}{25}$

$\therefore x = -\frac{42}{25}; y = \frac{44}{25}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $\equiv \left(-\frac{42}{25}, \frac{44}{25}\right)$ (Ans.)

23. চিত্রে, $PQ \perp AB$ $A(0,3), B(4,0)$ এবং $C(1,-2)$, Q [illegible]



[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, [illegible]

(খ) P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) Sol": $A(0,3), B(4,0)$; AB রেখার সমীকরণ: $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

$\Rightarrow 3x + 4y - 12 = 0$ ..... (i)

AB এর উপর লম্ব রেখা PQ এর সমীকরণ: $4x - 3y + k =$ যা $Q(3,4)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 4 \times 3 - 3 \times 4 + k = 0 \Rightarrow k = 0$

$\therefore$ PQ এর সমীকরণ: $4x - 3y = 0$ ..... (ii)

(i) $\times 3$ + (ii) $\times 4$ করে পাই,

$9x + 12y - 36 + 16x - 12y = 0$

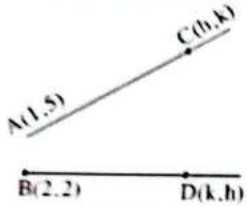
$\Rightarrow 25x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{25}$

$x = \frac{36}{25}$ (i) নং এ বসিয়ে পাই, $y = \frac{48}{25}$

$\therefore$ নির্ণেয় ছেদবিন্দু, P এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}\right)$ (Ans.)

নিজে করো

24.

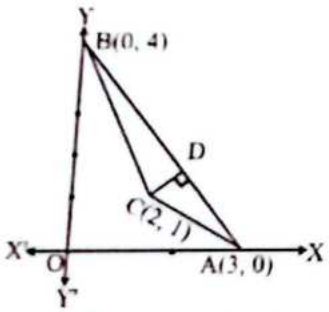


[RB'22]

(গ) AB রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $x - 3y + 9 = 0$]

25.



[SB'22]

(খ) D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **[Ans: $\left(\frac{54}{25}, \frac{28}{25}\right)$]**

26. $L(2,-1)$, $M(-3,3)$ [JB'22]

(খ) L ও M বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

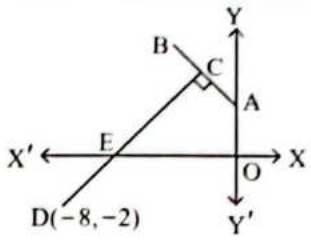
[Ans: $10x - 8y + 13 = 0$]

27. $A(3,-2)$, $B(5,6)$ দুটি বিন্দু $3x + 4y - 1 = 0$ ও $5x - 12y + 3 = 0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ [Din.B'22]

(খ) AB এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক রেখাটি y- অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

[Ans: y অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে]

28.



[RB'2

AB রেখার সমীকরণ $x + y = 4$; C, AB এর মধ্যবিন্দু।

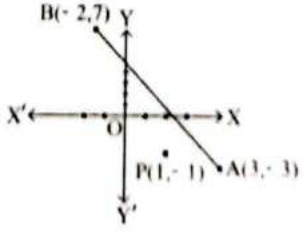
(গ) O বিন্দু এবং EC রেখার সমত্রিখণ্ডন বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $5x + 4y = 0$ এবং $5x + 13y =$

29. AB রেখার সমীকরণ $2x + 3y = 12$ [JB'2

(গ) $(5,5)$ বিন্দু হতে AB রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **[Ans: (3.2**

30.



[Din.B'2

(খ) P বিন্দু হতে AB রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **[Ans: $\left(\frac{9}{5}, -\frac{3}{5}\right.$**

Educationblog24.com

31. A(2, 4), B(3,1), C(4, 5) [RB'17]
(খ) C বিন্দু থেকে AB সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [Ans: $\left(\frac{19}{10}, \frac{43}{10}\right)$]

32. (ক) (3, 5) ও (6, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্ব দ্বিখণ্ডকের ঢাল নির্ণয় কর। [Ctg.B'17] [Ans: $-\frac{3}{2}$]

33. (ক) মূলবিন্দুগামী যে রেখা $2x + 5y + 6 = 0$ রেখার উপর লম্ব তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [CB'17] [Ans: $5x - 2y = 0$]

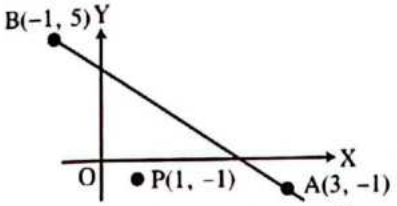
T-09: বহিঃস্থ বিন্দু হতে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

(α, β) বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব: $d = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ একক

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01.



[DB'23]

(গ) AB এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা P বিন্দু থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত।

(গ) **Sol^n:** AB সরলরেখার সমীকরণ, $y - 5 = \frac{5-(-1)}{-1-3}(x + 1)$

$= 3x + 2y - 7 = 0$

AB সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ,

$2x - 3y + k = 0$

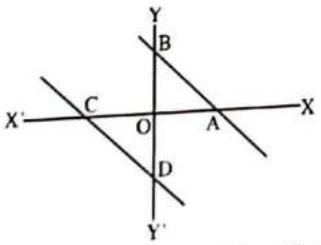
P(1, −1) বিন্দু হতে 2 একক দূরে হলে, $\frac{|2\times1-3(-1)+k|}{\sqrt{2^2+3^2}} = 2$

$\Rightarrow |5 + k| = 2\sqrt{13} \Rightarrow k + 5 = \pm 2\sqrt{13}$

$\therefore k = -5 \pm 2\sqrt{13}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $2x - 3y - 5 \pm 2\sqrt{13} = 0$ **(Ans.)**

02.



[DB'22]

$AB = 4x + 3y - 12 = 0$ এবং $AB \parallel CD$

(খ) মূল বিন্দু হতে AB ও CD রেখার দূরত্ব সমান হলে CD রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** $AB = 4x + 3y - 12 = 0$ ..... (i)

$AB \| CD$

ধরি, CD রেখার সমীকরণ, $4x + 3y + k = 0$ ..... (ii)

মূলবিন্দু হতে AB রেখার দূরত্ব, $d_1 = \left|\frac{0+0-12}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \frac{12}{5}$ একক

মূলবিন্দু হতে CD রেখার দূরত্ব, $d_2 = \left|\frac{0+0+k}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \left|\frac{k}{5}\right|$ একক

শর্তমতে, $d_1 = d_2 \Rightarrow \frac{12}{5} = \left|\frac{k}{5}\right| \Rightarrow \frac{12}{5} = \pm\frac{k}{5}$

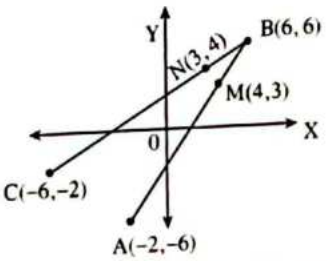
$\therefore k = \pm 12$

$k = -12$ হলে AB এর সমীকরণ পাওয়া যায়।

$\therefore$ CD এর জন্য, $k = 12$

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ, $4x + 3y + 12 = 0$ **(Ans.)**

03.



[CB'22]

(খ) B (6,6) বিন্দু হতে AC সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, A(−2, −6) ও C(−6, −2)

AC সরলরেখার সমীকরণ: $\frac{x+2}{-2+6} = \frac{y+6}{-6+2} \Rightarrow \frac{x+2}{4} = \frac{y+6}{-4}$

$\Rightarrow x + 2 = -y - 6 \therefore x + y + 8 = 0$

$\therefore$ B(6, 6) বিন্দু হতে AC সরলরেখার লম্ব দূরত্ব:

$\left|\frac{6+6+8}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \left|\frac{20}{\sqrt{2}}\right| = 10\sqrt{2}$ একক **(Ans.)**

04. দৃশ্যকল্প-২: $8x + 15y - 12 = 0$ [DB'17]

(খ) দৃশ্যকল্প-২: নং সরলরেখার সমান্তরাল 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার মূলবিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** $8x + 15y - 12 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল এরূপ যেকোনো রেখার সমীকরণ, $8x + 15y + k = 0$ ..... (i)

প্রশ্নমতে, প্রদত্ত সরলরেখা এবং তার সমান্তরাল সরলরেখা (1) এর মধ্যবর্তী দূরত্ব 2 একক।

অতএব, $\frac{|k+12|}{\sqrt{64+225}} = 2 \Rightarrow \frac{|k+12|}{17} = 2 \Rightarrow |k + 12| = 34$

$\Rightarrow k + 12 = \pm 34 \Rightarrow k = -46, 22$

সুতরাং, সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির সমীকরণ

$8x + 15y - 46 = 0$ ও $8x + 15y + 22 = 0$

এখন মূলবিন্দু হতে ১ম সমান্তরাল সরলরেখার দূরত্ব

$= \frac{|0+0-46|}{17} = \frac{46}{17}$ একক।

এবং মূলবিন্দু হতে ২য় সমান্তরাল সরলরেখার দূরত্ব

$= \frac{|0+0+22|}{17} = \frac{22}{17}$ একক। **(Ans.)**

05. দৃশ্যকল্প-২: $4x - 3y - 7 = 0$. [BB'17]

(গ) দৃশ্যকল্প ২ দ্বারা বর্ণিত রেখাটির সমান্তরাল রেখাগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের দূরত্ব (1, 2) বিন্দু হতে $5\frac{1}{2}$ একক।

(গ) **Sol^n:** $4x - 3y - 7 = 0$ ..... (i) রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ: $4x - 3y + k = 0$ .... (ii)

(1, 2) বিন্দু থেকে (ii) নং রেখার লম্ব দূরত্ব

$= \left|\frac{4\cdot1-3\cdot2+k}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right| = \left|\frac{4-6+k}{\sqrt{16+9}}\right| = \left|\frac{k-2}{\sqrt{25}}\right| = \left|\frac{k-2}{5}\right|$

প্রশ্নমতে, $\left|\frac{k-2}{5}\right| = \frac{11}{2} \Rightarrow \frac{k-2}{5} = \pm\frac{11}{2} \Rightarrow 2k - 4 = \pm 55$

$\Rightarrow 2k = \pm 55 + 4 \Rightarrow k = \frac{\pm 55+4}{2}$ .... (iii)

(iii) এর ডানপক্ষে ' + ' নিয়ে পাই, $k = \frac{55+4}{2} = \frac{59}{2}$

এবং ডানপক্ষে ' − ' নিয়ে পাই, $k = \frac{-55+4}{2} = \frac{-51}{2}$

$k = \frac{59}{2}$, (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $4x - 3y + \frac{59}{2} = 0$

$\Rightarrow 8x - 6y + 59 = 0$

এবং $k = \frac{-51}{2}$, (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $4x - 3y - \frac{51}{2} = 0$

$\Rightarrow 8x - 6y - 51 = 0$

∴ নির্ণেয় সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের সমীকরণ $8x - 6y + 59 = 0$ এবং $8x - 6y - 51 = 0$ **(Ans.)**

06. একটি সরলরেখা (−2, −5) বিন্দুগামী এবং x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA + 2OB = 0$ হয়, যখন O মূলবিন্দু। [ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]

(ক) (1, −2) বিন্দু থেকে $7\frac{1}{2}$ একক দূরবর্তী এবং $3x + 4y = 7$ রেখাটির সমান্তরাল রেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** ধরি, $3x + 4y = 7$ রেখার সমান্তরাল রেখাটি $3x + 4y + k = 0$ যেটি (1, −2) বিন্দু হতে $7\frac{1}{2}$ একক দূরত্বে অবস্থিত।

$\therefore \frac{|3\times1+4(-2)+k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{15}{2} \Rightarrow \frac{|k-5|}{5} = \frac{15}{2} \Rightarrow k - 5 = \pm\frac{75}{2}$

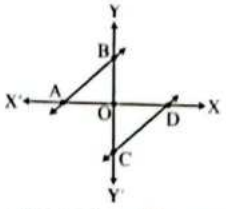
$\therefore k = \frac{85}{2}$ অথবা $-\frac{65}{2}$

∴ নির্ণেয় সরলরেখা: $3x + 4y + \frac{85}{2} = 0$

$\Rightarrow 6x + 8y + 85 = 0$ **(Ans.)**

অথবা, $3x + 4y - \frac{65}{2} = 0 \Rightarrow 6x + 8y - 65 = 0$ (A

07.



[আদমজী ক্যান্টনমেন্ট কলেজ,

AB রেখার সমীকরণ $4x - 3y + 12 = 0$ এবং AB||

(খ) মূল বিন্দু হতে AB ও CD রেখার দূরত্ব সমান হলে রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** AB রেখার সমীকরণ $\Rightarrow 4x - 3y + 12 = 0$

যেহেতু AB||CD, ধরি, CD রেখার সমীকরণ

$\Rightarrow 4x - 3y + k = 0$

মূলবিন্দু হতে দুটি রেখার দূরত্ব সমান।

$\therefore \frac{|4\times0-3\times0+12|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|4\times0-3\times0+k|}{\sqrt{4^2+3^2}} \Rightarrow |12| = |k|$

$\therefore k = \pm 12$

তবে $k = 12$ হলে AB এর সমীকরণ পাওয়া যায়।

$\therefore k \neq 12; k = -12$

∴ CD এর সমীকরণ $\Rightarrow 4x - 3y - 12 = 0$ **(Ans.)**

T-10: দুইটি সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

$ax + by + c_1 = 0$ ও $ax + by + c_2 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব, $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ একক

[**Note:** সূত্রটি ব্যবহারের সময় অবশ্যই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের x ও y এর সহগদ্বয় একই বানিয়ে নিতে হবে।]

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. দুইটি সরলরেখার সমীকরণ:

$x - 2y + 3 = 0$, $2x + 3y = 1$ [Ctg.B'23]

(গ) উদ্দীপকে উল্লিখিত প্রথম সরলরেখার $\sqrt{5}$ একক দূরবর্তী সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** উদ্দীপকের প্রথম সরলরেখা

$x - 2y + 3 = 0$ .... (i)

সমীকরণের (i)-এর সমান্তরাল সরলরেখা $x - 2y + k =$

সরলরেখা (i) হতে $\sqrt{5}$ এক দূরত্বে অবস্থিত।

$\therefore \frac{|3-k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow |3 - k| = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$

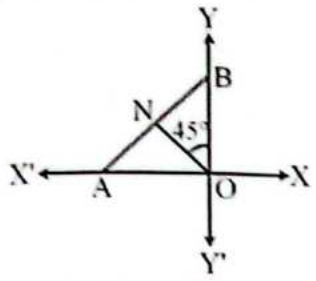
$\Rightarrow 3 - k = \pm 5 \Rightarrow k = 3 \pm 5 \therefore k = 8$ ও -2

∴ নির্ণেয় সমান্তরাল সরলরেখা $x - 2y + 8 = 0$

এবং $x - 2y - 2 = 0$

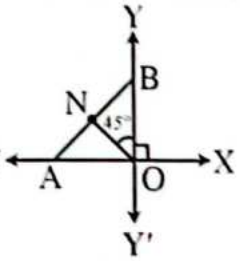
Educationblog24.com

02.



[SB'23]

(খ) ON রেখার সমান্তরাল এবং উহা হতে $6\sqrt{2}$ একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।



(খ) **Sol^n:** x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে ON রেখার উৎপন্ন কোণ,

$\theta = \angle NOB + \angle BOX = 45° + 90° = 135°$

$\therefore$ ঢাল, $M_{ON} = \tan\theta = \tan 135° = -1$

$\therefore$ ON রেখার সমীকরণ, $y - 0 = -1(x - 0)$

$\Rightarrow x + y = 0$ ... ... (i)

ON রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ,

$x + y + k = 0$ ... ... (ii)

প্রশ্নমতে, $\frac{|k-0|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 6\sqrt{2} \Rightarrow k = \pm 6\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \pm 12$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x + y + 12 = 0$

এবং $x + y - 12 = 0$ **(Ans.)**

03. (ক) $2x - 3y + k = 0$ এবং $2x - 3y = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $2\sqrt{13}$ একক হলে k এর মান নির্ণয় কর। [RB'22]

(ক) **Sol^n:** $2x - 3y + k = 0$ এবং $2x - 3y = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = \left|\frac{k-0}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}\right| = \left|\frac{k}{\sqrt{4+9}}\right| = \left|\frac{k}{\sqrt{13}}\right|$ একক

এখন, $d = 2\sqrt{13} \Rightarrow \left|\frac{k}{\sqrt{13}}\right| = 2\sqrt{13}$

$\Rightarrow \pm\frac{k}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13} \Rightarrow \pm k = 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}$

$\Rightarrow \pm k = 2 \times 13 \therefore k = \pm 26$ **(Ans.)**

04. (ক) $4x - 3y + 2 = 0$ এবং $8x - 6y - 9 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [RB'21]

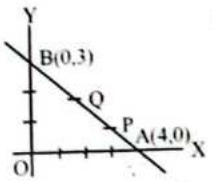
(ক) **Sol^n:** $4x - 3y + 2 = 0$

বা, $8x - 6y + 4 = 0$ ... ... (i)

এবং $8x - 6y - 9 = 0$ ... ... (ii)

$\therefore$ মধ্যবর্তী দূরত্ব $d = \left|\frac{4+9}{\sqrt{36+64}}\right| = \frac{13}{10}$ একক **(Ans.)**

05.



[BB'19]

P এবং Q বিন্দু দুটি AB কে সমান তিনভাগ করে।

(গ) PQ সরলরেখার সমান্তরাল এবং $2\frac{2}{5}$ একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** PQ সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

$\therefore 3x + 4y - 12 = 0$ ... ... (i)

ধরি, PQ এর উপর একটি বিন্দু (α, β)

$\therefore 3\alpha + 4\beta - 12 = 0$ ... ... (ii)

(i) নং এর সমান্তরাল যেকোনো রেখার সমীকরণ,

$3x + 4y + k = 0$ ... ... (iii)

এখন, $\frac{|3\alpha+4\beta+k|}{\sqrt{9+16}} = 2\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{|12+k|}{5} = \frac{12}{5}$ [ii নং হতে]

$\Rightarrow |12 + k| = 12$

এখন, '+' নিয়ে, $12 + k = 12 \therefore k = 0$

$\therefore 3x + 4y = 0$

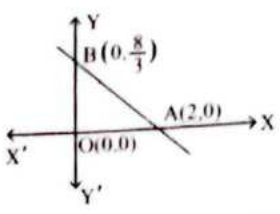
আবার, '−' নিয়ে, $12 + k = -12 \therefore k = -24$

$\therefore 3x + 4y - 24 = 0$ **(Ans.)**

নিজে করো

06. (ক) $3x - 4y + 2 = 0$ এবং $6x - 8y - 7 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [JB'21] [Ans: $\frac{11}{10}$ একক]

07.

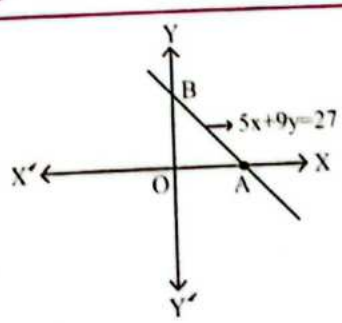


[CB'21]

(খ) AB সরলরেখার সমান্তরাল এবং তা হতে 2 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $4x + 3y + 2 = 0$ এবং $4x + 3y - 18$]

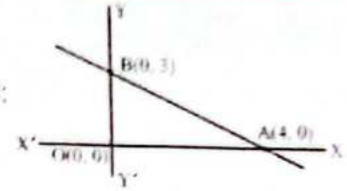
08.



[DB, SB, JB, Din.B'18]

(খ) AB রেখার 4 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Ans: $5x + 9y - 27 \pm 4\sqrt{106} = 0$]

09. দৃশ্যকল্প: [Ctg.B'17]



(খ) দৃশ্যকল্পের আলোকে AB রেখা হতে 3 একক দূরত্বে সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $3x + 4y + 3 = 0$; $3x + 4y - 27 =$

T-11: ত্রিভুজের বিভিন্ন ধরনের কেন্দ্র নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

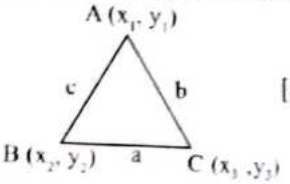
(i) ভরকেন্দ্র: ত্রিভুজের মধ্যমাগুলোর ছেদবিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলে। মধ্যমা হলো ত্রিভুজের একটি শীর্ষ এবং তার বিপরীত বাহুর মধ্য সংযোগ রেখা।

(ii) পরিকেন্দ্র: যে বৃত্ত ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ দিয়ে যায় তাই পরিবৃত্ত। পরিবৃত্তের কেন্দ্রকে পরিকেন্দ্র বলে। ত্রিভুজের বাহুগুলো সমদ্বিখণ্ডকগুলোর ছেদবিন্দুই পরিকেন্দ্র।

[Note: সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র হলো অতিভুজের মধ্যবিন্দু।]

(iii) অন্তঃকেন্দ্র: যে বৃত্ত কোনো ত্রিভুজের অভ্যন্তরে অবস্থান করে এবং ত্রিভুজটির প্রতিটি বাহুকে স্পর্শ করে তাকে অন্তঃবৃত্ত অন্তঃবৃত্তের কেন্দ্রকে অন্তঃকেন্দ্র বলে। ত্রিভুজের কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলোর ছেদবিন্দুই অন্তঃকেন্দ্র।

(iv) লম্ববিন্দু/লম্বকেন্দ্র: ত্রিভুজের একটি শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুগুলোর উপর অঙ্কিত লম্বগুলোর ছেদবিন্দুকে লম্ববিন্দু লম্বকেন্দ্র বলে।



[a, b, c হলো BC, AC ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য]

- ভরকেন্দ্র $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$
- পরিকেন্দ্র বের করার ক্ষেত্রে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ব্যবহার করা খুবই সুবিধাজনক।
- অন্তঃকেন্দ্র $\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$ [লক্ষণীয়: লবে বাহুর দৈর্ঘ্য এর সাথে বিপরীত শীর্ষের স্থানাঙ্ক গুণ করতে হবে।]
- লম্বকেন্দ্র বের করার ক্ষেত্রে দুইটি লম্ব সরলরেখার ঢালের ধারণা $(m_1 m_2 = -1)$ ব্যবহার করতে হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. দুইটি সরলরেখা $12x - 5y + 26 = 0$ ..... (i)
এবং $x + 5y = 13$ ..... (ii) [BB'23]
এবং দুইটি বিন্দু $A(2, -1)$ ও $B(-4, 7)$

(খ) (i) নং রেখা হতে 2 একক দূরবর্তী এবং (ii) নং রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(গ) 'খ' হতে প্রাপ্ত বিন্দুদ্বয় কোনো ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু হলে এবং ত্রিভুজটির লম্ববিন্দু $\left(\frac{-9}{25}, \frac{9}{5}\right)$ হলে ত্রিভুজটির তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক কত?

(খ) **Sol":** উদ্দীপক হতে $12x - 5y + 26 = 0$ ..... (i);
$x + 5y = 13$ ..... (ii)

ধরি, (ii) রেখার উপর অবস্থিত বিন্দু $\left(\alpha, \frac{13-\alpha}{5}\right)$, তাহলে $\left(\alpha, \frac{13-\alpha}{5}\right)$ বিন্দু হতে $12x - 5y + 26 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব 2 একক।

$$2 = \left|\frac{12\alpha - 5\left(\frac{13-\alpha}{5}\right) + 26}{\sqrt{12^2+5^2}}\right| \Rightarrow 2 = \left|\frac{12\alpha - 13 + \alpha + 26}{13}\right|$$

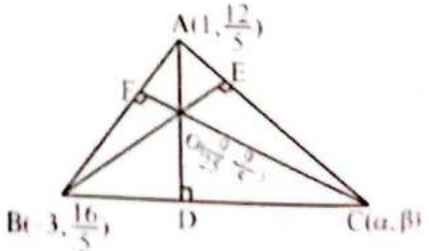
$\Rightarrow \pm 26 = 13\alpha + 13 \Rightarrow 13\alpha = \pm 26 - 13$

$\Rightarrow \alpha = 1, -3$

সুতরাং, বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক: $\left(1, \frac{13-1}{5}\right)$ এবং $\left(-3, \frac{13+3}{5}\right)$

$\Rightarrow \left(1, \frac{12}{5}\right)$ এবং $\left(-3, \frac{16}{5}\right)$ (Ans.)

(গ) **Sol":** 'খ' হতে প্রাপ্ত বিন্দুদ্বয় $A\left(1, \frac{12}{5}\right)$ এবং $B\left(-$ কোনো ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু এবং ত্রিভুজটির ল $O\left(-\frac{9}{25}, \frac{9}{5}\right)$। ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β) হলে



AD ও BC রেখাদ্বয়ের ঢালের গুণফল $= -1$

$\Rightarrow M_{AD} \times M_{BC} = -1$

$\Rightarrow M_{AO} \times M_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{\frac{9}{5} - \frac{12}{5}}{\frac{-9}{25} - 1} \times \frac{\beta - \frac{16}{5}}{\alpha + 3} = -1$

Educationblog24.com

$\Rightarrow \frac{15}{34} \times \frac{5\beta-16}{5\alpha+15} = -1 \Rightarrow 75\beta - 240 = -170\alpha - 510$

$\Rightarrow 170\alpha + 75\beta + 270 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

আবার, BE ও AC রেখাদ্বয়ের ঢালের গুণফল $= -1$

$\Rightarrow M_{BE} \times M_{AC} = -1 \Rightarrow M_{BO} \times M_{AC} = -1$

$\Rightarrow \frac{\frac{9}{5}-\frac{16}{5}}{\frac{\beta}{25}+3} \times \frac{\beta-\frac{12}{5}}{\alpha-1} = -1 \Rightarrow -\frac{35}{66} \times \frac{5\beta-12}{5\alpha-5} = -1$

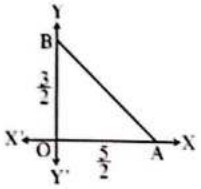
$\Rightarrow 175\beta - 420 = 330\alpha - 330$

$\Rightarrow 330\alpha - 175\beta + 90 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) ও (ii) সমাধান করে পাই, $\left(-\frac{108}{109}, -\frac{738}{545}\right)$

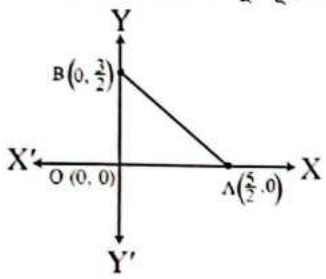
$\therefore$ ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষবিন্দু হবে $C\left(\frac{-108}{109}, \frac{-738}{545}\right)$ **(Ans.)**

02. [BB'22]



(ক) ΔOAB এর ক্ষেত্রফল ও তার ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** প্রদত্ত চিত্র হতে O, A, B বিন্দুসমূহ চিহ্নিত করে পাই,



ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2}$

$= \frac{15}{8}$ বর্গ একক **(Ans.)**

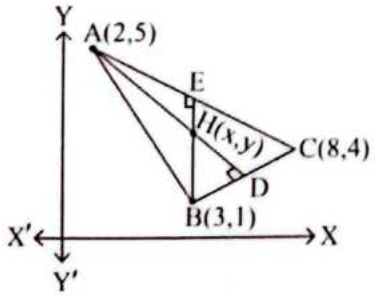
ΔOAB এর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (x, y) হলে,

$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{0+\frac{5}{2}+0}{3} = \frac{5}{6}$

$y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{0+0+\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ভরকেন্দ্র $\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right)$ **(Ans.)**

03. দৃশ্যকল্প-২: [Ctg.B'21]



(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে ABC ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র $H(x, y)$ নির্ণয় কর।

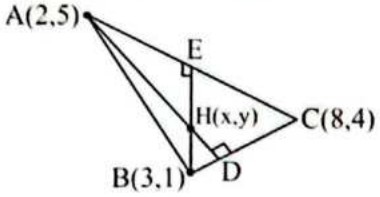
(গ) **Sol^n:** এখানে, BC রেখার ঢাল $= \frac{4-1}{8-3} = \frac{3}{5}$

$AD \perp BC \therefore$ AD রেখার ঢাল, $= -\frac{5}{3}$

$\therefore$ AD রেখার সমীকরণ: $(y-5) = -\frac{5}{3}(x-2)$

$\Rightarrow 3y - 15 + 5x - 10 = 0$

$\therefore 5x + 3y - 25 = 0 \cdots\cdots\cdots$ (i)



AC রেখার ঢাল $= \frac{5-4}{2-8} = \frac{-1}{6}$

$\therefore BE \perp AC \therefore$ BE রেখার ঢাল, $= 6$

$\therefore$ BE রেখার সমীকরণ: $(y-1) = 6(x-3)$

$\Rightarrow 6x - y - 17 = 0 \cdots\cdots\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) সমাধান করে, $x = \frac{76}{23}$ এবং $y = \frac{65}{23}$

$\therefore$ লম্বকেন্দ্র, $H\left(\frac{76}{23}, \frac{65}{23}\right)$ **(Ans.)**

04. (ক) একটি ত্রিভুজের দুটি কৌণিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-3, 4)$ এবং $(5, 2)$। এর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(1, 4)$ হলে তৃতীয় কৌণিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক বের কর। [BB'21]

(ক) **Sol^n:** ধরি, ৩য় কৌণিক বিন্দু $(\alpha, \beta) \therefore -3 + 5 + \alpha = 3$

$\Rightarrow \alpha = 1$

আবার, $4 + 2 + \beta = 12 \Rightarrow \beta = 6$

$\therefore (\alpha, \beta) = (1, 6)$ **(Ans.)**

05. দৃশ্যকল্প: $B \equiv 4x + 3y - 12$ [JB'21]

$C \equiv 3x - 4y + 16, D \equiv 4x - 3y + 12.$

(গ) যদি $B = 0, C = 0$ এবং $D = 0$ ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমীকরণ হয় তবে ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** $B \equiv 4x + 3y - 12 = 0 \cdots\cdots\cdots$ (i)

$C \equiv 3x - 4y + 16 = 0 \cdots\cdots\cdots$ (ii)

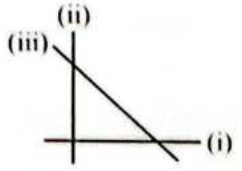
$D \equiv 4x - 3y + 12 = 0 \cdots\cdots\cdots$ (iii)

এখানে (i) ও (ii) নং সমীকরণের ঢালের গুণফল

$\left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) = -1$

$\therefore$ (i) ও (ii) নং রেখা পরস্পর লম্ব।

$\therefore$ (i) ও (iii) নং রেখার সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং (ii) ও (iii) নং রেখার সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দুই অন্তঃকেন্দ্র।



(i) ও (iii) এর ক্ষেত্রে $a_1a_2 + b_1b_2 = 16 - 9 > 0$

Educationblog24.com

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক: $\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}} = -\frac{4x-3y+12}{\sqrt{16+9}}$

$\Rightarrow 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \cdots\cdots\cdots$ (iv)

(ii) ও (iii) এর ক্ষেত্রে $a_1a_2 + b_1b_2 = 12 + 12 > 0$

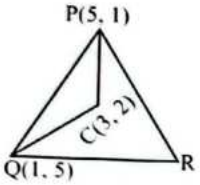
$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক: $\frac{3x-4y+16}{\sqrt{9+16}} = -\frac{4x-3y+12}{\sqrt{9+16}}$

$\Rightarrow 7x - 7y + 28 = 0 \Rightarrow x - y + 4 = 0 \cdots\cdots\cdots$ (v)

(iv) ও (v) হতে পাই, $x = 0$ ও $y = 4 + x = 4$

$\therefore$ অন্তঃকেন্দ্র $(0, 4)$ **(Ans.)**

06.

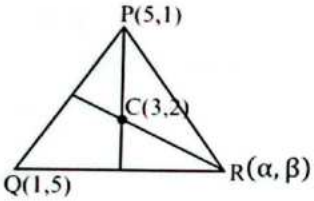


[RB'19]

(গ) PQR ত্রিভুজের লম্ববিন্দু C(3, 2) হলে ΔPQR এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** ধরি, $R(\alpha, \beta)$; $\left(\frac{\beta-5}{\alpha-1}\right)\left(\frac{1-2}{5-3}\right) = -1$

$\Rightarrow \left(\frac{\beta-5}{\alpha-1}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$; $\beta = 2\alpha + 3$ ..... (i)



$\left(\frac{1-5}{5-1}\right)\left(\frac{\beta-2}{\alpha-3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\beta-2}{\alpha-3} = 1$

$\Rightarrow \beta - 2 = \alpha - 3 \Rightarrow 2\alpha - \alpha = -3 - 1$

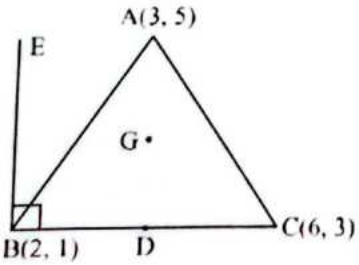
$\Rightarrow \alpha = -4$; $\beta = -5$

$\therefore R(-4, -5)$

$\therefore \Delta PQR$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(15 + 21 + 24)$ বর্গ একক $= 30$ বর্গ একক **(Ans.)**

07.



[JB'17]

চিত্রে: G, ΔABCএর ভরকেন্দ্র; D, BC এর মধ্যবিন্দু, $EB \perp BC$

(খ) দেখাও যে, G বিন্দুটি AD রেখাকে 2: 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

(খ) **Sol^n:** G এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3+6+2}{3}, \frac{5+3+1}{3}\right) \equiv \left(\frac{11}{3}, 3\right)$

D এর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \equiv (4,2)$

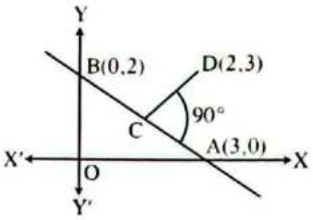
$\therefore AG = \sqrt{\left(3 - \frac{11}{3}\right)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{\frac{40}{9}}$ একক

$\therefore GD = \sqrt{\left(\frac{11}{3} - 4\right)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{\frac{10}{9}}$ একক

$\therefore AG : GD = \sqrt{\frac{40}{9}} : \sqrt{\frac{10}{9}} = 2 : 1$

$\therefore$ G বিন্দু AD কে 2: 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। (Sh

08.



[ঢাকা সিটি কলেজ

(গ) ΔOAB এর অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** 'খ' হতে পাই, AB রেখার সমীকরণ

$2x + 3y - 6 = 0$ ..... (i)

চিত্র হতে, OA $\Rightarrow y = 0$ ..... (ii)

OB $\Rightarrow x = 0$ ..... (iii)

(ii) ও (iii) নং সমীকরণের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ড

এখানে, $a_2 = 0, b_2 = 1$

$a_3 = 1, b_3 = 0 \therefore a_2a_3 + b_2b_3 = 0$

$\therefore$ সমদ্বিখণ্ডক $\Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1^2}} = \frac{x}{\sqrt{1^2}} \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow x - y = 0$ ..... (iv)

আবার, (i) ও (iii) নং সমীকরণের সমদ্বিখণ্ডক:

এখানে, $a_1 = 2, b_1 = 3$

$a_3 = 1, b_3 = 0$

$\therefore a_1a_3 + b_1b_3 = 2 + 0 = 2 > 0$

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক: $\frac{2x+3y-6}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1^2}}$

$\Rightarrow 2x + 3y - 6 = -x\sqrt{13}$

$\Rightarrow (2 + \sqrt{13})x + 3y - 6 = 0$ ..... (v)

(iv) ও (v) নং সমীকরণ সমাধান করে পাই,

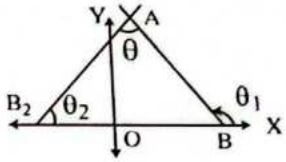
$x = \frac{6}{5+\sqrt{13}}$; $y = \frac{6}{5+\sqrt{13}}$

$\therefore$ অন্তঃকেন্দ্র $\equiv \left(\frac{6}{5+\sqrt{13}}, \frac{6}{5+\sqrt{13}}\right)$

T-12: দুইটি রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয় যথাক্রমে, $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ এবং $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ এবং রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

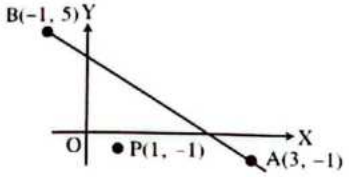


$\tan\theta = \pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} = \pm\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2} = \pm p$ (ধরি) $[p > 0]$,

(+) চিহ্ন নিলে $[\tan\theta = +p]$ পাওয়া যাবে সূক্ষ্মকোণ এবং (−) চিহ্ন নিলে $[\tan\theta = -p]$ পাওয়া যাবে স্থূলকোণ। ক্যালকুলেটরে কোণ বের করার ক্ষেত্রে '+' টার জন্য সূক্ষ্মকোণ বের করে 180° থেকে বিয়োগ করলেই স্থূলকোণ পাওয়া যাবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01.



[DB'23]

(খ) P বিন্দুগামী এবং AD সরলরেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [AD এর পরিবর্তে AB হবে।]

(খ) **Sol^n:** 'ক' হতে পাই, AB সরলরেখার সমীকরণ

$\Rightarrow 3x + 2y - 7 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $P \equiv (1, -1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$(y + 1) = m(x - 1) \ldots\ldots\ldots$ (ii) [যেখানে m হলো ঢাল]

আবার সমীকরণ (i) হতে, $2y = -3x + 7$

$\therefore y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \therefore$ ঢাল, $m_{AB} = -\frac{3}{2}$

এখন $\tan\theta = \pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

[যেখানে $\theta = 45°$, [দেওয়া আছে]

$\Rightarrow \tan 45° = \pm\frac{m+\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}m} \Rightarrow 1 = \pm\frac{2m+3}{2-3m}$

$\Rightarrow 2 - 3m = \pm(2m + 3)$

(+) নিয়ে পাই,	(−) নিয়ে পাই,
$2 - 3m = 2m + 3$	$2 - 3m = -2m - 3$
$\Rightarrow m = -\frac{1}{5}$	$\Rightarrow m = 5$

সমীকরণ (ii) এ m এর মান বসালে, $y + 1 = -\frac{1}{5}(x - 1)$ $[m = -\frac{1}{5}$ হলে]

$\Rightarrow 5y + 5 = -x + 1 \therefore x + 5y + 4 = 0$

আবার, $y + 1 = 5(x - 1)$ $[m = 5$ হলে]

$\therefore 5x - y - 6 = 0$ **(Ans.)**

02. (ক) $x - 2y + 1 = 0$ এবং $3x - y + 5 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর। [RB'23]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $x - 2y + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

$3x - y + 5 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $m_1 = \frac{1}{2}$,

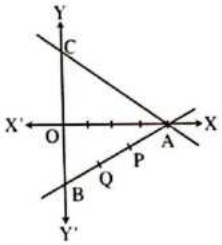
(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $m_2 = 3$

এখন, $\tan\theta = \pm\frac{\frac{1}{2}-3}{1+\frac{3}{2}} = \pm 1$

সূক্ষ্মকোণের জন্য (+ve) ধরে আমরা পাই, $\tan\theta = 1$

$\therefore \theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

03.

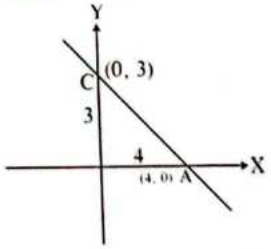


[Din.B'22]

চিত্রে OA = 4, OB = 2 এবং OC = 3

(গ) A বিন্দুগামী এবং AC রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** চিত্র হতে পাই, A = (4, 0), C = (0, 3)



AC রেখার সমীকরণ: $\frac{x-4}{4-0} = \frac{y-0}{0-3}$

$\Rightarrow -3x + 12 = 4y \Rightarrow 3x + 4y - 12 = 0$

AC রেখার ঢাল $m_1 = -\frac{3}{4}$

ধরি, A বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $(y - 0) = m(x - 4)$

$\Rightarrow y = mx - 4m$

Educationblog24.com

রেখাটির ঢাল, $m_2 = m$

$\therefore \tan 45° = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow 1 = \pm\frac{-\frac{3}{4} - m}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)m}$

$\Rightarrow 1 \pm \frac{\frac{-3-4m}{4}}{\frac{4-3m}{4}}$

$\Rightarrow 4 - 3m = \pm(-3 - 4m)$

$\therefore 4 - 3m = -3 - 4m \Rightarrow m = -7$

অথবা, $4 - 3m = -(-3 - 4m)$

$\Rightarrow 4 - 3m = 3 + 4m \therefore m = \frac{1}{7}$

A বিন্দুগামী সরলরেখাটির সমীকরণ হলো:

$y = (-7)x + 7 \times 4) \Rightarrow y = -7x + 28$

$\Rightarrow y + 7x - 28 = 0$

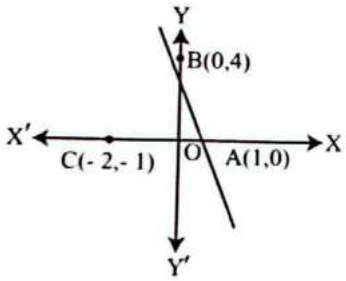
অথবা, $y = \left(\frac{1}{7}\right)x - \left(\frac{1}{7}\right)4 \Rightarrow 7y = x - 4$

$\Rightarrow 7y - x + 4 = 0$

$\therefore$ A বিন্দুগামী সরলরেখা দুটির সমীকরণ হলো:

$y + 7x - 28 = 0$ এবং $7y - x + 4 = 0$ **(Ans.)**

04.



[BB'21]

(গ) দেখাও যে, $(1, -1)$ বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে, এরূপ রেখা দুটি পরস্পর লম্ব।

(গ) **Sol^n:** AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{1} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 4x + y = 4$

$\therefore$ ঢাল, $m_1 = 4$

নির্ণেয় রেখার ঢাল, m_2 হলে, $\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

$\Rightarrow \tan 45° = \pm\frac{-4 - m_2}{1 - 4m_2}$

$(+) \Rightarrow 1 - 4m_2 = -4 - m_2$

$\Rightarrow 3m_2 = 5 \Rightarrow m_2 = \frac{5}{3}$

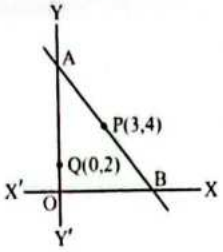
$(-) \Rightarrow 1 - 4m_2' = 4 + m_2' \Rightarrow 5m_2' = -3$

$\Rightarrow m_2' = -\frac{3}{5}$

এখানে, $m_2 m_2' = -1$

$\therefore$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব। **(Showed)**

05.



[৪

এখানে, AP = BP

(গ) Q বিন্দুগামী এবং P বিন্দু হতে 2 একক দূরবর্তী রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** ধরি, Q বিন্দুগামী একটি রেখা: $y - 2 = mx$

$\Rightarrow mx - y + 2 = 0$

শর্তমতে, $\frac{3m - 4 + 2}{\sqrt{m^2 + 1}} = \pm 2 \Rightarrow \frac{3m - 2}{\sqrt{m^2 + 1}} = \pm 2$

$\Rightarrow 9m^2 - 12m + 4 = 4m^2 + 4$

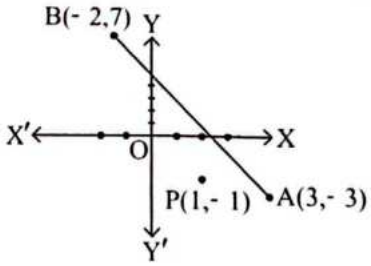
$\Rightarrow 5m^2 = 12m \therefore m = 0, \frac{12}{5}$

অর্থাৎ 1টি রেখা x অক্ষের সমান্তরাল। তাই রেখাদ্বয়ের

সূক্ষ্মকোণ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) = 67.38°$ **(Ans.)**

স্থূলকোণ $= (180 - 67.38)° = 112.62°$ **(Ans.)**

06.



[Di

(গ) P বিন্দুগামী রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $y = x$ সরলরেখার সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে

(গ) **Sol^n:** $y = x$ রেখার ঢাল, $m_1 = 1$

শর্তমতে, $\tan 30° = \pm\frac{1 - m_2}{1 + m_2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{1 - m_2}{1 + m_2}$

$\Rightarrow \pm\sqrt{3} = \frac{1 + m_2}{1 - m_2} \Rightarrow \frac{\pm\sqrt{3} + 1}{\pm\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{m_2}$

$\Rightarrow m_2 = \frac{\pm\sqrt{3} - 1}{\pm\sqrt{3} + 1} \Rightarrow m_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}, \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$

$\therefore$ ১ম রেখাটি, $y + 1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}(x - 1)$

$\Rightarrow y + 1 = (2 - \sqrt{3})(x - 1)$

$\Rightarrow y + 1 = (2 - \sqrt{3})x - (2 - \sqrt{3})$

$\Rightarrow (2 - \sqrt{3})x - y - 3 + \sqrt{3} = 0$ **(Ans.)**

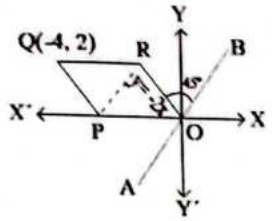
২য় রেখাটি, $y + 1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}(x - 1)$

$\Rightarrow y + 1 = (2 + \sqrt{3})x - 2 - \sqrt{3}$

$\Rightarrow (2 + \sqrt{3})x - y - 3 - \sqrt{3} = 0$ **(Ans.)**

Educationblog24.com

07. চিত্রে OPQR একটি সামান্তরিক [Din.B'19]



(খ) উদ্দীপক হতে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** $y = -2x$ হতে $m_1 = -2$

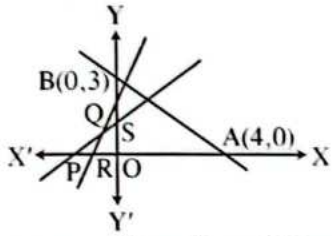
ধরি, AB সরলরেখার ঢাল m

$\therefore \pm\frac{(m-m_1)}{1+mm_1} = \tan 45° \Rightarrow \frac{m+2}{1-2m} = \pm 1 \therefore m = -\frac{1}{3}, 3$

চিত্র হতে পাই, AB সরলরেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে, তাই AB রেখার ঢাল ধনাত্মক।

$\therefore m \neq -\frac{1}{3} \therefore m = 3 \therefore$ AB সরলরেখাটি $y = 3x$ **(Ans.)**

08.



[নটর ডেম কলেজ, ঢাকা]

(গ) (6, 7) বিন্দুগামী এবং উদ্দীপকের AB রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখাগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** উদ্দীপকে A(4, 0) ও B(0, 3) বিন্দুগামী রেখার ঢাল;

$m_{AB} = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}$

ধরি, নির্ণেয় রেখার ঢাল = m

প্রশ্নমতে, $\tan 45° = \pm\frac{m-m_{AB}}{1+m.m_{AB}} \Rightarrow 1 = \pm\frac{m+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}m}$

$\Rightarrow 1 - \frac{3}{4}m = \pm\left(m + \frac{3}{4}\right)$

ধনাত্মক চিহ্ন নিয়ে পাই,

$(+) \Rightarrow 1 - \frac{3}{4}m = m + \frac{3}{4} \Rightarrow m = \frac{1}{7}$

ঋনাত্মক চিহ্ন নিয়ে পাই,

$(-) \Rightarrow 1 - \frac{3}{4}m = -m - \frac{3}{4} \Rightarrow m = -7$

আবার, m ঢালবিশিষ্ট রেখাটি (6, 7) বিন্দুগামী।

$\therefore y - 7 = m(x - 6)$

যদি $m = \frac{1}{7}$ হয়, $y - 7 = \frac{1}{7}(x - 6)$

$\Rightarrow 7y - 49 = x - 6$

$\Rightarrow x - 7y + 43 = 0$ **(Ans.)**

যদি, $x = -7$ হয়, $y - 7 = -7(x - 6)$

$\Rightarrow y - 7 = -7x + 42 \Rightarrow 7x + y - 49 = 0$ **(Ans.)**

09. P(2, 3) একটি বিন্দু এবং MN রেখার সমীকরণ, $4x + 3y - 7 = 0$ [ঢাকা কলেজ]

(গ) P বিন্দুগামী এবং MN রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** $4x + 3y - 7 = 0$ [দেওয়া আছে]

ঢাল, $m_{MN} = -\frac{4}{3}$

ধরি, নির্ণেয় রেখার ঢাল = m

প্রশ্নমতে, $\tan 45° = \pm\frac{m-m_{MN}}{1+m.m_{MN}} \Rightarrow 1 \pm \frac{m+\frac{4}{3}}{1-\frac{4m}{3}}$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{4m}{3}\right) = \pm\left(m + \frac{4}{3}\right)$

ধনাত্মক চিহ্ন নিয়ে পাই,

$(+)\left(1 - \frac{4m}{3}\right) = \left(m + \frac{4}{3}\right) \Rightarrow m = -\frac{1}{7}$

ঋনাত্মক চিহ্ন নিয়ে পাই,

$(-)\left(1 - \frac{4m}{3}\right) = -\left(m + \frac{4}{3}\right) \Rightarrow m = 7$

আবার, m ঢালবিশিষ্ট রেখাটি P ≡ (2, 3) বিন্দুগামী।

$\therefore (y - 3) = m(x - 2)$

যদি, $m = -\frac{1}{7}$ হয়,

$y - 3 = -\frac{1}{7}(x - 2)$

$\Rightarrow 7y - 21 = -x + 2$

$\Rightarrow x + 7y - 23 = 0$

(Ans.)

যদি $m = 7$ হয়,

$y - 3 = 7(x - 2)$

$\Rightarrow y - 3 = 7x - 14$

$\Rightarrow 7x - y - 11 = 0$

(Ans.)

10. একটি সরলরেখা (−2, −5) বিন্দুগামী এবং x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA + 2OB = 0$ হয়, যখন O মূলবিন্দু। [ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ]

(গ) দুইটি সরলরেখা (3, 4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x - y + 4 = 0$ রেখার সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে, এরূপ রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** প্রদত্ত সমীকরণ, $x - y + 4 = 0$

ঢাল, $m_1 = 1$

ধরি, নির্ণেয় রেখার ঢাল = m

প্রশ্নমতে, $\tan 60° = \pm\frac{m-m_1}{1+mm_1} \Rightarrow \sqrt{3} = \pm\frac{m-1}{1+m}$

$\Rightarrow \sqrt{3} + m\sqrt{3} = \pm(m - 1)$

ধনাত্মক চিহ্ন নিয়ে পাই, $\sqrt{3} + m\sqrt{3} = (m - 1)$

$\Rightarrow m = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$

ঋনাত্মক চিহ্ন নিয়ে পাই, $\sqrt{3} + m\sqrt{3} = -(m - 1)$

$\Rightarrow m = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = -2 + \sqrt{3}$

আবার, m ঢালবিশিষ্ট রেখাটি (3, 4) বিন্দুগামী।

$\therefore y - 4 = m(x - 3)$

যদি $m = -2 - \sqrt{3}$ হয়,

$y - 4 = (-2 - \sqrt{3})(x - 3)$

$\Rightarrow y - 4 = -x(2 + \sqrt{3}) + 6 + 3\sqrt{3}$

$\Rightarrow (2 + \sqrt{3})x + y - 10 - 3\sqrt{3} = 0$

যদি $m = -2 + \sqrt{3}$ হয়,

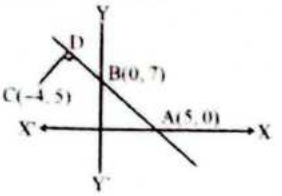
$y - 4 = (-2 + \sqrt{3})(x - 3)$

$\Rightarrow y - 4 = -x(2 - \sqrt{3}) + 6 - 3\sqrt{3}$

$\Rightarrow (2 - \sqrt{3})x + y - 10 + 3\sqrt{3} = 0$ **(Ans.)**

Educationblog24.com

নিজে করো

11. 

[JB'23]

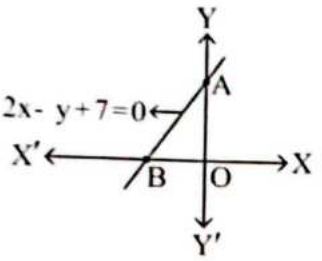
(খ) (7, 9) বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $x + 6y - 61 = 0$ এবং $6x - y - 33 = 0$]

12. L(2, −1), M(−3, 3) এবং $2x - y + 1 = 0$. [JB'22]

(গ) L বিন্দুগামী এবং উদ্দীপকের সরলরেখাটির সাথে $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $7x - y - 15 = 0$ এবং $x - y - 3 = 0$]

13. 

[Ctg.B'21]

(গ) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (−1, 2) বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে।

[Ans: $3x + y + 1 = 0$ এবং $x - 3y + 7 = 0$]

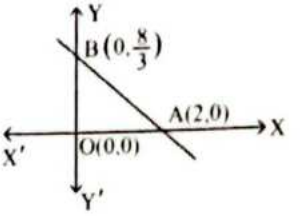
14. $x + y = -7$ ..... (ii) [SB'21]

(গ) (3, 5) বিন্দুগামী এবং (ii) নং রেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্নকারী সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $(2 + \sqrt{3})x + y = 11 + 3\sqrt{3}$ এবং $(2 - \sqrt{3})x + y = 11 - 3\sqrt{3}$]

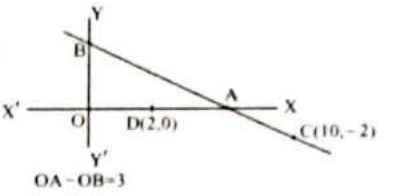
15. দৃশ্যকল্প: $A \equiv 3x + y - 15, B \equiv 4x + 3y - 12$, $C \equiv 3x - 4y + 16, D \equiv 4x - 3y + 12$. [JB

(খ) দুইটি সরলরেখা (7, −1) বিন্দুগামী এবং $A = 0$ রে সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নি কর। [Ans: $2x - y = 15$ এবং $x + 2y =$

16. 

[CB

(গ) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যা (বিন্দুগামী এবং AB সরলরেখার সাথে 45° কোণ উ করে। [Ans: $7x - y = 5$ এবং $x + 7y =$

17. দৃশ্যকল্প: 

[MB

(গ) CD এর সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এবং (4, 1) বিন্দু যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $5x + 3y = 23$ এবং $3x - 5y =$

18. দৃশ্যকল্প ১: $x - 2y + 1 = 0$ [BB

(খ) দৃশ্যকল্প-১ দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখার সহিত 45° উৎপন্ন করে এবং (1, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

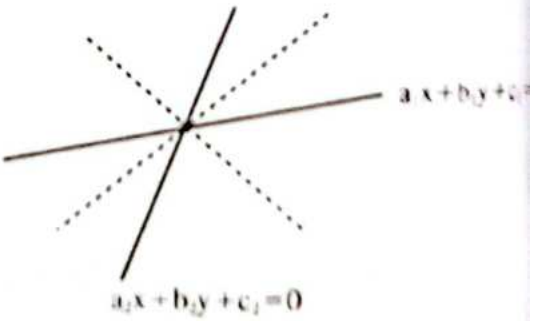
[Ans: $3x - y - 1 = 0$ ও $x + 3y - 7 =$

T-13: কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ এবং কোণের সাপেক্ষে বিভিন্ন বিন্দুর অবস্থান সংক্রান্ত

Concept

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ,

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad \text{..... (i)}$$



Educationblog24.com

(1) সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্ণয়:

(a) $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ [(+)ve] হলে, (i) এর (+) চিহ্ন বিশিষ্ট সমীকরণ = স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

[এক্ষেত্রে (i) এর (−)চিহ্ন বিশিষ্ট সমীকরণ = সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ]

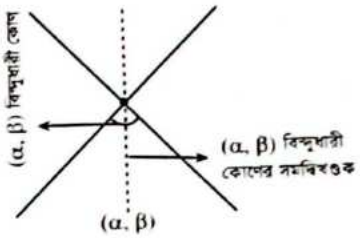
(b) $a_1a_2 + b_1b_2 < 0$ [(−)ve] হলে, (i) এর (−) চিহ্ন বিশিষ্ট সমীকরণ = স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

এক্ষেত্রে (i) এর (+) চিহ্ন বিশিষ্ট সমীকরণ = সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

(2) (α, β) বিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয়:

ধরি, $f(x,y) = a_1x + b_1y + c_1$; $g(x,y) = a_2x + b_2y + c_2$

তাহলে, $f(\alpha,\beta) = a_1\alpha + b_1\beta + c_1$; $g(\alpha,\beta) = a_2\alpha + b_2\beta + c_2$



(a) $f(\alpha,\beta) \times g(\alpha,\beta) > 0$ [+ve] হলে (i) এর (+) চিহ্ন বিশিষ্ট সমীকরণই হবে (α,β) বিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

(b) $f(\alpha,\beta) \times g(\alpha,\beta) < 0$ [−ve] হলে (i) এর (−) চিহ্নবিশিষ্ট সমীকরণই হবে (α,β) বিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

(c) $f(\alpha,\beta) \times g(\alpha,\beta) \times (a_1a_2 + b_1b_2) > 0$ [+ve] হলে (α,β) বিন্দুটি রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণে অবস্থিত।

(d) $f(\alpha,\beta) \times g(\alpha,\beta) \times (a_1a_2 + b_1b_2) < 0$ [−ve] হলে (α,β) বিন্দুটি রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত।

(3) মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ: [চিত্র: পূর্বের চিত্রে (α,β) এর স্থানে মূলবিন্দু (0,0) বসাও]

(a) c_1 ও c_2 একই চিহ্ন বিশিষ্ট বা $c_1c_2 > 0$ [+ve] হলে, (i) নং সমীকরণের (+) চিহ্ন বিশিষ্ট সমীকরণ নিলে মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যায়।

(b) c_1 ও c_2 বিপরীতচিহ্ন বিশিষ্ট বা $c_1c_2 < 0$ [−ve] হলে, (i) নং সমীকরণের (−) চিহ্ন বিশিষ্ট সমীকরণ নিলে মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যায়।

(c) $c_1 \times c_2 \times (a_1a_2 + b_1b_2) > 0$ [+ve] হলে মূলবিন্দুটি রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণে অবস্থিত।

(d) $c_1 \times c_2 \times (a_1a_2 + b_1b_2) < 0$ [−ve] হলে মূলবিন্দুটি রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $4x + 3y + 7 = 0$ ..... (ii) [JB'23]

$2x - 5y + 1 = 0$ ..... (iii)

(খ) (ii) ও (iii) নং সরলরেখার মধ্যবর্তী স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $4x + 3y + 7 = 0, 2x - 5y + 1 = 0$

$a_1a_2 + b_1b_2 = 4 \times 2 + 3 \times (-5)$

$= 8 - 15 = -7 < 0$

∴ নির্ণেয় স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{4x+3y+7}{\sqrt{4^2+3^2}} = -\frac{2x-5y+1}{\sqrt{2^2+5^2}} \Rightarrow \frac{4x+3y+7}{5} = -\frac{2x-5y+1}{\sqrt{29}}$$

$\Rightarrow 4\sqrt{29}x + 3\sqrt{29}y + 7\sqrt{29} = -10x + 25y - 5$

$\Rightarrow (4\sqrt{29} + 10)x + (3\sqrt{29} - 25)y + (7\sqrt{29} + 5)$

$= 0$ **(Ans.)**

02. দৃশ্যকল্প-২: $4x - 3y + 1 = 0$

এবং $3x + 4y + 8 = 0$.

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Din.B'23]

(গ) **Sol^n:** দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণদ্বয় হলো $4x - 3y + 1 = 0$

এবং $3x + 4y + 8 = 0$ এখন,

$a_1a_2 + b_1b_2 = 4 \times 3 - 3 \times 4 = 0$ অর্থাৎ সমীকরণদ্বয় পরস্পর লম্ব। এরা কোনো সূক্ষ্মকোণ তৈরি করে না, দুটিই সমকোণ। এদের সমকোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হলো

$$\frac{4x-3y+1}{\sqrt{4^2+3^2}} = \pm\frac{3x+4y+8}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

(+) নিয়ে, $4x - 3y + 1 = 3x + 4y + 8$

$\Rightarrow x - 7y - 7 = 0 \Rightarrow x - 7y = 7 \Rightarrow \frac{x}{7} + \frac{y}{-1} = 0$

উক্ত সমদ্বিখণ্ডকের অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হবে $= \frac{1}{2} \times 7 \times 1 = \frac{7}{2}$ বর্গ একক

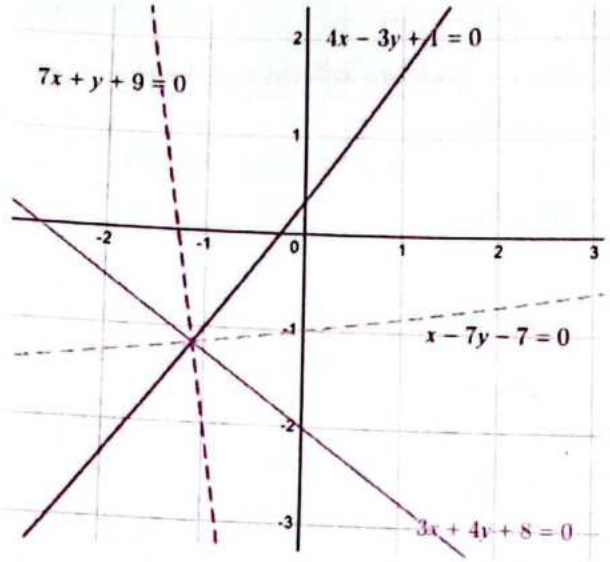
(−) নিয়ে পাই, $4x - 3y + 1 = -(3x + 4y + 8)$

$\Rightarrow 4x - 3y + 1 = -3x - 4y - 8 \Rightarrow 7x + y + 9 = 0$

$\Rightarrow 7x + y = -9 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{9}{7}} + \frac{y}{-9} = 1$

উক্ত সমদ্বিখণ্ডকের অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হবে $= \frac{1}{2} \times \frac{9}{7} \times 9 = \frac{81}{14}$ বর্গ একক

Educationblog24.com



03. L = (4, 3), M = (3, 5), N = (6, 4) [MB'23]

(গ) MN ও NL রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** প্রদত্ত বিন্দুত্রয় L(4, 3), M(3, 5) এবং N(6, 4)

∴ MN রেখার সমীকরণ: $y - 5 = \frac{5-4}{3-6}(x - 3)$

$\Rightarrow 3y - 15 = -x + 3$

$\Rightarrow x + 3y - 18 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

∴ NL রেখার সমীকরণ: $y - 3 = \frac{3-4}{4-6}(x - 4)$

$\Rightarrow 2y - 6 = x - 4 \Rightarrow x - 2y + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

∴ MN ও NL রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়:

$\frac{x+3y-18}{\sqrt{1^2+3^2}} = \pm\frac{x-2y+2}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \Rightarrow \frac{x+3y-18}{\sqrt{10}} = \pm\frac{x-2y+2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \frac{x+3y-18}{\sqrt{2}} = \pm\frac{x-2y+2}{1}$

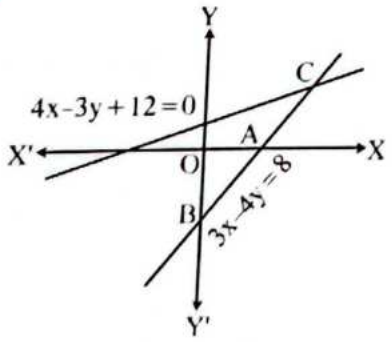
$\Rightarrow x + 3y - 18 = \pm\sqrt{2}(x - 2y + 2)$

∴ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ:

$(1 + \sqrt{2})x + (3 - 2\sqrt{2})y = 18 - 2\sqrt{2}$

এবং $(\sqrt{2} - 1)x - (3 + 2\sqrt{2})y + 18 + 2\sqrt{2} = 0$

04.



[CB'23]

(গ) দেখাও যে, উদ্দীপকের রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে,

$4x - 3y + 12 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $3x - 4y - 8 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ

$\frac{4x-3y+12}{\sqrt{4^2+3^2}} = \pm\frac{3x-4y-8}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$\Rightarrow (4x - 3y + 12) = \pm(3x - 4y - 8)$

ধনাত্মক মান নিয়ে পাই, $4x - 3y + 12 = 3x - 4y - 8$

$\Rightarrow x + y + 20 = 0$

ঢাল, $m_1 = -1$

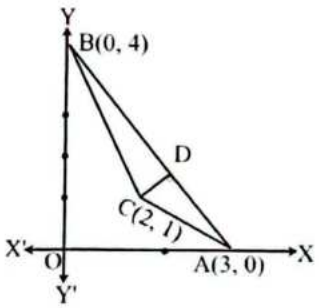
ঋণাত্মক মান নিয়ে পাই, $4x - 3y + 12 = -3x + 4y + 8$

$\Rightarrow 7x - 7y + 4 = 0$

ঢাল, $m_2 = \frac{7}{7} = 1 \therefore m_1 m_2 = -1$

অর্থাৎ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

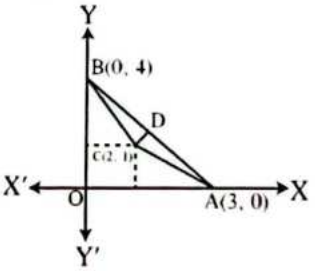
05.



[SB

(গ) ∠ACB এর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:**



চিত্র হতে পাই, ∠ACB এর সমদ্বিখণ্ডক হলো BC এবং AC বাহুর স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক।

AC বাহুর সমীকরণ, $\frac{x-3}{3-2} = \frac{y-0}{0-1} \Rightarrow x - 3 = -y$

$\Rightarrow x + y - 3 = 0$

$\therefore a_1a_2 + b_1b_2 = 3 \times 1 + 2 \times 1 = 5 > 0$

∴ '+' চিহ্ন নিয়ে স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

∠ACB এর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $\frac{3x+2y-8}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{x+y-3}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$\Rightarrow \frac{3x+2y-8}{\sqrt{13}} = \frac{x+y-3}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 3\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 8\sqrt{2} = \sqrt{13}x + \sqrt{13}y - 3\sqrt{13}$

$\Rightarrow (3\sqrt{2} - \sqrt{13})x + (2\sqrt{2} - \sqrt{13})y - 8\sqrt{2} + 2\sqrt{13} =$

Educationblog24.com

06. দৃশ্যকল্প-১: $3x - 4x + 7 = 0,\ 4x - 3y + 2 = 0$ [BB'22]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দৃশ্যকল্প-১ এ,

$3x - 4y + 7 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$4x - 3y + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

এখানে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 3 \times 4 + (-4)(-3) = 24 > 0$

তাই, (+) চিহ্নযুক্ত সমীকরণ নিলে স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যাবে।

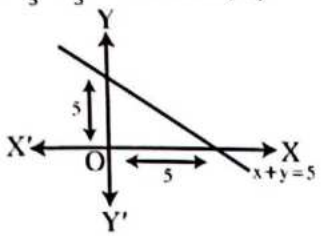
∴ স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ-

$\Rightarrow \frac{3x-4y+7}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = +\frac{4x-3y+2}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \Rightarrow \frac{3x-4y+7}{5} = \frac{4x-3y+2}{5}$

$\Rightarrow 3x - 4y - 4x + 3y = 2 - 7$

$\Rightarrow -x - y = -5 \Rightarrow x + y = 5$

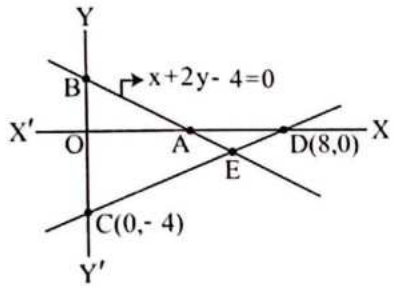
$\therefore \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1 \ldots\ldots\ldots (iii)$



(iii) নং রেখাটি অর্থাৎ, স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$A = \frac{1}{2}|ab| = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$ বর্গ একক

07.



[SB'21]

(গ) প্রমাণ কর যে, AB সরলরেখা ও Y-অক্ষের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

(গ) **Sol^n:** AB রেখাটি $x + 2y - 4 = 0$; y-অক্ষ $x = 0$

∴ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় $\frac{x+2y-4}{\sqrt{5}} = \pm x \Rightarrow x + 2y - 4 = \pm\sqrt{5}x$

$(+) \Rightarrow x(1 - \sqrt{5}) + 2y - 4 = 0$

$(-) \Rightarrow x(1 + \sqrt{5}) + 2y - 4 = 0$

$M_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, m_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$

$M_1m_2 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})(-1 - \sqrt{5})$

$= \frac{1}{4}\{1 - 5\} = \frac{1}{4} \times (-4) = -1$

∴ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব (প্রমাণিত)

08. দৃশ্যকল্প: $3x + 8y - 24 = 0$. [MB'21]

(গ) উদ্দীপকের রেখা এবং $8x + 3y + 48 = 0$ রেখার অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** $3x + 8y - 24 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$8x + 3y + 48 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

এখানে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 24 + 24 = 48 > 0$

∴ (+) চিহ্ন দ্বারা স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ পাওয়া যাবে,

∴ স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $\frac{3x+8y-24}{\sqrt{9+64}} = \frac{8x+3y+48}{\sqrt{64+9}}$

বা, $5x - 5y + 72 = 0$ বা, $\frac{x}{-\frac{72}{5}} + \frac{y}{\frac{72}{5}} = 1$

∴ y অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $\frac{72}{5}$ একক **(Ans.)**

09. দৃশ্যকল্প-১: $3x - 4y + 12 = 0$. [DB'17]

দৃশ্যকল্প-২: $8x + 15y - 12 = 0$

(গ) দৃশ্যকল্প-১ এবং দৃশ্যকল্প-২ সমীকরণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের যে সমদ্বিখণ্ডক ও x অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** $3x - 4y + 12 = 0$ এবং $8x + 15y - 12 = 0$

সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$\frac{(3x-4y+12)}{5} = \pm\frac{(8x+15y-12)}{17}$

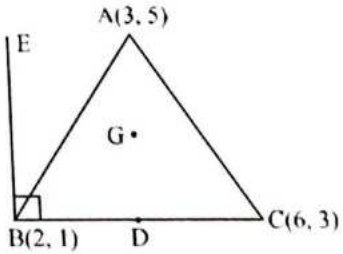
(+) ও (-) চিহ্ন নিয়ে, সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ যথাক্রমে $x - 13y + 24 = 0$ এবং $91x + 7y + 144 = 0$

১ম সমদ্বিখণ্ডকের ঢাল $= \frac{1}{13}$ এবং

২য় সমদ্বিখণ্ডকের ঢাল $= -\frac{91}{7}$ সুতরাং ১ম সমদ্বিখণ্ডকটি x অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে।

∴ নির্ণেয় ঢাল $= \frac{1}{13}$ **(Ans.)**

10.



[JB'17]

চিত্রে: G, ΔABCএর ভরকেন্দ্র; D, BC এর মধ্যবিন্দু, EB⊥BC

(গ) ∠EBC কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Educationblog24.com

(গ) **Sol^n:** BC এর সমীকরণ, $\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-6}{2-6} \Rightarrow 2y - 6 = x - 6$

$\therefore x - 2y = 0$ ..... (i)

$\therefore$ BE এর সমীকরণ, $2x + y + k = 0$

$2 \times 2 + 1 + k = 0$ [(2,1) বিন্দুগামী।

$\Rightarrow k = -5 \quad \therefore 2x + y - 5 = 0$ ..... (ii)

(i) ও (ii) এর অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক

$\frac{x-2y}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \pm \frac{2x+y-5}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}}$

$x - 2y = \pm(2x + y - 5)$

$(+) \Rightarrow x - 2y = 2x + y - 5 \therefore x + 3y - 5 = 0$ **(Ans.)**

$(-) \Rightarrow x - 2y = -2x - y + 5$

$\therefore 3x - y - 5 = 0$ **(Ans.)**

11. $4x + 3y - 5 = 0$ রেখা বরাবর রেলপথের একটি লাইন অবস্থিত। **[CB'17]**

(গ) রেললাইনের সাথে $3x - 4y + 6 = 0$ রেখা দ্বারা উৎপন্ন সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** $4x + 3y - 5 = 0$ ..... (i)

এবং $3x - 4y + 6 = 0$ ..... (ii)

এখানে, $a_1 = 4, b_1 = 3$

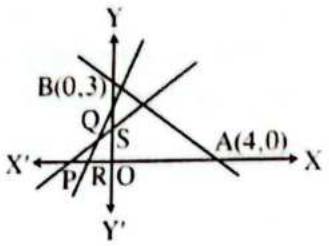
$a_2 = 3, b_2 = -4 \quad \therefore a_1a_2 + b_1b_2 = 12 - 12 = 0$

যেহেতু, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

অতএব (i) ও (ii) নং রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব এবং এদের অন্তর্গত কোণগুলো সমকোণ।

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক নেই। **(Ans.)**

12.



[নটর ডেম কলেজ, ঢা

(খ) উদ্দীপক হতে, $OP = 3, OR = 1, OS = \frac{3}{2}$ এ

$OQ = 2$ হলে, PS ও QR রেখাদ্বয়ের মধ্যব

সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** চিত্রে $OP = 3, OR = 1, OS = \frac{3}{2}$ এবং $OQ = 2$ হ

$P \equiv (-3, 0), R \equiv (-1, 0), S \equiv \left(0, \frac{3}{2}\right)$ এবং $Q \equiv (0, 2$

তাহলে PS রেখার সমীকরণ, $\frac{y-0}{x+3} = \frac{0-\frac{3}{2}}{-3-0} \Rightarrow 3y = \frac{3}{2}x +$

$\Rightarrow 6y = 3x + 9 \Rightarrow 3x - 6y + 9 = 0$ ..... (i)

এবং QR রেখার সমীকরণ, $\frac{y-2}{x-0} = \frac{2-0}{0+1}$

$\Rightarrow 2x - y + 2 = 0$ ..... (ii)

$\Rightarrow y - 2 = 2x$

(i) ও (ii) নং সমীকরণে, $a_1 = 3; b_1 = -6$

$a_2 = 2; b_2 = -1$

$\therefore a_1a_2 + b_1b_2 = 3 \times 2 + (-6)(-1) = 12 > 0$

$\therefore$ (i) ও (ii) নং রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক

$\frac{3x-6y+9}{\sqrt{3^2+6^2}} = -\frac{2x-y+2}{\sqrt{2^2+1^2}}$

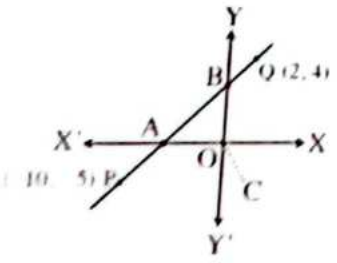
$\Rightarrow \frac{3x-6y+9}{3\sqrt{5}} = -\frac{2x-y+2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow 3x - 6y + 9 = -6x + 3y - 6$

$\Rightarrow 9x - 9y + 15 = 0 \Rightarrow 3x - 3y + 5 = 0$ **(Ans.)**

নিজে করো

13.



[Ctg.B'22]

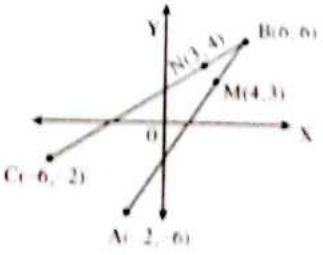
এবং OC রেখার ঢাল $= \frac{4}{3}$

(গ) দেখাও যে, OC রেখা ও x-অক্ষরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

14. দৃশ্যকল্প-২: $4x - 3y = -4, \quad 3x - 4y = -5.$ **[BB'2**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকো সমদ্বিখণ্ডক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[Ans:** $\frac{81}{98}$ বর্গ এক

15.



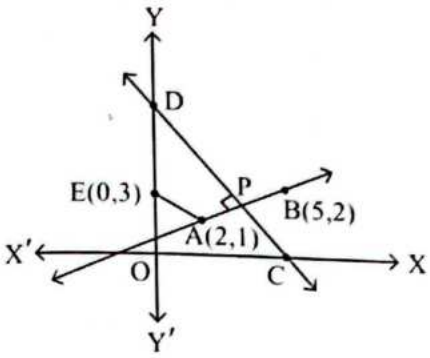
[CB'2

(গ) দেখাও যে, $\angle B$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

Educationblog24.com

16. A (3, −2), B (5, 6) দুটি বিন্দু $3x + 4y - 1 = 0$ ও $5x - 12y + 3 = 0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ [Din.B'22]

(গ) উদ্দীপকে বর্ণিত রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Ans: $32x - 4y + 1 = 0$]

17. 

[RB'21]

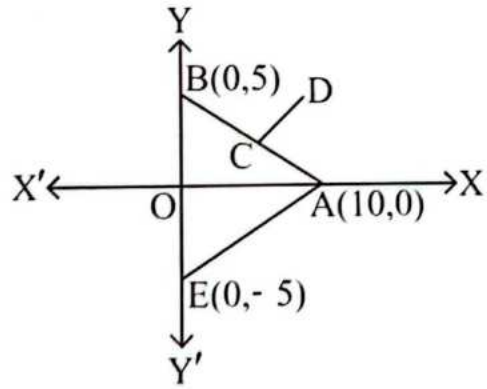
(গ) AE এবং CD রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $(3 - \sqrt{5})x + (1 - \sqrt{5})y - 12 + 3\sqrt{5} = 0$]

18. দৃশ্যকল্প-১: $4x - 4y + 6 = 0, x + 7y - 3 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ। [Ctg.B'21]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

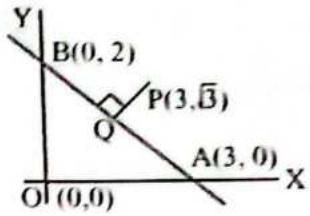
[Ans: $8x - 24y + 21 = 0$]

19. 

[Din.B'21]

(খ) ∠AOE এর সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

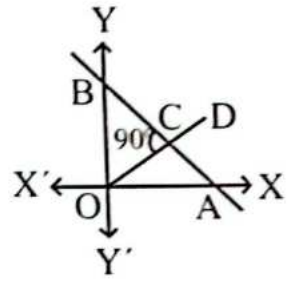
[Ans: $y = -x \Rightarrow x + y = 0$]

20. 

[DB'19]

(গ) PA এবং AB সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $(2 - \sqrt{13})x + 3y - 6 + 3\sqrt{13} = 0$ এবং $(2 + \sqrt{13})x + 3y - 6 - 3\sqrt{13} = 0$]

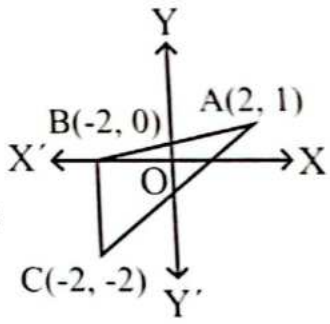


21. [Ctg.B'19]

AB সরলরেখার সমীকরণ, $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

(গ) AB ও OD সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $x + 5y - 6 = 0$ এবং $5x - y - 6 = 0$]

22. দৃশ্যকল্প-১: 

[CB'19]

(খ) AB ও AC এর অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Ans: $(5 + 3\sqrt{17})x - (20 + 4\sqrt{17})y + (10 - 2\sqrt{17}) = 0$]

23. $2x - y + 2 = 0, x - 2y + 3 = 0$ [RB'17]

(গ) উদ্দীপকের আলোকে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: $\frac{25}{18}$]

Educationblog24.com

T-14: বিবিধ

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

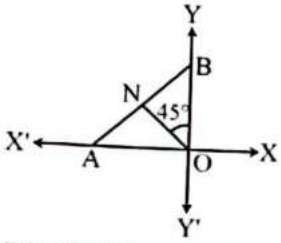
01. (ক) $2x - 3y + 5 = 0$ এবং $7x + 4y - 3 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয় কর। [Ctg.B'23]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $2x - 3y + 5 = 0$ ... ... (i)
$7x + 4y - 3 = 0$ ... ... (ii)
সমীকরণ (i) কে 4 দ্বারা গুণ ও (ii) কে 3 দ্বারা গুণের পর যোগ করে পাই,

$$\begin{array}{rrrrr} \text{(i)} \times 4 \Rightarrow & 8x & -12y & +20 & = 0 \\ \text{(ii)} \times 3 \Rightarrow & 21x & +12y & -9 & = 0 \\ \hline & 29x & & +11 & = 0 \end{array}$$

$\therefore x = -\frac{11}{29}$; x এর মান সমীকরণ (i) এ বসিয়ে পাই,
$2\left(\frac{-11}{29}\right) - 3y + 5 = 0$
$\Rightarrow 3y = \frac{123}{29} \therefore y = \frac{41}{29} \therefore$ ছেদবিন্দু $\left(-\frac{11}{29}, \frac{41}{29}\right)$

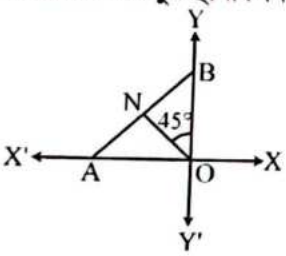
02.



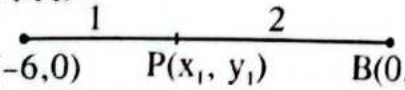
[SB'23]

(গ) ΔOAB এর ক্ষেত্রফল 18 বর্গ একক হলে AB এর সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:**

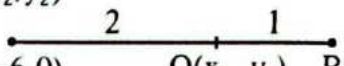


এখানে, $\angle BON = 45°$
$\therefore \angle NOX = 45° + 90° = 135°$
ON কে লম্ব ধরে নিয়ে পাই, AB রেখার সমীকরণ,
$x \cos 135° + y \sin 135° = p$ [যেখানে, $p = ON$]
$\Rightarrow -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = p \Rightarrow -\frac{x}{\sqrt{2}p} + \frac{y}{\sqrt{2}p} = 1$
শর্তমতে, $\frac{1}{2} \times \sqrt{2}p \times \sqrt{2}p = 18 \Rightarrow p^2 = 18 \therefore p = 3\sqrt{2}$
$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ: $-\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-6} + \frac{y}{6} = 1$
$\therefore A(-6, 0)$ এবং $B(0, 6)$
ধরি, AB রেখাকে 1:2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুটি হলো $P(x_1, y_1)$



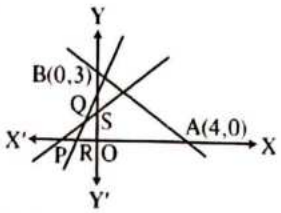
$x_1 = \frac{1 \times 0 + 2 \times (-6)}{1+2} = -4$
$y_1 = \frac{1 \times 6 + 2 \times 0}{1+2} = 2 \therefore P(-4, 2)$

আবার, AB রেখাকে 2:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুটি হলো $Q(x_2, y_2)$



$x_2 = \frac{2 \times 0 + 1 \times (-6)}{2+1} = -2$; $y_2 = \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2+1} = 4$
$\therefore Q(-2, 4)$
$\therefore$ AB এর সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-4, 2)$ এবং $(-2, 4)$ **(Ans.)**

03.



[নটর ডেম কলেজ, ঢা

(ক) k এর কোনো মানের জন্যই $(k + 2)x - (2k - 3)y + (5k - 10) = 0$ রেখাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $(k + 2)x - (2k - 3)y + (5k - 10) = 0$
$\Rightarrow kx + 2x - 2ky + 3y + 5k - 10 = 0$
$\Rightarrow 2x + 3y - 10 + k(x - 2y + 5) = 0$ ... ... (i)
এখন, $(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$
(i) নং সমীকরণের সাথে তুলনা করে বলা যায়,
সমীকরণ (i) $2x + 3y - 10 = 0$ এবং $x - 2y + 5 = 0$ ছেদবিন্দুগামী।
সমীকরণ দুটি সমাধান করে পাই, $x = \frac{5}{7}$; $y = \frac{20}{7}$
$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $\equiv \left(\frac{5}{7}, \frac{20}{7}\right)$ **(Ans.)**

04. $ax + by = c$ ... ... (i) ; $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ... ... (ii)

[সেন্ট যোসেফ উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢা

(খ) যদি সমীকরণ (i) এবং (ii) একই সরলরেখা নির্দেশ ক তবে p এর মান a, b, c এর মাধ্যমে নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়, $ax + by = c$ ... ... (i)
$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ... ... (ii)
(i) ও (ii) একই সরলরেখা নির্দেশ করলে, $\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{b}{\sin \alpha} =$
এখানে, $\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{c}{p} \therefore \cos \alpha = \frac{pa}{c}$ ... ... (i)
এবং $\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{c}{p} \therefore \sin \alpha = \frac{pb}{c}$ ... ... (ii)
(i)^2 + (ii)^2 করে পাই, $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \left(\frac{pa}{c}\right)^2 + \left(\frac{pb}{c}\right)$
$\Rightarrow 1 = p^2\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}\right) \Rightarrow 1 = p^2\left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\right)$
$\Rightarrow p^2 = \frac{c^2}{a^2+b^2} \therefore p = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **(Ans.)**

Educationblog24.com

MCQ প্রশ্নের জন্য এই অধ্যায়ের বিভিন্ন টাইপের তুলনামূলক গুরুত্ব:

গুরুত্ব	টাইপ	টাইপের নাম	যতবার প্রশ্ন এসেছে	যে বোর্ডে যে বছর এসেছে MCQ
✪✪✪	T-01	কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক ও সমীকরণ সংক্রান্ত	27	CB'23; 22, 17; SB'23, 21, 19, 17; MB'23, 21; DB'22, 21, 17; RB'22, 21, 19; JB'22, 21, 19; BB'22, 19, 17; Ctg.B'21; Din.B'21, 17; All B'18
✪	T-02	দুইটি বিন্দুর দূরত্ব সম্পর্কিত	01	CB'17
✪✪✪	T-03	বিভক্তিকরণ বিন্দু ও অনুপাত সংক্রান্ত	11	DB'23; SB'23; JB'23, 22, 17; Din.B'23; BB'23; MB' 23, 22; RB'22; CB'17
✪✪✪	T-04	ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত	12	Ctg.B'23, 22, 17; CB'23, 17; MB'23; Mad.B'23; RB'22; JB'21, 19; BB;21; Din.B'21
✪	T-05	সঞ্চারপথের সমীকরণ সংক্রান্ত	01	SB'23
✪✪✪	T-06	ঢাল সংক্রান্ত	18	DB'23, 22, 21, 19; RB'23, 19; Ctg.B'23, 19; MB'23, 22, 21; Mad.B'23; SB'22; BB'22, 21; Din.B'17
✪✪✪	T-07	বিভিন্ন ধরনের সরলরেখার সমীকরণ সংক্রান্ত	24	SB'23, 22, 21; Mad.B'23; RB'22, 21, 19; Ctg.B'22, 21, 17; CB'22, 21; BB'22; DB'21, 17; JB'21; MB'21; Din.B'17
✪✪✪	T-08	সমান্তরাল ও লম্ব হবার শর্ত এবং সমীকরণ নির্ণয়	36	DB'23, 21, 17; Ctg.B'23, 22, 21; SB'23, 21, 17; JB'23, 22, 21; CB'23, 22, 21; BB'23, 22, 21; Din.B'23, 22, 21; RB'22, 21, 19; MB'21; All B'18
✪✪	T-09	বহিঃস্থ বিন্দু হতে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় সংক্রান্ত	07	DB'23, 22, 19; RB'23; CB'23; Din.B'23; JB'17
✪✪✪	T-10	দুইটি সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব নির্ণয় সংক্রান্ত	11	DB'23, 22, 21; SB'22, 21, 19; RB'21; Ctg.B'19; MB'19; All B'18; BB'17
✪	T-11	ত্রিভুজের বিভিন্ন ধরনের কেন্দ্র নির্ণয় সংক্রান্ত	03	JB'23; Din.B'19; RB'17
✪✪	T-12	দুইটি রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত	07	RB'22, 21; MB'22; JB'21; Din.B'21; BB'19, 17
✪	T-13	কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ এবং কোণের সাপেক্ষে বিভিন্ন বিন্দুর অবস্থান সংক্রান্ত	01	MB'21
✪✪✪	T-14	বিবিধ	30	RB'23, 21, 19; JB'23, 22, 21; Din.B'23, 21, 19; Mad.B'23; DB'22, 21; SB'22, 21, 19; Ctg.B'22, 21; CB'22, 21, 19; MB'22, 21; BB'19; All B'18

Educationblog24.com

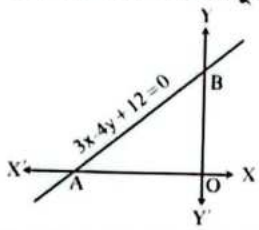
বিগত বোর্ড পরীক্ষামূহের MCQ প্রশ্ন

01. (1, 2) বিন্দুগামী $3x + 2y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ কোনটি? [DB, SB, CB'23]
(a) $2x + 3y - 8 = 0$ (b) $3x - 2y + 1 = 0$
(c) $3x + 2y - 7 = 0$ (d) $2x - 3y + 4 = 0$

02. $qy + px + r = 0$ রেখার ঢাল কোনটি? [DB'23]
(a) $-\frac{p}{q}$ (b) $-\frac{q}{p}$ (c) $\frac{q}{p}$ (d) $\frac{p}{q}$

03. $2x + 3y = 9$ এবং $4x + 6y = 7$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কোনটি? [DB'23, 22, 21; SB'22, 21, 19; RB'21; Ctg.B, MB'19; All B'18; BB'17]
(a) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ (c) $\frac{11}{2\sqrt{13}}$ (d) $\frac{25}{2\sqrt{13}}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



04. $(-1, -2)$ হতে AB রেখার লম্ব দূরত্ব কোনটি? [DB'23]
(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) 2 (d) $\frac{17}{5}$

05. AB রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? [DB'23]
(a) $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ (b) $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ (c) $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ (d) $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

06. $(3, -2)$ বিন্দু হতে $3x + 4y + 14 = 0$ রেখার লম্ব দূ... কত? [RB'...]
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

07. $(a, b), (1, 1), (a - 1, b - 1)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে- [RB'...]
(a) $ab = 1$ (b) $a = b$
(c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0$ (d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

08. $4x + 8y + 17 = 0$ রেখাটির- [RB'...]
(i) সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $2x + 4y + 17 = 0$
(ii) লম্ব রেখার সমীকরণ $2x - y + 5 = 0$
(iii) x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন কর...
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, i...

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দ...
$3x + y = 3$ এবং $3x - y = 3$ দুইটি সরলরেখা।

09. ঢালদ্বয়ের গুণফল- [Ctg.B...]
(a) -9 (b) -1 (c) 1 (d) 9

10. রেখাদ্বয় y- অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষে... কত বর্গ একক? [Ctg.B...]
(a) 3 (b) 6 (c) 12 (d) 18

11. M এর মান কত হলে $2x - y + 6 = 0$ ও $3x + My - 3$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে? [Ctg.B, Din.B'23; RB...]
(a) -6 (b) $-\frac{3}{2}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) 6

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

01. d	02. a	03. c	04. d	05. b	06. c	07. b	08. d	09. a	10. a	11. c

01. $3x + 2y + 5 = 0$ এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ
$2x - 3y = 2 \times 1 - 3 \times 2 \Rightarrow 2x - 3y + 4 = 0$

03. সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় $2x + 3y = 9 \Rightarrow 4x + 6y - 18 = 0$
এবং $4x + 6y = 7 \Rightarrow 4x + 6y - 7 = 0$
$\therefore$ মধ্যবর্তী দূরত্ব $\frac{|-18-(-7)|}{\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{11}{2\sqrt{13}}$

04. $(-1, -2)$ হতে $3x - 4y + 12 = 0$
এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|-3+8+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{17}{5}$ একক

05. $3x - 4y + 12 = 0$ রেখাংশ x ও y অক্ষকে যথাক্রমে $A(-4, 0)$ ও $B(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে। AB এর মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{-4+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$

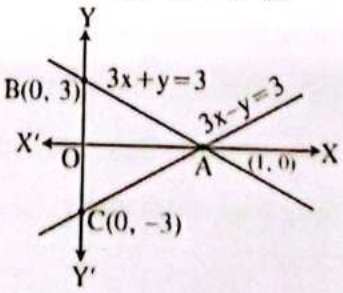
06. $(3, -2)$ হতে $3x + 4y + 14 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব $\left|\frac{3\times3+4(-2)+14}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \left|\frac{15}{5}\right| = 3$

07. বিন্দুত্রয় সমরেখ বিধায় ঢাল সর্বদা সমান।
$\frac{b-1}{a-1} = \frac{b-1-b}{a-1-a} = 1 \Rightarrow b - 1 = a - 1 \Rightarrow a = b$

08. (i), (ii) ও (iii) এর ঢাল যথাক্রমে m_1, m_2 ও m_3 হলে,
$m_1 = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} < 0; m_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}; m_3 = \frac{-2}{-1} = 2$
$m_1 = m_2$ এবং $m_2 \times m_3 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$
আবার, ধরি $\tan\theta = m_1 =$ (i) এর ঢাল
$\Rightarrow \tan\theta = -\frac{1}{2} \therefore \theta = 153.43$ [স্থূলকোণ]
$\therefore$ (i), (ii) ও (iii) সঠিক।

09. $ax + by + c = 0$ রেখার ঢাল, $m = \frac{-a}{b}$
$3x + y = 3 \therefore$ ঢাল, $m_1 = -\frac{3}{1} = -3$
$3x - y = 3 \therefore$ ঢাল, $m_2 = \frac{-3}{-1} = 3 \therefore m_1 m_2 = -3 \times 3 = -9$

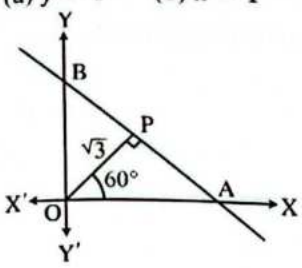
10. রেখাদ্বয় x অক্ষকে $A(1, 0)$ ও y অক্ষকে $B(0, 3)$ ও $C(0, -3)$ বিন্দুতে ... করে।
$\therefore \Delta ABC = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -3 & 0\end{matrix}\right\| = 3$ বর্গ একক



11. $2x - y + 6 = 0 \therefore$ ঢাল, $m_1 = \frac{-2}{-1} = 2$
$3x + My - 3 = 0 \therefore$ ঢাল, $m_2 = -\frac{3}{M}$
$\therefore m_1 m_2 = -1 \Rightarrow 2 \times \left(-\frac{3}{M}\right) = -1 \therefore M = 6$

Educationblog24.com

12. $x + y = 4$ এবং $x - y = 2$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী ও y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ— [Ctg.B'23; All B'18]
(a) $y = 1$ (b) $x = 1$ (c) $y = 3$ (d) $x = 3$

13. 

AB সরলরেখার সমীকরণ- [SB'23; RB'22; Ctg.B'17]
(a) $\sqrt{3}x - y = 2\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{3}x + y = 2\sqrt{3}$
(c) $x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$ (d) $x - \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$

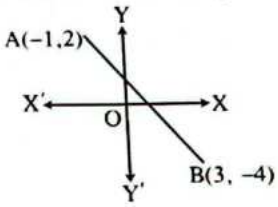
14. $(3, -60°)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক কোনটি? [SB'23; DB'22; MB'21; SB, JB'19; Din.B'17]
(a) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$
(c) $\left(\frac{3}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

15. $P(x, y)$ হতে $(-3, 0)$ এবং $(3, 0)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বের বর্গের সমষ্টি সর্বদা 40 হলে P বিন্দুর সঞ্চারপথ হবে একটি- [SB'23]
(a) বৃত্ত (b) পরাবৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

16. x-অক্ষরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হল- [BB'23]
(a) $x = 2$ (b) $x = y$
(c) $y = 1$ (d) $x - y = 2$

17. $2x - y + 1 = 0$ সরলরেখাটি— [BB'23]
(i) $x + 2y + 1 = 0$ রেখার উপর লম্ব
(ii) $x - 2y + 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল
(iii) দ্বারা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের পরিমাণ $\frac{\sqrt{5}}{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



18. A বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক হল— [BB'23]
(a) $\left(5, \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ (b) $(5, \tan^{-1}(-2))$
(c) $\left(\sqrt{5}, \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ (d) $(\sqrt{5}, \tan^{-1}(-2))$

19. A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে x-অক্ষরেখা কত অনুপাতে বিভক্ত করে? [BB, SB'23]
(a) 2 : 1 (b) 1 : 2 (c) 3 : 1 (d) 1 : 3

20. $P(1, -2)$ ও $Q(-8, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? [JB'23; CB'17]
(a) $(-2, -1)$ (b) $(10, -5)$
(c) $(17, -4)$ (d) $(-5, 0)$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

12. d	13. c	14. c	15. a	16. c	17. b	18. d	19. b	20. d

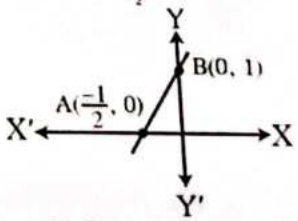
12. $x + y = 4 \ldots\ldots\ldots$ (i)
$x - y = 2 \ldots\ldots\ldots$ (ii)
(i) ও (ii) সমাধান করে পাই, $x = 3, y = 1$
∴ ছেদবিন্দু $(3, 1)$
∴ নির্ণেয় সমীকরণ: $x = 3$

13. $x\cos\theta + y\sin\theta = p$
$\Rightarrow x\cos 60° + y\sin 60° = \sqrt{3}$ (যেহেতু $\theta = 60°$ ও $p = \sqrt{3}$)
$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$

14. $(x, y) \equiv (r\cos\theta, r\sin\theta)$
$= \{3\cos(-60°), 3\sin(-60°)\} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

15. $\left(\sqrt{(x+3)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-3)^2 + y^2}\right)^2 = 40$
$\Rightarrow (x+3)^2 + y^2 + (x-3)^2 + y^2 = 40$
$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 + x^2 - 6x + 9 + y^2 = 40$
$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 18 = 40$
$\therefore x^2 + y^2 = 11$ যা একটি বৃত্ত।

17. (i) ও (ii) এর ঢালদ্বয়ের গুণফল $= \left(\frac{-2}{-1}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right) = -1$
∴ (i) সঠিক। এবং (iii) এর ঢাল, $\frac{-1}{-2}$ বা $\frac{1}{2} \neq 2$
∴ (ii) সঠিক নয়।
(i) নং রেখাটি: $2x - y = -1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{1}{2}} + \frac{y}{1} = 1$



AB = অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ
$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - 0\right)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ একক।

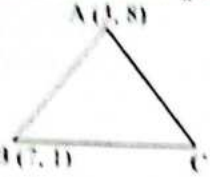
18. $(r, \theta) \equiv \left(\sqrt{(-1)^2 + 2^2}, \pi - \tan^{-1}\left|\frac{2}{-1}\right|\right)$;
অর্থাৎ, $(\sqrt{5}, \tan^{-1}(-2))$

19. x অক্ষ দ্বারা বিভক্ত হলে অনুপাত $= \left|\frac{y_1}{y_2}\right| = \left|\frac{2}{-4}\right| = 1:2$

20. $P(1, -2)$ ও $Q(-8, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 2:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{2\times(-8)+1\times1}{2+1}, \frac{2\times1+1\times(-2)}{2+1}\right) = (-5, 0)$

Educationblog24.com

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (6, 4)।

21. C বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? [JB'23]
(a) (3, 8) (b) (8, 3) (c) (2, −1) (d) (2, 1)

22. AB এর উপর লম্ব রেখার ঢাল কত? [JB'23]
(a) $-\frac{7}{4}$ (b) $\frac{7}{4}$ (c) $\frac{4}{7}$ (d) $-\frac{4}{7}$

23. A(6, 4) এবং B(10, 8) দুইটি বিন্দু হলে [JB'23]
(i) AB রেখার ঢাল 1
(ii) AB রেখার সমীকরণ $x - y - 2 = 0$
(iii) AB কে বাহু ধরে অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল 8 বর্গ একক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

24. $x^2 + y^2 + ay = 0$ এর পোলার সমীকরণ কোনটি? [CB'23]
(a) $r + a = 0$ (b) $r^2 + a = 0$
(c) $r + a\sin\theta = 0$ (d) $r^2 + a\sin\theta = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$8x - by - 9 = 0$ এবং $4x + 3y + 2 = 0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ।

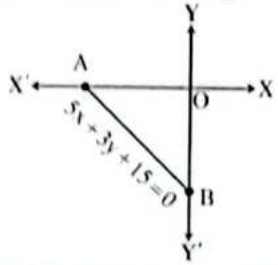
25. রেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে b এর মান কত? [CB'23]
(a) −6 (b) −3 (c) 3 (d) 6

26. (m, 0) (0, n), (1, 1) বিন্দু তিনটি সমরেখ হওয়ার শর্ত কোনটি? [CB'23]
(a) $m - n = mn$ (b) $m - n + mn = 0$
(c) $m + n = 0$ (d) $m + n = mn$

27. $2x - 3y = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।
(i) রেখাটি মূলবিন্দুগামী
(ii) (3, 2) বিন্দুটি রেখাটির উপর অবস্থিত
(iii) (2, −3) বিন্দু থেকে রেখাটির লম্ব দূরত্ব $\frac{1}{\sqrt{13}}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

28. A(−1, 2) এবং B(3, 1) দুইটি বিন্দু হলে। [Din.B
(i) AB রেখার Y-অক্ষের ছেদ বিন্দু $\left(0, \frac{7}{4}\right)$
(ii) AB রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল 4
(iii) AB কে বাহু ধরে অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল 17 বর্গ
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii,

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দা



29. মূল বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব কোনটি? [Din.B, RB'23;
(a) $\frac{15}{8}$ (b) $\frac{15}{34}$ (c) $\frac{15}{\sqrt{34}}$ (d) $\frac{15}{2\sqrt{2}}$

30. AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? [Din.B, MB'23;
(a) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$
(c) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (d) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

21. b	22. c	23. a	24. c	25. a	26. d	27. a	28. d	29. c	30.

21. ধরি, C(x, y); ভরকেন্দ্র (6,4) $= \left(\frac{3+7+x}{3}, \frac{8+1+y}{3}\right)$
$\therefore \frac{3+7+x}{3} = 6 \Rightarrow x = 18 - 3 - 7 = 8$ এবং $\frac{8+1+y}{3} = 4$
$\Rightarrow y = 12 - 8 - 1 = 3 \therefore C(x, y) = (8, 3)$

22. AB রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{8-1}{3-7} = \frac{7}{-4}$ ইহার লম্বরেখার ঢাল m_2 হলে,
$m_1 . m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{4}{7}$

23. AB রেখার ঢাল $= \frac{8-4}{10-6} = 1$; AB রেখার সমীকরণ: $\frac{x-6}{10-6} = \frac{y-4}{8-4}$
$\Rightarrow x - 2 = y \Rightarrow x - y - 2 = 0$
$AB = \sqrt{(10-6)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ একক।
$\therefore AB^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32$ বর্গ একক। সুতরাং (i) ও (ii) সঠিক।

24. $x^2 + y^2 + ay = 0 \Rightarrow r^2 + ar\sin\theta = 0 \Rightarrow r + a\sin\theta = 0$

25. $8x - by - 9 = 0 \therefore$ ঢাল, $m_1 = \frac{-8}{-b} = \frac{8}{b}$
$4x + 3y + 2 = 0 \therefore$ ঢাল, $m_2 = \frac{-4}{3}$
শর্তমতে, $m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{8}{b} = -\frac{4}{3} \Rightarrow b = -6$

26. $\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m(n-1) - 0 + 1(0-n) = 0$
$\Rightarrow mn - m - n = 0 \Rightarrow m + n = mn$

27. (i) $2x - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$
$\therefore$ রেখাটি মূলবিন্দুগামী।
(ii) $2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0 \therefore$ রেখাটি (3, 2) বিন্দুগামী।
(iii) (2, −3) বিন্দু থেকে রেখাটির লম্ব দূরত্ব
$= \frac{|2 \cdot 2 + (-3)(-3) + 0|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|13|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \therefore$ (i) ও (ii) সঠিক।

28. AB রেখার সমীকরণ $\frac{x+1}{-1-3} = \frac{y-2}{2-1}$
$\Rightarrow x + 1 = -4y + 8 \Rightarrow x + 4y = 7 \Rightarrow \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{4}} = 1$
(i) Y অক্ষের ছেদক হলো $\left(0, \frac{7}{4}\right)$
(ii) AB রেখার ঢাল $m_1 = -\frac{1}{4}$ এর লম্ব রেখার ঢাল হলো 4
(iii) $AB = \sqrt{(3+1)^2 + (1-2)^2}$; $AB = \sqrt{17}$ একক
AB কে বাহু ধরে বর্গ আঁকলে এর ক্ষেত্রফল $AB^2 = 17$ বর্গ একক।
$\therefore$ (i), (ii) ও (iii) সবগুলোই সঠিক।

29. (0, 0) হতে $5x + 3y + 15 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|0+0+15|}{\sqrt{5^2+3^2}} = \frac{15}{\sqrt{34}}$ একক

30. $5x + 3y + 15 = 0$, X-অক্ষকে A(−3, 0) ও Y-অক্ষকে B(0, −5) বিন্দুতে ছেদ করে। AB এর মধ্যবিন্দু $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

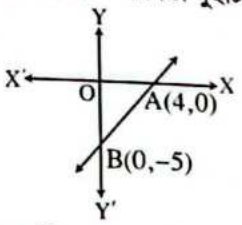
31. $6x + 5y + 25 = 0$ সরলরেখার ঢাল কত? [MB'23; BB'22; DB'21]

(a) $\frac{6}{5}$ (b) $\frac{-6}{5}$ (c) $\frac{5}{6}$ (d) $\frac{-5}{6}$

32. $(-1, -\sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক কত? [MB'23]

(a) $(2, 240°)$ (b) $(2, 120°)$
(c) $(2, 60°)$ (d) $(2, 30°)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



33. AB সরলরেখার সমীকরণ কোনটি? [Mad.B'23]

(a) $4x - 5y + 20 = 0$ (b) $5x - 4y - 20 = 0$
(c) $5x - 4y + 20 = 0$ (d) $4x - 5y - 20 = 0$

34. ΔOAB এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক। [MB, Mad.B'23]

(a) -20 (b) -10 (c) 10 (d) 20

35. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3$ সমীকরণের ঢাল $\tan\theta$ হলে θ এর মান কত? [Mad.B'23]

(a) $-\frac{\pi}{3}$ (b) $-\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

36. একটি ত্রিভুজের A(3, 2), B(3, 8) এবং C(−3, 2) তিনটি শীর্ষবিন্দু— [Mad.B'23]

(i) AB = 6 একক (ii) ভরকেন্দ্র (3, 4)
(iii) BC রেখার ঢাল = 1

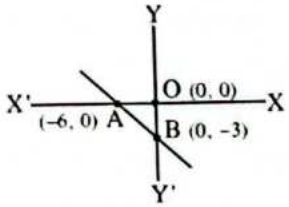
নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

37. $2x + 3y = 6$ রেখাটি y-অক্ষকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে? [Mad.B'23]

(a) (0, 2) (b) (0, 3) (c) (2, 0) (d) (3, 0)

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



38. AB এর ঢাল কত? [DB'22, 19; BB'21]

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $-\frac{3}{4}$ (d) $-\frac{4}{3}$

39. মূলবিন্দু থেকে AB এর লম্ব দূরত্ব কত? [DB'22]

(a) 4 একক (b) 3 একক
(c) $\frac{12}{5}$ একক (d) $\frac{12}{25}$ একক

40. $x + y - 2 = 0$ রেখাটির- [DB'22; CB'19]

(i) সমান্তরাল রেখা $2x + 2y + 3 = 0$
(ii) মূলবিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব $\sqrt{2}$ একক
(iii) উদ্দীপকের রেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 2 বর্গ একক

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

31. b	32. a	33. b	34. c	35. c	36. b	37. a	38. a	39. -	40. d

32. $(r, \theta) = \left(\sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2}, 180° + \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right|\right)$
অর্থাৎ $(2, 240°)$

33. A(4,0) ও B(0, −5) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ
$\frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = 1 \Rightarrow 5x - 4y = 20 \therefore 5x - 4y - 20 = 0$

34. আমরা জানি, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2} \times 4 \times 5$ বর্গ একক
$= 10$ বর্গ একক। [বি.দ্র: বাহুর পরম মান ধরে]

35. $\therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30° \Rightarrow \frac{\pi}{6}$

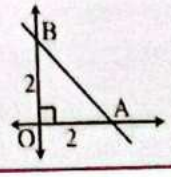
36. (i) $AB = \sqrt{(3-3)^2 + (2-8)^2}$
$= \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$ একক।
(ii) ভরকেন্দ্র $\left(\frac{3+3-3}{3}, \frac{2+8+2}{3}\right) = (1, 4)$,
(iii) BC রেখার ঢাল $= \frac{8-2}{3-(-3)}$
$= \frac{6}{6} = 1$ অর্থাৎ (ii) নং সঠিক নয়, (i) ও (iii) নং সঠিক।

37. y-অক্ষকে ছেদ করলে ভুজ, $x = 0$
সমীকরণে x এর মান 0 বসিয়ে ছেদবিন্দু নির্ণয় করি।
$2 \cdot 0 + 3y = 6 \Rightarrow y = 2$ ছেদবিন্দু $\equiv (0, 2)$

38. $m = \frac{-3-0}{0-(-6)} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

39. (No Answer): AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{-6} + \frac{y}{-3} = 1 \Rightarrow \frac{x+2y}{-6} = 1$
$\Rightarrow x + 2y = -6 \therefore x + 2y + 6 = 0$ মূলবিন্দু হতে AB রেখার লম্ব দূরত্ব,
$d = \frac{|0+2\cdot0+6|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$ একক

40. $x + y - 2 = 0$, রেখাটির ঢাল, $m = -\frac{1}{1} = -1$
(i) $2x + 2y + 3 = 0$ রেখার ঢাল, $m = -\frac{2}{2} = -1$
$\therefore$ রেখাটি $x + y - 2 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল
(ii) মূলবিন্দু (0, 0) হতে $x + y - 2 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব,
$d = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ একক
(iii) $x + y - 2 = 0 \Rightarrow x + y = 2 \therefore \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$
$\therefore$ x ও y এর খণ্ডিতাংশ যথাক্রমে 2 ও 2 একক।
$\therefore \Delta OAB = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ বর্গ একক



Educationblog24.com

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x + y = 3$ এবং $x - y = 3$ দুইটি রেখার সমীকরণ।

41. রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? [RB'22, 21; MB'22; JB'21]

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

42. রেখাদ্বয় Y -অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [RB'22] [Ans: b]

(a) 6 (b) 9 (c) 12 (d) 18

43. $(-2,4)$ এবং $(8,-10)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে 2: 3 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? [RB'22]

(a) $(-22,8)$ (b) $(22,-8)$

(c) $(-22,32)$ (d) $(22,-32)$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x + y + 4 = 0$ এবং $x - y - 2 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

44. রেখা দুইটির ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? [Ctg.B'22]

(a) $(3, 1)$ (b) $(1, 3)$

(c) $(-3, -1)$ (d) $(-1, -3)$

45. x-অক্ষের সাথে রেখা দুইটি যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল কত? [Ctg.B'22]

(a) 9 বর্গ একক (b) 6 বর্গ একক

(c) 4 বর্গ একক (d) 3 বর্গ একক

46. $(-5, 10)$ বিন্দুগামী সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ কোণ উৎপন্ন করে। সরলরেখার সমীকরণ- [Ctg.B'22, 21; BB

(a) $4x + 3y - 10 = 0$ (b) $3x - 4y + 55 = 0$

(c) $3x + 4y + 55 = 0$ (d) $4x + 3y + 30 = 0$

47. $A(3,-2), B(4,6)$ এবং $C(5, 7)$ কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে- [Ctg.B

(i) ভরকেন্দ্র $\left(4, \frac{11}{3}\right)$ (ii) BC এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{9}{2}\right.$

(iii) AB এর সমীকরণ $8x - y - 26 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii,

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও

$(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দু হতে $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ সরলরেখার অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য P এবং লম্ব রেখাটি x-অক্ষের সাথে θ উৎপন্ন করলে-

48. P-এর মান কত? [Ctg.B, SB'22; RB, J

(a) 5 (b) 4 (c) 2 (d) $5\sqrt{2}$

49. θ-এর মান- [S

(a) 30° (b) 120° (c) 60° (d) 150

50. $2x + 3y = 8$ রেখা দ্বারা- [CB, JB'22; SB'22, 21; Din

(i) x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ 4

(ii) অক্ষদ্বয়ের সাথে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}$ বর্গ এক

(iii) y-অক্ষকে $(0, 8)$ বিন্দুতে ছেদ করে

নিচের কোনটি সঠিক?

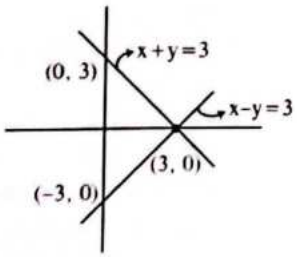
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

41. d	42. b	43. c	44. d	45. a	46. b	47. d	48. a	49. d	50

41. এখানে, $x + y = 3 \Rightarrow m_1 = -1$ এবং $x - y = 3$
$\Rightarrow m_2 = 1 ; m_1 m_2 = -1 \therefore \theta = 90°$

42.



$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 3\right) \times 2 = 9$ বর্গ একক।

43. $\therefore x = \frac{2\times8-3\times(-2)}{2-3} = \frac{16+6}{-1} = -22$

$\therefore y = \frac{2\times(-10)-3\times(4)}{2-3} = \frac{-20-12}{-1} = 32 \therefore R = R(-22, 32)$

45. $x + y + 4 = 0$ ও $x - y - 2 = 0$ রেখা পরস্পর $(-1, -3)$ বিন্দুতে ছেদ করে এবং রেখাদ্বয় x-অক্ষকে যথাক্রমে $(-4, 0)$ ও $(2, 0)$ বিন্দুতে ছেদে করে।
$\therefore (-1, -3), (-4, 0)$ এবং $(2, 0)$ বিন্দুত্রয় নিয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}(12 + 6) = 9$ বর্গ একক

46. $(y - y_1) = m(x - x_1) \Rightarrow (y - 10) = \tan\left[\tan^{-1}\frac{3}{4}\right](x + 5)$
$\Rightarrow (y - 10) = \frac{3}{4}(x + 5) \Rightarrow 4y - 40 = 3x + 15$
$\Rightarrow 3x - 4y + 55 = 0$

47. ভরকেন্দ্র $\equiv \left(\frac{3+4+5}{3}, \frac{-2+6+7}{3}\right) = \left(4, \frac{11}{3}\right)$
BC এর মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$
AB এর সমীকরণ $\Rightarrow \frac{y+2}{-2-6} = \frac{x-3}{3-4} \Rightarrow -y - 2 = -8x + 24$
$\Rightarrow 8x - y - 26 = 0$

48. লম্বের দৈর্ঘ্য $= \left|\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}-1+8}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}\right| = 5 = P$

49. প্রদত্ত রেখার ঢাল $\sqrt{3}$
$\therefore$ এর লম্বরেখার ঢাল $-\frac{1}{\sqrt{3}} \therefore \theta = 150° \left[\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

50. $2x + 3y = 8 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{\frac{8}{3}} = 1$
রেখাটি দ্বারা x অক্ষের খণ্ডিতাংশ 4 একক। $\therefore$ (i) সঠিক।
$\therefore$ অক্ষদ্বয়ের সাথে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$ বর্গ এক
$\therefore$ (ii) সঠিক।
y-অক্ষকে $\left(0, \frac{8}{3}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে। $\therefore$ (iii) সঠিক নয়।

Educationblog24.com

51. $3x + \sqrt{3}y - 10 = 0$ রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে? [BB, MB'22; Ctg.B'19]

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{5\pi}{6}$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$3x - 4y - 12 = 0$ সরলরেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

52. উদ্দীপকের সরলরেখার উপর লম্ব এবং (1, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কোনটি? [RB, JB, CB, BB'22; DB, RB, SB, BB, JB, MB'21; DB'17]

(a) $4x + 3y - 10 = 0$ (b) $4x + 3y - 12 = 0$
(c) $3x - 4y + 12 = 0$ (d) $4x - 3y - 10 = 0$

53. $x + y - 4 = 0$ সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ তৈরি করে তার ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [JB'22]

(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 32

54. $(-1, -1)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি? [RB, BB, JB, CB'22; DB, RB, Ctg.B, SB, JB, Din.B'21; RB, BB'19; All B'18; DB, SB, CB, Din.B'17]

(a) $(\sqrt{2}, -45°)$ (b) $(\sqrt{2}, 45°)$
(c) $(\sqrt{2}, 135°)$ (d) $(\sqrt{2}, 225°)$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\sqrt{2}x - y + 5 = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।

55. প্রদত্ত সরলরেখার দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কোনটি? [CB'22]

(a) -5 (b) $-\frac{5}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (d) 5

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$2x - ky + 1 = 0$ এবং $3x + 2y - 6 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ

56. দ্বিতীয় রেখাটির লম্ব রেখার ঢাল কত? [Ctg.B, Din.B'22; SB, CB'21; SB'17]

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $-\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{3}{2}$

57. রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে k এর মান কত হবে? [Din.B'22; DB, SB'21]

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $-\frac{3}{4}$ (d) $-\frac{4}{3}$

58. $(-3, -4)$ ও (6,2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাটিকে y-অক্ষরেখা যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তা হলো [MB'22]

(a) 2: 1 (b) 1: 2 (c) 2: 3 (d) 3: 2

59. $3x - 7y - 21 = 0$ সরলরেখাটি [MB'22]

(i) $+\frac{3}{7}$ ঢালবিশিষ্ট (ii) $(-7, -6)$ বিন্দুগামী

(iii) x- অক্ষ হতে 7 একক দৈর্ঘ্য খণ্ডিত করে

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$2x - 3y + 6 = 0$

60. রেখাটি x অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক- [DB'21]

(a) $(-3, 0)$ (b) $(0, -2)$ (c) (0,2) (d) (3,0)

61. $r = 3\cos\theta$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ কোনটি? [RB'21]

(a) $x^2 + y^2 - 3x = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 3x = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 3y = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 3y = 0$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

51. b	52. a	53. b	54. d	55. d	56. b	57. d	58. b	59. d	60. a	61. a

51. $3x + \sqrt{3}y - 10 = 0$ রেখাটির ঢাল, $m = \tan\theta = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \pi - \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} \therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$

52. $3x - 4y - 12 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং (1, 2) বিন্দুগামী রেখা,

$4x + 3y = 4 \times 1 + 3 \times 2 \Rightarrow 4x + 3y = 10 \Rightarrow 4x + 3y - 10 = 0$

53. $x + y - 4 = 0 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে

তার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$ বর্গ একক

54. $(-1, -1) \equiv (r, \theta) \Rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{-1}{-1}\right| = -\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{-4\pi + \pi}{4} = \frac{-3\pi}{4} = -135°$

অথবা, $\theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{-1}{-1}\right| = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} = 225°$

$\therefore (-1, -1) \equiv (\sqrt{2}, 225°)$

55. $\sqrt{2}x - y + 5 = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}x + 5$

$\therefore$ y অক্ষের খণ্ডিতাংশ = 5

56. ২য় সরলরেখার সমীকরণ, $3x + 2y - 6 = 0$

$\therefore$ ২য় সরলরেখার ঢাল, $m_1 = -\frac{3}{2}$

২য় সরলরেখার লম্ব রেখার ঢাল m_2 হলে, $m_1 m_2 = -1$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}m_2 = -1 \therefore m_2 = \frac{2}{3}$

57. রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে, $\frac{2}{3} = \frac{-k}{2} \therefore k = -\frac{4}{3}$

58. y-অক্ষ রেখা যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা হল

$= \left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \left|\frac{-3}{6}\right| = 1:2$ অনুপাতে।

59. (i) $3x - 7y - 21 = 0$ রেখার ঢাল $= \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$

(ii) $(-7, -6)$ বসিয়ে পাই: $3(-7) - 7(-6) - 21$

$= -21 + 42 - 21 = 0$

অর্থাৎ রেখাটি $(-7, -6)$ বিন্দুগামী।

(iii) $3x - 7y = 21 \Rightarrow \frac{x}{7} + \frac{y}{-3} = 1$

অর্থাৎ, x-অক্ষ হতে খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য 7 একক

$\therefore$ (i), (ii), (iii) সঠিক।

60. $y = 0$ বসিয়ে $x = -3$

$\therefore$ x অক্ষের ছেদবিন্দু $(-3, 0)$

61. $r = 3\cos\theta$ বা, $r^2 = 3r\cos\theta$

বা $x^2 + y^2 = 3x \therefore x^2 + y^2 - 3x = 0$

Educationblog24.com

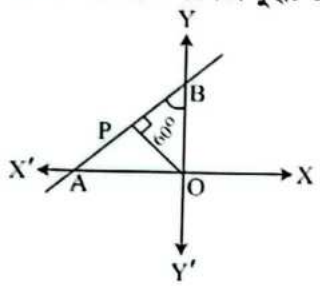
62. $2x - 3y - 1 = 0$ সরলরেখার- [RB'21]
(i) ঢাল $= \frac{2}{3}$
(ii) x অক্ষকে $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে
(iii) সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $3x + 2y + 7 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

63. $3x - 4y + k = 0$ একটি সরলরেখা- [Ctg.B'21]
(i) উহার ঢাল $= \frac{3}{4}$
(ii) উহা y-অক্ষ থেকে $\frac{k}{4}$ একক দৈর্ঘ্য ছেদ করে
(iii) উহা x-অক্ষকে $(3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

64. $\frac{3}{2}$ ঢালবিশিষ্ট সরলরেখাটি $\lambda x + 3y - 7 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব হলে λ এর মান- [Ctg.B'21]
(a) 2 (b) 3 (c) $\frac{9}{2}$ (d) $\frac{9}{4}$

65. $px + qy = pq$ সরলরেখাটি x ও y অক্ষদ্বয় হতে যথাক্রমে যে যে অংশ খণ্ডন করে তাদের দৈর্ঘ্য- [Ctg.B'21]
(a) p, q (b) q, p (c) $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$ (d) $\frac{1}{q}, \frac{1}{p}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



66. OP রেখার ঢাল কত? [SB'21]
(a) $-\sqrt{3}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$

67. OP = 2 হলে, AB রেখার সমীকরণ কোনটি? [SB'21]
(a) $x + \sqrt{3}y + 4 = 0$ (b) $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$
(c) $\sqrt{3}x + y + 4 = 0$ (d) $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$

68. মূলবিন্দু হতে 4 একক দূরবর্তী এবং -1 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নিচের কোনটি? [BB'21]
(a) $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$ (b) $y - x \pm 4\sqrt{2} = 0$
(c) $y + 4\sqrt{2}x = 0$ (d) $4\sqrt{2}x - y = 0$

69. $3x + 4y - 12 = 0$ সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে একটি ত্রিভুজ গঠন করলে- [BB'
(i) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক
(ii) ত্রিভুজটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত
(iii) অক্ষদ্বয় কর্তৃক রেখাটির খণ্ডিত অংশের পরিমাণ 5 একক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, i

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$2x + 2y - \sqrt{5} = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।

70. উদ্দীপকের সরলরেখাটি দ্বারা স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের সহিত উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি? [BB
(a) $\frac{5}{8}$ বর্গ একক (b) $\frac{5}{4}$ বর্গ একক
(c) $\frac{5}{2}$ বর্গ একক (d) $4\sqrt{5}$ বর্গ একক

71. $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 1$ রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে ক্ষেত্রফল কত? [JB
(a) 5 বর্গ একক (b) 6 বর্গ একক
(c) 15 বর্গ একক (d) 30 বর্গ একক

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

62. a	63. a	64. a	65. b	66. a	67. b	68. a	69. d	70. a	71. c

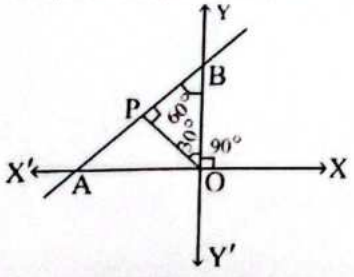
62. (i) ঢাল $= -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$; (ii) $y = 0$ হলে $x = \frac{1}{2} \therefore$ x অক্ষের ছেদবিন্দু $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
(iii) সমান্তরাল রেখা $2x - 3y + k = 0 \therefore$ (i) ও (ii) সঠিক

63. (i) $m = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$; (ii) $x = 0$ হলে, $y = \frac{k}{4}$; (iii) $y = 0$ হলে, $x = -\frac{k}{3}$
$\therefore$ x অক্ষের ছেদবিন্দু $\left(-\frac{k}{3}, 0\right) \therefore$ (i) ও (ii) সঠিক

64. এখানে, $\frac{3}{2} \times \left(-\frac{\lambda}{3}\right) = -1 \Rightarrow \lambda = 2$

65. $px + qy = pq \Rightarrow \frac{x}{q} + \frac{y}{p} = 1$

66. ঢাল, $m = \tan(90° + 30°) = -\cot 30° = -\sqrt{3}$

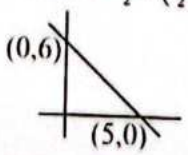


67. $x\cos 120° + y\sin 120° = OP$
$\Rightarrow -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} = 2 \Rightarrow x - \sqrt{3}y + 4 = 0$

69. $3x + 4y = 12 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$
$\therefore$ ত্রিভুজটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত
অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশ $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ একক
$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ বর্গ একক।
$\therefore$ (i), (ii) ও (iii) সঠিক

70. $2x + 2y = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{y}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 1$
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}$ বর্গ একক।

71.



$\Delta = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$ বর্গ একক

72. $2x + 3y = 7$ এবং $3ax - 5by + 15 = 0$ সমীকরণ দুটি একই সরলরেখা প্রকাশ করলে ধ্রুবক a এর মান কত? [JB'21]
(a) $\frac{10}{7}$ (b) $-\frac{10}{7}$ (c) $\frac{5}{7}$ (d) $-\frac{5}{7}$

73. $x - 3y + 5 = 0$ এবং $2x - 6y + 9 = 0$ রেখাদ্বয়ের ক্ষেত্রে- [JB'21]
(i) রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল (ii) দ্বিতীয় রেখাটির ঢাল $= \frac{1}{3}$
(iii) এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{1}{\sqrt{10}}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

74. একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{2}{3}$ এবং y- অক্ষের খণ্ডিতাংশ -5 হলে, রেখাটির সমীকরণ- [CB'21]
(a) $2x + 3y = 15$ (b) $3x + 2y = 15$
(c) $2x - 3y = 15$ (d) $3x - 2y = 15$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$P(x, y)$, $Q(2, -2)$ এবং $R(0, 4)$ বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

75. P হতে QR এর উপর মধ্যমার দৈর্ঘ্য $\sqrt{3}$ একক হলে, মধ্যমাটির সমীকরণ নিচের কোনটি? [CB'21]
(a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 1$ (b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 1$
(c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 1$ (d) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 1$

76. (i) QR এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, 1)$ [CB'21]
(ii) QR এর সমান্তরাল রেখার ঢাল 3
(iii) QR এর দৈর্ঘ্য $2\sqrt{10}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

77. $(1, 2)$ ও $(3, -2)$ বিন্দুগামী রেখার অক্ষ দুটির মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কত? [CB'21]
(a) $2\sqrt{5}$ (b) $3\sqrt{5}$ (c) $5\sqrt{2}$ (d) $5\sqrt{3}$

78. $x = 3$ এবং $y = \pm x$ সরলরেখাগুলো দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [Din.B'21]
(a) 3 (b) $\frac{9}{2}$ (c) 6 (d) 9

79. $y = 2x + 3$ এবং $3x - y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ কত? [Din.B'21; BB'19]
(a) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{7}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$
(c) $-\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$ (d) $\tan^{-1}(7)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$2x + 5y + 1 = 0$ এবং $-kx - 10y - 3 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

80. রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে k এর মান কত? [Din.B'21]
(a) -4 (b) -3 (c) 21 (d) -25

81. $(1, 0)$ বিন্দুগামী প্রথম রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ কোনটি? [Din.B'21]
(a) $2x + 5y - 2 = 0$ (b) $2x + 5y + 2 = 0$
(c) $5x - 2y - 5 = 0$ (d) $5x - 2y + 5 = 0$

82. $ax + by + c = 0$ সমীকরণটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। [MB'21]
(i) সরলরেখাটির ঢাল $-\frac{a}{b}$
(ii) $c = 0$ হলে সেটি মূলবিন্দুগামী
(iii) অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|ab|$ বর্গ একক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

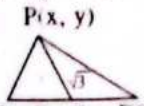
72. b	73. a	74. c	75. c	76. b	77. a	78. d	79. b	80. d	81. a	82. a

72. $\frac{2}{3a} = \frac{3}{-5b} = \frac{-7}{15} \Rightarrow a = -\frac{10}{7}$ [১ম ও ৩য় অনুপাত হতে]

73. ১ম রেখার ঢাল $= -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$
২য় রেখার ঢাল $= -\frac{2}{-6} = \frac{1}{3}$; $2x - 6y + 10 = 0$
$2x - 6y + 9 = 0$
$\therefore d = \frac{|10-9|}{\sqrt{36+4}} = \frac{1}{2\sqrt{10}}$ একক $\therefore$ (i) ও (ii) সঠিক

74. সমীকরণ, $y = \frac{2}{3}x - 5 \Rightarrow 3y = 2x - 15 \Rightarrow 2x - 3y = 15$

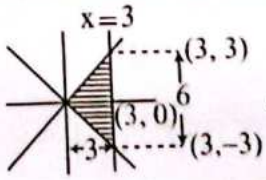
75. QR এর মধ্যবিন্দু $\equiv S\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) \equiv (1, 1) \therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y = 1$



76. QR এবং এর সমান্তরাল রেখার ঢাল, $m = \frac{4+2}{0-2}$
$= -3$, $QR = \sqrt{(2-0)^2 + (4+2)^2} = 2\sqrt{10}$ একক।

77. $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{y-2}{2+2} = \frac{x-1}{1-3} \Rightarrow \frac{y-2}{4} = \frac{x-1}{-2}$
$\Rightarrow y - 2 = -2x + 2 \Rightarrow 2x + y = 4 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$
$\therefore$ অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ একক।

78.



$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ বর্গ একক

79. সরলরেখাদ্বয়ের ঢাল যথাক্রমে 2 এবং 3 সূক্ষ্মকোণ θ হলে, $\tan\theta = \left|\frac{3-2}{1+3\cdot2}\right| = \frac{1}{7}$
$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

80. শর্তমতে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \Rightarrow -2k - 50 = 0 \Rightarrow k = -25$

81. নির্ণেয় রেখাটি: $2x + 5y = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \Rightarrow 2x + 5y - 2 = 0$

82. (iii) এর ক্ষেত্রে $ax + by = -c$
$\Rightarrow \frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1 \therefore \Delta = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{c}{b}\right)\right| = \frac{1}{2} \times \left|\frac{c^2}{ab}\right|$ বর্গ একক

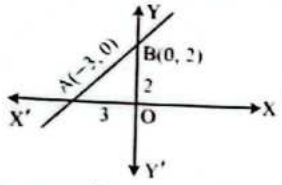
Educationblog24.com

83. $3x - 4y + 3 = 0$ এবং $4x - 3y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ- [MB'21]

(a) $x + y = 2$ (b) $x - y = 2$

(c) $x + y + 2 = 0$ (d) $x - y + 2 = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



; OA = 3, OB = 2

84. AB এর সমীকরণ কোনটি? [MB'21]

(a) $2x + 3y = 1$ (b) $2x + 3y = 6$

(c) $2x - 3y = -6$ (d) $2x - 3y = 1$

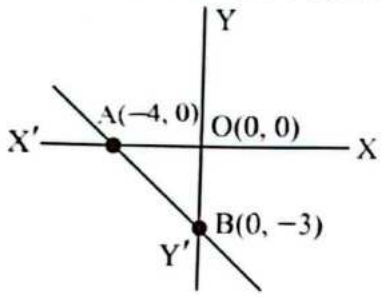
85. AB এর ঢাল কত? [MB'21]

(a) $-\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}$

86. $x + by = 1$ এবং $ax + y = 1$ দুই সরলরেখা $(1, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করে। a এবং b এর মান কত? [MB'21]

(a) 0, 0 (b) 0, 1 (c) 1, 0 (d) 1, 1

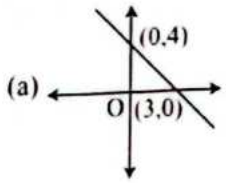
নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

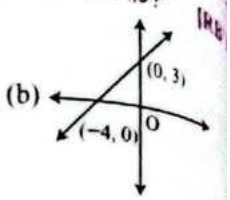


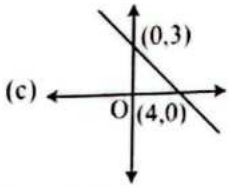
87. মূল বিন্দু থেকে AB এর লম্ব দূরত্ব হলো- [DB'19]

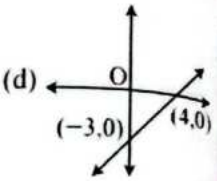
(a) 5 (b) 3 (c) $\frac{12}{5}$ (d) $\frac{12}{25}$

88. $3x + 4y = 12$ সরলরেখাটির লেখচিত্র কোনটি? [Ma

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি রেখার সমীকরণ $x + 3y + 3 = 0$.

89. রেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক কে [R

(a) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (c) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (d)

90. $x - \sqrt{3}y = 7$ সরলরেখার ঢাল কত? [R

(a) $-\sqrt{3}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$

91. $y = x$ সরলরেখাটি- [S

(i) মূলবিন্দুগামী (ii) ঢাল 1

(iii) উভয় অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii

92. $x + y = 2$ এবং $y - x = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নিম্নের কোনটি? [BB'19; Ctg

(a) $x = 2$ (b) $y = 2$

(c) $y - 1 = 0$ (d) $x - 1 = 0$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

83. c	84. c	85. b	86. a	87. c	88. c	89. c	90. c	91. d	92.

83. $a_1a_2 + b_1b_2 = 12 + 12 = 24 > 0$

∴ স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $\frac{3x-4y+3}{\sqrt{25}} = \frac{4x-3y+5}{\sqrt{25}}$

$\Rightarrow 3x - 4y + 3 = 4x - 3y + 5 \Rightarrow x + y + 2 = 0$

84. $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow \frac{-2x+3y}{6} = 1$

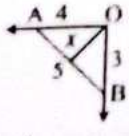
$\Rightarrow 2x - 3y + 6 = 0 \Rightarrow 2x - 3y = -6$

85. AB এর সমীকরণ $2x - 3y + 6 = 0$ হলে রেখাটির ঢাল,

$m = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$

86. $(1, 1)$ বসিয়ে পাই, $1 + b = 1 \Rightarrow b = 0$

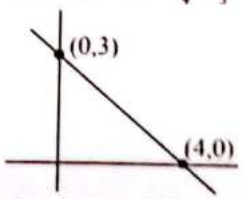
এবং $a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$

87. 

$\Delta AOB = \frac{1}{2} \times 4 \times 3$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 5 \times x = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \therefore x = \frac{12}{5}$

88. $3x + 4y = 12 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$



89. $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-1} = 1$

$\therefore \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ হলো মধ্যবিন্দু।

92.

$x + y = 2$

$-x + y = 0$

$(+)\ 2y = 2$

$\therefore y = 1$

x-অক্ষের সমান্তরাল হলে,

$y - 1 = 0$

93. $x - \sqrt{3}y - \sqrt{3} = 0$ সরলরেখাটির- [BB'19]

(i) ঢাল $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) লম্ব রেখার ঢাল $= -\sqrt{3}$

(iii) x- অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= \sqrt{3}$ একক

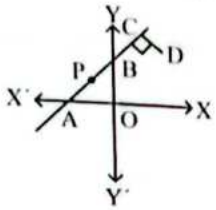
নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

94. $x = 0, x = 4, y = 2, y = 6$ রেখাগুলো দ্বারা আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [JB'19]

(a) 24 (b) 16 (c) 12 (d) 8

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



AB রেখার সমীকরণ $6x - 4y + 24 = 0$ এবং AP = PB

95. CD রেখার ঢাল কত? [CB'19]

(a) $-\frac{3}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{2}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

96. OP রেখার সমীকরণ কোনটি? [CB'19]

(a) $y = -\frac{2}{3}x$ (b) $y = -\frac{3}{2}x$

(c) $y = \frac{2}{3}x$ (d) $y = \frac{3}{2}x$

97. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগলো A(2, 0), B(5, 0) ও C(5, 4) হলে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র কোনটি? [Din.B'19]

(a) $\left(4, \frac{4}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

(c) (6, 2) (d) (2, 6)

98. $x - 2y - 5 = 0$ এবং $2x + 4y - 1 = 0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ। [Din.B'19]

(i) রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $\left(\frac{11}{4}, -\frac{9}{8}\right)$

(ii) দ্বিতীয় রেখার ঢাল $-\frac{1}{2}$

(iii) রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ 0°

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x + 2y - 6 = 0$ এবং $x + 2y + 8 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

99. নিচের কোনটি সঠিক? [All B'18]

(a) রেখাদ্বয় মূলবিন্দু দিয়ে যায়

(b) রেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে

(c) রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব

(d) রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল

100. A(−2, 3), B(−4, 2) এবং C(8, 6) শীর্ষ বিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের-

(i) ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$ [All.B'18]

(ii) AB বাহুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$

(iii) ΔABC এর ক্ষেত্রফল 4 বর্গ একক

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

101. $y = -7x + 9$ রেখার সাথে লম্ব রেখার নতি কত? [DB'17]

(a) $\frac{1}{7}$ (b) $-\frac{1}{7}$ (c) −7 (d) 7

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$3x - 4y - 12 = 0$ রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

102. B বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [DB'17]

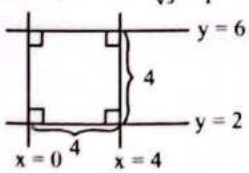
(a) (4, 0) (b) (0, 4) (c) (0, −3) (d) (0, 3)

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

93. d	94. b	95. c	96. a	97. a	98. a	99. d	100. a	101. a	102. c

93. $\sqrt{3}y = x - \sqrt{3} \therefore y = \frac{x}{\sqrt{3}} - 1 \therefore$ ঢাল $= \frac{1}{\sqrt{3}} \therefore$ লম্ব রেখার ঢাল $= -\sqrt{3}$

$x - \sqrt{3}y = \sqrt{3} \therefore \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{1} = 1$

94. 

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 4 \times 4 = 16$ বর্গ একক

95. $6x - 4y + 24 = 0 \therefore 4y = 6x + 24 \therefore y = \frac{3}{2}x + 6 \therefore$ CD এর ঢাল $= -\frac{2}{3}$

96. $m_{OP} = -\frac{2}{3}$; OP মূলবিন্দুগামী $\therefore$ OP $\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

97. ভরকেন্দ্র $= \left(\frac{2+5+5}{3}, \frac{0+0+4}{3}\right) \equiv \left(4, \frac{4}{3}\right)$

98. $x - 2y - 5 = 0$ ও $2x + 4y - 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $\left(\frac{11}{4}, \frac{-9}{8}\right)$

$2x + 4y - 1 = 0$ এর ঢাল $= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

দুটি রেখার ছেদবিন্দু 1টি হলে মধ্যবর্তী কোণ 0° হতে পারে না।

99. রেখাদ্বয়ের ঢাল সমান

প্রথম রেখার ঢাল $= -\frac{1}{2}$

দ্বিতীয় রেখার ঢাল $= -\frac{1}{2}$

100. ভরকেন্দ্র $\left(\frac{-2-4+8}{3}, \frac{3+2+6}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$

AB বাহুর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{-2-4}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(-3, \frac{5}{2}\right)$

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -4 & 8 & -2 \\ 3 & 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}\right|$

$= \left|\frac{1}{2}(-4 - 24 + 24 + 12 - 16 + 12)\right| = \frac{4}{2} = 2$ বর্গ একক।

101. $y = -7x + 9$ $(m_1 = -7)$ এর লম্ব রেখার নতি m_2 হলে,

$m_1 \times m_2 = -1 \therefore m_2 = \frac{1}{7}$

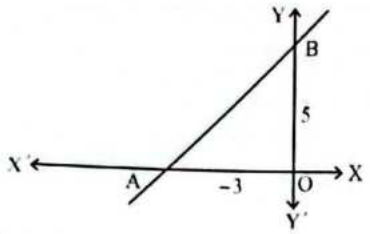
102. $3 \times 0 - 4y - 12 = 0$

$\Rightarrow 4y = -12 \Rightarrow y = -3$

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, −3)

Educationblog24.com

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

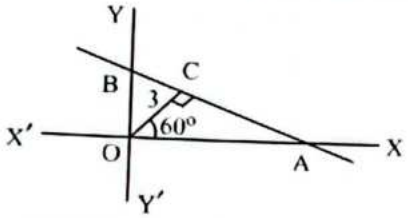


103. OAB ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি? [RB'17]

(a) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

(c) $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$ (d) $\left(\frac{5}{3}, -1\right)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



104. ΔOAC-এর ক্ষেত্রফল কোনটি? [Ctg.B'17]

(a) $3\sqrt{3}$ বর্গ একক (b) $\frac{9}{2}$ বর্গ একক

(c) 9 বর্গ একক (d) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক

105. $3x - 2y + 6 = 0$ সরলরেখা দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ কত একক? [Ctg.B'17]

(a) -3 (b) -2

(c) 2 (d) 3

106. (1, 1) বিন্দুগামী $2x - 3y - 5 = 0$ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ কোনটি? [SB'17]

(a) $3x + 2y - 5 = 0$ (b) $3x - 2y - 5 = 0$

(c) $2x + 3y + 5 = 0$ (d) $2x + 3y - 5 = 0$

107. $y = -2x$ এবং $2y = x$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ- [BB'

(a) 90° (b) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{-5}{4}\right)$ (d) 0°

108. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্কের কোটি 90° হলে ঐ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ভুজ- [BB'

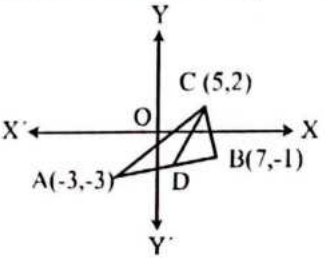
(a) $x = r$ (b) $x = 0$ (c) $y = r$ (d) $y = 0$

109. x-অক্ষের উপর লম্ব এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ- [BB'

(a) $y = 0$ (b) $x = 0$

(c) $y = mx$ (d) $y + k = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে CD, AB বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা।

110. CD এর দৈর্ঘ্য কত একক? [CB

(a) 10 (b) 4 (c) 5 (d) 3

111. ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [CB

(a) 6 (b) 12 (c) 17 (d) 34

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$4x - 2y = 6$

112. সরলরেখাটি x অক্ষকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে? [Din.B

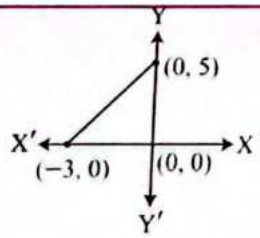
(a) $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ (b) $(0, -3)$ (c) $(-3, 0)$ (d) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

113. সরলরেখাটির ঢাল কত? [Din.B

(a) 2 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) -2 (d) $\frac{1}{2}$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

103. c	104. d	105. c	106. a	107. a	108. b	109. b	110. c	111. c	112. a	113.

103. 

∴ ভরকেন্দ্র $\equiv \left(\frac{0-3+0}{3}, \frac{5+0+0}{3}\right) \equiv \left(-1, \frac{5}{3}\right)$

104. $\frac{OC}{OA} = \cos 60°$; $OA = 2OC = 6$

$\Delta OAC = \frac{1}{2} \times OA \times OC \times \sin 60°$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক

105. $3x - 2y = -6 \Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$ [∴ x-খণ্ডিতাংশ 2 একক]

$y = -2x$; $m_1 = -2$

107. $2y = x$

$y = \frac{1}{2}x$; $m_2 = \frac{1}{2}$ ∴ $m_1 . m_2 = -1$ ∴ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90°

110. $D \equiv \left(\frac{-3+7}{2}, \frac{-3-1}{2}\right) \equiv (2, -2)$

∴ $CD = \sqrt{(2-5)^2 + (-2-2)^2} = 5$ একক।

111. $\Delta ABC = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right| = |-17| = 17$ বর্গ একক

∴ ΔABC এর ক্ষেত্রফল 17 বর্গ একক।

112. $4x - 2y = 6$ ∴ $\frac{x}{\frac{3}{2}} - \frac{y}{3} = 1$ ∴ x অক্ষকে $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

Educationblog24.com

বিভিন্ন কলেজের টেস্ট পরীক্ষার MCQ প্রশ্ন

114. P বিন্দুর কোটি -4; x-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে এর দূরত্বের অর্ধেক হলে, P এর স্থানাঙ্ক কোনটি? [ঢাকা কলেজ]
(a) $(8,-4)$ (b) $(2,-4)$
(c) $(-2,-4)$ (d) $(0,-4)$

115. একটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $(2,0)$ এবং দুইটি শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1,2)$ এবং $(3,-1)$ হলে, তৃতীয় শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? [ঢাকা কলেজ]
(a) $(1,-1)$ (b) $(-1,1)$
(c) $(2,-1)$ (d) $(2,2)$

116. A = $(6,4)$ এবং B$(10,8)$ দুইটি বিন্দু হলে-
(i) AB রেখার ঢাল 1 [হলি ক্রস কলেজ]
(ii) AB রেখার সমীকরণ $x-y-2=0$
(iii) AB কে বাহু ধরে অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল 8 বর্গ একক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

117. $3x+2y=12$ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [ঢাকা কমার্স কলেজ]
(a) $(-2,-3)$ (b) $(-3,-2)$ (c) $(2,3)$ (d) $(3,2)$

118. $r=\frac{1}{2}$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ কোনটি? [ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ]
(a) $x^2+y^2=1$ (b) $2(x^2+y^2)=1$
(c) $4(x^2+y^2)=1$ (d) $x^2+y^2=2$

119. ΔABC এর তিনটি শীর্ষবিন্দু $(-2,0), (0,2\sqrt{3})$ এবং $(2,0)$ হলে এর লম্ববিন্দু কোনটি? [ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ]
(a) $\left(0,-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ (b) $\left(0,\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ (c) $\left(0,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (d) $\left(0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

120. k এর কোন মানের জন্য $x-y+5=0, x+y-1=0$ এবং $kx-y+13=0$ সরলরেখা তিনটি সমবিন্দুগামী? [জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ]
(a) 1 (b) 5 (c) $\frac{1}{5}$ (d) -5

121. একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $(1,1)$, $(4,4)$, $(4,8)$ এবং $(1,5)$ হলে, সামন্তরিকটির একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য কত? [জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ]
(a) $3\sqrt{2}$ (b) 4 (c) $\sqrt{10}$ (d) 8

122. $(2,-1)$ বিন্দু হতে $3x-4y+5=0$ সরলরেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [পাবনা ক্যাডেট কলেজ]
(a) $\left(\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{5},\frac{-1}{5}\right)$ (c) $\left(\frac{-1}{5},\frac{2}{5}\right)$ (d) $\left(\frac{3}{5},\frac{7}{3}\right)$

123. $(1,4)$ ও $(9,-12)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাকে 3:5 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দু কত? [ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ]
(a) $(4,-2)$ (b) $(2,-4)$ (c) $(-4,2)$ (d) $(4,2)$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x-3y+2=0$ ..... (i); $x-6y+3=0$ ..... (ii)
$x+ay=0$ ..... (iii)

124. রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে a এর মান কত? [গাজীপুর ক্যান্টনমেন্ট কলেজ]
(a) -9 (b) 3 (c) 9 (d) 21

125. (ii) ও (iii) নং রেখা পরস্পর লম্ব হলে a এর মান কত? [গাজীপুর ক্যান্টনমেন্ট কলেজ]
(a) -6 (b) $-\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) 6

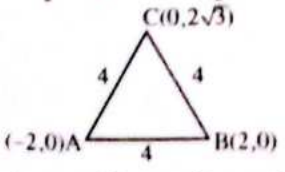
126. $\frac{1}{2}$ ঢালবিশিষ্ট একটি সরলরেখা $(1,2)$ ও $(3,a)$ বিন্দুগামী হলে, a এর মান কত? [চট্টগ্রাম প্রকৌশল বিশ্ববিদ্যালয় স্কুল ও কলেজ]
(a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) 3

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

114. a	115. c	116. a	117. c	118. c	119. d	120. b	121. c	122. a	123. a	124. b	125. c	126. d

117. $3x+2y=12 \Rightarrow \frac{3x}{12}+\frac{2y}{12}=1 \therefore \frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$
রেখাটি x-অক্ষকে $(4,0)$ এবং y-অক্ষকে $(0,6)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
$\therefore$ খণ্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{4}{2},\frac{6}{2}\right) \equiv (2,3)$

118. $r=\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2} \therefore 4(x^2+y^2)=1$

119.


ΔABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ, $AB = BC = CA = 4$ একক
$\therefore \Delta ABC$ এর লম্বকেন্দ্রের অবস্থান হবে এর ভরকেন্দ্রে।
$\therefore$ লম্বকেন্দ্রের অবস্থান $\left(\frac{-2+2+0}{3},\frac{0+0+2\sqrt{3}}{3}\right) \equiv \left(0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

120. $x-y+5=0, x+y-1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(-2,3)$ বিন্দুর জন্য
$k(-2)-3+13=0 \Rightarrow -2k=-10 \therefore k=5$

124. $x-3y+2=0$ ..... (i)
এবং $x-6y+3-0$ ..... (ii)
আড়গুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\frac{x}{-9+12}=\frac{y}{2-3}=\frac{1}{-6+3} \Rightarrow \frac{x}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{1}{-3}$
$\therefore x=-1$ এবং $y=\frac{1}{3} \therefore$ যেহেতু $x+ay=0$ রেখাটি $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$ বিন্দুগামী।
সুতরাং, $-1+a\times\frac{1}{3}=0 \therefore a=3$

125. $x-6y+3=0$ রেখার ঢাল $\frac{1}{6}$, $x+ay=0$ রেখার ঢাল $-\frac{1}{a}$
শর্তমতে, $\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{a}\right)=-1 \therefore a=\frac{1}{6}$

126. $\frac{2-a}{1-3}=\frac{1}{2} \Rightarrow 4-2a=-2 \Rightarrow 2a=6 \therefore a=3$

Educationblog24.com

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট: অধ্যায়-০৩

পূর্ণমান: ৫০ **MCQ** সময়: ৫০ মি

01. কোনো তিনটি বিন্দু সমরেখ হলে ঐ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল-
(a) শূন্য (b) অসীম (c) অনির্দিষ্ট (d) অনির্ণেয়

02. দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হলে তাদের ঢালদ্বয়ের-
(a) গুণফল 1 (b) গুণফল -1
(c) যোগফল 1 (d) যোগফল -1

03. নিচের কোনটি সরলরেখার সমীকরণ?
(a) $x^2 + y = 1$ (b) $x^2 + y^2 = 2$
(c) $x^3 + y^3 = 1$ (d) $x + y = 1$

04. x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার ঢাল-
(a) 1 (b) 0 (c) ∞ (d) $-\infty$

05. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সমীকরণে x অক্ষের খণ্ডাংশ কত?
(a) a (b) b (c) $a + b$ (d) $a - b$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
দুইটি সরলরেখা $(4, -5)$ বিন্দুগামী এবং তারা যথাক্রমে x অক্ষের সমান্তরাল ও তার উপর লম্ব।

06. x অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণের কোনটি?
(a) $y - 5 = 0$ (b) $y + 5 = 0$
(c) $x + 4 = 0$ (d) $x - 4 = 0$

07. x অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ কত?
(a) $y + 5 = 0$ (b) $y - 5 = 0$
(c) $x - 4 = 0$ (d) $x + 4 = 0$

08. $A(-1, 2)$ ও $B(3, -4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে Y অক্ষ কত অনুপাতে বিভক্ত করে?
(a) 1:2 (b) 2:1 (c) 1:3 (d) 2:3

09. $(7, -2)$ বিন্দুটি কোন চতুর্ভাগে?
(a) প্রথম (b) দ্বিতীয় (c) তৃতীয় (d) চতুর্থ

10. $(3, 90°)$ এবং $(1, -2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?
(a) $\sqrt{26}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) 5 (d) $2\sqrt{26}$

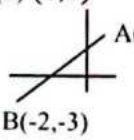
11. y- অক্ষ ও $(7, 2)$ বিন্দু থেকে $(a, 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান কত?
(a) $\frac{25}{7}$ (b) $\frac{5}{7}$ (c) $\frac{31}{7}$ (d) $\frac{29}{7}$

12. $(2,1)$ এবং $(6,3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ কোনটি?
(a) $2x + y = 10$ (b) $2x - y = 8$
(c) $x + 2y = 10$ (d) $x - 2y = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(1, -2)$ এবং একটি সরলরেখার সমীকরণ $3x + 4y - 5 = 0$

13. A বিন্দুগামী এবং উদ্দীপকে উল্লিখিত রেখাটির সমান্তরাল রেখার সমীকরণ কোনটি?
(a) $4x - 3y + 10 = 0$ (b) $4x - 3y - 10 = 0$
(c) $3x + 4y - 5 = 0$ (d) $3x + 4y + 5 = 0$

14. $3x + 4y - 24 = 0$ রেখাটির y অক্ষের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?
(a) (8,0) (b) $(0, -6)$ (c) $(-8, 0)$ (d) (0,6)

15. 

হলে, AB রেখার সমীকরণ কোনটি?
(a) $4x + 3y - 2 = 0$ (b) $4x + 3y + 2 = 0$
(c) $4x - 3y - 1 = 0$ (d) $4x - 3y + 2 = 0$

16. মূলবিন্দুগামী রেখা–
(i) $y = mx$ (ii) $x = 0$ (iii) $x = y$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii,

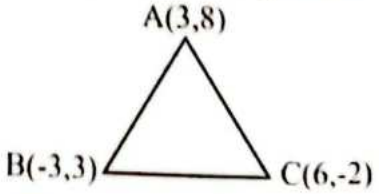
17. $2x + y = 3$ রেখাটি-
(i) y অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে
(ii) $x - 2y = 0$ রেখার সাথে লম্ব (iii) $(1, 1)$ বিন্দুগা
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, iii (b) i, ii (c) ii, iii (d) i, ii,

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$4x - 3y + 12 = 0$ এবং $3x + 4y - 9 = 0$ সমীক
পৃথক দুইটি সরলরেখা নির্দেশ করে।

18. দ্বিতীয় রেখার ঢাল কত?
(a) $-\frac{4}{3}$ (b) $-\frac{3}{4}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{4}{3}$

19. $y^2 = 4(x + 1)$ সমীকরণটির পোলার আকৃতি কোনটি?
(a) $r(1 - \cos\theta) = 2$ (b) $r(1 + \cos\theta) = 2$
(c) $r(1 - \sin\theta) = 2$ (d) $r(1 + \sin\theta) = 2$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



20. B বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি?
(a) $\left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\left(3\sqrt{2}, \frac{-\pi}{4}\right)$
(c) $\left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $\left(3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$

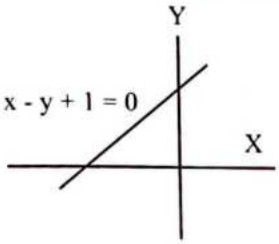
21. উদ্দীপকের ক্ষেত্রে –
(i) ΔABC এর ভরকেন্দ্র $(2,3)$
(ii) AB সরল রেখার সমীকরণ $5x-6y=-33$
(iii) BC এর দৈর্ঘ্য $=5$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii (c) i, iii (d) i, ii, iii

22. $x+\sqrt{3}y-3=0$ সরলরেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে?
(a) $60°$ (b) $30°$ (c) $120°$ (d) $150°$

23. $A(2,5), B(5,9)$ এবং $D(6,8)$ বিন্দুগুলো ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু হলে, চতুর্থ শীর্ষবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক কোনটি?
(a) $(4,3)$ (b) $(9,12)$ (c) $(4,7)$ (d) $(7,9)$

24. y অক্ষের উপর লম্ব এবং x অক্ষের 3 একক নিচে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?
(a) $x=-3$ (b) $x=3$ (c) $y=-3$ (d) $y=3$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



25. মূলবিন্দু ও অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার ঢাল কত?
(a) 1 (b) -2 (c) 2 (d) -1

26. রেখাটি কর্তৃক x ও y অক্ষের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য-
(a) 1 (b) 2 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3}$

27. $(a,0), (0,b)$ ও $(1,1)$ বিন্দুগুলো সমরেখ হলে নিচের কোনটি সঠিক?
(a) $a-b=ab$ (b) $a+b=ab$
(c) $a-b=-ab$ (d) $a+b=-ab$

28. $r^2\sin2\theta=2a^2$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ কোনটি?
(a) $xy=a^2$ (b) $xy=\frac{1}{a^2}$
(c) $2xy=a^2$ (d) $xy=2a^2$

29. $y=mx+c$ রেখার পোলার সমীকরণ কোনটি?
(a) $r\tan\theta=c$ (b) $r\sin2\theta=c$
(c) $r(\tan\theta-m)=c\sec\theta$
(d) $r\cos\theta=mr\sin\theta+c$

30. একটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য 5 একক এবং তার এক প্রান্ত $(2,-2)$ অপর প্রান্তের ভুজ 5 হলে কোটি–
(i) -6 (ii) 6 (iii) 2
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

31. $3x-4y-12=0$ সরলরেখাটি-
(i) মূলবিন্দুগামী
(ii) অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $=5$
(iii) y- অক্ষের ছেদবিন্দু $(0,-3)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

32. $A(3,2)$ এবং $B(5,4)$ দুটি বিন্দু-
(i) AB রেখার ঢাল $=1$
(ii) AB রেখার সমীকরণ $x-y-1=0$
(iii) AB কে বাহু ধরে অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

33. $x=0, y=0$ এবং $3x+4y=12$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত?
(a) 4 বর্গ একক (b) 8 বর্গ একক
(c) 10 বর্গ একক (d) 6 বর্গ একক

34. $4x-y+5=0$ এবং $9x-2y-12=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\tan\theta$ এর ধনাত্মক মান কত?
(a) $\frac{1}{38}$ (b) $\frac{5}{37}$ (c) $\frac{1}{37}$ (d) $\frac{5}{38}$

35. একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ হতে পারে-
(i) রেখা (ii) ত্রিভুজ (iii) অধিবৃত্ত
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) ii, iii (b) i (c) i, ii (d) i, ii, iii

36. AD মধ্যমার ভরকেন্দ্র $(-1,1)$। $D(-3,-1)$ হলে, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি?
(a) $(3,5)$ (b) $(1,3)$
(c) $(7,9)$ (d) $(-7,-5)$

37. $x=a, y=b$ এবং $y=mx$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল-
(a) $\frac{1}{2m}(b-ma)^2$ (b) $\frac{1}{2m}(ma-b)^2$
(c) $\frac{1}{m}(ma+b)$ (d) $\frac{m}{2}(b-ma)^2$

38. x অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা (3, 4) বিন্দু দিয়ে যায়। সরলরেখাটির ঢাল কত?
(a) 3 (b) 4 (c) 0 (d) অসংজ্ঞায়িত

39. $A(x_1,\beta)$ এবং $B(x_2,\beta)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব কত একক?
(a) $|x_1+x_2|$ (b) $|x_1\times x_2|$
(c) $|x_1-x_2|$ (d) $|x_2\div x_1|$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
তিনটি সরলরেখার সমীকরণ $x+y=0; x+ay-1=0$ এবং $x-y+2=0$

40. সরলরেখা তিনটি সমবিন্দুগামী হলে a এর মান কত?
(a) -1 (b) 1 (c) -2 (d) 2

Educationblog24.com

41. (3, 1) বিন্দু হতে $2x + y - 3 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু-

(a) $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$ (b) $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ (c) $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$ (d) কোনটিই নয়

42. (1, 3) বিন্দুগামী এবং $2x + y = 7$ রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ কয়টি সরলরেখা সম্ভব?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) সম্ভব নয়

43. (5, 7) এর x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব-

(a) (5, −7) (b) (−7, 5) (c) (−5, 7) (d) (7, −5)

44. $2x + 3y + 1 = 0$ এর x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব-

(a) $2x + 3y + 4 = 0$ (b) $-2x - 3y + 1 = 0$
(c) $2x - 3y + 1 = 0$ (d) $-2x + 3y + 1 = 0$

45. m এর কোন মানের জন্য-
$(m - 1)x + (m + 1)y + 7 = 0$
এবং $3x + 5y - 7 = 0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হবে?

(a) 1 (b) 4 (c) 3 (d) 10

46. (3, −6) বিন্দুগামী এবং y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নিচের কোনটি?

(a) $x = -6$ (b) $y = -6$ (c) $x = 3$ (d) $y = 3$

47. OP রেখাংশকে ঘড়ির কাঁটার দিকে $\frac{\pi}{6}$ কোণে ঘুরানোতে অবস্থান হলো OQ। P এর স্থানাঙ্ক $(-\sqrt{3}, -3)$ হলে Q পোলার স্থানাঙ্ক হবে-

(a) $\left(-2\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$ (b) $\left(-2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$
(c) $\left(2\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$ (d) $\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

48. x অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দু হতে (0,2) এবং (6,4) দুইটি সমদূরবর্তী হলে P এর স্থানাঙ্ক কত?

(a) (2, 0) (b) (3, 0) (c) (5, 0) (d) (4, 0)

49. $3x + 5y = 2, 2x + 3y = 0, ax + by + 1 = 0$ সমবিন্দুগামী হলে a ও b এর সম্পর্ক-

(a) $4a - 6b = 1$ (b) $4a - 6b = 2$
(c) $6a - 4b = 1$ (d) $6a - 4b = 2$

50. A, B, C বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক (a, bc), (b, ca), (c, ab) ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত?

(a) $\frac{1}{2}abc$ (b) $3abc$
(c) $\frac{1}{2}(a - b)(b - c)(c - a)$ (d) $\frac{1}{2}(b - a)(b - c)(c$

পূর্ণমান: ৫০ **CQ** সময়: ২:৩৫ মি

(যেকোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও:)

01. $4x - 3y + 12 = 0$ এবং $3x + 4y - 9 = 0$ দুইটি সরলরেখা।

(ক) রেখা দুইটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। 2

(খ) সরলরেখাদ্বয়ের অন্তঃস্থ কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

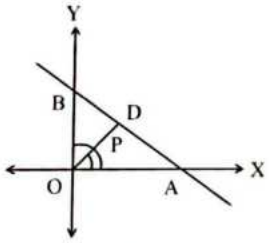
(গ) প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং $3x + 4y - 19 = 0$ এর উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

02. তোমাদের কলেজের গণিত বিষয়ের একজন শিক্ষক ক্লাসে শিক্ষার্থীদের প্রশ্ন করলেন দুইটি সরলরেখা কখন লম্ব হয়? একজন শিক্ষার্থী দাড়িয়ে সঠিক উত্তর দিল। অতঃপর শিক্ষক শ্রেণিতে $L_1: x\cos\theta + y\sin\theta = p$ (রেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে) ও
$L_2: x + 7y + 5 = 0$ সরলরেখা দুইটির উপর বিশ্লেষণমূলক বাড়ির কাজ দিলেন।

(ক) $ax + 3y + 1 = 0$ ও $2x - 3by + 2 = 0$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত নির্ণয় কর। 2

(খ) θ কে পরিবর্তনশীল ধরে AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) যদি $\theta = 45°$ এবং $p = 2\sqrt{2}$ হয়, তবে দেখাও যে, L_1 ও L_2 রেখাদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। 4

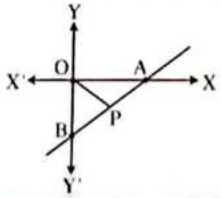
03. 

; $\angle AOD = 2\alpha, OD \perp A$

(ক) $\alpha = 15°$ এবং $P = 1$ একক হলে $(\sqrt{3}, 5)$ বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, AB এর মধ্য বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হবে $P^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$.

(গ) $\Delta OAB = 16\sqrt{3}$ বর্গ একক এবং $\alpha = 30°$ হলে, AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

04. 

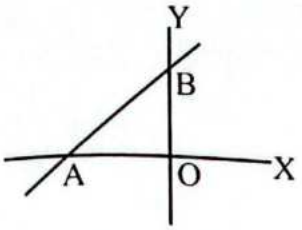
AB: $2x - 3y - 6 = 0$ আর AP: PB = 2: 3

(ক) AB এর উপর লম্ব ও A বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) ΔOPA এর ক্ষেত্রফল বের কর।

(গ) $\angle ABY'$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

05.



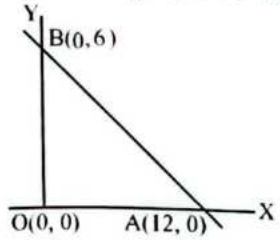
AB রেখাংশের সমীকরণ $3x - y + 7 = 0$

(ক) AB রেখাংশকে বর্গের বাহু ধরে ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 2

(খ) রেখাটির সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং $(-1,2)$ বিন্দুগামী এরূপ রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $(2,-1)$ বিন্দু হতে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

06.



(ক) AB রেখার ঢাল নির্ণয় কর। 2

(খ) AB রেখার সমান্তরাল এবং 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) AB রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক বিন্দু এবং মূল বিন্দু সংযোজক সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

07. ΔABC এর বাহুগুলির মধ্যবিন্দু $D(-1,-1), E(3,1)$ এবং $F(0,3)$।

(ক) DE রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) ক্ষেত্রফলের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC = 4\Delta DEF$. 4

(গ) ΔABC এর লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর। 4

08. বুয়েটের EEE, CSE, ME, CE বিভাগের অবস্থান যথাক্রমে $A(5,0), B(-4,-3), C(1,2)$ এবং $D(x,y)$ বিন্দুতে।

(ক) BC এর লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) ABCD একটি সামান্তরিক হলে উহার D বিন্দুর স্থানাঙ্ক বের কর। 4

(গ) যদি বুয়েটের রেজিস্ট্রার ভবন ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্রে অবস্থিত তাহলে রেজিস্ট্রার ভবনের স্থানাঙ্ক বের কর। 4

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

MCQ

01. a	02. b	03. d	04. b	05. a	06. b	07. c	08. c	09. d	10. a	11. d	12. a	13. d	14. d	15. c
16. d	17. d	18. b	19. a	20. c	21. a	22. d	23. b	24. c	25. d	26. c	27. b	28. a	29. c	30. b
31. b	32. a	33. d	34. a	35. d	36. a	37. b	38. c	39. c	40. d	41. b	42. b	43. a	44. c	45. b
46. c	47. c	48. d	49. c	50. c										

06. $y = b \Rightarrow y = -5 \Rightarrow y + 5 = 0$

07. $x = a \Rightarrow x = 4 \therefore x - 4 = 0$

08. y অক্ষ বিভক্ত করলে অনুপাত $= \left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \left|\frac{-1}{3}\right| = 1:3$

09.

$-+$	$++$
$--$	$+-$

10. $(3,90°) = (0,3) \therefore (0,3)$ এবং $(1,-2)$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{1+5^2} = \sqrt{26}$ একক

11. $\sqrt{(a-7)^2 + (5-2)^2} = a \Rightarrow a = \frac{29}{7}$

12. মধ্যবিন্দু $(4,2)$; $(4,2)$ বিন্দুগামী এবং $(2,1)$ ও $(6,3)$ এর সংযোগ সরলরেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $y - y_1 = -\frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 2 = -\frac{2-6}{1-3}(x-4) \Rightarrow y - 2 = -\frac{-4}{-2}(x-4)$

$\Rightarrow y - 2 = -2x + 8 \therefore 2x + y = 10$

Shortcut: মধ্যবিন্দু $(4,2)$ এবার উক্ত বিন্দু দ্বারা option test.

13. $3x + 4y = 3(1) + 4(-2) = 3 + (-8) \therefore 3x + 4y + 5 = 0$

14. $3x + 4y - 24 = 0 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1 \therefore y$ অক্ষের ছেদবিন্দু $(0,6)$

15. $\frac{x-1}{1+2} = \frac{y-1}{1+3} \Rightarrow 4 \cdot (x-1) = 3(y-1)$

$\Rightarrow 4x - 4 = 3y - 3 \Rightarrow 4x - 3y - 1 = 0$

17. $2x + y = 3 \Rightarrow y = -2x + 3 \therefore y$ অক্ষের ছেদাংশ $= 3$ এবং $m_1 = -2$

$x - 2y = 0$ রেখার ঢাল $m_2 = \frac{1}{2} \therefore m_1 \times m_2 = -1$

$\therefore$ রেখাদ্বয় লম্ব $(1,1)$ বিন্দুটি বসাই, L.H.S $= 1 \times 3 + 1 = 3 =$ R.H.S

18. $3x + 4y - 9 = 0$ ঢাল $= -\frac{3}{4}$

19. $r^2 . \sin^2\theta = 4(r.\cos\theta + 1) \Rightarrow r^2 = 4r\cos\theta + 4 + r^2\cos^2\theta$

$\Rightarrow r = r\cos\theta + 2 [\because r \geq 0] \Rightarrow r(1 - \cos\theta) = 2$

20. পোলার স্থানাঙ্ক $\left(\sqrt{(-3)^2 + 3^2}, \pi - \tan^{-1}\left|\frac{-3}{-3}\right|\right) = \left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

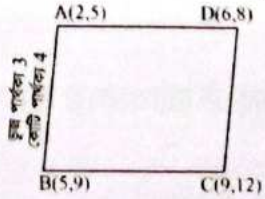
21. ভরকেন্দ্র $\left(\frac{3-3+6}{3}, \frac{8+3+(-2)}{3}\right) = (2,3)$

AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-3}{3+3} = \frac{y-8}{8-3} \Rightarrow 5x - 6y = -33$

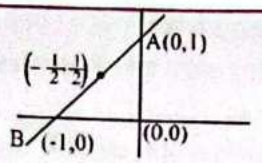
BC $= \sqrt{(-3-6)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{9^2 + 5^2} = \sqrt{106}$ একক

22. $x + \sqrt{3}y - 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3} \therefore \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 150°$

23.



Educationblog24.com

25. 

; ঢাল $\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}}=-1$

26. $\frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1$ দৈর্ঘ্য AB $=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ একক $\therefore$ A(−1, 0), B(0, 1)

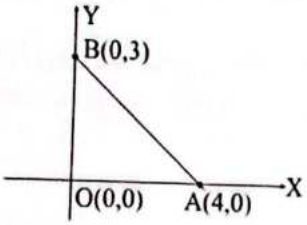
27. $\frac{a}{-b}=\frac{-1}{b-1} \Rightarrow b=ab-a \Rightarrow a+b=ab$

28. $r^2\sin 2\theta=2a^2 \Rightarrow 2r\sin\theta\, r\cos\theta=2a^2 \Rightarrow 2xy=2a^2 \Rightarrow xy=a^2$

30. $\sqrt{(2-5)^2+(-2-a)^2}=5 \therefore a=-6,2$

31. $4y=3x-12 \Rightarrow y=\frac{3}{4}x-3$ যা মূলবিন্দুগামী নয়।
y অক্ষের ছেদবিন্দু (0, −3); $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$
$\therefore$ খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(4)^2+(-3)^2}=5$ একক

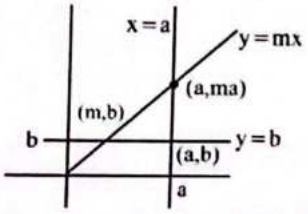
32. AB এর সমীকরণ, $\frac{x-3}{3-5}=\frac{y-2}{2-4} \Rightarrow x-y-1=0 \therefore$ ঢাল $=\frac{2-4}{3-5}=1$
ক্ষেত্রফল $=\left(\sqrt{(3-5)^2+(2-4)^2}\right)^2=2^2+2^2=8$ বর্গ একক

33. 

$\Delta OAB=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$ বর্গ একক

34. $\tan\theta=\frac{\pm(m_1-m_2)}{1+m_1m_2}=\frac{\pm\left(4-\frac{9}{2}\right)}{1+4\times\frac{9}{2}}=\frac{1}{38}$ (ধনাত্মক মান)

36. $\frac{-6+x}{3}=-1 \Rightarrow x=3; \frac{-2+y}{3}=1 \Rightarrow y=5 \therefore (x,y)=(3,5)$

37. 

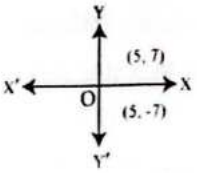
$\left|\frac{1}{2}\times(ma-b)\times\left(\frac{b}{m}-a\right)\right|=\left|\frac{1}{2m}\times(am-b)\times(b-am)\right|$
$=\left|\frac{1}{2m}\right|\times(ma-b)^2$

38. $m=\tan 0^\circ=0$

40. $x+y=0\cdots\cdots$ (i) ; $x+ay-1=0\cdots\cdots$ (ii)
$x-y+2=0\cdots\cdots$ (iii)
(i) ও (iii) এর ছেদবিন্দু (−1, 1) (ii) এ বসাই, $-1+a-1=0 \Rightarrow a=2$

41. (3, 1) গামী $2x+y-3=0$ এর উপর লম্ব রেখা:
$x-2y-1=0$; এদের Solve করে পাই $\equiv\left(\frac{7}{5},\frac{1}{5}\right)$

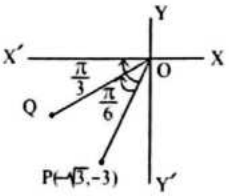
42. $\tan 45^\circ=\pm\frac{m-(-2)}{1+m(-2)} \Rightarrow m=-\frac{1}{3}, 3 \therefore$ 2 টি সম্ভব।

43. 

44. কেবল y এর সহগের চিহ্ন পরিবর্তন করতে হয়। y এর স্থলে −y বসাও।

45. $m-1=3 \Rightarrow m=4$ or, $m+1=5 \Rightarrow m=4$

46. $x=$ ধ্রুবক $\therefore x=3$

47. 

$\angle QOX'=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ $OQ=OP=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-3)^2}=2\sqrt{3}$
P এর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2\sqrt{3},\frac{-2\pi}{3}\right)$
$\therefore$ Q এর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2\sqrt{3},-\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)\equiv\left(2\sqrt{3},\frac{-5\pi}{6}\right)\equiv\left(2\sqrt{3},\frac{7\pi}{6}\right)$

48. P এর স্থানাঙ্ক (α, 0) হলে,
$(\alpha-0)^2+(0-2)^2=(\alpha-6)^2+(0-4)^2$
$\Rightarrow 4=-12\alpha+36+16 \therefore \alpha=4$

49. $\begin{vmatrix}3&5&-2\\2&3&0\\a&b&1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2(b-3a)+1(9-10)=0$
$\Rightarrow 6a-4b-1=0 \therefore 6a-4b=1$

50. $\Delta ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a&bc&1\\b&ca&1\\c&ab&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a-b&bc-ca&0\\b-c&ca-ab&0\\c&ab&1\end{vmatrix}$ $r_1'=r_1-r_2$, $r_2'=r_2-r_3$
$=\frac{1}{2}[(a-b)(ca-ab)-(b-c)(bc-ca)]$
$=\frac{1}{2}[a(a-b)(c-b)]-c(b-c)(b-a)]=\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)$

CQ

01. (ক) 90° (খ) $\therefore 7x+y+3=0$ এবং $x-7y+21=0$
(গ) $4x-3y+12=0$

02. (ক) $2a=9b$ (খ) $P^2(x^2+y^2)=4x^2y^2$

03. (ক) 3 একক (গ) $x+\sqrt{3}y=4\sqrt{6}=0$

04. (ক) $2y+3x-9=0$ (খ) $\frac{6}{5}$ বর্গ একক (গ) $\frac{-1}{3}(\sqrt{13}-2)$

05. (ক) $\frac{490}{9}$ বর্গ একক। (খ) $x-2y+5=0$ এবং $2x+y=0$
(গ) $\left(\frac{-11}{5},\frac{2}{5}\right)$

06. (ক) $\frac{-1}{2}$ (খ) $x+2y-12\pm2\sqrt{5}=0$ (গ) $y=4x$ এবং $y=x$

07. (ক) $x-2y-1=0$ (গ) $\frac{5}{7},\frac{11}{7}$

08. (ক) $x+y+2=0$ (খ) (10, 5) (গ) 1.2816, 0.26425

> একঘেয়ে জীবনের চাইতে আনন্দের কাজে বিলীন হওয়া শ্রেয়!
>
> - Vincent van Gogh

Educationblog24.com

অধ্যায় ০৪

বৃত্ত

সৃজনশীল (ক), (খ) ও (গ) নং প্রশ্নের জন্য এ অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	টাইপের নাম	যতবার প্রশ্ন এসেছে			যে বোর্ডে যে বছর এসেছে
			ক	খ	গ	CQ
০০০	T-01	বৃত্তের কেন্দ্র, ব্যাসার্ধ ও ক্ষেত্রফল নির্ণয়	07	01	01	Ctg.B'23, 17; BB'23, 17; CB, MB'23; DB, SB, JB'18; Din.B'18, 17
	T-02	বৃত্ত হওয়ার শর্ত	-	-	-	-
০০০	T-03	বৃত্তের পোলার ও পরামিতিক সমীকরণ সম্পর্কিত	13	-	-	DB'23, 18; RB'23, 22; SB'23, 18; BB'23, 22; JB'23, 18; Ctg.B, MB'22; Din.B'22, 18; CB'19
০	T-04	বৃত্তের কেন্দ্র দেওয়া আছে এবং অন্য কোনো বিন্দু দিয়ে যায়	-	01	01	DB'23; SB'17
০০০	T-05	বৃত্ত অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ বা ছেদ সংক্রান্ত	04	07	09	SB'23, 21; BB'23, 22; JB'23, 22, 19; CB, MB'23, 22; DB'22, 19, 17; RB'22; Ctg.B, Din.B'19
০০	T-06	ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দেওয়া থাকলে তা থেকে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত	-	02	01	Ctg.B'22; RB'19; Din.B'17
০	T-07	তিন বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়	-	01	01	JB'17
০০	T-08	বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় যার কেন্দ্র নির্দিষ্ট রেখার উপর অবস্থিত	-	02	02	DB'23; SB'19; BB, CB'17
০০	T-09	ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ	-	01	02	Din.B'23; DB'22; RB'17
০	T-10	বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট রেখাকে স্পর্শ করা শর্ত ও তা হতে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত	-	-	01	Ctg.B'17
০০০	T-11	বিভিন্ন শর্ত সাপেক্ষে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়	-	08	04	RB, BB'23; JB'23, 19, 17; DB'22, 19, 17; CB'22, 17; Din.B, MB'22; Ctg.B'17
০০	T-12	বৃত্তের উপরস্থ কোনো বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ	-	03	02	BB'22, 19; MB'22; Ctg.B'19
০০০	T-13	বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু হতে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শক সংক্রান্ত	03	-	08	DB, RB, Din.B'23; JB'23, 22; Ctg.B'23, 22; CB'23, 22, 19
০০	T-14	বৃত্তের সাপেক্ষে বৃত্তের অবস্থান এবং ২টি বৃত্ত স্পর্শ করে সংক্রান্ত	-	03	-	DB, CB'19; RB'17
০	T-15	মৌলিক অক্ষ, সাধারণ জ্যা ও স্পর্শবিন্দুগামী সাধারণ স্পর্শক সম্পর্কিত	-	-	01	CB'19
০	T-16	বৃত্তের একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকলে জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত	-	01	-	JB'22
০০	T-17	বৃত্তের জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ	-	02	04	Ctg.B, JB'23; Din.B'23, 22; RB, CB'22

Educationblog24.com

CQ প্রশ্ন ও সমাধান (ক, খ ও গ)

T-01: বৃত্তের কেন্দ্র, ব্যাসার্ধ ও ক্ষেত্রফল নির্ণয়

Concept

- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
- বৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{x \text{ এর সহগ}}{-2}, \frac{y \text{ এর সহগ}}{-2}\right) \equiv (-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
- (h, k) কেন্দ্র ও r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) ব্যাসার্ধ 3 এবং $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ বৃত্তের সাথে সমকেন্দ্রিক এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Ctg.B'23]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$

এখানে, $g = -2$ ও $f = -3$ ∴ কেন্দ্র $(-g, -f) \equiv (2, 3)$

∴ কেন্দ্র $(2, 3)$ ও 3 একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ

$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9$

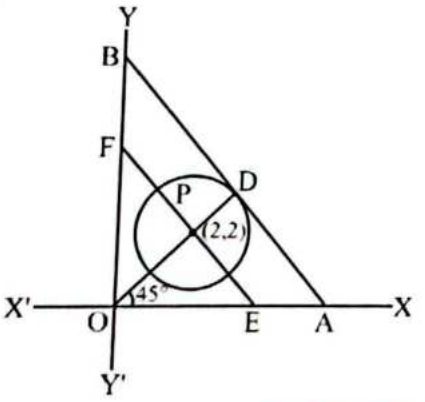
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

02. (ক) $2x^2 + 2y^2 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [BB'23]

(ক) **Sol^n:** $2x^2 + 2y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0^2$

∴ বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r = 0$

03.



[BB'23; DB, SB, JB, Din.B'18]

(গ) যদি $OD = 3\sqrt{2}$ হয় তবে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** $OD = 3\sqrt{2}$ এবং বৃত্তের কেন্দ্র $C(2, 2)$ হলে,

$OC = \sqrt{(2 - 0)^2 + (2 - 0)^2} \Rightarrow OC = 2\sqrt{2}$ একক

∴ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = OD - OC = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ একক

$(2,2)$ কেন্দ্র এবং $\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$ **(Ans.)**

04. (ক) $2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y + 8 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যা নির্ণয় কর। [Ctg.B

(ক) **Sol^n:** প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y + 8$

$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4) = 0$

$\Rightarrow (x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) + \left(y^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) + 4 =$

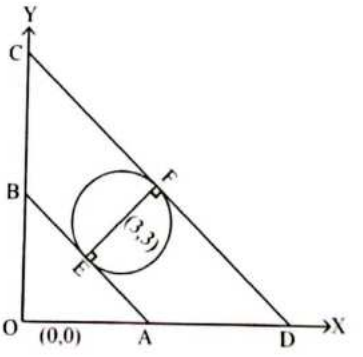
$\Rightarrow (x + 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + 4 - \frac{9}{4} - 1 = 0$

$\Rightarrow (x + 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$

সুতরাং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{\sqrt{3}}{2}i$

অর্থাৎ অবাস্তব বৃত্ত পাবো।

05.



[Din.B

(খ) $OA = 4$ এবং $OB = 3$ হলে চিত্রে প্রদত্ত বৃত্তের সমীক নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** ∴ AB এর সমীকরণ, $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ ∴ $3x + 4y = 12$

∴ $(3, 3)$ হতে $3x + 4y - 12 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যা

$= \left|\frac{3\times3+4\times3-12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \left|\frac{9+12-12}{5}\right| = \frac{9}{5}$ একক

∴ বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = \left(\frac{9}{5}\right)^2$ (Ans.)

Educationblog24.com

নিজে করো

06. (ক) $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [CB'23] [Ans: $3\sqrt{2}$]

07. (ক) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 1 = 0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [MB'23] [Ans: $\sqrt{\frac{14}{3}}$]

08. (ক) $3x^2 + 3y^2 - 12x + 15y - 6 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [BB'17] [Ans: $\left(2, \frac{-5}{2}\right); \frac{7}{2}$ একক]

09. (ক) $3(x^2 - y^2) - 5x + y + 1 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [Din.B'17] [Ans: $\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}\right); \frac{\sqrt{14}}{6}$]

T-02: বৃত্ত হওয়ার শর্ত

Concept

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, কেন্দ্র $(-g, -f)$, ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

এখানে, (i) সমীকরণটি x ও y এর দ্বিঘাত (ii) x^2 ও y^2 এর সহগ সমান [কিন্তু শূন্য নয়] (iii) কোনো xy সম্বলিত পদ নেই

বি.দ্র: যদি $g^2 + f^2 - c \geq 0$ হয়, তবে তা বাস্তব বৃত্ত হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $3x^2 + 3y^2 - 5x - 7y + 80 = 0$ সমীকরণটির বৃত্তের সমীকরণ কিনা যাচাই কর। [রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ]

(ক) **Sol^n:** প্রদত্ত সমীকরণ: $3x^2 + 3y^2 - 5x - 7y + 80 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{80}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{5}{6}\right)x + 2\left(-\frac{7}{6}\right)y + \frac{80}{3} = 0$

সমীকরণটি বৃত্ত নির্দেশ করলে ব্যাসার্ধ $= \sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{7}{6}\right)^2 - \frac{80}{3}} = \sqrt{-\frac{443}{18}}$, যা একটি জটিল সংখ্যা

$\therefore$ সমীকরণটি বৃত্তের সমীকরণ নয়।

T-03: বৃত্তের পোলার ও পরামিতিক সমীকরণ সম্পর্কিত

Concept

(i) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ এবং $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের পোলার সমীকরণ $r^2 + 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$

(ii) $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

(iii) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ, $x = h + r\cos\theta, y = k + r\sin\theta$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) কোনো বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ $x^2 = 25 - t^2, y = t$ হলে বৃত্তটির ব্যাস নির্ণয় কর। [DB'23]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $y = t$ এবং $x^2 = 25 - t^2$

$\Rightarrow x^2 = 25 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$

$\Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $= 5$ $\therefore$ ব্যাস $= 2 \times 5 = 10$ একক

02. (ক) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ 5 একক হলে, বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [RB'23]

(ক) **Sol^n:** কেন্দ্র $\equiv (r, \theta) = \left(6, \frac{\pi}{4}\right) = (x, y)$

$= \left(6\cos\frac{\pi}{4}, 6\sin\frac{\pi}{4}\right) = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

বৃত্তের সমীকরণ: $\left(x - 3\sqrt{2}\right)^2 + \left(y - 3\sqrt{2}\right)^2 = 5^2$

$\therefore x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 11 = 0$

03. (ক) একটি বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ $x^2 = 1 - t^2$ এবং $y = t + 3$ হলে বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ কত? [BB'23]

(ক) **Sol^n:** বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ $x^2 = 1 - t^2$

এবং $y = t + 3$ বা $t = y - 3$ হলে, $x^2 = 1 - (y - 3)^2$

$\Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 1^2$

বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ 1 একক।

04. (ক) $r = \cos\theta - \sin\theta$ বৃত্তটির কেন্দ্র নির্ণয় কর। [JB'23]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $r = \cos\theta - \sin\theta$

$\Rightarrow r^2 = r\cos\theta - r\sin\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = x - y$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - x + y = 0$

হলো বৃত্তটির সমীকরণ। $\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Educationblog24.com

05. (ক) $r(1+\cos\theta)=2$ সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর। [RB'22]

(ক) **Sol^n:** কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক, $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$

$r^2 = x^2 + y^2 \therefore r = \sqrt{x^2+y^2}$

এখন, $r(1+\cos\theta) = 2 \Rightarrow r + r\cos\theta = 2$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + x = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = (2-x)$

$\Rightarrow x^2+y^2 = (2-x)^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 2^2 - 2\times 2x + x^2$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow y^2 = 4 - 4x$

$\therefore y^2 + 4x - 4 = 0$

06. (ক) $x^2+y^2 = 121$ বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Ctg.B'22]

(ক) **Sol^n:** $x^2+y^2 = 121 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 121$

$\Rightarrow r^2 = 121 \Rightarrow r = 11$

07. (ক) $r = b\sin 2\theta$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে রূপান্তর কর। [BB'22]

(ক) **Sol^n:** আমরা জানি, $x = r\cos\theta \quad \therefore \cos\theta = \frac{x}{r}$

$y = r\sin\theta \therefore \sin\theta = \frac{y}{r}$; $x^2+y^2 = r^2$

এখন, $r = b\sin 2\theta = 2b\sin\theta\cos\theta \Rightarrow r = 2b\cdot\frac{x}{r}\cdot\frac{y}{r}$

$\Rightarrow r^3 = 2bxy \Rightarrow r^6 = 4b^2x^2y^2$

$\Rightarrow (r^2)^3 = 4b^2x^2y^2 \therefore (x^2+y^2)^3 = 4b^2x^2y^2$

ইহাই প্রদত্ত পোলার সমীকরণের কার্তেসীয় রূপ।

08. (ক) $r = 4\sin\theta$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [Ma

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $r = 4\sin\theta \Rightarrow r^2 = 4r\sin\theta$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 4y \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 2^2$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 2)$

09. (ক) $r = 6\cos\theta + 4\sin\theta$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [Dh

(ক) **Sol^n:** $r = 6\cos\theta + 4\sin\theta$

$\Rightarrow r^2 = 6r\cos\theta + 4r\sin\theta$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 6x + 4y \Rightarrow x^2+y^2-6x-4y = 0$

কেন্দ্র $(3, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{3^2+2^2-0} = \sqrt{13}$

10. (ক) $x^2+y^2-3x = 0$ বৃত্তটিকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ [ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল ক

(ক) **Sol^n:** $x^2+y^2-3x = 0$; $x = r\cos\theta$ এবং $y = r$

বসিয়ে পাই, $r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 3r\cos\theta = 0$

$\Rightarrow r^2 - 3r\cos\theta = 0 \therefore r = 3\cos\theta$

নিজে করো

11. (ক) $r - 2\cos\theta + 4\sin\theta = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় কর। [SB'23] [Ans: $(1, -2)$]

12. (ক) $r = 4\cos\theta$ বৃত্তটির কেন্দ্রের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [Din.B'22] [Ans: $x^2+y^2-2\sqrt{13}x+4y+4=0$]

13. (ক) $x^2+y^2-3x = 0$ বৃত্তটিকে পোলার সমীকরণে প্র কর। [CB'19] [Ans: $r = 3$ c

14. (ক) একটি বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ $x^2 = 1-t^2$ এ $y = t$ হলে বৃত্তটির কেন্দ্র নির্ণয় কর। [DB, SB, JB, Din.B'18] [Ans: (

T-04: বৃত্তের কেন্দ্র দেওয়া আছে এবং অন্য কোনো বিন্দু দিয়ে যায়

Concept

কেন্দ্র (h, k) এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ হলো, $\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2 = (x_1-h)^2+(y_1-k)^2}$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $P(1, 2)$ বিন্দু এবং $x^2+y^2-6x-4y+1=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। [MB'23]

(খ) P কেন্দ্রবিশিষ্ট এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

(খ) **Sol^n:** প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ: $x^2+y^2-6x-4y+1=0$

এর কেন্দ্র $= \left(\frac{-6}{-2}, \frac{-4}{-2}\right) = (3, 2)$

$P(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ:

$(x-1)^2+(y-2)^2 = r^2$ ..... (i) যা প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 2)$ দিয়ে যায়।

অর্থাৎ, $(3-1)^2+(2-2)^2 = r^2 = 2^2 = 4$

এখন (i) হতে, $(x-1)^2+(y-2)^2 = 4$

অর্থাৎ, $x^2+y^2-2x-4y+1=0$

যা নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ। (Ans.)

02. তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(a, -1), B(0, -2)$ এবং $C(-2, -$ [SB'

(গ) উদ্দীপকের আলোকে ΔABC এর ক্ষেত্রফল 1 হলে কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং A বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় ক

(গ) Sol^n: ক্ষেত্রফল $\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -a & 0 & -2 & a \\ -1 & -2 & -4 & -1 \end{vmatrix}\right| = 1$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & -2 & a \\ -1 & -2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \pm 2$

$\Rightarrow -2a + 2 - 4 + 4a = \pm 2 \Rightarrow 2a = 4 \pm 2 - 2$

$2a = 4 + 2 - 2 = 4$ | অথবা, $2a = 4 - 2 - 2 = 0$

$\therefore a = 2$ | $\therefore a = 0$

তাহলে, $A \equiv (2, -1)$ অথবা, $(0, -1)$ এবং $C \equiv (-2, -4)$

এখন, প্রশ্নমতে, $AC = r = \sqrt{(2+2)^2 + (-1+4)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ [যেহেতু, $A \equiv (2, -1)$]

অথবা, $AC = \sqrt{(0+2)^2 + (-1+4)^2}$

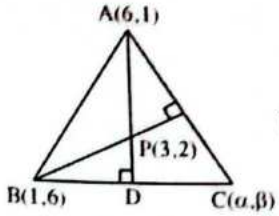
$= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ [যেহেতু, $A \equiv (0, -1)$]

সুতরাং বৃত্তের সমীকরণ:

(i) $\Rightarrow A \equiv (2, -1) \Rightarrow (x+2)^2 + (y+4)^2 = 5^2$

(ii) $\Rightarrow A \equiv (0, -1) \Rightarrow (x+2)^2 + (y+4)^2 = 13$

03. [ঢাকা কলেজ]



চিত্রে P হলো লম্বকেন্দ্র

(ক) মূলবিন্দুগামী এবং $(4, -5)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, কেন্দ্র $(4, -5)$

বৃত্তের পরিধিস্থ বিন্দু $(0,0)$

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(4-0)^2 + (-5-0)^2}$

$= \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$ একক

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ $(x-4)^2 + (y+5)^2 = \left(\sqrt{41}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 10y + 25 = 41$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 10y = 0$

T-05: বৃত্ত অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ বা ছেদ সংক্রান্ত

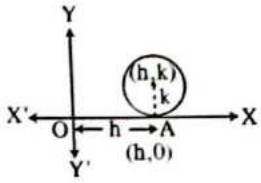
Concept

x-অক্ষকে স্পর্শ করার শর্ত: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ব্যবহার করলে,

(i) |বৃত্তের কেন্দ্রের কোটি| = বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\boxed{|k| = r}$

(ii) বৃত্তের কেন্দ্রের ভুজ = স্পর্শবিন্দুর ভুজ, স্পর্শ বিন্দু $A(h, 0)$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণ ব্যবহার করলে, $\boxed{c = g^2}$

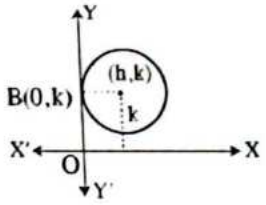


y-অক্ষকে স্পর্শ করার শর্ত: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ব্যবহার করলে,

(i) |বৃত্তের কেন্দ্রের ভুজ| = বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\boxed{|h| = r}$

(ii) বৃত্তের কেন্দ্রের কোটি = স্পর্শ বিন্দুর কোটি, স্পর্শ বিন্দু $B(0, k)$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণ ব্যবহার করলে, $\boxed{c = f^2}$



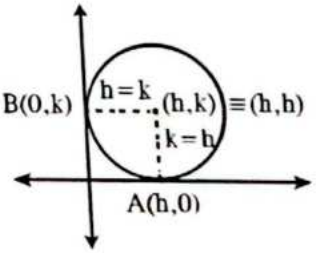
উভয় অক্ষকে স্পর্শ করার শর্ত: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ব্যবহার করলে,

(i) বৃত্তের কেন্দ্রের ভুজ = x অক্ষের স্পর্শবিন্দুর ভুজ = h [x অক্ষের স্পর্শবিন্দু $A(h, 0)$]

(ii) বৃত্তের কেন্দ্রের কোটি = y অক্ষের স্পর্শ বিন্দুর কোটি = k [y অক্ষের স্পর্শবিন্দু $B(0, k)$]

(iii) |বৃত্তের কেন্দ্রের ভুজ| = |বৃত্তের কেন্দ্রের কোটি| = বৃত্তের ব্যাসার্ধ ; $|h| = |k| = r$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণ ব্যবহার করলে, $\boxed{c = g^2 = f^2}$



অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশ:

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fx + c = 0$ বৃত্তের,

x-অক্ষ থেকে খণ্ডিত অংশ $= 2\sqrt{g^2 - c}$

y-অক্ষ থেকে খণ্ডিত অংশ $= 2\sqrt{f^2 - c}$

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ বৃত্তের,

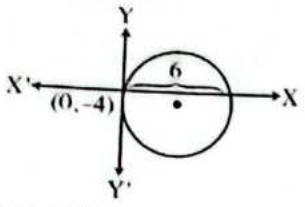
x-অক্ষ থেকে খণ্ডিত অংশ $= 2\sqrt{r^2 - k^2}$

y-অক্ষ থেকে খণ্ডিত অংশ $= 2\sqrt{r^2 - h^2}$

Educationblog24.com

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. উদ্দীপক-I: [CB'23]



(খ) উদ্দীপক- I এর বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** বৃত্তটি y-অক্ষকে $(0, -4)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$\therefore$ কেন্দ্র $(-g, -f)$ $\therefore f = 4$ এবং $f^2 = c \therefore c = 16$

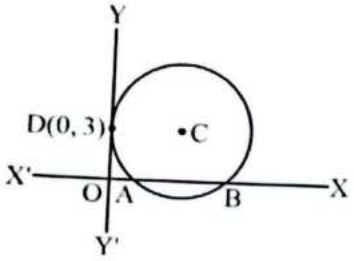
আবার প্রশ্নমতে, $2\sqrt{g^2 - c} = 6 \Rightarrow g^2 - c = 3^2$

$\Rightarrow g^2 = 9 + 16 \therefore g = \pm 5$

যেহেতু চিত্রে কেন্দ্র চতুর্থ চতুর্ভাগে, $\therefore g = -5$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ $\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 8y + 16 = 0$

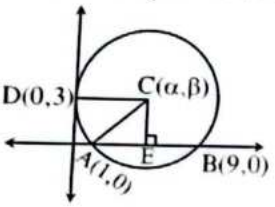
02.



[BB'23]

(খ) A ও B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 0)$ ও $(9, 0)$ হলে C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:**



E বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1+9}{2}, 0\right) = (5, 0)$

সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র C(5,3) ; কারণ, DC = 5

এবং CE = 3 = OD ; A(1, 0)

এখন, ব্যাসার্ধ, $r = AC = \sqrt{(5-1)^2 + (3-0)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ একক

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$\Rightarrow (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 6y + 5^2 + 3^2 = 5^2$

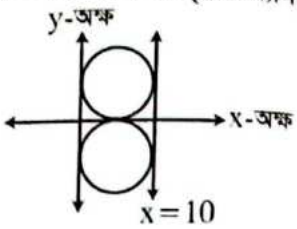
$\therefore x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$ **(Ans.)**

03. দৃশ্যকল্প-১: $x = 0, y = 0$ এবং $x = 10$ তিনটি সরলরেখার সমীকরণ। [JB'23]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সরলরেখা তিনটিকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** এখানে, $x = 0$ এবং $x = 10$ দুইটি সমান্তরাল সরল এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব 10 একক।

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস = 10 একক $\Rightarrow$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 5 একক



ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c =$

যেহেতু, বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে তাই, $\sqrt{g^2 - c} =$

$\Rightarrow g^2 - c = 0 \Rightarrow c = g^2$ ..... (i)

অনুরূপভাবে বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে বলে,

$c = f^2$ ..... (ii)

বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $\sqrt{g^2 + f^2 - c} = 5$

$\Rightarrow g^2 + f^2 - c = 25 \Rightarrow c + c - c = 25 \therefore c =$

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $g = \pm\sqrt{c} = \pm\sqrt{25} =$

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $f = \pm\sqrt{c} = \pm 5$

কিন্তু বৃত্তের কেন্দ্র $x = 0$ এবং $x = 10$ এর মাঝে অবস্থ

বলে g অবশ্যই ঋণাত্মক হবে। $\therefore g = -5$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 10x \pm 10y +$

04. P(1, 2), Q(2, 3) দুইটি বিন্দু [

(গ) P ও Q বিন্দুগামী এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূ সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ:

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)

$\because$ বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore 2\sqrt{f^2 - c} = 0 \Rightarrow c = f^2$ ..... (ii)

(i) নং বৃত্ত P(1, 2) বিন্দুগামী।

অর্থাৎ $1 + 4 + 2g + 4f + c = 0$ ..... (iii)

আবার Q(2, 3) বিন্দুগামী।

অর্থাৎ $4 + 9 + 4g + 6f + c = 0$ ..... (iv)

(Iv) − (iii) প্রয়োগ করে পাই, $8 + 2g + 2f = 0$

$\Rightarrow g + f + 4 = 0 \Rightarrow g = -f - 4$ ..... (v)

(ii) ও (v) কে (iii) এ বসিয়ে পাই,

$5 + 2(-f - 4) + 4f + f^2 = 0 \Rightarrow f^2 + 2f - 3 =$

$\Rightarrow (f + 3)(f - 1) = 0 \therefore f = 1, -3$

(ii) ও (v) হতে পাই,

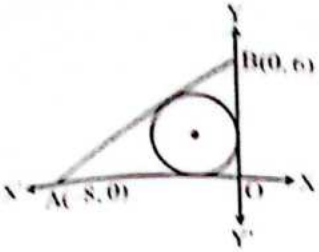
যখন, $f = 1$; $g = -1 - 4 = -5$ ও $c = 1^2 = 1$;

যখন, $f = -3$; $g = -(-3) - 4 = -1$ ও $c = (-3)$

$\therefore$ (i) হতে পাই, বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ:

$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 1 = 0$
$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$ **(Ans.)**

05.



[SB'23]

(গ) উদ্দীপকের বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** যদি, $|h| = |k| = r = a$

যেখানে, $(h, k) \equiv$ বৃত্তের কেন্দ্র

সুতরাং বৃত্তের সমীকরণ, $(x \pm h)^2 + (y \pm k)^2 = a^2$

$\Rightarrow (x \pm a)^2 + (y \pm a)^2 = a^2$

কিন্তু বৃত্তটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

সুতরাং, কেন্দ্র $(-a, a)$

বৃত্তের সমীকরণ: $(x + a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ ..... (i)

এখন, AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{-8} + \frac{y}{6} = 1$

$\Rightarrow 3x - 4y + 24 = 0$ ..... (ii)

যেহেতু, AB বৃত্ত (i) এর স্পর্শক; সুতরাং কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান।

$\left|\frac{3(-a)-4(a)+24}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = a \Rightarrow |-3a - 4a + 24| = 5a$

$\Rightarrow -7a + 24 = \pm 5a$

$\Rightarrow -7a + 24 = 5a$	$-7a + 24 = -5a$
$\Rightarrow -12a = -24$	$\Rightarrow -2a = -24 \Rightarrow a = 12$
$\Rightarrow a = 2$	যেহেতু, $a = 12$, A এর ভুজ,
সুতরাং বৃত্তের সমীকরণ,	B এর কোটি থেকে বড়, তাই
$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$	$a = 12$ অগ্রহণযোগ্য।

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y + 4 = 0$

06. $g(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9$

(ক) $g(x, y) = 0$ বৃত্ত দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর। [DB'22]

(ক) **Sol^n:** $g(x, y) = 0$

অর্থাৎ, $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$ ..... (i)

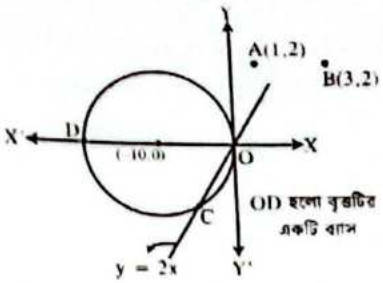
(i) নং বৃত্তটিকে বৃত্তের আদর্শ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1, b = 1, c = 9$

$\therefore g = -\frac{6}{2} = -3$ এবং $f = \frac{8}{2} = 4$

$\therefore$ y -অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ

$= 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{4^2 - 9} = 2\sqrt{7}$ একক **(Ans.)**

07.



[RB'22]

(গ) A ও B বিন্দুগামী বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করলে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)

বৃত্তটি A(1,2) বিন্দুগামী।

(i) $\Rightarrow 1^2 + 2^2 + 2g \cdot 1 + 2f \cdot 2 + c = 0$

$\Rightarrow 5 + 2g + 4f + c = 0$ ..... (ii)

বৃত্তটি B(3,2) বিন্দুগামী।

(ii) $\Rightarrow 3^2 + 2^2 + 2g \cdot 3 + 2f \cdot 2 + c = 0$

$\therefore 13 + 6g + 4f + c = 0$ ..... (iii)

বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore 2\sqrt{g^2 - c} = 0 \Rightarrow \sqrt{g^2 - c} = 0$

$\Rightarrow g^2 - c = 0 \therefore g^2 = c$ ..... (iv)

এখন, (iii) − (ii)

$\Rightarrow (13 + 6g + 4f + c) - (5 + 2g + 4f + c) = 0$

$\Rightarrow 13 + 6g - 5 - 2g = 0 \Rightarrow 8 + 4g = 0$

$\Rightarrow 4g = -8 \Rightarrow g = -\frac{8}{4} \therefore g = -2$

এবং (iv) $\Rightarrow g^2 = c \Rightarrow (-2)^2 = c \therefore c = 4$

আবার, (ii) $\Rightarrow 5 + 2g + 4f + c = 0$

$\Rightarrow 5 + 2(-2) + 4f + 4 = 0$

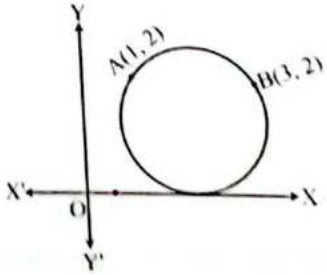
$\Rightarrow 5 - 4 + 4f + 4 = 0 \Rightarrow 4f = -5 \Rightarrow f = -\frac{5}{4}$

(i) নং সমীকরণ g, f ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2\left(-\frac{5}{4}\right)y + 4 = 0$

$\therefore 4x^2 + 4y^2 - 16x - 10y + 16 = 0$

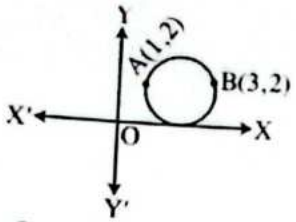
08.



[SB'22]

(খ) উদ্দীপকের আলোকে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:**



ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)

যেহেতু, বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে, তাই $g^2 = c$

$\therefore$ (i) $\Rightarrow x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + g^2 = 0$ ..... (ii)

বৃত্তটি A(1, 2) বিন্দুগামী।

$\therefore$ (ii) $\Rightarrow 1^2 + 2^2 + 2g + 4f + g^2 = 0$

$\therefore 2g + 4f + g^2 = -5$ ..... (iii)

বৃত্তটি B(3, 2) বিন্দুগামী।

$\therefore$ (ii) $\Rightarrow 3^2 + 2^2 + 6g + 4f + g^2 = 0$

$\therefore 6g + 4f + g^2 = -13$ ..... (iv)

(iv) − (iii) হতে, $6g + 4f + g^2 - 2g - 4f - g^2 = -13 + 5$

$\Rightarrow 4g = -8 \therefore g = -2$

আবার, (iii) $\Rightarrow -4 + 4f + 4 = -5 \therefore f = -\frac{5}{4}$

আবার, $c = g^2 = (-2)^2 = 4$

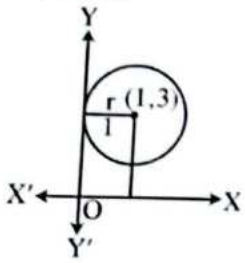
$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 4x - \frac{10}{4}y + 4 = 0$

$\therefore 2x^2 + 2y^2 - 8x - 5y + 8 = 0$

09. (ক) (1, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত y-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [JB'22]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, বৃত্তের কেন্দ্র (1,3)

বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে,



$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = |h| = 1$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1^2$

$\Rightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 + 9 - 6y - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ হলো: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$

10. A(1, 1) বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত। রেখাত্রয়ের সমীকরণ $x = 0, y = 0, x = a$. [MB'22]

(ক) যদি $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে তবে c এর মান নির্ণয় কর।

(গ) উদ্দীপকে প্রদত্ত রেখাত্রয়কে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$

বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে

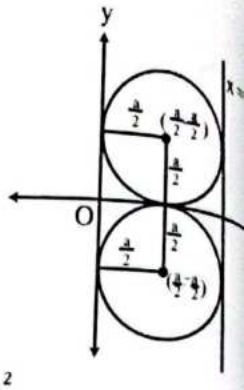
$\therefore 2\sqrt{g^2 - c} = 0 \Rightarrow g^2 - c = 0 \Rightarrow g^2 = c$

$\Rightarrow c = (-2)^2 \Rightarrow c = 4$ (Ans.)

(গ) **Sol^n:** চিত্র হতে পাই,

$x = 0, y = 0$

এবং $x = a$ রেখাত্রয়কে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের ব্যাসার্ধ হবে, $r = \frac{a}{2}$



বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক,

$C\left(\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}\right)$

$\therefore$ বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ হলো,

$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y \pm \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2x \times \frac{a}{2} + y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pm 2y\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow x^2 + \frac{a^2}{4} - xa + y^2 + \frac{a^2}{4} \pm ya = \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - xa \pm ya + \frac{a^2}{4} = 0$

$\therefore$ বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ হলো: $x^2 + y^2 - xa + ya + \frac{a^2}{4} =$

$= x^2 + y^2 - xa - ya + \frac{a^2}{4} = 0$

11. দৃশ্যকল্প-২: (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে ... করে। [MB

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি y-অক্ষের খণ্ডিত অংশের পরিমাণও নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** দৃশ্যকল্প-০২ হতে: কেন্দ্র = (1, 2) এবং বৃত্তটি x-অ... স্পর্শ করে।

সুতরাং ব্যাসার্ধ, $= |k| = |2| = 2$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ, $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

$\Rightarrow x^2 + 1^2 - 2x + y^2 + 4 - 4y = 4$

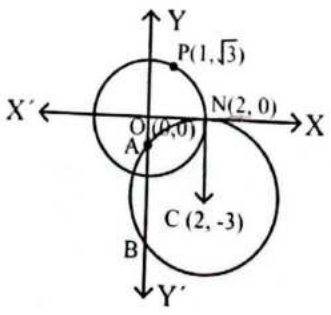
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

$\therefore$ y অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $d = 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{(-2)^2 - 1}$

$= 2\sqrt{4 - 1} = 2\sqrt{3}$ একক

$\therefore$ y অক্ষের খণ্ডিতাংশ হলো $2\sqrt{3}$ একক

12.



[Ctg.B'

(গ) A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: C(2, −3) কেন্দ্র ও NC ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তটি y-অক্ষকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ ব্যাসার্ধ, $NC = \sqrt{(2-2)^2 + (-3-0)^2}$

$NC = 3$ একক

∴ বৃত্তের সমীকরণ: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$

∴ y-অক্ষে, $x = 0$ ∴ $(0-2)^2 + (y+3)^2 = 9$

⇒ $(y+3)^2 = 5$ ⇒ $y + 3 = \pm\sqrt{5}$ ⇒ $y = -3 \pm \sqrt{5}$

∴ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $A(0, -3+\sqrt{5})$

∴ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $B(0, -3-\sqrt{5})$ (Ans.)

13. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ ..... (i) [JB'19]

(খ) এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা (i) এ বর্ণিত বৃত্তটির কেন্দ্র ও (3, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষকে স্পর্শ করে।

(খ) Sol^n: ধরি, বৃত্তটি, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + g^2 = 0$

[∵ x অক্ষকে স্পর্শ করে]

$(3,2) \Rightarrow 6g + 4f + g^2 = -13$ ..... (i)

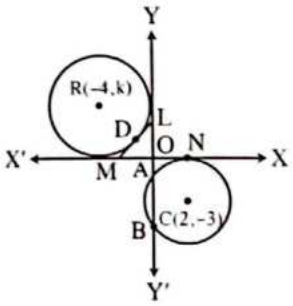
কেন্দ্র $(1,2) \Rightarrow 2g + 4f + g^2 = -5$ .... (ii)

(i) − (ii) ⇒ $4g = -8$ ∴ $g = -2$

∴ $f = \frac{-13-g^2+12}{4} = -\frac{5}{4}$ ∴ $x^2 + y^2 - 4x - \frac{5}{2}y + 4 = 0$

∴ $2x^2 + 2y^2 - 8x - 5y + 8 = 0$ (Ans.)

14.

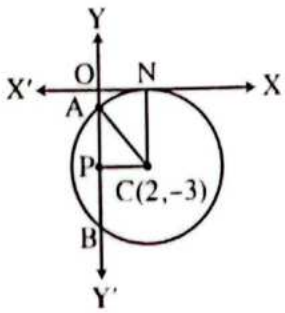


চিত্রে, $D\left(\frac{-8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ এবং N(2, 0)

[ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ]

(খ) AB জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: বৃত্তটির কেন্দ্র, $C(h,k) \equiv (2,-3)$ এবং x অক্ষকে স্পর্শ করে।



∴ ব্যাসার্ধ, $r = |k| = 3$ একক;

এখন, $CA = CN = r = 3$ একক; $CP = 2$ একক

∴ $AB = 2AP = 2\sqrt{CA^2 - CP^2}$

$= 2\sqrt{3^2 - 2^2} = 2\sqrt{5}$ একক (Ans.)

15. Q(0, 4), B(−9, 7) এবং C(−3, −1) তিনটি বিন্দু।

[রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ]

(খ) y-অক্ষকে Q বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং x-অক্ষ হতে 6 একক দৈর্ঘ্য কর্তন করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: ধরি, বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

∴ y-অক্ষকে Q(0, 4) বিন্দুতে স্পর্শ করে, ∴ $f^2 = c$

এবং $0 + 4^2 + 2 \times 4f + c = 0$

⇒ $f^2 + 8f + 16 = 0 \Rightarrow (f+4)^2 = 0$

∴ $f = -4$ ∴ $c = f^2 = 16$

আবার, x-অক্ষ হতে 6 একক দৈর্ঘ্য কর্তন করে,

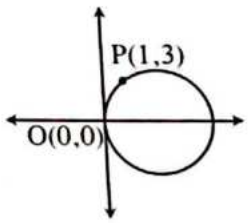
∴ $2\sqrt{g^2 - c} = 6 \Rightarrow g^2 - c = 3$

⇒ $g^2 = 3 + 16$ ∴ $g = \pm 5$

∴ বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 \pm 10x - 8y + 16 = 0$ (Ans.)

16. (ক) y-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (1, 3) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢাকা কলেজ]

(ক) Sol^n:



ধরি, কেন্দ্র, x_1, y_1

যেহেতু বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করেছে

যেহেতু ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের ভুজ| = x_1

তাহলে, $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = x_1^2$ ..... (i)

(i) নং রেখা (0,0) বিন্দুগামী, $(x_1^2 + y_1^2) = x_1^2$ ∴ $y_1 = 0$

(i) নং রেখা (1,3) বিন্দুগামী,

$(1 - x_1)^2 + (3 - 0)^2 = x_1^2$

⇒ $1 - 2x_1 + x_1^2 + 9 = x_1^2$

⇒ $2x_1 = 10$ ∴ $x_1 = 5$

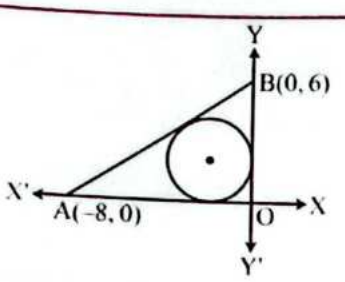
∴ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-5)^2 + y^2 = 5^2$

⇒ $x^2 - 10x + 25 + y^2 = 25$

⇒ $x^2 + y^2 - 10x = 0$

Educationblog24.com

নিজে করো

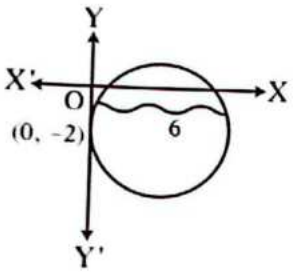
17. 

[SB'23]

(খ) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং x-অক্ষ হতে AB এর সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা কর্তন করে। [Ans: $x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{61}x - 12y + 36 = 0$]

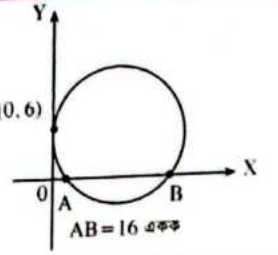
18. (ক) $2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$ বৃত্তটি দ্বারা y অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [SB'22] [Ans: $\sqrt{7}$]

19. দৃশ্যকল্প-২: [BB'22]



(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ প্রদর্শিত বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $x^2 + y^2 - 2\sqrt{13}x + 4y + 4 = 0$]

20. 

[CB'

(গ) AB জ্যা বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $x^2 + y^2 - 20x - 12y + 36 =$

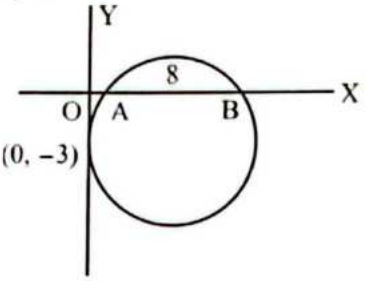
21. $g(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 6y - 31$ [DB'

(ক) $g(x, y) = 0$ বৃত্তটি x অক্ষ হতে যে পরিমাণ অংশ ছেদ ক তা নির্ণয় কর। [Ans: $4\sqrt{}$

22. দৃশ্যকল্প-২: $y = 2$, $y = 10$ এবং $x = 0$ তিনটি সরলরে সমীকরণ। [Din.B'

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত রেখাত্রয়কে স্পর্শকারী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Ans: $(x - y)^2 + (y - 6)^2 =$

23. দৃশ্যকল্প-I [DB'



(খ) দৃশ্যকল্প-I হতে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 =$

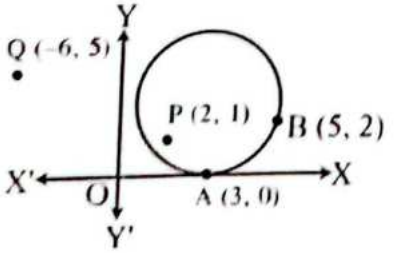
T-06: ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দেওয়া থাকলে তা থেকে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হলে বৃত্তের সমীকরণ $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01



[Ctg.B'22]

(খ) P ও Q বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তটি কর্তৃক অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: P(2, 1) এবং Q(−6, 5)

$(x - 2)(x + 6) + (y - 1)(y - 5) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 + 5 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$

x-অক্ষ কর্তৃক খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য

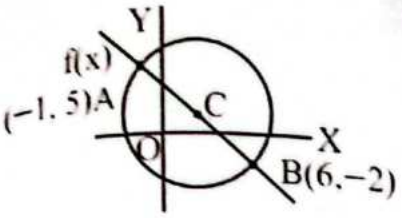
$= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{4 + 7} = 2\sqrt{11}$ একক

y-অক্ষ কর্তৃক খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য

$= 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{9 + 7} = 2 \times 4 = 8$ একক

Educationblog24.com

12.



[RB'19]

(খ) উদ্দীপকের C কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষের ছেদাংশ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস AB এবং A(−1,5) ও B(6,−2)

∴ বৃত্তের সমীকরণ: $(x+1)(x-6)+(y-5)(y+2)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-5x-3y-16=0 \ldots\ldots$ (i)

(i) কে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে, $g=-\frac{5}{2}, f=-\frac{3}{2}, c=-16$

x অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য

$=2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2+16}=\sqrt{89}$ একক (Ans.)

13. দৃশ্যকল্প-১: $6\sqrt{2}$ বাহু বিশিষ্ট বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং এর বিপরীত শীর্ষ y-অক্ষের উপর অবস্থিত।

[Din.B'19]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

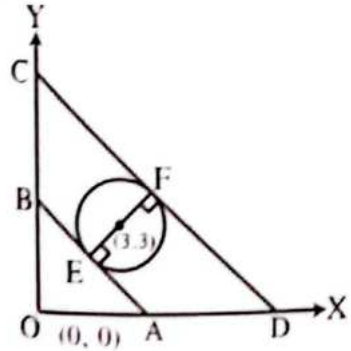
(খ) Sol^n: বাহু $=6\sqrt{2}$ একক, কর্ণ $=12$ একক

∴ বিন্দুদ্বয় $(0,\pm 12),(0,0)$

$\therefore (x-0)(x-0)+(y-0)(y\pm 12)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2\pm 12y=0$ (Ans.)

14.



[Din.B'17]

(গ) AB||CD হলে F ও D বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: ধরি, $CD \equiv 3x+4y+c=0$

$\therefore \frac{c+12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm 2\times\frac{9}{5} \Rightarrow \frac{c+12}{5}=\pm 2\times\frac{9}{5}$

$\therefore c+12=\pm 18 \ \therefore c=6,-30.$

∵ OD & OC(+ve) $\therefore c=-30.$

$\therefore 3x+4y=30 \ldots\ldots$ (i) $\therefore D\equiv(10,0)$

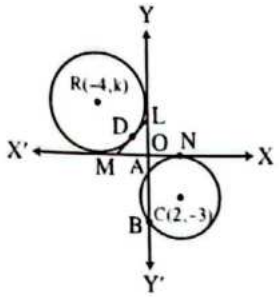
এখন, $3x+4y=12$ এর উপর লম্ব যা (3,3) গামী

$4x-3y-3=0$ এবং (i) এর ছেদবিন্দু F

$\therefore F\equiv\left(\frac{102}{25},\frac{111}{25}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্ত $(x-10)\left(x-\frac{102}{25}\right)+y\left(y-\frac{111}{25}\right)=0$

05.



চিত্রে, $D\left(\frac{-8}{5},\frac{4}{5}\right)$ এবং $N(2,0)$

[ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ]

(ক) D ও N বিন্দুদ্বয়কে ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: D ও N বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে $\left(-\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$ এবং $(2,0)$

বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ, $\left(x+\frac{8}{5}\right)(x-2)+\left(y-\frac{4}{5}\right)y=0$

$\Rightarrow (5x+8)(x-2)+(5y-4)y=0$

$\Rightarrow 5x^2-10x+8x-16+5y^2-4y=0$

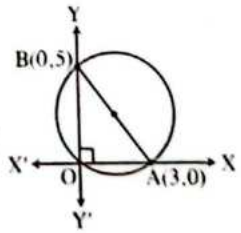
$\therefore 5x^2+5y^2-2x-4y-16=0$ (Ans.)

06. $x^2+y^2-8x-6y+16=0 \ldots\ldots$ (i);

$x^2+y^2=4 \ldots\ldots$ (ii) [ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ]

(গ) মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y-অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিক হতে যথাক্রমে 3 ও 5 একক অংশ ছেদ করে, এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n:



ΔAOB এ $\angle AOB=90°$

$\therefore \Delta AOB$ সমকোণী ত্রিভুজ এবং এর অতিভুজ AB বৃত্তের ব্যাস।

বৃত্তটির ব্যাসের প্রান্তবিন্দু A(3,0) এবং B(0,5) হলে,

বৃত্তটির সমীকরণ: $(x-3)(x-0)+(y-0)(y-5)=0$

$\Rightarrow x^2-3x+y^2-5y=0$

$\therefore x^2+y^2-3x-5y=0$ (Ans.)

Educationblog24.com

T-07: তিন বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়

Concept

কোনো বৃত্ত $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ বিন্দুগামী হলে,

(a) বৃত্তের সমীকরণ ধরতে হবে, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)

(b) (i) নং বৃত্তটিকে A, B এবং C বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ করলে 3 টি সমীকরণ পাওয়া যাবে (g, f, c যুক্ত)।

(c) সমীকরণ তিনটিকে সমাধান করে g, f, c এর মান নির্ণয় করতে হবে।

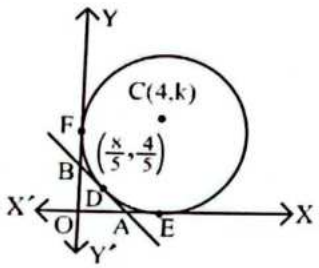
(d) g, f, c এর মান (i)-এ বসালে নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করা যাবে।

Shortcut: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)}{(x-x_1)(y_1-y_2)-(y-y_1)(x_1-x_2)} = \frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)+(y_3-y_1)(y_3-y_2)}{(x_3-x_1)(y_1-y_2)-(y_3-y_1)(x_1-x_2)}$$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01.



[JB'17]

(খ) এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা C, E ও F বিন্দু দিয়ে যায়।

(খ) **Sol^n:** এখানে, $CE = k = r \therefore (x-4)^2 + (y-k)^2 = k^2 \therefore \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ বৃত্তস্থ, $\therefore \left(\frac{8}{5}-4\right)^2 + \left(\frac{4}{5}-k\right)^2 = k^2$

$\Rightarrow \frac{144}{25} + \frac{16}{25} - \frac{8}{5}k + k^2 = k^2 \Rightarrow \frac{144+16}{25} = \frac{8}{5}k \therefore k = 4 \therefore E \equiv (4,0); \& F \equiv (0,4)$

ধরি, সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

যা $(4,4), (4,0), (0,4)$ এই তিনটি বিন্দুগামী $\therefore 8g + 8f + c = -32$; $8f + c = -16$

$8g + c = -16 \therefore g = -2, f = -2, c = 0 \therefore x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ **(Ans.)**

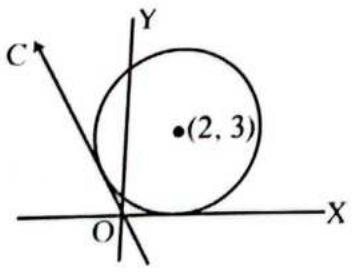
T-08: বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় যার কেন্দ্র নির্দিষ্ট রেখার উপর অবস্থিত

Concept

এক্ষেত্রে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এই সমীকরণ এবং প্রদত্ত বিভিন্ন শর্ত দ্বারা সিদ্ধ করে g, f, c এর মান বে করলেই উত্তর চলে আসবে। কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক দেয়া থাকলে, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ব্যবহার সুবিধাজনক।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01.



[DB'23]

(খ) এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং উদ্দীপকে উল্লিখিত বৃত্তটির কেন্দ্র ও মূলবিন্দু দিয়ে যায়।

(খ) **Sol^n:** যেহেতু বৃত্তটি মূলবিন্দু দিয়ে যায়, তাই $c = 0$। আবার, কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত। ধরি, কেন্দ্র $\equiv (-g, 0)$।

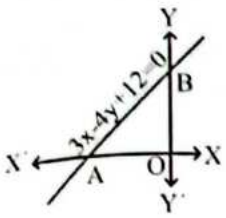
অর্থাৎ $-f = 0 \Rightarrow f = 0$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx = 0$, এখন উল্লিখিত বৃত্তে কেন্দ্র $(2,3)$ বিন্দুটি বসিয়ে পাই $(2)^2 + (3)^2 + 2g \times 2 = 0$

$\Rightarrow g = \frac{-13}{4} \therefore$ সমীকরণ $\Rightarrow x^2 + y^2 - 2 \times \frac{13}{4}x = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 13x = 0$

02.



[SB'19]

(গ) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার কেন্দ্র AB রেখার উপর এবং যা মূলবিন্দু ও $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

(গ) **Sol^n:** প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র (2, 4), মূলবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ:

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$ ..... (i)

(2, 4) বিন্দু দিয়ে (i) নং বৃত্তটি গেলে, $4 + 16 + 4g + 8f = 0$

$\therefore 4g + 8f = -20$ ..... (ii)

(i) এর কেন্দ্র $(-g, -f)$; $3x - 4y + 12 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত বলে, $3(-g) - 4(-f) + 12 = 0$

$\therefore 3g - 4f = 12$ ..... (iii)

(ii) ও (iii) সমাধান করে, $g = \frac{2}{5}$, $f = -\frac{27}{10}$

$\therefore$ বৃত্তটি: $x^2 + y^2 + \frac{4}{5}x - \frac{27}{5}y = 0$

$\therefore 5x^2 + 5y^2 + 4x - 27y = 0$ **(Ans.)**

03. একটি রিকশার সামনের চাকা $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত। [CB'17]

(গ) x অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা চাকাটির কেন্দ্র ও (3, 0) বিন্দুগামী হবে।

(গ) **Sol^n:** 'খ' থেকে পাই, চাকাটির কেন্দ্র $\equiv (1, 0)$ এবং প্রদত্ত অপরবিন্দু $\equiv (3, 0)$

ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)

এই বৃত্তের কেন্দ্র $\equiv (-g, -f)$; প্রশ্নমতে, কেন্দ্র x অক্ষের উপর অবস্থিত $\therefore -f = 0 \Rightarrow f = 0$

আবার, (i) নং বৃত্ত যথাক্রমে (1, 0) ও (3, 0) বিন্দুগামী।

$\therefore$ পর্যায়ক্রমে সিদ্ধ করে পাই,

$1^2 + 0^2 + 2g \cdot 1 + 2f \cdot 0 + c = 0$

$\Rightarrow 1 + 2g + c = 0$ ..... (ii)

এবং $3^2 + 0^2 + 2 \cdot g \cdot 3 + 12 \cdot f \cdot 0 + c = 0$

$\Rightarrow 9 + 6g + c = 0$ ..... (iii)

এখন, (iii) – (ii) থেকে পাই,

$(9 + 6g + c) - (1 + 2g + c) = 0$

$\Rightarrow 8 + 4g = 0 \Rightarrow 4g = -8 \therefore g = -2$

g এর মান (ii) নং এ বসিয়ে,

$1 + 2(-2) + c = 0 \Rightarrow c = 3$

এখন, g, f ও c এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2 \cdot 0 \cdot y + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$

যা নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

04. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $3x - y - 7 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত এবং যে কোনো দুইটি বিন্দু P(1, 1) ও Q(−1, 0)। [ঢাকা কলেজ]

(গ) P ও Q বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, P(1,1) ও Q(−1,0)

বৃত্তের কেন্দ্র $3x - y - 7 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

মনে করি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)

যেখানে, কেন্দ্র $(-g, -f)$

(i) নং রেখা P(1,1) বিন্দুগামী, $1^1 + 1^2 + 2g + 2f + c = 0$

$\Rightarrow 2g + 2f + c = -2$ ..... (ii)

(i) নং রেখা Q(−1,0) বিন্দুগামী,

$(-1)^2 + 0^2 - 2g + c = 0$

$\Rightarrow -2g + 0 \cdot f + c = -1$ ..... (iii)

প্রশ্নমতে, $-3g + f - 7 = 0$

$\Rightarrow -3g + f + 0 \cdot c = 7$ ..... (iv)

(ii), (iii) ও (iv) সমাধান করে পাই,

$g = \frac{-3}{2}, f = \frac{5}{2}, c = -4$

বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$

নিজে করো

05. দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 6 = 0$;

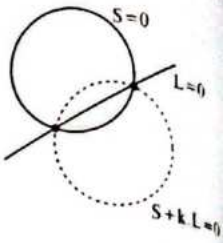
$x + 2y + 1 = 0$ [BB'17]

(খ) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র দৃশ্যকল্প-১ দ্বারা প্রকাশিত রেখার উপর অবস্থিত এবং যা মূলবিন্দু ও দৃশ্যকল্প-১ দ্বারা প্রকাশিত বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়। [Ans: $x^2 + y^2 + 4x - y = 0$]

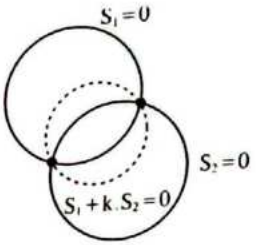
Educationblog24.com

T-09: ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ

Concept



(i) একটি বৃত্ত $S(x,y) = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
এবং একটি সরলরেখা $L(x,y) = ax + by + c_1 = 0$
এর ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + k(ax + by + c_1) = 0$
বা, $S + k \cdot L = 0$



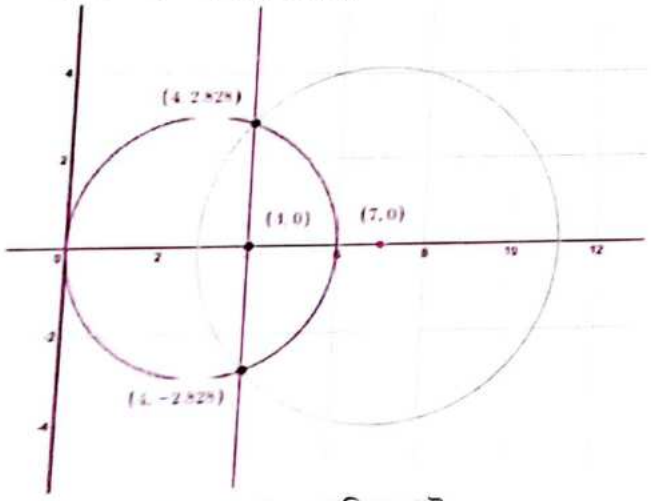
(ii) একটি বৃত্ত, $S_1(x,y) = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$
এবং অপর একটি বৃত্ত, $S_2(x,y) = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$
এর ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,
$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 + k(x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2) = 0$
$\Rightarrow S_1 + k.S_2 = 0$
[**Note:** $S_1 + kS_2 = 0$ এর পরিবর্তে $S_1 + kS_2 = 0$ ও ব্যবহার করা যাবে।]

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + y^2 - 6x = 0$ ..... (i) [Din.B'23]
$x - 4 = 0$ ..... (ii)

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (7, 0) এবং (i) নং বৃত্ত এবং (ii) নং রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়।

(খ) **Sol^n:** দৃশ্যকল্প-১ এ, $x^2 + y^2 - 6x = 0$ ... ... (i)
আর $x - 4 = 0$ ... ... (ii)

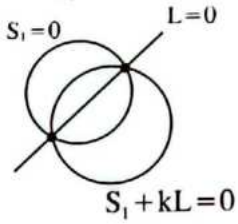


(ii) নং এর $x = 4$ (i) নং এ বসিয়ে পাই,
$4^2 + y^2 - 6 \times 4 = 0; y^2 = 24 - 16 \therefore y = \pm 2\sqrt{2}$
(i) নং বৃত্ত ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুদ্বয় হলো $(4, 2\sqrt{2})$ ও $(4, -2\sqrt{2})$ এখন, (7,0) কেন্দ্র ও $(4, 2\sqrt{2})$ দিয়ে যায় বৃত্তের
ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{(7-4)^2 + (0-2\sqrt{2})^2}$
$= \sqrt{8+9} = \sqrt{17}$ একক
বৃত্তের সমীকরণ হলো: $(x-7)^2 + y^2 = (\sqrt{17})^2$
$\therefore (x-7)^2 + y^2 = 17$
(7, 0) ও $(4, -2\sqrt{2})$ এর জন্যও একই বৃত্ত আসবে।

02. দৃশ্যকল্প-২: (5, 3) ও (−5, 7) বিন্দুদ্বয় একটি বৃত্তের ব্যাসে প্রান্তবিন্দু। [DB'22

(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুযায়ী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। নির্ণে বৃত্ত ও $f(x,y) = 0$ রেখার ছেদবিন্দু ও মূলবিন্দুগাম বৃত্তের সমীকরণও নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই, (5, 3) ও (−5, 7) বিন্দুদ্বয় একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু।



$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ,
$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$
$\Rightarrow (x-5)(x+5) + (y-3)(y-7) = 0$
$\Rightarrow x^2 - 25 + y^2 - 10y + 21 = 0$
$\therefore x^2 + y^2 - 10y - 4 = 0$ ... ... (i)
$f(x,y) = 0 \Rightarrow 3x - 4y - 5 = 0$ ... ... (ii)
এখন, (i) নং বৃত্ত ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ-
$(x^2 + y^2 - 10y - 4) + k(3x - 4y - 5) = 0$ ... ... (iii)
(iii) নং বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী।
$\therefore (0 + 0 - 0 - 4) + k(0 - 0 - 5) = 0$
$\Rightarrow -4 - 5k = 0 \therefore k = -\frac{4}{5}$
$\therefore$ (iii) $\Rightarrow (x^2 + y^2 - 10y - 4) - \frac{4}{5}(3x - 4y - 5) = 0$
$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 50y - 20 - 4(3x - 4y - 5) = 0$
$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 50y - 20 - 12x + 16y + 20 = 0$
$\therefore 5x^2 + 5y^2 - 12x - 34y = 0$

০৩. $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 = 0, x^2 + y^2 = 9$ এবং $x + y = 6$. [RB'17]

(গ) উদ্দীপকের ১ম বৃত্ত ও রেখাটির ছেদবিন্দুগামী এবং ২য় বৃত্তের কেন্দ্রগামী বৃত্তটির দ্বারা x অক্ষ থেকে খণ্ডিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

$x + y - 6 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) ও (ii) এর ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 + k(x + y - 6) = 0 \ldots\ldots\ldots$ (iii)

যা দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র $\equiv (0, 0)$ [খ থেকে প্রাপ্ত] বিন্দুগামী।

$\therefore$ সিদ্ধ করে পাই, $0 + 21 + k(0 - 6) = 0$

$\Rightarrow 6k = 21 \Rightarrow k = \frac{7}{2}$

k এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 + \frac{7}{2}(x + y - 6) = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 12x + 16y + 42 + 7x + 7y - 42 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 19x + 23y = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \times \frac{19}{4}x + 2 \times \frac{23}{4}y = 0$

এখানে, $g = \frac{19}{4}, f = \frac{23}{4}, c = 0$

$\therefore$ x অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{\left(\frac{19}{4}\right)^2 - 0}$

$= 2 \cdot \frac{19}{4} = \frac{19}{2}$ একক। **(Ans.)**

T-10: বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট রেখাকে স্পর্শ করা শর্ত ও তা হতে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

বৃত্তের কেন্দ্র হতে বৃত্তের যেকোনো স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ

(i) $ax + by + c_1 = 0$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের স্পর্শক হলে বৃত্তের কেন্দ্র $C(-g, -f)$ হতে $ax + by + c_1 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ এর সমান হবে।

অর্থাৎ, $\frac{|-ag-bf+c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = r$

(ii) $y = mx + c$ রেখাটি $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত, $c^2 = r^2(1 + m^2)$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

০১. দৃশ্যকল্প: $x^2 + y^2 - 10x - 16y + 64 = 0$ একটি বৃত্ত এবং $4x + 3y + 8 = 0$ একটি রেখা। [Ctg.B'17]

(গ) $(0, -1)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা দৃশ্যকল্পের রেখাকে স্পর্শ করে।

(গ) **Sol^n:** $(0, -1)$ কেন্দ্র এবং r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 0)^2 + (y + 1)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + (y + 1)^2 = r^2 \ldots\ldots$ (i)

কেন্দ্র $(0, -1)$ হতে $4x + 3y + 8 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব

$= \frac{|4\times0+3\times(-1)+8|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|5|}{5} = 1$ একক

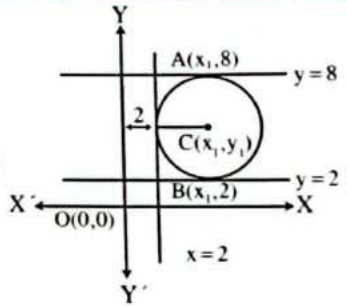
শর্তমতে, $r = 1 \therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y = 0$ **(Ans.)**

০২. $y = 2, y = 8, x = 2 \ldots\ldots\ldots$ (i); $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (ii) [বিএএফ শাহীন কলেজ, চট্টগ্রাম]

(খ) উদ্দীপকের (i) নং এর রেখাত্রয়কে স্পর্শ করে এমন বৃত্ত সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:**



এখানে, A ও B এর মধ্যবিন্দু C $\therefore \frac{8+2}{2} = y_1 \Rightarrow y_1 = 5$

$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = \frac{AB}{2} = \frac{8-2}{2} = 3$ একক

$\therefore x_1 = 2 + r = 2 + 3 = 5$ একক

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 9$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 10y + 41 = 0$

T-11: বিভিন্ন শর্ত সাপেক্ষে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়

Concept

(i) যদি বৃত্তের কোনো স্পর্শক কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার লম্ব/সমান্তরাল (বা অন্য কোনো শর্তযুক্ত হয়।) তাহলে, প্রথমে লম্ব/সমান্তরাল রেখার সমীকরণ লিখতে হবে (বা অন্য শর্তযুক্ত সমীকরণ লিখতে হবে)

(ii) এরপর কেন্দ্র থেকে উক্ত রেখার লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ শর্ত ব্যবহার করে প্রয়োজনীয় ইচ্ছামূলক ধ্রুবকের মান নির্ণয় করলে স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

[Note: বৃত্তের কোনো একটি স্পর্শক ঐ স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।]

Educationblog24.com

HSC প্রশ্নব্যাংক ২০২৫

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ বৃত্তের একটি স্পর্শক $3x + 4y - 9 = 0$ [RB'23]

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত বৃত্তে এরূপ দুটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উদ্দীপকের স্পর্শকের উপর লম্ব।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ ..... (i)

বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $3x + 4y - 9 = 0$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, ব্যাসার্ধ,

$= \sqrt{1^2 + (-1)^2 - (-2)} = 2$ একক ; $C \equiv (1, -1)$

(ii) নং সমীকরণের থেকে পাই, $3x + 4y - 9 = 0$

$\Rightarrow 4y = -3x + 9 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$

লম্বের সমীকরণ, $y = \frac{4}{3}x + k \Rightarrow 4x - 3y + 3k = 0$

যেহেতু কেন্দ্র থেকে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান।

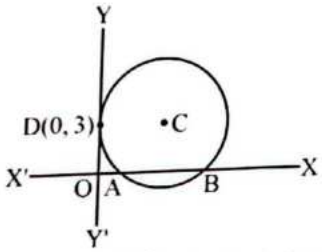
$\therefore \left|\frac{4\times1-3(-1)+3k}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = 2 \Rightarrow |4 + 3 + 3k| = 10$

$\Rightarrow 7 + 3k = \pm 10 \therefore k = 1, -\frac{17}{3}$

$\therefore$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণদ্বয় হলো $4x - 3y + 3 = 0$

অথবা $4x - 3y - 17 = 0$

02.

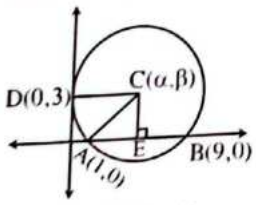


[BB'23]

(খ) A ও B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 0) ও (9, 0) হলে C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) BD এর সমান্তরাল রেখা উদ্দীপকের বৃত্তকে যে বিন্দুতে স্পর্শ করে তা নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:**



E বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1+9}{2}, 0\right) = (5, 0)$

সুতরাং, কেন্দ্র C(5,3) এবং ব্যাসার্ধ = 5 একক।

সুতরাং বৃত্তের সমীকরণ $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$ **(Ans.)**

(গ) **Sol^n:** B(9, 0) ও D(0, 3) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$\frac{Y-3}{3-0} = \frac{x-0}{0-9} \Rightarrow \frac{y-3}{3} = \frac{x}{-9}$

$\Rightarrow -3(y - 3) = x \Rightarrow -3y + 9 = x$

$\Rightarrow x + 3y - 9 = 0$ ..... (i)

ধরি, BD রেখার সমান্তরাল রেখা $x + 3y + k = 0$;

যা, $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক।

$\therefore \frac{|5+3\times3+k|}{\sqrt{1+3^2}} = r = 5 \Rightarrow \frac{|14+k|}{\sqrt{10}} = 5$

$\Rightarrow |14 + k| = 5\sqrt{10} \Rightarrow 14 + k = \pm 5\sqrt{10}$

$\Rightarrow k = -14 \pm 5\sqrt{10}$

$\therefore$ রেখার সমীকরণ, $x + 3y - 14 \pm 5\sqrt{10} = 0$ ..... (ii)

ধরি, রেখাদ্বয়ের লম্ব ও কেন্দ্রগামী রেখার সমীকরণ,

$3x - y + k = 0$ ..... (iii)

রেখাটি C(5, 3) বিন্দুগামী।

$\therefore 3 \cdot 5 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = -12$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $3x - y = 12$ ..... (iv)

(ii) + 3 × (iv) $\Rightarrow x + 3y + 9x - 3y = 14 \pm 5\sqrt{10} + 36$

$\Rightarrow 10x = 50 \pm 5\sqrt{10} \therefore x = 5 \pm \frac{5}{\sqrt{10}}$

এবং $y = 3x - 12$ [(iv) নং সমীকরণ হতে]

$\Rightarrow y = 3 \cdot \left(5 \pm \frac{5}{\sqrt{10}}\right) - 12 = 15 - 12 \pm \frac{15}{\sqrt{10}} = 3 \pm \frac{15}{\sqrt{10}}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শবিন্দুর দুটির স্থানাঙ্ক: $\left(5 + \frac{5}{\sqrt{10}}, 3 + \frac{15}{\sqrt{10}}\right)$ এবং $\left(5 - \frac{5}{\sqrt{10}}, 3 - \frac{15}{\sqrt{10}}\right)$

03. দৃশ্যকল্প-১: $f(x, y) = 3x - 4y - 5$ এবং $g(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9$. [DB'22]

(খ) দেখাও যে, দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত $f(x, y) = 0$ রেখাটি $g(x, y) = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক।

(খ) **Sol^n:** $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$

বৃত্তটির কেন্দ্র, (3, −4) এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{(-3)^2 + 4^2 - 9} = \sqrt{9 + 16 - 9}$

$r = 4$ একক

এখন, কেন্দ্র (3, −4) হতে $f(x, y) = 0$ বা $3x - 4y - 5 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব,

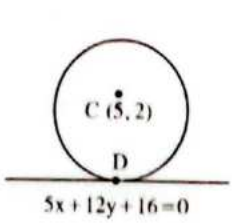
$d = \left|\frac{3\cdot3-4(-4)-5}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right| = \left|\frac{9+16-5}{\sqrt{25}}\right| = \left|\frac{20}{5}\right| = 4$ একক

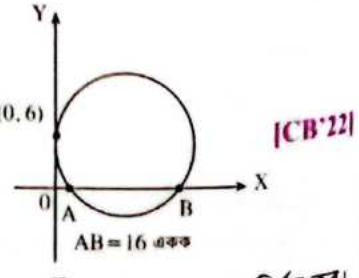
এখানে, $d = r$

$\therefore f(x, y) = 0$ রেখাটি $g(x, y) = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক।

(Showed)

04.

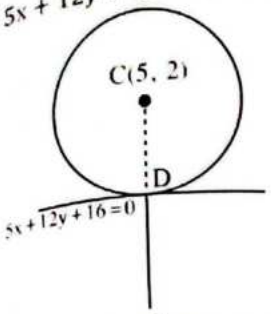




[CB'22]

(খ) C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^{n}:** স্পর্শবিন্দু D ও বৃত্তের কেন্দ্র C বিন্দুগামী $5x + 12y + 16 = 0$ ..... (i) এর উপর লম্ব।



$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ হলো, $12x - 5y + k = 0$

এটি, C(5, 2) বিন্দুগামী, $12 \times 5 - 5 \times 2 + k = 0$

$\Rightarrow 60 - 10 + k = 0 \Rightarrow k = -50$

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ হলো,

$12x - 5y - 50 = 0$ ..... (ii)

$12 \times$ (i) $- 5 \times$ (ii)

$60x + 144y + 192 - 60x + 25y + 250 = 0$

$\Rightarrow 169y + 442 = 0 \Rightarrow y = -\frac{34}{13}$

$\therefore 12x - 5 \times \left(-\frac{34}{13}\right) - 50 = 0 \Rightarrow x = \frac{40}{13}$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{40}{13}, -\frac{34}{13}\right)$

05. দৃশ্যকল্প: $x^2 + y^2 - 10x - 16y + 64 = 0$ একটি বৃত্ত এবং $4x + 3y + 8 = 0$ একটি রেখা। **[Ctg.B'17]**

(খ) দেখাও যে, দৃশ্যকল্পের বৃত্তটিকে, $3x - 4y - 8 = 0$ রেখাটি স্পর্শ করে এবং স্পর্শ বিন্দু নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^{n}:** দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 - 10x - 16y + 64 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2 \cdot 5 \cdot x - 2 \cdot 8 \cdot y + 64 = 0$

$\therefore$ কেন্দ্র $= (5, 8)$, ব্যাসার্ধ $= \sqrt{25 + 64 - 64} = 5$ একক

কেন্দ্র (5, 8) হতে $3x - 4y - 8 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব

$= \frac{|3\times5-4\times8-8|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|15-32-8|}{5}$

$= \frac{|-25|}{5} = 5$, যা বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান।

$\therefore$ দৃশ্যকল্পের বৃত্তটি, $3x - 4y - 8 = 0$ রেখাটিকে স্পর্শ করে। (দেখানো হলো)

এখন, $3x - 4y - 8 = 0$ এর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$4x + 3y + k = 0$ যা (5, 8) বিন্দুগামী

$4 \times 5 + 3 \times 8 + k = 0 \Rightarrow 20 + 24 + k = 0$

$\Rightarrow k = -44 \quad \therefore 4x + 3y - 44 = 0$ ..... (ii)

(i) $\times 4 -$ (ii) $\times 3$

$12x - 16y - 32 = 0$

$12x + 9y - 132 = 0$

$- \quad - \quad (+)$

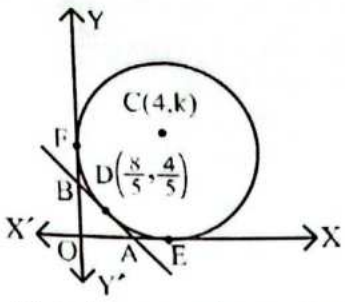
$-25y + 100 = 0 \Rightarrow -25y = -100 \therefore y = 4$

y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, (i) $\Rightarrow 3x - 4 \times 4 - 8 = 0$

$\Rightarrow 3x - 16 - 8 = 0 \Rightarrow 3x - 24 = 0 \Rightarrow x = 8$

$\therefore$ স্পর্শবিন্দু (8, 4) **(Ans.)**

06.



[JB'17]

(গ) বৃত্তটির AB স্পর্শকের সমান্তরাল অপর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^{n}:** C(4,4) এবং $D\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ এর সংযোগকারী রেখার উপর লম্বরেখার ঢাল $= -\frac{4-\frac{8}{5}}{4-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

$\therefore AB \Rightarrow \left(y - \frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{8}{5}\right)$

$\Rightarrow (5y - 4) = -\frac{3}{4}(5x - 8)$

$\Rightarrow 20y - 16 = -15x + 24 \Rightarrow 15x + 20y = 40$

$\Rightarrow 3x + 4y = 8; \therefore 3x + 4y - 8 = 0$

ধরি, অপর স্পর্শক $3x + 4y + c = 0$

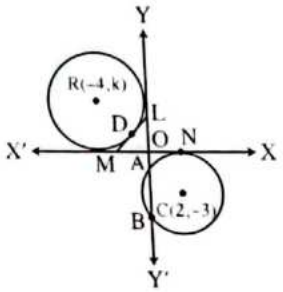
$\therefore \left|\frac{3\times4+4\times4+c}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 4 \Rightarrow \frac{c+12+16}{5} = \pm4$

$c + 28 = \pm20 \quad \therefore c = -8, -48$

কিন্তু, $3x + 4y - 8 = 0$ হল, $\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ বিন্দুগামী।

$\therefore$ অপর স্পর্শক, $3x + 4y - 48 = 0$ **(Ans.)**

07.

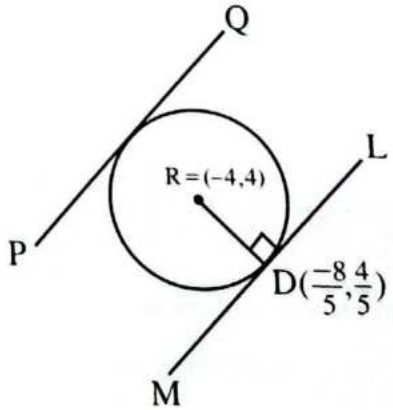


চিত্রে, $D\left(\frac{-8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ এবং N(2, 0)

[ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ]

(গ) R কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটির এরূপ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা LM রেখার সমান্তরাল।

(গ) **Sol^{n}:**



Educationblog24.com

এখানে, R কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x ও y উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে
∴ ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের ভুজ| = |কেন্দ্রের কোটি|
= |−4| = 4 একক এবং K = 4

RD রেখার ঢাল = $\frac{4-\frac{4}{5}}{-4+\frac{8}{5}} = \frac{-4}{3}$ ∵ RD ⊥ LM

∴ LM রেখার ঢাল = $\frac{-1}{\frac{-4}{3}} = \frac{3}{4}$

তাহলে, LM রেখার সমীকরণ, $\left(y-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{4}\left(x+\frac{8}{5}\right)$

$\Rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$

LM রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ,

$3x - 4y + k = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

(i) নং রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হওয়ায়,

$\frac{|3\times(-4)-4\times4+K|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 4 \Rightarrow \frac{|-12-16+K|}{5} = 4$

$\Rightarrow |K - 28| = 20 \therefore K = 48, 8$

K = 8 হলে LM রেখা পাওয়া যায়

তাহলে নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $3x - 4y + 48 = 0$

নিজে করো

08. $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 31 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i) [JB'23]
$4x + 3y + 7 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (ii)
(গ) (ii) নং রেখার উপর লম্ব এবং (i) নং বৃত্তকে স্পর্শ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
[Ans: $3x - 4y + 56 = 0$ এবং $3x - 4y - 14 = 0$]

09. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ ও $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ। [Din.B'22]
(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত প্রথম বৃত্তের একটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x + 4y - 1 = 0$ এর সমান্তরাল।
[Ans: $3x + 4y + 10 = 0$ এবং $3x + 4y - 20 = 0$]

10. দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ $4x + 3y + 26 = 0$. [MB'22]
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর বৃত্তটির দুটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় যা প্রদত্ত জ্যা-এর উপর লম্ব। [Ans: $3x - 4y + 8$ $3x - 4y - 52$]

11. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25$ [DB, JB'19; DB
$h(x, y) = 3x - 4y + 5$.
(গ) $f(x, y) = 0$ বৃত্তের দুটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় ক $h(x, y) = 0$ রেখায় উপর লম্ব।
[Ans: $\begin{cases} 4x + 3y + 4 = \\ 4x + 3y - 26 = \end{cases}$

12. একটি রিকশার সামনের চাকা $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত। [CB
(খ) প্রমাণ কর যে, রিকশাটির চাকার একটি স্পর্শক x + $1 = 0$

T-12: বৃত্তের উপরস্থ কোনো বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ

Concept

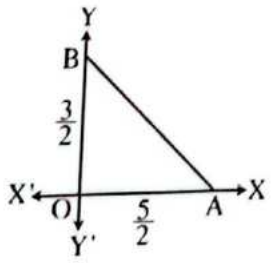
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর উপর বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$
এই সমীকরণটিকে সংক্ষেপে $T = 0$ লেখা হয়।

- অভিলম্ব: অভিলম্ব স্পর্শকের লম্ব সরলরেখা এবং (x_1, y_1) বা স্পর্শ বিন্দুগামী।

(x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য: x^2 এর পরিবর্তে xx_1, y^2 এর পরিবর্তে yy_1 ; x এর পরিবর্তে $\frac{x+x_1}{2}$ y এর পরিবর্তে $\frac{y+y_1}{2}$ বসাতে হয়।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

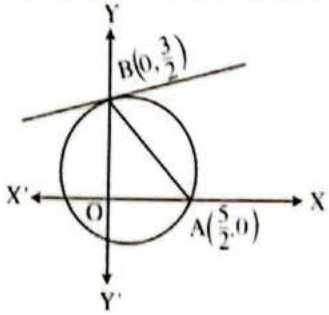
01.



[BB'22]

(গ) AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ ও B বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$
B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_2, y_2) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$
এখন, AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ



$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

$\Rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)(x-0)+(y-0)\left(y-\frac{3}{2}\right)=0$

$\Rightarrow \left(\frac{2x-5}{2}\right)x+y\left(\frac{2y-3}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{2x^2-5x}{2}+\frac{2y^2-3y}{2}=0$

$\therefore 2x^2+2y^2-5x-3y=0 \ldots\ldots\ldots (i)$

(i) নং বৃত্তে $B\left(0,\frac{3}{2}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ:

$2\cdot x\cdot 0+2y\cdot\frac{3}{2}-5\left(\frac{x+0}{2}\right)-3\left(\frac{y+\frac{3}{2}}{2}\right)=0$

$\Rightarrow 0+3y-\frac{5x}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{2y+3}{2}=0 \Rightarrow 3y-\frac{5x}{2}-\frac{6y+9}{4}=0$

$\Rightarrow 12y-10x-6y-9=0$

$\Rightarrow 6y-10x-9=0 \therefore 10x-6y+9=0$ **(Ans.)**

02 $A(1,1)$ বিন্দুটি $x^2+y^2+4x+6y-12=0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত। **[MB'22]**

(খ) A বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
A বিন্দুগামী বস্তুটির স্পর্শকের সমীকরণও নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $x^2+y^2+4x+6y-12=0$ বৃত্তটির কেন্দ্র, $c=\left(\frac{4}{-2},\frac{6}{-2}\right)=(-2,-3)$

A বিন্দুটি হলো $(1,1)$ ধরি, A বিন্দুগামী জ্যা-এর অপর প্রান্ত, $B(x,y)$

অতএব, AB জ্যা C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

$\therefore$ AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=\left(\frac{x+1}{2},\frac{y+1}{2}\right) \therefore \frac{x+1}{2}=-2$

$\Rightarrow x+1=-4 \Rightarrow x=-5$

আবার, $\frac{y+1}{2}=-3 \Rightarrow y+1=-6 \Rightarrow y=-7$

$\therefore$ A বিন্দুগামী ব্যাস এর অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক হলো $(-5,-7)$

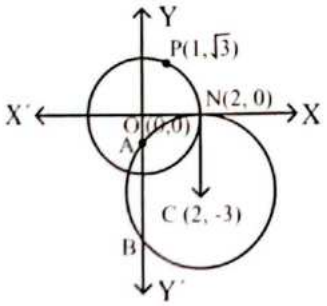
$A(1,1)$ বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ,

$x\cdot 1+y\cdot 1+4\cdot\frac{x+1}{2}+6\cdot\frac{4+1}{2}-12=0$

$\Rightarrow x+y+2x+2+3y+3-12=0$

$\Rightarrow 3x+4y-7=0$ **(Ans.)**

03



[Ctg.B'19]

(খ) O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=OP$

$OP=r=\sqrt{(1-0)^2+\left(\sqrt{3}-0\right)^2}$ একক

$r=2$ একক

বৃত্তের সমীকরণ: $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2=4$

$\therefore P(1,\sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ:

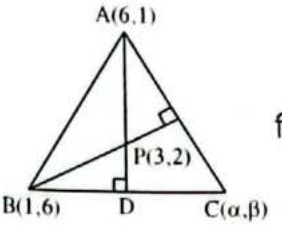
$xx_1+yy_1-r^2=0 \Rightarrow x\cdot 1+y\cdot\sqrt{3}-4=0$

$\Rightarrow x+\sqrt{3}y-4=0$

$P(1,\sqrt{3})$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ: $y_1x-x_1y+0=0$

$\Rightarrow \sqrt{3}x-y=0$ **(Ans.)**

04.

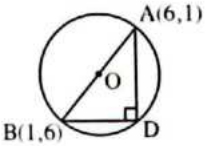


চিত্রে P হলো লম্বকেন্দ্র

[ঢাকা কলেজ]

(খ) ΔABD এর পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করে B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** ΔABD সমকোণী ত্রিভুজ। তাই A ও B, ΔABD এর পরিবৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু।



$\therefore$ পরিবৃত্তের সমীকরণ: $(x-6)(x-1)+(y-1)(y-6)=0$

$\Rightarrow x^2-7x+6+y^2-7y+6=0$

$\therefore x^2+y^2-7x-7y+12=0$ **(Ans.)**

$B(1,6)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক:

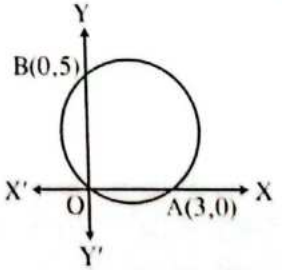
$x\cdot 1+y\cdot 6-7\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)-7\left(\frac{y+6}{2}\right)+12=0$

$\Rightarrow x+6y-\frac{7}{2}x-\frac{7}{2}y-21+12=0$

$\Rightarrow 2x+12y-7x-7-7y-18=0$

$\Rightarrow 5x-5y+25=0 \Rightarrow x-y+5=0$ **(Ans.)**

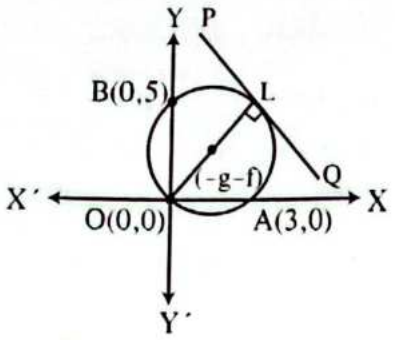
05. **[ঢাকা সিটি কলেজ]**



(গ) O বিন্দু যদি একটি ব্যাসের একটি প্রান্তবিন্দু হয়, তবে ঐ ব্যাসের অপর প্রান্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

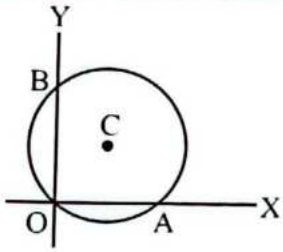
Educationblog24.com

(গ) Sol^n:



ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fg + c = 0$ যার কেন্দ্র $(-g, -f)$
যেহেতু বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী সেহেতু $c = 0$
চিত্র হতে পাই, x- অক্ষের খণ্ডিত অংশ $= 3$
$\Rightarrow 2\sqrt{9^2 - c} = 3 \therefore g = \pm\frac{3}{2}$
যেহেতু বৃত্তটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত সেহেতু $g \neq \frac{3}{2} \therefore g = \pm\frac{3}{2}$
আবার, y-অক্ষের খণ্ডিত অংশ $= 5$
$\Rightarrow 2\sqrt{f^2 - c} = 5 \therefore F = \pm\frac{5}{2}$
যেহেতু বৃত্তটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত সেহেতু $f \neq \frac{5}{2}$
$\therefore f = -\frac{5}{2} \therefore$ কেন্দ্র $(-g, -f) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$
ধরি, OC ব্যাসের C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)
তাহলে, $\frac{0+x}{2} = \frac{3}{2}$ আবার, $\frac{0+y}{2} = \frac{5}{2}$
$\therefore x = 3 \therefore y = 5$
$\therefore c = (3,5)$
OC রেখার ঢাল $= \frac{\frac{5}{2}-0}{\frac{3}{2}-0} = \frac{5}{3}$
$\because OC \perp PQ$
$\therefore$ PQ রেখার ঢাল $= \frac{-1}{\frac{5}{3}} = -\frac{5}{3}$
$\therefore$ স্পর্শক PQ এর সমীকরণ,
$y - 5 = \frac{-3}{5}(x - 3) \Rightarrow 5y - 25 = -3x + 9$
$\therefore 3x + 5y - 34 = 0$

নিজে করো

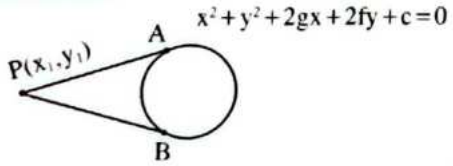
06. 

[BB'

OA = 3 একক এবং OB = 5 একক।
(গ) O যদি একটি ব্যাসের একটি প্রান্ত বিন্দু হয়, তবে ঐ ব্যাসের অপর প্রান্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Ans: $3x + 5y - 34 =$

T-13: বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু হতে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শক সংক্রান্ত

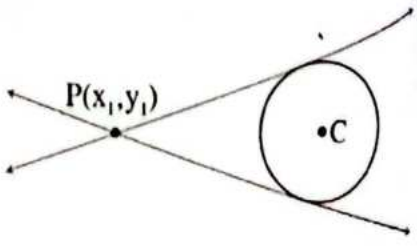
Concept



$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু $P(x_1, y_1)$ হতে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য,
$PA = PB = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c} = \sqrt{S_1}$; [যেখানে, $S_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$]
জেনে রাখো: এই সূত্র ব্যবহারের ক্ষেত্রে বৃত্তের সমীকরণের x^2 ও y^2 এর সহগ অবশ্যই 1 হতে হবে।

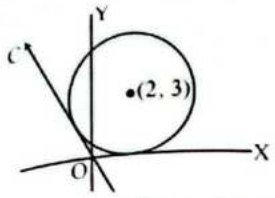
➤ বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়:

Step-1: (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$ ..... (i)
Step-2: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ হতে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান বসিয়ে m এর দুইটি মান পাওয়া যাবে।
Step-3: প্রাপ্ত m এর মান দুইটি, (i) নং সমীকরণে বসালেই স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ পাওয়া যাবে।



সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01.



[DB'23]

(গ) OC স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** উল্লিখিত বৃত্তের কেন্দ্র (2,3) এবং তা x-অক্ষকে স্পর্শ করে। ∴ ব্যাসার্ধ = |3| = 3 একক

আবার ধরি, বৃত্তের স্পর্শক, $y = mx + c$

যেহেতু তা মূলবিন্দু (0,0) দিয়ে যায়, $c = 0$

∴ আমরা স্পর্শকের সমীকরণ পাই,

$y = mx^2 \Rightarrow mx - y = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

এখন স্পর্শকের শর্তমতে, $\frac{|2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)}} = 3$

$\Rightarrow (2m-3)^2 = 9(m^2+1)$ [বর্গ করে পাই]

$\Rightarrow 4m^2 - 12m + 9 = 9m^2 + 9 \Rightarrow 5m^2 + 12m = 0$

$\Rightarrow m(5m+12) = 0 \therefore m = 0, \frac{-12}{5}$

$m = 0$ হলে সরলরেখাটি আমরা পাই $y = 0$ যা OC স্পর্শককে নির্দেশ করে না।

$\therefore m = \frac{-12}{5}$ সমীকরণ (i) এ বসিয়ে পাই,

$\Rightarrow \frac{-12}{5}x - y = 0 \Rightarrow -12x - 5y = 0 \therefore 12x + 5y = 0$

02. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ বৃত্তের একটি স্পর্শক $3x + 4y - 9 = 0$ [RB'23]

(গ) (4,−3) বিন্দু থেকে উদ্দীপকের বৃত্তটির উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য এবং সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** স্পর্শকের দৈর্ঘ্য,

$= \sqrt{4^2 + (-3)^2 - 2\times 4 + 2(-3) - 2} = 3$ একক

স্পর্শকের সমীকরণ, $y + 3 = mx - 4m$

$\Rightarrow mx - y - 4m - 3 = 0$; C = (1,−1), r = 2 একক

$\therefore \frac{|m(1)-(-1)-4m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$

$\Rightarrow \frac{(-1(3m+2))^2}{m^2+1} = 4 \Rightarrow 9m^2 + 12m + 4 = 4m^2 + 4$

$\Rightarrow 5m^2 + 12m = 0 \Rightarrow m(5m+12) = 0$

$\Rightarrow m = 0, -\frac{12}{5}$

স্পর্শকের সমীকরণ: $y + 3 = 0$

এবং $-\frac{12}{5}x - y + 4 \times \frac{12}{5} - 3 = 0$

$\Rightarrow 12x + 5y - 48 + 15 = 0 \Rightarrow 12x + 5y - 33 = 0$

03. বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ [Ctg.B'23]

(গ) (−3,2) বিন্দু হতে উদ্দীপকের ১ম বৃত্তটির উপর অঙ্কিত স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** (−3, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$(y-2) = m(x+3)$ [ধরি, ঢাল = m]

$\Rightarrow mx - y + 3m + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

এখন উদ্দীপকের ১ম বৃত্তটি হলো $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

এখানে, $-g = -3$ এবং $-f = -1$

∴ কেন্দ্র ≡ (−3,−1), ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(3)^2 + 1^2 - 6} = 2$

সমীকরণ (i) যদি বৃত্তটির স্পর্শক হয়, $\frac{|-3m+1+3m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$

$\Rightarrow \frac{|3|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \Rightarrow 9 = 4m^2 + 4$ [বর্গ করে পাই]

$\Rightarrow m^2 = \frac{5}{4} \therefore m = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

∴ স্পর্শক: $y - 2 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x+3)$

আবার, অভিলম্বের সমীকরণ অর্থাৎ (−3, 2) ও কেন্দ্রের (−3,−1) এর সংযোগরেখার সমীকরণ

$\therefore \frac{y-2}{2+1} = \frac{x+3}{-3+3} \Rightarrow (y-2)\times 0 = 3(x+3)$

$\therefore x = -3$

04. (ক) (3,2) বিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 - 6x - 7 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [JB'23]

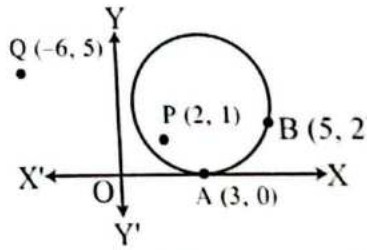
(ক) **Sol^n:** (3,2) বিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 - 6x - 7 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 3x - \frac{7}{3} = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$= \sqrt{(3)^2 + (2)^2 - 3\times 3 - \frac{7}{3}}$

$= \sqrt{4 - \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{12-7}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$ একক।

05.



[Ctg.B'22]

(গ) 'O' মূলবিন্দু থেকে A ও B বিন্দুগামী বৃত্তের উপর অঙ্কিত অপর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** O মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ: $y = mx$

$\Rightarrow mx - y = 0$

বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

x অক্ষকে স্পর্শ করে, $g^2 = c$

(i) নং বৃত্ত (3,0) এবং (5,2) বিন্দুগামী হওয়ায়,

$9 + 0 + 2g\times 3 + 0 + g^2 = 0 \Rightarrow g^2 + 6g + 9 = 0$

$\Rightarrow (g+3)^2 = 0 \therefore g = -3$; $c = 9$

$5^2 + 2^2 + 2\times(-3)\times 5 + 2\times f\times 2 + 9 = 0$

$\Rightarrow 25 + 4 - 30 + 4f + 9 = 0 \Rightarrow 4f + 8 = 0 \Rightarrow f = -2$

Educationblog24.com

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{9 + 4 - 9} = 2$ একক

ধরি, মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx$

$\therefore mx - y = 0$

আমরা জানি, কেন্দ্র হতে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হয়।

কেন্দ্র $(3, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 2$ একক

$\therefore \left|\frac{3m-2}{\sqrt{1+m^2}}\right| = 2 \Rightarrow (3m-2)^2 = 4(1+m^2)$

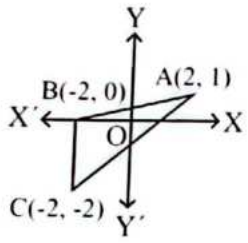
$\Rightarrow 9m^2 - 12m + 4 = 4 + 4m^2 \Rightarrow 5m^2 - 12m = 0$

$\Rightarrow m(5m - 12) = 0 \therefore m = 0, \frac{12}{5}$

$\therefore$ অপর স্পর্শকের ঢাল, $m = \frac{12}{5}$

$\therefore$ অপর স্পর্শকের সমীকরণ, $y = \frac{12}{5}x \therefore 12x - 5y = 0$

06. দৃশ্যকল্প-১: [CB'19]



(গ) $(5, 4)$ বিন্দু হতে ΔABC পরিবৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** ধরি, ΔABC-এর পরিবৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

A বিন্দুর ক্ষেত্রে, $4 + 1 + 4g + 2f + c = 0$

$\therefore 4g + 2f + c = -5 \ldots\ldots$ (i)

B বিন্দুর ক্ষেত্রে, $4 - 4g + c = 0$

$\therefore -4g + c = -4 \ldots\ldots$ (ii)

C বিন্দুর ক্ষেত্রে, $4 + 4 - 4g - 4f + c = 0$

$\therefore -4g - 4f + c = -8 \ldots\ldots$ (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ সমাধান করে পাই,

$g = -\frac{3}{8}, \ f = 1, \ c = -\frac{11}{2}$

$\therefore$ পরিবৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - \frac{3}{4}x + 2y - \frac{11}{2} = 0$

$\therefore 4x^2 + 4y^2 - 3x + 8y - 22 = 0$

$\therefore$ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য,

$= \sqrt{(5)^2 + (4)^2 + 2 \times \left(-\frac{3}{8}\right)5 + 2 \times 1 \times 4 - \frac{11}{2}}$

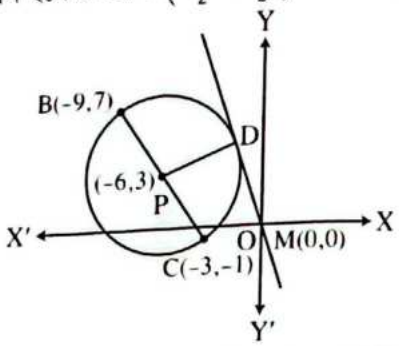
$= 6.305$ একক **(Ans.)**

07. $Q(0, 4), B(-9, 7)$ এবং $C(-3, -1)$ তিনটি বিন্দু। [রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ]

(গ) মূলবিন্দু হতে BC কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তে একটি স্পর্শ আঁকা হলে স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $B(-9, 7)$ ও $C(-3, -1)$

BC ব্যাস হলে কেন্দ্র, $P\left(\frac{-9-3}{2}, \frac{7-1}{2}\right) \equiv (-6, 3)$



$\therefore$ ব্যাসার্ধ $PB = PD = \sqrt{(-9+6)^2 + (7-3)^2}$

$= \sqrt{9 + 16} = 5$ একক

মূলবিন্দুগামী MD স্পর্শকের সমীকরণ,

$y = mx \Rightarrow mx - y = 0$

কেন্দ্র $(-6, 3)$ হতে স্পর্শকের দূরত্ব = ব্যাসার্ধ

$\Rightarrow \frac{|m(-6)-3|}{\sqrt{m^2+1}} = 5 \Rightarrow \frac{(6m+3)^2}{m^2+1} = 25$

$\Rightarrow 36m^2 + 36m + 9 = 25m^2 + 25$

$\Rightarrow 11m^2 + 36m - 16 = 0$

$\therefore m = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \times 11 \times (-16)}}{2 \times 11} = \frac{-18 \pm 10\sqrt{5}}{11}$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ: $y = \frac{-10 \pm 10\sqrt{5}}{11}x$ **(Ans.)**

08. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 49; g(x, y) = x^2 + y^2 - 10x + 2$ [সরকারি বিজ্ঞান কলেজ, ঢাক

(খ) মূলবিন্দু হতে $g(x, y) = 0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত দুই স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) (খ) **Sol^n:** মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$(y - 0) = m(x - 0) \Rightarrow y = mx \Rightarrow mx - y = 0$

দেওয়া আছে, $g(x, y) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \cdot (-5) \cdot x + 2 \cdot 0 \cdot y + 20 = 0$

$\therefore$ কেন্দ্র $= (5, 0)$ এবং $C = 20$

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{5^2 + 0^2 - 20} = \sqrt{5}$

এখন, $\frac{|5m-0|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \frac{25m^2}{m^2+1} = 5 \Rightarrow 25m^2 = 5m^2 + 5 \Rightarrow 20m^2 = 5$

$\Rightarrow m^2 = \frac{1}{4} \therefore m = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y = \pm\frac{1}{2}x$

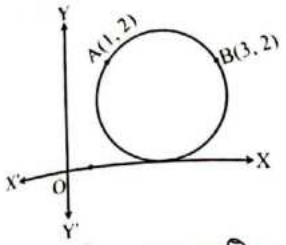
নিজে করো

(ঘ) উদ্দীপক-II: $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। [CB'23]

(গ) মূলবিন্দু (0, 0) থেকে উদ্দীপক-II এর বৃত্তটির উপর অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Ans: $12x + 5y = 0$; 1 একক]

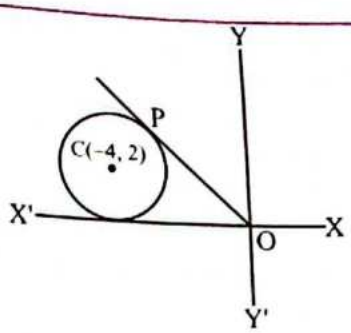
10. (ক) (2, −3) বিন্দু হতে $2x^2 + 2y^2 = 8$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [Din.B'23] [Ans: 3 একক]

11. 

[SB'22]

(গ) মূলবিন্দু থেকে বৃত্তটির অপর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $80x - 39y = 0$]

12. 

[JB'22]

(গ) OP স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $y + \frac{4}{3}x = 0 \Rightarrow 3y + 4x = 0$]

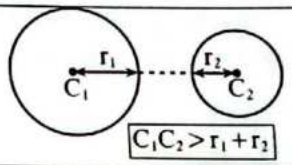
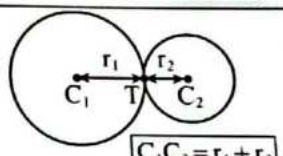
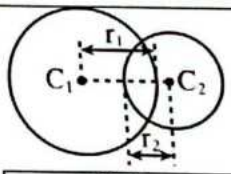
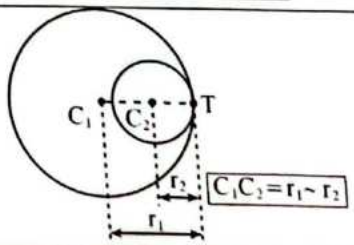
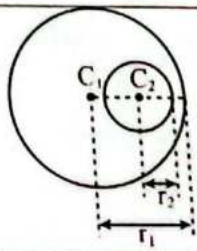
13. (ক) (2, 2) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [CB'22] [Ans: 4 একক]

T-14: বৃত্তের সাপেক্ষে বৃত্তের অবস্থান এবং ২টি বৃত্ত স্পর্শ করে সংক্রান্ত

08

Concept

- দুইটি বৃত্তের পারস্পরিক অবস্থান:

(i) বৃত্ত দুটি পরস্পরকে ছেদ করে না, স্পর্শও করে না:	 $C_1C_2 > r_1 + r_2$
(ii) বৃত্ত দুটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে: স্পর্শবিন্দু T, C_1C_2 কে $r_1 : r_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।	 $C_1C_2 = r_1 + r_2$
(iii) বৃত্ত দুটি পরস্পরকে ছেদ করে:	 $\lvert r_1 - r_2 \rvert < C_1C_2 < r_1 + r_2$
(iv) বৃত্ত দুটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে: স্পর্শবিন্দু T, C_1C_2 কে $r_1 : r_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।	 $C_1C_2 = \lvert r_1 - r_2 \rvert$
(v) একটি বৃত্ত অপর একটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত:	 চিত্রে, $C_1C_2 + r_2 < r_1$ $\Rightarrow C_1C_2 < r_1 - r_2$ $C_1C_2 < r_1 + r_2$ $C_1C_2 < r_1 - r_2$

Educationblog24.com

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25$ $g(x,y) = x^2 + y^2 + 6x - 6y - 31$ [DB'19]

(খ) দেখাও যে, $f(x,y) = 0$ ও $g(x,y) = 0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

(খ) **Sol^n:** $f(x,y) = x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$ ..... (i)

$g(x,y) = x^2 + y^2 + 6x - 6y - 31 = 0$ ..... (ii)

(i) ও (ii) বৃত্তকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

(i) নং বৃত্তের কেন্দ্র, $C_1(5,-3)$ এবং

ব্যাসার্ধ, $r_1 = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = 3$ একক

(ii) নং বৃত্তের কেন্দ্র, $C_2(-3,3)$ এবং

ব্যাসার্ধ, $r_2 = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = 7$ একক

এখন, $C_1C_2 = \sqrt{(5+3)^2 + (-3-3)^2} = 10$ একক,

এবং ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফল $= (3 + 7) = 10$ একক

যেহেতু $C_1C_2 = (r_1 + r_2)$, সেহেতু বৃত্তদ্বয় অবশ্যই পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। (দেখানো হল)

02. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ ..... (i) [CB'19]

$x^2 + y^2 = 4$ ..... (ii)

(খ) উদ্দীপকের বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** (i) বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$

$\therefore$ কেন্দ্র $(4,3)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 3$ একক

(ii) বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = 4$

$\therefore$ কেন্দ্র $(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 2$ একক

এদের স্পর্শবিন্দু $(4,3)$ ও $(0,0)$ এর সংযোজক রেখাকে $3:2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3\times0+2\times4}{3+2}, \frac{3\times0+2\times3}{3+2}\right)$

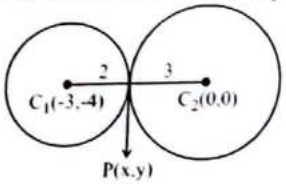
বা $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ **(Ans.)**

03. $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 = 0, x^2 + y^2 = 9, x + y = 6.$ [RB'17]

(খ) দেখাও যে, উদ্দীপকের বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে $\left(-\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

(খ) **Sol^n:** প্রথম বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \times 3 \times x + 2 \times 4 \times y + 21 = 0$



এখানে, $g = 3, f = 4, c = 21$

$\therefore$ কেন্দ্র $C_1(-3,-4)$ এবং

ব্যাসার্ধ, $r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2 - 21} = 2$ একক

আবার, দ্বিতীয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2$

$\therefore$ কেন্দ্র, $C_2 \equiv (0,0)$

ব্যাসার্ধ, $r_2 = 3$, ধরি, $P(x,y)$ বিন্দু C_1C_2 রেখাকে $2:3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে। $\therefore x = \frac{2\cdot0+3(-3)}{2+3} = \frac{-9}{5}$

আবার, $y = \frac{2\cdot0+3(-4)}{2+3} = \frac{-12}{5}$ $\therefore$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে $\left(\frac{-9}{5}, \frac{-12}{5}\right)$ বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। (দেখানো হলো)

04. (i) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ এবং (ii) $x^2 + y^2 =$ [নটর ডেম কলেজ, ময়মনসিংহ]

(খ) দেখাও যে, (i) ও (ii) নং বৃত্ত দুটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, (i) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$

এখানে, কেন্দ্র $C_1(4,3)$ এবং $C = 16$

$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r_1 = \sqrt{4^2 + 3^2 - 16} = 3$ একক

(ii) $x^2 + y^2 = 4$

কেন্দ্র $C_2(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r_2 = 2$

$C_1C_2 = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5$ একক

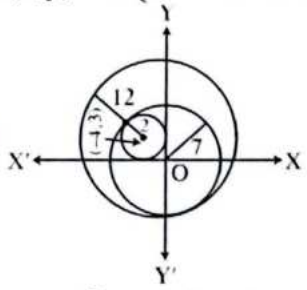
$= r_1 + r_2$

$\therefore$ (i) ও (ii) নং বৃত্ত দুটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

05. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 49; g(x,y) = x^2 + y^2 - 10x +$ [সরকারি বিজ্ঞান কলেজ, ঢাকা]

(গ) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(-4,3)$ এবং $f(x,y) = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

(গ) **Sol^n:**



প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = 49 = 7^2$

বৃত্তটির কেন্দ্র $(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 7$ একক

দেওয়া আছে, বৃত্তের কেন্দ্র $(-4,3)$

মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x+4)^2 + (y-3)^2 = r^2$ ..... (i)

বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= \sqrt{(0+4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ একক

কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ অপেক্ষা কম।

অতএব, বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করবে।

শর্তমতে, $|r - 7| = 5 \Rightarrow r - 7 = \pm5$

$\therefore r = \pm5 + 7 = 2, 12$

$r = 12$ হলে, (i) নং হতে পাই, $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 12^2$

$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 - 144 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + 8x - 6y - 119 = 0$ **(Ans.)**

$r = 2$ হলে, (i) নং হতে পাই, $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 2^2$

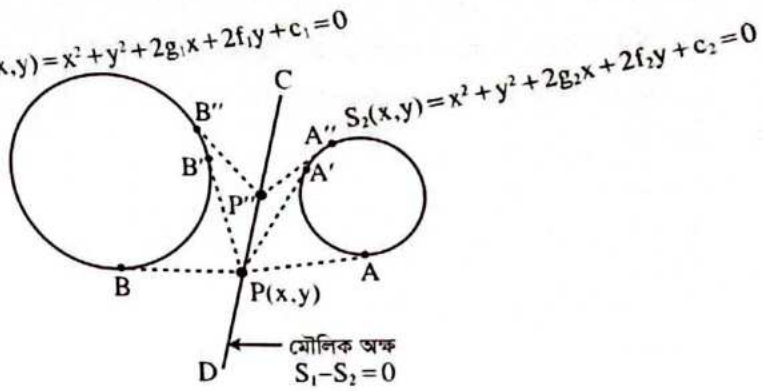
$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 - 4 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + 8x - 6y + 21 = 0$ **(Ans.)**

T-15: মৌলিক অক্ষ, সাধারণ জ্যা ও স্পর্শবিন্দুগামী সাধারণ স্পর্শক সম্পর্কিত

Concept

মৌলিক অক্ষ (Radical Axis): দুইটি বৃত্তের মৌলিক অক্ষ হলো এমন একটি সরলরেখা যার উপরস্থ যেকোনো বিন্দু থেকে বৃত্তদ্বয়ের উপর যতগুলো স্পর্শক অঙ্কন করা যায় তাদের দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান। যেমন: চিত্রে CD একটি সরলরেখা যার উপরস্থ যেকোনো বিন্দু P(x, y) হতে $S_1 = 0$ এবং $S_2 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের উপর যেকোনো স্পর্শক আঁকা হলে তাদের দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান। অর্থাৎ, PA = PB বা, PA′ = PB′ বা, PA″ = PB″ ইত্যাদি।



মৌলিক অক্ষের সমীকরণ নির্ণয়: আমরা জানি, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P(x, y) হতে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c}$

চিত্রে, $PA = PB \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2}$

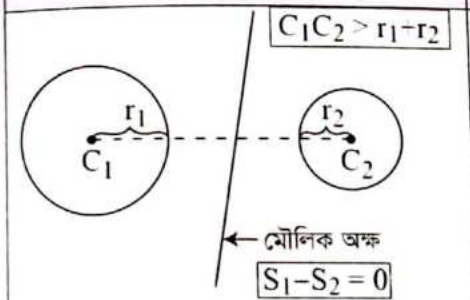
$\Rightarrow (x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1) - (x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2) = 0$

$\Rightarrow \boxed{S_1 - S_2 = 0}$ বা এভাবে লেখা যায়, $\boxed{S_1(x,y) - S_2(x,y) = 0}$

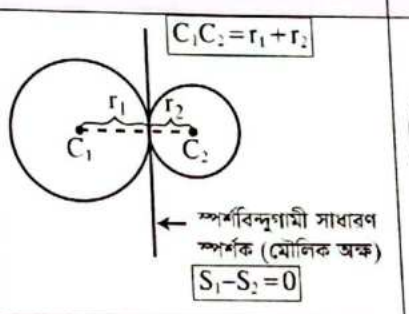
অর্থাৎ দুইটি বৃত্তের x^2 ও y^2 এর সহগ 1 (বা একই) রেখে বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণকে বিয়োগ করলেই মৌলিক অক্ষের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

বিভিন্ন ক্ষেত্রে মৌলিক অক্ষ:

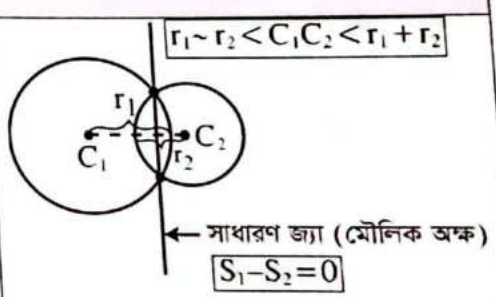
(i) স্পর্শ বা ছেদ করে না:



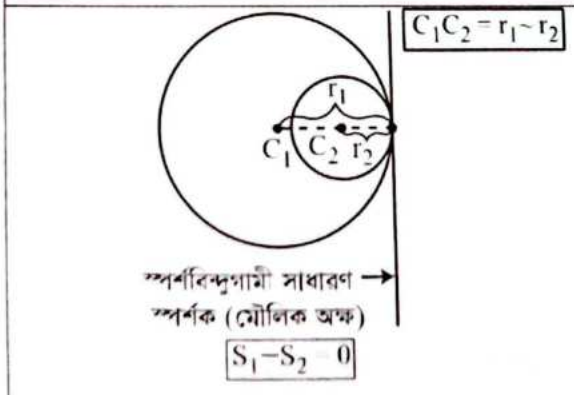
(ii) বহিঃস্পর্শ



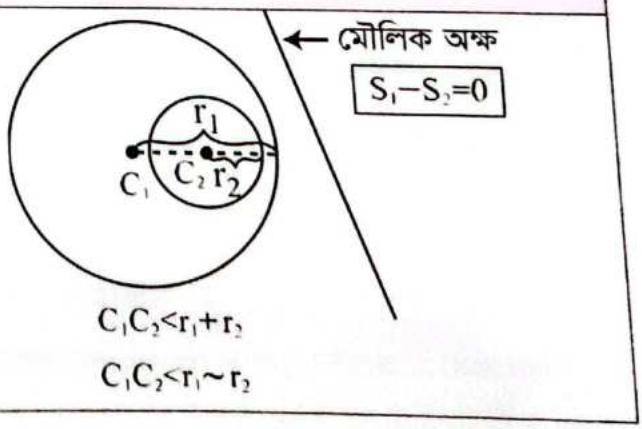
(iii) ছেদ করে:



(iv) অন্তঃস্পর্শ:



(v) বৃত্তের ভিতরে বৃত্ত:



সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ ..... (i) [CB'19]

$x^2 + y^2 = 4$ ..... (ii)

(গ) উদ্দীপকের বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ তৈরি করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

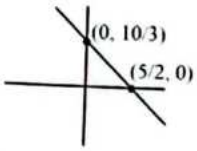
(গ) **Sol^n:** $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ ..... (i)

$x^2 + y^2 - 4 = 0$ ..... (ii)

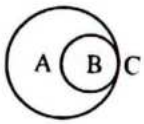
(ii) − (i) $\Rightarrow 8x + 6y - 20 = 0 \Rightarrow 4x + 3y = 10$

$\therefore \frac{2x}{5} + \frac{3y}{10} = 0 \therefore \frac{x}{5/2} + \frac{y}{10/3} = 0$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{10}{3} = \frac{25}{6}$ বর্গ একক



[উদ্দীপকের বৃত্ত দুটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করেছে। তাই সাধারণ জ্যা থাকা সম্ভব নয়। সাধারণ স্পর্শক ব্যবহার করে অঙ্কটি করা হয়েছে] **(Ans.)**

02. দৃশ্যকল্প-১: 

[নটর ডেম কলেজ, ঢাকা]

A বৃত্ত: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$; B বৃত্ত: $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং C বিন্দুগামী সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, A বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$

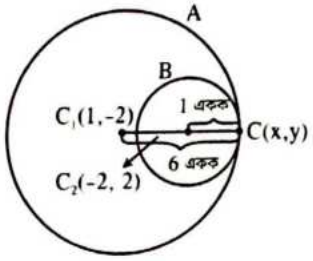
$\therefore$ কেন্দ্র $C_1(1, -2)$

ব্যাসার্ধ, $r_1 = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 - (-31)} = 6$ একক

B বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$

$\therefore$ কেন্দ্র $C_2(-2, 2)$

ব্যাসার্ধ, $r_2 = \sqrt{2^2 + (-2)^2 - 7} = 1$ একক



C(x, y) বিন্দুটি $C_1(1, -2)$ ও $C_2(-2, 2)$ এর সংযোজক সরলরেখাকে 6 : 1 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

$\therefore x = \frac{6\times(-2)-1\times1}{6-1} = \frac{-12-1}{5} = -\frac{13}{5}$

$y = \frac{6\times2-1(-2)}{6-1} = \frac{12+2}{5} = \frac{14}{5}$

$\therefore$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু, $C\left(-\frac{13}{5}, \frac{14}{5}\right)$

C বিন্দুগামী সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ,

$x\left(-\frac{13}{5}\right) + y\left(\frac{14}{5}\right) + 2\left(x - \frac{13}{5}\right) - 2\left(y + \frac{14}{5}\right) + 7 = 0$

$\Rightarrow -13x + 14y + 2(5x - 13) - 2(5y + 14) + 35 = 0$

$\Rightarrow -3x + 4y - 19 = 0 \therefore 3x - 4y + 19 = 0$ **(Ans.)**

T-16: বৃত্তের একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকলে জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

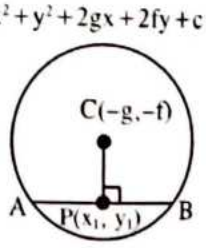
Steps:

(i) বৃত্তের সমীকরণ থেকে বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $C(-g, -f)$ নির্ণয় কর।

(ii) CP রেখার ঢাল নির্ণয় কর, $m_{CP} = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}$

(iii) CP এর উপর লম্ব AB রেখার ঢাল হবে, $m_{AB} = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}$

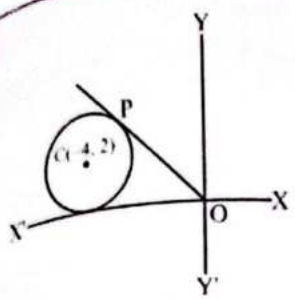
(iv) AB রেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m_{AB}(x - x_1) \therefore y - y_1 = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}(x - x_1)$



Shortcut: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের কোনো একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $P(x_1, y_1)$ হলে উক্ত জ্যা-এর সমীকরণ, $T = S_1$ [যেখানে, $T = xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$ এবং $S_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$]

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01.



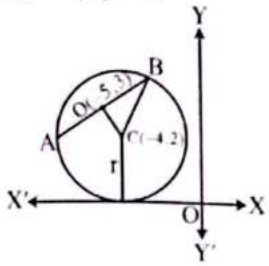
[JB'22]

(খ) বৃত্তটির একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু $(-5, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $C = (-4, 2)$

এটি x অক্ষকে স্পর্শ করে,

সুতরাং, ব্যাসার্ধ, $r = |k| = 2$



∴ বৃত্তটির সমীকরণ: $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

ধরি, AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু $O = (-5, 3)$

OC রেখাংশের সমীকরণ হলো: $\frac{x+4}{-4+5} = \frac{y-2}{2-3}$

$\Rightarrow x + 4 = -(y - 2) \Rightarrow x + y + 2 = 0$

∴ AB জ্যা এর সমীকরণ হলো: $x - y + k = 0$

এটি O বিন্দুগামী, $\therefore -5 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = 8$

∴ জ্যা এর সমীকরণ হলো: $x - y + 8 = 0$

02. (ii) $x^2 + y^2 = 4$ [নটর ডেম কলেজ, ময়মনসিংহ]

(ক) (ii) নং বৃত্তের একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $(-1, 1)$ হলে ঐ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** (ii) নং বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4 = 0$ বৃত্তটির জ্যা এর মধ্যবিন্দু $(-1, 1)$ হলে,

তার সমীকরণ: $x(-1) + y(1) - 4 = (-1)^2 + 1^2 - 4$

$\Rightarrow -x + y - 4 = 1 + 1 - 4 \therefore x - y + 2 = 0$ **(Ans.)**

T-17: বৃত্তের জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ

Concept

Process-01:

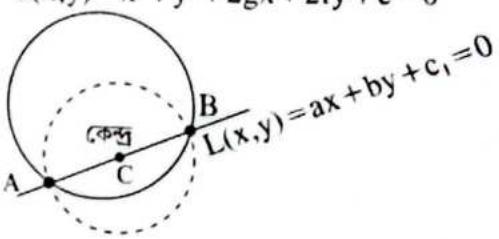
$S(x, y) = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের একটি জ্যা-এর সমীকরণ, $L(x, y) = ax + by + c_1 = 0$

উক্ত জ্যা-কে ব্যাস ধরে যে বৃত্ত আঁকা যাবে তা $S(x, y) = 0$ এবং $L(x, y) = 0$ এর ছেদবিন্দুগামী বৃত্ত।

তাহলে, বৃত্তটির সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + k(ax + by + c_1) = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

বা, $S + k \cdot L = 0$



(i) নং বৃত্তের কেন্দ্র $ax + by + c_1 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত শর্তে k এর মান নির্ণয় করে (i) নং সমীকরণে বসালে কাঙ্ক্ষিত বৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

Process-2:

(i) বৃত্ত এবং প্রদত্ত জ্যায়ের ছেদবিন্দুদ্বয় A এবং B নির্ণয় করতে হবে।

(ii) A এবং B কে ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$;

$x^2 + y^2 + 8x + y + 10 = 0$ [Ctg.B'23]

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যাকে বৃত্তের ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** বৃত্ত দুটির সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

$x^2 + y^2 + 8x + y + 10 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

∴ সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ

$\Rightarrow 2x - y + 4 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (iii) [(i) − (ii) হতে]

সমীকরণ (i) ও (iii) এর ছেদবিন্দুগামী বৃত্ত

$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 + k(2x - y + 4) = 0$

$[S_1 + kL = 0]$

Educationblog24.com

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (6 + 2k)x + (2 - k)y + 6 + 4k = 0$

এখানে কেন্দ্র $\left(-\frac{6+2k}{2}, -\frac{2-k}{2}\right)$ যা সমীকরণ (iii) এর উপর অবস্থিত।

$\therefore$ (iii) নং হতে, $2 \times \left(-\frac{6+2k}{2}\right) - \frac{2-k}{2} + 4 = 0$

$\Rightarrow -6 - 2k + 1 - \frac{k}{2} + 4 = 0$

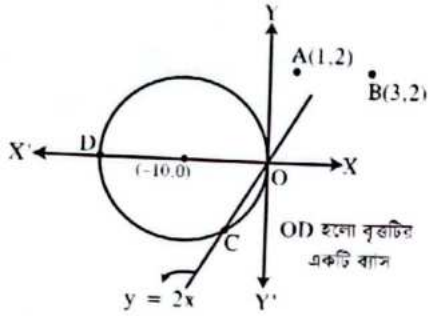
$\Rightarrow -\frac{5}{2}k - 1 = 0 \therefore k = -\frac{2}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + \left\{6 + 2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)\right\}x + \left(2 + \frac{2}{5}\right)y + 6 + 4\left(-\frac{2}{5}\right) = 0$

$x^2 + y^2 + \frac{26}{5}x + \frac{12}{5}y + \frac{22}{5} = 0$

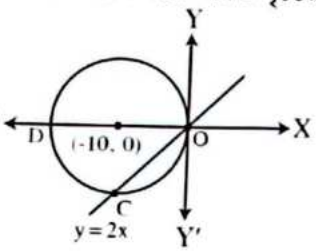
$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 + 26x + 12y + 22 = 0$

02.



[RB'22]

(খ) OC জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।



(খ) **Sol^n:** OD বৃত্তের ব্যাস $\therefore$ কেন্দ্র $(-10, 0)$, বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = |\text{কেন্দ্রের ভুজ}| = |-10| = 10$

$\therefore$ OD ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্ত s_1 এর সমীকরণ।

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$\Rightarrow (x + 10)^2 + (y - 0)^2 = 10^2$

$\Rightarrow x^2 + 20x + 100 + y^2 = 100$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 20x = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

আবার, $y = 2x$ এর সাথে s_1 বৃত্তের ছেদবিন্দু নির্ণয়ের ক্ষেত্রে

$x^2 + (2x)^2 + 20x = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x^2 + 20x = 0$ [$y = 2x$ বসিয়ে]

$\Rightarrow 5x^2 + 20x = 0 \Rightarrow 5x(x + 4) = 0 = x(x + 4) = 0$

হয়, $x = 0$ অথবা, $x + 4 = 0 \therefore x = -4$

$x = 0$ হলে, $y = 2 \times 0 = 0$

$x = -4$ হলে, $y = 2 \times (-4) = -8$

$\therefore s_1$ বৃত্ত ও $y = 2x$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $O(0,0)$ এবং $C(-4, -8)$ এখন, OC জ্যা কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

$\Rightarrow (x - 0)\{x - (-4)\} + (y - 0)\{y - (-8)\} = 0$

$\Rightarrow x(x + 4) + y(y + 8) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x + y^2 + 8y = 0 \therefore x^2 + y^2 + 4x + 8y = 0$

ইহাই OC জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ।

03. উদ্দীপক-২: $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 1 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ। [CB'22]

(গ) উদ্দীপক-২ এ উল্লিখিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

বৃত্তে (i) এর কেন্দ্র, $C_1(-2, -2)$

বৃত্ত (ii)এর কেন্দ্র, $C_2\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$

বৃত্ত (i) এর ব্যাসার্ধ,

$r_1 = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 - 1} = \sqrt{7} \approx 2.6457$ একক

বৃত্ত (ii) এর ব্যাসার্ধ,

$r_2 = \sqrt{(2)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{\sqrt{17}}{2} \approx 2.06$ একক

কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$C_1C_2 = \sqrt{(-2 + 2)^2 + \left(-2 + \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$ একক

যেহেতু, ব্যাসার্ধদ্বয়ের পার্থক্য,

$\Delta r = (r_1 - r_2) = (2.65 - 2.06) = 0.33$ একক

যেহেতু $C_1C_2 > \Delta r$; অতএব, বৃত্ত r_2, r_1 এর ভেতরে অবস্থান করে, তাই এদের সাধারণ জ্যা নেই।

নিজে করো

04. দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 - 12x + 16y - 69 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 9x + 12y - 59 = 0$ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ। [JB'23]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

05. দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 6 = 0$ [Din.B'23]

$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 2 = 0$

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে বৃত্ত দুটির সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $x^2 + y^2 + 3x + y = 0$]

06. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ ও $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ। [Din.B'22]

(গ) উদ্দীপকে বর্ণিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $2x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$]

Educationblog24.com

MCQ প্রশ্নের জন্য এই অধ্যায়ের বিভিন্ন টাইপের তুলনামূলক গুরুত্ব:

গুরুত্ব	টাইপ	টাইপের নাম	যতবার প্রশ্ন এসেছে	যে বোর্ডে যে বছর এসেছে MCQ
০০০	T-01	বৃত্তের কেন্দ্র, ব্যাসার্ধ ও ক্ষেত্রফল নির্ণয়	28	RB'23, 17; SB'23, 22; BB'23, 22, 19, 17; JB'23, 17; CB'23, 22, 19, 17; Din.B'23, 22, 19, 17; MB'23; Mad.B'23; All B'18; DB'17
০	T-02	বৃত্ত হওয়ার শর্ত	02	CB'22; RB'17
০০০	T-03	বৃত্তের পোলার ও পরামিতিক সমীকরণ সম্পর্কিত	07	DB'23, 19; SB'23; Ctg.B'23; Mad.B'23; JB'22; MB'22
০	T-04	বৃত্তের কেন্দ্র দেওয়া আছে এবং অন্য কোনো বিন্দু দিয়ে যায়	01	DB'23
০০০	T-05	বৃত্ত অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ বা ছেদ সংক্রান্ত	18	DB'23, 22, 17; RB'23, 19; Ctg.B'23, 22, 19, 17; SB'23, 22, 17; JB'23, 19; BB'23, 22; Din.B'22, 17
০	T-06	ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দেওয়া থাকলে তা থেকে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত	02	Mad.B'23; SB'17
	T-07	তিন বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়	-	-
০	T-08	বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় যার কেন্দ্র নির্দিষ্ট রেখার উপর অবস্থিত	02	DB'23; JB'23
	T-09	ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ	-	-
০০	T-10	বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট রেখাকে স্পর্শ করা শর্ত ও তা হতে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত	03	BB'23; Din.B'23; Ctg.B'22
০০	T-11	বিভিন্ন শর্ত সাপেক্ষে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়	05	DB'23; Ctg.B'23; CB'23; RB'22; JB'22
০	T-12	বৃত্তের উপরস্থ কোনো বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ	02	JB'22; MB'22
০০	T-13	বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু হতে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শক সংক্রান্ত	08	Ctg.B'23; BB'23, 22, 17; CB'23; Din.B'23, 19; SB'22
	T-14	বৃত্তের সাপেক্ষে বৃত্তের অবস্থান এবং ২টি বৃত্ত স্পর্শ করে সংক্রান্ত	-	-
০০	T-15	মৌলিক অক্ষ, সাধারণ জ্যা ও স্পর্শবিন্দুগামী সাধারণ স্পর্শক সম্পর্কিত	05	SB'23; DB'22, 19, 17; JB'19
০	T-16	বৃত্তের একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকলে জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত	02	Din.B'23
	T-17	বৃত্তের জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ	-	-

Educationblog24.com

বিগত বোর্ড পরীক্ষাসমূহের MCQ প্রশ্ন

01. $r = 2a\cos\theta$ বৃত্তের- [DB'23]
(i) কেন্দ্র $(a, 0)$ (ii) ব্যাসার্ধ $2a$
(iii) x-অক্ষ হতে ছেদাংশের পরিমাণ $2a$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

02. $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তের $(-1, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [DB, Ctg.B'23]
(a) $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ (b) $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$
(c) $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$ (d) $\sqrt{3}x - y - 4 = 0$

03. বিন্দু বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? [DB'23]
(a) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$
(d) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$

04. $(1, 0)$ এবং $(0, 2)$ বিন্দুদ্বয়গামী এবং x-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ কোনটি? [DB'23]
(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{41}}{2}$ (d) $\frac{25}{4}$

05. $2x^2 + 2y^2 - 2x - 4y - 22 = 0$ বৃত্ত দ্বারা y- অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য কোনটি? [DB'23, 22 JB'23, 19, Din.B'22]
(a) $3\sqrt{5}$ (b) $4\sqrt{3}$ (c) $2\sqrt{23}$ (d) $2\sqrt{26}$

06. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ বৃত্তের ক্ষেত্রে [Ra
(i) বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 2 একক
(ii) বৃত্তটির একটি স্পর্শক $y = 1$
(iii) বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii,
নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও
$4(x^2 + y^2) = 16x + 12y - 5$ একটি বৃত্ত

07. বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত? [RB, MB'23, C
Din.B'22, CB, BB'19, All.B'18, RB
(a) $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ (b) $\left(2, \frac{3}{2}\right)$
(c) $(2, 3)$ (d) $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$

08. বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিত অংশের পরিমাণ কত একক? [RB'23, DB
(a) $\sqrt{11}$ (b) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ (c) $2\sqrt{11}$ (d) $\frac{\sqrt{11}}{4}$

09. $x^2 + y^2 + 12x - 4y + 31 = 0$ সমীকরণবিশিষ্ট বৃ
ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [RB
(a) 2π (b) 3π (c) 9π (d) 6π

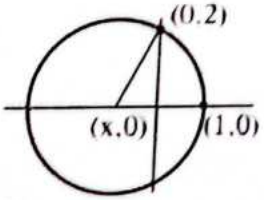
MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

01. b	02. a	03. b	04. b	05. b	06. a	07. b	08. a	09. c

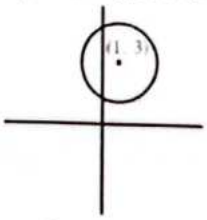
01. $r = 2a\cos\theta \Rightarrow r^2 = 2ar\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2ax$
$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow (x - a)^2 + y^2 = a^2$ এর কেন্দ্র $(a, 0)$, ব্যাসার্ধ $= a$ এবং x-অক্ষের কর্তিতাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{(-a)^2 - 0}$
$= 2a$ একক। সুতরাং সঠিক উত্তর হলো (i) ও (iii)

02. $xx_1 + yy_1 - r^2 = 0$ হবে নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ।
$x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তে $r^2 = 4 \therefore (-1, \sqrt{3})$
বিন্দুতে স্পর্শক: $-x + \sqrt{3}y - 4 = 0 \Rightarrow x - \sqrt{3}y + 4 = 0$

03. কেবল (b) অপশনের জন্য ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 - 2} = 0$ হয়, অর্থাৎ এটি বিন্দুবৃত্ত।

04.


ধরি, কেন্দ্র $(x, 0)$;
প্রশ্নমতে, $\sqrt{(x-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 0^2}$
$\Rightarrow x^2 + 4 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$
$\therefore$ কেন্দ্র $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ $\therefore$ ব্যাসার্ধ $= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}$ একক

06. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ বৃত্তকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এ
সঙ্গে তুলনা করে পাই, $g = -1, f = -3, c = 6$
$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 - 6} = 2$ একক
সঠিক। বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ অর্থাৎ, $(1, 3)$; এখন, $\left|\frac{3-1}{\sqrt{1^2}}\right| = 2 = r$, (ii) সঠি
প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণটি কর্তৃক y অক্ষের খণ্ডিতাংশ
$= 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{(-3)^2 - 6} = 2\sqrt{3} \neq 0 \therefore$ (iii) সঠিক নয়।


08. $g = -2, f = -\frac{3}{2}$ এবং $c = \frac{5}{4}$
$\therefore$ x অক্ষ দ্বারা খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{(-2)^2 - \frac{5}{4}}$
$= 2\sqrt{4 - \frac{5}{4}} = \sqrt{11}$ একক

09. $x^2 + y^2 + 12x - 4y + 31 = 0$ কে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এ
সঙ্গে তুলনা করলে, $g = 6, f = -2$ এবং $c = 31$
$\therefore$ ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{6^2 + (-2)^2 - 31} = 3$ একক
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = 9\pi$ বর্গ একক।

Educationblog24.com

10. $r^2 + 2r\cos\theta + 4r\sin\theta = 3$ বৃত্তটির কেন্দ্রের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক কত? [Ctg.B'23, JB'22]
(a) $(-1,-2)$ (b) $(-2,-4)$
(c) $(1,2)$ (d) $(2,4)$

11. $(1,-1)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 7 = 0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য– [BB'23; Ctg.B, CB'23; RB, BB'22,17; SB'22, Din.B'19]
(a) 18 (b) 9 (c) 6 (d) 3

12. $(3,4)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x- অক্ষকে স্পর্শ করলে উহার ব্যাসার্ধ কত? [Ctg.B'23, 17]
(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 7

13. $2x^2 + 2y^2 - 12x - 8y = 14$ বৃত্তের- [SB, Ctg.B'23]
(i) কেন্দ্র $(3,2)$ (ii) ব্যাসার্ধ $2\sqrt{5}$ একক
(iii) y- অক্ষ দ্বারা খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{11}$ একক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

14. পোলার স্থানাঙ্কে $r^2 - 2r\sin\theta = 3$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত? [SB'23]
(a) 2 একক (b) 3 একক (c) 4 একক (d) 6 একক

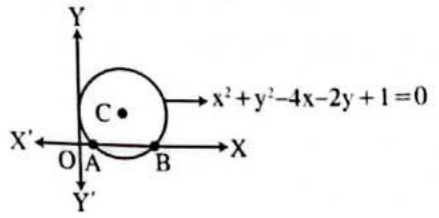
15. $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ বৃত্তের ক্ষেত্রে— [SB'23]
(i) কেন্দ্র $(-3,2)$ (ii) ব্যাসার্ধ = 4
(iii) মূলবিন্দুটি বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$ এবং
$3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 3 = 0$ দুটি বৃত্তের সমীকরণ।

16. ২য় বৃত্তের দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য কত? [SB'23]
(a) $3\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

17. বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ- [SB'23, DB'22, 19, 17, JB'19]
(a) $x - y - 6 = 0$ (b) $x + y + 6 = 0$
(c) $x + y - 6 = 0$ (d) $x - y + 6 = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



18. প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র C হলো- [BB, CB'23, 17]
(a) $(1,1)$ (b) $(2,2)$ (c) $(1,2)$ (d) $(2,1)$

19. AB এর দৈর্ঘ্য কত? [BB'23]
(a) 2 একক (b) 4 একক
(c) $2\sqrt{3}$ একক (d) $\sqrt{3}$ একক

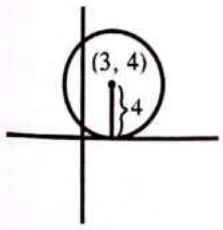
08

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

10. a	11. d	12. b	13. d	14. a	15. d	16. c	17. c	18. d	19. c

10. $r^2 + 2r\cos\theta + 4r\sin\theta = 3$
$\Rightarrow (\sqrt{x^2+y^2})^2 + 2x + 4y = 3$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2\cdot1\cdot x + 2\cdot2\cdot y - 3 = 0$
$\therefore$ কেন্দ্র $(-g,-f) \equiv (-1,-2)$

11. $\sqrt{1^2 + (-1)^2 - 2\cdot1 - 2(-1) + 7}$
$= \sqrt{1+1-2+2+7} = \sqrt{9} = 3$ একক।

12. 

$\therefore$ চিত্র হতে বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 4 একক।

13. $2x^2 + 2y^2 - 12x - 8y = 14$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y - 7 = 0$ এখানে, $g = -3, f = -2, c = -7$
$\therefore$ কেন্দ্র $= (-g,-f) \equiv (3,2)$; ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2+f^2-c}$
$= \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 7} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ একক।
y অক্ষ দ্বারা খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{f^2-c} = 2\sqrt{(-2)^2+7} = 2\sqrt{11}$ একক।

14. $r^2 - 2r\sin\theta = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$
$\therefore$ ব্যাসার্ধ হবে $= \sqrt{g^2+f^2-c} = \sqrt{0^2 + (-1)^2 - (-3)} = 2$ একক।

15. $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ এর কেন্দ্র $(-g,-f) \equiv (-3,2)$
ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2+f^2-c} = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + 3} = \sqrt{16} = 4$ একক
$\therefore s(0,0) = 0^2 + 0^2 + 6\cdot0 - 4\cdot0 - 3 < 0$ অর্থাৎ, $(0,0)$ বিন্দুটি বৃত্তের ভেতরে অবস্থান করে।

16. $3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 3 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3y - 1 = 0$ এর ক্ষেত্রে $g = -1, f = -\frac{3}{2}, c = -1$
$\therefore$ x অক্ষ হতে খণ্ডিত অংশ $= 2\sqrt{g^2-c} = 2\sqrt{(-1)^2+1} = 2\sqrt{2}$ একক।

17. $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$ ..... (i)
এবং $3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 3 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3y - 1 = 0$ ..... (ii)
(i) – (ii) করে পাই, $x + y - 6 = 0$ যা হলো বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা।

18. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ কে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সঙ্গে তুলনা করলে,
$g = -2, f = -1, c = 1 \therefore$ কেন্দ্র $C(-g,-f)$ বা $(2,1)$

19. $g = -2, f = -1, c = 1$
$\therefore AB = x$ অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{g^2-c}$
$= 2\sqrt{(-2)^2-1} = 2\sqrt{4-1} = 2\sqrt{3}$ একক।

Educationblog24.com

20. $(2, -3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং $y = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে এমন বৃত্তের সমীকরণ হল— [BB, JB, Din.B'23]

(a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$
(d) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 + y^2 + 8x - 12y + 2 = 0$

21. বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত একক? [JB'23]

(a) $2\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{6}$ (c) 4 (d) $5\sqrt{2}$

22. $2x - y + K = 0$ রেখাটি যদি $x^2 + y^2 - 12x + 5 = 0$ বৃত্তের ব্যাস হয় তবে K এর মান কোনটি? [JB'23]

(a) 24 (b) 12 (c) -12 (d) -24

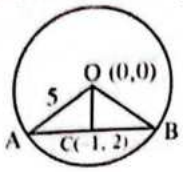
23. কোন শর্তে $y = mx + c$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে? [CB'23]

(a) $r^2 = m^2 + c^2$ (b) $c^2 = r^2(1 + m^2)$
(c) $m^2r^2 = r^2 - c^2$ (d) $c^2 + r^2 = m^2$

24. $(-2, -1)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কোনটি? [Din.B'23]

(a) $\sqrt{10}$ একক (b) $2\sqrt{5}$ একক
(c) $\sqrt{24}$ একক (d) $5\sqrt{2}$ একক

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



C, AB জ্যায়ের মধ্যবিন্দু

25. AB জ্যায়ের সমীকরণ কোনটি? [Din.B'23]

(a) $x + 2y - 3 = 0$ (b) $2x + y = 0$
(c) $2x - y + 4 = 0$ (d) $x - 2y + 5 = 0$

26. AB জ্যায়ের দৈর্ঘ্য কোনটি? [Din.B'23]

(a) $4\sqrt{5}$ একক (b) $2\sqrt{6}$ একক
(c) $5\sqrt{2}$ একক (d) $2\sqrt{5}$ একক

27. কোনটি বৃত্তের সমীকরণ? [MB'23]

(a) $x^2 + 9y^2 = 144$ (b) $y^2 = 16x$
(c) $3x^2 + 5y^2 + 5 = 0$ (d) $x^2 + y^2 = 16$

28. কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দুইটি $(4, 3)$ ও $(2, 0)$ হলে— [Mad.B'23]

(i) বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 6x - 3y + 8 = 0$
(ii) বৃত্তটির কেন্দ্র $(1, 3)$
(iii) বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিত অংশ 2

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

29. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + p = 0$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 2 হলে, p এর মান কত? [Mad.B'23]

(a) 9 (b) 21 (c) 23 (d) 25

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

20. a	21. d	22. c	23. b	24. b	25. d	26. a	27. d	28. b	29. b

20. **Sol^n: (a):** $y = 0$ রেখা তথা x অক্ষকে স্পর্শ করে বলে $r = |-3| = 3$
$\therefore$ সমীকরণ: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

21. এখানে, $g = \frac{8}{2} = 4, f = \frac{-12}{2} = -6, c = 2$
$\therefore$ ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4^2 + (-6)^2 - 2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ একক

22. $x^2 + y^2 - 12x + 5 = 0$ এর কেন্দ্র হলো $(6, 0)$ তাহলে, $(6, 0)$ বিন্দুটি $2x - y + K = 0$ কে সিদ্ধ করে।
তাহলে $2 \times 6 - 0 + K = 0 \Rightarrow K = -12$

23. $y = mx + c$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত: $c = \pm r\sqrt{1 + m^2} \Rightarrow c^2 = r^2(1 + m^2)$

24. $(-2, -1)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ এর স্পর্শকের দৈর্ঘ্য
$S = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 - 6 \times (-2) + 2 \times (-1) + 5} = 2\sqrt{5}$ একক।

25. $m_{OC} = \frac{2-0}{-1-0} = -2; m_{OC} \times m_{AB} = -1 \Rightarrow m_{AB} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$
AB এর সমীকরণ: $(y - 2) = \frac{1}{2}(x + 1)$
$\Rightarrow 2y - 4 = x + 1 \therefore x - 2y + 5 = 0$

26. $OC = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{5}$
$AB = 2 \times \sqrt{OA^2 - OC^2} = 2\sqrt{5^2 - (\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$ একক।

28. (i) বৃত্তের সমীকরণ: $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$
$\Rightarrow (x - 4)(x - 2) + (y - 3)(y - 0) = 0$
$\Rightarrow x^2 - 4x - 2x + 8 + y^2 - 3y = 0$
$\therefore x^2 + y^2 - 6x - 3y + 8 = 0$
(ii) বৃত্তটির কেন্দ্র হলো $\left(\frac{-6}{-2}, \frac{-3}{-2}\right) \equiv \left(3, \frac{3}{2}\right)$
(iii) x অক্ষের খণ্ডিত অংশ $= 2\sqrt{g^2 - c}$
$= 2\sqrt{(-3)^2 - 8} = 2$ অর্থাৎ (ii) নং সঠিক নয়, (i) ও (iii) নং সঠিক।

29. দেওয়া আছে, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 6x + 8y + p = 0$; বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = 2$
$\Rightarrow \sqrt{3^2 + 4^2 - p} = 2$
$\Rightarrow \left(\sqrt{3^2 + 4^2 - p}\right)^2 = 2^2 \therefore p = 21$

Educationblog24.com

30. একটি বৃত্তের পোলার সমীকরণ $r = 6$ হলে, বৃত্তটির-
(i) কেন্দ্র $(0, 0)$ [Mad.B'23]
(ii) কার্তেসীয় সমীকরণ $x^2 + y^2 - 36 = 0$
(iii) ব্যাস 6
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

31. $4x + 3y = a$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে – [RB'22]
(i) বৃত্তের কেন্দ্র $(2,0)$ (ii) বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4
(iii) a এর মান 18 অথবা -2
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

32. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ বৃত্তটি স্পর্শ করে- [Ctg.B'22]
(a) x-অক্ষকে (b) y-অক্ষকে
(c) উভয় অক্ষকে (d) মূলবিন্দুকে

33. $x + y = 4$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? [Ctg.B'22]
(a) $(1, 3)$ (b) $(3, 1)$ (c) $(3, 2)$ (d) $(2, 5)$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে।

34. c-এর মান কত? [SB'22; RB'19]
(a) 9 (b) 3 (c) 4 (d) 2

35. স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [SB'22; RB'19]
(a) $(3, 0)$ (b) $(0, 3)$ (c) $(2, 0)$ (d) $(0, 2)$

36. $3x - 4y + 4 = 0$ এবং $6x - 8y - 7 = 0$ সরলরেখাদ্বয় একই বৃত্তের স্পর্শক হলে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ- [SB'22]
(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{5}{7}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{5}{6}$

37. $(8, -10)$ বিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত x- অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের ব্যাস কত একক? [BB, Din.B'22; CB'19; All B'18]
(a) 8 (b) 10 (c) 16 (d) 20

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 - 12x + 8y + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

38. c এর মান কত? [BB'22]
(a) -6 (b) 4 (c) 16 (d) 36

39. স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [BB'22]
(a) $(0, -4)$ (b) $(0, 4)$ (c) $(6, 0)$ (d) $(-6, 0)$

40. $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের $(4, 3)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [JB, MB'22]
(a) $3x + 4y - 25 = 0$ (b) $3x + 4y + 25 = 0$
(c) $4x + 3y - 25 = 0$ (d) $4x + 3y + 25 = 0$

41. $y = mx + c$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত- [JB'22]
(a) $c = -25\sqrt{1 + m^2}$ (b) $c = 25\sqrt{1 + m^2}$
(c) $c = \pm 5\sqrt{1 + m^2}$ (d) $c = \pm 5\sqrt{1 - m^2}$

42. নিচের কোন শর্তে $ax^2 + by^2 = c$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে? [CB'22]
(a) $c = 0$ (b) $c = r^2$
(c) $a \neq b$ (d) $\frac{a}{b} = 1, b \neq 0$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

30. a	31. c	32. a	33. b	34. a	35. b	36. c	37. d	38. d	39. c	40. c	41. c	42. d

30. (ii) $r = 6 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 6 \therefore x^2 + y^2 = 36$ (যা বৃত্তের সমীকরণ)
(i) কেন্দ্র হলো (0,0), (iii) বৃত্তটির ব্যাস হলো $= 2 \times 6 = 12$ একক। অর্থাৎ (iii) নং সঠিক নয়, (i) ও (ii) নং সঠিক।

31. $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $= (2, 0)$,
ব্যাসার্ধ $= \sqrt{2^2 - 0} = 2$ একক।
$\therefore (2,0)$ হতে $4x + 3y - a = 0$ এর লম্ব দূরত্ব $= 2$
$\Rightarrow \frac{|2\times4-a|}{5} = 2 \Rightarrow 8 - a = \pm 10 \Rightarrow a = \pm 10 + 8 = 18$ বা -2
$\therefore$ (i) ও (iii) সঠিক।

32. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ এর কেন্দ্র $= (2, 5)$, ব্যাসার্ধ
$= \sqrt{4 + 25 - 4} = 5$
$\because$ ব্যাসার্ধ = |কোটি|, $\therefore$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

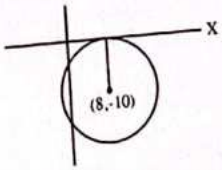
33. $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0$ এর কেন্দ্র $(6, 4)$
$x + y = 4$ এর লম্ব রেখার সমীকরণ $x - y + k = 0$ যা $(6, 4)$ বিন্দুগামী।
$\therefore k = -2, \therefore x + y = 4$ এবং $x - y = 2$ সমাধান করে পাই,
$(x, y) = (3, 1)$

34. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ এর কেন্দ্র $= (2, 3)$
যেহেতু y অক্ষকে স্পর্শ করে, $2\sqrt{f^2 - c} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{(-3)^2 - c} = 0$
$\Rightarrow c = 9$

35. y অক্ষকে স্পর্শ করলে $x = 0 \therefore y^2 - 6y + 9 = 0 \Rightarrow (y - 3)^2 = 0$
$\Rightarrow y = 3 \therefore$ স্পর্শবিন্দু $(0, 3)$

36. $3x - 4y + 4 = 0$ বা $6x - 8y + 8 = 0$ এবং $6x - 8y - 7 = 0$
রেখাদ্বয়ের দূরত্ব $= \frac{|8+7|}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ একক
$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস $= \frac{3}{2}$ একক, $\therefore$ ব্যাসার্ধ $= \frac{3}{4}$ একক।

37. x অক্ষকে স্পর্শ করে $\therefore r = |$বৃত্তের কেন্দ্রের কোটি$| = |-10| = 10$ একক
$\therefore$ ব্যাস, $d = 2r = 20$ একক



38. $x^2 + y^2 - 12x + 8y + c = 0$ বৃত্তটির x অক্ষকে স্পর্শ করে।
$\therefore 2\sqrt{g^2 - c} = 0 \Rightarrow g^2 = c$ | $g = -6$
$\Rightarrow (-6)^2 = c \therefore c = 36$ | $f = 4$

39. $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 36 = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করলে স্পর্শবিন্দুতে, $y = 0$
$\therefore x^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow (x - 6)^2 = 0 \Rightarrow x = 6 \therefore$ স্পর্শবিন্দু $= (6, 0)$

40. $x^2 + y^2 = 25$ এর $(4, 3)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ:
$x \cdot 4 + y \cdot 3 = 25 \Rightarrow 4x + 3y - 25 = 0$

Educationblog24.com

43. $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$ বৃত্তের y-অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কোনটি? [RB, BB, JB, CB'22; SB, BB'19; JB'17]
(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 32

44. $(-2,3)$ বিন্দুতে কেন্দ্র এবং y- অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? [Din.B'22]
(a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$
(d) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

নিচের উদ্দীপকের সাহায্যে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

45. বৃত্তটি x- অক্ষকে যে বিন্দুতে স্পর্শ করে তা হলো [MB'22]
(a) (1,0) (b) (0,1) (c) $(-1,1)$ (d) (1,1)

46. বৃত্তটির ব্যাসার্ধ– [MB'22]
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 2 (d) 3

47. $x^2 + y^2 = 9$ এবং $x^2 + y^2 + 6x + 8y + c = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে c এর মান কত? [DB'22, 19]
(a) -39 (b) -21 (c) 39 (d) 21

48. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ বৃত্তটি- [DB'22; Ctg.B'
(i) মূলবিন্দুগামী
(ii) x-অক্ষ থেকে 4 একক অংশ খণ্ডন করে
(iii) y-অক্ষকে $(0,-6)$ বিন্দুতে ছেদ করে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

49. $r = 2\cos\theta$ পোলার সমীকরণটি নির্দেশ করে- [MB'22; DB'
(a) সরলরেখা (b) পরাবৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) বৃত্ত

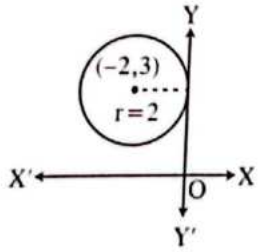
50. (2, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x- অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ কত একক? [Ctg.B'
(a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) $2\sqrt{5}$ (d) 5

51. A(1, 2) ও B(2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি? [SB'
(a) $x^2 + y^2 - 3x - 5y + 8 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 3x + 5y + 8 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 3x + 5y + 8 = 0$
(d) $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 8 = 0$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

43. b	44. a	45. a	46. b	47. d	48. a	49. d	50. c	51. a

43. $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0 \therefore f = 4$
এবং $c = 0 \therefore$ y অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{(4)^2 - 0}$
$= 2 \times 4 = 8$ একক

44.


∵ বৃত্তের কেন্দ্র $(-2, 3)$ এবং বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে।
∴ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = |কেন্দ্রের ভুজ| = |−2| = 2 একক।
∴ বৃত্তের সমীকরণ, $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$
$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 4 \therefore x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

45. x-অক্ষে $y = 0 \therefore$ Option Check $\therefore (1, 0)$

46. $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{1 + 1 - 1} = 1$ একক

47. $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2$
বৃত্তের কেন্দ্র $c_1(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r_1 = 3$ একক
$x^2 + y^2 + 6x + 8y + c = 0$; বৃত্তের কেন্দ্র, $c_2\left(\frac{6}{-2}, \frac{8}{-2}\right) \equiv (-3, -4)$ এবং
ব্যাসার্ধ, $r_2 = \sqrt{3^2 + 4^2 - c} = \sqrt{25 - c}$
বৃত্তদ্বয় বহিঃস্পর্শ করলে, $c_1c_2 = r_1 + r_2$
$\Rightarrow \sqrt{(0 + 3)^2 + (0 + 4)^2} = 3 + \sqrt{25 - c}$
$\Rightarrow 5 = 3 + \sqrt{25 - c} \Rightarrow 2 = \sqrt{25 - c}$
$\Rightarrow 4 = 25 - c \Rightarrow c = 25 - 4 \therefore c = 21$ (Ans.)

48. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ বৃত্তের জন্য,
$g = \frac{-4}{2} = -2, f = \frac{-6}{2} = -3, c = 0$
(i) $c = 0 \therefore$ বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী (ii) বৃত্তটি x অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c}$
$= 2\sqrt{(-2)^2 - 0} = 2 \times 2 = 4$ একক
(iii) বৃত্তটি y অক্ষকে যেখানে ছেদ করে তার $x = 0$; বৃত্তের সমীকরণে $x = 0$ বসালে পাই, $0^2 + y^2 - 4 \times 0 - 6y = 0 \Rightarrow y(y - 6) = 0 \therefore y = 0, 6$
∴ y অক্ষের ছেদবিন্দু (0,0), (0,6)

49. $r = 2\cos\theta \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$

50. বৃত্তের সমীকরণ: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$
∴ y অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $= 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{(-3)^2 - 4} = 2\sqrt{5}$ একক।

51. $(x - 1)(x - 2) + (y - 2)(y - 3) = 0$
$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 + y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 3x - 5y + 8 = 0$

Educationblog24.com

নিচের উদ্দীপকের সাহায্যে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

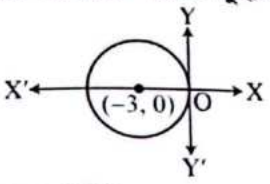
52. বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত? [Din.B'19]
(a) $5\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{30}$ (c) $2\sqrt{5}$ (d) $\sqrt{10}$

53. বৃত্তের উপর $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [Din.B'19; CB, BB'17]
(a) $2x - y - 4 = 0$ (b) $2x - y - 3 = 0$
(c) $x - 3 = 0$ (d) $x - 4 = 0$

54. বিন্দু বৃত্তের সমীকরণ- [All.B'18]
(a) $x^2 - y^2 = 0$ (b) $x^2 + y^2 = 0$
(c) $x^2 + y^2 = r^2$ (d) $x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$

55. $(2, -3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করলে তার সমীকরণ কোনটি? [DB'17]
(a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2$
(b) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 2^2$
(c) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$
(d) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



56. বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? [RB'17]
(a) $x^2 + y^2 - 6x = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 6x = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 6y = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 6y = 0$

57. বৃত্তটির যে স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল উহার সমীকরণ কোনটি? [RB'17]
(a) $y - 6 = 0$ (b) $y + 6 = 0$
(c) $x - 6 = 0$ (d) $x + 6 = 0$

58. $x^2 + y^2 = 100$ বৃত্ত- [Ctg.B'17]
(i) এর কেন্দ্র $(0, 0)$ (ii) এর ব্যাসার্ধ 10 একক
(iii) দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ 20 একক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

59. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে ছেদ করবে না, যখন- [SB'17]
(a) $g^2 > c$ (b) $g^2 < c$ (c) $f^2 > c$ (d) $f^2 < c$

60. $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 6 = 0$ বৃত্তের ব্যাসের সমীকরণ- [BB'17]
(a) $x + y = 0$ (b) $x = y$
(c) $x + 3y = 0$ (d) $3x + 2y = 0$

61. $3x^2 + 3y^2 + x - 2y + \frac{1}{2} = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র কোনটি? [JB'17]
(a) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$
(c) $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$

62. বৃত্তটির y অক্ষের ছেদকৃত অংশের পরিমাণ- [Din.B'17]
(a) 6 (b) $2\sqrt{2}$ (c) $4\sqrt{2}$ (d) 0

63. উদ্দীপকে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কোনটি? [Din.B'17]
(a) 2 (b) 3 (c) $2\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{14}$

64. (i) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত
(ii) $x^2 + 2y^2 = 4$ একটি বৃত্তের সমীকরণ [Din.B'17]
(iii) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$ বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

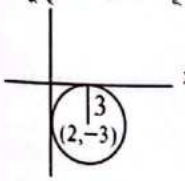
MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

52. c	53. b	54. b	55. d	56. b	57. d	58. d	59. b	60. c	61. c	62. c	63. c	64. b

52. $\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 10} = 2\sqrt{5}$ একক

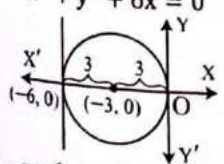
53. স্পর্শকের সমীকরণ, $x \cdot (1) + y(-1) + 6\frac{x+1}{2} - 2\frac{y-1}{2} - 10 = 0$
$\Rightarrow x - y + 3x + 3 - y + 1 - 10 = 0$
$\Rightarrow 4x - 2y - 6 = 0 \therefore 2x - y - 3 = 0$

54. বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ শূন্য (0) [x^2 ও y^2 এর সহগ সমান]

55. 

x অক্ষকে স্পর্শ করলে
ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের কোটি| = |−3| = 3 একক
∴ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$

56. কেন্দ্র $(-3, 0)$; ব্যাসার্ধ 3 একক। বৃত্তের সমীকরণ $(x+3)^2 + y^2 = 3^2$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x = 0$

57. 

∴ স্পর্শকের সমীকরণ $x = -6 \Rightarrow x + 6 = 0$

58. বৃত্তের সমীকরণ $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 10^2$
কেন্দ্র $(0, 0)$, ব্যাসার্ধ 10 একক এবং x অক্ষের খণ্ডিতাংশ
$= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{0 + 100} = 2 \times 10 = 20$ একক।

60. $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 6 = 0$
∴ বৃত্তের কেন্দ্র $(6, -2)$ বৃত্তের ব্যাস অবশ্যই কেন্দ্রগামী হবে।
$x + 3y = 0$ রেখাটি $(6, -2)$ বিন্দুকে সিদ্ধ করে।

61. $x^2 + y^2 + \frac{x}{3} - \frac{2y}{3} + \frac{1}{6} = 0 \therefore$ কেন্দ্র $\equiv \left(\frac{\frac{1}{3}}{-2}, \frac{-\frac{2}{3}}{-2}\right) \equiv \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

62. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$
$f = -3,\ c = 1 \therefore$ y অক্ষের ছেদকৃত অংশ $= 2\sqrt{f^2 - c}$
$= 2\sqrt{(-3)^2 - 1} = 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$ একক।

63. ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
$= \sqrt{2^2 + (-3)^2 - 1} = 2\sqrt{3}$ একক

64. (i) বৃত্তের কেন্দ্র C(0,0) [মূলবিন্দু] এবং ব্যাসার্ধ = a একক
(ii) x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান ∴ এটি বৃত্ত নয়
(iii) বৃত্তের কেন্দ্র C(−3,2) এবং ব্যাসার্ধ = 3 একক
∴ ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের ভূজ| ∴ বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে।

Educationblog24.com

বিভিন্ন কলেজের টেস্ট পরীক্ষার MCQ প্রশ্ন

65. নিচের কোনটি বৃত্তের সঠিক সমীকরণ? [রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ]

(a) $x^2 + y^2 + 5 = 0$
(b) $2x^2 + 2y^2 - 3 = 0$
(c) $2x + 2y + x^2 + y^2 + 50 = 0$
(d) $2x + 2y - x^2 - y^2 - 64 = 0$

66. $(-5, 7)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে? [পাবনা ক্যাডেট কলেজ]

(a) $x^2 + y^2 + 14x - 10y + 25 = 0$
(b) $x^2 + y^2 + 10x - 14y + 25 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 10 - 14y + 49 = 0$
(d) $x^2 + y^2 + 10x + 14y + 49 = 0$

67. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর-

(i) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত
(ii) $x^2 + 2y^2 = 4$ একটি বৃত্তের সমীকরণ
(iii) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে।

[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

68. $3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y - 15 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি? [নটর ডেম কলেজ, ঢাকা]

(a) $(-3, 6)$ (b) $(1, -2)$ (c) $(-1, 2)$ (d) $(6, -12)$

69. $y = 3x + c$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে, c এর মান কত? [নটর ডেম কলেজ, ঢাকা]

(a) 9 (b) 10 (c) 18 (d) 20

70. $(1, -1)$ বিন্দু হতে $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত একক? [নটর ডেম কলেজ, ঢা

(a) 2 (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
একটি বৃত্তের সমীকরণ $2x^2 + 2y^2 + 7x - 5y + c = 0$

71. বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করলে, c এর মান কত? [ঢাকা কলে

(a) $\frac{49}{16}$ (b) $\frac{49}{8}$ (c) $\frac{25}{4}$ (d) $\frac{25}{2}$

72. বৃত্তটির কেন্দ্র কোনটি? [ঢাকা কলে

(a) $\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ (c) $\left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}\right)$ (d) $\left(-\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)$

73. $(2, 3)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃ দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ কত একক? [ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলে

(a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) $2\sqrt{5}$ (d) 5

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$4(x^2 + y^2) = 16x + 12y - 5$ একটি বৃত্ত।

74. বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত? [হলি ক্রস কলেজ, ঢা

(a) $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ (b) $\left(2, \frac{3}{2}\right)$
(c) $(2, 3)$ (d) $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

65. b	66. b	67. b	68. c	69. b	70. b	71. b	72. d	73. c	74. b

66. $(-5, 7)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করলে ব্যাসার্ধ 7 একক
$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ, $(x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 7^2$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10x - 14y + 25 = 0$

69. $x^2 + y^2 = 10$ বৃত্তের কেন্দ্র $(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{10}$ একক
শর্তমতে, $\frac{c}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \pm\sqrt{10} \therefore c = \pm 10$

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট: অধ্যায়-০৪

MCQ

পূর্ণমান: ২৫ সময়: ২৫ মি

01. যদি একটি সরলরেখা দুইটি বৃত্তকে স্পর্শ করে তবে রেখাটিকে বৃত্তদ্বয়ের কী বলে?

(a) ব্যাসার্ধ (b) ব্যাস
(c) পরিধি (d) সাধারণ স্পর্শক

02. $x^2 + (y - 1)^2 + 2(y - 1) = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র কত?

(a) $(0, -1)$ (b) $(0, 0)$ (c) $(0, 1)$ (d) $(0, 2)$

03. $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ বৃত্তের মূলবিন্দুগামী ব্যাসের সমীকরণ কোনটি?

(a) $3x - 4y = 0$ (b) $4x + 3y = 0$
(c) $x - 4y = 0$ (d) $3x + y = 0$

04. k এর কোন মানের জন্য $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$ বৃত্ত প্রকাশ করবে?

(a) -2 (b) -1 (c) 1 (d) 2

05. $3x^2 + 3y^2 - x + \frac{y}{2} - 5 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র-
(a) $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$
(c) $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

06. নিচের কোন বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে?
(a) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 4 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$
(d) $2x^2 + 2y^2 - 6y + 3 = 0$

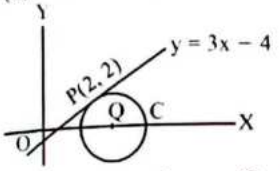
07. $x^2 + y^2 + 2x + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করলে c এর মান কত?
(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 2

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 - 2x = 0 \cdots\cdots$ (i)
$2x^2 + 2y^2 - 4x - 20y + 26 = 0 \cdots\cdots$ (ii) দুটি বৃত্ত

08. (i) নং ও (ii) নং বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রের দূরত্ব কত?
(a) 5 (b) 10 (c) $\sqrt{101}$ (d) 20

09. $x^2 + y^2 = 256$ বৃত্তের যে জ্যা $(1, -1)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার সমীকরণ কোনটি?
(a) $x - y = 0$ (b) $x - y = 2$
(c) $x + y = 0$ (d) $x + y = 2$

10. বৃত্তের কেন্দ্র (5, 2) এবং এটি (7, 3) বিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য-
(a) $2\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) $3\sqrt{5}$ (d) $4\sqrt{5}$

11. 

চিত্রে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $y = 3x - 4$ যা বৃত্তকে P(2, 2) বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তের কেন্দ্র Q.
P বিন্দুগামী ব্যাসের ঢাল-
(a) $-\frac{1}{3}$ (b) 3 (c) $\frac{3}{4}$ (d) -3

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী।

12. c এর মান কত?
(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

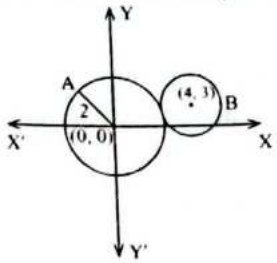
13. বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষ থেকে ছেদকৃত অংশের দৈর্ঘ্য কত?
(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8

14. k এর মান কত হলে $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে?
(a) $-40, -10$ (b) $40, -10$
(c) $-40, 10$ (d) $40, 10$

15. $(4, -8)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 8

16. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (11, 2) এবং ব্যাসার্ধ 10; বৃত্তটির একটি জ্যা এর মধ্যবিন্দু $(2, -1)$ হলে, জ্যা এর দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি?
(a) $2\sqrt{10}$ (b) $4\sqrt{5}$ (c) $4\sqrt{10}$ (d) $3\sqrt{10}$

নিচের চিত্রটি লক্ষ কর এবং পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



17. B বৃত্তের ব্যাসার্ধ নিচের কোনটি?
(a) 7 একক (b) 6 একক (c) 8 একক (d) 3 একক

18. B বৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি?
(a) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$
(d) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 16 = 0$

19. $r = |h| = |k|$ এবং $g^2 = f^2 = c$ হলে, বৃত্তের কেন্দ্র হবে-
(a) (h, k) (b) (h, h)
(c) $(\pm h, \pm h)$ (d) কোনটিই নয়

20. বৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দু হলে-
(a) $g^2 = c$ (b) $f^2 = c$
(c) $c = 0$ (d) কোনটিই নয়

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x - y - 5 = 0$ রেখাটি (3, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের একটি স্পর্শক।

21. বৃত্তটি কর্তৃক x-অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ কত?
(a) $\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$ (c) 4 (d) $\sqrt{4}$

22. পরিধিস্থ $p(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ-
(a) $y_1 = \frac{1}{x_1}$ (b) $y = \frac{1}{x_1}$ (c) $y = \frac{x_1}{y_1}$ (d) $y = \frac{y_1 x}{x_1}$

23. $x + y = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে কোনটি সঠিক?
(a) $a^2 - 2a = 1$ (b) $a^2 + 2a = 1$
(c) $a^2 + 2a = 2$ (d) $a^2 - 2a = -1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$

24. নিচের কোন রেখাটি বৃত্তটিকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করে?
(a) $x - 2y = 0$ (b) $3x + y = 0$
(c) $x + 3y = 0$ (d) $x + 2y = 0$

25. নিচের কোনটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং ব্যাস 3?
(a) $x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$ (b) $2x^2 + 4y^2 = 9$
(c) $4x^2 + 4y^2 = 9$ (d) $x^2 + y^2 = 9$

Educationblog24.com

পূর্ণমান: ৫০ | CQ | সময়: ২:৩৫ মিনিট

(যেকোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও)

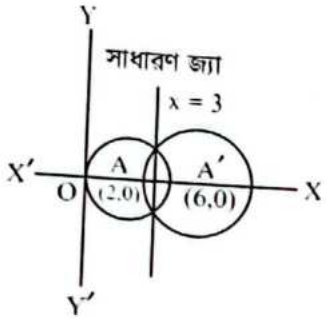
01. $(1,2)$ ও $(3,2)$ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। $x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

(ক) একটি বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ $x^2 = 1 - t^2$ ও $y = t$ হলে এর কেন্দ্র নির্ণয় কর। 2

(খ) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উদ্দীপকের বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে এবং x অক্ষকে স্পর্শ করে। 4

(গ) $(4,1)$ বিন্দু থেকে উদ্দীপকে উল্লেখিত বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

02.



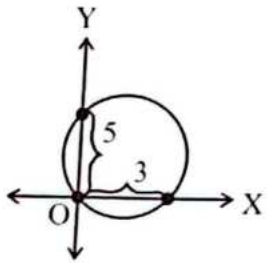
এখানে A ও A′ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র।

(ক) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তটি কোন শর্তে x অক্ষকে স্পর্শ করে। 2

(খ) $(6,0)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $(2,0)$ বিন্দু হতে $(6,0)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। 4

03.



(ক) বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) হলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকের বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) বৃত্তের যে জ্যা এর মধ্যবিন্দু $(1,2)$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

04. $x = a(\cos\theta - 1)$ এবং $y = a(\sin\theta + 1)$ দ্বারা একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

(ক) $(1,3)$ বিন্দু হতে $2x^2 + 2y^2 - 5x = 0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকে উল্লেখিত বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। 4

(গ) $a = \frac{1}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে, বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে। 4

05. দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 8 = 0$ এবং
দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 + 6x + 12y + 8 = 0$

(ক) $(1,-3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x- অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ একটি বৃত্ত নির্দেশ করে। উক্ত বৃত্তের যে স্পর্শক $3x + 2y - 6 = 0$ রেখার উপর লম্ব তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

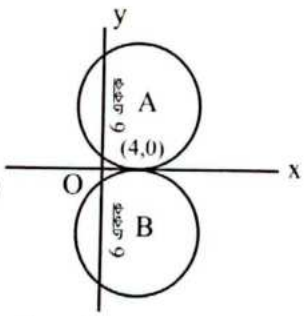
06. একটি বৃত্ত $(1,2)$ ও $(3,2)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

(ক) প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখাকে ব্যাস ধরে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রদত্ত বৃত্তটি যদি x-অক্ষকে স্পর্শ করে তাহলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রদত্ত বৃত্তটির কেন্দ্র $2x + y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত হলে এর সমীকরণ এবং এর x-অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

07. (i)



(ii) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ একটি বৃত্ত।

(ক) $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0$ এর সাথে এককেন্দ্রিক এবং $(2,1)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক (ii) নং এ উল্লেখিত বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x - 4y - 1 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল। 4

(গ) উদ্দীপক (i) এ উল্লেখিত বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

08. কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(1,5)$ ও $(7,-3)$ এবং $(a,6)$ বিন্দুটি এ বৃত্তের উপর অবস্থিত।

(ক) $(-2,3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের বৃত্তটির উপর উল্লেখিত বিন্দুটির ভুজ a এর মান কত? বৃত্তটির অপর একটি ব্যাস নির্ণয় কর যা প্রদত্ত ব্যাসের উপর লম্ব। 4

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

MCQ

01. d	02. b	03. b	04. d	05. a	06. c	07. c	08. a	09. b	10. a	11. a	12. d	13. b	14. b	15. c
16. a	17. d	18. c	19. c	20. d	21. c	22. d	23. b	24. c	25. c					

02. $x^2 + (y-1)^2 + 2(y-1) = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 + 2y - 2 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \therefore$ কেন্দ্র $(0,0)$

03. কেন্দ্র, $(-3,4) \therefore$ সমীকরণ, $y = mx$
$\Rightarrow y = \frac{4}{(-3)}x \Rightarrow 4x + 3y = 0$

04. $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$
$k = 2$ হতে হবে যাতে xy কোন পদ না থাকে।

05. $x^2 + y^2 - \frac{1}{3}x + \frac{y}{6} - \frac{5}{3} = 0$; কেন্দ্র $\left(\frac{1}{6}, \frac{-1}{12}\right)$

07. x অক্ষকে স্পর্শ করলে $c = g^2 = 1^2 = 1 \cdot (g = 1)$

08. কেন্দ্র $C_1 = (1,0)$; $C_2 = (1,5)$
কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $= \sqrt{0 + (5^2)} = 5$ একক

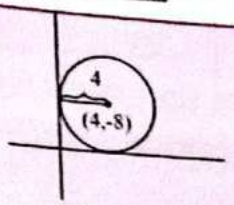
09. $x^2 + y^2 = 256$
এর কেন্দ্র $(0,0)$ ও $(1,-1)$ সংযোগকারী রেখা $x + y = 0$
$x + y = 0$ এর ওপর লম্ব ও $(1,-1)$; বিন্দুগামী রেখা $x - y = 2$

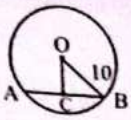
10. ব্যাস $= 2\sqrt{(2)^2 + (1)^2} = 2\sqrt{5}$ একক

11. $y = 3x - 4$; $m_1 = 3$; $\therefore m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{3}$

13. ছেদাংশের পরিমাণ $= 2\sqrt{f^2 - c} = 6$ একক $[f = -3; c = 0]$

14. বৃত্তের কেন্দ্র, $= (5,0)$; ব্যাসার্ধ $= 5$ একক
এখন, $\frac{|15-k|}{5} = 5 \Rightarrow |15 - k| = 25 \therefore k = -10$ or $k = 40$

15. 

16. 

; $O(11,2), C(2,-1)$
$OC = \sqrt{(11-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{90}$ একক
$\therefore AB = 2 \times \sqrt{OB^2 - OC^2} = 2\sqrt{10}$ একক

17. $r_A + r_B = \sqrt{4^2 + 3^2} \Rightarrow r_B = 5 - r_A = 5 - 2 = 3$ একক

18. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$

21. ব্যাসার্ধ $= \frac{|3-2-5|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ একক
$\therefore$ ছেদাংশ $= 2\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2(\sqrt{8-4}) = 4$ একক

22. স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1 + yy_1 = a^2$
$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ $y_1x - x_1y = x_1y_1 - x_1y_1 \Rightarrow y = \frac{y_1}{x_1}x$

23. $x + y = 1, x^2 + y^2 - 2ax = 0$ কে স্পর্শ করে। $\therefore y = 1 - x$
$\therefore x^2 + (1-x)^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 - 2ax = 0$
$\Rightarrow 2x^2 - 2x(a+1) + 1 = 0$
$\therefore 4(a+1)^2 - 8 = 0 \Rightarrow (a+1)^2 = 2 \Rightarrow a^2 + 2a = 1$

24. $(3,-1)$ বিন্দুতে যে রেখা সিদ্ধ করে [$\because (3,-1)$ বৃত্তের কেন্দ্র]
$x + 3y = 3 + 3(-1) = 0 \Rightarrow x + 3y = 0$

CQ

01. (ক) কেন্দ্র $(0,0)$ (খ) $2x^2 + 2y^2 - 8x - 5y + 8 = 0$
(গ) $(y-1) = \frac{-1}{4\sqrt{3}}(x-4)$

02. (ক) $g^2 = c$ (খ) $(x-6)^2 + y^2 = 12$ (গ) $120°$

03. (ক) $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$
(খ) $\therefore x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$
(গ) $\therefore y - 2 = -(x - 1)$

04. (ক) $\sqrt{15}$ একক। (খ) ব্যাসার্ধ $= a$

05. (ক) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = (-3)^2$ (খ) $2x - 3y \pm \sqrt{65} = 0$
(গ) $(x+2)(x+4) + (y-0)(y-0) = 0$

06. (ক) $(x-1)(x-3) + (y-2)(y-2) = 0$
(খ) $x^2 + y^2 - 4x - \frac{5}{2}y + 4 = 0$
(গ) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ ও 2 একক

07. (ক) $(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$
(খ) $3x - 4y + 20 = 0$ ও $3x - 4y - 10 = 0$
(গ) $(x-y)^2 + (y \pm 5)^2 = 5^2$

08. (ক) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$
(খ) $(x-1)(x-7) + (y-5)(y+3) = 0$
(গ) $a = 4$ ও $(y-1) = \frac{3}{4}(x-4)$

> বিখ্যাত না হয়েও সুন্দর জীবন কাটানো সম্ভব, কিন্তু সার্থক জীবন না কাটিয়ে বিখ্যাত হওয়া কখনও সুন্দর জীবন হতে পারে না
> - Clive James

Educationblog24.com

অধ্যায় ০৭ সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

➤ সৃজনশীল (ক), (খ) ও (গ) নং প্রশ্নের জন্য এ অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	টাইপের নাম	যতবার প্রশ্ন এসেছে			যে বোর্ডে যে বছর এসেছে
			ক	খ	গ	CQ
○○	T-01	সংযুক্ত কোণ সম্বলিত ত্রিকোণমিতিক রাশি	03	01	-	Din.B'23, 17; DB'22; Ctg.B'19
○	T-02	ধারা সংক্রান্ত	-	-	01	DB'22
○○○	T-03	যৌগিক কোণ সম্বলিত ত্রিকোণমিতিক রাশি	20	01	02	Ctg.B, CB'23, 22, 19, 17; BB'23, 19; DB'22, 18; RB'22, 19; JB'22, 19, 18, 17; SB'19, 18, 17; Din.B'19, 18
○○○	T-04	গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত	10	07	04	DB'23, 18; RB'23, 22, 19, SB'23, 22, 19, 18; MB'22; Ctg.B, BB'19; Din.B'19, 18; JB'18, 17; CB'17
○○○	T-05	উপগুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতির অনুপাত সংক্রান্ত	06	07	05	DB'23, 19, 18; SB'23, 22, 18; JB'23, 19, 18, 17; Din.B'23, 22, 18, 17; MB'23; BB'17
○○○	T-06	ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী সংক্রান্ত	-	11	10	Ctg.B, CB'23, 22, 17; SB'23, 19, 18; JB'23, 18; MB'23, 22; DB'22, 18, 19; RB' 22, 19, 17; BB'22; Din.B'22, 18;
○○○	T-07	শর্ত সাপেক্ষে ত্রিভুজের বিভিন্ন অজানা রাশির মান নির্ণয়	04	06	10	RB'23, 22; SB'23, 17; Din.B'23; BB'23, 22, 17, DB'22, 17; Ctg.B'22, 19, 17; JB'22, 19; CB'19, 17
○○○	T-08	শর্ত সাপেক্ষে প্রমাণ	01	08	07	DB'23, 22, 19; CB, MB'23, 22; RB, BB, JB, Din.B'22; SB'22, 17; Ctg.B'19
○○	T-09	শর্ত সাপেক্ষে ত্রিভুজের প্রকৃতি নির্ণয়	-	02	02	Ctg.B'23; SB'19, 17; JB'17

CQ প্রশ্ন ও সমাধান (ক, খ ও গ)

Type-01: সংযুক্ত কোণ সম্বলিত ত্রিকোণমিতিক রাশি

Concept

- $(-\theta)$ আকারের সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

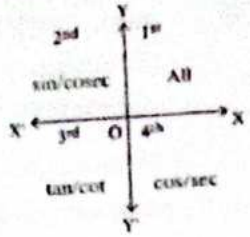
- $\left\{n \times \left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \theta\right\}$ বা $(n \times 90^\circ \pm \theta)$ আকারের সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

$\left\{n \times \left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \theta\right\}$ বা $(n \times 90^\circ \pm \theta)$ আকারের সংযুক্ত কোণের ক্ষেত্রে, n এর মানের উপর অনুপাত এবং Quadrant এর উপর চিহ্ন নি করে।

(i) n বিজোড় হলে, [90° এর বিজোড় গুণিতকের জন্য]

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	ব্যাখ্যা
sine ⇌ cosine	sin পরিবর্তিত হয়ে cos এবং cos পরিবর্তিত হয়ে sin -এ পরিণত হবে।
tangent ⇌ cotangent	tan পরিবর্তিত হয়ে cot এবং cot পরিবর্তিত হয়ে tan -এ পরিণত হবে।
secant ⇌ cosecant	sec পরিবর্তিত হয়ে cosec এবং cosec পরিবর্তিত হয়ে sec -এ পরিণত হবে।

(ii) n জোড় হলে, [90° এর জোড় গুণিতকের জন্য] ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর কোনো পরিবর্তন হয় না।
চিহ্ন: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ১ম চতুর্ভাগে সবগুলো অনুপাত ধনাত্মক। ২য় চতুর্ভাগে শুধুমাত্র sine বা cosecant ধনাত্মক আর বাকিগুলো ঋণাত্মক। একইভাবে ৩য় চতুর্ভাগে শুধুমাত্র tangent বা cotangent এবং ৪র্থ চতুর্ভাগে শুধুমাত্র cosine বা secant ধনাত্মক।



মনে রাখার সুবিধার জন্য,

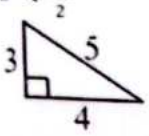
Quadrant→	1st	2nd	3rd	4th
	All	students	take	care
		↓	↓	↓
		sin(e)	tan(gent)	cos(ine)

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে,
$\text{cosec}(-\theta) + \sec(-\theta)$ এর মান নির্ণয় কর। [Din.B'23]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

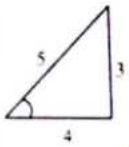
$\therefore \text{cosec}\,\theta = -\frac{5}{3}$ এবং $\sec\theta = -\frac{5}{4}$



এখন, $\text{cosec}(-\theta) + \sec(-\theta)$
$= -\text{cosec}\,\theta + \sec\theta$
$= -\left(-\frac{5}{3}\right) - \frac{5}{4} = \frac{20-15}{12} = \frac{5}{12}$ (Ans.)

02. $\sin\theta = \frac{3}{5}$ [DB'22]
(খ) $\frac{\cot\theta+\cos(-\theta)}{\text{cosec}(-\theta)+\tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর; যখন $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হয়।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে,
$\sin\theta = \frac{3}{5}$
$\therefore \text{cosec}\,\theta = \frac{5}{3}$
এখানে, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
$\therefore \theta$ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।
কাজেই, $\sin\theta$ ধনাত্মক কিন্তু
$\cos\theta$ ও $\tan\theta$ এর মান ঋণাত্মক।



$\cos\theta = -\frac{4}{5}$
$\tan\theta = -\frac{3}{4}$
$\cot\theta = -\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{\cot\theta+\cos(-\theta)}{\text{cosec}(-\theta)+\tan\theta} = \frac{\cot\theta+\cos\theta}{-\text{cosec}\,\theta+\tan\theta} = \frac{-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}}{-\frac{5}{3}+\frac{3}{4}}$

$\therefore \frac{\cot\theta+\cos(-\theta)}{\text{cosec}(-\theta)+\tan\theta} = \frac{\frac{20+12}{15}}{\frac{20+9}{12}} = \frac{32}{15} \times \frac{12}{29} = \frac{128}{145}$ (Ans.)

03. (ক) $\sec x = -2$ এবং $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে,
$\cos x + \tan x = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ [Ctg.B'19]

(ক) **Sol^n:** $\sec x = -2$
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ $\therefore \cos x = -\frac{1}{2}$ $\therefore \tan x = \sqrt{3}$
$\therefore \cos x + \tan x = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ (Proved)

04. (ক) $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ হলে, $\sqrt{\frac{2-\cot^2\theta}{2+\cot^2\theta}}$ এর মান নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ [Din.B'17]

$\therefore \cot^2\theta = \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sec^2\theta - 1}$
$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2 - 1} = \frac{9}{13-9} = \frac{9}{4}$

$\therefore \sqrt{\frac{2-\cot^2\theta}{2+\cot^2\theta}} = \sqrt{\frac{2-\frac{9}{4}}{2+\frac{9}{4}}} = \sqrt{\frac{\frac{-1}{4}}{\frac{17}{4}}} = \sqrt{\frac{-1}{17}}$ (Ans.)

০৭

Type-02: ধারা সংক্রান্ত

Concept

সমান্তর ধারার n তম পদ, $T_n = a + (n-1)d$; অর্থাৎ, $n = \frac{T_n - a}{d} + 1$ এখানে, a = ১ম পদ, d = সাধারণ অন্তর।
ধারায় সাধারণত দুই ধরনের সমস্যা পরীক্ষায় আসতে দেখা যায়।
(i) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর বর্গের বীজগাণিতিক সমষ্টি আকৃতি। (ii) tangent অথবা cotangent অনুপাতগুলোর গুণ আকৃতি।

১ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর বর্গের বীজগাণিতিক সমষ্টি আকৃতি

এক্ষেত্রে, $\sin^2 A_1 + \sin^2 A_2 + \sin^2 A_3 + \ldots\ldots\ldots + \sin^2 A_n$
বা, $\cos^2 A_1 + \cos^2 A_2 + \cos^2 A_3 + \ldots\ldots\ldots + \cos^2 A_n$
] যেখানে, $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ সমান্তর প্রগমনভুক্ত।

এভাবে ধারা দেওয়া থাকে এবং মান নির্ণয় করতে হয়।
এক্ষেত্রে, প্রয়োজনীয় সূত্র হলো, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ এবং অন্যান্য অনুপাতগুলোর ক্ষেত্রে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
এবং $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

➲ **tangent অথবা cotangent অনুপাতগুলোর গুণ আকৃতি**

এক্ষেত্রে $\tan A_1 \cdot \tan A_2 \cdot \tan A_3 \ldots\ldots\ldots \tan A_n$ বা, $\cot A_1 \cdot \cot A_2 \cdot \cot A_3 \ldots\ldots\ldots \cot A_n$ এভাবে ধারা দেওয়া থাকে এবং মান নির্ণয় করতে হয়। এক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় সূত্র হলো, $\tan\theta \cdot \cot\theta = \tan\theta \cdot \frac{1}{\tan\theta} = 1$

এক্ষেত্রে $\tan A_1$ এর সাথে ধারার অন্য কোনো পদ গুণ করে 1 বানানোর জন্য একটি পদকে $\tan\left\{(2m+1)\frac{\pi}{2} \pm A_1\right\}[m \in \mathbb{Z}]$ আকৃতির প্রকাশ করে $\cot A_1$ (বা $-\cot A_1$) বানিয়ে নিতে হয়।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $A = \frac{\pi}{12}$. [DB'22]

(গ) প্রমাণ কর যে, $\tan A \tan 3A \tan 5A \tan 7A \tan 11A = 1$.

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $A = \frac{\pi}{12}$ $\therefore$ L. H. S. $= \tan A \cdot \tan 3A \cdot \tan 5A \cdot \tan 7A \cdot \tan 11A$

$= \tan\frac{\pi}{12} \cdot \tan\frac{3\pi}{12} \cdot \tan\frac{5\pi}{12} \cdot \tan\frac{7\pi}{12} \cdot \tan\frac{11\pi}{12} = \tan\frac{\pi}{12} \cdot \tan\frac{\pi}{4} \cdot \tan\frac{5\pi}{12} \cdot \tan\frac{6\pi+\pi}{12} \cdot \tan\frac{6\pi+5\pi}{12}$

$= \tan\frac{\pi}{12} \cdot 1 \cdot \tan\frac{5\pi}{12} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12} \cdot \tan\frac{5\pi}{12} \cdot \left(-\cot\frac{\pi}{12}\right)\left(-\cot\frac{5\pi}{12}\right)$ $\left[\because \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta\right]$

$= \tan\frac{\pi}{12} \cdot \tan\frac{5\pi}{12} \cdot \frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}} \cdot \frac{1}{\tan\frac{5\pi}{12}} = 1 =$ R. H. S $\therefore$ L. H. S = R. H. S **(Proved)**

Type-03: যৌগিক কোণ সম্বলিত ত্রিকোণমিতিক রাশি

Concept

➲ **Formulae:**

- $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$
- $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$
- $2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
- $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
- $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{1}{2}(C+D)\sin\frac{1}{2}(C-D)$
- $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{1}{2}(C+D)\sin\frac{1}{2}(D-C)$
- $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$
- $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
- $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
- $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
- $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{1}{2}(C+D)\cos\frac{1}{2}(C-D)$
- $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{1}{2}(C+D)\cos\frac{1}{2}(C-D)$
- $\cot(A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$
- $\tan 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
- $\tan 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
- $\tan 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) প্রমাণ কর: $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}$ [Ctg.B'23]

(ক) **Sol^n:** L.H.S $= \frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}$

$= \frac{\sin(90^\circ-15^\circ)+\sin 15^\circ}{\sin(90^\circ-15^\circ)-\sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}$

$= \frac{\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ \tan 15^\circ}$

$= \tan(45^\circ + 15^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3} =$ R.H.S **(Proved)**

02. (ক) দেখাও যে, $\sin 29^\circ + \cos 29^\circ = \sqrt{2}\cos 16^\circ$ [BB'23]

(ক) **Sol^n:** $\sin 29^\circ + \cos 29^\circ = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 29^\circ + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 29^\circ\right)$

$= \sqrt{2}(\sin 45^\circ \sin 29^\circ + \cos 45^\circ \cos 29^\circ)$

$= \sqrt{2}\{\cos(45^\circ - 29^\circ)\} = \sqrt{2}\cos 16^\circ$ **(Showed)**

03. (ক) $\frac{\tan 42^\circ \tan 78^\circ}{\cot 6^\circ \cot 66^\circ}$ এর মান নির্ণয় কর। [CB'23]

Educationblog24.com

(ক) **Sol^n:** $\frac{\tan 42^\circ \tan 78^\circ}{\cot 6^\circ \cot 66^\circ} = \tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ$

$= \frac{\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ}{\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ}$

$= \frac{(2\sin 66^\circ \sin 6^\circ)(2\sin 78^\circ \sin 42^\circ)}{(2\cos 66^\circ \cos 6^\circ)(2\cos 78^\circ \cos 42^\circ)}$

$= \frac{(\cos 60^\circ - \cos 72^\circ)(\cos 36^\circ - \cos 120^\circ)}{(\cos 60^\circ + \cos 72^\circ)(\cos 36^\circ + \cos 120^\circ)} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \cos 72^\circ\right)\left(\cos 36^\circ + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \cos 72^\circ\right)\left(\cos 36^\circ - \frac{1}{2}\right)}$

$= \frac{\left(\frac{1}{2} - \sin 18^\circ\right)\left(\cos 36^\circ + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \sin 18^\circ\right)\left(\cos 36^\circ - \frac{1}{2}\right)} = \frac{\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right]\left[\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{2}\right]}{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right]\left[\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) - \frac{1}{2}\right]}$

$= \frac{\left[\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right]\left[\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right]}{\left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right]\left[\frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right]} = \frac{\frac{9}{16} - \frac{5}{16}}{\frac{5}{16} - \frac{1}{16}} = \frac{9-5}{5-1} = 1$ **(Ans.)**

04. (ক) দেখাও যে, $\cos 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ **[DB'22]**

(ক) **Sol^n:** $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$

$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1)$

$\therefore \cos 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ **(Showed)**

05. (ক) $\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = 1$ হলে দেখাও যে, $\sin\alpha \operatorname{cosec}\beta + \cos\alpha \sec\beta = 0$. **[RB'22]**

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = 1$

$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = 1 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos 0$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 0 \therefore \alpha = -\beta$

L.H.S $= \sin\alpha \operatorname{cosec}\beta + \cos\alpha \sec\beta$

$= \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin(-\beta)}{\sin\beta} + \frac{\cos(-\beta)}{\cos\beta} = \frac{-\sin\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\cos\beta}$

$= -1 + 1 = 0 = -1 + 1 = 0 =$ R.H.S

$\therefore$ L.H.S = R.H.S **(Showed)**

06. (ক) প্রমাণ কর: $\tan 35^\circ + \tan 10^\circ + \tan 35^\circ \cdot \tan 10^\circ = 1$ **[Ctg.B'22]**

(ক) **Sol^n:** আমরা জানি, $\tan 45^\circ = 1$

$\Rightarrow \tan(35^\circ + 10^\circ) = 1 \Rightarrow \frac{\tan 35^\circ + \tan 10^\circ}{1 - \tan 35^\circ \tan 10^\circ} = 1$

$\Rightarrow \tan 35^\circ + \tan 10^\circ = 1 - \tan 35^\circ \tan 10^\circ$

$\therefore \tan 35^\circ + \tan 10^\circ + \tan 35^\circ \tan 10^\circ = 1$ **(Proved)**

07. (ক) প্রমাণ কর যে, $\sin\theta + \sin(120^\circ + \theta) + \sin(240^\circ + \theta) = 0$. **[JB'22]**

(ক) **Sol^n:** L.H.S $= \sin\theta + \sin(120^\circ + \theta) + \sin(240^\circ + \theta)$

$= \sin\theta + \sin 120^\circ \cos\theta + \cos 120^\circ \sin\theta$

$+ \sin 240^\circ \cdot \cos\theta + \cos 240^\circ \sin\theta$

$= \sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$

(Proved)

08. ABC একটি ত্রিভুজ এবং $f(x) = \sin x$ **[CB'22]**

(ক) দেখাও যে, $f(A) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$.

(ক) **Sol^n:** ABC ত্রিভুজে, $A + B + C = \pi$; $f(x) = \sin x$

$f(A) = \sin A = \sin\{\pi - (B + C)\} = \sin(B + C)$

$= \sin B \cos C + \cos B \sin C$ (দেখানো হলো)

09. (ক) প্রমাণ কর: $\sin 78^\circ 19' \cos 18^\circ 19' - \sin 11^\circ 41' \sin 18^\circ 19' = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **[Ctg.B'19]**

(ক) **Sol^n:** L.H.S $= \sin 78^\circ 19' \cos 18^\circ 19' - \sin 11^\circ 41' \sin 18^\circ 19'$

$= \sin 78^\circ 19' \cos 18^\circ 19' - \sin(90^\circ - 78^\circ 19') \sin 18^\circ 19'$

$= \sin 78^\circ 19' \cos 18^\circ 19' - \sin 18^\circ 19' \cos 78^\circ 19'$

$= \sin(78^\circ 19' - 18^\circ 19') = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$=$ R.H.S **(Proved)**

10. (ক) দেখাও যে, $\tan 65^\circ = \tan 25^\circ + 2\tan 40^\circ$ **[SB'19]**

(ক) **Sol^n:** $\tan 65^\circ = \tan(40^\circ + 25^\circ) = \frac{\tan 40^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 40^\circ \tan 25^\circ}$

$\Rightarrow \tan 65^\circ - \tan 65^\circ \tan 40^\circ \tan 25^\circ = \tan 40^\circ + \tan 25^\circ$

$\Rightarrow \tan 65^\circ - \tan 65^\circ \times \tan 40^\circ \times \tan(90^\circ - 65^\circ)$

$= \tan 40^\circ + \tan 25^\circ$

$\Rightarrow \tan 65^\circ - \tan 65^\circ \times \tan 40^\circ \times \cot 65^\circ$

$= \tan 40^\circ + \tan 25^\circ$

$\Rightarrow \tan 65^\circ - \tan 40^\circ = \tan 40^\circ + \tan 25^\circ$

$\Rightarrow \tan 65^\circ = \tan 25^\circ + 2\tan 40^\circ$ **(Showed)**

11. $X = \sin\alpha - \cos\alpha$, $Y = \cos\beta - \sin\beta$, যেখানে $\alpha \neq \beta$, $P = \operatorname{cosec} 20^\circ$, $Q = \sec 20^\circ$. **[BB, Din.B'19]**

(খ) $X = Y$ হলে দেখাও যে, $2(\alpha + \beta) = \pi$

(খ) **Sol^n:** $X = Y \Rightarrow \sin\alpha - \cos\alpha = \cos\beta - \sin\beta$

$\Rightarrow \sin\alpha + \sin\beta = \cos\alpha + \cos\beta$

$\Rightarrow 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\Rightarrow \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \therefore 2(\alpha + \beta) = \pi$ **(Showed)**

12. দৃশ্যকল্প-১: $2P = \tan\frac{x+y}{2} + \tan\frac{x-y}{2}$ **[CB'19]**

(ক) দেখাও যে, $P = \frac{\sin x}{\cos x + \cos y}$.

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $2P = \tan\frac{x+y}{2} + \tan\frac{x-y}{2}$

$\Rightarrow 2P = \frac{\sin\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}} + \frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$

$\Rightarrow P = \frac{\sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sin x}{\cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)}$

$\therefore P = \frac{\sin x}{\cos x + \cos y}$ **(Showed)**

13. (ক) প্রমাণ কর যে, $\sin 44^\circ + \cos 44^\circ = \sqrt{2}\cos 1^\circ$. **[DB, SB, JB, Din.B'18]**

(ক) **Sol^n:** $\sin 44^\circ + \cos 44^\circ = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 44^\circ + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 44^\circ\right)$

$= \sqrt{2}(\sin 45^\circ \sin 44^\circ + \cos 45^\circ \cos 44^\circ)$

$= \sqrt{2}\cos(45^\circ - 44^\circ) = \sqrt{2}\cos 1^\circ$

০৭

Educationblog24.com

14. (ক) $\sin(A - B + C)$ কে বিস্তৃত কর। [Ctg.B'17]

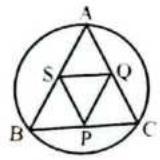
(ক) **Sol^n:** $\sin(A - B + C) = \sin(A - B)\cdot\cos C + \cos(A - B)\cdot\sin C$
$= (\sin A\cos B - \cos A\cdot\sin B)\cos C + (\cos A\cos B + \sin A\sin B)\sin C$
$= \sin A\cos B\cos C - \cos A\cdot\sin B\cdot\cos C + \cos A\cos B\cdot\sin C + \sin A\sin B\cdot\sin C$ (Ans.)

15. দৃশ্যকল্প: ABC ত্রিভুজের পরিসীমা 2s।

(খ) $\sec B = \sec C\sec A$ হলে দেখাও যে, $\tan A = 2\cot C$. [Ctg.B'17]

(খ) **Sol^n:** $\sec B = \sec C\cdot\sec A \Rightarrow \frac{1}{\cos B} = \frac{1}{\cos C}\cdot\frac{1}{\cos A}$
$\Rightarrow \cos B = \cos C\cdot\cos A$
এখন, $A + B + C = \pi \Rightarrow A + C = \pi - B$
$\Rightarrow \cos(A + C) = \cos(\pi - B)$
$\Rightarrow \cos A\cdot\cos C - \sin A\sin C = -\cos B$
$\Rightarrow 2\cos A\cdot\cos C - \sin A\sin C = 0$
$\Rightarrow 2\cos A\cos C = \sin A\sin C$
$\Rightarrow 2\cot A\cdot\cot C = 1 \Rightarrow 2\cot C = \tan A$ (Showed)

16.



; ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ R. [SB'17]

(ক) $A + B = 105°$ হলে $\sin C$ নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** $\sin C = \sin\{180° - (A + B)\}$
$= \sin(A + B) = \sin 105°$
$= \sin(90° + 15°) = \cos 15°$
$= \cos(45° - 30°) = \cos 45°\cdot\cos 30° + \sin 45°\sin 30°$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (Ans.)

17. (ক) প্রমাণ কর যে, $\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$. [JB'17]

(ক) **Sol^n:** $\tan 75° = \frac{\sin 75°}{\cos 75°} = \frac{\sin(45°+30°)}{\cos(45°+30°)}$
$= \frac{\sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30°}{\cos 45°\cos 30° - \sin 45°\sin 30°}$
$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{2}\times\left(\sqrt{3}+1\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$ [Proved]

18. $\angle E + \angle F = 65°$, $\angle F - \angle E = 25°$ [JB'17]

(গ) দেখাও যে, $\tan\angle E\cdot\tan 2\angle E\cdot\tan 3\angle E\cdot\tan 4\angle E = 3$.

(গ) **Sol^n:** L. H. S $= \tan\angle E\cdot\tan 2\angle E\cdot\tan 3\angle E\cdot\tan 4\angle E$
$= \frac{\sin E\sin 2E\sin 3E\sin 4E}{\cos E\cos 2E\cos 3E\cos 4E} = \frac{2\sin E\sin 3E\ 2\sin 4E\sin 2E}{2\cos E\cos 3E\ 2\cos 4E\cos 2E}$
$= \frac{(\cos 2E - \cos 4E)(\cos 2E - \cos 6E)}{(\cos 2E + \cos 4E)(\cos 2E + \cos 6E)}$
$= \frac{(\cos 40° - \cos 80°)(\cos 40° - \cos 120°)}{(\cos 40° + \cos 80°)(\cos 40° + \cos 120°)}$
$= \frac{(\cos 40° - \cos 80°)\left(\cos 40° + \frac{1}{2}\right)}{(\cos 40° + \cos 80°)\left(\cos 40° - \frac{1}{2}\right)}$
$= \frac{\cos^2 40° + \frac{1}{2}\cos 40° - \frac{1}{2}\cos 80° - \cos 40°\cos 80°}{\cos^2 40° - \frac{1}{2}\cos 40° - \frac{1}{2}\cos 80° + \cos 80°\cos 40°}$
$= \frac{1 + \cos 80° + \cos 40° - \cos 80° - \cos 120° + \cos 40°}{1 + \cos 80° - \cos 40° - \cos 80° + \cos 120° + \cos 40°}$
$= \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$ (Showed)

19. $A = \frac{2\pi}{15}$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ এবং $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$ [CB'

(গ) উদ্দীপক থেকে দেখাও যে, $\tan\alpha = \tan\beta + \tan\gamma$

(গ) **Sol^n:** R. H. S $= \tan\beta + \tan\gamma = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$
$= \frac{\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha}$ [$\because \cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$]
$= \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos\alpha}$ [$\because \alpha + \beta + \gamma = \pi$]
$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha =$ L. H. S $\therefore$ L.H.S = R.H.S (Showed

20. $A + B + C = \frac{\pi}{2}$, $\cos 2B\cos 2C = \cos 2A$

(ক) প্রমাণ কর যে, $\tan 70° = \cot 70° + 2\cot 40°$

(গ) $\cot 2B\cot 2C$ এর মান নির্ণয় কর।

[রাজশাহী ক্যাডেট কলে

(ক) **Sol^n:** আমরা জানি, $\tan 90° = \frac{k}{0}$
$\Rightarrow \tan(20° + 70°) = \frac{k}{0} \Rightarrow \frac{\tan 20° + \tan 70°}{1 - \tan 20°\tan 70°} = \frac{k}{0}$
$\therefore \tan 20°\tan 70° = 1$
এখন, $\tan(70° - 20°) = \frac{\tan 70° - \tan 20°}{1 + \tan 70°\tan 20°}$
$\Rightarrow \tan 50° = \frac{\tan 70° - \tan 20°}{2}$
$\Rightarrow \tan 70° = \tan 20° + 2\tan 50°$
$\Rightarrow \tan 70° = \tan(90° - 70°) + 2\tan(90° - 40°)$
$\therefore \tan 70° = \cot 70° + 2\cot 40° =$ R. H. S (Proved)

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $A + B + C = \frac{\pi}{2}$
$\Rightarrow 2A + 2B + 2C = \pi$
$\Rightarrow 2A = \pi - (2B + 2C)\ \cos 2A = \cos\{\pi - (2B + 2C)\}$
$\Rightarrow \cos 2A = -\cos(2B + 2C)$
$\Rightarrow \cos 2B\cos 2C = -(\cos 2B\cos 2C - \sin 2B\sin 2C$
$\Rightarrow \cos 2B\cos 2C = -\cos 2B\cos 2C + \sin 2B\sin 2C$
$\Rightarrow 2\cos 2B\cos 2C = \sin 2B\sin 2C$
$\Rightarrow \cot 2B\cot 2C = \frac{1}{2}$
$\therefore \cot 2B\cot 2C = \frac{1}{2}$ (Ans.)

21. $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \tan x$

[নটর ডেম কলেজ, ঢাকা

(খ) $f(A + B)g(C + D) = f(A - B)g(C - D)$ হলে, দেখাও যে, $h\left(\frac{\pi}{2} - A\right)h\left(\frac{\pi}{2} - B\right)h\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = h\left(\frac{\pi}{2} - D\right)$

Educationblog24.com

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $f(x) = \cos\alpha, f(x) = \sin x$

$f(A+B)g(C+D) = f(A-B)g(C-D)$

$\Rightarrow \cos(A+B)\sin(C+D) = \cos(A-B)\sin(C-D)$

$\Rightarrow \frac{\cos(A-B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin(C+D)}{\sin(C-D)} \Rightarrow \frac{\cos(A-B)+\cos(A+B)}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}$

$= \frac{\sin(C+D)+\sin(C-D)}{\sin(C+D)-\sin(C-D)}$ (যোজন-বিয়োজন)

$\Rightarrow \frac{2\cos A\cos B}{2\sin A\sin B} = \frac{2\sin C\cos D}{2\cos C\sin D} \Rightarrow \cot A\cot B = \tan C\cot D$

$\Rightarrow \cot A\cot B\cot C = \cot D$

$\Rightarrow h\left(\frac{\pi}{2}-A\right)h\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)h\left(\frac{\pi}{2}-C\right) = h\left(\frac{\pi}{2}-D\right)$ **(Showed)**

22. দৃশ্যকল্প-০১: $\sqrt{2}\sin A + \sin^3 B = \sin B$

$\sqrt{2}\cos A - \cos B = \cos^3 B$ [সরকারি বিজ্ঞান কলেজ, ঢাকা]

(খ) দৃশ্যকল্প-০১ হতে প্রমাণ কর যে, $\text{cosec}(A-B) = \pm 3$

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $\sqrt{2}\sin A + \sin^3 B = \sin B$

এবং $\sqrt{2}\cos A - \cos B = \cos^3 B$

আমরা জানি, $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \sin B\cos A$

$\Rightarrow \sin(A-B) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\sin A\cos B - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin B\sqrt{2}\cos A$

$\Rightarrow \sin(A-B) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin B - \sin^3 B)\cos B - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin B(\cos^3 B + \cos B)$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(A-B) = \sin B\cos B - \sin^3 B\cos B - \sin B\cos^3 B - \sin B\cos B$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(A-B) = -\sin B\cos B(\sin^2 B + \cos^2 B)$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(A-B) = -\frac{1}{2}\sin 2B$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}\sin(A-B) = -\sin 2B \ldots\ldots\ldots (1)$

আবার, $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos(A-B) = \sqrt{2}\cos A\cos B + \sqrt{2}\sin A\sin B$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos(A-B) = (\cos^3 B + \cos B)\cos B + (\sin B - \sin^3 B)\sin B$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos(A-B) = \cos^4 B + (\cos^2 B + \sin^2 B) - \sin^4 B$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos(A-B) = 1 + (\cos^2 B + \sin^2 B)(\cos^2 B - \sin^2 B)$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos(A-B) = 1 + \cos 2B$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos(A-B) - 1 = \cos 2B \ldots\ldots\ldots (2)$

(1), (2) নং বর্গ করে যোগ করে পাই,

$8\sin^2(A-B) + 2\cos^2(A-B) - 2\sqrt{2}\cos(A-B) + 1$

$= \sin^2 2B + \cos^2 2B$

$\Rightarrow 8 - 8\cos^2(A-B) + 2\cos^2(A-B) - 2\sqrt{2}\cos(A-B) + 1 = 1$

$\Rightarrow -6\cos^2(A-B) - 2\sqrt{2}\cos(A-B) + 8 = 0$

$\Rightarrow 3\cos^2(A-B) + \sqrt{2}\cos(A-B) - 4 = 0$

$\Rightarrow 3\cos^2(A-B) + 3\sqrt{2}\cos(A-B) - 2\sqrt{2}\cos(A-B) - 4 = 0$

$\Rightarrow 3\cos(A-B)\{\cos(A-B) + \sqrt{2}\} - 2\sqrt{2}\{\cos(A-B) + \sqrt{2}\} = 0$

$\Rightarrow \{\cos(A-B) + \sqrt{2}\}\{3\cos(A-B) - 2\sqrt{2}\} = 0$

$\cos(A-B) \neq \sqrt{2}$ [$\because -1 \le \cos(A-B) \le 1$]

$\therefore 3\cos(A-B) - 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \cos(A-B) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \sin(A-B) = \pm\sqrt{1-\cos^2(A-B)}$

$= \pm\sqrt{1-\frac{4\times 2}{9}} = \pm\sqrt{1-\frac{8}{9}} = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$

$\therefore \text{cosec}(A-B) = \frac{1}{\sin(A-B)} = \pm 3$ **(Proved)**

23. $\frac{1}{\text{cosec}\,\alpha} + \frac{1}{\text{cosec}\,\beta} = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sec\beta} - \frac{1}{\sec\alpha}\right) \ldots\ldots\ldots$ (i)

$A + B + C = n\pi \ldots\ldots\ldots$ (ii)

[বিএএফ শাহীন কলেজ, চট্টগ্রাম]

(খ) (i) নং উদ্দীপক ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে,

$\alpha - \beta = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{5}{6}}$

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $\frac{1}{\text{cosec}\,\alpha} + \frac{1}{\text{cosec}\,\beta} = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sec\beta} - \frac{1}{\sec\alpha}\right)$

$\Rightarrow \sin\alpha + \sin\beta = \sqrt{5}(\cos\beta - \cos\alpha)$

$\Rightarrow 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sqrt{5}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sqrt{5}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \Rightarrow \tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \sqrt{\sec^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sec^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 1 = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \sec^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{6}{5} \Rightarrow \sec\frac{\alpha-\beta}{2} = \sqrt{\frac{6}{5}} \Rightarrow \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

$\Rightarrow \alpha - \beta = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{5}{6}}$ (প্রমাণিত)

24. $\theta = 60°, P = \sin A\sin B$ এবং $Q = \sin C\sin D$

[আইডিয়াল স্কুল অ্যান্ড কলেজ, মতিঝিল]

(গ) $A = 20°, B = 2A, C = 3A, D = 4A$ হলে দেখাও যে, $16PQ = 3$

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $P = \sin A\sin B$, $Q = \sin C\sin D$

$A = 20°, B = 2A, C = 3A, D = 4A$

$PQ = \sin 20°\sin 40°\sin 60°\sin 80°$

$= \sin(90°-70°)\sin(90°-50°)\sin 60°\sin(90°-10°)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 70°\cos 50°\cos 10°$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(\cos 40° + \cos 60°)\cos 70°$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\cos 40° + \frac{1}{2}\right)\cos 70°$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}(2\cos 40°\cos 70° + \cos 70°)$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}(\cos 30° + \cos 110° + \cos 70°)$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(180°-70°) + \cos 70°\right\}$

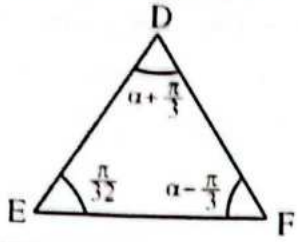
$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 70° + \cos 70°\right) = \frac{3}{16}$

$\therefore 16PQ = 3$ **(Showed)**

০৭

Educationblog24.com

25. [সিরাজগঞ্জ সরকারি কলেজ]



(খ) ΔDEF হতে প্রমাণ কর,

$$\tan D + \tan F = \frac{4\sin(D+F)}{1-4\sin^2\left(\frac{D+F}{2}\right)}$$

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $D = \alpha + \frac{\pi}{3}$; $F = \alpha - \frac{\pi}{3}$

বামপক্ষ $= \tan D + \tan F = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)} + \frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}$

$= \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}+\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\alpha-\sin^2\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin 2\alpha}{\frac{1}{2}\left(2\cos^2\alpha-2\sin^2\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha-2\sin^2\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{2\sin 2\alpha}{2-2\sin^2\alpha-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4\sin 2\alpha}{1-4\sin^2\alpha}$

$\therefore$ ডানপক্ষ $= \frac{4\sin(D+F)}{1-4\sin^2\left(\frac{D+F}{2}\right)} = \frac{4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}+\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{1-4\sin^2\left(\frac{\alpha+\frac{\pi}{3}+\alpha-\frac{\pi}{3}}{2}\right)} = \frac{4\sin 2\alpha}{1-4\sin^2\alpha}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (Proved)

26. দৃশ্যকল্প-১: $\sin A + \cos B = \cos A + \sin B$

[শ্রীমঙ্গল সরকারি কলে

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $A + B = 270°$

(খ) **Sol^n:** $\sin A + \sin B = \cos A + \sin B$

$\Rightarrow \sin A - \sin B = \cos A - \cos B$

$\Rightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{A+B}{2} = -\sin\frac{A+B}{2} \Rightarrow \tan\frac{A+B}{2} = -1$

$\Rightarrow \tan\frac{A+B}{2} = \tan(-45°) \Rightarrow \tan\frac{A+B}{2} = \tan(180° - 45°$

$\Rightarrow A + B = 135° \times 2 \therefore A + B = 270°$ (Showed)

নিজে করো

27. (ক) $\cos 75°$ এর মান নির্ণয় কর। (ক্যালকুলেটর ব্যতিত) [RB'19] [Ans: $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$]

28. (ক) $\cos 30°32'\cos 29°28' - \sin 149°28'\sin 29°28'$ এর মান নির্ণয় কর। [JB'19] [Ans: $\frac{1}{2}$]

29. (ক) $\frac{\cos 75°+\cos 15°}{\cos 75°-\cos 15°}$ এর মান নির্ণয় কর। [Ctg.B'17] [Ans: $-\sqrt{}$

30. (ক) $\cos 74°33'\cos 14°33' + \cos 75°27'\cos 15°27'$ এ মান বের কর। [SB'17] [Ans:

Type-04: গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত

Concept

গুণিতক কোণ: মৌলিক কোণগুলোকে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে যে কোণ পাওয়া যায় তাকে গুণিতক কোণ বলে। যেমন 2A, 3A, 5A ইত্যাদি।

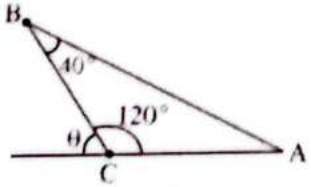
2A এর জন্য সূত্রসমূহ	3A এর জন্য সূত্রসমূহ
• $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$	• $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$
• $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$	• $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$
• $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$	• $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

➢ দ্বিঘাত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনকে একঘাতে পরিণত করার সূত্র: (i) $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$; (ii) $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$

➢ ত্রিঘাত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনকে একঘাতে পরিণত করার সূত্র: (i) $4\sin^3 A = 3\sin A - \sin 3A$; (ii) $4\cos^3 A = 3\cos A + \cos 3$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01.



[DB'23]

(ক) $\cot\theta = \sqrt{2}$ হলে $\cos 2\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে,

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{cosec} A - \frac{1}{4}\sec A = 1$$

(গ) উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে,

$$3 - \cos^2(\theta + A) - \cos^2 A - \cos^2(\theta - A) = \frac{3}{2}$$

(ক) Soln: দেওয়া আছে, $\cot\theta = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\tan\theta} = \sqrt{2} \therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

এখন আমরা জানি, $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$= \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$ (Ans.)

(খ) Soln: উদ্দীপকে ত্রিভুজ ABC -তে, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle A + 40^\circ + 120^\circ = 180^\circ \therefore \angle A = 20^\circ$

এখন, $\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{cosec} A - \frac{1}{4}\sec A = \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{cosec} 20^\circ - \frac{1}{4}\sec 20^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{4\sin 20^\circ} - \frac{1}{4\cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{4\sin 20^\circ \cos 20^\circ}$

$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ}{\sin(20^\circ \times 2)}$

$= \frac{\sin(60^\circ - 20^\circ)}{\sin 40^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = 1$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{cosec} A - \frac{1}{4}\sec A = 1$ (Showed)

(গ) Soln: 'খ' হতে পাই, $\angle A = 20^\circ$

আবার, $\theta = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

এখন, L. H. S $= 3 - \cos^2(\theta + A) - \cos^2 A - \cos^2(\theta - A)$

$= 3 - \cos^2 A - \frac{1}{2}\{2\cos^2(\theta + A) + 2\cos^2(\theta - A)\}$

$= 3 - \cos^2 A - \frac{1}{2}\{1 + \cos 2(\theta + A) + 1 + \cos 2(\theta - A)\}$

$= 3 - \cos^2 A - \frac{1}{2}\{2 + \cos 2(\theta + A) + \cos 2(\theta - A)\}$

$= 3 - \cos^2 A - 1 - \frac{1}{2}\{2\cos 2\theta \cos 2A\}$

$= 2 - \frac{1}{2}(1 + \cos 2A) - \cos 2\theta \cos 2A$

$= \frac{3}{2} - \frac{\cos 2A}{2} - \cos(2 \times 60^\circ)\cos 2A$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2A + \frac{1}{2}\cos 2A = \frac{3}{2}$ = R. H. S (Showed)

02. (ক) $\tan 3\theta$ কে $\tan\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [DB'23]

(ক) Soln: $\tan 3\theta = \tan(2\theta + \theta) = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta \tan\theta}$

$= \frac{\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} + \tan\theta}{1 - \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\tan\theta} = \frac{2\tan\theta + \tan\theta - \tan^3\theta}{1 - \tan^2\theta - 2\tan^2\theta} = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$ (Ans.)

03. (ক) $\tan\theta = \frac{y}{x}$ হলে দেখাও যে, $x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = x$. [RB'23]

(ক) Soln: $x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = x \cdot \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} + y \cdot \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$= x \cdot \frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} + y \cdot \frac{2\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y \cdot \frac{2xy}{x^2+y^2}$

$= \frac{x^3 - xy^2 + 2xy^2}{x^2+y^2} = \frac{x(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x$ (Showed)

04. (ক) প্রমাণ কর যে, $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$. [SB'23]

(ক) Soln: L. H. S $= \cos 5\theta = \cos(3\theta + 2\theta)$

$= \cos 3\theta \cos 2\theta - \sin 3\theta \sin 2\theta$

$= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1)$

$-(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) \cdot 2\sin\theta\cos\theta$

$= 8\cos^5\theta - 6\cos^3\theta - 4\cos^3\theta + 3\cos\theta$

$-(6\sin^2\theta \cdot \cos\theta - 8\sin^4\theta \cdot \cos\theta)$

$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta$

$-\{(6 - 6\cos^2\theta)\cos\theta - 8(1 - \cos^2\theta)^2 \cdot \cos\theta\}$

$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta$

$-\{6\cos\theta - 6\cos^3\theta - 8\cos\theta + 16\cos^3\theta - 8\cos^5\theta\}$

$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta - (-8\cos^5\theta$

$+10\cos^3\theta - 2\cos\theta)$

$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ = R. H. S (Ans.)

05. $\varphi(x) = \cos x$. [SB'23]

(খ) $\varphi(2x)\,\varphi(4x)\,\varphi(8x)\,\varphi(14x)$ এর মান নির্ণয় কর, যখন $x = \frac{\pi}{15}$.

(খ) Soln: দেওয়া আছে, $\varphi(x) = \cos x$

এখন, $\varphi(2x)\varphi(4x)\varphi(8x)\varphi(14x)$

$= \cos 2x \cdot \cos 4x \cos 8x \cos 14x$

$= \frac{1}{2\sin 2x}(2\sin 2x \cos 2x)\cos 4x \cos 8x \cos 14x$

$= \frac{1}{2\sin 2x}\sin 4x \cos 4x \cos 8x \cos 14x$

$= \frac{1}{4\sin 2x}\sin 8x \cos 8x \cos 14x$

$= \frac{1}{8\sin 2x}\sin 16x \cos 14x$

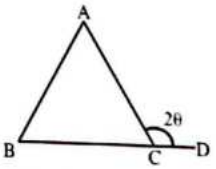
$= \frac{1}{8\sin 2x}\sin(\pi + x)\cos(\pi - x)$ $\left[x = \frac{\pi}{15} \Rightarrow 15x = \pi\right.$

$\Rightarrow 16x = \pi + x$ এবং $15x = \pi \Rightarrow 14x = \pi - x\left.\right]$

$= \frac{1}{8\sin 2x}(-\sin x)(-\cos x)$

$= \frac{1}{16\sin 2x}\sin 2x = \frac{1}{16}$ (Ans.)

06.

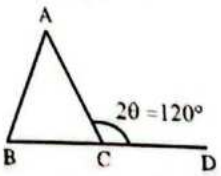


[RB'22]

(খ) $A + B = 120^\circ$ হলে উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $\sin^2(\theta + \alpha) + \sin^2(\theta - \alpha) - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$.

(খ) Soln: বহিঃস্থ কোণ $\angle ACD = \angle A + \angle B$

$\Rightarrow 2\theta = 120^\circ \Rightarrow \theta = 60^\circ$



L. H. S $= \sin^2(\alpha + \theta) + \sin^2(\theta - \alpha) - \cos^2\alpha$

$= \frac{1}{2}[2\sin^2(\theta + \alpha) + 2\sin^2(\theta - \alpha)] - \cos^2\alpha$

০৭

$= \frac{1}{2}[1 - \cos(2\theta + 2\alpha) + 1 - \cos(2\theta - 2\alpha)] - \cos^2\alpha$

$= \frac{1}{2}[2 - \cos(2\theta + 2\alpha) - \cos(2\theta - 2\alpha)] - \cos^2\alpha$

$= 1 - \frac{1}{2}[\cos(2\theta + 2\alpha) + \cos(2\theta - 2\alpha)] - \cos^2\alpha$

$= 1 - \frac{1}{2} \cdot 2\cos\left(\frac{2\theta+2\alpha+2\theta-2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\theta+2\alpha-2\theta+2\alpha}{2}\right) - \cos^2\alpha$

$= 1 - \cos 2\theta \cos 2\alpha - \cos^2\alpha$

$= 1 - \cos 120° \cos 2\alpha - \cos^2\alpha$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \cos 120° \cos 2\alpha - \cos^2\alpha$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha - \cos^2\alpha$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[1 + \cos 2\alpha] - \cos^2\alpha$

$= \frac{1}{2} + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$ = R. H. S **(Showed)**

07. **(ii) $M = \cos^3 x + \cos^3(60° - x) + \cos^3(60° + x)$** **[SB'22]**

(ক) **$3\tan\theta = 1$ হলে $\sin\left(\frac{\pi-4\theta}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।**

(গ) **(ii) নং থেকে দেখাও যে, $4M = (6\cos x - \cos 3x)$.**

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $3\tan\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{3}$

এখন, $\sin\left(\frac{\pi-4\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\sin\left(\frac{\pi-4\theta}{2}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9-1}{9+1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ **(Ans.)**

(গ) **Sol^n:** আমরা জানি, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x$

L. H. S $= 4M = 4[\cos^3 x + \cos^3(60° - x) + \cos^3(60° + x)]$

$= (\cos 3x + 3\cos x) + \{\cos(180° - 3x) +$

$3\cos(60° - x)\} + \{\cos(180° + 3x) + 3\cos(60° + x)\}$

$= \cos 3x + 3\cos x - \cos 3x + 3\cos(60° - x)$

$- \cos 3x + 3\cos(60° + x)$

$= 3\cos x - \cos 3x + 3[\cos(60° + x) + \cos(60° - x)]$

$= 3\cos x - \cos 3x + 3 \cdot 2\cos\frac{60°+x+60°-x}{2}\cos\frac{60°+x-60°+x}{2}$

$= 3\cos x - \cos 3x + 6\cos 60° \cos x$

$= 3\cos x - \cos 3x + 6 \times \frac{1}{2}\cos x$

$= 3\cos x - \cos 3x + 3\cos x$

$= 6\cos x - \cos 3x$ = R. H. S

L. H. S = R. H. S **(Showed)**

08. (ক) **$\cos 3A$ কে $\cos A$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।** **[MB'22]**

(ক) **Sol^n:** আমরা জানি, $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

$\cos 3A = \cos(2A + A) = \cos 2A \cdot \cos A - \sin 2A \cdot \sin A$

$= \cos 2A \cdot \cos A - 2\sin^2 A \cdot \cos A \because [\sin 2A = 2\sin A \cos A]$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\cos A(1 - \cos^2 A)$

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A$

$\therefore \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ **(Ans.)**

09. **$p = \tan A \cdot \tan B$, $q = \tan C \cdot \tan D$** **[RB'19]**

(খ) **$A = 20°, B = 2A, C = 3A, D = 4A$ হলে, দেখাও যে, $pq = 3$.**

(খ) **Sol^n:** L. H. S $= pq = \tan A \tan B \tan C \tan D$

$= \tan 20° \tan 40° \tan 60° \tan 80°$

$= \sqrt{3}\tan 20° \left(\frac{\tan 60° - \tan 20°}{1 + \tan 60° \tan 20°}\right)\left(\frac{\tan 60° + \tan 20°}{1 - \tan 60° \tan 20°}\right)$

$= \sqrt{3}\tan 20° \left(\frac{3 - \tan^2 20°}{1 - 3\tan^2 20°}\right)$

$= \sqrt{3}\left(\frac{3\tan 20° - \tan^3 20°}{1 - 3\tan^2 20°}\right) = \sqrt{3}\tan(3 \times 20°)$

$= \sqrt{3}\tan 60° = (\sqrt{3})^2 = 3$ = R. H. S

$\therefore$ L. H. S = R. H. S **(Showed)**

10. **$P = \tan\theta \tan 2\theta \tan 5\theta$.** **[Ctg.B'19]**

(গ) **$\theta = 40°$ হলে প্রমাণ কর যে, $P = \sqrt{3}$.**

(গ) **Sol^n:** এখানে, $\theta = 40°$

$\therefore$ L. H. S = P $= \tan 40° \tan 80° \tan 200°$

$= \tan 80 \tan(120° - 80°)\tan(120° + 80°)$

$= \tan 80° \frac{\tan 120° - \tan 80°}{1 + \tan 120° \tan 80°} \frac{\tan 120° + \tan 80°}{1 - \tan 120° \tan 80°}$

$= \tan 80° \frac{-\sqrt{3} - \tan 80°}{1 - \sqrt{3}\tan 80°} \frac{-\sqrt{3} + \tan 80°}{1 + \sqrt{3}\tan 80°}$

$= \tan 80° \frac{3 - \tan^2 80°}{1 - 3\tan^2 80°} = \frac{3\tan 80° - \tan^3 80°}{1 - 3\tan^2 80°}$

$= \tan(3 \times 80°) = \tan(240°) = \sqrt{3}$ **(Proved)**

11. (ক) **প্রমাণ কর যে, $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20°} - \frac{1}{\cos 20°} = 4$.** **[SB'19]**

(ক) **Sol^n:** L. H. S. $= \frac{\sqrt{3}}{\sin 20°} - \frac{1}{\cos 20°} = \frac{\sqrt{3}\cos 20° - \sin 20°}{\sin 20° \cos 20°}$

$= 4 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20° - \frac{1}{2}\sin 20°}{2\sin 20° \cos 20°} = 4 \cdot \frac{\sin 60° \cos 20° - \cos 60° \sin 20°}{\sin 40°}$

$= 4 \cdot \frac{\sin(60° - 20°)}{\sin 40°} = 4$ = R. H. S. **(Proved)**

12. **$X = \sin\alpha - \cos\alpha$, $Y = \cos\beta - \sin\beta$,** **[BB, Din.B'19]**
যেখানে $\alpha \neq \beta$, $P = \text{cosec}\, 20°$, $Q = \sec 20°$.

(ক) **$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3}$ হলে, $\cos 3\theta$ এর মান নির্ণয় কর।**

(গ) **প্রমাণ কর যে, $P + 3Q = 4\tan 50°$.**

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3} \therefore \cos\theta = \frac{1}{3}$

এখন, $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$= 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{23}{27}$ **(Ans.)**

(গ) **Sol^n:** [প্রশ্ন ভুল আছে, 3Q এর স্থলে $\sqrt{3}$Q হবে]

L. H. S = P + $\sqrt{3}$Q $= \text{cosec}\, 20° + \sqrt{3}\sec 20° = \frac{1}{\sin 20°} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 20°}$

$= \frac{\cos 20° + \sqrt{3}\sin 20°}{\sin 20° \cos 20°} = \frac{\frac{1}{2}\cos 20° + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20°}{\frac{1}{4} \times 2\sin 20° \cos 20°}$

$= \frac{\sin 30° \cos 20° + \cos 30° \sin 20°}{\frac{1}{4}\sin 40°}$

$= \frac{\sin(30° + 20°)}{\frac{1}{4} \times \sin(90° - 50°)} = 4 \cdot \frac{\sin 50°}{\cos 50°} = 4\tan 50°$ = R. H. S.

$\therefore$ P + $\sqrt{3}$Q $= 4\tan 50°$ **(Proved)**

13. **$p = \sin 2\alpha$, $q = \sin 2\beta$, $r = \cos 2\alpha$, $s = \cos 2\beta$, $t = \sin 2\gamma$** **[DB, SB, JB, Din.B'18]**

(খ) **যদি $p + q = c$, $r + s = d$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{d^2 - c^2}{d^2 + c^2}$.**

Educationblog24.com

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = c$ ..... (i)
$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = d$ ..... (ii)
(i) হতে পাই, $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = c$ ..... (iii)
(ii) হতে পাই, $2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = d$ ..... (iv)
(iii)/(iv) $\Rightarrow \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{c}{d} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{c}{d}$
এখন, L.H.S $= \cos(2\alpha+2\beta) = \cos 2(\alpha+\beta)$
$= \frac{1-\tan^2(\alpha+\beta)}{1+\tan^2(\alpha+\beta)} = \frac{1-\frac{c^2}{d^2}}{1+\frac{c^2}{d^2}} = \frac{d^2-c^2}{d^2+c^2}$ = R.H.S (Showed)

14. (i) $15A = 2\pi$
(ii) $A+B+C = \frac{\pi}{2}, \cos 2B \cos 2C = \cos 2A$
[রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ]

(খ) দেখাও যে, $16\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 7A = 1$.

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $A = \frac{2\pi}{15}$
L.H.S $= 16\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 7A$
$= \frac{8}{\sin A}(2\cos A\sin A)\cos 2A\cos 4A\cos 7A$
$= \frac{4}{\sin A}(2\sin 2A\cos 2A)\cos 4A\cos 7A$
$= \frac{2}{\sin A}(2\sin 4A\cos 4A)\cos 7A$
$= \frac{1}{\sin A}(2\sin 8A\cos 7A) = \frac{1}{\sin A}(\sin 15A + \sin A)$
$= \frac{1}{\sin A}(\sin 2\pi + \sin A) = 1 =$ R.H.S
$\therefore 16\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 7A = 1$ (Showed)

15. (i) $B = 18°$ [রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ]

(খ) দেখাও যে, $\sin B = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

(খ) Sol^n: এখানে, $B = 18 \therefore 5B = 90°$
এখন, $2B = 5B - 3B$
$\Rightarrow 2B = 90° - 3B$
$\Rightarrow \sin 2B = \sin(90° - 3B)$
$\Rightarrow 2\sin B\cos B = \cos 3B$
$\Rightarrow 2\sin B\cos B = 4\cos^3 B - 3\cos B$
$\Rightarrow 2\sin B = 4\cos^2 B - 3$
$\Rightarrow 2\sin B = 4(1-\sin^2 B) - 3$
$\Rightarrow 4\sin^2 B + 2\sin B - 1 = 0$
$\therefore \sin B = \frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8} = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{4}$
যেহেতু B সূক্ষ্মকোণ কাজেই $\sin B$ ধনাত্মক।
$\therefore \sin 18 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (Showed)

16. $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x, h(x) = \tan x$
[নটর ডেম কলেজ, ঢাকা]

(ক) যদি $2h(\alpha) = 3h(\beta)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $h(\alpha-\beta) = \frac{g(2\beta)}{5-f(2\beta)}$

(গ) উদ্দীপক হতে প্রমাণ কর যে, $g(20°)\,g(40°)g(80°) = \sqrt{3}f(20°)\,f(40°)f(80°)$

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, $h(x) = \tan x, g(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$
$2h(\alpha) = 3h(\beta) \Rightarrow 2\tan\alpha = 3\tan\beta \Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{2}\tan\beta$
L.H.S $= h(\alpha-\beta) = \tan(\alpha-\beta)$
$= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{3}{2}\tan\beta-\tan\beta}{1+\frac{3}{2}\tan^2\beta} = \frac{\tan\beta}{2+3\tan^2\beta} = \frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{2+3\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}}$
$= \frac{\sin\beta\cos\beta}{2\cos^2\beta+3\sin^2\beta} = \frac{2\sin\beta\cos\beta}{2\,2\cos^2\beta+3\,2\sin^2\beta} = \frac{\sin 2\beta}{2(1+\cos 2\beta)+3(1-\cos^2\beta)}$
$= \frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta} = \frac{g(2\beta)}{5-f(2\beta)}$ = R.H.S (Proved)

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $g(x) = \sin x; f(x) = \cos x$
L.H.S $= g(20°)g(40°)g(80°) = \sin 20°\sin 40°\sin 80°$
$= \sin(90°-70°)\sin(90°-50°)\sin(90°-10°)$
$= \cos 70°\cos 50°\cos 10°$
$= \frac{1}{2}\cos 70°(2\cos 50°\cos 10°)$
$= \frac{1}{2}\cos 70°(\cos 60° + \cos 40°)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 70° + \cos 40°\cos 70°\right)$
$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\cos 70° + \cos 110° + \cos 30°)$
$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left\{\cos 70° + \cos(180°-70°) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$
R.H.S $= \sqrt{3}f(20°)f(40°)f(80°)$
$= \sqrt{3}\cos 20°\cos 40°\cos 80°$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos 20°\cos 40°)\cos 80°$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 60° + \cos 20°)\cos 80°$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 80° + \cos 20°\cos 80°\right)$
$= \frac{\sqrt{3}}{4}(\cos 80° + \cos 100° + \cos 60°)$
$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\cos 80° + \cos(180°-80°) + \frac{1}{2}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$
$\therefore$ L.H.S = R.H.S (Proved)

17. দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{11}\right)$

(ক) $3\tan A = 1$ হলে, $\cos 4\left(-A - \frac{3\pi}{8}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। [দিনাজপুর সরকারি কলেজ]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে $f(1).f(2).f(3)$ ..... $f(10) = -2^n$ হলে n এর মান নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, $3\tan A = 1 \therefore \tan A = \frac{1}{3}$
প্রদত্ত রাশি $= \cos 4\left(-A - \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(4A + \frac{3\pi}{2}\right)$
$= \sin 4A = \sin 2\cdot 2A = 2\sin 2A\cdot\cos 2A$
$= 2\cdot\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}\cdot\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = 2\cdot\frac{2\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}}\cdot\frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}\left[\because \tan A = \frac{1}{3}\right]$
$= 2\cdot\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}}\cdot\frac{\frac{8}{9}}{\frac{10}{9}} = 2\times\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{9}{10} = \frac{24}{25}$ (Ans.)

০৭

Educationblog24.com

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{11}\right)$

প্রদত্ত সমীকরণ, $f(1).f(2).f(3) \ldots\ldots\ldots f(10) = -2^n$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{2\pi}{11}\cdot\cos\frac{3\pi}{11}\ldots\ldots\ldots\cos\frac{10\pi}{11} = -2^n$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{2\pi}{11}\cdot\cos\frac{3\pi}{11}\ldots\ldots\ldots\cos\frac{8\pi}{11}\cdot\cos\frac{9\pi}{11}\cdot\cos\frac{10\pi}{11} = -2^n$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{2\pi}{11}\cdot\cos\frac{3\pi}{11}\ldots\ldots\ldots\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{11}\right)$

$\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{11}\right)\cos\left(\pi-\frac{\pi}{11}\right) = -2^n$

$\Rightarrow -\left[\cos\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{2\pi}{11}\cdot\cos\frac{3\pi}{11}\ldots\ldots\ldots\cos\frac{3\pi}{11}\cdot\cos\frac{2\pi}{11}\cdot\cos\frac{\pi}{11}\right] = -2^n$

$\Rightarrow \left(\cos\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{2\pi}{11}\cdot\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cdot\cos\frac{5\pi}{11}\right)^2 = 2^n$

$\Rightarrow \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{11}}\left(2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}\right)^2 = 2^n$

$\Rightarrow \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{11}}\left(\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}\right)^2 = 2^n$

$\Rightarrow \frac{1}{4^2\sin^2\frac{\pi}{11}}\left(\sin\frac{4\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}\right)^2 = 2^n$

$\Rightarrow \frac{1}{4^3\sin^2\frac{\pi}{11}}\left(\sin\frac{8\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}\right)^2 = 2^n$

$\Rightarrow \frac{1}{4^3\sin^2\frac{\pi}{11}}\left(\sin\frac{3\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}\right)^2 = 2^n$

$\Rightarrow \frac{1}{4^4\sin^2\frac{\pi}{11}}\left(\sin\frac{6\pi}{11}\cdot\cos\frac{5\pi}{11}\right)^2 = 2^n$

$\Rightarrow \frac{1}{4^4\sin^2\frac{\pi}{11}}\left(\sin\frac{5\pi}{11}\cdot\cos\frac{5\pi}{11}\right)^2 = 2^n$

$\Rightarrow \frac{1}{4^5\sin^2\frac{\pi}{11}}\left(\sin\frac{10\pi}{11}\right)^2 = 2^n$

$\Rightarrow \frac{1}{4^5\sin^2\frac{\pi}{11}}\times\sin^2\frac{\pi}{11} = 2^n$

$\Rightarrow 4^{-5} = 2^n \Rightarrow 2^n = 2^{-10} \therefore n = -10$ **(Ans.)**

18. **(i)** $f(x) = \sin x$ [বগুড়া ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ]

(গ) উদ্দীপকের সাহায্যে প্রমাণ করে যে,

$\{f(x)\}^3 + \{f(120^\circ + x)\}^3 + \{f(240^\circ + x)\}^3 = \frac{-3}{4}f(3x)$

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

L. H. S $= \{f(x)\}^3 + \{f(120^\circ + x)\}^3 + \{f(240^\circ + x)\}^3$

$= \sin^3 x + \sin^3(120^\circ + x) + \sin^3(240^\circ + x)$

$= \frac{1}{4}\{4\sin^3 x + 4\sin^3(120^\circ + x) + 4\sin^3(240^\circ + x)\}$

$= \frac{1}{4}\{3\sin x - \sin 3x + 3\sin(120^\circ + x) - \sin 3(120^\circ + x)$

$+3\sin(240^\circ + x) - \sin 3(240^\circ + x)\}$

$= \frac{1}{4}[3\sin x - \sin 3x + 3\{\sin(120^\circ + x) +$

$\sin(240^\circ + x)\} - \sin(360^\circ + 3x) - \sin(720^\circ + 3x)]$

$= \frac{1}{4}[3\sin x - \sin 3x + 3.2\sin(180^\circ + x)\cos 60^\circ$

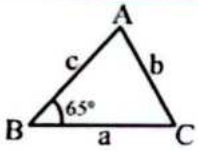
$- \sin 3x - \sin 3x]$

$= \frac{1}{4}\left[3\sin x - 3\sin x - 3.2\sin x\cdot\frac{1}{2}\right]$

$= \frac{1}{4}[3\sin x - 3\sin 3x - 3\sin x]$

$= -\frac{3}{4}\sin 3x = -\frac{3}{4}f(3x) =$ R. H. S **(Proved)**

নিজে করো

19. 

[RB'22]

(খ) $C = 75^\circ$ হলে উদ্দীপক হতে দেখাও যে,

$\sec 2A - \sqrt{3}\,\text{cosec}\,2A = 4$.

20. (ক) $\tan\beta = \frac{1}{3}$ হলে, $\sin 2\beta$ এর মান নির্ণয় কর। [JB'17] [Ans: $\frac{3}{5}$]

21. $A = \frac{2\pi}{15}$ [CB'17]

(ক) প্রমাণ কর যে, $\cos 2p = \frac{1-\tan^2 p}{1+\tan^2 p}$।

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,

$16\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 7A = 1$

Type-05: উপগুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতির অনুপাত সংক্রান্ত

Concept

উপগুণিতক কোণ: মৌলিক কোণগুলোকে কোনো প্রকৃত ভগ্নাংশ দ্বারা গুণ করলে যে কোণ পাওয়া যায় তাকে উপগুণিতক কোণ বলে। যেমন: $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{5}$ ইত্যাদি।

Formulae:

$\frac{A}{2}$ এর জন্য সূত্রসমূহ	$\frac{A}{3}$ এর জন্য সূত্রসমূহ
♦ $\sin A\cdot\sin\left(2\cdot\frac{A}{2}\right) = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$	♦ $\sin A = \sin\left\{3\cdot\left(\frac{A}{3}\right)\right\} = 3\sin\left(\frac{A}{3}\right) - 4\sin^3\left(\frac{A}{3}\right)$
♦ $\cos A = \cos\left\{2\cdot\left(\frac{A}{2}\right)\right\} = \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$ $= 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$	♦ $\cos A = \cos\left\{3\cdot\left(\frac{A}{3}\right)\right\} = 4\cos^3\left(\frac{A}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{A}{3}\right)$
♦ $\tan A = \tan\left\{2\cdot\left(\frac{A}{2}\right)\right\} = \frac{2\tan\left(\frac{A}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$	♦ $\tan A = \tan\left\{3\cdot\left(\frac{A}{3}\right)\right\} = \frac{3\tan\left(\frac{A}{3}\right)-\tan^3\left(\frac{A}{3}\right)}{1-3\tan^2\left(\frac{A}{3}\right)}$

Educationblog24.com

Shortcut:

(i) $2\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ \ldots\ldots\ldots (n-1)\text{ সংখ্যক }2}}}$

(ii) $2\sin\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ \ldots\ldots\ldots (n-1)\text{ সংখ্যক }2}}}$

(iii) $2\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^n} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ \ldots\ldots\ldots (n-1)\text{ সংখ্যক }2}+\sqrt{3}}}$

(iv) $2\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots (n-1)\text{ সংখ্যক }2}+\sqrt{3}}}$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01 দৃশ্যকল্প-২: $\cos x + \cos y = a, \sin x + \sin y = b$

(খ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $\cos(x+y)$ এর মান a ও b এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [DB'23]

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $\cos x + \cos y = a$

$\Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $\sin x + \sin y = b$

$\Rightarrow 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = b \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(ii) $\div$ (i) $\Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow \frac{\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{\cos 2\frac{x+y}{2}}{1} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

$\therefore \cos(x+y) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ (Ans.)

02 $\varphi(x) = \cos x$. [SB'23]

(গ) $p\varphi(x) + q\varphi(y) = r = p\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + q\,\varphi\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$

হলে দেখাও যে, $\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{2r^2-(p-q)^2}{4pq}}$.

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $\varphi(x) = \cos x\ \varphi(y) = \cos y$

আবার, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$

$\varphi\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \sin y$

$\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) = \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

এখন, $P\varphi(x) + q\varphi(y) = r = p\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + q\varphi\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$

$\Rightarrow p\cos x + q\cos y = r = p\sin x + q\sin y$

$\therefore p\cos x + q\cos y = r \ldots\ldots\ldots$ (i) এবং

$p\sin x + q\sin y = r \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) এবং (ii) নং কে বর্গ করে যোগ করে পাই,

$p^2\cos^2 x + q^2\cos^2 y + 2pq\cos x\cos y + p^2\sin^2 x + q^2\sin^2 y + 2pq\sin x\sin y = r^2 + r^2$

$\Rightarrow p^2 + q^2 + 2pq(\cos x\cos y + \sin x\sin y) = 2r^2$

$\Rightarrow p^2 + q^2 + 2pq\cdot\cos(x-y) = 2r^2$

$\Rightarrow 2pq\cdot\cos(x-y) = 2r^2 - p^2 - q^2$

$\Rightarrow 2pq\cos(x-y) + 2pq = 2r^2 - p^2 - q^2 + 2pq$

$\Rightarrow 2pq\{\cos(x-y)+1\} = 2r^2 - (p-q)^2$

$\Rightarrow 2\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{2r^2-(p-q)^2}{2pq} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{2r^2-(p-q)^2}{4pq}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{2r^2-(p-q)^2}{4pq}}$

$\therefore \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{2r^2-(p-q)^2}{4pq}}$ (Showed)

03. (ক) প্রমাণ কর যে, $2\cos x = \sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4x}}$. [JB'23]

(ক) L.H.S $= 2\cos x = \sqrt{4\cos^2 x}$

$= \sqrt{2+4\cos^2 x - 2} = \sqrt{2+2\cos 2x}$

$= \sqrt{2+\sqrt{4\cos^2 2x}} = \sqrt{2+\sqrt{2+2(2\cos^2 2x-1)}}$

$= \sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4x}}$ = R.H.S (Proved)

04. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \cos x$ [Din.B'23]

(খ) $f(\alpha) + f(\beta) = a$ এবং $f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = b$

হলে প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$

$f(\alpha) + f(\beta) = a \Rightarrow \cos\alpha + \cos\beta = a \ldots\ldots\ldots$ (i)

আর $f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = b$

$\Rightarrow \sin\alpha + \sin\beta = b \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(ii) হতে পাই, $\sin\alpha + \sin\beta = b$

$\Rightarrow 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = b \ldots\ldots\ldots$ (iii)

(i) হতে পাই, $\cos\alpha + \cos\beta = a$

$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = a \ldots\ldots\ldots$ (iv)

Educationblog24.com

(iii) ÷ (iv) হতে পাই, $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow \sec^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - 1 = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \sec^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{a^2+b^2}{a^2}$

$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{a^2}{a^2+b^2} \therefore \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

তাহলে, $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}}$

$= \sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}} = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \therefore \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (Proved)

05. (ক) দেখাও যে, $\sin\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. [MB'23]

(ক) **Sol^n:** L. H. S. $= \sin\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\times 2\sin\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{16}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2\left(2\sin^2\frac{\pi}{16}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{8}}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+2\times\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ = R. H. S (Showed)

06. দৃশ্যকল্প-২: $\sec\theta = \frac{m-n\cos\phi}{m\cos\phi-n}$, $m = \frac{P+Q}{2}$, $n = \frac{P-Q}{2}$. [SB'22]

(ক) $\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\sin\theta}}$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে প্রমাণ কর যে, $\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{P}} = \frac{\tan\frac{\phi}{2}}{\sqrt{Q}}$.

(ক) **Sol^n:** $\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\sin\theta}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}}$

$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}} = 1$ (Ans.)

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $m = \frac{P+Q}{2} \therefore 2m = P+Q$ ..... (i)

$n = \frac{P-Q}{2} \therefore 2n = P-Q$ ..... (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2(m+n) = 2P \therefore P = m+n$

(i) − (ii) $\Rightarrow 2(m-n) = 2Q \therefore Q = m-n$

এখন, $\sec\theta = \frac{m-n\cos\phi}{m\cos\phi-n} \Rightarrow \cos\theta = \frac{m\cos\phi-n}{m-n\cos\phi}$

$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{m\frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}}-n}{m-n\frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}}}$

$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{m-m\tan^2\frac{\phi}{2}-n-n\tan^2\frac{\phi}{2}}{m+m\tan^2\frac{\phi}{2}-n+n\tan^2\frac{\phi}{2}}$

$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{(m-n)-(m+n)\tan^2\frac{\phi}{2}}{(m-n)+(m+n)\tan^2\frac{\phi}{2}} = \frac{Q-P\tan^2\frac{\phi}{2}}{Q+P\tan^2\frac{\phi}{2}}$

$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}+1+\tan^2\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}-1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{Q-P\tan^2\frac{\phi}{2}+Q+P\tan^2\frac{\phi}{2}}{Q-P\tan^2\frac{\phi}{2}-Q-P\tan^2\frac{\phi}{2}}$ [যোজন-বিয়োজন]

$\Rightarrow \frac{2}{-2\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2Q}{-2P\tan^2\frac{\phi}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{Q}{P\tan^2\frac{\phi}{2}}$

$\Rightarrow \frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{P} = \frac{\tan^2\frac{\phi}{2}}{Q} \therefore \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{P}} = \frac{\tan\frac{\phi}{2}}{\sqrt{Q}}$ (Proved)

07. (ক) $T = \sec x + \tan x$.

(খ) (ক) নং থেকে প্রমাণ কর যে, $T = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$.

(খ) **Sol^n:** (ক) নং হতে পাই, $T = \sec x + \tan x$

$= \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

$[\sin x = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right);\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)]$

$= \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{2\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}}{2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$

$\therefore T = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ (প্রমাণিত)

বিকল্প: $T = \sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$

$= 1 + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$

$= \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}$

$= \frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}} = \frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}} = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}$

$\therefore T = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ (Proved)

08. (ক) প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos 6x}}} = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{3x}{2}$. [Din.B.]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, L. H. S $= \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos 6x}}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+2(2\cos^2 3x-1)}}}$

$[\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta-$

$= \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+4\cos^2 3x-2}}} = \frac{1}{\sqrt{2-2\cos 3x}} = \frac{1}{\sqrt{2-2(1-2\sin^2\frac{3x}{2})}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2-2+4\sin^2\frac{3x}{2}}} = \frac{1}{2\sin\frac{3x}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{3x}{2}$ = R.H.S (Proved)

09. (ক) দেখাও যে, $\sec\frac{5x}{2} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 10x}}}$ [DB

(ক) **Sol^n:** R.H.S: $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 10x}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 10x)}}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2.2\cos^2 5x}}} = \frac{2}{\sqrt{2+2\cos 5x}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2(1+\cos 5x)}} = \frac{2}{\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{5x}{2}}} = \frac{2}{2\cos\frac{5x}{2}}$

$= \sec\frac{5x}{2}$ = L. H. S (Showed)

Educationblog24.com

বিকল্প: $L.H.S = \sec\frac{5x}{2} = \frac{1}{\cos\frac{5x}{2}} = \frac{2}{2\cos\frac{5x}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2\cdot2\cos^2\frac{5x}{2}}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2(1+\cos5x)}} = \frac{2}{\sqrt{2+2\cos5x}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2.2\cos^2 5x}}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos10x)}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos10x}}} = R.H.S$ **(Showed)**

10. দৃশ্যকল্প-১: ΔABC এর $A = 75°$, $B - C = 15°$ **[JB'19]**

(খ) দৃশ্যকল্প-১ অনুযায়ী দেখাও যে, $\cos\frac{C}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+3}}$.

(খ) **Sol^n:** [বি.দ্র: প্রশ্নে $\cos\left(\frac{C}{8}\right)$ এর স্থলে $\cos\left(\frac{B}{8}\right)$ দিতে হবে]

$A + B + C = 180°$

$\Rightarrow B + C = 180° - A = 180° - 75° = 105°$ ..... (i)

$B - C = 15°$ ..... (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2B = 120° \Rightarrow B = 60° \Rightarrow \frac{B}{8} = \frac{60°}{8} = \frac{15°}{2}$

$L.H.S = \cos\frac{B}{8} = \cos\frac{15°}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\times2\cos^2\frac{15°}{2}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2(1+\cos15°)} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2\times2\cos^2 15°}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos30°)}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} = R.H.S$ **(Showed)**

11. দৃশ্যকল্প-২: $\sin x = a - \sin y$, $\cos x = b - \cos y$ **[CB'19]**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{1}{2}(x-y) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2-b^2}$.

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $\sin x = a - \sin y$

$\therefore \sin x + \sin y = a$ ..... (i)

আবার, $\cos x = b - \cos y \ \therefore \cos x + \cos y = b$ ..... (ii)

(i) ও (ii) কে বর্গ করে যোগ করে পাই,

$\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y + 2\sin x\sin y + 2\cos x\cos y = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 2 + 2\cos(x-y) = a^2 + b^2 \Rightarrow \cos(x-y) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$

$\Rightarrow -\cos(x-y) = \frac{2-a^2-b^2}{2}$

$\Rightarrow 1 - \cos(x-y) = \frac{2-a^2-b^2}{2} + 1$

$\Rightarrow 2\sin^2\frac{1}{2}(x-y) = \frac{4-a^2-b^2}{2}$

$\Rightarrow \sin^2\frac{1}{2}(x-y) = \frac{4-a^2-b^2}{4}$

$\therefore \sin\frac{1}{2}(x-y) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2-b^2}$ **(Proved)**

12. (ক) প্রমাণ কর যে, $\sec\frac{3x}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{8+8\cos6x}}}$ **[DB, SB, JB, Din.B'18]**

(ক) **Sol^n:** $R.H.S = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{8+8\cos6x}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2(1+\cos6x)}}}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+4\cos3x}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\cos3x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}}$

$= \sec\frac{3x}{2} = L.H.S$ **(Proved)**

13. দৃশ্যকল্প-২: $\sqrt{1+n}.\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-n}.\tan\frac{\beta}{2}$. **[JB'17]**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে দেখাও যে, $\cos\beta = \frac{\cos\alpha - n}{1-n\cos\alpha}$।

(গ) **Sol^n:** $\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta}{2}} = \frac{\sqrt{1-n}}{\sqrt{1+n}} \therefore \tan\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{1-n}}\tan\frac{\alpha}{2}$

$\therefore \cos\beta = \frac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}} = \frac{1-\frac{1+n}{1-n}\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\frac{1+n}{1-n}\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{(1-n)-(1+n)\tan^2\frac{\alpha}{2}}{(1-n)+(1+n)\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}(1-n)-(1+n)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}(1-n)+(1+n)\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}-n\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-n\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$

$= \frac{\cos\alpha - n}{1-n\cos\alpha}$ **(Showed)**

14. $\angle E + \angle F = 65°$, $\angle F - \angle E = 25°$ **[JB'17]**

(খ) দেখাও যে, $2\sin\left(\pi + \frac{F}{4}\right) = -\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

(খ) **Sol^n:** $\angle F = \frac{65°+25°}{2} = 45° = \frac{\pi}{4}$

$L.H.S = 2\sin\left(\pi + \frac{\pi}{16}\right) = -2\sin\frac{\pi}{16} = -\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{16}}$

$= -\sqrt{2\times2\sin^2\frac{\pi}{16}} = -\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)}$

$= -\sqrt{2-\sqrt{\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}} = -\sqrt{2-\sqrt{2\times\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}}$

$= -\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = R.H.S$ **(Showed)**

নিজে করো

15. দৃশ্যকল্প-২: $\sin C + \sin D = p$; $\cos C + \cos D = q$ **[BB'17]**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{C-D}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-p^2-q^2}$ ।

16. দৃশ্যকল্প-১ $\sin x + \sin y = a$ এবং $\cos x + \cos y = b$ দুইটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ। **[CB'17]**

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $\cos(x+y)$ এর মান নির্ণয় কর। **[Ans: $\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$]**

17. $f(x) = \sin x$ এবং $g(x) = \cos x$ **[Din.B'17]**

(খ) $f(x) + f(y) = p$ এবং $g(x) + g(y) = q$ হলে প্রমাণ কর যে, $f\left(\frac{x-y}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-p^2-q^2}$

Educationblog24.com

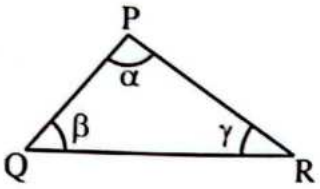
Type-06: ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী সংক্রান্ত

Concept

এধরনের ম্যাথে প্রমাণ যা চাওয়া হয়েছে এবং যে special শর্ত (যেমন: $A+B+C=\pi$, $A+B+C=\frac{\pi}{2}$, $\alpha+\beta+\gamma=0$) দেওয়া আছে সেটার দিকে খেয়াল রেখে তারপর Formula apply করতে হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01.



যেখানে $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ [Ctg.B'23]

(খ) প্রমাণ কর: $\sin^2\alpha-\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

$$\text{L. H. S}=\sin^2\alpha-\sin^2\beta+\sin^2\gamma$$
$$=\frac{1}{2}(2\sin^2\alpha-2\sin^2\beta)+\sin^2\gamma$$
$$=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha-1+\cos2\beta)+\sin^2\gamma$$
$$=\frac{1}{2}(\cos2\beta-\cos2\alpha)+\sin^2\gamma$$
$$=\frac{1}{2}\times2\sin\frac{2\beta+2\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha-2\beta}{2}+\sin^2\gamma$$
$$=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\sin^2\gamma$$
$$=\sin(\pi-\gamma)\sin(\alpha-\beta)+\sin^2\gamma$$
$$=\sin\gamma\{\sin(\alpha-\beta)+\sin\gamma\}$$
$$=\sin\gamma\{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\pi-(\alpha+\beta))\}$$
$$=\sin\gamma\{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\}$$
$$=\sin\gamma\times2\sin\alpha\cos\beta=2\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma=\text{R. H. S.}$$

(Proved)

02. $A+B+C=\frac{\pi}{2}$. [SB'23]

(খ) উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে,
$\cos(B+C)+\cos(C+A)+\cos(A+B)=1+4\sin\frac{\pi-2A}{4}\sin\frac{\pi-2B}{4}\sin\frac{\pi-2C}{4}$.

(গ) উদ্দীপকের আলোকে যদি $\tan A+\tan B+\tan C=\sqrt{3}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $A=B=C$.

(খ) Sol^n: $\text{L. H. S}=\cos(B+C)+\cos(C+A)+\cos(A+B)$
$$=\cos(A+B+C-A)+\cos(A+B+C-B)+\cos(A+B)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+\cos(A+B)$$
$$=\sin A+\sin B+\cos(A+B)$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{A+B}{2}$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\right)+1$$
$$=1+2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-C}{2}\right)\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)\right\}$$
$$=1+2\sin\frac{\pi-2C}{4}2\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-B}{2}\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-A}{2}$$
$$=1+4\sin\frac{\pi-2C}{4}\sin\frac{\pi-2B}{4}\cdot\sin\frac{\pi-2A}{4}$$
$$=1+4\sin\frac{\pi-2A}{4}\cdot\sin\frac{\pi-2B}{4}\cdot\sin\frac{\pi-2C}{4}=\text{R. H. S (Show}$$

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $A+B+C=\frac{\pi}{2}$

এবং $\tan A+\tan B+\tan C=\sqrt{3}$

এখন, $A+B+C=\frac{\pi}{2}\Rightarrow A+B=\frac{\pi}{2}-C$

$\Rightarrow\tan(A+B)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-C\right)$

$\Rightarrow\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\cot C=\frac{1}{\tan C}$

$\Rightarrow\tan C\tan A+\tan B\tan C=1-\tan A\tan B$

$\therefore\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1$

আবার, $\tan A+\tan B+\tan C=\sqrt{3}$

$\Rightarrow\tan^2A+\tan^2B+\tan^2C+2\tan A\tan B$
$+2\tan B\tan C+2\tan C\tan$

$=3(\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A)$

$\Rightarrow\tan^2A+\tan^2B+\tan^2C-\tan A\tan B$
$-\tan B\tan C-\tan C\tan A=$

$\Rightarrow2\tan^2A+2\tan^2B+2\tan^2C-2\tan A\tan B$
$-2\tan B\tan C-2\tan C\tan A=$

$\Rightarrow(\tan A-\tan B)^2+(\tan B-\tan C)^2$
$+(\tan C-\tan A)^2=$

আমরা জানি, কতগুলো বর্গরাশির যোগফলের মান শূন্য হ
তাদের প্রত্যেকের মান শূন্য হবে।

$\therefore\tan A-\tan B=0$	$\tan B-\tan C=0$	$\tan C-\tan A=$
$\Rightarrow\tan A=\tan B$	$\Rightarrow\tan B=\tan C$	$\Rightarrow\tan C=\tan$
$\therefore A=B$	$\Rightarrow B=C$	$\therefore C=A$

$\therefore A=B=C$ **(Proved)**

03. PQR একটি ত্রিভুজ। [JB

(খ) উদ্দীপক হতে প্রমাণ কর যে, $1+4\sin\frac{Q+R}{4}\cdot\sin\frac{R+P}{4}\cdot\sin\frac{P+Q}{4}=\sin\frac{P}{2}+\sin\frac{Q}{2}+\sin\frac{R}{2}$

Educationblog24.com

(ঘ) Sol^n: দেওয়া আছে, PQR একটি ত্রিভুজ।

$\therefore P+Q+R = 180° \Rightarrow \frac{P}{2}+\frac{Q}{2}+\frac{R}{2} = 90°$

$R.H.S = \sin\frac{P}{2}+\sin\frac{Q}{2}+\sin\frac{R}{2}$

$= 2\sin\frac{P+Q}{4}\cos\frac{P-Q}{4}+\sin\left(90°-\frac{P+Q}{2}\right)$

$= 2\sin\frac{P+Q}{4}\cos\frac{P-Q}{4}+\cos\frac{P+Q}{2}$

$= 2\sin\frac{P+Q}{4}\cos\frac{P-Q}{4}+1-2\sin^2\frac{P+Q}{4}$

$= 1+2\sin\frac{P+Q}{4}\left(\cos\frac{P-Q}{4}-\sin\frac{P+Q}{4}\right)$

$= 1+2\sin\frac{P+Q}{4}\left\{\cos\frac{P-Q}{4}-\sin\left(90°+\frac{P+Q-360°}{4}\right)\right\}$

$= 1+2\sin\frac{P+Q}{4}\left(\cos\frac{P-Q}{4}-\cos\frac{P+Q-360°}{4}\right)$

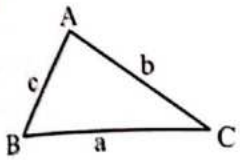
$= 1+2\sin\frac{P+Q}{4}\cdot 2\sin\left(\frac{2P-360°}{8}\right)\sin\left(\frac{2Q-360°}{8}\right)$

$= 1+4\sin\frac{P+Q}{4}\sin\left(\frac{P-180°}{4}\right)\sin\left(\frac{Q-180°}{4}\right)$

$= 1+4\sin\frac{P+Q}{4}\sin\left(\frac{P-P-Q-R}{4}\right)\sin\left(\frac{Q-P-Q-R}{4}\right)$

$= 1+4\sin\frac{P+Q}{4}\sin\frac{Q+R}{4}\sin\frac{R+P}{4} = L.H.S$ **(Proved)**

04.



[MB'23]

(গ) ABC ত্রিভুজ হতে,
$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A\cos B\cos C$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: ΔABC এ, $A+B+C = \pi \Rightarrow A+B = \pi - C$

$\Rightarrow \cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$ ..... (i)

$\Rightarrow \cos C = -\cos(A+B)$ ..... (ii)

$\therefore \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1}{2}(2\sin^2 A + 2\sin^2 B) + \sin^2 C$

$= \frac{1}{2}(2 - \cos 2A - \cos 2B) + \sin^2 C$

$= 1 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \sin^2 C$

$= 1 - \frac{1}{2}\times 2\cos\frac{2A+2B}{2}\cdot\cos\frac{2A-2B}{2} + \sin^2 C$

$= 1 - \cos(A+B).\cos(A-B) + \sin^2 C$

$= 1 + \cos C\cos(A-B) + 1 - \cos^2 C$ [(i) হতে]

$= 2 + \cos C\{\cos(A-B) - \cos C\}$

$= 2 + \cos C\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$ [(ii) হতে]

$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

$\therefore \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A\cos B\cos C = 2$

(Ans.)

05. উদ্দীপক-I: ΔABC এ $A+B+C = \pi$ [CB'23]

(ক) উদ্দীপক-I: থেকে প্রমাণ কর যে,
$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

(গ) উদ্দীপক-I: থেকে প্রমাণ কর যে,
$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2} = 1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$।

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, $A+B+C = \pi \Rightarrow A+B = \pi - C$

$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan(\pi - C)$

$\Rightarrow \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} = -\tan C$

$\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A\tan B\tan C$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$ **(Proved)**

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $A+B+C = \pi$

$L.H.S. = \sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{2}\left\{2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin^2\frac{B}{2}\right\}+\sin^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{2}\{1-\cos A+1-\cos B\}+\sin^2\frac{C}{2}$

$= 1-\frac{1}{2}(\cos A+\cos B)+\sin^2\frac{C}{2}$

$= 1-\frac{1}{2}\times 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin^2\frac{C}{2}$

$= 1-\cos\left(\frac{\pi-C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin^2\frac{C}{2}$

$= 1-\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin^2\frac{C}{2}$

$= 1-\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\sin\frac{C}{2}\right\}$

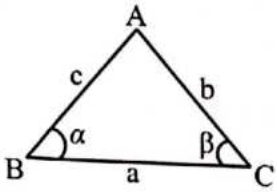
$= 1-\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)\right\}$

$= 1-\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right\}$

$= 1-\sin\frac{C}{2}\times 2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}$

$= 1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = R.H.S$ **(Proved)**

06.



[DB'22]

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B} = 2$.

(খ) Sol^n: এখানে, $A+B+C = \pi$

$\therefore L.H.S = \frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}$

$= \frac{\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C}{\sin A\sin B\sin C}$

$= \frac{\sin 2A+\sin 2B+2\sin C\cos C}{2\sin A\sin B\sin C}$

$= \frac{2\sin\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2}+2\sin C\cos C}{2\sin A\sin B\sin C}$

$= \frac{2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C}{2\sin A\sin B\sin C}$

$= \frac{2\sin(\pi-C)\cos(A-B)+2\sin C\cdot\cos\{\pi-(A+B)\}}{2\sin A\sin B\sin C}$

$= \frac{2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)}{2\sin A\sin B\sin C}$

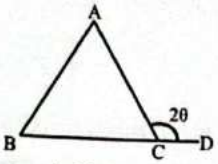
$= \frac{2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]}{2\sin A\sin B\sin C}$

$= \frac{2\sin C.2\sin\frac{A-B+A+B}{2}\sin\frac{A+B-A+B}{2}}{2\sin A\sin B\sin C}$

$= \frac{4\sin C.\sin A.\sin B}{2\sin A\sin B\sin C} = 2 = R.H.S$ (প্রমাণিত)

Educationblog24.com

07.



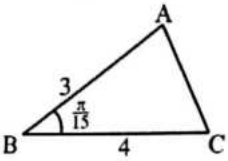
[RB'22]

(গ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,
$\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = -4\cos A \sin B \cos 2\theta$.

(গ) Sol^n: এখানে, $A + B + C = \pi$
আবার, $C + 2\theta = \pi \Rightarrow C = \pi - 2\theta$
L. H. S $= \sin 2A - \sin 2B + \sin 2C$
$= (\sin 2A + \sin 2C) - \sin 2B$
$= 2\sin\frac{2A+2C}{2}\cos\frac{2A-2C}{2} - \sin 2B$
$= 2\sin(A + C)\cos(A - C) - 2\sin B\cos B$
$= 2\sin(\pi - B)\cos(A - C) - 2\sin B\cos B$
$= 2\sin B \cdot \cos(A - C) - 2\sin B\cos B$
$= 2\sin B\,[\cos(A - C) - \cos\{\pi - (A + C)\}]$
$= 2\sin B\,[\cos(A - C) + \cos(A + C)]$
$= 2\sin B \cdot 2\cos\frac{A-C+A+C}{2}\cos\frac{A-C-A-C}{2}$
$= 4\sin B\cos A \cdot \cos(-C) = 4\sin B\cos A \cdot \cos C$
$= 4\sin B\cos A \cdot \cos(\pi - 2\theta) = -4\cos A\sin B\cos 2\theta$
$\therefore$ L. H. S = R. H. S **(Proved)**

08.

$A + B + C = \pi$ এবং



[Ctg.B'22]

(খ) প্রমাণ কর: $\cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\sin A\cos B\sin C$.

(খ) Sol^n: ΔABC এ, $A + B + C = \pi$
L. H. S $= \cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 C$
$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2C) - \cos^2 B$
$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2C) - \cos^2 B$
$= 1 + \cos(A + C)\cos(A - C) - \cos^2 B$
$= 1 + \cos(\pi - B)\cos(A - C) - \cos^2 B$
$= 1 - \cos B \cdot \cos(A - C) - \cos^2 B$
$= 1 - \cos B\,[\cos(A - C) + \cos B]$
$= 1 - \cos B \cdot [\cos(A - C) + \cos\{\pi - (A + C)\}]$
$= 1 - \cos B \cdot [\cos(A - C) - \cos(A + C)]$
$= 1 - \cos B \cdot 2\sin\frac{A-C+A+C}{2} \cdot \sin\frac{A+C-A+C}{2}$
$= 1 - 2\sin A\cos B\sin C$ $\therefore$ L. H. S = R. H. S **(Proved)**

09. দৃশ্যকল্প-১: $M = \cos^2 5\alpha + \cos^2 5\beta - \sin^2 5\gamma + 2\cos 5\alpha\cos 5\beta\cos 5\gamma$. [BB'22]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $M = 0$ যেখানে $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

(খ) Sol^n: ধরি, $5\alpha = A, 5\beta = B, 5\gamma = C$
$\because \alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow 5\alpha + 5\beta + 5\gamma = 5\pi$
$\therefore A + B + C = 5\pi$
এখন, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1}{2}(2\cos^2 A + 2\cos^2 B) + \cos^2 C$
$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C$
$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C$
$= 1 + \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C$
$= 1 + \cos(5\pi - C)\cos(A - B) + \cos^2 C$
$= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A - B) + \cos^2 C$
$= 1 - \cos C\cos(A - B) + \cos^2 C$
$= 1 - \cos C\,[\cos(A - B) - \cos C]$
$= 1 - \cos C\,[\cos(A - B) - \cos\{5\pi - (A + B)\}]$
$= 1 - \cos C\,[\cos(A - B) - \cos\{\pi - (A + B)\}]$
$= 1 - \cos C\,[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$
$= 1 - \cos C \cdot 2\cos A\cos B$
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$
এখন, $\cos^2 5\alpha + \cos^2 5\beta + \cos^2 5\gamma = 1 - 2\cos 5\alpha \cdot \cos 5\beta \cdot \cos 5\gamma$
$\Rightarrow \cos^2 5\alpha + \cos^2 5\beta + 1 - \sin^2 5\gamma$
$= 1 - 2\cos 5\alpha\cos 5\beta\cos 5\gamma$
$\Rightarrow \cos^2 5\alpha + \cos^2 5\beta - \sin^2 5\gamma + 2\cos 5\alpha\cos 5\beta \cdot \cos 5\gamma = 0$
$\therefore M = 0$ **(Proved)**

10. দৃশ্যকল্প-১: $\angle P + \angle Q = \angle R$ [JB'22]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে দেখাও যে,
$\cos^2\frac{P}{3} + \cos^2\frac{Q}{3} + \cos^2\frac{R}{3} = 1 + 2\cos\frac{P}{3}\cos\frac{Q}{3}\cos\frac{R}{3}$

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $\angle P + \angle Q = \angle R \Rightarrow \frac{\angle P}{3} + \frac{\angle Q}{3} = \frac{\angle R}{3}$
$\therefore \frac{P}{3} + \frac{Q}{3} = \frac{R}{3}$ ..... (i) [মান বিবেচনায়]
L. H. S $= \cos^2\frac{P}{3} + \cos^2\frac{Q}{3} + \cos^2\frac{R}{3}$
$= \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2P}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2Q}{3}\right) + \cos^2\frac{R}{3}$
$[\because \cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)]$
$= 1 + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2P}{3} + \cos\frac{2Q}{3}\right) + \cos^2\frac{R}{3}$
$= 1 + \frac{1}{2} \times 2\cos\left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{3}\right)\cos\left(\frac{P}{3} - \frac{Q}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{3}\right)$
$\left[\because \cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]$
$= 1 + \cos\left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{3}\right)\left\{\cos\left(\frac{P}{3} - \frac{Q}{3}\right) + \cos\left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{3}\right)\right\}$
$= 1 + \cos\frac{R}{3} \times 2\cos\frac{P}{3}\cos\frac{Q}{3} = 1 + 2\cos\frac{P}{3}\cos\frac{Q}{3}\cos\frac{R}{3}$
$=$ R. H. S **(Showed)**

11. $r = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 1$. [RB'19]

(গ) $\alpha + \beta + \gamma = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে,
$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = r + 2$.

Educationblog24.com

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $r = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 1$

$\alpha + \beta + \gamma = 0$

$R.H.S = r + 2 = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 1 + 2$

$= 2\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} + 1$

$= 2\left\{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right\}\cos\frac{\gamma}{2} + 1$

$= 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} - 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} + 1$

$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \left(2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1\right)$

$= \cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = L.H.S$ **(Proved)**

12. $K = \cos P + \cos R$ [SB'19]

(খ) $P + Q + R = \pi$ হলে দেখাও যে,

$K - 1 + \cos Q = 4\sin\frac{P}{2}\sin\frac{Q}{2}\sin\frac{R}{2}$

(খ) Sol^n: $P + Q + R = \pi$

$L.H.S = K - 1 + \cos Q = \cos P + \cos Q + \cos R - 1$

$= 2\cos\left(\frac{P+Q}{2}\right)\cos\left(\frac{P-Q}{2}\right) + 1 - 2\sin^2\frac{R}{2} - 1$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{R}{2}\right)\cos\left(\frac{P-Q}{2}\right) - 2\sin^2\frac{R}{2}$

$= 2\sin\frac{R}{2}\left\{\cos\left(\frac{P-Q}{2}\right) - \cos\left(\frac{P+Q}{2}\right)\right\}$

$= 2\sin\frac{R}{2}\left\{\cos\left(\frac{P-Q}{2}\right) - \cos\left(\frac{P+Q}{2}\right)\right\}$

$= 2\sin\frac{R}{2}\cdot 2\sin\frac{P}{2}\sin\frac{Q}{2}$

$= 4\cdot\sin\frac{P}{2}\sin\frac{Q}{2}\sin\frac{R}{2} = R.H.S$ **(Showed)**

13. $p = \sin2\alpha$, $q = \sin2\beta$, $r = \cos2\alpha$,
$s = \cos2\beta$, $t = \sin2\gamma$ [DB, SB, JB, Din.B'18]

(গ) যদি $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ হয়, তবে দেখাও যে,
$p^2 + q^2 + t^2 = 2 - 2\cos2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma$

(গ) Sol^n: $L.H.S = p^2 + q^2 + t^2 = \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\beta + \sin^2 2\gamma$

$= \frac{1}{2}(2 - \cos4\alpha - \cos4\beta) + \sin^2 2\gamma$

$= \frac{1}{2}(2 - 2\cos(2\alpha + 2\beta)\cos(2\alpha - 2\beta)) + 1 - \cos^2 2\gamma$

$= 2 - \cos2\gamma\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos^2 2\gamma$

$= 2 - \cos2\gamma[\cos(2\alpha - 2\beta) + \cos(2\alpha + 2\beta)]$

$= 2 - 2\cos2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma = R.H.S$ **(Showed)**

14. $A + B + C = n\pi$ .... (ii)

[বিএএফ শাহীন কলেজ, চট্টগ্রাম]

(গ) n এর মান $\frac{1}{2}$ হলে, (ii) নং উদ্দীপক ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\cos2A + \cos2B + \cos2C - 4\sin A\sin B\sin C = 1$

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $A + B + C = n\pi$; $n = \frac{1}{2}$

হলে, $A + B + C = \frac{\pi}{2}$

$\cos2A + \cos2B + \cos2C$

$= 2\cos(A + B)\cos(A - B) + (1 - 2\sin^2 C)$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right)\cos(A - B) + 1 - 2\sin^2 C$

$= 2\sin\frac{C}{2}\cos(A - B) - 2\sin^2 C + 1$

$= 2\sin(\cos(A - B) - \sin C) + 1$

$= 2\sin C\{\cos(A - B) - \cos(A + B)\} + 1$

$= 2\sin C(\sin A\sin B) + 1 = 4\sin A\sin B\sin C + 1$

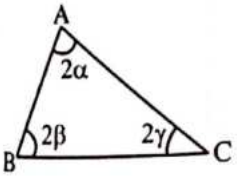
$\therefore \cos2A + \cos2B + \cos2C - 4\sin A\sin B\sin C = 1$

(Proved)

নিজে করো

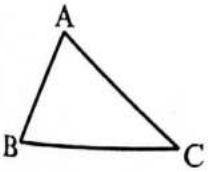
15. ABC একটি ত্রিভুজ এবং $f(x) = \sin x$ [CB'22]

(গ) প্রমাণ কর যে, $f(A + B - C) + f(B + C - A) + f(C + A - B) = 4\sin A\sin B\sin C$

16. 

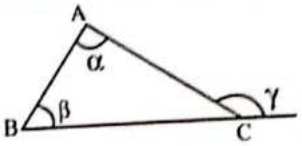
[Din.B'22]

(খ) প্রমাণ কর যে, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1$

17. 

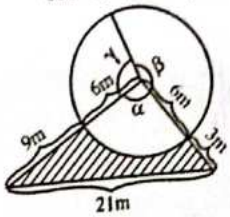
[MB'22]

(খ) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C$ এর মান কত? **[Ans: 1]**

18. 

[DB'19]

(গ) উদ্দীপকের সাহায্যে দেখাও যে,
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

19. 

[RB'17]

(খ) উদ্দীপকের সাহায্যে মান নির্ণয় কর:
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.
[Ans: 1]

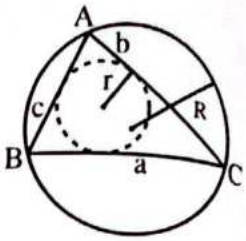
20. দৃশ্যকল্প-২: ΔABC এর $A + B + C = \pi$ [CB'17]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে,
$\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin A\cos B\sin C$.

Educationblog24.com

Type-07: শর্ত সাপেক্ষে ত্রিভুজের বিভিন্ন অজানা রাশির মান নির্ণয়

Concept



- sine rule: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$; [R পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ]
- cosine rule: $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$; $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
- $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

যেখানে অর্ধপরিসীমা, $s = \frac{a+b+c}{2}$

$\Delta = sr$ [r = অন্তঃব্যাসার্ধ] $\Delta = \frac{abc}{4R}$

- $a = b\cos C + c\cos B$
- $b = c\cos A + a\cos C$
- $c = a\cos B + b\cos A$

Tangent Rule:
- $\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$
- $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$
- $\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$

$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$	$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$	$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$
$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$	$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$	$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$
$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$	$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$	$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

- সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$; [b = ভূমি, a = সমান বাহুদ্বয়]

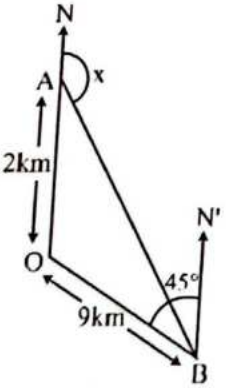
Note: (i) ত্রিভুজের 3 টি বাহুর দৈর্ঘ্য অথবা 2 টি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া থাকলে cosine rule ব্যবহার করতে হবে। অন্যথায় sine rule ব্যবহার করতে হবে।

(ii) প্রশ্নে যদি বলা থাকে যে ত্রিভুজটি সমাধান করো, এর অর্থ হলো ত্রিভুজটির প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও কোণের মান বের করো।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

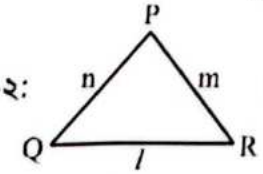
01.

দৃশ্যকল্প-১:



; ON||BN′ [RB'23]

দৃশ্যকল্প-২:

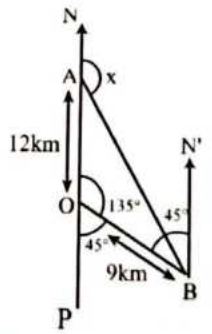


; $T = l + m + n$

(খ) দৃশ্যকল্প-১ ব্যবহার করে AB দূরত্ব নির্ণয় কর।

(গ) $\frac{1}{T-m} + \frac{1}{T-l} = \frac{3}{T}$ হলে, দৃশ্যকল্প-২ এর ত্রিভুজের R কোণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:**



দেওয়া আছে, ON||BN′ এবং ∠N′BO ও ∠BOP একান্তর কোণ

$\therefore \angle N'BO = \angle BOP = 45°$

$\therefore \angle AOB = 180° - 45° = 135°$

ধরি, AB = m; $\cos 135° = \frac{12^2+9^2-m^2}{2\times12\times9}$

$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{225-m^2}{216} \Rightarrow 225 - m^2 = \frac{-216}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow m^2 = 225 + \frac{216}{\sqrt{2}} \therefore m = 19.435$ km (Ans.)

Educationblog24.com

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের তিন বাহু m, n, l এবং $T = l + m + n$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{T-m} + \frac{1}{T-l} = \frac{3}{T}$

$\Rightarrow \frac{1}{l+m+n-m} + \frac{1}{l+m+n-l} = \frac{3}{l+m+n} \Rightarrow \frac{1}{l+n} + \frac{1}{m+n} = \frac{3}{l+m+n}$

$\Rightarrow \frac{m+n+l+n}{(l+n)(m+n)} = \frac{3}{l+m+n} \Rightarrow \frac{m+l+2n}{(l+n)(m+n)} = \frac{3}{l+m+n}$

$\Rightarrow (m + l + 2n)(l + m + n) = 3(l + n)(m + n)$

$\Rightarrow (m + l)^2 + 3n(m + l) + 2n^2 = 3(ml + mn + ln + n^2)$

$\Rightarrow m^2 + l^2 - n^2 = ml$

$\therefore \cos R = \frac{m^2+l^2-n^2}{2ml} = \frac{ml}{2ml} = \frac{1}{2} \therefore R = 60°$ (Ans.)

02. (ক) কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 3a, 5a ও 7a একক হলে ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ নির্ণয় কর। [SB'23]

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 3a, 5a এবং 7a।

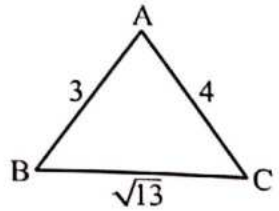
সুতরাং বৃহত্তম বাহু 7a

ধরি, বৃহত্তম কোণ θ

$\cos\theta = \frac{(3a)^2+(5a)^2-(7a)^2}{2\times3a\times5a} = \frac{9a^2+25a^2-49a^2}{30a^2} = -\frac{1}{2}$

$\therefore \theta = 120° \therefore$ বৃহত্তম কোণ $120°$ (Ans.)

03. দৃশ্যকল্প-২:

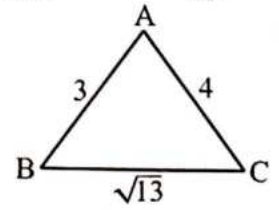


(গ) $\angle A$ এর সাহায্যে ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Din.B'23]

(গ) Sol^n: cosine এর সূত্রানুসারে, $\cos A = \frac{3^2+4^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot3\cdot4}$

$A = \cos^{-1}\left(\frac{25-13}{24}\right)$

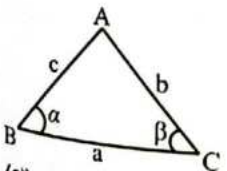
$\therefore A = \cos^{-1}\left(\frac{12}{24}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$



ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 60°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$ বর্গ একক $= 3\sqrt{3}$ বর্গ একক (Ans.)

04.



[DB'22]

(গ) $\alpha = 45°, \beta = 60°$ এবং $a = (\sqrt{3} + 1)$ সে.মি. হলে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

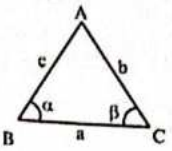
(গ) Sol^n: এখানে, $B = \alpha = 45°; C = \beta = 60°$

$\therefore A = 180° - (B + C) = 180° - (45° + 60°) = 75°$

এখানে, $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$

$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1)$



ΔABC হতে sine সূত্রানুসারে, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\Rightarrow b = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B = \frac{(\sqrt{3}+1)}{\sin 75°} \cdot \sin 45° = \frac{(\sqrt{3}+1)}{\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

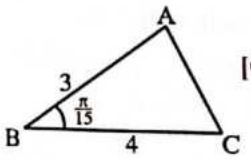
$= 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = 2$

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) \cdot 2 \cdot \sin 60° = (\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \Delta = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ cm^2 (Ans.)

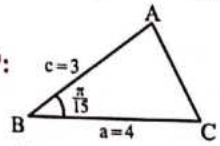
05. $A + B + C = \pi$ এবং



[Ctg.B'22]

(গ) ABC ত্রিভুজটি সমাধান কর।

(গ) Sol^n:



$B = \frac{\pi}{15} = 12°$

এখন, $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \Rightarrow \cos 12° = \frac{4^2+3^2-b^2}{2\times4\times3}$

$\Rightarrow 0.978 = \frac{25-b^2}{24} \Rightarrow 23.472 = 25 - b^2$

$\Rightarrow b = \sqrt{25 - 23.472} \therefore b = 1.236$

আবার, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\Rightarrow \cos A = \frac{1.236^2+3^2-4^2}{2\times1.236\times3}$

$\Rightarrow \cos A = -0.738 \Rightarrow A = \cos^{-1}(-0.738)$

$\therefore A = 137.56°$

$\therefore C = 180° - (A + B) = 180° - (137.56° + 12°)$

$\therefore C = 30.44° \therefore \Delta ABC$ এর সবগুলো বাহু ও কোণ নিম্নরূপ:

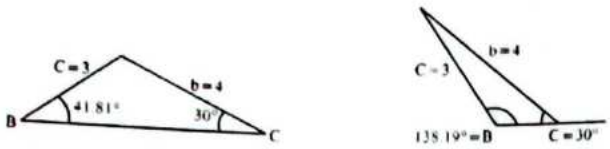
$a = 4$	$A = 137.56°$
$b = 1.236$	$B = 12°$
$c = 3$	$C = 30.44°$

06. (ক) যেকোনো ABC ত্রিভুজে $b = 4cm, c = 3cm$ এবং $\angle C = 30°$ হলে $\angle B$ নির্ণয় কর। [BB'22]

০৭

Educationblog24.com

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, ΔABC এ, $b = 4cm, c = 3cm$ এবং $\angle C = 30°$ ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই,



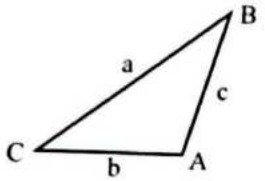
$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin B}{4} = \frac{\sin 30°}{3} \Rightarrow \sin B = 4 \times \frac{1}{2}$

$\Rightarrow B = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

$\therefore B = 41.81°, 138.19° [\because 0 \le B < 180°]$

$B = 41.81°$ হলে ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী এবং $B = 138.19°$ হলে ত্রিভুজটি স্থূলকোণী। **(Ans.)**

07.



[Ctg.B'19]

(খ) $a = \sqrt{b^2 + bc + c^2}$ হলে ত্রিভুজটির সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: এখানে, $a = \sqrt{b^2 + bc + c^2}$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + bc + c^2$

এখন, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-b^2-bc-c^2}{2bc}$

$\cos A = -\frac{1}{2}$; $A = 120°$

আমরা জানি, $A + B + C = 180°$

$\Rightarrow 120 + (B + C) = 180°$; $B + C = 60°$ **(Ans.)**

08. দৃশ্যকল্প-২: ΔPQR এ $P = 2q$ এবং $P = 3Q$ [CB'19]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে R কোণ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: ΔPQR-এ, $\frac{P}{\sin P} = \frac{q}{\sin Q} \Rightarrow \frac{2q}{\sin 3Q} = \frac{q}{\sin Q}$

$\Rightarrow \frac{2}{3\sin Q - 4\sin^3 Q} = \frac{1}{\sin Q} \Rightarrow \frac{2}{3 - 4\sin^2 Q} = 1$

$\Rightarrow 2 = 3 - 4\sin^2 Q \Rightarrow 4\sin^2 Q = 1$

$\Rightarrow 4(1 - \cos^2 Q) = 1$ $[\sin Q = -\frac{1}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়]

$\Rightarrow 4 - 1 = 4\cos^2 Q \Rightarrow \frac{3}{4} = \cos^2 Q$

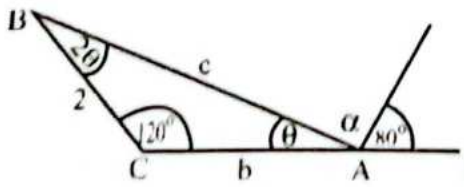
$\Rightarrow \cos Q = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Q = 30° \therefore Q = 30°$

$\therefore P = 3 \times 30° = 90°$

$\therefore R = 180° - 90° - 30° = 60° \therefore R$ কোণ এর মান $60°$

09.

দৃশ্যকল্প-I:



(খ) দৃশ্যকল্প-I হতে b এবং c এর মান নির্ণয় কর। [DB'17]

(খ) Sol^n: ΔABC এ $\theta + 2\theta + 120° = 180°$

$\Rightarrow 3\theta = 60° \Rightarrow \theta = 20°$

ধরি, $BC = a = 2$,

আমরা জানি, ত্রিভুজের sine সূত্র $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ..... (i)

এখন (i) হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{2}{\sin 20°} = \frac{b}{\sin 40°}$

$\Rightarrow \frac{2}{\sin 20°} = \frac{b}{2\sin 20° \cos 20°} \Rightarrow b = 4\cos 20° = 3.76$

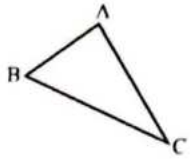
আবার, (i) হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{2\sin 120°}{\sin 20°} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 20°} = 5.06$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $b = 3.76, c = 5.06$ **(Ans.)**

10.

দৃশ্যকল্প-২:



[Ctg.B'17]

(খ) $\frac{1}{\sec A} = \frac{1}{\operatorname{cosec} C} - \frac{1}{\sec B}$ হলে দৃশ্যকল্প-২ এর কোন কোণ সমকোণ, নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $\frac{1}{\sec A} = \frac{1}{\operatorname{cosec} C} - \frac{1}{\sec B} \Rightarrow \cos A = \sin C - \cos B$

$\Rightarrow \cos A + \cos B = \sin C$

$\Rightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \sin C$

$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) \cdot \cos\frac{A-B}{2} = \sin C$

$\Rightarrow 2\sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{C}{2} \Rightarrow \frac{A-B}{2} = \frac{C}{2}$

$\Rightarrow A - B = C \Rightarrow A = B + C$

$\Rightarrow 2A = A + B + C \Rightarrow 2A = \pi \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ দৃশ্যকল্প-২ এর A কোণটি সমকোণ।

11. দৃশ্যকল্প: ABC ত্রিভুজের পরিসীমা $2s$। [Ctg.B'17]

(গ) দৃশ্যকল্পের আলোকে $4s(s - b) = 3ca$ হলে, $\angle B$ এর মান কত?

(গ) Sol^n: আমরা জানি, $2s = a + b + c$

$\therefore 4s(s - b) = 3ca \Rightarrow 2s(2s - 2b) = 3ca$

$\Rightarrow (a + b + c)(a + b + c - 2b) = 3ca$

$\Rightarrow (a + b + c)^2 - 2b(a + b + c) = 3ca$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 2ab - 2b^2 - 2bc = 3ca$

$\Rightarrow a^2 + c^2 - b^2 = ca \Rightarrow \frac{a^2+c^2-b^2}{2ca} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos B = \cos 60° \Rightarrow B = 60°$ **(Ans.)**

12. দৃশ্যকল্প-১: ABC ত্রিভুজে $a = \sqrt{3}b$ এবং $A = 2B$ [BB'17]

(খ) দৃশ্যকল্প-১: এর আলোকে ABC ত্রিভুজের কোণগুলো নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: আমরা জানি, ত্রিভুজের সাইন সূত্রানুসারে, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}b}{\sin 2B} = \frac{b}{\sin B}$ [$\because a = \sqrt{3}b,\ A = 2B$]

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2\sin B\cos B} = \frac{1}{\sin B} \Rightarrow \sqrt{3}\sin B = 2\sin B\cos B$

$\Rightarrow \sqrt{3}\sin B - 2\sin B\cos B = 0$

$\Rightarrow \sin B(\sqrt{3} - 2\cos B) = 0$

এখন, $\sin B \neq 0$[$\because \angle B \neq 0$]

$\therefore \sqrt{3} - 2\cos B = 0 \Rightarrow \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos B = \cos 30° \therefore B = 30°$

$\therefore A = 2B = 2 \times 30° = 60°$

$\therefore \angle C = 180° - (A + B) = 180° - (60° + 30°) = 90°$ **(Ans.)**

13. (ক) যদি ΔPQR এর তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p, q, r এবং $p^2 + q^2 - r^2 = \sqrt{2}pq$ হয়, তবে R কোণের মান নির্ণয় কর। **[CB'17]**

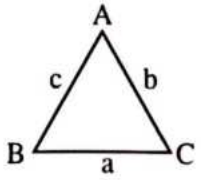
(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, $p^2 + q^2 - r^2 = \sqrt{2}pq$

$\Rightarrow \frac{p^2+q^2-r^2}{2pr} = \frac{\sqrt{2}pq}{2pq}$ [2pq দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \cos R = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos R = \cos 45° \Rightarrow R = 45°$

$\therefore$ R কোণের মান $45°$ **(Ans.)**

14. $s = \frac{a+b+c}{2}$ এবং Δ= ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।



[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ]

(গ) যদি $4s(s - a) = 3bc$ হয়, তবে A এর মান নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $4s(s - a) = 3bc$

$\Rightarrow 2s(2s - 2a) = 3bc$

$\Rightarrow (a + b + c)(a + b + c - 2a) = 3bc$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
$\quad -2a^2 - 2ab - 2ac = 3bc$

$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc \Rightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos A = \cos 60° \therefore A = 60°$ **(Ans.)**

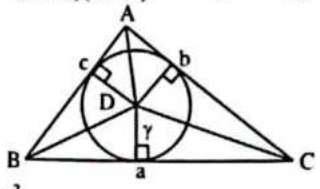
15. দৃশ্যকল্প-১: ΔABC এ $a = \sqrt{3} + 1, b = \sqrt{3} - 1$ এবং $C = 60°$ **[দিনাজপুর সরকারি কলেজ]**

(খ) দৃশ্যকল্প-১ অনুসারে ΔABC এর অন্তঃব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, ΔABC এ $a = \sqrt{3} + 1$,

$b = \sqrt{3} - 1, c = 60°$; $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2-c^2}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2(3+1)-c^2}{2(3-1)}$



$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8-c^2}{4} \Rightarrow 8 - c^2 = 2 \therefore c = \sqrt{6}$

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ab\sin C$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(3-1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ধরি, অন্তঃব্যাসার্ধ $= r$ একক

Δ ক্ষেত্র ABC = Δ ক্ষেত্র BOC + Δ ক্ষেত্র CDA + Δ ক্ষেত্র ADB

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)r + \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)r + \frac{1}{2}\sqrt{6}r$

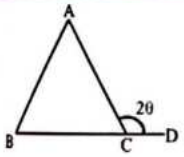
$\Rightarrow \sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1 + \sqrt{6})r$

$\Rightarrow \sqrt{3} = (2\sqrt{3} + \sqrt{6})r \therefore r = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{3}{6+3\sqrt{2}}$ **(Ans.)**

Note: $\Delta = rs$ সূত্র থেকেও অন্তঃব্যাসার্ধ নির্ণয় করা যাবে।

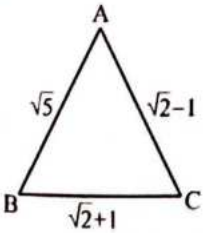
০৭

নিজে করো

16. 

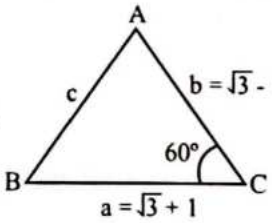
[RB'22]

(ক) $a = \sqrt{3} + 1,\ b = \sqrt{3} - 1, C = 60°$ হলে ΔABC এ c বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[Ans: $c = \sqrt{3}$]**

17. দৃশ্যকল্প-২: 

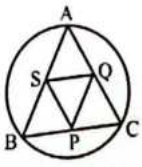
[JB'22]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সাহায্যে $\angle C$ এর মান নির্ণয় কর। অতঃপর দেখাও যে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $\frac{\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক।

18. দৃশ্যকল্প-২: 

[JB'19]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুযায়ী ত্রিভুজটির সমাধান কর।
[Ans: $C = \sqrt{6}, A = 75°, B = 15°$]

19. 

; ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ R. **[SB'17]**

(গ) ΔPQS এর ক্ষেত্রে– $\frac{1}{PQ+PS} = \frac{3}{PS+PQ+QS} - \frac{1}{PS+QS}$ হলে, $\angle Q$ নির্ণয় কর। **[Ans: $\angle Q = 60°$]**

Educationblog24.com

Type-08: শর্ত সাপেক্ষে প্রমাণ

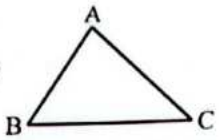
Concept

এই Type এর ক্ষেত্রেও Type-07 এর Formula গুলো ব্যবহার করতে হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01.

দৃশ্যকল্প-১: [DB'23]



(গ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে প্রমাণ কর যে,
$BC\cos C - BC\cos B = (AC - AB)(1 + \cos A)$.

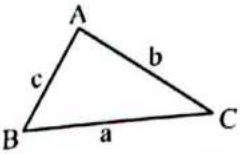
(গ) Sol^n: দৃশ্যকল্প-০১ হতে পাই, $BC = a, AC = b, AB = c$
এবং $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$
এখন, L.H.S $= BC\cos C - BC\cos B$
$= a \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - a \times \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$
$= \frac{a^2+b^2-c^2}{2b} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2c} = \frac{a^2c+b^2c-c^3-a^2b-bc^2+b^3}{2bc}$
R. H. S $= (AC - AB)(1 + \cos A)$
$= (b - c)\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = (b - c) \times \frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{2bc}$
$= \frac{b^3+bc^2+2b^2c-a^2b-b^2c-c^3-2bc^2+a^2c}{2bc}$
$= \frac{b^3-c^3+b^2c-bc^2-a^2b+a^2c}{2bc}$
$\therefore BC\cos C - BC\cos B = (AC - AB)(1 + \cos A)$
$\therefore$ L. H. S = R. H. S **(Proved)**

02. PQR একটি ত্রিভুজ। [JB'23]

(গ) উদ্দীপক হতে প্রমাণ কর যে, $p^3\cos(Q - R) + q^3\cos(R - P) + r^3\cos(P - Q) = 3pqr$.

(গ) Sol^n: $P + Q + R = 180°$
এখন, $p^3\cos(Q - R) = p^3(\cos Q\cos R + \sin Q\sin R)$
$= p(p\cos Q\ p\cos R + p\sin Q\, p\sin R)$
$= p\big((r - q\cos P)(q - r\cos P) + q\sin P\, r\sin P\big)$
$= p(rq - r^2\cos P - q^2\cos P + rq\cos^2 P + rq\sin^2 P)$
$= p(rq - r^2\cos P - q^2\cos P + qr)$
$= 2pqr - p(r^2\cos P + q^2\cos P)$
অনুরূপভাবে, $q^3\cos(R - P) = 2pqr - q(p^2\cos Q + r^2\cos Q)$
আবার, $r^3\cos(P - Q) = 2pqr - r(q^2\cos R + p^2\cos R)$
$\therefore$ L. H. S $= p^3\cos(Q - R) + q^3\cos(R - P) + r^3\cos(P - Q)$
$= 6pqr - (pr^2\cos P + pq^2\cos P + p^2q\cos Q + r^2q\cos Q + q^2r\cos R + p^2r\cos R)$
$= 6pqr - \{pr(r\cos P + p\cos R) + pq(q\cos P + p\cos Q) + rq(r\cos Q + q\cos R)\}$
$= 6pqr - (pqr + pqr + pqr) = 3pqr =$ R. H. S
(Proved)

03.

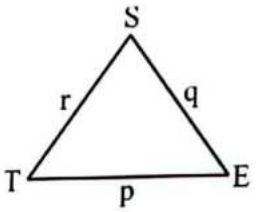


[MB'23]

(খ) $\angle B = 60°$ হলে দেখাও যে, $2\cos\frac{C-A}{2} = \frac{c+a}{b}$.

(খ) Sol^n: R. H. S $= \frac{c+a}{b} = \frac{2R\sin C + 2R\sin A}{2R\sin B}$
$\left[\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\right]$
$= \frac{\sin C + \sin A}{\sin B} = \frac{2\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}}{\sin 60°}$ [প্রশ্নমতে, $\angle B = 60°$]
$= \frac{2\sin\frac{\pi-B}{2}\cos\frac{C-A}{2}}{\sin 60°}$ [$\because \Delta ABC$ এ $A + B + C = \pi$]
$= \frac{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}}{\sin 60°} = \frac{2\cos(30°)\cdot\cos\frac{C-A}{2}}{\sin 60°}$
$= \frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos\frac{C-A}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\cos\frac{C-A}{2} =$ L. H. S. **(Showed)**

04.



[CB'23]

(খ) প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{E}{2} = \frac{p-q}{p+q}\cot\left(\frac{S-T}{2}\right)$

(গ) যদি $p^4 + q^4 + r^4 = 2p^2(q^2 + r^2)$ হয়, তবে দেখাও যে, $S = 45°$ অথবা $135°$।

(খ) Sol^n: ত্রিভুজ STE-তে $\angle S + \angle T + \angle E = \pi$
এবং $\frac{p}{\sin S} = \frac{q}{\sin T} = \frac{r}{\sin E} = k$ (sine rule)
$\therefore p = k\sin S, q = k\sin T, r = k\sin E$
এখন, $\frac{p-q}{p+q} = \frac{k\sin S - k\sin T}{k\sin S + k\sin T}$
$= \frac{k(\sin S - \sin T)}{k(\sin S + \sin T)} = \frac{2\cos\left(\frac{S+T}{2}\right)\sin\left(\frac{S-T}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{S+T}{2}\right)\cos\left(\frac{S-T}{2}\right)}$
$= \cot\left(\frac{S+T}{2}\right)\tan\left(\frac{S-T}{2}\right) = \frac{\cot\left(\frac{\pi-E}{2}\right)}{\cot\left(\frac{S-T}{2}\right)}$ [$\because \angle S + \angle T + \angle E = \pi$]
$\therefore \frac{p-q}{p+q} = \frac{\tan\frac{E}{2}}{\cot\left(\frac{S-T}{2}\right)} \therefore \tan\frac{E}{2} = \frac{p-q}{p+q}\cot\left(\frac{S-T}{2}\right)$ **(Proved)**

Educationblog24.com

(গ) Sol^{n}: দেওয়া আছে, $p^4 + q^4 + r^4 = 2p^2(q^2 + r^2)$

$\Rightarrow p^4 + q^4 + r^4 = 2p^2q^2 + 2p^2r^2 + 2q^2r^2 - 2q^2r^2$

$\Rightarrow p^4 + q^4 + r^4 - 2p^2q^2 - 2p^2r^2 + 2q^2r^2 = 2q^2r^2$

$\Rightarrow (q^2 + r^2 - p^2)^2 = 2q^2r^2 \Rightarrow \left(\frac{q^2+r^2-p^2}{qr}\right)^2 = 2$

$\Rightarrow \left(\frac{q^2+r^2-p^2}{2qr}\right)^2 \times 4 = 2 \Rightarrow \left(\frac{q^2+r^2-p^2}{2qr}\right)^2 = \frac{1}{2}$

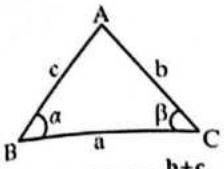
$\Rightarrow \frac{q^2+r^2-p^2}{2qr} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos S = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

ধনাত্মক (+ve) মান নিলে, $\cos S = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore S = 45°$

ঋণাত্মক (−ve) মান নিলে, $\cos S = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = 135°$

$\therefore S = 45°$ অথবা $135°$ **(Showed)**

05.



[DB'22]

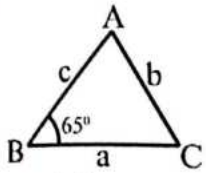
(ক) দেখাও যে, $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\sin B+\sin C}{\sin B-\sin C}$

(ক) Sol^{n}: যেকোনো ত্রিভুজ ΔABC এ, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$\therefore$ L.H.S $= \frac{b+c}{b-c} = \frac{2R\sin B+2R\sin C}{2R\sin B-2R\sin C} = \frac{2R(\sin B+\sin C)}{2R(\sin B-\sin C)}$

$= \frac{\sin B+\sin C}{\sin B-\sin C}$ = R.H.S **(Showed)**

06.



[RB'22]

(গ) উদ্দীপক ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে,

$\frac{a^2}{bc}\sin(B-C) + \frac{b^2}{ca}\sin(C-A) + \frac{c^2}{ab}\sin(A-B) = 0$

(গ) Sol^{n}: উদ্দীপকে, $A + B + C = \pi$,

যেকোনো ত্রিভুজে, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

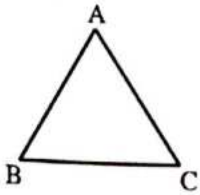
এখানে, $\frac{a^2}{bc} \cdot \sin(B-C) = \frac{a^3}{abc}(\sin B\cos C - \cos B\sin C)$

$= \frac{a^3}{abc}\left(\frac{b}{2R}\cdot\cos C - \cos B\cdot\frac{c}{2R}\right) = \frac{a^3}{2Rabc}(b\cos C - c\cos B)$

$= \frac{a^2}{2Rabc}(b\cos c + c\cos B)(b\cos C - c\cos B)$

[যেকোনো ত্রিভুজে, $a = b\cos C + c\cos B$]

$\therefore \frac{a^2}{bc}\sin(B-C) = \frac{a^2}{2Rabc}(b^2\cos^2 C - c^2\cos^2 B)$ ..... (i)



অনুরূপভাবে, $\frac{b^2}{ca}\sin(C-A) = \frac{b^2}{2Rabc}(c^2\cos^2 A - a^2\cos^2 C)$ ..... (ii)

এবং $\frac{c^2}{ab}\sin(A-B) = \frac{c^2}{2Rabc}(a^2\cos^2 B - b^2\cos^2 A)$ ..... (iii)

(i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\frac{A^2}{bc}\sin(B-C) + \frac{b^2}{ca}\sin(C-A) + \frac{c^2}{ab}\sin(A-B)$

$= \frac{1}{2Rabc}\{(a^2b^2\cos^2 C - a^2c^2\cos^2 B)$

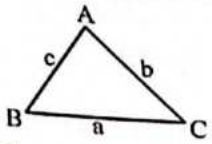
$+(b^2c^2\cos^2 A - b^2a^2\cos^2 C) + (c^2a^2\cos^2 B - c^2b^2\cos^2 A)\}$

$\Rightarrow \frac{a^2}{bc}\sin(B-C) + \frac{b^2}{ca}\sin(C-A) + \frac{c^2}{ab}\sin(A-B)$

$= \frac{1}{2Rabc} \times 0 = 0$ **(Proved)**

07.

দৃশ্যকল্প-১:



[SB'22]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে দেখাও যে,

$a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right) = (b+c)\sin\frac{A}{2}$.

(খ) Sol^{n}: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$\therefore a = 2R\sin A; b = 2R\sin B; C = 2R\sin C$

$\therefore \frac{b+c}{a} = \frac{2R\sin B+2R\sin C}{2R\sin A} = \frac{\sin B+\sin C}{\sin A}$

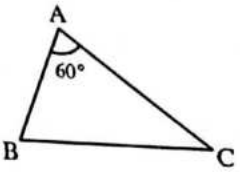
$= \frac{\sin B+\sin(\pi-A-B)}{\sin A} = \frac{2\sin\left(\frac{B+\pi-A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-\pi+A+B}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$

$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\cos\left(B+\frac{A}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{\cos\frac{A}{2}\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)}{\sin\frac{A}{2}}$

$\therefore (b+c)\sin\frac{A}{2} = a\sin\left(\frac{A}{2}+b\right)$ **(Showed)**

08. দৃশ্যকল্প-২:

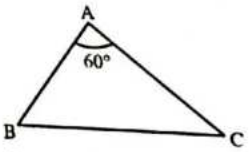
[BB'22]



(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{b-c}{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{B-C}{2}$.

(গ) Sol^{n}: আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজ ΔABC এ,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$



এখন, L.H.S $= \frac{b-c}{2a} = \frac{2R\sin B-2R\sin C}{2\cdot 2R\sin A}$

$= \frac{\sin B-\sin C}{2\sin A} = \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin A} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\sin\frac{B-C}{2}}{\sin A}$

$\left[\because A+B+C = \pi \Rightarrow B+C = \pi - A \therefore \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right]$

$= \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{2\times\cos\frac{60°}{2}} = \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{2\times\cos 30°}$

$= \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{B-C}{2}$ = R.H.S **(Proved)**

Educationblog24.com

09. ABC একটি ত্রিভুজ এবং $f(x) = \sin x$ [CB'22]

(খ) প্রমাণ কর যে, $c(\cos B - \cos A) = 2(a - b)\cos^2\frac{C}{2}$

(খ) Sol^n: ΔABC এ, $a = b\cos C + c\cos A$

$b = a\cos C + c\cos A$; $c = a\cos B + b\cos A$

L. H. S $= c(\cos B - \cos A) = c\cos B - c\cos A$

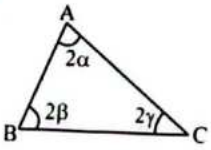
$= (c\cos B + b\cos C) - (c\cos A + a\cos C) - b\cos C + a\cos C$

$= a - b + a\cos C - b\cos C = (a - b) + (a - b)\cos C$

$= (a - b)(1 + \cos C) = 2(a - b)\cos^2\frac{C}{2}$

$\therefore$ L. H. S = R. H. S **(Proved)**

10.



[Din.B'22]

(গ) প্রমাণ কর যে, $(c - b)\sec\left(\frac{A}{2} + B\right) = a\sec\frac{A}{2}$

(গ) Sol^n: আমরা জানি, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$\frac{c-b}{a} = \frac{2R(\sin C - \sin B)}{2R\sin A} \Rightarrow \frac{c-b}{a} = \frac{\sin C - \sin B}{\sin A}$

$\Rightarrow \frac{c-b}{a} = \frac{2\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{C+B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$

$\Rightarrow \frac{c-b}{a} = \frac{2\sin\frac{\pi-(A+B)-B}{2}\cos\frac{C+B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$; $[C = \pi - (A + B)]$

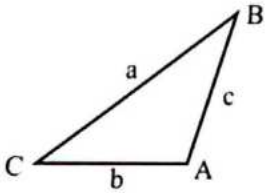
$\Rightarrow \frac{c-b}{a} = \frac{2\sin\frac{\pi-A-2B}{2}\cos\left(\frac{\pi-A}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$; $[C + B = \pi - A]$

$\Rightarrow \frac{c-b}{a} = \frac{2\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{A}{2}+B\right)\right\}\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$

$\Rightarrow \frac{c-b}{2} = \frac{\cos\left(\frac{A}{2}+B\right)}{\cos\frac{A}{2}} \Rightarrow \frac{c-b}{a} = \frac{\sec\frac{A}{2}}{\sec\left(\frac{A}{2}+B\right)}$

$\therefore (c - b)\sec\left(\frac{A}{2} + B\right) = a\sec\frac{A}{2}$ **(Proved)**

11.



[Ctg.B'19]

(গ) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে,

$\frac{a-b}{c}\operatorname{cosec}\frac{A-B}{2} = \sec\frac{C}{2}$

(গ) Sol^n: আমরা জানি, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

এখানে, $\frac{a-b}{c} = \frac{2R(\sin A - \sin B)}{2R\sin C} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin C}$

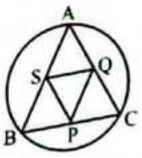
$= \frac{2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi-C}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$= \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$ | $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow \boxed{A + B = \pi - C}$

$\Rightarrow \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}}$ $\therefore \frac{a-b}{c}\operatorname{cosec}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \sec\frac{C}{2}$ **(Proved)**

12.



; ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ R. [SB'17]

(খ) ΔABC এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে,

$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos A\cos B\cos C)$

(খ) Sol^n: $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$

$= 2R^2(1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B + 2\sin^2 C)$

$= 2R^2(2 - 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\sin^2 C)$

$= 4R^2(1 - \cos(\pi - C)\cos(A - B) + 1 - \cos^2 C)$

$= 4R^2(2 + \cos C\cos(A - B) - \cos^2 C)$

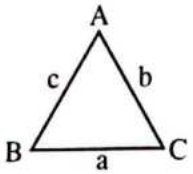
$= 4R^2[2 + \cos C[\cos(A - B) - \cos(\pi - (A + B))]]$

$= 4R^2[2 + \cos C\{\cos(A + B) + \cos(A - B)\}]$

$= 4R^2(2 + 2\cos A\cos B\cos C)$

$= 8R^2(1 + \cos A\cos B\cos C)$ **(Proved)**

13. $s = \frac{a+b+c}{2}$ এবং Δ= ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।



[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ]

(খ) দেখাও যে, $\sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B + C) = \frac{32\Delta^2}{a^2b^2c^2}$

(খ) Sol^n: আমরা জানি, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

$\therefore \sin A = \frac{2\Delta}{bc}, \sin B = \frac{2\Delta}{ca}, \sin C = \frac{2\Delta}{ab}$

ΔABC-এ, $A + B + C = \pi$

$\therefore B + C = \pi - A, C + A = \pi - B$

এবং, $A + B = \pi - C$

$1 = \sin(A + B + C - 2A) + \sin(A + B + C - 2B) + \sin(A + B + C - 2C)$

L. H. S $= \sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C)$

$= \sin(\pi - 2A) + \sin(\pi - 2B) + \sin(\pi - 2C)$

$= \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$= 2\sin\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2} + \sin 2C$

$= 2\sin(A + B)\cos(A - B) + \sin 2C$

$= 2\sin(\pi - C)\cos(A - B) + \sin 2C$

$= 2\sin C\cos(A - B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C[\cos(A - B) + \cos C]$

$= 2\sin C[\cos(A - B) + \cos\{\pi - (A - B)\}]$

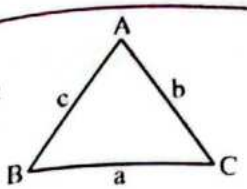
$= 2\sin C[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

$= 2\sin C \cdot 2\sin A\sin B = 4\sin A\sin B\sin C$

$= 4 \times \frac{2\Delta}{bc} \times \frac{2\Delta}{ca} \times \frac{2\Delta}{ab} = \frac{32\Delta^3}{a^2b^2c^2}$ = R. H. S **(Showed)**

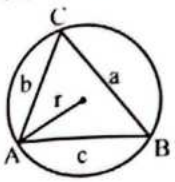
নিজে করো

14. দৃশ্যকল্প-১: [BB'23]



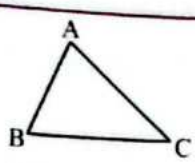
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $a^4 + b^4 + c^4 = 2b^2(a^2 + c^2)$ হলে দেখাও যে, $\angle B = 45°$ বা $135°$.

15. উদ্দীপক-II: [CB'23]



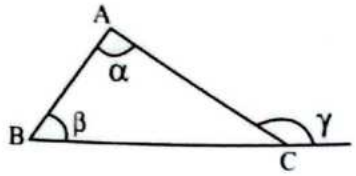
(খ) উদ্দীপক-II: থেকে প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$।

16. [MB'22]



(গ) $A = 60°$ হলে দেখাও যে, $\cos\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{2a}$.

17. [DB'19]



(খ) উদ্দীপকের সাহায্যে দেখাও যে,
$AC\sin\left(\frac{B}{2}+C\right) = (AB + BC)\sin\frac{B}{2}$

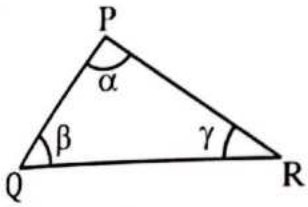
Type-09: শর্ত সাপেক্ষে ত্রিভুজের প্রকৃতি নির্ণয়

Concept

যখনই বলা থাকবে ত্রিভুজের তিনটি কোণ, A, B, C তখনই $A + B + C = \pi$ এই শর্ত ধরে অঙ্ক সমাধান করতে হবে এবং প্রয়োজনীয় সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01.



যেখানে $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ [Ctg.B'23]

(গ) $\cos P = \sin Q - \cos R$ হলে দেখাও যে, PQR ত্রিভুজটি সমকোণী।

(গ) Sol^n: চিত্রে $\angle P + \angle Q + \angle R = \pi$

এখন $\cos P = \sin Q - \cos R$ [দেওয়া আছে]

$\Rightarrow \cos P + \cos R = \sin Q$

$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{P+R}{2}\right)\cos\left(\frac{P-R}{2}\right) = 2\sin\frac{Q}{2}\cos\frac{Q}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi-Q}{2}\right)\cos\left(\frac{P-R}{2}\right) = \sin\frac{Q}{2}\cos\frac{Q}{2}$

$\Rightarrow \sin\frac{Q}{2}\cos\left(\frac{P-R}{2}\right) = \sin\frac{Q}{2}\cos\frac{Q}{2}$

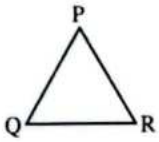
$\Rightarrow \cos\left(\frac{P-R}{2}\right) = \cos\frac{Q}{2}$ [$\because Q \neq 0 \Rightarrow \frac{Q}{2} \neq 0 \Rightarrow \sin\frac{Q}{2} \neq 0$]

$\therefore \frac{P-R}{2} = \frac{Q}{2} \Rightarrow P - R = Q$

$\Rightarrow Q + R = P \Rightarrow \pi - P = P \Rightarrow 2P = \pi \therefore P = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ PQR ত্রিভুজটি সমকোণী।

02. [রংপুর ক্যাডেট কলেজ]



(গ) $\cot P + \cot Q + \cot R = \sqrt{3}$ হলে, দেখাও যে, PQR ত্রিভুজটি সমবাহু।

(গ) Sol^n: PQR ত্রিভুজের, $P + Q + R = \pi$

$\Rightarrow Q + R = \pi - P \Rightarrow \cot(Q + R) = \cot(\pi - P)$

$\Rightarrow \frac{\cot Q\cot R - 1}{\cot Q + \cot R} = -\cot P$

$\therefore \cot P\cot Q + \cot Q\cot R + \cot R\cot P = \ldots\ldots\ldots$ (i)

আবার, $\cot P + \cot Q + \cot R = \sqrt{3}$

$\Rightarrow (\cot P + \cot Q + \cot R)^2 = 3 \times 1$

$\Rightarrow \cot^2 P + \cot^2 Q + \cot^2 R + 2\cot P\cot Q + 2\cot Q\cot R + 2\cot R\cot P$

$= 3(\cot P\cot Q + \cot Q\cot R + \cot R\cot P)$

$\Rightarrow \cot^2 P + \cot^2 Q + \cot^2 R - \cot P\cot Q - \cot Q\cot R - \cot R\cot P = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\{(\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2\} = 0$

$\Rightarrow (\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2 = 0$

Educationblog24.com

তাহলে,	আবার,	আবার,
$(\cot P - \cot Q)^2 = 0$	$(\cot Q - \cot R)^2 = 0$	$(\cot R - \cot P)^2 = 0$
$\Rightarrow \cot A = \cot Q$	$\Rightarrow \cot Q = \cot R$	$\Rightarrow \cot R = \cot P$
$\therefore P = Q$	$\therefore Q = R$	$\therefore R = P$

$\therefore P = Q = R$

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমবাহু **(Showed)**

03. দৃশ্যকল্প-১: ΔPQR এ $\frac{\cos P + 2\cos R}{\cos P + 2\cos Q} = \frac{\sin Q}{\sin R}$

[পিরোজপুর সরকারি মহিলা কলেজ]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু বা সমকোণী

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, ΔPQR-এ $\frac{\cos P + 2\cos R}{\cos P + 2\cos Q} = \frac{\sin Q}{\sin R}$

$\Rightarrow \cos P \sin R + \sin 2R = \sin Q \cos P + \sin 2Q$

$\Rightarrow \cos P (\sin R - \sin Q) + \sin 2R - \sin 2Q = 0$

$\Rightarrow \cos P \left(2\cos\frac{Q+R}{2}\sin\frac{R-Q}{2}\right) + 2\cos(Q+R)\sin(R-Q) = 0$

$\Rightarrow \cos P \left(2\cos\frac{Q+R}{2}\sin\frac{R-Q}{2}\right) - 4\cos P \sin\frac{R-Q}{2}\cos\frac{R-Q}{2} = 0$

$\Rightarrow 2\cos P \sin\frac{R-Q}{2}\left[\cos\frac{Q+R}{2} - 2\cos\frac{R-Q}{2}\right] = 0$

হয়,	অথবা,
$\cos P = 0$	$\sin\frac{R-Q}{2} = 0$
$\Rightarrow \cos P = \cos 90^\circ$	$\Rightarrow \frac{R-Q}{2} = 0 \therefore R = Q$
$\Rightarrow P = 90^\circ$	

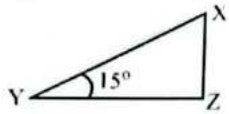
$\therefore$ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু বা সমকোণী **(Showed)**

নিজে করো

04. $K = \cos P + \cos R$ [SB'19]

(গ) $K = \sin Q$ হলে দেখাও যে, PQR ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ।

05. দৃশ্যকল্প-১: [SB'17]



(খ) উদ্দীপক-১ এ যদি $\cos x = \sin y - \cos z$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর $\angle x + \angle y = \angle z$.

06. দৃশ্যকল্প-১: ΔXYZ এ $\cos X = \sin Y - \cos Z$. [JB'17]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।

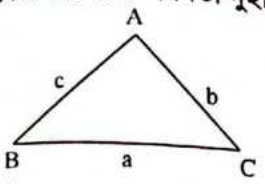
♦ MCQ প্রশ্নের জন্য এই অধ্যায়ের বিভিন্ন টাইপের তুলনামূলক গুরুত্ব:

গুরুত্ব	টাইপ	টাইপের নাম	যতবার প্রশ্ন এসেছে	যে বোর্ডে যে বছর এসেছে MCQ
০০	T-01	সংযুক্ত কোণ সম্বলিত ত্রিকোণমিতিক রাশি	08	Ctg.B'23; DB'22, MB; JB'22, 17; CB'22, 19
	T-02	ধারা সংক্রান্ত	-	-
০০০	T-03	যৌগিক কোণ সম্বলিত ত্রিকোণমিতিক রাশি	12	RB, Din.B'23, 22; Ctg.B, SB'23; JB'23, 17; DB. BB'22; CB'22, 19
০০০	T-04	গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত	25	RB'23; SB, Din.B'23, 22, 19; BB, JB'23, 17; Mad.B'23; MB'23, 22; DB'22, 19, 17; Ctg.B'22. CB'22, 19;
০০০	T-05	উপগুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতির অনুপাত সংক্রান্ত	12	MB'23; DB'22, 19, 17; Ctg.B, SB, CB, JB'22. RB, Din.B'19; BB'17
০০	T-06	ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী সংক্রান্ত	07	JB'23, 22, 17; BB'22; DB, Ctg.B'19; Din.B'17
০০০	T-07	শর্ত সাপেক্ষে ত্রিভুজের বিভিন্ন অজানা রাশির মান নির্ণয়	42	DB'23, 22; RB'23, 19, 17; Ctg.B'23, 22, 19; SB'23, 22, 19, 17; BB'23, 17; JB'23, 19, 17; CB'23, 22, 17; Din.B'23, 22, 17; MB'23, 22; Mad.B'23
০	T-08	শর্ত সাপেক্ষে প্রমাণ	01	BB'23
	T-09	শর্ত সাপেক্ষে ত্রিভুজের প্রকৃতি নির্ণয়	-	-
০	T-10	বিবিধ	02	SB, Mad.B'17

Educationblog24.com

বিগত বোর্ড পরীক্ষামূহের MCQ প্রশ্ন

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



01. $\cos\frac{A}{2}$ = কত? [DB'23]

(a) $\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ (b) $\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

(c) $\sqrt{\frac{bc}{s(s-a)}}$ (d) $\sqrt{-\frac{bc}{(s-b)(s-c)}}$

02. উদ্দীপকে- [DB'23]

(i) $b = c\cos A + a\cos C$

(ii) $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C$

(iii) $c = 2R\sin C$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

03. ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ=? [DB'23]

(a) $\frac{abc}{4R}$ (b) $\frac{4R}{abc}$ (c) $\frac{abc}{R}$ (d) $\frac{R}{abc}$

04. নিচের কোনটি সঠিক? [RB'23]

(a) $\sin(-\theta) = \sin\theta$ (b) $\tan(-\theta) = \tan\theta$

(c) $\sec(-\theta) = \sec\theta$ (d) $\text{cosec}(-\theta) = \text{cosec}\theta$

05. $\frac{1-\tan 25^\circ}{1+\tan 25^\circ}$ এর মান নিম্নের কোনটি? [RB, JB'23]

(a) $\cot 20^\circ$ (b) $\tan 20^\circ$ (c) $\tan 70^\circ$ (d) $\cot 70^\circ$

06. $\tan\left(19\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ এর মান কত? [RB'23]

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

07. ΔABC এ AB = 12 সে.মি., BC = 5 সে.মি., AC = 13 সে.মি. [RB'23]

(i) $\angle B = \frac{\pi}{2}$

(ii) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 30 বর্গ সে.মি.

(iii) ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের ব্যাস 13 সে.মি.

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

08. $2\sin^2 75^\circ$ এর মান কত? [RB'23]

(a) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

09. $A + B = \frac{\pi}{2}$ হলে নিম্নের কোনটি সঠিক? [Ctg.B'23]

(a) $\tan A = \tan B$ (b) $\tan A = -\tan B$

(c) $\tan A\tan B = -1$ (d) $\tan A\tan B = 1$

10. ΔABC এ $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab$ হলে $\angle C$ = কত? [Ctg.B'23]

(a) 0° (b) 45° (c) 90° (d) 180°

11. $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ = কত? [Ctg.B'23]

(a) $\tan\frac{\theta}{2}$ (b) $\cot\frac{\theta}{2}$ (c) $\tan\theta$ (d) $\cot\theta$

12. $a = 2, b = 1, \angle C = 60^\circ$ হলে ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত? [Ctg.B'23]

(a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

13. যদি $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ এবং $\sin\theta = \frac{3}{5}$ হয়, তবে $\cos\theta$ এর মান কত? [Ctg.B'23]

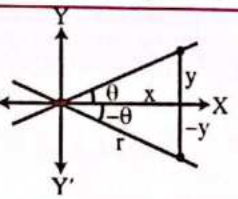
(a) $-\frac{4}{5}$ (b) $-\frac{3}{4}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{4}{5}$

০৭

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

01. a	02. b	03. a	04. c	05. b	06. a	07. d	08. d	09. d	10. a	11. b	12. b	13. a

04. $\sec(-\theta) = \frac{r}{x} = \sec\theta$; X'



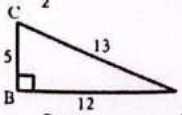
05. $\frac{1-\tan 25^\circ}{1+\tan 25^\circ} = \frac{\tan 45^\circ - \tan 25^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 25^\circ} = \tan(45^\circ - 25^\circ) = \tan 20^\circ$

06. $\tan\left(19\times\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$;

07. $AB^2 + BC^2 = (12)^2 + 5^2 = 169 = (13)^2 = AC^2$

$\therefore \angle B = \frac{\pi}{2}$, (i) সঠিক।

$\Delta ABC = \frac{1}{2}\times AB\times BC = \frac{1}{2}\times 12\times 5 = 30$ বর্গ সে.মি, (ii) সঠিক।



যেহেতু সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।
সুতরাং পরিবৃত্তের ব্যাস = অতিভুজের দৈর্ঘ্য = 13 সে.মি.

08. $2\sin^2 75^\circ = 1 - \cos(2\times 75^\circ)$ [$\because 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$]

$= 1 - \cos 150^\circ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

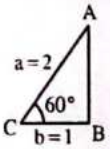
09. $A + B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(A+B) = \tan\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} = \frac{1}{0} \Rightarrow 1 - \tan A\tan B = 0 \therefore \tan A\tan B = 1$

10. $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \Rightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 1$

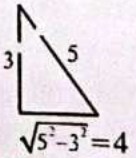
$\Rightarrow \cos C = \cos 0^\circ \therefore C = 0^\circ$

12.



ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}\times 2\times 1\times\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ বর্গএকক।

13. $\sin\theta = \frac{3}{5} \therefore \cos\theta = -\frac{4}{5}$ [$\because \theta$, ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।]



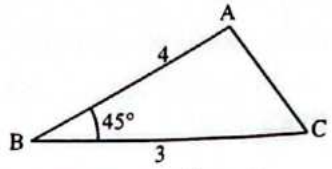
Educationblog24.com

HSC প্রশ্নব্যাংক ২০২৫

14. $\cot\theta = \frac{3}{4}$ ও $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে $\sin\theta$ এর মান কত? [SB'23]

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $-\frac{4}{5}$ (d) $\frac{1}{5}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



15. ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গএকক? [SB'23]

(a) 3 (b) 6 (c) $6\sqrt{2}$ (d) $3\sqrt{2}$

16. AC বাহুর দৈর্ঘ্য— [SB'23]

(a) $\sqrt{25+12\sqrt{2}}$ (b) $\sqrt{25-12\sqrt{2}}$

(c) $\sqrt{13}$ (d) $\sqrt{37}$

17. $\sin(A-30°)+\sin(150°+A)$ এর মান— [SB, Din.B'23]

(a) $-\frac{1}{2}\cos A$ (b) 0

(c) $\cos A$ (d) $\sin A$

18. $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে $\sin 3A$ = কত? [BB'23]

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

19. ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু $a=3, b=4$ এবং $c=5$ হলে– [BB'23]

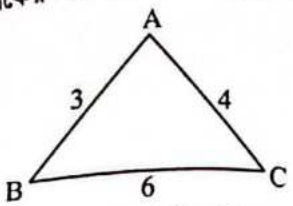
(i) $5 = 4\cos A + 3\cos B$

(ii) $\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $\tan\frac{A-C}{2} = \frac{1}{4}\cot\frac{B}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



20. চিত্রের আলোকে কোন সম্পর্কটি সঠিক? [BB'23]

(a) $\sin A = 2\sin C$ (b) $2\sin A = \sin C$

(c) $3\sin A = 2\sin C$ (d) $2\sin A = 3\sin C$

21. $\cos B$ এর মান কত? [BB'23]

(a) $-\frac{11}{24}$ (b) $\frac{11}{24}$ (c) $\frac{29}{36}$ (d) $\frac{43}{48}$

22. $\frac{2\tan(45°+x)}{1+\tan^2(45°+x)}$ = কত? [JB'23]

(a) $\cos 2x$ (b) $\sin 2x$ (c) $\cot 2x$ (d) $\tan 2x$

23. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর পরিমাণ যথাক্রমে 4, 6, ও 8 একক হলে, স্থূলকোণটির পরিমাণ কত? [JB'23]

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{48}\right)$

(c) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

24. (i) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ [JB'23]

(ii) $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ (iii) $\cos 2\theta = \frac{\cot^2\theta - 1}{\operatorname{cosec}^2\theta}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

14. c	15. d	16. b	17. b	18. b	19. a	20. a	21. c	22. a	23. c	24. d

14. $\cot\theta$ ধনাত্মক ও $\cos\theta$ ঋণাত্মক হওয়ায় θ তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত। সুতরাং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হবে।

$\cot\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{9}{16} \Rightarrow \operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \frac{9}{16}$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{25}{16} \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{16}{25} \therefore \sin\theta = \frac{-4}{5}$

16. $\cos 45° = \frac{3^2+4^2-(AC)^2}{2\times3\times4}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{25-AC^2}{24} \Rightarrow 24 = 25\sqrt{2} - AC^2\cdot\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC^2 = 25 - 12\sqrt{2}$

$\therefore AC = \sqrt{25-12\sqrt{2}}$

17. $\sin(A-30°)+\sin(150°+A)$

$= \sin(A-30°)+\sin(180°+A-30°)$

$= \sin(A-30°) - \sin(A-30°) = 0$

18. $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30° \Rightarrow A = 30°$

$\therefore \sin 3A = \sin(3\times30°) = \sin 90° = 1$

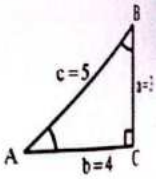
19. $4\cos A + 3\cos B = 4\times\frac{4}{5} + 3\times\frac{3}{5}$

$= \frac{16+9}{5}$; (i) সঠিক।

$\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{90°}{2} = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) সঠিক।

$\tan\frac{A-C}{2} = \frac{a-c}{a+c}\cot\frac{B}{2}$

$= \frac{3-5}{3+5}\cot\frac{B}{2} = \frac{-1}{4}\cot\frac{B}{2}$; (iii) সঠিক নয়।

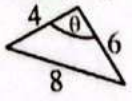


20. সাইন সূত্র অনুসারে, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \frac{6}{\sin A} = \frac{3}{\sin C} \Rightarrow \sin A = 2\sin C$

21. $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{3^2+6^2-4^2}{2\times3\times6} = \frac{29}{36}$

22. $\frac{2\tan(45°+x)}{1+\tan^2(45°+x)} = \sin\{2(45°+x)\} = \sin(90°+2x) = \cos 2x$

23. 

সবচেয়ে ছোট দুইটি বাহুর সন্নিহিত হলো স্থূলকোণ যা হলো θ

$\cos\theta = \frac{4^2+6^2-8^2}{2\times4\times6} \therefore \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

Educationblog24.com

25. $A + B = \frac{\pi}{4}$ হলে, $\cos^2 A - \cos^2 B$ এর মান কোনটি? [JB'23, BB'22]

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(A - B)$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(B - A)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(A - B)$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(B - A)$

26. $\cos\theta = -\frac{12}{13}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে $\tan\theta$ এর মান কত? [CB'23]

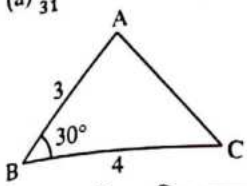
(a) $\frac{-5}{12}$ (b) $\frac{-12}{5}$ (c) $\frac{5}{12}$ (d) $\frac{12}{5}$

27. $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$ হলে $\cos\theta$ এর মান কত? [CB'23]

(a) $\frac{9}{16}$ (b) $\frac{7}{25}$ (c) $\frac{24}{25}$ (d) $\frac{25}{7}$

28. $\sin\theta = \frac{1}{3}$ হলে, $\sin 3\theta$ এর মান কত? [CB'23]

(a) $\frac{27}{31}$ (b) $\frac{-23}{27}$ (c) $\frac{23}{27}$ (d) $\frac{9}{11}$

29. 

উদ্দীপকে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [CB'23]

(a) $6\sqrt{3}$ (b) 6 (c) $3\sqrt{3}$ (d) 3

30. $\cot\theta = \frac{4}{3}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে– [Din.B'23, 22]

(i) $\sin\theta = \frac{3}{5}$ (ii) $\cos^2\theta = \frac{16}{25}$

(iii) $\text{cosec}\,\theta \cdot \sec\theta = \frac{25}{12}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

31. $\frac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$ এর মান কত? [JB, Din.B'23; RB'22]

(a) $\sin 2x$ (b) $-\cos 2x$

(c) $-\sin 2x$ (d) $\cos 2x$

32. ΔABC এ, $\angle B = 60°, \angle C = 30°$ এবং $b = 3\sqrt{3}$ একক হলে c এর দৈর্ঘ্য কত? [Din.B'23]

(a) $\frac{1}{2}$ একক (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ একক

(c) $2\sqrt{3}$ একক (d) 3 একক

33. $\sin(-3690°)$ এর মান কত? [MB'23]

(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

34. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 cm, 8 cm এবং 10 cm ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ কত? [MB'23]

(a) 6 cm (b) 7 cm

(c) 8 cm (d) 5 cm

35. $\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{24}}$ এর মান কোনটি? [MB'23]

(a) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ (b) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

(c) $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ (d) $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

36. $\tan 4\theta$ এর মান নিচের কোনটি? [MB'23]

(a) $\frac{2\tan 2\theta}{1+\tan^2 2\theta}$ (b) $\frac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2 2\theta}$

(c) $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ (d) $\frac{1-\tan^2 2\theta}{1+\tan^2 2\theta}$

37. $\sec(-765°)$ এর মান কত? [Mad.B'23]

(a) $-\sqrt{2}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\sqrt{2}$

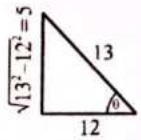
০৭

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

25. b	26. c	27. b	28. c	29. d	30. b	31. c	32. d	33. b	34. d	35. a	36. b	37. d

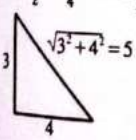
25. $\cos^2 A - \cos^2 B$
$= \sin(A + B)\sin(B - A) = \sin(45°)\sin(B - A) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(B - A)$

26. $\cos\theta = -\frac{12}{13}$



$\therefore \tan\theta = \frac{5}{12}$ [$\because \theta$, ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত যেখানে $\tan\theta$ (+ve)]

27. $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4} \therefore \cos\frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$



$\Rightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \cos\theta + 1 = \frac{32}{25} \therefore \cos\theta = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$

28. $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3 \times \frac{1}{3} - 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27}$

29. ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 30°$
$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 3$ বর্গ একক।

31. $\frac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)} = \cos\left(2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)$
$\left[\because \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) = -\sin 2x$

32. ΔABC এ sine এর সূত্রানুসারে $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
$\Rightarrow c = \frac{b \times \sin C}{\sin B} = \frac{3\sqrt{3} \times \sin 30°}{\sin 60°} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3$ একক

33. $\sin(-3690°) = -\sin(41 \times 90° + 0°) = -\cos 0° = -1$

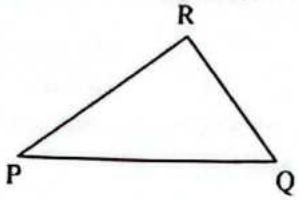
34. $6^2 + 8^2 = 10^2$; ত্রিভুজটি সমকোণী।
$\therefore$ পরিব্যাসার্ধ = অতিভুজের অর্ধেক $= \frac{1}{2} \times 10 = 5$ cm.

35. $\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{24}} = 2\sin\frac{\pi}{24} = 2\sin\frac{\pi}{3\times 8}$
$= 2\sin\frac{\pi}{3\times 2^3} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

36. $\tan 4\theta = \tan(2 \times 2\theta) = \frac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2 2\theta}$

Educationblog24.com

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



38. PQ = 7, QR = 4 এবং PR = 5 হলে ΔPQR এর অর্ধপরিসীমা কত? [Mad.B'23; CB'22]
(a) 8 (b) 10 (c) 14 (d) 16

39. $\frac{\sin Q}{\sin R}$ এর মান— [Mad.B'23]
(a) $\frac{4}{7}$ (b) $\frac{7}{4}$ (c) $\frac{7}{5}$ (d) $\frac{5}{7}$

40. ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ 10 একক। যদি $c = 10\sqrt{3}$ একক হয়, তবে C কোণের মান নিচের কোনটি? [DB'22]
(a) 60° (b) 120° (c) 30° (d) 90°

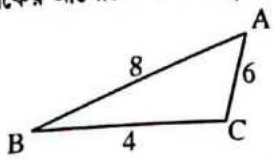
41. $\tan\theta = \sqrt{3}$ হলে- [DB'22]
(i) $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$
(iii) $\tan 2\theta = -\sqrt{3}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

42. $\sin 65° + \cos 65° = ?$ [DB, CB'22]
(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40°$ (b) $\frac{1}{2}\sin 20°$
(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40°$ (d) $\sqrt{2}\cos 20°$

43. $\tan\frac{\alpha}{2} = 7$ হলে $4\sin\alpha - 3\cos\alpha = ?$ [DB'22]
(a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 6

44. $\cos 2A = \frac{3}{5}$ হলে, sin A এর মান কত? [Ctg.B'22]
(a) $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$
(c) $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



45. ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত? [Ctg.B'22; SB'19]
(a) $\sqrt{15}$ বর্গ একক (b) $9\sqrt{15}$ বর্গ একক
(c) $3\sqrt{15}$ বর্গ একক (d) $2\sqrt{15}$ বর্গ একক

46. ∠C এর মান কত? [Ctg.B'22]
(a) $\cos^{-1}\left(\frac{39}{12}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{12}{39}\right)$
(c) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

47. $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ এর মান কত? [Ctg.B'22]
(a) $1-\sqrt{2}$ (b) $-1+\sqrt{2}$
(c) $1+\sqrt{2}$ (d) $-1-\sqrt{2}$

48. $\frac{\cot 54°}{\tan 36°} + \frac{\tan 20°}{\cot 70°}$ এর মান কত? [SB'22]
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

49. যদি $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ হয়, তবে $\cos 3\theta$ এর মান- [SB'22]
(a) $\frac{1}{8}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$ (b) $\frac{1}{3}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$
(c) $\frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$ (d) $\frac{3}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

38. a	39. d	40. a	41. b	42. d	43. b	44. b	45. c	46. d	47. b	48. c	49. c

40. ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ, R = 10 একক এবং $c = 10\sqrt{3}$
আমরা জানি, ΔABC -এ sine নিয়ম অনুসারে,
$\frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \sin C = \frac{c}{2R} = \frac{10\sqrt{3}}{2\times 10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore C = 60°$

41. $\tan\theta = \sqrt{3} \therefore \theta = 60° \Rightarrow 2\theta = 120°$
(i) $\sin 2\theta = \sin 120° = \sin(2\times 90° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
(ii) $\cos 2\theta = \cos 120° = \cos(2\times 90° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$
(ii) $\tan 2\theta = \tan 120° = \tan(2\times 90° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

42. $\sin 65° + \cos 65° = \sin 65° + \cos(90° - 25°) = \sin 65° + \sin 25°$
$= 2\sin\frac{65°+25°}{2}\cos\frac{65°-25°}{2} = 2\sin 45°\cos 20°$
$= 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 20° = \sqrt{2}\cos 20°$

43. এখানে, $\tan\frac{\alpha}{2} = 7$
তাহলে, $4\sin\alpha - 3\cos\alpha = 4\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} - 3\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
$= 4\cdot\frac{2\cdot 7}{1+7^2} - 3\cdot\frac{1-7^2}{1+7^2} = 4\cdot\frac{14}{50} - 3\cdot\frac{-48}{50} = \frac{28}{25} + \frac{72}{25} = \frac{28+72}{25} = \frac{100}{25} = 4$

44. $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin^2 A = \frac{1}{5} \therefore \sin A = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

45. $s = \frac{8+6+4}{2} = 9$
$\therefore \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9\times 5\times 3\times 1}$
$= \sqrt{9\times 15} = 3\sqrt{15}$ বর্গ একক

46. $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4^2+6^2-8^2}{2\times 4\times 6} = -\frac{1}{4} \therefore C = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

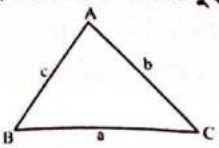
47. ধরি, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = x$; এখন, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}$
$\Rightarrow 1 = \frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \therefore x = -1 \pm \sqrt{2}$
যেহেতু, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ এর অবস্থান প্রথম চতুর্ভাগে তাই, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ এর মান ধনাত্মক।
$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = -1 + \sqrt{2}$

48. $\frac{\cot 54°}{\tan 36°} + \frac{\tan 20°}{\cot 70°} = \frac{\tan 36°}{\tan 36°} + \frac{\tan 20°}{\tan 20°} = 2$

49. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
$= 4\left\{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right\}^3 - 3\cdot\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - 3\right\}$
$= \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}-1\right) = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2 - a\cdot\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$
Shortcut: $\cos^n\theta = \frac{1}{2}\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) \therefore \cos^3\theta = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$

Educationblog24.com

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



50. $\angle A = 60°, b = 2$ এবং $c = 4$ হলে, a-এর মান কত? [SB'22]

(a) $2\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{6}$

51. $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ হলে $a : b : c =$ কত? [SB'22; 17]

(a) $2 : \sqrt{3} : 1$ (b) $\sqrt{3} : 2 : 1$
(c) $2 : 3 : 1$ (d) $1 : \sqrt{3} : 2$

52. $\frac{\sin(45°+A)+\sin(45°-A)}{\cos(45°-A)-\cos(45°+A)} =$ কত? [BB'22]

(a) $\cot A$ (b) -1 (c) 1 (d) $\tan A$

53. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে – [BB'22]

(i) $\cos 4A = \frac{1-\tan^2 2A}{1+\tan^2 2A}$
(ii) $\sin 6A = 2 \sin 3A \cos 3A$
(iii) $\tan 8\alpha = \frac{2 \tan 4\alpha}{1-\tan^2 4\alpha}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii , iii

54. যে কোনো ত্রিভুজের বাহু a, b, c এবং এর ক্ষেত্রফল Δ হলে, $\sin A =$ কত? [JB'22]

(a) $\frac{2\Delta}{ca}$ (b) $\frac{2\Delta}{bc}$ (c) $\frac{2\Delta}{ab}$ (d) $\frac{2\Delta}{abc}$

55. ΔABC এ, $\cos A = \sin B - \cos C$ হলে, $\angle A$ এর মান কোনটি? [JB'22]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

56. $\cos 2A =$ [JB'22]

(i) $-2 \sin^2 A + 1$ (ii) $2 \cos^2 A - 1$
(iii) $\frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

57. $2 \sin^2 15°$ এর মান কত? [JB'22; BB'17]

(a) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (d) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

58. n একটি পূর্ণসংখ্যা হলে $\sin\left\{2n\pi + (-1)^{2n}\frac{\pi}{6}\right\}$ এর মান কত? [CB'22]

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

59. $\sin 10° = p$ হলে $\sin 20°$ এর মান কোনটি? [CB'22; RB'19; DB'17]

(a) $2p$ (b) $2p\sqrt{1-p^2}$
(c) $2p\sqrt{p^2-1}$ (d) $2\sqrt{1-p^2}$

60. ΔABC এর $a = 5, b = 4$ এবং $c = 3$ হলে- [Din.B'22]

(i) A কোণের মান $60°$
(ii) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক
(iii) ত্রিভুজটি সমকোণী

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

61. $\text{cosec}(-330°)$ এর মান কত? [Din.B'22; JB, BB'17]

(a) -2 (b) $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) 2

62. ΔABC এর ক্ষেত্রে $c^2 + a^2 - b^2 - ca = 0$ হলে $\angle B$ এর পরিমাণ- [MB'22]

(a) $30°$ (b) $45°$ (c) $60°$ (d) $120°$

০৭

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

50. b	51. d	52. a	53. d	54. b	55. d	56. d	57. a	58. b	59. b	60. c	61. d	62. c

50. $\cos A = \frac{(b^2+c^2-a^2)}{2bc}$, $\cos 60° = \left(\frac{4+16-a^2}{2\times4\times2}\right) \therefore a = 2\sqrt{3}$

51. $A + 2A + 3A = \pi \Rightarrow A = \frac{\pi}{6} \therefore B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{\pi}{2}$

এখন, $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2$

52. $\frac{\sin(45°+A)+\sin(45°-A)}{\cos(45°-A)-\cos(45°+A)} = \frac{2 \sin 45° \cos A}{2 \sin 45° \sin A} = \cot A$

53. (i) $\cos 4A = \cos(2 \cdot 2A) = \frac{1-\tan^2 2A}{1+\tan^2 2A}$

(ii) $\sin 6A = 2 \sin 3A \cos 3A$; (iii) $\tan 8\alpha = \tan(2 \cdot 4\alpha) = \frac{2 \tan 4\alpha}{1-\tan^2 4\alpha}$

56. $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}$

57. $2 \sin^2 15° = 1 - \cos(2 \times 15°) = 1 - \cos 30° = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

58. $\frac{1}{2}$

যেহেতু, $n \in \mathbb{Z}$
ধরি, $n = 1$
$\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)$
$= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

অথবা, n এর মান যেকোনো পূর্ণসংখ্যার জন্য,
$\sin\left\{2n\pi + (-1)^{2n}\frac{\pi}{6}\right\}$
$= \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

59. $\because \sin 10° = p$
$\therefore \cos 10° = \sqrt{1 - \sin^2 10°} = \sqrt{1-p^2}$
$\therefore \sin 20° = 2 \sin 10° \cos 10° = 2p\sqrt{1-p^2}$

60. (i) $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4^2+3^2-5^2}{2\times4\times3} = 0$
$\therefore A = 90°$

(ii) এখানে, $A = 90° \therefore \Delta ABC$ সমকোণী
$\therefore \Delta ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ বর্গ একক।

(iii) (i) হতে $A = 90° \therefore \Delta ABC$ সমকোণী

61. $\text{cosec}(-330°) = -\text{cosec } 330°$
$= -\text{cosec}(360° - 30°) \quad = -\text{cosec}(4 \times 90° - 30°)$
$= -(-\text{cosec}(30°)) = \text{cosec } 30° = 2$

62. $c^2 + a^2 - b^2 = ca \Rightarrow \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$
$= \frac{ca}{2ca} \Rightarrow \cos B = \frac{1}{2} \therefore B = 60°$

Educationblog24.com

63. যেকোনো ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক? [MB'22]

(a) $c = a\cos B + b\cos A$
(b) $b = c\sin A + a\sin C$
(c) $\Delta = \frac{1}{2}ab\cos C$
(d) $\cos A = \frac{b^2+c^2+a^2}{2bc}$

64. $\sin^4\theta - \cos^4\theta$ সমান- [MB'22]

(a) $1 + 2\sin^2\theta$ (b) $1 + 2\cos^2\theta$
(c) $2\sin^2\theta - 1$ (d) $2\cos^2\theta - 1$

65. যে কোনো ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রে- [DB'19]

(i) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
(ii) $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A$
(iii) $c - a\cos B = b\cos A$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

66. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ এর মান- [DB'19]

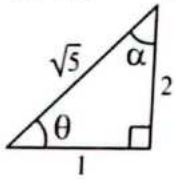
(a) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

67. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে- [DB'19]

(i) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ (ii) $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$
(iii) $\cos 2A = \frac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

68. 

উদ্দীপক থেকে- [RB'19]

(i) $\tan\theta = 2$ (ii) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$
(iii) $\sec\alpha = \sqrt{5}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

69. $A + B + C = \frac{3\pi}{2}$ হলে, $\operatorname{cosec}(B + C)$ এর মান কোনটি? [RB'19; JB'17]

(a) $-\sec A$ (b) $\sec A$
(c) $-\operatorname{cosec} A$ (d) $\operatorname{cosec} A$

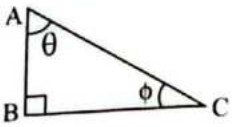
70. $\cos 2\theta$ এর মান- [Ctg.B'19]

(i) $1 - 2\sin^2\theta$ (ii) $\frac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta}$
(iii) $\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



71. $2AB = BC$ হলে $\sin\theta = ?$ [Ctg.B'19]

(a) $\sin\phi$ (b) $2\sin\phi$
(c) $\frac{1}{2}\sin\phi$ (d) $\frac{1}{4}\sin\phi$

72. $AB = 3, BC = 4$ হলে, $\cos\theta + \cos\phi = ?$ [Ctg.B'19]

(a) $\frac{5}{8}$ (b) $\frac{5}{7}$ (c) $\frac{7}{5}$ (d) $\frac{8}{5}$

73. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\tan(A + B) =$ কত? [SB'19]

(a) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ (d) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

74. $\cos(2n\pi - 30°) =$ কত? [SB'19]

(a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

75. $\tan\theta = \sqrt{3}$ হলে- [MB'22; SB'19]

(i) $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$
(iii) $\tan 2\theta = -\sqrt{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

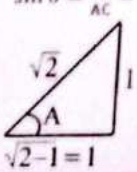
63. a	64. c	65. d	66. a	67. a	68. a	69. a	70. a	71. b	72. c	73. d	74. b	75. b

64. $\sin^4\theta - \cos^4\theta = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$
$= 1 \cdot (\sin^2\theta - 1 + \sin^2\theta) = 2\sin^2\theta - 1$

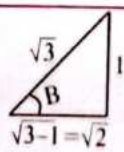
66. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

69. $\operatorname{cosec}(B + C) = \operatorname{cosec}\left(3 \cdot \frac{\pi}{2} - A\right) = -\sec A$

71. $\sin\theta = \frac{BC}{AC} = 2 \times \frac{AB}{AC} = 2\sin\phi$

73. 

$\therefore \tan A = \frac{1}{1} = 1$



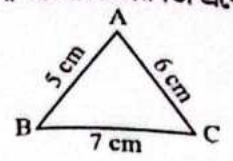
$\therefore \tan B = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

74. $n = 0$ বসিয়ে $\cos(-30°) = \cos 30° \left[\because \cos(-\theta) = \cos\theta\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$

75. $\tan\theta = \sqrt{3} \therefore \theta = 60°$
$\sin 2\theta = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 2\theta = \cos 120° = \frac{-1}{2}$
$\tan 2\theta = \tan 120° = -\sqrt{3}$

Educationblog24.com

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



76. $\sin\frac{A}{2}$ = কত? [SB'19]
(a) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ (b) $-\sqrt{\frac{2}{5}}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $-\frac{2}{5}$

77. $A = 40°$ ও $B = 50°$ হলে- [JB'19]
(i) $\cos 2A = \sin 10°$ (ii) $\sin(A - B) = \sin 10°$
(iii) $\cot(A + B) = \tan 0°$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

78. $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$ -এর মান কত? [CB'19]
(a) $\cot\alpha$ (b) $\cot\beta$ (c) $\tan\alpha$ (d) $\tan\beta$

79. $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$ হলে, $\operatorname{cosec}(\alpha + \gamma)$ এর মান কত? [CB'19; JB'17]
(a) $-\operatorname{cosec}\beta$ (b) $\operatorname{cosec}\beta$
(c) $-\sec\beta$ (d) $\sec\beta$

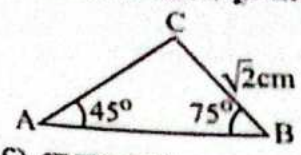
80. $\frac{1+\tan 26°}{1-\tan 26°}$ এর মান কত? [Din.B'19]
(a) $\tan 71°$ (b) $\tan 19°$ (c) $\cot 71°$ (d) $\cot 19°$

81. $\tan 2\theta - \tan\theta$ এর মান কোনটি? [Din.B'19]
(a) $\operatorname{cosec} 2\theta$ (b) $\tan\theta\cos\theta$
(c) $\sin 2\theta$ (d) $\tan\theta\sec 2\theta$

82. $\sin 3x$ এর পর্যায় কত? [DB'17]
(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) 3π (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) 2π

83. $\cos\left(7\frac{1}{2}\right)^\circ = ?$ [DB'17]
(a) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
(c) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ (d) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

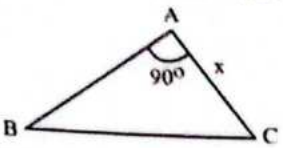


84. $\sin(B + C)$ এর মান কত? [RB'17]
(a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $-\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2}$

85. AB = কত সে. মি? [RB'17]
(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$

86. $\tan\frac{3x}{2}$ এর মৌলিক পর্যায় কত? [SB'17]
(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) π (d) $\frac{3\pi}{2}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



87. $\sin B = x$ হলে, $\sin C$ এর মান কত? [SB'17]
(a) x (b) $\frac{1}{x}$
(c) $\sqrt{x^2 - 1}$ (d) $\sqrt{1 - x^2}$

88. ABC ত্রিভুজ BC = 3, CA = 4 এবং AB = 5 হলে- [BB'17]
(i) $C = \frac{\pi}{2}$ (ii) ΔABC এর পরিসীমা 24
(iii) ΔABC এর ক্ষেত্রফল = 6 বর্গ একক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

89. $A = 60°, B = 45°$ হলে, $\cos(B - A)$ এর মান কোনটি? [Din.B'22; JB'17]
(a) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ (b) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ (c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

০৭

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

76. a	77. c	78. a	79. d	80. d	81. d	82. a	83. b	84. b	85. d	86. b	87. d	88. b	89. c

76. $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+6+7}{2} = 9$ cm
$\therefore \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{(9-6)(9-5)}{6\times5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

77. (i) $\cos 2A = \cos 80° = \sin 10°$
(ii) $\sin(A - B) = \sin(-10°) = -\sin 10°$
(iii) $\cot(A + B) = \cot 90° = \tan 0°$ ∴ (i) ও (iii) সঠিক

78. $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\beta} = \cot\alpha$

79. $\alpha+\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$; $\operatorname{cosec}(\alpha + \gamma) = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sec\beta$

80. $\frac{\tan 45°+\tan 26°}{1-\tan 45°\tan 26°} = \tan(45° + 26°) = \tan 71° = \cot 19°$

81. $\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin 2\theta\cos\theta - \sin\theta\cos 2\theta}{\cos 2\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta\cos 2\theta} = \tan\theta\sec 2\theta$

83. $\cos\left(7\frac{1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3\times2^3}\right)^* = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

84. $\angle A = 45°, \angle B = 75°, \angle C = 60°$
$\therefore \sin(B + C) = \sin(135°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

85. $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a\times\sin C}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}\times\sin 60°}{\sin 45°} = \sqrt{3}$

86. $\tan\frac{3x}{2} = \tan\left(\frac{3x}{2} + \pi\right) = \tan\left[\frac{3}{2}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$

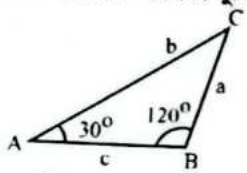
87. $A + B + C = 180°$
$\Rightarrow 90° + B + C = 180° \Rightarrow B = 90° - C \therefore \sin B = x$
$\Rightarrow \sin(90° - C) = x = \cos C = x \Rightarrow \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - x^2}$

89. $\cos(B - A) = \cos B\cos A + \sin A\sin B$
$= \cos 60°\cos 45° + \sin 60°\sin 45° = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Educationblog24.com

90. ΔABC-এ নিচের কোনটি সঠিক নয়? [JB'17]
(a) $a = b\cos B + c\cos C$
(b) $a = b\cos C + c\cos B$
(c) $b = c\cos A + a\cos C$
(d) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



91. $\frac{c+a}{b}$ এর মান কোনটি? [CB'17]
(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

92. $b = 3$ একক হলে ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [CB'17]
(a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{9}{2}$

93. $y = \cos x$ ফাংশনের পর্যায়কাল নিচের কোনটি? [Din.B'17]
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) π (c) $-\pi$ (d) 2π

94. নিচের কোনটি সঠিক? [Din.B'17]
(a) $\sin(-\theta) = \sin\theta$ (b) $\cos(-\theta) = \cos\theta$
(c) $\tan(-\theta) = \tan\theta$ (d) $\cot(-\theta) = \cot\theta$

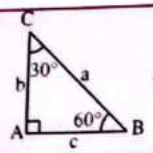
95. ΔABC-এ $\angle A = 90^0, \angle B = 60^0$ এবং $c = 3$cm হলে, b এর দৈর্ঘ্য কত? [Din.B'17]
(a) 6cm. (b) 4cm.
(c) $3\sqrt{3}$cm. (d) $2\sqrt{3}$cm.

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

90. b	91. c	92. a	93. d	94. b	95. c

91. $\frac{c+a}{b} = \frac{2R(\sin C + \sin A)}{2R\times\sin B} = \frac{\sin 30^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

92. $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{3}{\sin 120^\circ} = \frac{c}{\sin 30^\circ} \Rightarrow c = \sqrt{3}$
$\Delta ABC = \frac{1}{2}\times bc\sin A = \frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}\times\sin 30 = \frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

95. 

$\tan 60^\circ = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{b}{3} \Rightarrow b = 3\sqrt{3}$ cm

বিভিন্ন কলেজের টেস্ট পরীক্ষার MCQ প্রশ্ন

96. $\sin\theta + \cos\theta = \sin\alpha + \cos\alpha$ হলে, $\theta + \alpha = ?$ [মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]
(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

97. যদি $A + B + C = \pi$ হয়, তাহলে, [ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ]
(i) $\cot(B + C) = -\cot A$
(ii) $\tan(B + C) = \cot A$ (iii) $\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A\tan B\tan C} = 1$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

98. $\sin 5^\circ = \sqrt{a}$ হলে, $\sin 10^\circ$ এর মান কত? [ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ]
(a) $2\sqrt{a}$ (b) $2\sqrt{a}\sqrt{a-1}$
(c) $2\sqrt{a}\sqrt{1-a}$ (d) $\sqrt{a}\sqrt{1-a}$

99. $y = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$ এবং $y = 1$ হলে, x এর মান কত? [রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ]
(a) 90° (b) 60° (c) 45° (d) 30°

100. $(3\sin 15^\circ - 4\sin^3 15^\circ)^2$ এর মান কত? [রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ]
(a) 0.25 (b) 0.50 (c) 0.75 (d) 1.00

101. $3\tan^2 A = 1, b = 12$ এবং $c = 15$ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ]
(a) 12 (b) 15 (c) 27 (d) 45

102. ΔABC এ $a = 13$ cm, $b = 7$cm, $c = 8$cm হলে, স্থূলকোণের মান কত? [ঢাকা কলেজ]
(a) 100° (b) 110° (c) 120° (d) 150°

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

96. d	97. c	98. c	99. d	100. b	101. d	102. c

96. $\sin\theta + \cos\theta = \sin\alpha + \cos\alpha$
$\Rightarrow \sin\theta - \sin\alpha = \cos\alpha - \cos\theta$
$\Rightarrow 2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}$
$\Rightarrow \tan\frac{\theta+\alpha}{2} = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\theta+\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} \therefore \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$

98. $\sin 10^\circ = \sin 2\times 5^\circ = 2\sin 5^\circ\cos 5^\circ$
$= 2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{1-\sin^2 5^\circ} = 2\sqrt{a}\sqrt{1-a}$

101. $3\tan^2 A = 1 \Rightarrow \tan^2 A = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan A = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \therefore A = 30^\circ, 150^\circ$
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\times 12\times 15\times\sin 30^\circ = 45$ বর্গ একক

102. স্থূলকোণের মান $= \cos^{-1}\left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}\right)$
$= \cos^{-1}\left(\frac{8^2+7^2-13^2}{2\times 8\times 7}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$

103. $\sin\theta = \frac{4}{5}; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হলে, $\cos\frac{\theta}{2}$ এর মান কত? [ঢাকা কলেজ]

(a) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $-\frac{3}{5}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

104. $\cos^2 15° - \sin^2 15°$ = কত? [ঢাকা কলেজ]

(a) $-\sqrt{\frac{3}{4}}$ (b) $-\frac{3}{4}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{3}{4}$

105. $\cos A + \cos(120° + A) + \cos(120° - A)$ এর মান কত? [আইডিয়াল স্কুল অ্যান্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\tan\theta = \frac{1}{3}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

106. $\sin(-\theta) - \cos\theta$ এর মান কত? [আইডিয়াল স্কুল অ্যান্ড কলেজ, মতিঝিল]

(a) $-\frac{4}{\sqrt{10}}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$ (c) $\frac{4}{\sqrt{10}}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{10}}$

107. $\cos 2\theta$ এর মান কত? [আইডিয়াল স্কুল অ্যান্ড কলেজ, মতিঝিল]

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{5}{4}$

108. $\cot\theta = -\frac{5}{2\sqrt{6}}$ এবং $\sin\theta$ ধনাত্মক হলে $\sec\theta$ এর মান কত? [ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ]

(a) $-\frac{7}{5}$ (b) $-\frac{5}{7}$ (c) $\frac{7}{5}$ (d) $\frac{5}{7}$

109. $\sin(A + B)\sin(A - B)$ এর মান- [ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ]

(i) $\sin^2 A - \sin^2 B$ (ii) $\cos^2 A - \sin^2 B$
(iii) $\cos^2 B - \cos^2 A$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

110. $\cos^{-1}\frac{1}{3} = x$ হলে, $\sin 3x$ = কত? [হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]

(a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (b) $\frac{-10\sqrt{2}}{27}$ (c) $\frac{6\sqrt{2}}{3}$ (d) $\frac{-64\sqrt{2}}{27}$

111. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + A\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - A\right)$ = কোনটি? [হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]

(a) $\frac{1}{2}\cos 2A$ (b) $\cos 2A$
(c) $2\sin 2A$ (d) $\frac{1}{2}\sin 2A$

112. ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে $B = 60°, c = 2\sqrt{3}, b = 3\sqrt{2}$ হলে, তবে A = কত? [হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]

(a) 90° (b) 75° (c) 60° (d) 45°

113. n এর মান শূন্য অথবা যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা হলে, $\cos\left\{(2n + 1)\pi + \frac{\pi}{3}\right\}$ এর মান কত? [ঢাকা সিটি কলেজ]

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{-1}{2}$

114. $\sec\theta = \frac{13}{12}$ হলে, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ এর মান কোনটি? [বীরশ্রেষ্ঠ মুন্সী আব্দুর রউফ পাবলিক কলেজ, ঢাকা]

(a) $\frac{5}{12}$ (b) $\frac{5}{13}$ (c) $\frac{11}{5}$ (d) $\frac{12}{5}$

115. $\cos(60° - \theta) - \sin(60° + \theta) + \sin\theta$ = কত? [বীরশ্রেষ্ঠ নূর মোহাম্মদ পাবলিক কলেজ, ঢাকা]

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

116. $\sin(-\theta)\sec(-\theta)\tan(270° + \theta)$ এর মান কত? [বীরশ্রেষ্ঠ নূর মোহাম্মদ পাবলিক কলেজ, ঢাকা]

(a) -1 (b) $\tan^2\theta$
(c) $-\tan^2\theta$ (d) 1

০৭

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

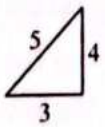
103. d	104. c	105. b	106. c	107. a	108. a	109. c	110. b	111. a	112. b
113. d	114. b	115. a	116. d						

103. দেওয়া আছে, $\sin\theta = \frac{4}{5}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

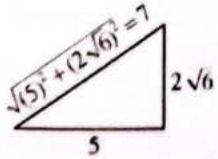
$\therefore \cos\theta = -\frac{3}{5}$ [$\because \theta$ ২য় চতুর্ভাগে]

$\therefore 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{5} \therefore \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$



108. $\cot\theta = -\frac{5}{2\sqrt{6}}$



θ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে বলে, $\sec\theta = -\frac{7}{5}$

110. $\cos^{-1}\frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{3}$

$\therefore \sin x\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$= 3\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} - 4\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3 = 2\sqrt{2} - \frac{4}{27}\cdot 16\sqrt{2} = -\frac{10\sqrt{2}}{27}$

111. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + A\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = \sin^2\frac{\pi}{4} - \sin^2 A$

$= \frac{1}{2} - \sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 A) = \frac{1}{2}\cos 2A$

112. $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{\sin 60°} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45°; C = 45°$

$\therefore A = 180° - B - C = 180° - 60° - 45° = 75°$

Educationblog24.com

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট: অধ্যায়-০৭

পূর্ণমান: ২৫ | MCQ | সময়: ২৫ মিনিট

01. $\tan x = \frac{b}{a}$ হলে $a\cos 2x + b\sin 2x$ এর মান হলো–
(a) a (b) a − b (c) a + b (d) b

02. $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ হলে,
$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A$ = কত?
(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) 3

03. $\sin^2 10^0 + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \ldots \sin^2 90^\circ$ = কত?
(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8

04. $\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B = 1$ এবং $A = 30^\circ$ হলে, B =?
(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

05. ABC ত্রিভুজের, $\angle A = 30^\circ, c = a\sqrt{2}$ হলে $\angle C$ =?
(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

06. Δ ABC- এ $a = 2b$ এবং $A = 3B$ হলে $\angle B$ = কত?
(a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) 120°

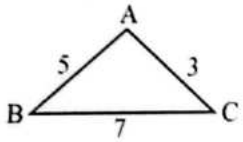
07. sin18° এর মান কোনটি?
(a) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
(c) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ (d) $\frac{1}{4}\sqrt{5+1}$

08. $\cos 15^\circ + \sin 15^\circ$ =?
(a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$

09. n পূর্ণসংখ্যা হলে $\sin\left\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}\right\}$ এর মান কত?
(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. ABC সমকোণী ত্রিভুজ হলে, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ এর মান কত?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 0 (d) −1

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



11. ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম কোণ কত ডিগ্রি?
(a) 21.78° (b) 20.41° (c) 38.21° (d) 25.32°

12. $f(x) = \sin 2x, g(x) = x^3$ হলে $f\left(g\left(\frac{\sqrt[3]{\pi}}{2}\right)\right)$ এর মান কত?
(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু 8 সে.মি., 9 সে.মি. এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ θ ।

13. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $18\sqrt{2}$ বর্গ সে.মি. হলে θ = কত? [θ-সূক্ষ্মকোণ]
(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$A + B + C = \pi$

14. $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)$ = কত?
(a) $-\sin\frac{A}{2}$ (b) $-\cos\frac{A}{2}$ (c) $\sin\frac{A}{2}$ (d) $\cos\frac{A}{2}$

15. $\tan(A + C)$ = কত?
(a) $-\tan B$ (b) $-\cot B$ (c) $\sin B$ (d) $\frac{\sin B}{\cos B}$

16. ABC ত্রিভুজের বাহুগুলো a, b, c এবং $(a + b + c)(b - c - a) = 3bc$ হলে-
(i) $A = 60^\circ$ (ii) $B = 60^\circ$ (iii) $C = 60^\circ$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii (c) iii (d) i, ii, iii

17. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলোর পরিমাণ, 3, 5 ও 7 হলে, স্থূলকোণের পরিমাণ কত?
(a) 60° (b) 100° (c) 120° (d) 180°

18. ABC ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ R হলে sin A এর জন্য নিচের কোনটি সঠিক?
(a) $\frac{a}{R}$ (b) $\frac{a}{2R}$ (c) 2R (d) $\frac{2R}{a}$

19. $\cot A - \tan A$ = কত?
(a) $2\cos^2 A$ (b) $2\cos 2A$
(c) $2\cot 2A$ (d) $2\sin^2 A$

20. একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 2 একক। ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের ব্যাস কত?
(a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

21. ΔABC এ A, B, C কোণগুলোর অনুপাত যথাক্রমে 2: 3: 7 হলে, a: b =?
(a) $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{3}:\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{2}:1$ (d) $1:\sqrt{2}$

22. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য কর:
(i) $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ (ii) $a\sin B = b\sin A$
(iii) $b = c\cos A + a\cos C$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

23. $0 < \theta < \pi$ হলে, $\frac{\sin\frac{\theta}{2} - \sqrt{1+\sin\theta}}{\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{1+\sin\theta}}$ =?
(a) $\tan\frac{\theta}{2}$ (b) $\cot\frac{\theta}{2}$
(c) $\tan\frac{\theta}{2} - 1$ (d) $-\left(\cot\frac{\theta}{2} + 2\right)$

24. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য কর:
(i) $\Delta = \frac{abc}{4R}$, R পরিব্যাসার্ধ (ii) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
(iii) $\sin 3A = 4\sin^3 A - 3\sin A$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

25. ΔABC সমকোণী ত্রিভুজের $\sin(A + B + C)$ =?
(a) −1 (b) 0 (c) 1 (d) $-\cos A$

Educationblog24.com

CQ

পূর্ণমান: ৫০ | সময়: ২:৩৫ মিনিট

(যেকোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও:)

01. $A = \cot\theta \cot 3\theta \cot 5\theta \cdots\cdots\cdots \cot 19\theta$

এবং $B = \frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \operatorname{cosec}(-\theta)}$

(ক) $\tan 15° + \tan 45° + \tan 75° + \cdots\cdots\cdots + \tan 165° = ?$ 2

(খ) $\theta = \frac{\pi}{20}$ হলে, A এর মান বের কর? 4

(গ) $\sin\theta = \frac{5}{13}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হলে, B এর মান বের কর? 4

02. দৃশ্যকল্প-১: $a\cos(x + \alpha) = b\cos(x - \alpha)$

দৃশ্যকল্প-২: $a\sin(\theta + \alpha) = b\sin(\theta + \beta)$

(ক) কোন একটি ত্রিভুজে $\cos A = \cos B \cos C$ হলে, $(\tan B + \tan C)$ এর মান বের কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $\cot\theta = \frac{a\cos\alpha - b\cos\beta}{b\sin\beta - a\sin\alpha}$ 4

(গ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে,

$\frac{(a-b)^2\cot^2\alpha - (a+b)^2\sec^2 x}{(a+b)^2} = -1$ 4

03. (i) $16\cos 2A\cos 4A\cos 8A\cos 14A$

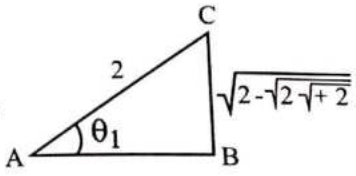
(ii) $\sin^3 A + \sin^3(120° + A) + \sin^3(240° + A) = B$

(ক) $\frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = ?$ 2

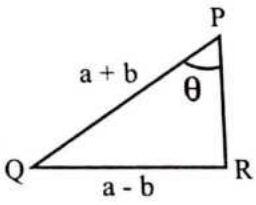
(খ) $A = \frac{\pi}{15}$ হলে দেখাও যে, (i) এর মান 1 4

(গ) (ii) এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $B = -\frac{3}{4}\sin 3x$ 4

04. দৃশ্যপট-১:



দৃশ্যপট-২:



(ক) $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2}$ হলে, প্রমাণ কর যে,

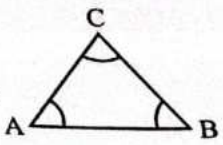
$\cos\phi = \frac{\cos\theta - e}{1 - e\cos\theta}$ 2

(খ) দৃশ্যপট-১: হতে প্রমাণ কর যে, $\theta_1 = \frac{\pi}{16}$ 4

(গ) দৃশ্যপট-২: হতে প্রমাণ কর যে, $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{b}{a}}$ 4

05. দৃশ্যকল্প-১: $A + B + C = \frac{\pi}{2}$

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) ABC একটি সাধারণ ত্রিভুজ হলে, $\tan A + \tan B + \tan C = ?$ 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে,

$\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 2\cos A\cos B\sin C$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে,

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\,\text{Cos}\,C = 1$. 4

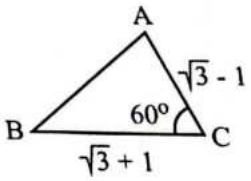
06. $\sin\alpha + \sin\beta = a$ এবং $\cos\alpha + \cos\beta = b$ দুটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ। [যেখানে $\alpha + \beta = 180°$]

(ক) $\sin\alpha - \sin\beta$ নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, $\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} + 1 = 0$ 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $1 + \cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ 4

07.



(ক) দেখাও যে, $a^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + b^2(\sin^2 C - \sin^2 A) + c^2(\sin^2 A - \sin^2 B) = 0$ 2

(খ) দেখাও যে, $\cos^2(\theta - C) + \cos^2\theta + \cos^2(\theta + C) = \frac{3}{2}$ 4

(গ) ত্রিভুজটি সমাধান কর। 4

08. ABC যেকোনো একটি ত্রিভুজ।

(ক) $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ হলে, $\cos 2\theta$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকের ত্রিভুজে $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$ হলে দেখাও যে, $C = 45°$ অথবা $135°$। 4

(গ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর,

$\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2\,\sin A\cos B\sin C$। 4

০৭

Educationblog24.com

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

MCQ

01. a	02. b	03. b	04. c	05. b	06. a	07. c	08. a	09. c	10. b	11. a	12. a	13. b	14. c	15. a
16. a	17. c	18. b	19. c	20. c	21. d	22. d	23. b	24. a	25. b					

01. $a\times\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}}+b\times\frac{2\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=a\times\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+b\times\frac{2ab}{a^2+b^2}$

$=\frac{a^3-ab^2+2ab^2}{a^2+b^2}=\frac{a(a^2+b^2)}{a^2+b^2}=a$

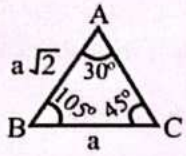
02. $\frac{1}{\tan(A+B+C)}=\frac{1-(\tan A\tan B+\tan A\tan C+\tan B\tan C)}{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}=0$

$\Rightarrow \tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1$

04. $\sin(A+B)=1$

$\Rightarrow A+B=90^\circ \Rightarrow B=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

05.



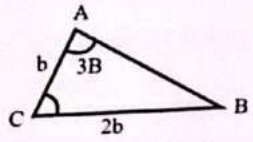
$\frac{a}{\sin30^\circ}=\frac{a\sqrt{2}}{\sin C}\Rightarrow \sin C=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$C=45^\circ$ হলে $\frac{b}{\sin B}=2a$

$C=135^\circ$ হলেও $\frac{b}{\sin B}=2a$

$\therefore C=45^\circ$ অথবা 135°

06.



$\frac{2b}{\sin3B}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow 2=3-4\sin^2B$

$\Rightarrow \sin B=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow \sin B=\frac{1}{2}$; [B-ত্রিভুজের 1 টি কোণ]

$\therefore B=30^\circ$ অথবা, 150°।

কিন্তু, 3B ত্রিভুজের 1টি কোণ।

$\therefore B=30^\circ$.

10. $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=\cos^2\frac{\pi}{2}+\sin^2B+\cos^2B$

$=0+1=1$ (Use Calculator)

11. $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{5^2+7^2-3^2}{2\times5\times7}\right)=21.78^\circ$

13. $\frac{1}{2}ab\sin\theta=18\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin\theta=\frac{36}{8\times9}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta=45^\circ$ or, $\theta=135^\circ$

17. $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}\right)=120^\circ$

19. $\cot A-\tan A=\frac{\cos A}{\sin A}-\frac{\sin A}{\cos A}=2\times\frac{\cos^2A-\sin^2A}{2\cos A.\sin A}=2\cot2A$

20. $\frac{a}{\sin A}=2R$

$\Rightarrow \frac{2}{\sin60^\circ}=2R\Rightarrow 2R=\frac{4}{\sqrt{3}}$

21. $2x+3x+7x=180^\circ\Rightarrow x=15^\circ$

$\therefore a:b=\sin30^\circ:\sin45^\circ=1:\sqrt{2}$

CQ

01. (ক) 0

(খ) -1

(গ) $\frac{3}{10}$ অথবা, .3

02. (ক) $\tan B+\tan C=\tan A$]

03. (ক) 4

05. (ক) $\tan A\tan B\tan C$

06. (ক) 0

07. (গ) $AB=\sqrt{6}, \angle A=105^\circ, \angle B=15^\circ$]

08. (ক) $\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

> বলার আগে জানো, জানার জন্য পড়ো।
>
> - Fran Lebowitz

Educationblog24.com

অধ্যায় ০৯ অন্তরীকরণ

সৃজনশীল (ক), (খ) ও (গ) নং প্রশ্নের জন্য এ অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	টাইপের নাম	যতবার প্রশ্ন এসেছে			যে বোর্ডে যে বছর এসেছে
			ক	খ	গ	CQ
০	T-01	লিমিটের অস্তিত্বশীলতা কেন্দ্রিক ; বিচ্ছিন্নতা ও অবিচ্ছিন্নতা	-	01	-	CB'21
০	T-02	বাস্তব মান বসিয়ে ($x = a + h$) সরাসরি লিমিটের মান নির্ণয়	01	01	-	DB'19; BB'17
০০	T-03	হরে/লবে বর্গমূল সংবলিত পদটির অনুবন্ধী দিয়ে লব ও হরকে গুণন করে লিমিট নির্ণয়	04	-	-	RB'23, 19, 17; JB'22, 19
০	T-04	$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ আকারের লিমিটের মান নির্ণয়	02	-	-	JB'23
০০০	T-05	ত্রিকোণমিতিক, বিপরীত বৃত্তীয় ও বীজগাণিতিক ফাংশন এর লিমিট নির্ণয়	12	02	-	SB'23, 21, 17; BB, MB'23; RB'22; CB'22, 21, 17; Ctg.B21, 19; JB'21, 17; Din.B'21
০০	T-06	সূচক, লগারিদম এবং ধারা সংক্রান্ত ফাংশনের লিমিট নির্ণয়	03	-	-	DB'22; SB'19; Din.B'22, 17
০০	T-07	x এর মান অসীমের দিকে ধাবিত হলে লিমিটের মান নির্ণয়	03	-	-	Ctg.B'23; Din.B'23, 18; DB, SB, JB'18
০	T-08	Exponential Form	02	-	-	BB'19; Ctg.B'17
০০০	T-09	মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয়	01	17	-	RB'23, 22, 21, 17; JB'23, 21, 18; CB'23; Din.B'23, 22, 18; MB'23, 22, 21; DB'22, 21, 19, 18; Ctg.B'21, 17; SB'21, 18; BB'21
০	T-10	ফাংশনকে সরলীকরণ করে অন্তরীকরণ	03	-	-	Ctg.B'23, 22; SB'22
০০	T-11	সংযোজিত ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় [CHAIN RULE]	04	-	01	DB, RB'23; SB'21; Ctg.B, Din.B'17
০০	T-12	দুইটি ফাংশনের সমন্বয়ের অন্তরীকরণ	02	02	-	DB, DB'22; RB'19, 17
০০০	T-13	বিপরীত অন্তরক সহগের সাহায্যে অন্তরীকরণ	10	01	-	CB'23, 22, 21; Din.B'23; BB'22; RB, Ctg.B, MB'21; SB'19
০০০	T-14	সূচক ফাংশন সমাধানে লগারিদম প্রয়োগ	06	04	-	Ctg.B'23, 21; MB'23, 22; BB, Din.B'21; JB'21, 19, 17
০	T-15	অব্যক্ত ফাংশন	-	01	-	JB'21

Educationblog24.com

✪✪✪	T-16	পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে প্রমাণ ও মান নির্ণয় সংক্রান্ত	02	08	17	DB'23, 22, 18, 17; Ctg.B'23, 22, 19, 17; SB'23, 22, 19, 18; CB'23, 22, 21, 17; Din.B'23, 21, 18; RB'22, 21, 19; BB'22, 19; MB'22, 21
✪✪✪	T-17	ঢাল, স্পর্শক ও অভিলম্ব নির্ণয়	06	13	03	RB'23, 22, 17; BB'23, 22, 21; JB'23, 22, 18, 17; Din.B'23, 22, 18; MB'23, 22, 21; Ctg.B'22; DB'21, 18; SB'21, 18; CB'21
✪✪	T-18	ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন	01	-	02	RB'23; DB, Din.B'21
✪✪✪	T-19	গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয়	02	04	16	DB'23; RB'23, 22, 21, 17; Ctg.B'23, 22, 19; SB'23, 22, 17; BB'23, 22, 21, 17; MB'23, 22, 21; JB'22, 21, 17; CB'22, 21
✪	T-20	সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের ব্যবহারিক প্রয়োগ	-	-	01	Din.B'21

CQ প্রশ্ন ও সমাধান (ক, খ ও গ)

Type-01: লিমিটের অস্তিত্বশীলতা কেন্দ্রিক; বিচ্ছিন্নতা অবিচ্ছিন্নতা সংক্রান্ত

Concept

❖ কোনো বিন্দুতে লিমিট অস্তিত্বশীল হবে যদি ঐ বিন্দুতে Left Hand Limit (L.H.L) = Right Hand Limit (R.H.L) হয়।

অর্থাৎ, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

সাধারণত লিমিটের অস্তিত্বশীলতা পরীক্ষা করতে হবে সেই সকল ক্ষেত্রে,

যেখানে (i) পরমমান

(ii) বর্গমূলের ভেতরে বর্গ রাশি

(iii) ঘাত আকারে চলক

(iv) Piecewise function থাকে।

❖ কোনো বিন্দু $(x = a)$ তে কোনো ফাংশন $y = f(x)$ অবিচ্ছিন্ন হবে যদি ঐ বিন্দুতে L. H. L = R. H. L = f(a) হয়।

অর্থাৎ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন} \quad x < 0 \\ x & \text{যখন} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$ [CB'21]

$g(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x + 1$

(খ) দেখাও যে, $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

(খ) Sol": $x < 0$ হলে $f(x) = x^2$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$

$0 \le x \le 1$ হলে $f(x) = x$ আবার, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ [অবিচ্ছিন্নতার শর্ত L. H. L = R. H. L = f(x)]

তাই, $x = 0$ বিন্দুতে ডানবর্তী ও বামবর্তী লিমিট সমান হওয়ায় $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন। (দেখানো হলো)

Educationblog24.com

Type-02: বাস্তব মান বসিয়ে ($x = a + h$) সরাসরি লিমিটের মান নির্ণয়

Concept

বীজগাণিতিক Function বা ত্রিকোণমিতিক Function থাকবে।

নিয়ম: উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে বা ত্রিকোণমিতিক সূত্র ব্যবহার করে সরলীকরণ করতে হবে

অথবা $x \to a$ এর ক্ষেত্রে $x = a + h$ ধরতে হবে [a = ধ্রুবক এবং $x \to a$ হলে, $h \to 0$]

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$. [DB'19]

(খ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2f(x)-g(2x)}{1+f(2x)}$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2f(x)-g(2x)}{1+f(2x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x-\sin 2x}{1+\cos 2x}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x-2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x(1-\sin x)}{2\cos^2 x}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin^2 x)}{\cos x(1+\sin x)}$ [$\because (1 + \sin x)$ দিয়ে লব ও হরে গুণ]

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{0}{1+1} = 0$ (Ans.)

02. (ক) $\lim\limits_{x\to 0} (\text{cosec}x - \cot x)$ এর মান নির্ণয় কর। [BB'17]

Sol^n: $\lim\limits_{x\to 0} (\text{cosec}\, x - \cot x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left\{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}\right\}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left\{\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\right\} = \lim\limits_{x\to 0} \left\{\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\right\}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left\{\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\right\} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$

$= \frac{0}{1+1} = 0$ (Ans.)

03. $y = \frac{\sec^2\theta-\tan^3\theta}{\tan\theta}$ এবং $z = \text{cosec}\, 2x$

[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]

(গ) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} y$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $y = \frac{\sec^3\theta-\tan^3\theta}{\tan\theta}$

$\therefore \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} y = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^3\theta-\tan^3\theta}{\tan\theta} = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^3\theta}-\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3\theta}{\cos^3\theta} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3\theta}{\sin\theta\cos^2\theta} = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{\sin\theta(1-\sin^2\theta)}$

$= \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{\sin\theta(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\sin\theta)}$

$= \frac{1+\sin\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1+1+1}{1(1+1)} = \frac{3}{2}$ (Ans.)

Type-03: হরে/লবে বর্গমূল সংবলিত পদটির অনুবন্ধী দিয়ে লব ও হরকে গুণন করে লিমিট নির্ণয়

Concept

(i) $\frac{0}{0}$ আকৃতির (ii) বীজগাণিতিক function (iii) লব বা হর বা উভয়টিতে বর্গমূল ($\sqrt{}$) থাকবে।

নিয়ম: অনুবন্ধী দিয়ে গুণ করে এমন বানাতে হবে যেন limit বসানো যায়।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) দেখাও যে, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x} = \frac{5}{2}$. [RB'23; JB'22]

(ক) Sol^n: L.H.S $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x} \times \frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+2x})^2-(\sqrt{1-3x})^2}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+2x-1+3x}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$= \frac{5}{2}$ = R.H.S (Showed)

Educationblog24.com

02. (ক) দেখাও যে, $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1+x}} = -2$ [RB'19]

(ক) Sol^n: L. H. S $= \lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1+x})}{(1-\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1+x})}{1-(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1+x})}{-x}$

$= -(1+1) = -2 =$ R. H. S [Showed]

03. (ক) মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$. [RB'17]

(ক) Sol^n: $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$

$= \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{3^2-\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2} = \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(9-(x^2+5))}$

$= \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-5-x^2}$

$= \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(4-x^2)} = \lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5})$

$= 3+\sqrt{9} = 3+3 = 6$ (Ans.)

নিজে করো

04. (ক) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+7x}-\sqrt{1-5x}}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। [JB'19] [Ans: 6]

Type-04: $\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ আকারের লিমিটের মান নির্ণয়

Concept

$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ আকারে থাকবে। সূত্র: $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$

MCQ Shortcut: $\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n} = \frac{m}{n}a^{m-n}$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ এর মান নির্ণয় কর। [JB'23]

(ক) Sol^n: $\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to a}\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3-\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3}{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}$

$= \lim_{\sqrt{x}\to\sqrt{a}}\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3-\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3}{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}} = 3\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{3-1} = 3a$ (Ans.)

02. (ক) $\lim_{x\to b}\frac{x^{\frac{9}{2}}-b^{\frac{9}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{b}}$ নির্ণয় কর। [DB'21]

(ক) Sol^n: $\lim_{x\to b}\frac{x^{\frac{9}{2}}-b^{\frac{9}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{b}} = \lim_{\sqrt{x}\to\sqrt{b}}\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^9-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^9}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)} = 9\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{9-1}$

$= 9b^4\left[\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}\right]$ (Ans.)

Type-05: ত্রিকোণমিতিক, বিপরীত বৃত্তীয় ও বীজগাণিতিক ফাংশন এর লিমিট নির্ণয়

Concept

(i) Inverse circular function থাকবে। সূত্র: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x} = 1, \lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x} = 1$

(ii) বীজগাণিতিক বা ত্রিকোণমিতিক ফাংশন থাকবে।

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$

Educationblog24.com

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

০৫. (ক) মান নির্ণয় কর: $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos ax}$ [SB'23]

(ক) Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{ax}{2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{ax}{2}}{\sin\frac{ax}{2}}\right)^2 \cdot \frac{4}{a^2}$

$= 1 \cdot \frac{2}{a^2} = \frac{2}{a^2}$ (Ans.)

০৬. (ক) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। [BB'23]

(ক) Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \times \frac{x^2}{4} \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \times 1^2 = \frac{1}{4}$ (Ans.)

০৭. $f(x) = \sin x$. [MB'23]

(ক) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-f(x)}{f'(x)}$ এর মান নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-f(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0$ (Ans.)

০৮. $h(x) = \cos x$ [CB'22]

(খ) প্রমাণ কর যে, $\lim_{x\to 0}\frac{h(0)-2h(x)+h(2x)}{x^2} = -1$

(খ) Sol^n: L.H.S $= \lim_{x\to 0}\frac{h(0)-2h(x)+h(2x)}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x-2\cos x}{x^2}$

$[\because \cos 2x = 2\cos^2 x - 1]$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x(\cos x-1)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} -4\cos x \times \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} \times \frac{1}{4} = -1 =$ R.H.S (Proved)

০৯. $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1-\cos 7x}{3x}$ [Ctg.B'21]

(খ) $\lim_{x\to 0}(uv)$ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $\lim_{x\to 0}(uv) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{7x}{2}}{3x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{3} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \frac{\left(\sin\frac{7x}{2}\right)^2}{\left(\frac{7x}{2}\right)^2} = \frac{2\times 49}{3\times 4} \times \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin\frac{7x}{2}\right)^2}{\left(\frac{7x}{2}\right)^2}$

$= \frac{49}{6}\left(\lim_{\frac{7x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}}\right)^2 \left[x \to 0 \text{ হলে } \frac{7x}{2} \to 0\right]$

$= \frac{49}{6} \times 1 \left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\right] = \frac{49}{6}$ (Ans.)

০৬. (ক) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 8x-1}{4x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। [SB'21]

(ক) Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 8x-1}{4x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos 8x)}{4x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 4x}{4x^2}$

$= -\lim_{x\to 0} 8\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2 = -8$ (Ans.)

০৭. (ক) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan ax}{\sin bx}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। [CB'21]

(ক) Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax} \cdot \frac{bx}{\sin bx} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ (Ans.)

০৮. (ক) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}$ এর মান নির্ণয় কর। [Dln.B'21]

(ক) Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{bx}{\tan bx} \cdot \frac{a}{b}$

$= \frac{a}{b} \times 1 \times 1 = \frac{a}{b}$ (Ans.)

০৯. (ক) মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 15x}{2x^2}$ [Ctg.B'19]

(ক) Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 15x}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{15x}{2}}{2x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{15x}{2}}{\left(\frac{15x}{2}\right)^2} \times \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 \times 1 = \frac{225}{4}$ (Ans.)

১০. (ক) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\theta^2}$ এর মান নির্ণয় কর। [SB'17]

(ক) Sol^n: $\lim_{\theta\to 0}\frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^2}$

$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{\theta^2\cos\theta}$

$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta\times 2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2\cos\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} \times \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} \times \frac{1}{4} \times 2\theta$

$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{2} \times \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} \times \left(\lim_{\frac{\theta}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2$

$= 0 \times 1 \times 1 = 0$ (Ans.)

১১. (ক) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]

(ক) Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{x}{2}}{x}$

$= \lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (Ans.)

১২. (ক) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 8x-1}{4x^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

[আইডিয়াল স্কুল অ্যান্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

(ক) Sol^n: প্রদত্ত রাশি, $= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 8x-1}{4x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{1-\cos 8x}{4x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2 4x}{4x^2}\right) = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{2x^2}$

$= -\left(\lim_{4x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2 \times 8 = -8 \times (1)^2 = -8$ (Ans.)

Educationblog24.com

নিজে করো

13. (ক) মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$. [RB'22] [Ans: $\frac{9}{2}$]

14. (ক) $\underset{x\to0}{Lt}\frac{1-\cos 7x}{15x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। [JB'21] [Ans: $\frac{49}{30}$]

15. (ক) $\lim_{y\to0}\frac{1-\cos y}{y}$ এর মান নির্ণয় কর। [JB'17] [Ans: 0]

16. (ক) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। [CB'17] [Ans: 0]

Type-06: সূচক, লগারিদম এবং ধারা সংক্রান্ত ফাংশনের লিমিট নির্ণয়

Concept

ধারায় প্রকাশ করে বা সূত্রের সাহায্যে e এর ঘাত হিসেবে প্রকাশ হবে।

$$a^x = 1 + x\ln a + \frac{x^2}{2!}(\ln a)^2 + \frac{x^3}{3!}(\ln a)^3 + \frac{x^4}{4!}(\ln a)^4 + \frac{x^5}{5!}(\ln a)^5 + \frac{x^6}{6!}(\ln a)^6 + \dots\dots\dots\infty$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\infty$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots\dots\infty$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots\dots\dots\infty$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \dots\dots\dots$$

Note: $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$; $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $f(x) = \sin x$ এবং $g(x) = e^x$

(ক) $\underset{x\to0}{Lt}\frac{g(\sin x)-1}{f(x)}$ এর মান নির্ণয় কর। [DB'22; SB'19]

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$; $g(x) = e^x$

এখন, $\underset{x\to0}{Lt}\frac{g(\sin x)-1}{f(x)} = \underset{x\to0}{Lt}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$

$= \underset{x\to0}{Lt}\frac{\left(1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2!}+\dots\dots\right)-1}{\sin x}$

$= \underset{x\to0}{Lt}\frac{\sin x\left(1+\frac{\sin x}{2!}+\frac{\sin^2 x}{3!}+\dots\dots\right)}{\sin x} = 1$ (Ans.)

02. (ক) $\lim_{x\to0}\frac{2e^{-\sin x}-2}{\sin x}$ এর মান নির্ণয় কর। [Din.B'22]

(ক) **Sol^n:** $\lim_{x\to0}\frac{2e^{-\sin x}-2}{\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{2(e^{-\sin x}-1)}{\sin x}$

$= -2\lim_{-\sin x\to0}\left(\frac{e^{-\sin x}-1}{-\sin x}\right)$

$= -2\times1 = -2$ (Ans.)

আমরা জানি, $\lim_{m\to0}\frac{e^m-1}{m} = 1$

$\therefore m = -\sin x$ হলে

$\lim_{-\sin x\to0}\frac{e^{-\sin x}-1}{-\sin x} = 1$

$[x\to0;\ -\sin x\to0]$

03. (ক) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{ax}$ এর মান নির্ণয় কর। [Din.B'17]

(ক) **Sol^n:** $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{ax} = \frac{2}{a}\lim_{2x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x} = \frac{2}{a}\times1 = \frac{2}{a}$ (Ans.)

04. $f(x) = \sin x$; $g(x) = e^{-2x}$; $h(x) = \ln(1+x)$

[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]

(গ) মান নির্ণয় কর: $\lim_{y\to0}\frac{1-g(y)}{h(y)}$ $[0 < y < 1]$

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $g(x) = e^{-2x}$ $\therefore g(y) = e^{-2y}$

$h(x) = \ln(1+x)$ $\therefore h(y) = \ln(1+y)$

$\therefore \lim_{y\to0}\frac{1-g(y)}{h(y)} = \lim_{y\to0}\frac{1-e^{-2y}}{\ln(1+y)}$

$= \lim_{y\to0}\frac{1-e^{-2y}}{-2y}\times\frac{y}{\ln(1+y)}\times(-2)$

$= (-2)\lim_{y\to0}\frac{-(e^{-2y}-1)}{-2y}\times\lim_{y\to0}\frac{y}{\ln(1+y)}$

$= 2\times\left(\lim_{-2y\to0}\frac{e^{-2y}-1}{-2y}\right)\times\left[\frac{1}{\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}}\right]$

$= 2\times1\times1 = 2$ (Ans.)

Type-07: x এর মান অসীমের দিকে ধাবিত হলে লিমিটের মান নির্ণয়

Concept

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (ii) বীজগাণিতিক ফাংশন (iii) $|x| < 1$ হলে, $[-1 < x < 1]$ এবং $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

নিয়ম: চলকের সর্বোচ্চ ঘাতবিশিষ্ট রাশি লব ও হরে common নিয়ে limit বসাতে হবে।

Shortcut:

Case-01: লব ও হরের চলকের মাত্রা (সর্বোচ্চ ঘাত) সমান

$x \to \infty$ বা, $x \to -\infty$ এর জন্য লব ও হরের x এর সর্বোচ্চ ঘাত একই হলে সীমাস্থ মান $= \frac{\text{লবের x এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ}}{\text{হরের x এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ}} = \frac{\text{লবের মুখ্য সহগ}}{\text{হরের মুখ্য সহগ}}$

যেমন, $\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\dots+b_n} = \frac{a_0}{b_0}$

Case-02: লবের চলকের মাত্রা < হরের চলকের মাত্রা

যদি লবের চলকের (x এর) মাত্রা < হরের চলকের (x এর) মাত্রা হয় তাহলে সীমাস্থ মান = 0; [$x \to \infty$ এবং $x \to -\infty$ দুই ক্ষেত্রেই]

Case-03: লবের চলকের মাত্রা > হরের চলকের মাত্রা

লবের চলকের মাত্রা > হরের চলকের মাত্রা হলে সীমাস্থ মান $+\infty$ বা $-\infty$ এর মধ্যে একটি।

এক্ষেত্রে, লবের চলকের মাত্রা হরের চলকের মাত্রা অপেক্ষা 1 বেশি এর জন্য, $x \to \infty$ হলে, $\frac{\text{লবের মুখ্য সহগ}}{\text{হরের মুখ্য সহগ}} > 0$ [+ve] হলে, সীমাস্থ মান $= +\infty$ এবং $\frac{\text{লবের মুখ্য সহগ}}{\text{হরের মুখ্য সহগ}} < 0$ [−ve] হলে সীমাস্থ মান $= -\infty$; [**Note:** $x \to -\infty$ হলে বিপরীত ঘটনা ঘটবে।]

Case-04: $\frac{a^{n+k}+b^{n+k}}{a^n+b^n}$ আকৃতির $[n \to \infty]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+k}+b^{n+k}}{a^n+b^n}; \text{ [ধরি } a < b] = \lim_{n\to\infty} \frac{b^{n+k}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+k}+1\right\}}{b^n\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right\}}$$ [$\because a < b$ তাই b^{n+k} এবং b^n common নেওয়া হয়েছে]

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b^k\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+k}+1\right\}}{\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right\}} = b^k \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\infty+k}+1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\infty}+1} = b^k \frac{0+1}{0+1} = b^k \cdot 1 = b^k$$

[**Note:** $a < b$ হলে $\frac{a}{b} < 1$ সেক্ষেত্রে, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n \to 0$]

যেমন: $a = 2$ এবং $b = 3$ হলে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 0.0173$ এবং $\left(\frac{a}{b}\right)^{100} = \left(\frac{2}{3}\right)^{100} = 2.45 \times 10^{-18} \therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\infty} \to 0$]

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x^2-1}{3x^4+x^3-2x}$ [Ctg.B'23]

(ক) **Sol^n:** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x^2-1}{3x^4+x^3-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}\right)}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}} = \frac{1+0-0}{3+0-0} = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

02. (ক) $\lim_{x\to\infty} 7^x \sin\frac{a}{7^x}$ এর মান নির্ণয় কর। [Din.B'23]

(ক) **Sol^n:** $\lim_{x\to\infty} 7^x \sin\frac{a}{7^x}$, এখন $x \to \infty$, $7^x \to \infty$ কিন্তু $\frac{a}{7^x} \to 0$

$\therefore \lim_{x\to\infty} 7^x \sin\frac{a}{7^x} = \lim_{\frac{a}{7^x}\to 0} \frac{\sin\frac{a}{7^x}}{\frac{1}{7^x}} = \lim_{\frac{a}{7^x}\to 0} \frac{\sin\frac{a}{7^x}}{\frac{a}{7^x}\times\frac{1}{a}}$

$= a \lim_{\frac{a}{7^x}\to 0} \frac{\sin\frac{a}{7^x}}{\frac{a}{7^x}} = a \times 1 = a$

$\therefore \lim_{x\to\infty} 7^x \sin\frac{a}{7^x} = a$ **(Ans.)**

03. (ক) $\lim_{x\to\infty} 3^x \tan\frac{m}{3^x}$ এর মান নির্ণয় কর।

[ঢাকা ইমপিরিয়াল কলেজ, ঢাকা]

(ক) **Sol^n:** প্রদত্ত রাশি, $\lim_{x\to\infty} 3^x \tan\frac{m}{3^x}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\tan\frac{m}{3^x}}{\frac{1}{3^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\tan\frac{m}{3^x}}{\frac{m}{3^x}} \times m$

$= m \times \lim_{\frac{m}{3^x}\to 0} \frac{\tan\frac{m}{3^x}}{\frac{m}{3^x}}$

$= m \times 1 = m$ **(Ans.)**

এখানে,

$x \to \infty$ হলে, $3^x \to \infty$

$\therefore \frac{1}{3^x} \to 0 \therefore \frac{m}{3^x} \to 0$

Educationblog24.com

নিজে করো

04. (ক) $\lim_{x\to\infty} 5^x \sin\left(\frac{m}{5^x}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। [DB, SB, JB, Din.B'18] [Ans: m]

Type-08: Exponential Form

Concept

এই টাইপের সমস্যাগুলো সমাধানের জন্য নিম্নলিখিত সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে।

(i) $\lim_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (ii) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

MCQ Shorcut: (iii) $\lim_{x\to0} (1+ax)^{\frac{b}{x}+c} = e^{ab}$ (iv) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+c} = e^{ab}$ $\left[= e^{x \text{ এর সহগ} \times \frac{1}{x} \text{ এর সহগ}}\right]$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $\lim_{x\to0} (1+4x)^{\frac{3}{x}}$ এর মান নির্ণয় কর। [BB'19]

(ক) **Sol^n:** $\lim_{x\to0} (1+4x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x\to0} (1+4x)^{\frac{3\times4}{4x}} = \left\{\lim_{x\to0} (1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right\}^{12} = e^{12}$ $\left[\because \lim_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e\right]$

$\therefore \lim_{x\to0} (1+4x)^{\frac{3}{x}} = e^{12}$ **(Ans.)**

নিজে করো

02. (ক) $\lim_{x\to0} (1+3x)^{\frac{5}{x}}$ নির্ণয় কর। [Ctg.B'17] [Ans: e^{15}]

Type-09: মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয়

Concept

যদি $y = f(x)$ একটি ফাংশন হয়, তাহলে $y = f(x)$ ফাংশনের উপরস্থ যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ তে অঙ্কিত ফাংশনটির স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(f(x))$ যেখানে, $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

এই সূত্রটিকে বলা হয় অন্তরীকরণের মূল নিয়ম অথবা আদিসূত্র (First Principle)

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $f(x) = (ax)^n$ [RB'23]

(খ) লিমিট এর সাহায্যে $f(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $f(x) = (ax)^n$

$\therefore f(x+h) = \{a(x+h)\}^n$

$\therefore$ অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to0} \frac{a^n(x+h)^n - a^n.x^n}{h} = \lim_{h\to0} \frac{a^n\{(x+h)^n - x^n\}}{h}$$

$$= a^n \lim_{h\to0} \frac{(x^n + {}^nC_1 x^{n-1}h + {}^nC_2 x^{n-2}h^2 + \ldots\ldots) - x^n}{h}$$

$$= a^n \lim_{h\to0} \frac{{}^nC_1 x^{n-1}h + {}^nC_2 x^{n-2}h^2 + \ldots\ldots}{h}$$

$$= a^n.nx^{n-1} = na^n x^{n-1}$$ **(Ans.)**

02. $f(x) = a^{5x}$ [JB'23]

(খ) লিমিটের সাহায্যে $f(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** $f(x) = a^{5x}$ $\therefore f(x+h) = a^{5x+5h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{a^{5x+5h}-a^{5x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{a^{5x}(a^{5h}-1)}{h}$$

$$= a^{5x} \lim_{h\to0} \frac{a^{5h}-1}{h} = a^{5x} \lim_{h\to0} \frac{(a^5)^h-1}{h}$$

$$= a^{5x}\ln(a^5) \left[\lim_{x\to0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)\right]$$

$$= 5a^{5x}\ln(a)$$ **(Ans.)**

Educationblog24.com

দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \sin x$. [Din.B'23, 22]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে মূল নিয়মে $\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{f(2x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$;

তাহলে $\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{f(2x)} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot 2x$ এর মূল নিয়মে অন্তরজ নির্ণয় করতে হবে।

ধরি, $h(x) = \cot 2x$, তাহলে, $h'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-h(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\cot 2(x+h)-\cot 2x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cos 2(x+h)}{\sin 2(x+h)}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2x\cos 2(x+h)-\cos 2x\sin 2(x+h)}{h\sin 2x\sin 2(x+h)}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2[x-(x+h)]}{h\sin 2x\sin 2(x+h)}$ [$\because \sin A\cos B - \cos A\sin B = \sin(A-B)$]

$= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin 2h}{h\sin 2x\sin 2(x+h)}$

$= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}\times 2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin 2x\cdot\sin 2(x+h)}$

$= -2\cdot\frac{1}{\sin 2x\sin 2x}$

$\therefore h'(x) = -2\text{cosec}^2 2x$

সুতরাং মূল নিয়মে $\cot 2x$ এর অন্তরজ হলো $-2\text{cosec}^2 2x$. (Ans.)

$f(x) = \ln(x)$। [CB'23]

(খ) উদ্দীপকের আলোকে মূল নিয়মে $f(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = \ln x$

মূল নিয়মে $f(x)$ এর অন্তরজ, $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\cdots\cdots\right)$

$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{h}{2x^2}+\frac{h^2}{3x^3}-\cdots\cdots\right) = \frac{1}{x}$ (Ans.)

$f(x) = e^x$. [DB'22; Ctg.B'21]

(খ) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $f(mx)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: ধরি, $g(x) = f(mx) = e^{mx}$

$g(x+h) = e^{m(x+h)} = e^{mx+mh}$

মূল নিয়মের সূত্রানুসারে, $\frac{d}{dx}\{g(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{f(mx)\} = \frac{d}{dx}(e^{mx}) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{mx+mh}-e^{mx}}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{mx}\cdot e^{mh}-e^{mx}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{mx}(e^{mh}-1)}{h} = e^{mx}\lim_{h\to 0}\frac{e^{mh}-1}{h}$

$= e^{mx}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{mh}{1!}+\frac{m^2h^2}{2!}+\frac{m^3h^3}{3!}+\cdots\cdots\right)-1}{h}$

$= e^{mx}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{m}{1!}+\frac{m^2h}{2!}+\frac{m^3h^2}{3!}+\right.$

$\cdots\cdots$ h এর উচ্চতর ঘাতসমূহ]

$= e^{mx}\left[\frac{m}{1!}+0\right]$ $\therefore \frac{d}{dx}\{f(mx)\} = me^{mx}$ (Ans.)

06. $h(x) = \cos 3x$ [RB'22]

(খ) মূল নিয়মে $h(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $h(x) = \cos 3x$

$\therefore h(x+h) = \cos[3(x+h)]$

মূল নিয়মের সংজ্ঞানুসারে, $\frac{d}{dx}[h(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-h(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}[\cos 3x] = \lim_{h\to 0}\frac{\cos[3(x+h)]-\cos 3x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{6x+3h}{2}\sin\frac{-3h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(-2)}{h}\sin\left(3x+\frac{3h}{2}\right)\sin\left(\frac{3h}{2}\right)$

$= (-2)\times\lim_{h\to 0}\sin\left(3x+\frac{3h}{2}\right)\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)}{\frac{3h}{2}}\times\frac{3}{2}$

$= (-2)\times\sin(3x)\times 1\times\frac{3}{2} = -3\sin(3x)$ (Ans.)

07. দৃশ্যকল্প: $f(u) = \tan 3u$ [DB'21]

(খ) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(3x+3h)-\tan 3x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(3x+3h)\cos 3x-\cos(3x+3h)\sin 3x}{\cos(3x+3h)\cos 3x}}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(3x+3h-3x)}{h}\times\frac{1}{\cos(3x+3h)\cos 3x}$

$= \lim_{3h\to 0}3\times\frac{\sin 3h}{3h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(3x+3h)\cos 3x}$

[$h\to 0$ হলে $3h\to 0$]

$= 3\times\frac{1}{\cos^2 3x}\left[\lim_{k\to 0}\frac{\sin k}{k} = 1\right] = 3\sec^2 3x$ (Ans.)

08. $f(x) = \log_5 x$ [JB'21]

(খ) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $f(x)$ এর ১ম অন্তরজ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $f(x) = \log_5 x = \frac{\ln x}{\ln 5}$

$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\ln(x+h)}{\ln 5}-\frac{\ln x}{\ln 5}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\ln 5}\times\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$

$= \frac{1}{\ln 5}\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{\ln 5}\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$

$= \frac{1}{\ln 5}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\cdots\cdots\infty}{h}$

$= \frac{1}{\ln 5}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{x}-h\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{h}{3x^3}+\frac{h^2}{4x^4}-\cdots\infty\right)\right\}$

$= \frac{1}{\ln 5}\times\left(\frac{1}{x}-0\right) = \frac{1}{x\ln 5}$ (Ans.)

09. $f(x) = \frac{1}{\sin x}, g(x) = \frac{1}{\tan x}$ [RB'17]

(খ) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x\times\sin x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$,

ধরি, $F(x) = \sec x$ $\therefore F(x+h) = \sec(x+h)$

এখন, মূল নিয়মের সংজ্ঞানুসারে,

$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{\cos(x+h)}-\frac{1}{\cos x}\right\} = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\frac{\cos x-\cos(x+h)}{\cos x\cos(x+h)}\right\}$

Educationblog24.com

$$= \lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{h}\frac{2\sin\frac{x+x+h}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{\cos x\cos(x+h)}\right\} = \lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{h}\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\cos x\cos(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to0}\left\{\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x\cos(x+h)}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}$$

$$= \lim_{h\to0}\left\{\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x\cos(x+h)}\right\}\times\lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{\sin x}{\cos x.\cos x}\times1$$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$ **(Ans.)**

10. $z = \text{cosec } 2x$ [মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]

(খ) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে z এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** ধরি, $f(x) = z = \text{cosec}2x$

$\therefore \frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

[মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞানুসারে]

$$\lim_{h\to0}\frac{\text{cosec }2(x+h)-\text{cosec}2x}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{\sin(2x+2h)}-\frac{1}{\sin2x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\sin2x-\sin(2x+2h)}{h\sin(2x+2h).\sin2x}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+2x+2h}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-2x-2h}{2}\right)}{h.\sin(2x+2h)\sin2x}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{2\cos(2x+h)\sin(-h)}{h.\sin(2x+2h)\sin2x}$$

$$= \lim_{h\to0}\left(-\frac{2\cos(2x+h)}{\sin(2x+h).\sin2x}\right).\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}$$

$$= -\frac{2\cos2x}{\sin2x.\sin2x}\times1 = -2\cot2x\,\text{cosec }2x$$ **(Ans.)**

11. (ক) মূল নিয়মে অন্তর্ভুক্ত চলকের প্রেক্ষিতে e^{-3t} এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [নটর ডেম কলেজ, ঢাকা]

(ক) **Sol^n:** ধরি, $f(t) = e^{-3t} \therefore f(t+h) = e^{-3(t+h)} = e^{-3t-3h}$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞানুসারে,

$$\frac{d}{dt}\{f(t)\} = \lim_{h\to0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(e^{-3t}) = \lim_{h\to0}\frac{e^{-3t-3h}-e^{-3t}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{e^{-3t}(e^{-3h}-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{e^{-3t}}{h}\left\{1-\frac{3h}{1!}+\frac{(-3h)^2}{2!}+\right.$$

$\left.h$ এর উর্ধ্বঘাতবিশিষ্ট পদসমূহ $-1\right\}$

$= \lim_{h\to0}e^{-3t}\left(-3+\frac{9h}{2}+h\text{ এর উর্ধ্বঘাতবিশিষ্ট পদসমূহ}\right)$

$= -3e^{-3t}$ **(Ans.)**

12. $f(x) = \sin x$ [ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ]

(ক) x এর সাপেক্ষে মূল নিয়মে $f(ax)$ অন্তরীকরণ কর।

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x \therefore f(ax) = \sin ax$

$\therefore f\{a(x+h)\} = \sin\{a(x+h)\}$

মূল নিয়মে অন্তরীকরণের সংজ্ঞানুসারে,

$$\frac{d}{dx}f(ax) = \lim_{h\to0}\frac{f\{a(x+h)-f(ax)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\sin\{a(x+h)\}-\sin ax}{h} = \lim_{h\to0}\frac{2\cos\left(ax+\frac{ah}{2}\right)\sin\frac{ah}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\cos\left(ax+\frac{ah}{2}\right).\lim_{\frac{ah}{2}\to0}\frac{\sin\frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}} = a\cos ax\times1$$

$\left[\because \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1\right]$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin ax) = a\cos ax$ **(Ans.)**

13. $f(z) = \tan z$ [আইডিয়াল স্কুল অ্যান্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

(খ) মূল নিয়মে $f'(2x)$ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** $f(z) = \tan z \therefore f(2x) = \tan 2x$

ধরি, $f'(2x) = \lim_{h\to0}\frac{f[2(x+h)]-f(2x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\frac{\sin(2x+2h)}{\cos(2x+2h)}-\frac{\sin2x}{\cos2x}}{h}$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\sin(2x+2h)\cos2x-\sin2x\cos(2x+2h)}{h\cos(2x+2h)\cos2x}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\sin2h}{h\cos(2x+2h)\cos2x}$$

$$= 2\left(\lim_{h\to0}\frac{\sin2h}{2h}\right)\cdot\left(\lim_{h\to0}\frac{1}{\cos(2x+2h)\cos2x}\right)$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\cos2x\cdot\cos2x} = 2\sec^2 2x$$ **(Ans.)**

নিজে করো

14. $f(x) = \sin x$. [MB'23]

(খ) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\frac{1}{f(3x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

[Ans: $-3\,\text{cosec}(3x).\cot(3x)$]

15. $z = \sin x$ [MB'22]

(খ) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\frac{1}{z}$ এর অন্তরজ নিডর্ণয় কর।

[Ans: $-\text{cosec}x\cdot\cot x$]

16. $f(x) = \tan x$ [RB'21] **[Ans: $3\sec^2 3x$]**

(খ) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $f(3x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

17. $f(x) = \ln px$ [SB'21] **[Ans: $\frac{1}{x}$]**

(খ) $p = 3$ হলে মূল নিয়মে $f(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

18. $f(x) = \sin x$ [BB'21]

(খ) মূল নিয়মে $\frac{f(2x)}{f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

[Ans: $2\sec^2 2x$]

19. দৃশ্যকল্প: $f(x) = \sin x$. [MB'21]

(খ) মূল নিয়মে $f\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

[Ans: $-7\sin 7x$]

20. $f(x) = \cos x$ [DB'19]

(ক) $f(ax)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[Ans: $-a\sin ax$]**

21. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \tan px$. [DB, SB, JB, Din.B'18]

(খ) $p = 4$ হলে মূল নিয়মে $f'(x)$ নির্ণয় কর।

[Ans: $4\sec^2 4x$]

22. দৃশ্যকল্প: $f(p) = e^{-2p}$. [Ctg.B'17]

(খ) দৃশ্যকল্পের আলোকে p এর সাপেক্ষে মূল নিয়মে $f(p)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

Educationblog24.com

Type-10: ফাংশনকে সরলীকরণ করে অন্তরীকরণ

Concept

অনেক ক্ষেত্রে দেখা যায় যে একটি ফাংশনকে সরাসরি অন্তরীকরণ করতে গেলে অনেক জটিল হয়ে যাচ্ছে ফাংশনের আকৃতির কারণে। সেক্ষেত্রে ফাংশনটিকে আগে বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক বা বীজগাণিতিক সূত্র ব্যবহার করে সরলীকরণ করে নিতে হবে। তারপর তাকে অন্তরীকরণ করতে হবে। অন্তরীকরণের ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে:

(i) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

(ii) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(iii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

(iv) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

(v) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

(vi) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x.\tan x$

(vii) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x.\cot x$

(viii) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(ix) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

(x) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

(xi) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$

(xii) $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}\right)$ নির্ণয় কর। [Ctg.B'23]

(ক) Sol^n: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x-2\cos^2 x+1}{1-\cos x}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{-2\cos^2 x+2\cos x-\cos x+1}{1-\cos x}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left\{\frac{2\cos x(-\cos x+1)+1(1-\cos x)}{1-\cos x}\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left\{\frac{(1-\cos x)(2\cos x+1)}{(1-\cos x)}\right\}$

$= \frac{d}{dx}(2\cos x+1) = -2\sin x$ (Ans.)

02. (ক) t এর সাপেক্ষে $\frac{1+\sin t}{\sin t}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [Ctg.B'22]

(ক) Sol^n: $\frac{1+\sin t}{\sin t} = \operatorname{cosec} t + 1 \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1+\sin t}{\sin t}\right)$

$= \frac{d}{dt}(\operatorname{cosec} t + 1) = -\operatorname{cosec}(t)\cot(t)$ (Ans.)

03. (ক) $f(x) = \ln x$ হলে $f'(x)$ এর মান নির্ণয় কর। [SB'22]

(ক) Sol^n: $f(x) = \ln x \therefore f'(x) = \frac{1}{x}$ (Ans.)

Type-11: সংযোজিত ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় [CHAIN RULE]

Concept

সূত্র: $y = f(z), z = g(x)$ হলে $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$ [বি.দ্র:- সূত্রটিকে অধিক ফাংশনের জন্য সম্প্রসারিত করা যায়।]

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) x এর সাপেক্ষে $\log_x a$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [DB'23]

(ক) Sol^n: $\log_x a = \log_e a \times \log_x e = (\ln a) \times \frac{1}{\log_e x} = \frac{\ln a}{\ln x}$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(\log_x a) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln a}{\ln x}\right)$

$= \ln a \times \{-(\ln x)^{-2}\} \times \frac{1}{x} = \frac{-\ln a}{x(\ln x)^2}$ (Ans.)

02. (ক) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [RB'23]

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}} = \frac{dy}{dx}$

$= \frac{1}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}} \times \cos\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$ (Ans.)

03. $g(x) = \ln \sqrt[3]{x}$ [SB'21]

(গ) অন্তর্ভুক্ত চলরাশির সাপেক্ষে $g\left(\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: $g\left(\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right) = g\left(\frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\right) = g\left(\tan^2\frac{\varphi}{2}\right)$

$= \ln\sqrt[3]{\tan^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{3}\ln\left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)$

φ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dg(x)}{d\varphi} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sec^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sec^2\frac{\varphi}{2}}{\tan\frac{\varphi}{2}}$

$= \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{3\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{3\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{2}{3\sin\varphi} = \frac{2}{3}\operatorname{cosec}\varphi$

Educationblog24.com

04. (ক) $\sin e^{\sqrt{1-x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [Din.B'17]

(ক) Sol^n: $\frac{D}{dx}\left(\sin e^{\sqrt{1-x}}\right) = \cos e^{\sqrt{1-x}} \times e^{\sqrt{1-x}} \times \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$

$= \frac{e^{\sqrt{1-x}}\cos e^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$ (Ans.)

05. (ক) x এর সাপেক্ষে $\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [Ctg.B'17]

(ক) Sol^n: $\frac{d}{dx}\left\{\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right\}$

$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left\{1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}(2x+0)\right\}$

$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (Ans.)

06. (ক) $\frac{1}{2}y = \sqrt{x^3-5}$ এবং $\frac{dy}{dx} = \frac{kx^2}{\sqrt{x^3-5}}$ হলে k মান নির্ণয় কর। [হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, $\frac{1}{2}y = \sqrt{x^3-5} \therefore y = 2\sqrt{x^3-5}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^3-5}\right) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x^3-5}} \times \frac{d}{dx}(x^3-5)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^3-5}} \times 3x^2 = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-5}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{kx^2}{\sqrt{x^3-5}}$ এর সাথে তুলনা করে পাই, k = 3. (Ans.)

Type-12: দুইটি ফাংশনের সমন্বয়ের অন্তরীকরণ

Concept

এক্ষেত্রে নিম্নলিখিত সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে। u = u(x) এবং v = v(x) এর জন্য,

(i) $\frac{d}{dx}\{u \pm v\} = \frac{d}{dx}(u) \pm \frac{d}{dx}(v)$ (ii) $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ (iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

এছাড়া প্রয়োজনে Chain Rule এর সূত্র কাজে লাগাতে হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $f(x) = e^x$. [DB'22]

(ক) $f'(x)\log 2x\, f(2x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = e^x \therefore f'(x) = e^x$ এখন,

$\frac{d}{dx}\{f'(x)\log(2x)f(2x)\} = \frac{d}{dx}\{e^x \cdot \log(2x) \cdot e^{2x}\}$

$= \frac{d}{dx}\{e^{3x} \cdot \log(2x)\} = e^{3x} \cdot \frac{d}{dx}(\log 2x) +$

$\log(2x)\frac{d}{dx}(e^{3x}) = e^{3x} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 + \log(2x) \cdot 3e^{3x}$

$\frac{d}{dx}\{f'(x)\log(2x)f(2x)\} = e^{3x}\left[3\log(2x) + \frac{1}{x}\right]$ (Ans.)

[নোট: এখানে log বলতে natural logarithm কে বুঝানো হয়েছে]

02. দৃশ্যকল্প-১: $\varphi(x) = \frac{x\cos x}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$. [BB'22]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\varphi(x)$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর।

(খ) Sol^n: দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $\varphi(x) = \frac{x\cos x}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{x\cos x}{1-\sin x}$,

এখন, $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x\cos x}{1-\sin x}\right)$

$= \frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}(x\cos x) - x\cos x\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$

$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{(1-\sin x)(-x\sin x+\cos x) - x\cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

$= \frac{(1-\sin x)(\cos x - x\sin x) + x\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$

$= \frac{(1-\sin x)(\cos x - x\sin x) + x(1-\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)^2}$

$= \frac{(\cos x - x\sin x) + (x + x\sin x)}{1-\sin x} = \frac{\cos x + x}{1-\sin x}$ (Ans.)

03. $y = 2^x \ln\frac{1}{1-x}$ [RB'19]

(খ) x এর সাপেক্ষে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $y = 2^x \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^x \frac{d}{dx}\left\{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right\} + \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{d}{dx}(2^x)$

$= 2^x \times \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-1} \times \frac{-1}{(1-x)^2} + \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)2^x \ln 2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2^x\left[\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\ln 2 - \frac{1}{1-x}\right]$ (Ans.)

04. (ক) x-এর সাপেক্ষে $x^3\sin(\ln x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [RB'17]

(ক) Sol^n: ধরি, $y = x^3\sin(\ln x)$ ..... (i)

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{x^3\sin(\ln x)\}$

$= x^3\frac{d}{dx}\{\sin(\ln x)\} + \sin(\ln x)\frac{d}{dx}(x^3)$

$= x^3\cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} + \sin(\ln x) \cdot 3x^2$

$= x^2\cos(\ln x) + 3x^2\sin(\ln x)$ (Ans.)

05. (ক) x এর সাপেক্ষে $e^{x^2} + (\sin^3 x)^2$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]

(ক) Sol^n: ধরি, $y = e^{x^2} + (\sin^3 x)^2 = e^{x^2} + \sin^6 x$

তাহলে, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right) + \frac{d}{dx}(\sin^6 x)$

$= e^{x^2}\frac{d}{dx}(x^2) + 6\sin^5 x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$

$= 2xe^{x^2} + 6\sin^5 x\cos x$ (Ans.)

Type-13: বিপরীত অন্তরক সহগের সাহায্যে অন্তরীকরণ

Concept

যেসব ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ বের করার চেয়ে $\frac{dx}{dy}$ বের করা সুবিধাজনক সেসব ক্ষেত্রে $\frac{dx}{dy}$ বের করে নিম্নোক্ত সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

সূত্র: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$; [যখন কোনটিই শূন্য নয় অর্থাৎ, $\frac{dy}{dx} \neq 0$ এবং $\frac{dx}{dy} \neq 0$]

ধরি, $y = \sin^{-1} x$

$\therefore x = \sin y$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) x এর সাপেক্ষে $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [Din.B'23]

(ক) Sol^n: ধরি, $f(x) = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow f(x) = 2\tan^{-1} x$

$\Rightarrow f'(x) = 2\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{2}{1+x^2}$ (Ans.)

02. (ক) x এর সাপেক্ষে $(\cos^{-1}\sqrt{x})$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [CB'23]

(ক) Sol^n: $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}\sqrt{x}) = \frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{-1}{\sqrt{1-x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{-1}{2\sqrt{x(1-x)}}$ (Ans.)

03. (ক) $7^{\cos^{-1} x}$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর। [BB'22]

(ক) Sol^n: $\frac{d}{dx}(7^{\cos^{-1} x})$

$= 7^{\cos^{-1} x} \times \ln(7) \times \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x)$

$= \frac{-\ln(7) \times 7^{\cos^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

04. $p(x) = (x^2+1)\tan^{-1} x - x$ [CB'22]

(ক) x-এর সাপেক্ষে $p(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: $\frac{d}{dx}[p(x)] = \frac{d}{dx}[(x^2+1)\tan^{-1} x - x]$

$= (x^2+1) \times \frac{1}{1+x^2} + 2x\tan^{-1} x - 1$

$= 2x\tan^{-1} x$ (Ans.)

05. $g(x) = x$ [CB'22]

(খ) প্রমাণ কর যে $\cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-g(x)}{1+g(x)}}\right\} = \frac{1}{2}(x-1)$.

(খ) Sol^n: [প্রশ্নটি ত্রুটিপূর্ণ। প্রকৃতপক্ষে $\frac{d}{dx}\left[\cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-g(x)}{1+g(x)}}\right\}\right] = \frac{1}{2}(x-1)$ প্রমাণ করতে বলা হয়েছে।]

এখানে, $\cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-g(x)}{1+g(x)}}\right\} = \cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$

$= \cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right\}$

$= \cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\tan^2\frac{\theta}{2}}\right\}$

$= \cos^4\left\{\cot^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\right\}$

$= \cos^4\left\{\cot^{-1}\left[\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right]\right\} = \cos^4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$

$= \sin^4\frac{\theta}{2} = \left(\frac{1}{2} \times 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2$

$= \left[\frac{1}{2} \times (1 - \cos\theta)\right]^2 = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2$

ধরি, $x = \cos\theta$

$\therefore \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$= \tan^2\frac{\theta}{2}$

এখন, $\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1-x}{2}\right)^2\right] = 2 \times \frac{1-x}{2\times 2} \times (-1) = \frac{1}{2}(x-1)$

(Proved)

06. (ক) $y = \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\right\}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [RB'21]

(ক) Sol^n: ধরি, $x = \cos 2\theta \therefore y = \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$

$= \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}\right\} = \sin\{2\tan^{-1}\sqrt{\tan^2\theta}\}$

$= \sin 2\theta = \sqrt{1-x^2} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2})$

$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \times (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

Educationblog24.com

07. (ক) $y = \text{cosec}^{-1}\frac{1+x^2}{2x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [RB'21]

(ক) Sol^n: ধরি, $x = \tan\theta$

দেওয়া আছে, $y = \text{cosec}^{-1}\frac{1+x^2}{2x}$

$= \text{cosec}^{-1}\frac{1+\tan^2\theta}{2\tan\theta} = \text{cosec}^{-1}(\text{cosec}2\theta) = 2\theta$

$= 2\tan^{-1}x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$ (Ans.)

বিকল্প: $y = \text{cosec}^{-1}\frac{1+x^2}{2x} = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x}$ (Ans.)

08. (ক) x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}(\sin e^x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [Ctg.B'21]

(ক) Sol^n: $\frac{d}{dx}[\tan^{-1}(\sin e^x)] = \frac{1}{1+(\sin e^x)^2}\times\frac{d}{dx}(\sin e^x)$

$= \frac{e^x\cos e^x}{1+(\sin e^x)^2}$ (Ans.)

09. (ক) x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [CB'21]

(ক) Sol^n: $y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(x)$

$= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}(x)$; $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ (Ans.)

10. (ক) x- এর সাপেক্ষে $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{10x}{1+25x^2}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [MB'21]

(ক) Sol^n: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{10x}{1+25x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2\cdot5x}{1+(5x)^2}\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\times 2\tan^{-1}5x\right) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}5x)$

$= \frac{5}{1+25x^2}$ (Ans.)

11. $f(x) = \cos^{-1}2x$. [SB'19]

(ক) $e^{\sin(f(x))}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: $e^{\sin(f(x))} = e^{\sin\cos^{-1}2x} = e^{\sqrt{1-4x^2}}$

$\left[\because \cos^{-1}2x = \sin^{-1}\sqrt{1-(2x)^2}\right]$

$\therefore \frac{d}{dx}\left\{e^{\sin(f(x))}\right\} = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{1-4x^2}}\right)$

$= e^{\sqrt{1-4x^2}}\times\frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}}\times -8x = \frac{-4x\,e^{\sqrt{1-4x^2}}}{\sqrt{1-4x^2}}$ (Ans.)

12. $g(x) = 1+x^2, h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ [ঢাকা কলেজ]

(ক) x এর সাপেক্ষে $\sin^{-1}\left\{\frac{2-g(x)}{g(x)}\right\}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, $g(x) = 1+x^2$

ধরি, $y = \sin^{-1}\left\{\frac{2-g(x)}{g(x)}\right\} = \sin^{-1}\left\{\frac{2-(1+x^2)}{1+x^2}\right\}$

$= \sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$= \sin^{-1}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ [ধরি, $x = \tan\theta, \therefore \theta = \tan^{-1}x$]

$= \sin^{-1}\cos 2\theta = \sin^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$

$= \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$ (Ans.)

Type-14: সূচক ফাংশন সমাধানে লগারিদম প্রয়োগ

Concept

ধরি, $y = u^v \Rightarrow \ln y = \ln(u^v) = v(\ln u) \Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}[v(\ln u)]$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[v(\ln u)] \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = u^v\frac{d}{dx}[v(\ln u)]}$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$ [Ctg.B'23]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\{f(x)\}^{g(x)} + \{g(x)\}^{f(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$

$\therefore \{f(x)\}^{g(x)} + \{g(x)\}^{f(x)} = x^{\sin x} + (\sin x)^x$

ধরি, $u = x^{\sin x} \Rightarrow \ln u = \sin x\cdot\ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} = \cos x\cdot\ln x + \frac{1}{x}\sin x$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$

আবার, $v = (\sin x)^x$ [ধরি]

$\Rightarrow \ln v = x\ln(\sin x) \Rightarrow \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \ln(\sin x) + \frac{\cos x}{\sin x}\cdot x$

$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = v[\ln(\sin x) + x\cot x]$

$= (\sin x)^x[\ln(\sin x) + x\cot x]$

$\therefore \frac{d}{dx}\{x^{\sin x} + (\sin x)^x\} = \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

$= x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right) + (\sin x)^x$

$[\ln(\sin x) + x\cot x]$ (Ans.)

Educationblog24.com

02. (ক) $\frac{d}{dx}\{(x^x)^x\}$ নির্ণয় কর। [MB'23]

(ক) Sol^n: ধরি, $u = (x^x)^x = x^{x^2} \Rightarrow \ln u = \ln(x^{x^2})$

$\Rightarrow \ln u = x^2 \ln(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{u}.\frac{du}{dx} = x^2.\frac{1}{x} + 2x\ln(x)$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u(x + 2x\ln x) = ux(1 + 2\ln x)$

$\therefore \frac{d}{dx}\{(x^x)^x\} = x^{x^2+1}(1 + 2\ln x)$ (Ans.)

03. (ক) $y = x^{e^{3x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [Ctg.B'22]

(ক) Sol^n: $y = x^{e^{3x}} \Rightarrow \ln y = e^{3x}\ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 3e^{3x}\ln x + e^{3x}\frac{1}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{e^{3x}}\left(3e^{3x}\ln x + \frac{e^{3x}}{x}\right)$ (Ans.)

04. $z = \sin x$ [MB'22]

(ক) $\frac{d}{dz}(z^x)$ নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, $z = \sin x \Rightarrow x = \sin^{-1} z \therefore \frac{d}{dz}(z^x)$

$= \frac{d}{dz}\{z^{(\sin^{-1}z)}\} = z^{\sin^{-1}z}\left(\frac{\sin^{-1}z}{z} + \ln z \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right)$ (Ans.)

05. (ক) $\frac{dt}{dx}$ নির্ণয় কর। [Ctg.B'21]

(ক) Sol^n: ধরি, $y = x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^x(1 + \ln x) \cdots\cdots\cdots$ (i)

এখন, $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^x \ln x)$

$= x^x \ln x(1 + \ln x) + x^{x-1}$ (Ans.)

06. (ক) $x^{\frac{1}{x}}$ এর অন্তরজ বের কর। [BB'21]

(ক) Sol^n: মনে করি, $y = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x}\ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$ (Ans.)

07. $F(x) = \ln(x)$. [Din.B'21]

(খ) x এর সাপেক্ষে $e^{2F(x)} + (x^x)^x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $e^{2\ln x} + (x^x)^x = x^2 + x^{x^2}$

ধরি, $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$; $v = x^{x^2} \Rightarrow \ln v = x^2\ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{v}.\frac{dv}{dx} = 2x\ln x + x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$

$\therefore$ নির্ণেয় অন্তরজ $2x + x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$ (Ans.)

08. $f(x) = x^{\tan^{-1}x}$ [JB'17]

(খ) $f(x)$ এবং $g(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $y = x^{\tan^{-1}x}$; $\ln y = \tan^{-1}x \ln x$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\tan^{-1}x}{x}$; $\frac{dy}{dx} = x^{\tan^{-1}x}\left(\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\right)$

ধরি, $y = \log_x a = \frac{1}{\log_a x} = \frac{1}{\log_a e \times \ln x}$

$y = \frac{\ln a}{\ln x} \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$ (Ans.)

09. দৃশ্যকল্প-১: $u(x) = \cos(z)$ এবং $v(x) = x^{\sin^{-1}x}$;

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে x এর প্রেক্ষিতে y এর অন্তরজ নির্ণয় কর

যখন, $y = \{u(x)\}^4 + v(x)$ [নটর ডেম কলেজ, ঢাকা]

$z = \cot^{-1}\left(\sqrt{r(x)}\right)$ এবং $r(x) = \frac{1-x}{1+x}$

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $v(x) = x^{\sin^{-1}x}$

$\Rightarrow \ln v = \sin^{-1}x.\ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{\sin^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$ [অন্তরীকরণ করে]

$\therefore \frac{dv}{dx} = x^{\sin^{-1}x}\left(\frac{\sin^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\right)$

আবার, $u(x) = \cos z = \cos\left(\cot^{-1}\sqrt{r(x)}\right)$

$= \cos\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

ধরি, $m(x) = \{u(x)\}^4 = \cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$

এবং $x = \cos 2\theta$

$\therefore m(x) = \cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}\right\}$

$= \cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}}\right\} = \cos^4\{\cot^{-1}.\tan\theta\}$

$= \cos^4\left\{\cot^{-1}\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\} = \cos^4\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$= \sin^4\theta = \frac{1}{4}(2\sin^2\theta)^2 = \frac{1}{4}(1 - \cos 2\theta)^2$

$= \frac{1}{4}(1 - x)^2$ [$\because x = \cos 2\theta$]

$\therefore m(x) = \cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-g(x)}{1+g(x)}}\right\} = \frac{1}{4}(1 - x)^2$

$\therefore \frac{dm}{dx} = \frac{1}{4}\cdot 2(1 - x)(-1) = \frac{1}{2}(x - 1)$

প্রদত্ত রাশি, $y = \{u(x)\}^4 + v(x)$

$\Rightarrow y = m(x) + v(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dm}{dx} + \frac{dv}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x - 1) + x^{\sin^{-1}x}\left(\frac{\sin^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ (Ans.)

Educationblog24.com

নিজে করো

10. (ক) x এর সাপেক্ষে $x^{\cos^{-1}3x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

[JB'21] [Ans: $x^{\cos^{-1}3x}\left(\frac{\cos^{-1}3x}{x}-\frac{3\ln x}{\sqrt{1-9x^2}}\right)$]

11. $t=\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}+x^{\sin^{-1}x}$ [JB'19]

(খ) $\frac{dt}{dx}$ নির্ণয় কর।

[Ans: $\frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)}+x^{\sin^{-1}x}\left[\frac{\sin^{-1}x}{x}+\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$]

Type-15: অব্যক্ত ফাংশন

Concept

যে ফাংশনের $y=f(x)$ আকারে প্রকাশ করা যায় না তাকে অব্যক্ত ফাংশন (implicit function) বলে।

এক্ষেত্রে $f(x,y)=0$ আকারে প্রকাশ করে সকল পদকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করতে হয় এবং প্রাপ্ত সমীকরণ থেকে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করতে হয়।

যেমন: $x^2+xy+y^2=0$ ফাংশনটিকে $y=f(x)$ প্রকাশ করা যাচ্ছে না অর্থাৎ এক পাশে শুধু y এবং অন্য পাশে সব x গুলো আনা যাচ্ছে না, অতএব, এটি একটি অব্যক্ত ফাংশন। $f(x,y)=x^2+xy+y^2=0$

জেনে রাখো: বিভিন্ন ক্ষেত্রে Ans. ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। প্রমাণ অনুসারে Change করে form তৈরি করতে হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. দৃশ্যকল্প-২: $xy+y=\sin^{-1}\frac{y}{x}$ [JB'21]

(খ) দৃশ্যকল্প-২ হতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $xy+y=\sin^{-1}\frac{y}{x}$

$\Rightarrow \sin(xy+y)=\frac{y}{x}\Rightarrow x\sin(xy+y)=y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sin(xy+y)+x\cos(xy+y)\frac{d}{dx}(xy+y)$ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sin(xy+y)+x\cos(xy+y)\left(y+x\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}-x(x+1)\cos(xy+y)\frac{dy}{dx}$

$=\sin(xy+y)+xy\cos(xy+y)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sin(xy+y)+xy\cos(xy+y)}{1-x(x+1)\cos(xy+y)}$ (Ans.)

02. দৃশ্যকল্প-১: $u(x)=\cos(z)$ এবং $v(x)=x^{\sin^{-1}x}$; [নটর ডেম কলেজ, ঢাকা]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে x এর প্রেক্ষিতে y এর অন্তরজ নির্ণয় কর

যখন, $y=\{u(x)\}^4+v(x)$; $z=\cot^{-1}\left(\sqrt{f(x)}\right)$

এবং $r(x)=\frac{1-x}{1+x}$

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $v(x)=x^{\sin^{-1}x}$

$\Rightarrow \ln v=\sin^{-1}x.\ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=\frac{\sin^{-1}x}{x}+\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$ [অন্তরীকরণ করে]

$\therefore \frac{dv}{dx}=x^{\sin^{-1}x}\left(\frac{\sin^{-1}x}{x}+\frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\right)$

আবার, $u(x)=\cos z=\cos\left(\cot^{-1}\sqrt{r(x)}\right)$

$=\cos\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

ধরি, $m(x)=\{u(x)\}^4=\cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$

এবং $x=\cos 2\theta$

$\therefore m(x)=\cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}\right\}$

$=\cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}}\right\}=\cos^4\{\cot^{-1}.\tan\theta\}$

$=\cos^4\left\{\cot^{-1}\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}=\cos^4\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\sin^4\theta=\frac{1}{4}(2\sin^2\theta)^2=\frac{1}{4}(1-\cos 2\theta)^2$

$=\frac{1}{4}(1-x)^2$[$\because x=\cos 2\theta$]

$\therefore m(x)=\cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-g(x)}{1+g(x)}}\right\}=\frac{1}{4}(1-x)^2$

$\therefore \frac{dm}{dx}=\frac{1}{4}\cdot 2(1-x)(-1)=\frac{1}{2}(x-1)$

প্রদত্ত রাশি, $y=\{u(x)\}^4+v(x)$

$\Rightarrow y=m(x)+v(x)\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dm}{dx}+\frac{dv}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(x-1)+x^{\sin^{-1}x}\left(\frac{\sin^{-1}x}{x}+\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ (Ans.)

01. $f(x) = x$ ও $g(x) = \tan^{-1}x$ [ঢাকা সিটি কলেজ]

(গ) $y = \{f(x)\}^{g(x)} + e^{2\ln\{f(x)\}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

(গ) **Soln**: দেওয়া আছে, $f(x) = x$ এবং $g(x) = \tan^{-1}x$

$\therefore y = \{f(x)\}^{g(x)} + e^{2\ln\{f(x)\}} = x^{\tan^{-1}x} + e^{2\ln x}$

$= x^{\tan^{-1}x} + e^{\ln x^2} = x^{\tan^{-1}x} + x^2$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x^{\tan^{-1}x} + x^2]$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{\tan^{-1}x}) + 2x \dots\dots\dots (i)$

ধরি, $x^{\tan^{-1}x} = p$

$\Rightarrow \tan^{-1}x \ln x = \ln p \Rightarrow \ln p = \tan^{-1}x \ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dx} = (\tan^{-1}x)\times\frac{1}{x} + \ln x \times \frac{1}{1+x^2}$

[উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = p\left[\frac{\tan^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{1+x^2}\right]$

$\therefore \frac{d}{dx}(x^{\tan^{-1}x}) = (x^{\tan^{-1}x})\left[\frac{\tan^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{1+x^2}\right]$

(i)-এ বসিয়ে পাই,

$\frac{d}{dx}(x^{\tan^{-1}x}) = (x^{\tan^{-1}x})\left[\frac{\tan^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{1+x^2}\right]$ (Ans.)

04. (ক) x এর সাপেক্ষে $x^{\cos^{-1}x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা]

(ক) **Soln**: ধরি, $y = x^{\cos^{-1}x} \Rightarrow \ln y = \cos^{-1}x \ln x$

[উভয়পক্ষে ln নিয়ে]

$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot y_1 = \cos^{-1}x \times \frac{1}{x} + \ln x \times \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

[উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$\Rightarrow y_1 = y\left(\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{\cos^{-1}x}\left(\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ (Ans.)

Type-16: পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে প্রমাণ ও মান নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept

এই সমস্যাগুলোতে সাধারণত সর্বোচ্চ ২ বার অন্তরীকরণ করতে হয়।

(i) অন্তরীকরণ করে y_1 এর মান নির্ণয় করতে হবে।

(ii) y_1 এর মানে '$\sqrt{\ }$' থাকলে বর্গ করে '$\sqrt{\ }$' মুক্ত করতে হবে।

(iii) সমীকরণে ভগ্নাংশ থাকলে বজ্রগুণন করতে হবে।

(iv) এরপর y_2 এর মান বের করে [এবং প্রয়োজনে y বা y_1 এর মান দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে] সম্পর্ক স্থাপন করতে হবে।

(v) শেষে সকল রাশির কোনো common উৎপাদক থাকলে তা দিয়ে ভাগ দিতে হবে।

জেনে রাখো: যদি এই পদ্ধতিতে বামপক্ষ ও ডানপক্ষ না মিলে, তাহলে আলাদা আলাদাভাবে y_1 ও y_2 বের করে প্রমাণের L.S-এ বসালে অবশ্যই R.S এর সমান হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. দৃশ্যকল্প-২: $x = \tan\sqrt{2y}$. [DB'23]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর যে,

$(1+x^2)^2 y_2 + 2(1+x^2)xy_1 = 1$.

(গ) **Soln**: দেওয়া আছে, $x = \tan\sqrt{2y} \Rightarrow \sqrt{2y} = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2y}}2y_1 = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \frac{y_1}{\sqrt{2y}} = \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow \frac{y_1^2}{2y} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2$ [বর্গ করে] $\Rightarrow (1+x^2)^2 y_1^2 = 2y$

$\Rightarrow 2y_1y_2(1+x^2)^2 + y_1^2 \times 2(1+x^2)\times 2x = 2y_1$

$\Rightarrow (1+x^2)^2y_2 + 2(1+x^2)xy_1 = 1$ (প্রমাণিত)

02. দৃশ্যকল্প-২: $n\sin^{-1}x = \sin^{-1}y$ [Ctg.B'23]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে প্রমাণ কর যে,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 + n^2y = 0$

(গ) **Soln**: দেওয়া আছে, $n\sin^{-1}x = \sin^{-1}y$

$\Rightarrow y = \sin(n\sin^{-1}x) \dots\dots\dots (i)$

$\Rightarrow y_1 = \cos(n\sin^{-1}x)\times\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow y_1^2 = \cos^2(n\sin^{-1}x)\times\frac{n^2}{1-x^2}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = n^2\cos^2(n\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = n^2[1-\{\sin(n\sin^{-1}x)\}^2]$

Educationblog24.com

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = n^2(1-y^2)$ [(i) হতে]

$\Rightarrow (1-x^2)2y_1y_2 - 2xy_1^2 = -2yy_1n^2$

$\Rightarrow y_2(1-x^2) - xy_1 = -n^2y$ [$2y_1$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 + n^2y = 0$ (প্রমাণিত)

03. $f(x) = \sin x$. [SB'23]

(খ) $y = f(f(x))$ হলে দেখাও যে,

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\tan x + [1 - \{f(x)\}^2]\,y = 0$.

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\therefore y = f(f(x)) = f(\sin x) = \sin(\sin x)$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = \cos(\sin x)\cdot\cos x$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin(\sin x)\cos x\cos x + \cos(\sin x)(-\sin x)$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -y\cos^2 x - \cos(\sin x)\cos x\tan x$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -y(1-\sin^2 x) - \frac{dy}{dx}\tan x$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\tan x + y(1-\sin^2 x) = 0$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\tan x + [1-\{f(x)\}^2]y = 0$ (Showed)

04. দৃশ্যকল্প-২: $x = \sin\left(\frac{1}{m}\ln y\right)$ [Din.B'23]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর যে,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = m^2y$.

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $x = \sin\left(\frac{1}{m}\ln y\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{m}\ln y = \sin^{-1}x \Rightarrow \ln y = m\sin^{-1}x$

$\Rightarrow y = e^{m\sin^{-1}x}$ ..... (i)

$\Rightarrow y_1 = m\cdot e^{m\sin^{-1}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ..... (ii)

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\cdot y_1 = m\,e^{m\sin^{-1}x}$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\cdot y_1 = m\cdot y$ [(i) নং হতে]

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = m^2y^2$

$\Rightarrow 2\cdot y_1\cdot y_2(1-x^2) - 2\cdot x\cdot y_1^2 = m^2\cdot 2y\cdot y_1$

$\Rightarrow (1-x^2)\cdot y_2 - x\cdot y_1 = m^2y$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 = m^2y$ (প্রমাণিত)

05. $g(x) = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$। [CB'23]

(গ) $z = \{g(x)\}^m$ হলে উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,

$(1+x^2)\frac{d^2z}{dx^2} + x\frac{dz}{dx} - m^2z = 0$

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $g(x) = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

এখন $z = \{g(x)\}^m \Rightarrow z = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{m-1}\left\{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right\}$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = m\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\times\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{mz}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\frac{dz}{dx} = mz$

$\Rightarrow (1+x^2)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = m^2z^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 2\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}(1+x^2) + 2x\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 2m^2z\cdot\frac{dz}{dx}$

$\Rightarrow (1+x^2)\frac{d^2z}{dx^2} + x\frac{dz}{dx} = m^2z$ [$2\frac{dz}{dx}$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore (1+x^2)\frac{d^2z}{dx^2} + x\frac{dz}{dx} - m^2z = 0$ (Proved)

06. $f(x) = e^x$. [DB'22]

(গ) $y = f(\sec^{-1}x)$ হলে দেখাও যে,

$x^2(x^2-1)y_2 + x(2x^2-1)y_1 - y = 0$.

(গ) **Sol^n:** এখানে, $y = f(\sec^{-1}x) \Rightarrow y = e^{\sec^{-1}x}$

$\Rightarrow y_1 = e^{\sec^{-1}x}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ [$\because \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$]

$\Rightarrow x\sqrt{x^2-1}\cdot y_1 = y \Rightarrow x^2(x^2-1)\,y_1^2 = y^2$

$\Rightarrow x^2(x^2-1)\cdot 2y_1y_2 + \frac{d}{dx}(x^4-x^2)\cdot y_1^2 = 2y\cdot y_1$

[উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই]

$\Rightarrow x^2(x^2-1)\cdot 2y_1y_2 + (4x^3-2x)y_1^2 = 2yy_1$

$\Rightarrow x^2(x^2-1)\cdot 2y_1y_2 + 2x(2x^2-1)\cdot y_1^2 = 2yy_1$

$\Rightarrow x^2(x^2-1)y_2 + x(2x^2-1)y_1 = y$

[উভয়পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore x^2(x^2-1)y_2 + x(2x^2-1)y_1 - y = 0$ (দেখানো হলো)

07. $u = \tan^{-1}2x$ [RB'22]

(গ) $\ln y = u$ হলে উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sec^2 u\cdot y_2 + 2y_1(2\tan u - 1) = 0$.

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $u = \tan^{-1}2x \Rightarrow \tan u = 2x$

$\ln y = u = \tan^{-1}2x \Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}2x)$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot y_1 = \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2 \Rightarrow y_1(1+4x^2) = 2y$

$\Rightarrow y_1\cdot 8x + y_2(1+4x^2) = 2y_1$

$\Rightarrow y_2(1+4x^2) + 8xy_1 - 2y_1 = 0$

$\Rightarrow y_2(1+4x^2) + 2y_1(4x-1) = 0$

$\Rightarrow y_2\{1+(2x)^2\} + 2y_1(2\cdot 2x - 1) = 0$

$\Rightarrow y_2(1+\tan^2 u) + 2y_1(2\tan u - 1) = 0$

$\Rightarrow \sec^2 u\cdot y_2 + 2y_1(2\tan u - 1) = 0$ (প্রমাণিত)

08. (i) $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$. [SB'22]

(খ) উদ্দীপক (i) থেকে প্রমাণ কর যে, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$.

(খ) **Sol^n:** $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$

$\Rightarrow y_1 = -a\sin(\ln x)\frac{1}{x} + b\cos(\ln x)\frac{1}{x}$

$\Rightarrow xy_1 = -a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)$

$\Rightarrow xy_2 + y_1 = -a\cos(\ln x)\frac{1}{x} - b\sin(\ln x)\frac{1}{x}$

$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 = -\{a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)\}$

$\therefore x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ (Proved)

Educationblog24.com

10. দৃশ্যকল্প-১: $y = a\cot(\ln x)$

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, [BB'22]

$x^2y_2 + xy_1 = 2y\operatorname{cosec}^2(\ln x)$.

(খ) Sol^n: দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $y = a\cot(\ln x)$

$\Rightarrow y_1 = -a\operatorname{cosec}^2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

$\Rightarrow xy_1 = -a[1+\cot^2(\ln x)]$

$\Rightarrow xy_2 + y_1\cdot 1 = 0 + 2a\cot(\ln x)\cdot\operatorname{cosec}^2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

[উভয়পক্ষে x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নিয়ে]

$\Rightarrow x(xy_2 + y_1) = 2a\cot(\ln x)\cdot\operatorname{cosec}^2(\ln x)$

$\therefore x^2y_2 + xy_1 = 2y\operatorname{cosec}^2(\ln x)$ **(Showed)**

10. দৃশ্যকল্প-২: $g(t) = e^{a\cos^{-1}(2t)}$ [JB'22]

(খ) দৃশ্যকল্প-২ এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

$(1-4x^2)g''(x) - 4xg'(x) - 4a^2g(x) = 0$.

(খ) Sol^n: দৃশ্যকল্প-২: $g(t) = e^{a\cos^{-1}(2t)}$

$g(x) = e^{a\cos^{-1}(2x)}$

$\Rightarrow g'(x) = e^{a\cos^{-1}(2x)}\times a\times\frac{-1}{\sqrt{1-4x^2}}\times 2$

$\Rightarrow \sqrt{1-4x^2}g'(x) = -2ae^{a\cos^{-1}(2x)} = -2ag(x)$

$\Rightarrow (1-4x^2)\{g'(x)\}^2 = 4a^2\{g(x)\}^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow (1-4x^2)2g'(x)g''(x) - 8x\{g'(x)\}^2 = 8a^2g(x)g'(x)$

$\Rightarrow (1-4x^2)g''(x) - 4xg'(x) - 4a^2g(x) = 0$ [প্রমাণিত]

11. $y = x + \frac{1}{x}$; $g(x) = x$ [CB'22]

(ক) $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় কর।

(গ) $y = \sqrt{4+3g(\sin x)}$ হলে, দেখাও যে,

$2yy_2 + 2y_1^2 + y^2 - 4 = 0$

(ক) Sol^n: $y = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1} \therefore \frac{dy}{dx} = 1 + (-1)x^{-1-1}$

$= 1 - \frac{1}{x^2} \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 0 - (-2)x^{-2-1} = \frac{2}{x^3}$ **(Ans.)**

(গ) Sol^n: $y = \sqrt{4+3g(\sin x)} = \sqrt{4+3\sin x}$

$\therefore y^2 = 4 + 3\sin x \therefore 2yy_1 = 3\cos x$

$\Rightarrow 2yy_2 + 2y_1^2 = -3\sin x$

$\Rightarrow 2yy_2 + 2y_1^2 - 4 = -(4+3\sin x)$

$\Rightarrow 2yy_2 + 2y_1^2 - 4 = -y^2$

$\therefore 2yy_2 + 2y_1^2 + y^2 - 4 = 0$ **(Showed)**

12. $z = \sin x$

(গ) যদি $y = x^2$ হয়, তবে $(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - z\frac{dy}{dz} - 2$ এর মান নির্ণয় কর। [MB'22]

(গ) Sol^n: $y = x^2 = (\sin^{-1}z)^2 \therefore y_1 = 2\sin^{-1}z\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

$\Rightarrow y_1^2(1-z^2) = (2\sin^{-1}z)^2 = 4y$

$\Rightarrow 2y_1y_2(1-z^2) + y_1^2(0-2z) = 4y_1$

$\Rightarrow 2y_1y_2(1-z^2) - 2y_1^2z = 4y_1$

$\therefore y_2(1-z^2) - y_1z = 2$ [$2y_1$ দ্বারা ভাগ]

$\therefore (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - z\frac{dy}{dz} - 2 = 0$ **(Ans.)**

13. $f(x) = \tan x$

(গ) $y = f(x) + \sqrt{f'(x)}$ হলে প্রমাণ কর যে, [RB'21]

$(1-\sin x)y_2 - y = 0$

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = \tan x \therefore y = f(x) + \sqrt{f'(x)}$

$\Rightarrow y = \tan x + \sqrt{\sec^2 x} = \tan x + \sec x$

$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

$\Rightarrow y_1 = \frac{\cos x(0+\cos x) - (1+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow y_1 = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{1-\sin x}$

$\Rightarrow y_2 = (-1)\times\frac{1}{(1-\sin x)^2}\times(-\cos x)$

$\Rightarrow (1-\sin x)y_2 = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

$\Rightarrow (1-\sin x)y_2 = \frac{\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow (1-\sin x)y_2 = \frac{1+\sin x}{\cos x} = y$

$\therefore (1-\sin x)y_2 - y = 0$ (প্রমাণিত)

14. $g(\theta) = \cos\theta$

(গ) $u = g(x)e^x$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx} + 2u = 0$ [CB'21]

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $u = g(x)e^x = e^x\cos x$

$\therefore \frac{du}{dx} = e^x\cos x - e^x\sin x$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u - e^x\sin x \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx} - e^x\sin x - e^x\cos x$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx} + e^x\cos x - e^x\sin x - 2e^x\cos x$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dx} - 2u$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx} + 2u = 0$ (দেখানো হলো)

বিকল্প: $e^x\sin x = u - \frac{du}{dx}$

$\Rightarrow e^x\cos x + e^x\sin x = \frac{du}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2}$

$\Rightarrow u + u - \frac{du}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2}$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx} + 2u = 0$

Educationblog24.com

15. দৃশ্যকল্প-১: $y = ax^2 + \frac{b}{\sqrt{x}}$ [Din.B'21]

(খ) প্রমাণ কর যে, $2x^2y_2 - xy_1 = 2y$.

(খ) Sol^n: $y = ax^2 + \frac{b}{\sqrt{x}} \Rightarrow y_1 = 2ax - \frac{b}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow y_1 = 2ax - \frac{b}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow y_2 = 2a + \frac{3b}{4}x^{-\frac{5}{2}}$

$\therefore$ L.H.S $= 2x^2y_2 - xy_1$

$= 2x^2\left(2a + \frac{3b}{4}x^{-\frac{5}{2}}\right) - 2ax^2 + \frac{b}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$= 4ax^2 + \frac{3b}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2ax^2 + \frac{b}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 2ax^2 + 2bx^{-\frac{1}{2}}$

$= 2ax^2 + \frac{2b}{\sqrt{x}} = 2y$ = R.H.S (প্রমাণিত)

16. $g(x) = 2x$ [Ctg.B'19]

(গ) $y = \left\{\frac{1}{2}g(x)\right\}^{\frac{1}{2h(x)}}$ হলে, y_2 নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: $\left\{\frac{1}{2}g(x)\right\}^{\frac{1}{2h(x)}} = \left(\frac{1}{2} \times 2x\right)^{\frac{1\times 2x}{2\times 1}} = x^x$

এখন, $y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x \times \frac{1}{x} + \ln x \times 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x)$

$\therefore y_1 = x^x + x^x \ln x$

এখন, $y_1 = y + y \ln x$;

$y_2 = y_1 + y \times \frac{1}{x} + \ln x \times y_1 = x^x + x^x \ln x + x^{x-1} + (x^x + x^x \ln x) \times \ln x$

অথবা, $y_1 = y(1 + \ln x)$

$y_2 = y_1(1 + \ln x) + y\left(\frac{1}{x}\right)$ (Ans.)

17. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \tan px$. [DB, SB, JB, Din.B'18]

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = \sec px$.

(গ) $p = 1$ এবং $y = f(x) + g(x)$ হলে দেখাও যে, $(1 - \sin x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - \cos x = 0$.

(গ) Sol^n: $y = \tan x + \sec x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \sec x \tan x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\sin x} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{(1-\sin x)^2}(-\cos x)$

$\therefore (1 - \sin x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - \cos x = 0$ [Showed]

18. (ক) $y = \sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 = y(2y^2 - 1)$ [DB'17]

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, $y = \sec x$

$\therefore y_1 = \sec x \tan x = y \tan x$

$\therefore y_2 = y_1 \tan x + y \sec^2 x = y \tan^2 x + y \sec^2 x$

$= y(\tan^2 x + \sec^2 x)$

$= y(2\sec^2 x - 1)$ $\therefore y_2 = y(2y^2 - 1)$ (প্রমাণিত)

19. দৃশ্যকল্প: $y = \cos(m \sin^{-1} p)$ [Ctg.B'22,17]

(খ) দৃশ্যকল্পের আলোকে প্রমাণ কর যে, $(1 - p^2)y_2 - py_1 + m^2y = 0$.

(খ) Sol^n: $y = \cos(m \sin^{-1} p)$

$\Rightarrow y_1 = -\sin(m \sin^{-1} p) \cdot \frac{m}{\sqrt{1-p^2}}$ [$\frac{d}{dx}$ করে]

$\Rightarrow \sqrt{1-p^2}y_1 = -m \sin(m \sin^{-1} p)$

$\Rightarrow \sqrt{1-p^2}y_2 + \frac{1}{2\sqrt{1-p^2}}(-2p)y_1$

$= -\frac{m^2 \cos(m \sin^{-1} p)}{\sqrt{1-p^2}}$ [$\frac{d}{dx}$ করে]

$\Rightarrow \frac{(1-p)^2y_2 - py_1}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{-m^2y}{\sqrt{1-p^2}} \Rightarrow (1 - p^2)y_2 - py_1$

$= -m^2y \Rightarrow (1 - p^2)y_2 - py_1 + m^2y = 0$ (প্রমাণিত)

20. $h(x) = \sqrt{a + b\cos x}$ [JB'17]

(গ) $y = h(x)$ হলে, দেখাও যে, $2y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a$.

(গ) Sol^n: $y = h(x) = \sqrt{a + b\cos x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{a+b\cos x}} \times (-b \sin x)$

$\left(2y\frac{dy}{dx}\right)^2 = (-b \sin x)^2$

$4y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = b^2 \sin^2 x = b^2 - b^2\cos^2 x$

$= b^2 - (y^2 - a)^2$; $8y^2 \frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + 8y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

$= 0 - 2y\frac{dy}{dx} \times 2(y^2 - a)$

$4y\frac{d^2y}{dx^2} + 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -2(y^2 - a)$

$\therefore 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a$ [দেখানো হলো]

21. $f(x) = e^{\tan^{-1} x}$ [CB'17]

(গ) প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)f''(x) + (2x - 1)f'(x) = 0$

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = e^{\tan^{-1} x}$ ..... (i)

(i) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{d}{dx}\left(e^{\tan^{-1} x}\right)$

$\Rightarrow f'(x) = e^{\tan^{-1} x}\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$

$\Rightarrow f'(x) = f(x)\frac{1}{1+x^2}$ [মান বসিয়ে]

$\Rightarrow f'(x)(1 + x^2) = f(x)$ আবার, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে, $\frac{d}{dx}\{f'(x)(1 + x^2)\} = \frac{d}{dx}\{f(x)\}$

$\Rightarrow f'(x)\frac{d}{dx}(1 + x^2) + (1 + x^2)\frac{d}{dx}\{f'(x)\} = f'(x)$

$\Rightarrow f'(x)2x + (1 + x^2)f''(x) = f'(x)$

$\Rightarrow (1 + x^2)f''(x) + 2xf'(x) - f'(x) = 0$

$\Rightarrow (1 + x^2)f''(x) + (2x - 1)f'(x) = 0$ (প্রমাণিত)

Educationblog24.com

২৪ দৃশ্যকল্প-২: $x = \tan(z)$ এবং $y = \tan(mz)$ [নটর ডেম কলেজ, ঢাকা]

(গ) দৃশ্যকল্প ২ হতে প্রমাণ কর যে,
$(1+x^2)y_2 + 2(x - my)y_1 = 0$

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $x = \tan z$
$\therefore z = \tan^{-1} x \ldots\ldots\ldots (i)$
$y = \tan mz = \tan(m\tan^{-1} x)$ [(i) নং হতে]
x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,
$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\tan(m\tan^{-1}x)]$
$\Rightarrow y_1 = \sec^2(m\tan^{-1} x) \times \frac{d}{dx}(m\tan^{-1} x)$
$= \sec^2(m\tan^{-1} x) \times \frac{m}{1+x^2}$
$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m[1 + \tan^2(m\tan^{-1} x)]$
$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$ [$\because y = \tan(m\tan^{-1} x)$]
$\Rightarrow (1+x^2)y_2 + y_1 \times (0 + 2x) = m(0 + 2yy_1)$
[x এর সাপেক্ষে উভয়পক্ষে অন্তরীকরণ করে]
$\Rightarrow (1+x^2)y_2 + 2xy_1 = 2myy_1$
$\therefore (1+x^2)y_2 + 2(x - my)y_1 = 0$ **(Proved)**

২৫ $f(x) = \ln x$ এবং $g(t) = \frac{1-t}{1+t}$ [হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]

(খ) $y = \sin\{2\tan^{-1}\sqrt{g(x)}\}$ হলে দেখাও যে,
$(1-x^2)y_1^2 - x^2 = 0$

(গ) $u = a\sin\{f(9t)\} + b\cos\{f(9t)\}$ হলে, দেখাও যে,
$f^2u_2 + tu_1 + u = 0$

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $g(t) = \frac{1-t}{1+t}$ $\therefore g(x) = \frac{1-x}{1+x}$
$\therefore y = \sin\{2\tan^1\sqrt{g(x)}\} = \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$
$= \sin\left(\sin^{-1}\frac{2\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}}{1+\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \times \frac{1+x}{2}$
$= \sqrt{(1+x)(1-x)} = \sqrt{1-x^2}$
$\Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \ldots\ldots\ldots (i)$
x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,
$\frac{dy}{dx} = \cos\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \times 2 \times \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \times \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$
$= 2\cos\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \times \frac{1+x}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$
$\times \frac{(1+x)(-1)-(1-x)\times 1}{(1+x)^2} = \cos\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$
$\times \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \times \frac{-1}{1+x}$
$\Rightarrow y_1 = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$
$\Rightarrow y_1^2 = \frac{1}{1-x^2}\cos^2\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$
$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = 1 - \sin^2\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = 1 - y^2$
$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = 1 - (1-x^2)$
$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 - x^2 = 0$ [(i) হতে] **(Showed)**

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = \ln x$ $\therefore f(9t) = \ln 9t$
$\therefore u = a\sin\{f(9t)\} + b\cos\{f(9t)\}$
$= a\sin(\ln 9t) + b\cos(\ln 9t)$
t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,
$u_1 = a\cos(\ln 9t) \times \frac{1}{9t} \times 9 - b\sin(\ln 9t) \times \frac{1}{9t} \times 9$
$\Rightarrow u_1 t = a\cos(\ln 9t) - b\sin(\ln 9t)$
$\Rightarrow u_1 + u_2 t = -a\sin(\ln 9t) \times \frac{1}{9t} \times 9$
$-b\cos(\ln 9t) \times \frac{1}{9t} \times 9$
$\Rightarrow u_1 t + u_2 t^2 = -[a\sin(\ln 9t) + b\cos(\ln 9t)] = -u$
$\therefore t^2u_2 + tu_1 + u = 0$ **(Showed)**

নিজে করো

24. $f(x) = \tan^{-1} x$ [RB'21]
(খ) $y = \tan\{mf(x)\}$ হলে প্রমাণ কর যে,
$(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = 2myy_1$.

25. $g(x) = \sec x$ [JB'21]
(গ) $\frac{1}{g(\sqrt{y})} = 2x$ হলে দেখাও যে,
$(1-4x^2)y_2 - 4xy_1 - 8 = 0$.

26. দৃশ্যকল্প: $f(x) = \sin x$. [MB'21]
(গ) $y = \sqrt{8 + 5f(2x)}$ হলে $y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y^2$ এর মান নির্ণয় কর। [Ans: 16]

27. $f(x) = (1-x^2)y_2 - xy_1 - a^2y$. [RB, BB'19]
(গ) দেখাও যে, $f(x) = 0$, যখন $\sin^{-1} x = \frac{\ln y}{a}$.

28. $f(x) = \cos^{-1} 2x$. [SB'19]
(খ) $\ln y = f(x)$ হলে প্রমাণ কর যে,
$(1-4x^2)y_2 - 4xy_1 - 4y = 0$.

Educationblog24.com

Type-17: ঢাল, স্পর্শক ও অভিলম্ব নির্ণয়

Concept

স্পর্শক:

(i) $y = f(x)$ বক্ররেখার কোনো বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $\frac{dy}{dx}$

(ii) (x_1, y_1) ঐ বক্ররেখার উপরস্থ কোনো বিন্দু হলে ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল,

$m_{tangent} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)}$ [অর্থাৎ $\frac{dy}{dx}$ এর x ও y এর পরিবর্তে x_1 ও y_1 এর মান বসাতে হবে]

(iii) (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y - y_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)} (x - x_1)$

অভিলম্ব: স্পর্শ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব সরলরেখাকে অভিলম্ব বলে।

(i) $y = f(x)$ বক্ররেখার কোনো বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ বা $-\frac{dx}{dy}$

(ii) (x_1, y_1) ঐ বক্ররেখার উপরস্থ কোনো বিন্দু হলে ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের ঢাল,

$m_{normal} = -\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)}}$ বা $-\left.\frac{dx}{dy}\right|_{(x_1,y_1)}$ [অর্থাৎ, $\frac{dx}{dy}$ এর x ও y এর পরিবর্তে x_1 ও y_1 এর মান বসাতে হবে]

(iii) (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $y - y_1 = -\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)}} (x - x_1)$

Tips: (i) স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হলে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 0$

(ii) স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল হলে অভিলম্বের ঢাল, $\frac{dx}{dy} = 0$ এবং স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx}$ অসংজ্ঞায়িত $\left(\frac{k}{0}, k \neq 0\right)$

(iii) স্পর্শক অক্ষদ্বয় এর সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করলে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx} = \pm 1$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = 3x^2 + 2x + 7$ [RB'23]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $y = f(x)$ বক্ররেখার $(2, 23)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $y = 3x^2 + 2x + 7; y_1 = 6x + 2$

$(2,23)$ বিন্দুতে ঢাল $= 6 \times 2 + 2 = 14$

$\therefore (2, 23)$ বিন্দুতে স্পর্শক: $y - 23 = 14(x - 2)$

$\Rightarrow y - 23 = 14x - 28 \Rightarrow 14x - y - 5 = 0$ **(Ans.)**

আবার, $(2, 23)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$x + 14y = 2 + (14 \times 23) \Rightarrow x + 14y - 324 = 0$ **(Ans.)**

02. $g(x) = \sqrt{\frac{x}{2a}} + \sqrt{\frac{y}{2a}} - 1.$ [JB'23]

(গ) প্রমাণ কর যে, $g(x) = 0$ বক্ররেখার যে কোনো বিন্দুতে স্পর্শক দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের যোগফল একটি ধ্রুবক।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $g(x) = \sqrt{\frac{x}{2a}} + \sqrt{\frac{y}{2a}} - 1$

$\Rightarrow 0 = \sqrt{\frac{x}{2a}} + \sqrt{\frac{y}{2a}} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2a} \ldots\ldots\ldots (i)$

এখন, $\frac{d}{dx}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$

ধরি, (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করলে স্পর্শকের ঢাল,

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)} = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $\frac{y-y_1}{x-x_1} = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}$

$\Rightarrow y\sqrt{x_1} - \sqrt{x_1}y_1 = -x\sqrt{y_1} + x_1\sqrt{y_1}$

$\Rightarrow y\sqrt{x_1} + x\sqrt{y_1} = \sqrt{x_1y_1}(\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1})$

$\Rightarrow \frac{y}{\sqrt{y_1}(\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1})} + \frac{x}{\sqrt{x_1}(\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1})} = 1$

$\therefore$ সরলরেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের কর্তিত অংশের যোগফল

$= \sqrt{y_1}(\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1}) + \sqrt{x_1}(\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1})$

$= (\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1})(\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1})$

$= \sqrt{2a} \times \sqrt{2a} = 2a$ [(i) হতে]

যা একটি ধ্রুবক। (প্রমাণিত)

Educationblog24.com

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7$. [BB'23]

(গ) $(-2,5)$ বিন্দুতে $g(x,y) = 0$ এর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $g(x,y) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 4 - 6 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 2x - 4 + \frac{dy}{dx}(2y - 6) = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y - 6) = 4 - 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{2y-6}$

$(-2,5)$ বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = \frac{4-2(-2)}{2\times5-6} = 2$

প্রদত্ত বক্ররেখার $(-2,5)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ;

$y - 5 = 2[x - (-2)] \Rightarrow y - 5 = 2(x + 2)$

$\Rightarrow y - 5 = 2x + 4 \Rightarrow 2x - y + 9 = 0$ (Ans.)

11. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ [BB'23]

(খ) $y = f(x)$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলো অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে তাদের ভুজ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 2$

প্রদত্ত বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলো অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে সেসব বিন্দুতে ঢাল $= \pm 1$

অর্থাৎ, $3x^2 - 6x - 2 = 1$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 3 = 0$

$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

আবার, $3x^2 - 6x - 2 = -1$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ ভুজ $1 \pm \sqrt{2}$ এবং $\frac{3\pm2\sqrt{3}}{3}$ (Ans.)

12. $f(x,y) = y^2 - 4x - 6y + 20$ [MB'23]

(খ) $f(x,y) = 0$ বক্ররেখার $(3,2)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: প্রশ্নমতে, $f(x, y) = 0$

$\Rightarrow y^2 - 4x - 6y + 20 = 0 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} - 4 - 6\frac{dy}{dx} = 0$

[x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$\Rightarrow y\frac{dy}{dx} - 2 - 3\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-3}$

$\therefore \frac{dy}{dx}|_{(3,2)} = \frac{2}{2-3} = -2 \therefore (3,2)$ বিন্দুতে,

স্পর্শকের সমীকরণ: $y - 2 = -2(x - 3) \Rightarrow 2x + y = 8$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ: $y - 2 = \frac{-1}{-2}(x - 3) \Rightarrow x - 2y + 1 = 0$ (Ans.)

06. (ক) $y = 3x(1 + x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের ঢালের মান নির্ণয় কর। [JB'22]

(ক) Sol^n: দেওয়া আছে, $y = 3x(1 + x)$

$\frac{dy}{dx} = 3 + 3 \times 2x = 3 + 6x$

মূলবিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx}|_{(0,0)} = 3$

ধরি, মূলবিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $m_1 = 3$ এবং মূলবিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $= m_2$

$\therefore m_1 m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{-1}{3}$

$\therefore$ মূলবিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের ঢালের মান $\frac{-1}{3}$ (Ans.)

07. (ক) a এর মান কত হলে $y = ax(1 - x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে? [MB'22]

(ক) Sol^n: $y = ax(1 - x) \therefore y_1 = a\{(1 - x) + x(0 - 1)\}$

$\therefore \tan 60° = a\{(1 - 0) + 0\} \therefore a = \sqrt{3}$ (Ans.)

08. $f(x,y) = x^2 + px + y^2$ [BB'21]

(খ) দেখাও যে, $f(x,y) = 0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের উপর লম্ব, সে সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,0)$ এবং $(-p,0)$.

(খ) Sol^n: $f(x,y) = 0 \Rightarrow x^2 + px + y^2 = 0$

$\Rightarrow 2x + p + 2yy_1 = 0 \Rightarrow 2yy_1 = -2x - p$

$\Rightarrow y_1 = \frac{-2x-p}{2y}$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখা x অক্ষের উপর লম্ব বিধায়, $y_1 = \tan 90°$

$\Rightarrow \frac{-2x-p}{2y} = \frac{1}{0} \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore x^2 + px = 0 \Rightarrow x(x + p) = 0 \Rightarrow x = 0, -p$

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $(0,0)$

এবং $(-p,0)$ (দেখানো হলো)

09. $y = 2x^2 + 3x + 5$ একটি বক্ররেখা। [CB'21]

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $y = 2x^2 + 3x + 5 \Rightarrow y_1 = 4x + 3$

$y_1 = 0$ হলে $4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

$\therefore y = 2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 5 = \frac{31}{8} \therefore$ বিন্দুটি $\left(-\frac{3}{4}, \frac{31}{8}\right)$ (Ans.)

10. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1} \ldots\ldots\ldots$ (i) [RB'17]

(খ) (i) বক্ররেখায় $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Educationblog24.com

(খ) Sol^n: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1} \dots\dots\dots (i)$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে, $= f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x^2+1}\right)$

$= \frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(\ln x) - \ln x \frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{(x^2+1)\cdot\frac{1}{x} - (\ln x\,(2x+0)}{(x^2+1)^2} = \frac{x+\frac{1}{x} - 2x\ln x}{(x^2+1)^2}$

এখন, $x = 2$ বিন্দুতে ঢালের মান, $= f'(x) = \frac{2+\frac{1}{2} - 2\,2\ln 2}{(2^2+1)^2}$

$= \frac{\frac{5}{2}-4\ln 2}{25} = \frac{\frac{5-8\ln 2}{2}}{25} \Rightarrow f'(x) = \frac{5-8\ln 2}{50}$

আবার, $x = 2$ হলে (i) থেকে পাই,

$f(x) = y = \frac{\ln 2}{2^2+1} = \frac{\ln 2}{5}$ $\therefore$ বিন্দুটি হলো $\equiv \left(2, \frac{\ln 2}{5}\right)$

$\therefore \left(2, \frac{\ln 2}{5}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - \frac{\ln 2}{5} = \frac{5-8\ln 2}{50}(x-2)$

$\Rightarrow 50y - 10\ln 2 = 5x - 10 - 8x\ln 2 + 16\ln 2$

$\Rightarrow 5x - 8x\ln 2 - 50y + 26\ln 2 - 10 = 0$ **(Ans.)**

11. দৃশ্যকল্প-২: $f(x,y) = x^2y - 5xy - x + 6y^2 + 8$ [ঢাকা ইমপিরিয়াল কলেজ]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে $f(x,y) = 0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x,y) = x^2y - 5xy - x + 6y^2 + 8$

$f(x,y) = 0$

$\therefore x^2y - 5xy - x + 6y^2 + 8 = 0 \dots\dots\dots (i)$

x অক্ষকে ছেদ করে বিধায় উক্ত বিন্দুতে $y = 0$ হবে।

$\therefore 0 - 0 - x + 0 + 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

অর্থাৎ, বক্ররেখাটি x-অক্ষকে $(8,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(i) নং কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$x^2y_1 + 2xy - 5xy_1 - 5y - 1 + 12yy_1 = 0$

$(8,0)$ বিন্দুর ভুজ ও কোটি উপরের সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$64y_1 + 0 - 40y_1 - 0 - 1 + 0 = 0 \Rightarrow 24y_1 = 1$

$\therefore y_1 = \frac{1}{24}$; যা উক্ত বক্ররেখার $(8,0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল।

$\therefore (8,0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - 0 = \frac{1}{24}(x-8)$ $\therefore x - 24y - 8 = 0$ **(Ans.)**

$\therefore (8,0)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$y - 0 = (-24)(x-8) \Rightarrow y = -24x + 192$

$\therefore 24x + y - 192 = 0$ **(Ans.)**

নিজে করো

12. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \sqrt{x}$. [Din.B'23]

(খ) প্রমাণ কর যে, $f(x) + f(y) = f(c)$ বক্ররেখার (a,b) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক কর্তৃক অক্ষদ্বয় হতে কর্তিত অংশের যোগফল c।

13. বক্ররেখার সমীকরণ: $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$

(খ) বক্ররেখাটির $(1,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Ctg.B'22]

[Ans: $2x + 3y + 1 = 0$; $3x - 2y - 5 = 0$]

14. দৃশ্যকল্প-২: $f(x,y) = x^3 - 2xy - y^3 - 3$. [BB'22]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে $f(x,y) = 0$ বক্ররেখার $(1,1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $f(1,1) \neq 0$ অর্থাৎ, $(1,1)$ বিন্দুটি বক্ররেখার উপরে অবস্থান করে না। সুতরাং $(1,1)$ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক অভিলম্ব নেই।]

5. $g(x) = x^3 - 3xy + y^3 - 15$ [JB'22]

(খ) উদ্দীপক হতে $g(x) = 0$ বক্ররেখাটির $(2,1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Ans: $3x - y = 5$]

16. $g(x,y) = y(x-3)(x-5) + x - 10$ একটি ফাংশন। [Din.B'22]

(খ) $g(x,y) = 0$ বক্ররেখা যে বিন্দুতে x- অক্ষকে ছেদ করে সে বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $x + 35y = 10$; $35x - y = 350$]

17. (ক) a-এর মান কত হলে, $y = ax(1-x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। [DB'21] [Ans: $\frac{1}{\sqrt{3}}$]

18. (ক) b এর মান কত হলে $y = bx(x-1)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করবে? [SB'21] [Ans: -1]

19. $g(x,y) = x^2 - y^2 - 7$. [MB'22]

(খ) $g(x,y) = 0$ বক্ররেখার $(4,-3)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Ans: $4x + 3y = 7$; $3x - 4y = 24$]

Educationblog24.com

20. $g(x,y) = x^2 - 2y^2 - 7$ [MB'21]
(খ) $g(x,y) = 0$ বক্ররেখার $(3,1)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[Ans: $3x - 2y = 7; 2x + 3y = 9$]

21. (ক) $(-3,2)$ বিন্দুতে $x^2 - y^2 = 5$ বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [DB, SB, JB, Din.B'18]
[Ans: $3x + 2y + 5 = 0$]

22. দৃশ্যকল্প-I: $y(x+1)(x+2) - x + 4 = 0$ [DB'17]
(খ) দৃশ্যকল্প-I এর বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুতে স্পর্শক অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[Ans: $x - 30y - 4 = 0; 30x + y - 120 = 0$]

23. (ক) $y = (x-2)(x+1)$ বক্ররেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [JB'17] [Ans: 1]

Type-18: ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন

Concept

(i) যদি কোন বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} > 0$ [+ve] হয় তাহলে গ্রাফ/ফাংশনটি ঐ বিন্দুতে ক্রমবর্ধমান (Increasing)

(ii) যদি কোন বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} < 0$ [−ve] হয় তাহলে গ্রাফ/ফাংশনটি ঐ বিন্দুতে ক্রম হ্রাসমান (Decreasing)

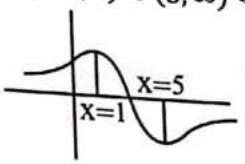
সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $g(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$. [RB'23]
(গ) $g(x)$ ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং বৃদ্ধি পায় তাহা নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $g(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$
$g'(x) = -15 + 18x - 3x^2 = -3(x^2 - 6x + 5)$
$= -3(x-1)(x-5)$; $g''(x) = 18 - 6x$
চরম বিন্দুর জন্য $g'(x) = 0 \Rightarrow -3(x-1)(x-5) = 0$
$\Rightarrow x = 1, 5$
x এর উক্ত মানদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < 1, 1 \le x \le 5$ এবং $x > 5$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে। এখন $x < 1$ এর জন্য $(x-1) < 0$ ও $(x-5) < 0$, কাজেই $g'(x) < 0 \therefore x < 1$ ব্যবধিতে $g(x)$ হ্রাস পায়।
আবার, $1 < x < 5$ এর জন্য $(x-1) > 0$
কিন্তু $(x-5) < 0$, কাজেই $g'(x) > 0$
$\therefore 1 < x < 5$ ব্যবধিতে $g(x)$ বৃদ্ধি পায়। অপরপক্ষে $x > 5$ এর জন্য $(x-1) > 0$ ও $(x-5) > 0$,
কাজেই $g'(x) < 0 \therefore x > 5$ ব্যবধিতে $g(x)$ হ্রাস পায়।

02. $g(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 7$ [DB'21]
(গ) যে সকল ব্যবধিতে $g(x)$ ফাংশনটির মান বৃদ্ধি বা হ্রাস পায় তা নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: $g(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 7$
এখানে, $g'(x) = 3x^2 - 18x + 15$; $g''(x) = 6x - 18$
ক্রমহ্রাসমান ফাংশনের ক্ষেত্রে: $g'(x) < 0$
$\Rightarrow 3x^2 - 18x + 15 < 0$
$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Rightarrow (x-5)(x-1) < 0$
$\therefore 1 < x < 5$ [Jump Rule প্রয়োগ করে]
$\therefore (1,5)$ ব্যবধিতে ফাংশনের মান হ্রাস পায়। অবশিষ্ট সর্বত্র জায়গায় অর্থাৎ, $x < 1$
অথবা, $x > 5$ অঞ্চলে ফাংশনের মান বৃদ্ধি পায়।
$\therefore (-\infty, 1)$ ও $(5, \infty)$ ব্যবধিতে ফাংশনের মান বৃদ্ধি পায়।



03. (ক) দেখাও যে, $x^3 - 3x^2 + 10x$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন। [Din.B'21]

(ক) Sol^n: ধরি, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 10x$
$\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x + 10$
$= 3(x^2 - 2x) + 10 = 3\{(x-1)^2 - 1\} + 10$
$= 3(x-1)^2 + 7$
অর্থাৎ, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f'(x) > 0$।
$\therefore f(x)$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন। (দেখানো হলো)

নিজে করো

04. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ ..... (i) [JB'19]
(গ) যে সকল ব্যবধিতে (i) এ বর্ণিত ফাংশনটির মান বৃদ্ধি বা হ্রাস পায় তা নির্ণয় কর।

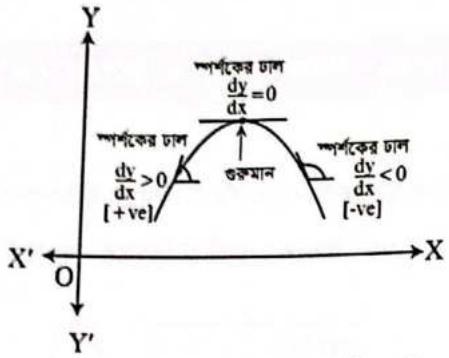
Educationblog24.com

Type-19: গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয়

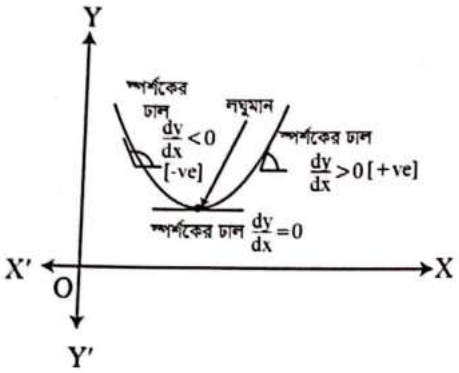
Concept

গুরুমান (সর্বোচ্চ মান): গুরুমান বলতে ফাংশনের সেই মানকে বোঝায় যার পূর্বে স্পর্শকের ঢাল ধনাত্মক [+ve] এবং পরে স্পর্শকের ঢাল ঋণাত্মক [−ve]।

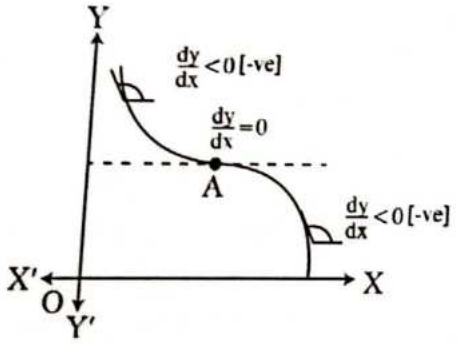
অর্থাৎ, যে বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ [বা স্পর্শকের ঢাল] এর মান ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক মানে রূপান্তরিত হয় সেই বিন্দুর কোটির ফাংশনের মানই গুরুমান।

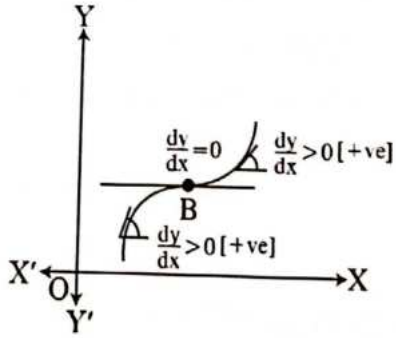


লঘুমান (সর্বনিম্ন মান): লঘুমান বলতে ফাংশনের সেই মানকে বোঝায় যার পূর্বে স্পর্শকের ঢাল ঋণাত্মক [−ve] এবং পরে স্পর্শকের ঢাল ধনাত্মক [+ve]. অর্থাৎ, যে বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ [বা স্পর্শকের ঢাল] এর মান ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মক মানে রূপান্তরিত হয় সেই বিন্দুর কোটির ফাংশনের মানই লঘুমান।



গুরুমান এবং লঘুমানের জন্য $\frac{dy}{dx}=0$ [স্পর্শকের ঢাল 0 বা স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল] কিন্তু $\frac{dy}{dx}=0$ হলেই গুরুমান বা লঘুমান নাও হতে পারে।





চিত্রে A এবং B বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=0$ কিন্তু A বা B এর কোনটিই গুরুমান বা লঘুমান নয়। কারণ A বিন্দুর আগে এবং পরে $\frac{dy}{dx}$ এর মান ঋণাত্মক [অর্থাৎ চিহ্নের কোনো পরিবর্তন হয় নি] এবং B বিন্দুর আগে ও পরে $\frac{dy}{dx}$ এর মান ধনাত্মক [অর্থাৎ এখানেও চিহ্নের পরিবর্তন হয় নি]

∴ A ও B গুরুমান / লঘুমান নয়। গুরুমান ও লঘুমানকে ফাংশনের চরমমান বলা হয়।

গুরুমানের শর্ত	লঘুমানের শর্ত
গুরুমানের ক্ষেত্রে, (i) $\frac{dy}{dx}=0$; (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ [−ve]	লঘুমানের ক্ষেত্রে, (i) $\frac{dy}{dx}=0$; (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}>0$ [+ve]

Educationblog24.com

01. দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \sin x$ [DB, Din.B'23]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $1 + 2g(x) + 3[1 - \{g(x)\}^2]$ এর $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে চরম মান নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $g(x) = \sin x$

ধরি, $y = 1 + 2g(x) + 3[1 - \{g(x)\}^2]$

$= 1 + 2\sin x + 3(1 - \sin^2 x) = 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$

$\therefore y = 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$

$\therefore y_1 = 0 + 2\cos x + 3 \cdot 2\cos x(-\sin x)$

$= 2\cos x - 6\cos x \sin x$

এখন, $y_1 = 0$ হলে, $2\cos x - 6\cos x \sin x = 0$

$\Rightarrow 2\cos x(1 - 3\sin x) = 0$

হয় $2\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

অথবা, $\sin x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \sin^{-1}\frac{1}{3}$ [যেহেতু $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$]

$\therefore$ x-এর মান y এ বসিয়ে পাই,

$y = 1 + 2\sin\frac{\pi}{2} + 3\cos^2\frac{\pi}{2}$

$= 1 + 2 + 0 = 3$ [যখন $x = \frac{\pi}{2}$]

এবং $y = 1 + 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{3}\right) + 3\left[1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{3}\right)\right] = 1 + \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{13}{3}$ [যখন $x = \sin^{-1}\frac{1}{3}$]

$\therefore$ নির্ণেয় চরম মানসমূহ 3 ও $\frac{13}{3}$ (Ans.)

02. দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = 54x - (2x - 7)^3$ [RB'23]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে ফাংশনটির গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $g(x) = 54x - (2x - 7)^3$

$g'(x) = 54 - 3(2x - 7)^2 \times 2$

$\therefore g'(x) = 0 \Rightarrow 54 - 6(2x - 7)^2 = 0$

$\Rightarrow (2x - 7)^2 = 9 \Rightarrow 2x - 7 = \pm 3 \therefore x = \frac{\pm 3 + 7}{2} = 5, 2$

$G''(x) = -12(2x - 7) \times 2 = -24(2x - 7)$

$g''(5) = -72;\ g''(2) = 72$

$\therefore$ লঘুমান $= g(2) = 135$

$\therefore$ গুরুমান $= g(5) = 243$ (Ans.)

03. $f(x) = \cos x$ [Ctg.B'23]

(খ) উদ্দীপকের আলোকে $(0, \pi)$ ব্যবধিতে $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(2x)$ ফাংশনের লঘুমান এবং গুরুমান নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে $f(x) = \cos x$

ধরি, $g(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(2x)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos 2x = \sin x + \cos 2x$

$\therefore g'(x) = \cos x - 2\sin 2x$

যদি $g'(x) = 0$ হয়, $\cos x - 2\sin 2x = 0$

$\Rightarrow \cos x - 4\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(1 - 4\sin x) = 0$

$\cos x = 0$ অথবা $\sin x = \frac{1}{4}$

$\therefore (0, \pi)$ ব্যবধিতে $x = \frac{\pi}{2}, \sin^{-1}\frac{1}{4}, \pi - \sin^{-1}\frac{1}{4}$

আবার, $g''(x) = -\sin x - 4\cos 2x$

$= -\sin x - 4(1 - 2\sin^2 x)$

$\therefore g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 4(1 - 2) = 3 > 0$

$\because$ লঘুমান, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = 0$ (Ans.)

আবার, $g''\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right)$

$= -\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right) - 4\left\{1 - 2\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right)\right\}$

$= -\frac{1}{4} - 4\left(1 - 2 \times \frac{1}{16}\right) = -\frac{15}{4} < 0$

এবং $g''\left(\pi - \sin^{-1}\frac{1}{4}\right)$

$= -\sin\left(\pi - \sin^{-1}\frac{1}{4}\right) - 4\left\{1 - 2\sin^2\left(\pi - \sin^{-1}\frac{1}{4}\right)\right\}$

$= -\frac{1}{4} - 4\left(1 - 2 \times \frac{1}{16}\right) = -\frac{15}{4} < 0$

$\therefore$ গুরুমান, $g\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right)$

$= \sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right) + \cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{4}\right)$

$= \frac{1}{4} + \left\{1 - 2\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right)\right\} = \frac{1}{4} + \left(1 - 2 \times \frac{1}{16}\right) = \frac{9}{8}$ (Ans.)

04. $f(x) = \sin x$. [SB'23]

(গ) $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ হলে $3 + 2f(x) + 3\left\{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}^2$ এর চরম মান নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

ধরি, $y = 3 + 2f(x) + 3\left\{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}^2$

$\Rightarrow y = 3 + 2\sin x + 3\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}^2$

$\Rightarrow y = 3 + 2\sin x + 3\cos^2 x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = 2\cos x + 6\cos x(-\sin x)$

$\therefore y_1 = 2\cos x - 6\sin x \cos x$

চরম মানের জন্য, $y_1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos x - 6\sin x \cos x = 0$

$\Rightarrow 2\cos x(1 - 3\sin x) = 0$

$\therefore \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}\left[0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right]$

$1 - 3\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{3} \therefore x = \sin^{-1}\frac{1}{3}$

$\therefore$ চরম বিন্দু $= \frac{\pi}{2}, \sin^{-1}\frac{1}{3}$

$\therefore$ চরম মান, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5; f\left(\sin^{-1}\frac{1}{3}\right) = \frac{19}{3}$ (Ans.)

Educationblog24.com

05. $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x + 2$ [BB'23]

(খ) x এর কোন মানের জন্য f(x) এর মান সর্বোচ্চ?

(খ) **Sol^n:** $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x + 2$

ধরি, $y = f(x); y_1 = 9x^2 - 12x - 5$

f(x) এর সর্বোচ্চ মানের জন্য $y_1 = 0$

$\Rightarrow 9x^2 - 12x - 5 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 15x + 3x - 5 = 0$

$\Rightarrow (3x + 1)(3x - 5) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}$

আবার, $y_2 = 18x - 12$

$x = \frac{5}{3}$ এর জন্য, $y_2 = 18 \times \frac{5}{3} - 12 = 18 > 0$

$x = -\frac{1}{3}$ এর জন্য, $y_2 = 18 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 12 = -18 < 0$

সুতরাং, $x = -\frac{1}{3}$ এর জন্য f(x) এর মান সর্বোচ্চ। **(Ans.)**

06. $f(x) = 2x$ [Ctg.B'22, 19]

(গ) দেখাও যে, $f(x) + \frac{1}{f(x)}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

(গ) **Sol^n:** ধরি, $y = f(x) + \frac{1}{f(x)} = 2x + \frac{1}{2x}$

$y_1 = 2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2 - \frac{1}{2x^2}$

$\therefore y_2 = -\frac{1}{2}(-2)\, x^{-2-1} = \frac{1}{x^3}$

চরমমানের জন্য, $y_1 = 0 \therefore 2 - \frac{1}{2x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2x^2} = 2$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = 4 \therefore x = \pm\frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ এর জন্য, $y_2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 8$

$\therefore$ লঘুমান $= 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = 2$

$x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য, $y_2 = -8$

$\therefore$ গুরুমান $= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = -2$

$\therefore$ গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। **(Showed)**

7. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30.$ [SB'22]

(গ) f(x) এর চরমমান নির্ণয় কর।

') **Sol^n:** $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30$

$\therefore f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \therefore f''(x) = 12x - 6$

$F'(x) = 0$[চরমমানের জন্য]$\therefore 6x^2 - 6x - 12 = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 12x + 6x - 12 = 0$

$\Rightarrow 6x(x - 2) + 6(x - 2) = 0$

$\Rightarrow (x - 2)(6x + 6) = 0 \therefore x = -1, 2$

$f''(2) = 18 > 0; \therefore$ লঘুমান $f(2) = 10$

$f''(-1) = -18 < 0 \therefore$ গুরুমান $f(-1) = 37$ **(Ans.)**

$f(x) = e^x$ [MB'22]

(গ) $4f(x) + 9f(-x)$ এর লঘুমান কত?

(গ) **Sol^n:** $y = 4f(x) + 9f(-x) = 4e^x + 9e^{-x}$

$\therefore y_1 = 4e^x - 9e^{-x} \therefore y_2 = 4e^x + 9e^{-x}$

চরমমানের জন্য, $y_1 = 0 \therefore 4e^x - 9e^{-x} = 0$

$\Rightarrow 4e^x = \frac{9}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow e^x = \frac{3}{2}$ [$\because e^x > 0$]

$\therefore y_2 = 4 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} = 12 > 0$

$\therefore$ লঘুমান $= 4 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} = 12$ **(Ans.)**

09. $2g(x) = 2\sin x + \sin 2x$ [RB'21]

(গ) $0 < x < \pi$ ব্যবধিতে g(x) ফাংশনটির চরমমান নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** $g(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$; $g'(x) = \cos x + \cos 2x$

চরমমান নির্ণয়ের জন্য, $g'(x) = 0$ বা, $\cos x + \cos 2x = 0$

বা, $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

বা, $2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1 = 0$

বা, $(\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$

$\therefore \cos x = -1$ অথবা, $\cos x = \frac{1}{2}$

$0 < x < \pi$ ব্যবধিতে $\cos x \neq -1$

আবার, $0 < x < \pi$ ব্যবধিতে $\cos x = \frac{1}{2}$ হলে, $x = \frac{\pi}{3}$

$\therefore 0 < x < \pi$ ব্যবধিতে g(x) ফাংশনের চরমমান,

$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ **(Ans.)**

10. $g(x) = \sqrt{x}.$ [BB'21]

(গ) দেখাও যে, $\frac{2\ln\{g(x)\}}{\{g(x)\}^2}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান $\frac{1}{e}$.

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $g(x) = \sqrt{x}$

ধরি, $h(x) = \frac{2\ln\{g(x)\}}{\{g(x)\}^2} = \frac{2\ln\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2\ln x^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{2 \times \frac{1}{2} \times \ln x}{x} = \frac{\ln x}{x}$

এখন, $h'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{x \times \frac{1}{x} - (\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

এবং $h''(x) = \frac{x^2\left(0 - \frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x) \times 2x}{x^4}$

$= \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$

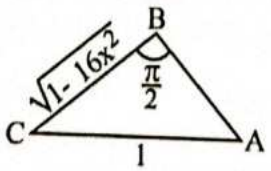
চরমমান প্রাপ্তির শর্তমতে, $h'(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \therefore x = e$

এখন, $h''(e) = \frac{2\ln e - 3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0$

$\therefore x = e$ বিন্দুতে সর্বোচ্চমান, $h(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ **(Showed)**

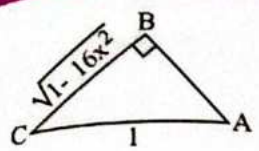
11. দৃশ্যকল্প-১: [JB'21]



(গ) $h(x) = \frac{AB}{\log(AB)}$ এর চরমমান দৃশ্যকল্প-১ হতে নির্ণয় কর।

Educationblog24.com

(গ) Sol^n:



এখানে $AB = \sqrt{1^2 - (1-16x^2)} = 4x$

$\therefore h(x) = \frac{(4x)}{\log(4x)} \therefore h'(x) = \frac{(\log 4x)\times 4 - 4x\times\frac{4}{4x}}{(\log 4x)^2}$

$= \frac{4\log 4x - 4}{(\log 4x)^2}$

চরমমানের ক্ষেত্রে, $h'(x) = 0 \Rightarrow 4\log 4x - 4 = 0$

$\Rightarrow \log 4x = 1 \Rightarrow 4x = e \Rightarrow x = \frac{e}{4}$

$\therefore h(x)$ এর চরমমান $h\left(\frac{e}{4}\right) = \frac{\frac{4e}{4}}{\log\left(\frac{4e}{4}\right)} = e$ (Ans.)

12. $g(u) = \ln u$ দুইটি ফাংশন। [Din.B, SB'17]

(গ) দেখাও যে, $\frac{g(2x)}{x}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান $\frac{2}{e}$।

(গ) Sol^n: $y = \frac{\ln 2x}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\times\frac{1}{2x}\times 2 - \ln 2x}{x^2} = \frac{1-\ln 2x}{x^2}$

$\therefore 1 - \ln 2x = 0$ [সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্নমানের জন্য]

$\Rightarrow 2x = e; x = \frac{e}{2}. ; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\left(-\frac{1}{2x}\times 2\right) - 2x(1-\ln 2x)}{x^4}$

$= \frac{-x + 2x\ln 2x - 2x}{x^4} \therefore \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\frac{e}{2}} = \frac{-3.\frac{e}{2} + 2.\frac{e}{2}}{\left(\frac{e}{2}\right)^4} < 0$

$\therefore x = \frac{e}{2}$ তে y এর গুরুমান

$\therefore y_{max} = \frac{\ln\left(2.\frac{e}{2}\right)}{\frac{e}{2}} = \frac{2}{e}$ (দেখানো হলো)

13. (ক) x এর সাপেক্ষে x^x এর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। [BB'17]

(ক) Sol^n: ধরি, $y = x^x$ ..... (i)

উভয় পক্ষে ln নিয়ে পাই, $\ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x$,

এখন, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে $\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x\ln x)$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \ln x.1 \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(1+\ln x) \Rightarrow x^x(1+\ln x)$

চরমমান প্রাপ্তির শর্তে, $x^x(1+\ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$\therefore x = \frac{1}{e}$

$Y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = x^x\left(0 + \frac{1}{x}\right) + (1+\ln x)^2 x^x$

$= x^x\left[\frac{1}{x} + (1+\ln x)\right]$

$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=\frac{1}{e}} = 1.88 > 1 \therefore$ লঘুমান $= x^x = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = e^{\frac{-1}{e}}$

14. $h(u) = u^4 - \frac{2}{3}u^3 - 2u^2 + 2u$

[আইডিয়াল স্কুল অ্যান্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

(গ) $(-1, 2)$ ব্যবধিতে $h(x)$ এর চরমমানসমূহ নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $h(u) = u^4 - \frac{2}{3}u^3 - 2u^2 + 2u$

$\therefore h(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2x$

ধরি, $y = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2x$ ..... (i)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3 - \frac{2}{3}\times 3x^2 - 4x + 2$

$= 4x^3 - 2x^2 - 4x + 2$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 4x^3 - 2x^2 - 4x + 2 = 0$

$\Rightarrow 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2(2x-1) - 1(2x-1) = 0$

$\Rightarrow (2x-1)(x^2-1) = 0$

$\Rightarrow (2x-1)(x+1)(x-1) = 0 \therefore x = \frac{1}{2}, -1, 1$

এখানে, $-1 \notin (-1, 2)$

এখন, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 4x - 4$

যখন, $x = \frac{1}{2}$ তখন $\frac{d^2y}{dx^2} = 12\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\times\frac{1}{2} - 4$

$= 12\times\frac{1}{4} - 2 - 4 = 3 - 2 - 4 = -3 < 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\times\frac{1}{2}$ [(i) হতে]

$= \frac{1}{16} - \frac{1}{12} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3-4-24+48}{48} = \frac{51-28}{48} = \frac{23}{48}$ (Ans.)

যখন, $x = 1$ তখন $\frac{d^2y}{dx^2} = 12\times 1 - 4\times 1 - 4 = 4 > 0$

$\therefore x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= 1^4 - \frac{2}{3}\times 1^3 - 2\times 1^2 + 2\times 1$

$= 1 - \frac{2}{3} - 2 + 2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (Ans.)

15. $f(x) = x$ [ঢাকা সিটি কলেজ]

(খ) দেখাও যে, $e^{f(x)} + e^{f(-x)}$ এর ক্ষুদ্রতম মান 2

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = x \therefore f(-x) = -x$

ধরি, $y = e^{f(x)} + e^{f(-x)} \therefore y = e^x + e^{-x}$ ..... (i)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = e^x + e^{-x}$

ক্ষুদ্রতম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x = \frac{1}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 = 1$

$\therefore e^x = 1$ ..... (ii) [$\because e^x \neq -1$]

$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x + e^{-x} = 1 + \frac{1}{1} = 2 > 0$

$\therefore e^x = 1$ এর জন্য ক্ষুদ্রতম মান বিদ্যমান।

(i) নং এ $e^x = 1$, বসিয়ে পাই, $y = e^x + e^{-x}$

$= e^x + \frac{1}{e^x} = 1 + \frac{1}{1} = 2$

$\therefore e^{f(x)} + e^{f(-x)}$ এর ক্ষুদ্রতম মান 2 (Showed)

Educationblog24.com

নিজে করো

16. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ [MB'23; BB'22]

(গ) $g(x)$ ফাংশনটির লঘু ও গুরুমান নির্ণয় কর।

[Ans: লঘুমান 1; গুরুমান 5]

17. (ক) x এর যে মানগুলোর জন্য $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ফাংশনের চরমমান বিদ্যমান তা নির্ণয় কর।

[RB'22] [Ans: $x = \pm 2$]

18. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + 5.$ [JB'22]

(গ) উদ্দীপক হতে $f(x)$ ফাংশনের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। [Ans: বৃহত্তম মান 95; ক্ষুদ্রতম মান $\frac{83}{24}$]

19. $h(x) = \cos x$ [CB'22]

(গ) $\sqrt{3}h\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3h(x)$ এর চরম মান নির্ণয় কর।

[Ans: সর্বোচ্চমান $2\sqrt{3}$]

20. $g(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x + 1$ [CB'21]

(গ) $g(x)$ এর চরম মান নির্ণয় কর।

[Ans: লঘুমান $\frac{-91}{9}$; গুরুমান $\frac{17}{9}$]

21. $F(x) = \ln(x)$. [Din.B'21]

(গ) $\frac{e^{F(x)}}{F(x)}$ এর ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। [Ans: e]

22. দৃশ্যকল্প: $f(z) = \frac{1}{3}z^3 - \frac{13}{2}z^2 + 42z + 1.$ [MB'21]

(গ) $f(x)$ ফাংশনটির গুরুমান এবং লঘুমান নির্ণয় কর।

[Ans: লঘুমান $\frac{4367}{6}$; গুরুমান 559]

23. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ [RB'17]

(গ) দেখাও যে, $h(x) + \frac{1}{h(x)}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

24. $F(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$ [JB'17]

(খ) দেখাও যে, $F(x)$ এর লঘুমান, গুরুমান অপেক্ষা বৃহত্তর।

Type-20: সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের ব্যবহারিক প্রয়োগ

Concept

(i) প্রথমে যে Function এর সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান বের করতে হবে তা দেওয়া না থাকলে শর্ত অনুসারে ফাংশনটি লিখতে হবে।

(ii) যদি একটি ফাংশনের মধ্যে 2 টি (বা তার বেশি) চলক থাকে তাহলে তাদের মধ্যে কোন একটি সম্পর্ক স্থাপন করতে হবে এবং দুইটি চলককে একটি চলকে রূপান্তর করতে হবে।

(iii) একটি চলকের ফাংশন আকারে প্রকাশের পর লঘুমান বা গুরুমানের শর্ত আরোপ করে প্রয়োজনীয় অজানা রাশির মানটি নির্ণয় করতে হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. দৃশ্যকল্প-২: দুটি সংখ্যার যোগফল 12। এদের একটি সংখ্যার ঘন এর সাথে অপর সংখ্যার গুণফল গরিষ্ঠ। [Din.B'21]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত সংখ্যা দুটি নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** মনে করি, সংখ্যা দুটি x ও $12 - x$

ধরি, $y = f(x) = x^3(12 - x)$

$f'(x) = 3x^2(12 - x) - x^3$

$\Rightarrow f''(x) = 6x(12 - x) - 3x^2 - 3x^2$

$= 6x(12 - x) - 6x^2 = 72x - 12x^2$

$F'(x) = 0$ হলে $36x^2 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x^2(9 - x) = 0$

$\therefore x = (0, 9)$

$f''(0) = 0$

$f''(9) = -324$

$\therefore$ সংখ্যা দুটি = (9, 3) (Ans.)

Educationblog24.com

MCQ প্রশ্নের জন্য এই অধ্যায়ের বিভিন্ন টাইপের তুলনামূলক গুরুত্ব:

গুরুত্ব	টাইপ	টাইপের নাম	যতবার প্রশ্ন এসেছে	যে বোর্ডে যে বছর এসেছে MCQ
	T-01	লিমিটের অস্তিত্বশীলতা কেন্দ্রিক ; বিচ্ছিন্নতা ও অবিচ্ছিন্নতা	-	-
০	T-02	বাস্তব মান বসিয়ে ($x = a + h$) সরাসরি লিমিটের মান নির্ণয়	01	Ctg.B'22
০	T-03	হরে/লবে বর্গমূল সংবলিত পদটির অনুবন্ধী দিয়ে লব ও হরকে গুণন করে লিমিট নির্ণয়	03	SB'22; BB'21; JB'17
০	T-04	$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ আকারের লিমিটের মান নির্ণয়	02	SB'23; JB'19
০০০	T-05	ত্রিকোণমিতিক, বিপরীত বৃত্তীয় ও বীজগাণিতিক ফাংশন এর লিমিট নির্ণয়	32	DB'23, 21; CB'23, 19; Din.B'23, 22, 21, 19; MB'23, 22; Mad.B'23; Ctg.B'22, 21, 19, 17; JB'22, 21; SB'21, 19; RB'19; BB'19, 17; All.B'18
০০০	T-06	সূচক, লগারিদম এবং ধারা সংক্রান্ত ফাংশনের লিমিট নির্ণয়	20	DB'23, 22, 21; RB'23, 19; Ctg.B'23, 22, 21, 19; SB'23, 21, 17; JB, Mad.B'23; CB, MB'22
০০	T-07	x এর মান অসীমের দিকে ধাবিত হলে লিমিটের মান নির্ণয়	09	RB'23, 22, 21; BB'23; Din.B, MB'21
০০০	T-08	Exponential Form	16	DB'23, 22, 19; CB'23; BB'23, 22, 21; Din.B'23, 21; MB'22; RB'21; Ctg.B, JB'21, 17;
	T-09	মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয়	-	-
০০	T-10	ফাংশনকে সরলীকরণ করে অন্তরীকরণ	03	BB'23; CB'21; Din.B'19
০০০	T-11	সংযোজিত ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় [CHAIN RULE]	11	Din.B'23; CB'23, 22, 19, 17; DB'22, 21, 17; BB'22, 21, 19, 17; JB'21, 19; SB'21
	T-12	দুইটি ফাংশনের সমন্বয়ের অন্তরীকরণ	-	-
০	T-13	বিপরীত অন্তরক সহগের সাহায্যে অন্তরীকরণ	02	MB'21; DB'19
০০	T-14	সূচক ফাংশন সমাধানে লগারিদম প্রয়োগ	05	SB'JB'23; RB'22; MB'21; Ctg.B'19
০	T-15	অব্যক্ত ফাংশন	02	RB'22; BB'21
০০০	T-16	পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে প্রমাণ ও মান নির্ণয় সংক্রান্ত	19	RB'23; 21; CB'23, 22, 21,19; MB, Mad.B'23; BB'22; Din.B'21, 17; JB'22, 19; DB, SB'19; All.B'18
০০০	T-17	ঢাল, স্পর্শক ও অভিলম্ব নির্ণয়	31	DB'23, 22; RB, Ctg.B'23, 22, 21; Din.B'23, 22, 21, 19, 17; Mad.B'23; MB'22, 21; SB'22, 19; JB'21, 19, 17; BB'21, 19; CB'21; All.B'18
০	T-18	গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয়	03	Din.B'22; CB, JB'21
০০	T-19	সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের ব্যবহারিক প্রয়োগ	05	JB'22; SB, MB'21; Din.B'19
০০	T-20	ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন	04	SB'22; JB'22, 21; BB'21

Educationblog24.com

বিগত বোর্ড পরীক্ষামূহের MCQ প্রশ্ন

01. $f(1) = 6, f'(1) = 3$ হলে, $x = 0$ বিন্দুতে $\frac{d}{dx}\{\log f(e^x)\}$ এর মান কোনটি? [DB'23]
(a) 2 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

02. $\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(e^x)\} =$ কত? [DB'23]
(a) $\frac{e^x}{1+e^{x^2}}$ (b) $\frac{1}{1+e^x}$ (c) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ (d) $\frac{1}{1+e^{x^2}}$

03. $y = \frac{1}{x^3}$ বক্ররেখার $(-1,-1)$ বিন্দুতে y_1 এর মান কোনটি? [DB, Ctg.B'23]
(a) -3 (b) -1 (c) 1 (d) 3

04. $\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{2x}-3}\right) =$ কত? [DB'23]
(a) $\sqrt{2}\left(e^{\sqrt{2x}-3}\right)$ (b) $\frac{\left(e^{\sqrt{2x}-3}\right)}{\sqrt{2}}$
(c) $\frac{e^{\sqrt{2x}-3}}{\sqrt{2x}}$ (d) $\frac{\sqrt{2}\left(e^{\sqrt{2x}-3}\right)}{\sqrt{x}}$

05. $y = \ln e^{x^2}$ হলে $y_2 =$? [RB'23]
(a) $2x$ (b) $e^{x^2}\ln e^{x^2}$
(c) 2 (d) e^{x^2}

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$3x^2 + y - 7 = 0$ একটি বক্ররেখা।

06. বক্ররেখাটির $(2,-5)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল কত? [RB'23]
(a) 12 (b) 0 (c) -10 (d) -12

07. বক্ররেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সমান্তরাল হবে? [RB'23]
(a) $(0,7)$ (b) $(0,-7)$ (c) $(6,0)$ (d) $(-6,0)$

08. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7x}{5x^2-3x}$ এর মান কত? [RB'23]
(a) $-\frac{7}{5}$ (b) $\frac{7}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{5}$

09. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-3x)}{3x} =$ কত? [Ctg.B'23]
(a) 1 (b) $\frac{1}{3}$ (c) -1 (d) -3

10. $y = x^{-\frac{1}{x}}$ হলে $\frac{dy}{dx} =$? [SB'23]
(a) $x^{-2-\frac{1}{x}}(1-\ln x)$ (b) $x^{\frac{1}{x}+2}(\ln x - 1)$
(c) $x^{-2+\frac{1}{x}}(1-\ln x)$ (d) $x^{-2-\frac{1}{x}}(\ln x - 1)$

11. $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$ এর মান কোনটি? [SB'23]
(a) ∞ (b) 0 (c) $\frac{9}{2}$ (d) 6

12. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{2x^2-4x+2}$ এর মান কত? [BB'23; DB'22; RB, Din.B'21]
(a) 0 (b) ∞ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

13. $y = \tan^{-1}\frac{4x}{1-4x^2}$ হলে $\frac{dy}{dx} =$কত? [BB'23]
(a) $\frac{2}{1+4x^2}$ (b) $\frac{2}{1-4x^2}$
(c) $\frac{4}{1-4x^2}$ (d) $\frac{4}{1+4x^2}$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

01. c	02. c	03. a	04. c	05. c	06. d	07. a	08. d	09. c	10. d	11. c	12. d	13. d

01. $x = 0$ হলে, $f(e^x) = f(e^0) = f(1)$
এবং $f'(e^x) = f'(e^0) = f'(1)$
এখন, $\frac{d}{dx}\{\log f(e^x)\} = \frac{1}{f(e^x)}\cdot f'(e^x) = \frac{1}{f(1)}\cdot f'(1)$
[এখানে e ভিত্তিক log অর্থাৎ ln কে বিবেচনা করে অন্তরীকরণ করা হয়েছে]
$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

02. $\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(e^x)\} = \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

03. $y = \frac{1}{x^3} \Rightarrow y_1 = -3\cdot x^{-4}$
$(-1,-1)$ বিন্দুতে $y_1 = -3\cdot(-1)^{-4} = -3$

04. $\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{2x}-3}\right) = e^{\sqrt{2x}-3}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x}-3\right)$
$= e^{\sqrt{2x}-3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}-0\right) = \frac{e^{\sqrt{2x}-3}}{\sqrt{2x}}$

05. $y = \ln e^{x^2} = x^2\times\ln e = x^2\times1 = x^2$
$\Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y_1 = 2x \Rightarrow y_2 = 2$

06. $3x^2 + y - 7 = 0 \Rightarrow 6x + \frac{dy}{dx} = 0$
$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -6x \therefore \frac{dy}{dx}|_{(2,-5)} = -6\times2 = -12$

07. $\frac{dy}{dx} = -6x$; স্পর্শকটি x অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$
অর্থাৎ, $-6x = 0 \Rightarrow x = 0$ বক্ররেখার সমীকরণে $x = 0$ বসিয়ে,
$3\times0 + y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7 \therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(0,7)$

08. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7x}{5x^2-3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{7}{x}\right)}{x^2\left(5-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{7}{x}}{5-\frac{3}{x}} = \frac{1-0}{5-0} = \frac{1}{5}$

09. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-3x)}{3x} = \lim_{3x\to0}\frac{\ln(1-3x)}{3x} = -1\left[\because\lim_{h\to0}\frac{\ln(1-h)}{h} = -1\right]$

10. $\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{x}}\right) = x^{-\frac{1}{x}}\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{x}\ln x\right)$
$= x^{-\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\ln x\right] = x^{-\frac{1}{x}}.x^{-2}[\ln x - 1] = x^{-\frac{1}{x}-2}[\ln x - 1]$
$= x^{-2-\frac{1}{x}}[\ln x - 1]$

11. $\lim_{x\to3}\frac{x^3-3^3}{x^2-3^2} = \frac{3}{2}\times3^{3-2} = \frac{9}{2}\left[\because\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n} = \frac{m}{n}a^{m-n}\right]$

12. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{2x^2-4x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{2+0+0}{2-0+0} = 1$
$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots a_2x^2+a_1x}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots b_2x^2+b_1x} = \frac{a_n}{b_n}$

13. $y = \tan^{-1}\frac{4x}{1-4x^2} = \tan^{-1}\frac{2(2x)}{1-(2x)^2}$
$= 2\tan^{-1}(2x) \therefore \frac{dy}{dx} = 2\times\frac{1}{1+(2x)^2}\times2 = \frac{4}{1+4x^2}$

Educationblog24.com

14. $\frac{d}{dx}(3^x) =$ কত? [BB'23,21; MB'22; RB, Din.B'21; DB'19; Ctg.B, JB'17]
(a) $x\,3^{x-1}$ (b) 3^x (c) $3\ln x$ (d) $3^x \ln 3$

15. $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots\ldots\ldots}}}$ হলে $\frac{dy}{dx} =$ কত? [BB'23]
(a) $\frac{1}{2y}$ (b) $\frac{1}{-2y}$ (c) $\frac{1}{2y-1}$ (d) $\frac{1}{1-2y}$

16. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5} =$ কত? [SB, JB'23]
(a) $\frac{1}{e}$ (b) e (c) e^5 (d) ∞

17. $\frac{d}{dx}(x^{2x}) =$ কত? [JB'23]
(a) $2x\cdot x^{2x-1}$ (b) $\frac{x^{2x+1}}{2x+1}$
(c) $x^x(1+\ln 2x)$ (d) $x^{2x}(2+2\ln x)$

18. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}\frac{x}{2}}{3x} =$ কত? [CB'23]
(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$

19. যদি $y = \sec x$ হয় তবে $y_2 + y$ এর মান কোনটি? [CB'23]
(a) 2 (b) 2y (c) $2y^2$ (d) $2y^3$

20. $x^y = e^{x+y}$ হলে $\frac{dy}{dx} =$? [CB'23]
(a) $\frac{x-y}{x(1-\ln x)}$ (b) $\frac{x-y}{x(\ln x-1)}$ (c) $\frac{y-x}{x(\ln x-1)}$ (d) $\frac{x-y}{\ln x-1}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = e^{-2x}$

21. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} =$ কত? [CB'23]
(a) −2 (b) 0 (c) 2 (d) ∞

22. $\frac{d}{dx}\{f(x).\cos x\} =$ কত? [CB'23]
(a) $-e^{-2x}(\sin x + 2\cos x)$
(b) $-e^{-2x}(\sin x - 2\cos x)$
(c) $e^{-2x}(\sin x + 2\cos x)$
(d) $e^{-2x}(\sin x - 2\cos x)$

23. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ এর মান কত? [Din.B'23]
(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{2}$

24. $\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$ এর মান কোনটি? [Din.B'23]
(a) $-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ (b) $-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$
(c) $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ (d) $\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$

25. $f(x) = x^2 - x - 2$ বক্ররেখার $(2,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কোনটি? [Din.B'23]
(a) 5 (b) 3 (c) −5 (d) −3

26. $e^{xy+3} = 2$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [Din.B'23]
(a) $\frac{-y}{x}$ (b) $\frac{-x}{y}$ (c) $\frac{\ln 2}{x}$ (d) $\frac{\ln 2}{xy}$

27. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x}$ এর মান নিচের কোনটি? [MB'23]
(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) $\frac{1}{2}$

28. $\sin^{-1} 2x$ এর অন্তরজ কত? [MB'23]
(a) $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ (c) $\frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}}$

29. $y = e^x$ হলে, y_4 কত? [MB'23]
(a) e^{4x} (b) e^{-x} (c) e^x (d) e^{-4x}

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

14. d	15. c	16. b	17. d	18. a	19. d	20. b	21. a	22. a	23. b	24. c	25. b	26. a	27. d	28. a	29. c

15. $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots\ldots\ldots}}}$
$\Rightarrow y^2 = x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots\ldots\ldots}} = x+y$
$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 1+\frac{dy}{dx} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-1}$

16. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5} = e\cdot 1^5 = e$

17. $\frac{d}{dx}(x^{2x}) = x^{2x}\frac{d}{dx}[2x(\ln x)]$
$= x^{2x}\left(2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{d}{dx}(2x)\cdot\ln x\right) = x^{2x}(2+2\ln x)$

18. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}\frac{x}{2}}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}\frac{x}{2}}{3\times 2\times\frac{x}{2}} = \lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\tan^{-1}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

19. $y = \sec x; y_1 = \sec x\tan x$
$y_2 = \sec x.\sec^2 x + \tan x.\sec x\tan x$
$= \sec^3 x + (\sec^2 x - 1)\sec x = y^3 + (y^2-1)y = 2y^3 - y$
$\Rightarrow y_2 = 2y^3 - y \Rightarrow y_2 + y = 2y^3$

20. $x^y = e^{x+y} \Rightarrow \ln x^y = \ln e^{x+y}$
$\Rightarrow y\ln x = (x+y) \Rightarrow \frac{y}{x} + \ln x.\frac{dy}{dx} = 1+\frac{dy}{dx}$
$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(1-\ln x) = \frac{y}{x} - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x(1-\ln x)} = \frac{x-y}{x(\ln x-1)}$

21. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{x} = \lim_{-2x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\times(-2)\left[\because \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1\right]$
$= 1\times(-2) = -2$

22. $\frac{d}{dx}(e^{-2x}\cos x) = e^{-2x}(-\sin x) + (-2e^{-2x})\cos x$
$= -e^{-2x}(\sin x + 2\cos x)$

23. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{4} = 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

24. $\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{1}{x}\right) = -\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\left(-\sin\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$

25. $f'(x) = 2x-1 \therefore (2,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= 2\times 2 - 1 = 3$

26. $e^{xy+3} = 2 \Rightarrow \ln(e^{xy+3}) = \ln 2$
$\Rightarrow xy + 3 = \ln 2 \Rightarrow x\cdot\frac{dy}{dx} + y = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

27. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x.\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$

28. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}2x) = \frac{\frac{d}{dx}(2x)}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

29. $y = e^x = y_1 = e^x \Rightarrow y_2 = e^x$
$\Rightarrow y_3 = e^x \Rightarrow y_4 = e^x$

Educationblog24.com

30. $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ হলে, $f'(x)$ এর মান কত? [MB'23]
(a) $2\tan\frac{x}{2}$ (b) $\sec^2\frac{x}{2}$
(c) $\tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}$ (d) $2\tan\frac{x}{2}.\sec^2\frac{x}{2}$

31. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta}$ এর মান কোনটি? [Mad.B'23]
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{180}$ (c) $\frac{90}{\pi}$ (d) $\frac{\pi}{90}$

32. $\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x})$ এর মান নিচের কোনটি? [Mad.B'23]
(a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (c) $\frac{1}{2x}$ (d) $2\sqrt{x}$

33. $y = \frac{3}{x^3}$ হলে, $(-3, 2)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ = কত? [Mad.B'23]
(a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{1}{9}$ (c) $-\frac{1}{9}$ (d) $-\frac{9}{16}$

34. $y = \frac{b}{x}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান কত? [Mad.B'23]
(a) $\frac{2b}{x^3}$ (b) $\frac{b}{x^3}$ (c) $\frac{2b}{x^2}$ (d) $\frac{b}{x^2}$

35. x এর সাপেক্ষে $e^{\sin^2 x}$ এর অন্তরজ কোনটি? [DB'22]
(a) $e^{\sin^2 x}\sin 2x$ (b) $2e^{\sin^2 x}\sin x$
(c) $-e^{\sin^2 x}\sin 2x$ (d) $e^{\sin^2 x}$

36. $y = ax(1-x)$ বক্ররেখাটির মূলবিন্দুতে ঢাল কত? [DB, MB'22; JB'17]
(a) $-a$ (b) a (c) $a-2ax$ (d) $a+2ax$

37. $\frac{d}{dx}(\log_{10} x)$ এর মান কোনটি? [DB'22, 21; RB'19; SB'17]
(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{x}\log_{10} e$
(c) $\frac{1}{x}\log_e 10$ (d) $\log_{10} e$

38. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = ?$ [DB'22]
(a) 0 (b) ∞ (c) 1 (d) -1

39. $y = x^3 - 8x^2 + 7$ বক্ররেখার (1,1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ কোনটি? [RB'22; Din.B'19]
(a) $13x - y + 12 = 0$ (b) $13x + y + 12 = 0$
(c) $x + 13y + 12 = 0$ (d) $x - 13y + 12 = 0$

40. $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [RB'22]
(a) 2 (b) $\sqrt{2}$ (c) 0 (d) 1

41. মূলবিন্দুতে $y = \sin^{-1}\frac{x}{3}$ এর স্পর্শকের সমীকরণ নিচের কোনটি? [RB'22]
(a) $x - 3y = 0$ (b) $x + 3y = 0$
(c) $3x + y = 0$ (d) $3x - y = 0$

42. $x^y = y^x$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [RB'22]
(a) $\frac{x(y\ln y - y)}{y(x\ln y - x)}$ (b) $\frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$
(c) $\frac{y(x\ln y + y)}{x(y\ln x + x)}$ (d) $\frac{x(y\ln x - y)}{y(x\ln y - x)}$

43. $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+7^{n+1}}{5^n-7^n}$ এর মান নিচের কোনটি? [RB'22]
(a) -7 (b) -5 (c) 5 (d) 7

44. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan bx}{\sin ax}$ এর মান কত? [Ctg.B'22]
(a) $\frac{a}{b}$ (b) ab (c) $\frac{b}{a}$ (d) ab^2

45. $\sec^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ এর অন্তরক সহগ কত? [Ctg.B'22]
(a) $\frac{1}{(x\sqrt{x^2-1})}$ (b) $\frac{-2}{(\sqrt{1-x^2})}$ (c) $\frac{1}{(1+x^2)}$ (d) $\frac{2}{(1+x^2)}$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

30. c	31. d	32. c	33. c	34. a	35. a	36. b	37. b	38. c	39. d	40. d	41. a	42. b	43. a	44. c	45. d

30. $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \tan^2\frac{x}{2}$
$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\tan^2\frac{x}{2}\right) = 2\tan\frac{x}{2}\frac{d}{dx}\left(\tan\frac{x}{2}\right) = 2\tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\frac{d}{2\,dx}\left(\frac{x}{2}\right)$
$\therefore f'(x) = \tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}$

31. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\left(2\times\theta\times\frac{\pi}{180^\circ}\right)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\frac{\theta\pi}{90^\circ}}{\theta\times\frac{\pi}{90^\circ}}\times\frac{\pi}{90^\circ} = 1\times\frac{\pi}{90^\circ} = \frac{\pi}{90^\circ}$

32. $\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$

33. $y = \frac{3}{x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3(-3)x^{-4} = \frac{-9}{x^4}$
$(-3,2)$ বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = \frac{-9}{(-3)^4} = \frac{-9}{81} = \frac{-1}{9}$

34. $y = \frac{b}{x} = bx^{-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -bx^{-2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2b}{x^3}$

35. $\frac{d}{dx}\left(e^{\sin^2 x}\right) = e^{\sin^2 x}.2\sin x.\cos x = e^{\sin^2 x}\sin 2x$

36. $y = ax(1-x) = ax - ax^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a - 2ax$
$\therefore$ মূলবিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx}|_{(0,0)} = a - 2a\cdot 0 = a$

37. $\frac{d}{dx}(\log_{10} x) = \frac{d}{dx}(\ln x\times\log_{10} e) = \frac{1}{x}\log_{10} e$

39. $y = x^3 - 8x^2 + 7; \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 16x$
$\therefore$ (1,1) বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল, $= -\frac{1}{\frac{dy}{dx}|_{(1,1)}} = -\frac{1}{3\cdot 1-16} = -\frac{1}{-13} = \frac{1}{13}$
$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ: $(y-1) = \frac{1}{13}(x-1) \Rightarrow 13y - x - 12 = 0$
$\Rightarrow x - 13y + 12 = 0$

40. $y = \tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2} = 2\tan^{-1}(t)$
$x = \sin^{-1}\frac{2t}{1+t^2} = 2\tan^{-1}(t) \therefore y = x \therefore \frac{dy}{dx} = 1$

41. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\cdot\frac{1}{3}$
$\therefore \frac{dy}{dx}|_{(1,1)} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0}{3}\right)^2}}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ: $y = \frac{1}{3}x \Rightarrow x - 3y = 0$

42. $x^y - y^x = 0$
$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{x^y\ln x - xy^{x-1}} = \frac{(yx^{y-1}-y^x\ln y)}{(xy^{x-1}-x^y\ln x)} = \frac{y^2x^y - xy\,y^x\ln y}{x^2y^x - xyx^y\ln x}$
$= \frac{y^2x^y - xy\,x^y\ln y}{x^2x^y - xy\,x^y\ln x}[y^x = x^y] = \frac{y(y-x\ln y)}{x(x-y\ln x)} = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$

43. $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+7^{n+1}}{5^n-7^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}\left(\frac{5^{n+1}}{7^{n+1}}+1\right)}{7^n\left(\frac{5^n}{7^n}-1\right)}$
$= \lim_{n\to\infty} 7\times\frac{\left\{\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}+1\right\}}{\left\{\left(\frac{5}{7}\right)^n-1\right\}} = 7\times\frac{(0+1)}{(0-1)} = -7$

44. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan bx}{\sin ax} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan bx}{bx}}{\frac{\sin ax}{ax}}\times\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$

45. $\sec^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\tan^{-1}x$
$\therefore$ অন্তরক সহগ $= \frac{2}{1+x^2}$

Educationblog24.com

46. $\cos(ax+b)$ এর n-তম অন্তরক সহগ কত? [Ctg.B'22]
(a) $(-1)^n a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$
(b) $a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$
(c) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$ (d) $a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$

47. $A(-1,0)$ বিন্দুটি $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ বক্ররেখার উপর হলে- [Ctg.B, SB'22]
(i) A বিন্দুতে ঢাল = 8
(ii) A বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $8x - y + 8 = 0$
(iii) A বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $x - 8y - 1 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

48. $f(x) = 5$ হলে $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = ?$ [Ctg.B'22]
(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) ∞

49. $x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের (2,4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [Ctg.B, Din.B'22; BB'21]
(a) $x + 2y + 10 = 0$ (b) $x + 2y = 10$
(c) $2x + y - 10 = 0$ (d) $2x - y - 10 = 0$

50. দূরত্ব, $s = 5t^3 - 9t^2 + 3t + 2$ হলে $t = 4$ সময় পর বেগ কত একক হবে? [SB'22; JB'21]
(a) 71 (b) 171 (c) 243 (d) 343

51. $f(x) = x^2 - 2x$ ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান হওয়ার শর্ত-[SB'22]
(a) $x > 1$ (b) $x < 2$ (c) $x < 1$ (d) $x < 2$

52. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ এর মান কত? [SB'22]
(a) $\frac{1}{2}$ (b) -2 (c) 2 (d) 1

53. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x} =$ কত? [BB'22]
(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$

54. $y = \sqrt{\sec 2x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ কোনটি? [BB'22]
(a) $y \tan 2x$ (b) $2 \tan 2x$
(c) $\frac{\tan 2x}{2}$ (d) $y \cot 2x$

55. $\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{x}{5}\right) =$ কত? [BB'22]
(a) $-\sin\frac{x}{5}$ (b) $\sin\frac{x}{5}$
(c) $-\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}$ (d) $\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}$

56. $y = \frac{2}{3x}$ হলে, $y_3 =$ কত? [BB'22; SB'19]
(a) $-\frac{4}{x^4}$ (b) $\frac{4}{x^4}$ (c) $4x^4$ (d) $-4x^4$

57. $y = \sin^2 x^2$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [JB'22]
(a) $2\sin x^2$ (b) $2x \sin x^2$
(c) $2x \sin 2x^2$ (d) $2x^2 \sin 2x^2$

58. $y = (x^2+1)\tan^{-1}x - x$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [JB'22]
(a) $2\tan^{-1}x$ (b) $2x\tan^{-1}x$
(c) $x\tan^{-1}x$ (d) $\frac{2x}{1+x^2}$

59. $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন ক্রমবর্ধমান হবে যদি- [JB'22; Din.B'21]
(a) $f'(a) = 0$ (b) $f'(a) < 0$
(c) $f'(a) \neq 0$ (d) $f'(a) > 0$

60. $f(x) = x(2a - x)$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি? [JB'22; MB'21]
(a) a (b) 2a (c) a^2 (d) $2a^2$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

46. d	47. a	48. b	49. b	50. b	51. c	52. d	53. c	54. a	55. c	56. a	57. c	58. b	59. d	60. c

47. $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$
$\therefore y_1 = 3x^2 - 6x - 1; y_{1(-1,0)} = 3 + 6 - 1 = 8$
$\therefore$ ঢাল $= 8 \therefore$ স্পর্শক: $y - 0 = 8(x+1) \therefore 8x - y + 8 = 0$
$\therefore$ অভিলম্ব: $y - 0 = -\frac{1}{8}(x+1)$
$\Rightarrow 8y = -x - 1 \Rightarrow x + 8y + 1 = 0$

48. $f(x) = 5; \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}(5) = 0$

49. $x^2 + y^2 = 20 \therefore 2x + 2yy_1 = 0$
$\Rightarrow 2\times 2 + 2\times 4 \times y_1 = 0 \therefore y_1 = -\frac{1}{2}$
$\therefore y - 4 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow 2y - 8 = -x + 2$
$\therefore x + 2y - 10 = 0 \therefore x + 2y = 10$

50. $s = 5t^3 - 9t^2 + 3t + 2 \therefore v = \frac{ds}{dt} = 15t^2 - 18t + 3$
$\therefore v_{t=4} = 15 \times 4^2 - 18 \times 4 + 3 = 171$

51. $f(x) = x^2 - 2x; f'(x) = 2x - 2$
ফাংশন ক্রমহ্রাসমান হওয়ার শর্ত, $f'(x) < 0 \Rightarrow 2x - 2 < 0$
$\Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow x < 1$

52. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}}{x}$
$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$

53. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{2} = \lim_{x\to 0} e^{2x} = 1$

54. $y = \sqrt{\sec 2x}$
$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\sec 2x}}(\sec 2x \cdot \tan 2x)\,2 = \sqrt{\sec 2x}\cdot\tan 2x = y\tan 2x$

56. $y = \frac{2}{3x} = \frac{2}{3}x^{-1}; y_1 = \frac{2}{3}(-1)x^{-2} = -\frac{2}{3}x^{-2}$
$y_2 = \frac{-2}{3}(-2)x^{-3} = \frac{4}{3}x^{-3}; y_3 = \frac{4}{3}(-3)x^{-4} = -\frac{4}{x^4}$

57. $\frac{d}{dx}[\sin^2(x^2)] = 2\sin(x^2)\cos(x^2).2x = 2x\sin(2x^2)$

58. $\frac{dy}{dx} = (x^2+1).\frac{1}{(1+x^2)} + (2x+0)\tan^{-1}x - 1$
$= 1 + 2x\tan^{-1}x - 1 = 2x\tan^{-1}x$

60. $f'(x) = 2a - 2x = 2(a - x)$
সর্বোচ্চ মানের জন্য, $2(a-x) = 0 \Rightarrow x = a; f''(x) = -2 < 0;$
$\therefore x = a$ বিন্দুতে সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।
$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= f(a) = a(2a - a) = a \times a = a^2$

Educationblog24.com

61. $y^2 = x$ হলে y_1 নিচের কোনটি? [CB'22]
(a) $2y$ (b) $2x$ (c) $2\sqrt{x}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

62. $y = \sin x$ হলে– [CB'22]
(i) $y_1 = \cos x$ (ii) $y_2 = -\sin x$
(iii) $y_3 + y_1 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = \ln(1-x)$ এবং $g(x) = \tan x^2$

63. $g(x)$ এর অন্তরজ কোনটি? [CB'22]
(a) $\sec^2 x^2$ (b) $2x\sec x^2$
(c) $2x\sec^2 x^2$ (d) $2\tan x\sec^2 x$

64. $f''(2)$ এর মান কত? [CB'22; RB'21]
(a) -2 (b) -1 (c) 1 (d) 2

65. $\frac{d}{dx}(\log_a 2x) =$ কত? [CB'22]
(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{x}\log_e a$
(c) $\frac{1}{x}\log_a e$ (d) $\frac{1}{2x}\log a$

66. $f(x) = 2x^2 - x + 3$ হলে– [Din.B'22]
(i) (1,4) বিন্দুতে ফাংশনটির স্পর্শকের ঢাল 3
(ii) $x < \frac{1}{4}$ এর জন্য ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান
(iii) $x = \frac{1}{4}$ এর জন্য ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

67. $\frac{d^n}{dx^n}(\sin 2x) =$? [Din.B'22]
(a) $2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)$ (b) $\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)$
(c) $2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} - 2x\right)$ (d) $\sin\left(\frac{n\pi}{2} - 2x\right)$

68. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{3x}$ এর মান কত? [Din.B'22; Ctg.B, SB, JB'21]
(a) 0 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) 1

69. $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x)$ এর মান কোনটি? [Din.B'22]
(a) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (b) $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (c) $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

70. $\lim_{x\to 0}\frac{x(\sin 2x+\sin 3x)}{\sin x}$ এর মান – [MB'22]
(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 1

71. $\lim_{x\to 0}\{2\ln(1+x) - \ln(1-x)\}$ এর মান – [MB'22]
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) ∞

72. $\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+3x+4}}$ এর মান কত? [DB'21]
(a) $-\infty$ (b) -1 (c) 1 (d) 4

73. $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos x} =$ কত? [DB'21]
(a) -2 (b) 0 (c) 2 (d) ∞

74. $\frac{d}{dx}(x^{-9}) =$ কত? [DB'21]
(a) $-9x^{-8}$ (b) $-\frac{1}{9}x^{-10}$ (c) $-9x^{-10}$ (d) $-\frac{1}{8}x^{-8}$

75. $\frac{d}{dx}\left(\cot(2\sqrt{x})\right) =$ কত? [DB'21]
(a) $\frac{-\text{cosec}^2(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ (b) $\frac{-\text{cosec}^2(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
(c) $-\text{cosec}^2(2\sqrt{x})$ (d) $\frac{\text{cosec}^2(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

61. d	62. d	63. c	64. b	65. c	66. a	67. a	68. c	69. b	70. c	71. a	72. b	73. a	74. c	75. b

61. $y^2 = x \Rightarrow 2yy_1 = 1 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2y} = \pm\frac{1}{2\sqrt{x}}$

62. $y = \sin x$
(i) $y = \sin x \therefore y_1 = \cos x$; (ii) $y_1 = \cos x \Rightarrow y_2 = -\sin x$
(iii) $y_2 = -\sin x \Rightarrow y_3 = -\cos x$ এবং $y_3 + y_1 = -\cos x + \cos x = 0$

63. $g(x) = \tan x^2 \Rightarrow g'(x) = (\sec^2 x^2)\frac{d(x^2)}{dx} \therefore g'(x) = 2x\sec^2 x^2$

64. $f(x) = \ln(1-x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x}(-1)$
$\Rightarrow f''(x) = (-1)(-1)\frac{-1}{(1-x)^2} \therefore f''(2) = \frac{-1}{(1-2)^2} = -1$

65. $f(x) = \log_a(2x) = \frac{\ln 2x}{\ln a} \therefore f'(x) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{2x}\times 2 = \frac{1}{x}\log_a e$

66. এখানে, $y = f(x) = 2x^2 - x + 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = 4x - 1$
(i) (1,4) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx}|_{(1,4)} = 4\cdot 1 - 1 = 3$
(ii) ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান হলে, $\frac{dy}{dx} < 0 \Rightarrow 4x - 1 < 0 \therefore x < \frac{1}{4}$
(iii) $\frac{dy}{dx} = 4x - 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 4 > 0$
এখন, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0 \therefore x = \frac{1}{4}$
$\therefore x = \frac{1}{4}$ এর জন্য সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে।

68. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}$
$= \frac{2}{3}\lim_{2x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{2x} = \frac{2}{3}\times 1 = \frac{2}{3}\left[\because \lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x} = 1\right]$

70. $\lim_{x\to 0}\frac{x(\sin 2x+\sin 3x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 2x}{\frac{\sin x}{x}}$
$= \frac{\lim_{x\to 0}(\sin 3x+\sin 2x)}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{0+0}{1} = 0$

71. $\lim_{x\to 0}\{\ln(1+x)^2 - \ln(1-x)\} = \lim_{x\to 0}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x} = \ln\frac{(1+0)^2}{1-0}$
$= \ln 1 = 0$

72. $\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+3x+4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}$
$= \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}}[\because x > 0] = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1+0+0}} = -1$

73. $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos x} = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x} = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$

75. $\frac{d}{dx}\left\{\cot(2\sqrt{x})\right\} = -\text{cosec}^2(2\sqrt{x})\times\frac{d}{dx}(2\sqrt{x})$
$= -\text{cosec}^2(2\sqrt{x})\times\frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{-\text{cosec}^2(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

Educationblog24.com

76. $\frac{d^{10}}{dx^{10}}(x^{10})$ এর মান কত? [RB'21]
(a) 10! (b) $10! \cdot x$ (c) $10! \cdot x^2$ (d) 0

77. $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}} = ?$ [RB'21]
(a) 0 (b) 1 (c) e (d) e^2

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$y = 3x(x-2)$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ।

78. বক্ররেখাটির (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত? [RB, Ctg.B, JB, MB'21]
(a) −12 (b) −6 (c) 6 (d) 12

79. মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [RB'21]
(a) $y + 6x = 0$ (b) $y - 6x = 0$
(c) $x + 6y = 0$ (d) $x - 6y = 0$

80. x-এর সাপেক্ষে ln ax এর অন্তরজ- [Ctg.B'21]
(a) $\frac{a}{x}$ (b) $\frac{x}{a}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $\frac{1}{ax}$

81. x-এর সাপেক্ষে $\tan^{-1} 3x$ এর অন্তরজ- [Ctg.B'21]
(a) $\frac{1}{1+3x^2}$ (b) $\frac{3}{1+3x^2}$ (c) $\frac{1}{1+9x^2}$ (d) $\frac{3}{1+9x^2}$

82. $y = e^{-\frac{3}{2}x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ = কত? [Ctg.B, RB'21]
(a) $-\frac{3}{2}e^{-\frac{3x}{2}}$ (b) $\frac{3}{2}e^{-\frac{3x}{2}}$ (c) $\frac{2}{3}e^{-\frac{3x}{2}}$ (d) $-\frac{2}{3}e^{-\frac{3x}{2}}$

83. $y = x^2 - 3x + 1$ বক্ররেখার (3, 1) বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল কত? [SB'21]
(a) 3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $-\frac{1}{3}$ (d) −3

84. $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ হলে- [SB'21]
(i) $x < -1$ এর জন্য f(x) একটি ক্রমহ্রাসমান ফাংশন
(ii) f(x) এর ক্ষুদ্রতম মান 6 (iii) $f''(0) = -2$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

85. $y = \sin x$ হলে $y_n = ?$ [SB'21]
(a) $\cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$ (b) $\cos\left(\frac{n\pi}{2} - x\right)$
(c) $\sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$ (d) $\sin\left(\frac{n\pi}{2} - x\right)$

86. $\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{1}{x}\right) = ?$ [SB'21]
(a) $-\frac{1}{x}$ (b) $-\frac{1}{x^2}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $\frac{1}{x^2}$

87. $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ হলে, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = কত? [BB'21]
(a) $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{-1}{4\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

88. যদি $x = a(\theta - \sin\theta)$ এবং $y = a(1 + \cos\theta)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [BB'21]
(a) $-\cot\frac{\theta}{2}$ (b) $-\sin\theta$ (c) $1 - \cos\theta$ (d) $-\tan\frac{\theta}{2}$

89. f(x) ফাংশন $x = b$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হলে- [BB'21; JB'17]
(i) f(b) সংজ্ঞায়িত হয় (ii) $\lim_{x\to b} f(x)$ বিদ্যমান থাকে না
(iii) $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$ হয়
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

90. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায়? [BB'21]
(a) $x > 1$ (b) $x < 2$
(c) $x > 3$ (d) $2 < x < 3$

91. $y = \ln(\ln x)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [JB'21; BB'19]
(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{\ln(x)}$ (c) $\frac{\ln(x)}{x}$ (d) $\frac{1}{x\ln(x)}$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

76. a	77. c	78. c	79. a	80. c	81. d	82. a	83. c	84. -	85. c	86. a	87. b	88. a	89. b	90. d	91. d

76. $y = x^{10}$; এখন, $y_n = {}^{10}P_n x^{10-n} [n \le 10]$
$n = 10$ হলে, $y_{10} = {}^{10}P_{10}x^{10-10} = {}^{10}P_{10} = 10!$

77. $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}} = e^{2x\frac{1}{2}} = e \left[\because \lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}+c} = e^{ab}\right]$

78. $\frac{dy}{dx} = 6x - 6$; (2, 0) বিন্দুতে ঢাল $= 6 \cdot 2 - 6 = 12 - 6 = 6$

79. (0, 0) বিন্দুতে ঢাল $= 6 \times 0 - 6 = -6$
∴ স্পর্শকের সমীকরণ: $y = -6x \Rightarrow 6x + y = 0$

80. $\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{1}{ax} \times a = \frac{1}{x}$

81. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} 3x) = \frac{1}{1+(3x)^2} \times 3 = \frac{3}{1+9x^2}$

82. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{3}{2}x}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{3}{2}x}$

83. $y_1 = 2x - 3$; (3, 1) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= 2.3 - 3 = 3$
∴ অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{1}{3}$

84. (সঠিক উত্তর নাই); $f(x) = -x^2 - 2x + 5 \Rightarrow f'(x) = -2x - 2$
ক্রমহ্রাসমান ফাংশন হতে হলে, $f'(x) < 0 \Rightarrow -2x - 2 < 0$
$\Rightarrow x + 1 > 0 \therefore x > -1$ [(i) ভুল] চরমমান প্রাপ্তির শর্তে, $f'(x) = 0$
$\Rightarrow -2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \therefore x = -1$
$f''(x) = -2 < 0$ অর্থাৎ কেবল সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান [(ii) ভুল]
$\therefore f''(0) = -2$ [(iii) সঠিক]

85. $\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$

86. $f(x) = \sin\frac{x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$
$\Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2} \therefore f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$

87. $x = a(\theta - \sin\theta) \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$; $y = a(1 + \cos\theta)$
$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = -a\sin\theta \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta} = -\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\cot\frac{\theta}{2}$

88. f(x) ফাংশন এ $x = b$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতার শর্ত $\lim_{x\to b^-} f(x)$
$= f(b) = \lim_{x\to b^+} f(x)$

89. $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$
শর্তমতে, $f'(x) < 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$
$\Rightarrow (x-3)(x-2) < 0 \therefore 2 < x < 3$ [Jump rule]

90. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x}$

Educationblog24.com

92. ক্রমবর্ধমান ফাংশনের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক? [JB'21]

(a) $\frac{dy}{dx} \geq 0$ (b) $\frac{dy}{dx} > 0$ (c) $\frac{dy}{dx} < 0$ (d) $\frac{dy}{dx} \leq 0$

93. $\frac{d}{dx}(a^{10})$ এর মান কোনটি? [JB'21]

(a) 0 (b) a^{10} (c) $10a^9$ (d) $a^{10} \ln a$

94. $\frac{d}{dx}(\cos 7x°) =$ কত? [JB'21]

(a) $\sin 7x°$ (b) $-7 \sin 7x°$

(c) $-\frac{7\pi}{180}\sin 7x°$ (d) $\frac{7\pi}{180}\sin 7x°$

95. x এর মান কত হলে $\frac{x}{\ln x}$ এর মান ক্ষুদ্রতম হবে? [JB'21]

(a) $\frac{1}{e}$ (b) e (c) $-\frac{1}{e}$ (d) $-e$

96. $\cos\sqrt{x}$ এর অন্তরক সহগ কোনটি? [CB'21; DB'17]

(a) $-\sin\sqrt{x}$ (b) $-\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(c) $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (d) $-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = x^2 - x$

97. ফাংশনটির কোন বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল? [CB'21; BB'19]

(a) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$ (b) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

98. ফাংশনটির চরম মান কত? [CB'21]

(a) $-\frac{1}{4}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

99. $y = \sin 2x$ হলে- [CB'21]

(i) $y_1 = 2\cos 2x$ (ii) $y_2 + 4y = 0$

(iii) $y_3 - 4y_1 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

100. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ এর মান কত? [CB'21]

(a) $2\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) 0

101. $y = x \ln x$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল তার ভুজ কত? [Din.B'21]

(a) e (b) $-e$ (c) $\frac{1}{e}$ (d) $-\frac{1}{e}$

102. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x°}$ এর মান নিচের কোনটি? [Din.B'21; RB'19]

(a) 0 (b) $\frac{180}{\pi}$ (c) $\frac{\pi}{180}$ (d) 1

103. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{5x^2-6} =$ কত? [Din.B'21]

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $-\frac{1}{6}$ (d) 0

104. $\frac{d^7}{dx^7}(5x^6)$ এর মান কত? [Din.B'21]

(a) 6! (b) 7! (c) 0 (d) 30

105. $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right) =?$ [MB'21]

(a) $\frac{2x}{1-x^2}$ (b) $\frac{2}{1+x^2}$ (c) 2 (d) $\frac{1-x^2}{1-x^2}$

106. $\frac{d}{dx}(x^{x^2}) =?$ [MB'21]

(a) $x^{x^2}2(1+\ln x)$ (b) $x^{x^2}2x(1+\ln x)$

(c) $x^{x^2}(x+2x\ln x)$ (d) $x^{x^2-1}.2x$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

92. b	93. a	94. c	95. b	96. d	97. c	98. a	99. a	100. b	101. c	102. b	103. d	104. c
105. b	106. c										

93. $a^{10} =$ ধ্রুবক $\therefore \frac{d}{dx}(a^{10}) = 0$

94. $\frac{d}{dx}\{\cos(7x°)\} = \frac{d}{dx}\left\{\cos\left(\frac{7\pi x}{180}\right)\right\}$

$= -\frac{7\pi}{180}\sin\frac{7\pi x}{180} = -\frac{7\pi}{180}\sin(7x°)$

95. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\ln x}\right) = \frac{\ln x\cdot 1 - x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0$

$\Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \ln x = \ln e \Rightarrow x = e$

96. $\frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x}) = -\sin\sqrt{x}.\frac{d(\sqrt{x})}{dx} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

97. শর্তমতে, $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \therefore y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \therefore$ বিন্দুটি $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

98. চরম মানের জন্য, $x = \frac{1}{2}$

আবার, $f''(x) = 2 > 0 \therefore$ চরমমান, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ যা লঘুমান

99. $y = \sin 2x;\ y_1 = 2\cos 2x$

$y_2 = -4\sin 2x \Rightarrow y_2 = -4y \Rightarrow y_2 + 4y = 0$

আবার, $y_3 - 4y_1 = -8\cos 2x - 8\cos 2x = -16\cos 2x \neq 0$

[(iii) সত্য নয়]

100. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\sqrt{2}\cdot\frac{\sin x}{x} = \sqrt{2}$

101. $y_1 = 1 + \ln x$

শর্তমতে, $0 = 1 + \ln x$

$\Rightarrow \ln x = -1 \therefore x = \frac{1}{e}$

102. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\frac{\pi x}{180}} = \lim_{x\to 0}\frac{180}{\pi}\times\frac{\frac{\pi x}{180}}{\sin\frac{\pi x}{180}} = \frac{180}{\pi}$

103. $\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(5-\frac{6}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{6}{x^2}} = 0$

104. কেননা 6 বার differentiate করলেই ধ্রুবক পদ চলে আসবে। তাই ৭ম অন্তরজ সহগ 0।

105. $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right) = \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x) = \frac{2}{1+x^2}$

106. $x^{x^2} = y$

$\frac{dy}{dx} = x^{x^2}\left[\frac{d}{dx}(x^2\ln x)\right] = x^{x^2}\left[\frac{x^2}{x}\cdot 1 + \ln x\cdot 2x\right] = x^{x^2}[x + 2x\ln x]$

Educationblog24.com

107. যদি $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ হয়- [MB'21]
(i) $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = l - m$
(ii) $\lim_{x\to a} g(x)f(x) = ml$
(iii) $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{l}{m}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

108. $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right) = ?$ [MB'21]
(a) ∞ (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

109. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x\cos 3x}$ এর মান- [DB'19]
(a) 3 (b) 2 (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

110. cos3x এর n- তম অন্তরজ সহগ- [DB'19]
(a) $3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$ (b) $3^n\cos 3x$
(c) $3^n\sin 3x$ (d) $3^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$

111. $y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [DB'19]
(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $-\frac{1}{1+x^2}$ (c) $\frac{1}{1+x}$ (d) $-\frac{1}{1+x}$

112. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 7x}$ এর মান কত? [Ctg.B'19]
(a) 0 (b) $\frac{4}{7}$ (c) $\frac{7}{4}$ (d) ∞

113. $y = e^{\sqrt{x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ = কত? [Ctg.B'19]
(a) $2e^{\sqrt{x}}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}.e^{\sqrt{x}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (d) $\frac{2\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}}$

114. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{x}$ = কত? [SB, BB'19]
(a) 0 (b) ∞ (c) m (d) $\frac{1}{m}$

115. $y = 2x^2 + 3x + 5$ বক্ররেখার (0, 1) বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল কত? [SB'19]
(a) −3 (b) $-\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) 3

116. $y = \frac{1}{x^2}$ হলে (−1, 0) বিন্দুতে y_1 এর মান কত? [BB'19]
(a) 2 (b) 1 (c) −1 (d) −2

117. যদি $f(x) = \sin x$ হয় তবে $f(\cos^{-1} x)$ এর অন্তরজ কোনটি? [BB'19]
(a) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

118. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$ এর মান কোনটি? [JB'19]
(a) −4 (b) 0 (c) 1 (d) 3

119. $y = \sin\sqrt{x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [JB'19]
(a) $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (b) $\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (c) $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (d) $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

120. $y = \frac{1}{x}$ হলে, y_2 এর মান- [JB'19]
(a) x^{-3} (b) x^3 (c) $2x^{-3}$ (d) $2x^3$

121. 'b' এর মান কত হলে $y = bx(1 - bx)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে? [JB'19]
(a) $-\sqrt{3}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$

122. নিচের কোনটি অসীম লিমিট? [CB'19; BB'17]
(a) $\lim_{x\to 0} \frac{2}{5x^3}$ (b) $\lim_{x\to 0} e^{-3x}$
(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{4^x}$ (d) $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{5x^4}$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

107. a	108. d	109. b	110. d	111. a	112. b	113. b	114. c	115. b	116. a	117. d	118. d	119. a
120. c	121. d	122. a										

107. (iii) এর ক্ষেত্রে $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to a} g(x)}{\lim_{x\to a} f(x)} = \frac{m}{l}$

108. $x \to \infty$ হলে, $\frac{2}{x} \to 0$
তাহলে, $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{\frac{2}{x}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\right)\cdot 2 = 2\cdot 1 = 2$

109. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x\cos 3x} = \left(\lim_{2x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right) 2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 3x} = 2$

110. $y = \cos(ax + b)$ হলে,
$y_n = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$ হয়। $\therefore \cos 3x = 3^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$

111. $y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1}(1) + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} x$
$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4} + \tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$

112. $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 4x}{4x}\times 4}{\frac{\tan 7x}{7x}\times 7} = \frac{4}{7}$

113. $\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

114. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{mx} \times m = m$

115. $\frac{dy}{dx} = y_1 = y_1 = 4x + 3$; (0, 1) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল
$= 4\times 0 + 3 = 3 \therefore$ অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{1}{3}$

116. $y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow y_1 = -2x^{-3}$; (−1,0) বিন্দুতে, $y_1 = -2\cdot(-1)^{-3} = 2$

117. $f(\cos^{-1} x) = \sin(\cos^{-1} x) = \sin(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2}$
$f'(\cos^{-1} x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

118. $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2^2+2\times 2+4}{2+2} = 3$

119. $y_1 = \cos\sqrt{x} \times \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \cos\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

120. $y = \frac{1}{x}$; $y_1 = -\frac{1}{x^2}$; $y_2 = 2x^{-3}$

121. $y = bx - b^2x^2 \therefore m = \frac{dy}{dx} = b - 2b^2x$
$\Rightarrow \tan 60° = b - 2b^2\times 0 \therefore b = \sqrt{3}$

122. $\lim_{x\to 0} \frac{2}{5x^3} = \frac{2}{5\times 0} = \infty$

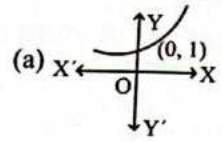
Educationblog24.com

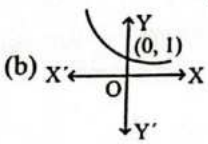
123. $\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$ এর মান কোনটি? [CB'19]

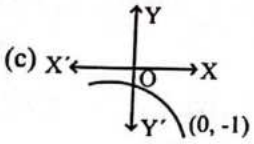
(a) $-\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (b) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

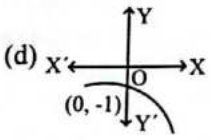
(c) $-x^{-2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (d) $x^{-2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

124. $m = 1$ ও $n = -1$ হলে, $y = me^{nx}$ এর লেখচিত্র কোনটি? [CB'19]

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

125. $y = ne^{-nx}$ হলে y_3 কোনটি? [CB'19]

(a) $-n^4e^{-nx}$ (b) $-n^3e^{-nx}$

(c) n^4e^{-nx} (d) ne^{-nx}

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$X, Y \subset \mathbb{R}$ এবং $f: X \to Y$ যেখানে $f(x) = \frac{2x-3}{4x+5}$

126. $\lim_{x\to\infty} f(x)$ এর মান কত? [Din.B'19]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{3}{5}$

127. $y = \tan^{-1}\frac{6x}{1-9x^2}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [Din.B'19]

(a) $\frac{6}{1+36x^2}$ (b) $\frac{6}{1+3x^2}$ (c) $\frac{2}{1+9x^2}$ (d) $\frac{6}{1+9x^2}$

128. $y = 4e^x + e^{-x}$ এর লঘুমান কত? [Din.B'19]

(a) -4 (b) 3 (c) 4 (d) 5

129. $\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}$ এর মান কোনটি? [All.B'18]

(a) -5 (b) -2 (c) 1 (d) 5

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y = ax(1-x)$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ।

130. বক্ররেখাটির মূল বিন্দুতে ঢাল কত? [All.B'18]

(a) $-a$ (b) a (c) $a - 2ax$ (d) $a + 2ax$

131. মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ- [All B'18]

(a) $ax - y = 0$ (b) $ax + y = 0$

(c) $x - ay = 0$ (d) $x + ay = 0$

132. $y = e^{-x}$ হলে y_5 কোনটি? [All.B'18]

(a) $-e^{-x}$ (b) e^{-x} (c) $-5e^{-x}$ (d) $5e^{-x}$

133. $f(x) = \sin 2x$ হলে- [DB'17]

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} = 1$ (ii) $f'(x) = 2\cos 2x$

(iii) $\int f(x)\,dx = \cos 2x + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

134. x-এর কোন মানের জন্য $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$ এর চরম মান পাওয়া যাবে? [RB'17]

(a) $-2, -3$ (b) $-2, 3$ (c) $2, -3$ (d) $2, 3$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = \cos x$

135. $\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)}{3x}$ = কত? [Ctg.B'17]

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) ∞

136. $f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)$ = কত? [Ctg.B'17]

(a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

137. $\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}-3^{-x}}{4\cdot 3^x+3^{-x}}$ এর মান কত? [SB'17]

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) 1 (d) ∞

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

123. d	124. b	125. a	126. a	127. d	128. c	129. c	130. b	131. a	132. a	133. a	134. d
135. c	136. d	137. b									

123. $\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{1}{x}\right) = -\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = x^{-2}\sin\frac{1}{x}$

124. $y = e^{-x}$; ইহা (0, 1) দ্বারা সিদ্ধ। $x \to \infty, y \to 0$

এবং $x \to -\infty,\ y \to \infty$

125. $y = ne^{-nx} \therefore y_1 = -n^2e^{-nx} \therefore y_2 = n^3e^{-nx} \therefore y_3 = -n^4e^{-nx}$

126. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{4x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{4+\frac{5}{x}} = \frac{2-0}{4+0} = \frac{1}{2}$

127. $y = \tan^{-1}\frac{2\times 3x}{1-(3x)^2} = 2\tan^{-1}3x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2\times 3}{1+(3x)^2} = \frac{6}{1+9x^2}$

128. $y_1 = 0 \Rightarrow 4e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow 4e^x = e^{-x} \therefore 4e^{2x} = 1$

$\therefore e^{2x} = \frac{1}{4} \therefore e^x = \pm\frac{1}{2}$ কিন্তু $e^x \neq -\frac{1}{2}$

$\therefore e^x = \frac{1}{2}; y_2 = 4e^x + e^{-x} = 4\times\frac{1}{2} + \frac{1}{1/2} = 4 > 0$

$\therefore$ লঘুমান $= 4\times\frac{1}{2} + \frac{1}{1/2} = 4$

9. $\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{5^x(1-5^{-2x})}{5^x(1+5^{-2x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-5^{-2x}}{1+5^{-2x}} = \frac{1}{1} = 1$

). $y = ax(1-x) \Rightarrow y = ax - ax^2 \therefore \frac{dy}{dx} = a - 2ax$, মূলবিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = a$

131. মূলবিন্দুতে স্পর্শক, $y = mx \Rightarrow ax - y = 0$

132. $y = e^{-x}, y_1 = -e^{-x}, y_2 = e^{-x}$

$y_3 = -e^{-x}, y_4 = e^{-x} \therefore y_5 = -e^{-x}$

Shortcut: $y = e^{-x}$ হলে $y_n = (-1)^n e^{-x} \therefore y_5 = (-1)^5 e^{-x} = -e^{-x}$

133. $\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$

134. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$

$f'(x) = x^2 - 5x + 6$; চরম মানের জন্য $f'(x) = 0$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0 \therefore x = 2, 3$

135. $\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)}{3x} = \lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 1$

136. $f(x) = \cos x; f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x; f'''(x) = \sin x \therefore f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

137. $\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}-3^{-x}}{4\cdot 3^x+3^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3^x\left(3-\frac{1}{9^x}\right)}{3^x\left(4+\frac{1}{9^x}\right)} = \frac{3}{4}$

Educationblog24.com

138. $\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x+\cos x}=$? [BB'17]
(a) 1 (b) 0
(c) $2\sin 2x$ (d) $2\cos 2x$

139. $x^2+x^2y+xy^2=0$ একটি- [BB'17]
(a) ব্যক্ত ফাংশন (b) অব্যক্ত ফাংশন
(c) পরামিতিক ফাংশন (d) সংযোজিত ফাংশন

140. x এর সাপেক্ষে $e^{\sin^2 x}$ এর অন্তরজ কোনটি? [CB'17]
(a) $e^{\sin^2 x}\sin 2x$ (b) $2e^{\sin^2 x}\sin 2x$
(c) $-e^{\sin^2 x}\sin 2x$ (d) $e^{\sin^2 x}$

141. (i) $\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e$ [Din.B'17]
(ii) $\int \sec^2\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}x+C$
(iii) $\int_a^b\frac{dx}{x}=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

142. $\frac{d^n}{dx^n}(x^n)$ এর মান কোনটি? [Din.B'17]
(a) n! (b) x (c) 1 (d) 0

143. $y=x^2-x+1$ বক্ররেখার (2,3) বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের ঢাল কোনটি? [Din.B'17]
(a) 3 (b) -3 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

138. b	139. b	140. a	141. b	142. a	143. d

138. $\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x+\cos x}=\frac{\sqrt{\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x}}{\sin x+\cos x}$
$=\frac{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}{\sin x+\cos x}=1\ \therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x+\cos x}\right)=\frac{d}{dx}(1)=0$

140. $\frac{d}{dx}(e^{\sin^2 x})=e^{\sin^2 x}\frac{d}{dx}(\sin^2 x)$
$=e^{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cos x=e^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x$

141. (i) $\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e$
(ii) $\int\sec^2\frac{x}{2}dx=2\tan\frac{x}{2}+c$; (iii) $\int_a^b\frac{dx}{x}=[\ln x]_a^b=\ln\frac{b}{a}$

142. $y=x^n; y_1=nx^{n-1}; y_2=n(n-1)x^{n-2}$
$\therefore y_n=n(n-1)\ldots\ldots\ldots 3.2.1.x^{n-n}=n!$

143. $y=x^2-x+1; \frac{dy}{dx}=2x-1\ \therefore\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,3)}=3\ \therefore$ অভিলম্বের ঢাল $=-\frac{1}{3}$

বিভিন্ন কলেজের টেস্ট পরীক্ষার MCQ প্রশ্ন

144. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan x-\cot x}{\tan x+\cot x}\right)=$ কত? [মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]
(a) $2\cos 2x$ (b) $2\sin 2x$
(c) $2\tan 2x$ (d) $\tan 2x$

145. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=$ কত? [মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ]
(a) $\frac{5}{2}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) $\frac{5}{4}$ (d) $\frac{5}{6}$

146. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}{\pi x}=$ কত? [ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ]
(a) -1 (b) 1 (c) 2 (d) π

147. $f(x)=\ln(\cos x)$ হলে- [ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ]
(i) $\frac{df}{dx}=-\tan x$ (ii) $f(0°)=0$
(iii) $e^{f(x)}=\cos x$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

148. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{3x}$ এর মান কত? [জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ]
(a) 8 (b) 3
(c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{1}{12}$

149. $x^2-y^2=7$ বক্ররেখার (4, −3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [পাবনা ক্যাডেট কলেজ]
(a) $4x+y=4$ (b) $4x-3y=8$
(c) $4x-y=4$ (d) $4x+3y=7$

150. $x^2+2ax+y^2=0$ বক্ররেখাটির কোন বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব? [পাবনা ক্যাডেট কলেজ]
(a) (0, 0) এবং (2a, 0) (b) (0, 0) এবং (−2a, 0)
(c) (a, 0) এবং (−2a, 0) (d) (a, 0) এবং (−a, 0)

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

144. b	145. c	146. c	147. d	148. c	149. d	150. b

144. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan x-\cot x}{\tan x+\cot x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan x-\frac{1}{\tan x}}{\tan x+\frac{1}{\tan x}}\right)$
$=\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan^2x-1}{\tan^2x+1}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}\right)=\frac{d}{dx}(-\cos 2x)=2\sin 2x$

145. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+2}=\frac{2+3}{2+2}=\frac{5}{4}$

146. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}{\pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi e^{\pi x}+\pi e^{-\pi x}}{\pi}$
[L'Hôpital Rule ব্যবহার করে] $=\frac{\pi+\pi}{\pi}=2$

148. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{3x}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}=\frac{4}{3}$

Educationblog24.com

151. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}(x+\pi)}{x^2+\pi x}$ এর মান নিম্নের কোনটি? [হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]
(a) $\frac{1}{\pi}$ (b) 1 (c) 0 (d) $-\frac{1}{\pi}$

152. $\frac{d}{d(t')}(t')$ নিম্নের কোনটি? [হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]
(a) $t'(1+\ln t)$ (b) $t'(1-\ln t)$
(c) 1 (d) 0

153. $y = x^{22}$ হলে, y_{22} এর মান কত? [নটর ডেম কলেজ, ঢাকা]
(a) 22! (b) 22! x (c) 21! (d) 21! x

154. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}5x}{\sin 2x} =$ কত? [ঢাকা কলেজ]
(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{5}{2}$

155. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ হলে, $\frac{dy}{dx}=$ কোনটি? [ঢাকা কলেজ]
(a) $-\sqrt{\frac{y}{x}}$ (b) $-\sqrt{\frac{x}{y}}$ (c) $\sqrt{\frac{y}{x}}$ (d) $\sqrt{\frac{x}{y}}$

156. λ এর মান কত হলে, $y=\lambda(x-1)(x+2)$ বক্ররেখার $x=1$ বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করবে? [ঢাকা কলেজ]
(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

157. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3}{3x^2-2} =$ কত? [আইডিয়াল স্কুল অ্যান্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]
(a) $-\frac{4}{3}$ (b) $-\frac{3}{4}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{4}{3}$

158. $y=\sin^{-1}\frac{6x}{1+9x^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx}=$ কত? [আইডিয়াল স্কুল অ্যান্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]
(a) $2\tan^{-1}3x$ (b) $\tan^{-1}3x$
(c) $\frac{6}{1+9x^2}$ (d) $\frac{2}{1+9x^2}$

159. যদি $y=(\sin^{-1}x)^2$ হয়, তাহলে, $(1-x^2)y_2-xy_1=$ কত? [ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ]
(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 1

160. $\ln x$ এর সাপেক্ষে x এর অন্তরজ সহগ কত? [আদমজী ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, ঢাকা]
(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{x^2}$ (c) x (d) $\frac{1}{2x}$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x)=e^{-x}$

161. $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-1}{x} =$ কত? [ঢাকা সিটি কলেজ]
(a) -2 (b) 2 (c) -1 (d) 1

162. $\frac{d}{dx}\{f(x)\sin x\} =?$ [ঢাকা সিটি কলেজ]
(a) $e^{-x}(\sin x-\cos x)$ (b) $e^{-x}(\cos x-\sin x)$
(c) $-e^{-x}(\sin x+\cos x)$ (d) $e^{-x}(\sin x+\cos x)$

163. $y=2x^2+3x+5$ বক্ররেখার $(0,1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল কত? [বীরশ্রেষ্ঠ মুন্সী আব্দুর রউফ পাবলিক কলেজ, ঢাকা]
(a) 3 (b) $-\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) 3

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2+y^2-2x-3=0$

164. $\frac{dy}{dx}=$ কত? [বীরশ্রেষ্ঠ নূর মোহাম্মদ পাবলিক কলেজ, ঢাকা]
(a) $\frac{1-x}{y}$ (b) $\frac{y}{1-x}$ (c) $\frac{5-2x}{2y}$ (d) $\frac{1-2x}{2y}$

165. বক্ররেখাটির উপর যে সব বিন্দুতে স্পর্শক y-অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক কোনটি? [বীরশ্রেষ্ঠ নূর মোহাম্মদ পাবলিক কলেজ, ঢাকা]
(a) $(3,0)$ (b) $(-1,0)$ (c) $(1,-2)$ (d) $(1,4)$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

151. d	152. c	153. a	154. d	155. a	156. a	157. d	158. c	159. b	160. c	161. a	162. b
163. b	164. a	165. c									

151. $\lim_{x\to-\pi}\frac{\tan^{-1}(x+\pi)}{x^2+\pi x}=\lim_{x\to-\pi}\frac{1}{(2x+\pi)\{(x+\pi)^2+1\}}=\frac{1}{(-2\pi+\pi).1}=-\frac{1}{\pi}$
[L'Hôpital Rule প্রয়োগ করে]

155. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$
$\therefore \frac{d}{dx}(\sqrt{x})+\frac{d}{dx}(\sqrt{y})=\frac{d}{dx}(5)$
$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$
$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$

156. $y=\lambda(x-1)(x+2)=\lambda(x^2+2x-x-2)=\lambda(x^2+x-2)$
$\therefore \frac{dy}{dx}=\lambda(2x+1)$
$\therefore x=1$ বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx}=\lambda(2.1+1)=3\lambda$
এখন, $\tan 60°=\frac{dy}{dx}$ বা, $\sqrt{3}=3\lambda$
$\therefore \lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

159. $y=(\sin^{-1}x)^2$ বা, $y_1=\frac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}y_1=2\sin^{-1}x$
$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}y_2-\frac{2xy_1}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$
$\therefore (1-x^2)y_2-xy_1=2$

160. $\frac{d(\ln x)}{dx}=\frac{1}{x}$ ..... (i)
$\frac{dx}{dx}=1$ ..... (ii)
(ii) ÷ (i) করে পাই, $\frac{dx}{d(\ln x)}=x$

161. $\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-2e^{-2x}}{1}=-2$
[L'Hôpital Rule প্রয়োগ করে]

165. যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক y-অক্ষের উপর লম্ব সে সকল বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=0$
সুতরাং, $\frac{1-x}{y}=0\Rightarrow 1-x=0\therefore x=1$
$x=1$ হলে, $1+y^2-2-3=0$
$\Rightarrow y^2=4\therefore y=\pm2$

Educationblog24.com

MCQ

পূর্ণমান: ৫০ সময়: ৫০ মিনিট

01. কোন ধ্রুবককে চলক x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে কী পাওয়া যায়?
(a) শূন্য (b) অসীম
(c) এক (d) অনির্দিষ্ট ধ্রুবক

02. কোনো ফাংশনের অন্তরীকরণ প্রকৃতপক্ষে কী নির্দেশ করে?
(a) ঢাল (b) ক্ষেত্রফল (c) সরলরেখা (d) আয়তন

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x = 2\sec t, y = 3\cos t$

03. $\frac{dx}{dt} = ?$
(a) $2x\sec t$ (b) $x\tan t$ (c) $2xy$ (d) $2x\sin t$

04. $\frac{dy}{dx} = ?$
(a) y^2 (b) $\frac{1}{2}x^2y$ (c) $\frac{-1}{6}y^2$ (d) xy^2

05. $\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{7}{2}}-a^{\frac{7}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}} =$ কত?
(a) $\frac{7}{2}a^2$ (b) $\frac{7}{3}a^2$ (c) $7a^{\frac{5}{2}}$ (d) $\frac{7}{2}a^{5/2}$

06. $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = ?$
(a) e (b) $\frac{1}{e}$ (c) $\sqrt{e}$ (d) e^2

07. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) = ?$
(a) $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) 0 (c) $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) 2

08. $y = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}$ হলে, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=4}$ এর মান-
(a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{20}$ (d) $\frac{2}{5}$

09. $\frac{d}{dx}\{e^{-x}.\sin x\} = ?$
(a) $e^{-x}(\sin x - \cos x)$ (b) $e^{-x}(\cos x - \sin x)$
(c) $-e^{-x}(\sin x + \cos x)$ (d) $e^{-x}(\sin x + \cos x)$

10. $\frac{d}{dx}(\sec\sqrt{x})$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) $\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}$ (b) $\sec\sqrt{x} + \tan\sqrt{x}$
(c) $\frac{1}{\sqrt{x}}\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}$

11. $x^2 + xy + y^2 = 1$ বক্ররেখাটির $\frac{dy}{dx}$ নিচের কোনটি?
(a) $\frac{x+2y}{2x+y}$ (b) $\frac{2x+y}{x+2y}$ (c) $\frac{-2x-y}{x+2y}$ (d) $\frac{-x-2y}{2x+y}$

12. $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$ এর সর্বনিম্ন মান কত?
(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) 1 (d) $-\frac{5}{4}$

13. $y = x^2$ এবং $z = x^3$ হলে $\frac{dz}{dy}$ নিচের কোনটি?
(a) $\frac{3}{2}x$ (b) $\frac{3}{2x}$ (c) $3x^2$ (d) $6x^3$

14. $y = \log_x a$ হলে y_1 কোনটি?
(a) $\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$ (b) $-\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $\frac{1}{x}\log a^e$

15. $y = 10^{\ln(\sin x)}$ এর $\frac{dy}{dx}$ -
(a) $y\cot x\ln 10$ (b) $\cot x\ln 10$
(c) $\sin x\ln 10$ (d) $\ln 10$

16. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ এর মান -
(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{4}$

17. $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}\right) = ?$
(a) $\frac{2}{(1+x^2)^2}$ (b) $\frac{2}{1+x^2}$
(c) $\frac{2x}{1+x^2}$ (d) $\cos^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

18. $x^y = e^{x+y}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ = কোনটি?
(a) $\frac{x-y}{x(\ln x-1)}$ (b) $\frac{x-y}{x(1-\ln x)}$ (c) $\frac{y-x}{x(\ln x-1)}$ (d) $\frac{x-y}{(\ln x-1)}$

19. $y = ax(1+x)$ হলে –
(i) $\frac{dy}{dx} = a + 2ax$ (ii) মূলবিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 3a$
(iii) মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y = ax$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

20. $y = \tan x$ হলে y_2 = কত?
(a) $\sec x\tan x$ (b) $2\sec^2 x\tan x$
(c) $2\sec x\tan^2 x$ (d) $\sec^2 x\tan x$

21. নিচের কোন অপেক্ষকটির চরম মান নেই?
(a) $y = \sin x$ (b) $y = e^x$
(c) $f(x) = \cos x$ (d) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$

22. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) 0 (b) 1 (c) -2 (d) ∞

23. $\frac{d}{dy}(y) = ?$
(a) 0 (b) 1 (c) y (d) y^2

24. যদি $x^n + y^n = a^n$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর সঠিক মান নিচের কোনটি?
(a) $\left(\frac{x}{y}\right)^n$ (b) $\left(-\frac{x}{y}\right)^n$ (c) $-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$ (d) $\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$

25. x এর সাপেক্ষে $\cos^2(3x)$ এর অন্তরজ নিচের কোনটি?
(a) $\sin 6x$ (b) $6\cos 3x$
(c) $2\sin 3x$ (d) $-3\sin 6x$

26. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{x}$ এর সঠিক মান নিচের কোনটি?
(a) 0 (b) 4 (c) 5 (d) ∞

27. $\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\sin\sqrt{x})\} = ?$
(a) $\frac{1}{1+\sin^2\sqrt{x}}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (d) $\frac{1}{1+\cos^2}$

Educationblog24.com

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = \sin x$

28. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2)}{x}$ এর মান কত?

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) ∞

29. $\frac{d}{dx}\{\ln(\sqrt{x})\}$ এর অন্তরক কত?

(a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (b) $\frac{1}{x}$ (c) $\frac{1}{2x}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$

30. $y = x^{\frac{1}{x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত?

(a) $x^{-2+\frac{1}{x}}(\ln x - 1)$ (b) $\frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(\ln x - 1)$

(c) $\frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(1 - \ln x)$ (d) $x^{-2+\frac{1}{x}}(1 - \ln x)$

31. ফাংশনের লঘুমান ও গুরুমানের জন্য-

(i) $f'(x) = 0$ (ii) $f''(x) = 0$ (iii) $\frac{dy}{dx} = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

32. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি?

(a) 1 (b) $\frac{2}{e}$ (c) e (d) $\frac{1}{e}$

33. $y = x^{\ln x}$ হলে, $\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) =$ কত?

(a) $\frac{2\ln(x)}{x}$ (b) $\frac{y}{x}(2\ln x)$ (c) $2\ln x$ (d) $2y\ln x$

34. $y = x^3 + 2$ সমীকরণের ক্ষেত্রে $\frac{d^3y}{dx^3} =$ কত?

(a) $6x$ (b) $3x^2$ (c) 2 (d) 6

35. $y = \ln b$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [b-একটি ধ্রুবক]

(a) $\frac{1}{b}$ (b) b (c) 0 (d) 1

36. $y = \sin(ax + b)$ হলে y_n এর মান কত?

(a) $a^n \sin(\frac{n\pi}{2} + ax + b)$

(b) $a^n \cos(\frac{n\pi}{2} + ax + b)$

(c) $(-1)^n . a^n \sin(ax + b)$

(d) $(-1)^n . a^n \cos(ax + b)$

37. x এর মান কত হলে $x(12 - 2x)^2$ এর গুরুমান পাওয়া যাবে?

(a) 6 (b) 2 (c) 12 (d) -2

38. $y = \frac{1}{x+a}$ হলে y_n এর মান কত?

(a) $\frac{(-1)^n n!}{x+a}$ (b) $\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

(c) $(x + a)^{n+1} n!$ (d) $(-1)^n (x + a)^{n+1} n!$

39. $s = 6 + 4t - t^2$ হলে 2 sec পর ত্বরণ-

(a) $4ms^{-2}$ (b) $-4ms^{-2}$

(c) $2ms^{-2}$ (d) $-2ms^{-2}$

40. $\cos^2 2x$ এর অন্তরক সহগ -

(a) $2\cos 2x \sin 2x$ (b) $2\sin 4x$

(c) $-2\sin 4x$ (d) $-\sin 4x$

41. $y = \sqrt{\sin 3x}$ হলে $\frac{dy}{dx} =$ কত?

(a) $\frac{\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}}$ (c) $\frac{3\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x}}$ (d) $\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$

42. $\frac{d}{dx}(2^{3x}) = ?$

(a) 32^{3x} (b) $2^{3x} \ln 2$

(c) $3.2^{3x} \ln 2$ (d) $3x \cdot 2^{3x-1}$

43. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{2x^2} =$ কত?

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{9}{4}$ (d) $\frac{4}{9}$

44. $y = \sin(\cos x)$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $\cos x . \cos(\sin x)$ (b) $\cos x . \sin(\cos x)$

(c) $-\sin x . \cos(\cos x)$ (d) $\cos(\sin x)$

45. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য কর:

(i) $\frac{d}{dx}(\cos x) = \sin x$

(ii) $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ হলে $\frac{f(x)+1}{f(x)-1} = 2x$

(iii) অবিচ্ছিন্নতার শর্ত $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

46. $f(x)$ একটি ফাংশন এবং a একটি নির্দিষ্ট অশূন্য সংখ্যা হলে রূপান্তরিত ফাংশন-

(i) $f(x) + a$ (ii) $f(x - a)$ (iii) $f(ax)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

47. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ?$

(a) $\log_e a$ (b) $a^x \log_e a$

(c) $\frac{1}{\log_e a}$ (d) $\frac{a}{\log_e a}$

48. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ হলে-

(i) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ (ii) $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

(iii) $x = 0$ তে $f(x)$ সংজ্ঞায়িত

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

49. $f(x) = \sin x$ ফাংশনটি কোন বিন্দুতে ক্রমবর্ধমান?

(a) $x = \frac{\pi}{4}$ (b) $x = \frac{\pi}{2}$ (c) π (d) $\frac{5\pi}{4}$

50. $\frac{d}{dx}(x^x)^x = ?$

(a) $x^{x^2} . x\{1 + 2\ln x\}$ (b) $x^2 x^{x^2-1}$

(c) $x^{x^2+1}(1 + \ln x)$ (d) $x(1 + 2\ln x)$

Educationblog24.com

CQ

পূর্ণমান: ৫০ | সময়: ২:৩৫ মিনিট

(যেকোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও:)

01. $P = e^x$ এবং $y = \sin(m \sin^{-1} x)$

(ক) $\frac{d}{dx}(e^{\tan^{-1}x})$ কত? 2

(খ) মূল নিয়ম P এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ 4

02. $\ln y = \tan^{-1} x$ একটি ফাংশন এবং একটি বক্ররেখার সমীকরণ $x^2 + 2ax + y^2 = 0$

(ক) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}\right)$ এর মান বের কর। 2

(খ) উদ্দীপকের ফাংশনটির ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$ 4

(গ) বক্ররেখাটির যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক X অক্ষের উপর লম্ব সে সকল বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

03. $f(x) = (x-3)(x-5)$ এবং $g(x) = x - 1$

(ক) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right]$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $y = f(x)$ বক্ররেখার $(0, 15)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $yf(x) - g(x) = 0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

04. $g(x) = 9e^x + 16e^{-x}$ এবং $y = \sqrt{2 + 5\sin x}$

(ক) x এর সাপেক্ষে $(1+x)^x$ এর অন্তরক নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 2$ 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $g(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান 24। 4

05. $f(x) = \ln x$

(ক) $2x^\circ \cos 3x^\circ$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর। 2

(খ) মূল নিয়মে দেখাও যে, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{1}{x}$ 4

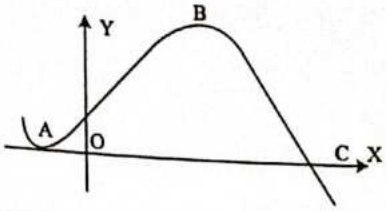
(গ) $y = a\cos\{f(x)\} + b\sin\{f(x)\}$ হলে, দেখাও যে, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ 4

06. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ এবং $g(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$

(ক) $x^3 \ln 3x$ এর দ্বিতীয় অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) $f(x)$ এর চরমমান নির্ণয় কর। 4

(গ) কোন ব্যবধিতে $g(x)$ ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান ও ক্রমবর্ধমান হবে তা নির্ণয় কর। 4

07. 

চিত্রের বক্ররেখাটি $y = (1+x)^2(3-x)$ এর লেখচিত্র।

(ক) $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) B বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

(গ) বক্ররেখাটির যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে তাদের ভুজ নির্ণয় কর। 4

08. দৃশ্যকল্প-১: a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট গোলকের মধ্যে একটি খাড়া বৃত্তাকার কোণক স্থাপন করা আছে।

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

(ক) যদি কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায়, তবে দেখাও যে এর ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি হার এর ব্যাসার্ধের সাথে সমানুপাতিক। 2

(খ) $f(x)$ লঘুমান নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-১ এর কোণকের আয়তন যদি বৃহত্তম হয় তবে এর উচ্চতা নির্ণয় কর। 4

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

MCQ

01. a	02. a	03. b	04. c	05. b	06. c	07. b	08. a	09. b	10. d	11. c	12. d	13. a	14. b	15. a
16. a	17. b	18. a	19. b	20. b	21. b	22. c	23. b	24. c	25. d	26. a	27. b	28. b	29. c	30. b
31. b	32. d	33. c	34. d	35. c	36. a	37. b	38. b	39. d	40. c	41. d	42. c	43. c	44. c	45. b
46. d	47. a	48. a	49. a	50. a										

Educationblog24.com

03. $\frac{dx}{dt} = 2\sec t.\tan t = x\tan t$

04. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3\sin t}{2\sec t\tan t} = \frac{-3\cos t}{2\sec t}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{2}\cos^2 t = \frac{-1}{6}y^2$

05. $\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{7}{2}}-a^{\frac{7}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\sqrt{x}\to\sqrt{a}}\frac{(\sqrt{x})^7-(\sqrt{a})^7}{(\sqrt{x})^3-(\sqrt{a})^3} = \lim_{y\to b}\frac{y^7-b^7}{y^3-b^3}$; $[\sqrt{x}=y, \sqrt{a}=b]$

$= \frac{\frac{d}{db}(b^7)}{\frac{d}{db}(b^3)} = \frac{7b^6}{3b^2} = \frac{7}{3}b^4 = \frac{7}{3}(\sqrt{a})^4 = \frac{7}{3}a^2$

06. $\lim_{x\to 0}\sqrt{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}} = \sqrt{\lim_{\frac{2}{x}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2}{x}}\right)^{\frac{2}{x}}} = \sqrt{e}$

07. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

08. $\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=4} = \frac{1}{\sqrt{4}(1+4)} = \frac{1}{2\times 5} = \frac{1}{10}$

09. $\frac{d}{dx}(e^{-x}\sin(x)) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}} = \frac{-2x-y}{x+2y}$

12. $f(x) = x^2 - 3x + 1$

$f'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ এবং $f''\left(-\frac{5}{4}\right) > 0$

$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ $\therefore -\frac{5}{4}$ হল সর্বনিম্ন মান।

13. $\frac{dZ}{dy} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}x$

14. $y = \log_x a = \ln a \times \frac{1}{\ln x}$

$Y_1 = \ln a \times \frac{d}{d(\ln(x))}\left(\frac{1}{\ln x}\right) \times \frac{d}{dx}(\ln x) = -\ln a \times \left(\frac{1}{\ln x}\right)^2 \times \frac{1}{x}$

15. $y = 10^{\ln(\sin x)} \Rightarrow \ln y = (\ln\sin x)\ln 10$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln 10\frac{1}{\sin x}.\cos x = \cot x \ln 10$ $\therefore \frac{dy}{dx} = y\cot x \ln 10$

16. L'hôpital rules থেকে পাই, $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1} = -\frac{1}{2}$

17. $\therefore \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x) = \frac{2}{1+x^2}$

18. $x^y = e^{x+y} \Rightarrow y\ln x = x + y$

$\Rightarrow \frac{y}{x} + \frac{dy}{dx}\ln x = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{y}{x}}{\ln x - 1} = \frac{x-y}{x(\ln x - 1)}$

19. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ax + ax^2) = a + 2ax$ $\therefore$ মূল বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = a$

মূল বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y = ax$

24. $\frac{-\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}} = -\left(\frac{nx^{n-1}}{ny^{n-1}}\right) = -\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$

30. $y = x^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = -\frac{1}{x}\ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-x\cdot\frac{1}{x}+\ln x}{x^2} = \frac{\ln x - 1}{x^2} = \frac{dy}{dx} = \frac{(\ln x - 1)}{x^{2+\frac{1}{x}}}$

32. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{-\ln x + 1}{x^2} = 0$ $\therefore \ln x = 1$ $\therefore x = e$ $\therefore \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{e}$

33. $y = x^{\ln x}$; $\ln y = (\ln x)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\ln x.\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x}{y}\frac{dx}{dy} = 2\ln x$

35. $\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln b)}{db}\times\frac{db}{dx} = \frac{1}{b}\times\frac{db}{dx} = 0$

36. $y = \sin(ax + b)$

$y_1 = a\sin\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right)$

$y_2 = a^2\sin\left(ax + b + \frac{2\pi}{2}\right)$

$y_3 = a^3\sin\left(ax + b + \frac{3\pi}{2}\right)$

$y_4 = a^4\sin\left(ax + b + \frac{4\pi}{2}\right)$

$y_n = a^n\sin\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$

37. $(12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = 0 \Rightarrow x = 2, 6$

2^{nd} derivative নিয়ে, $\frac{d^2y}{dx^2} = -4(12 - 2x) - 48 + 16x = 24x - 84$

$x = 2$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = -36 < 0$ $\therefore x = 2$ এর জন্য গুরুমান পাওয়া যাবে।

41. $y = \sqrt{\sin 3x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}}.3\cos 3x$

49. $f'(x) = \cos x; f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; f'(\pi) = -1 < 0, f'\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} < 0$

50. $y = (x^x)^x = x^{x^2} \Rightarrow \ln y = x^2\ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x + 2x\ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{x^2}.x\{1 + 2\ln x\}$

CQ

01. (ক) $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$ (খ) e^x

02. (ক) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ (গ) $x = 0, x = -2a$

03. (ক) $\lim_{x\to 0}\tan\frac{x}{2} = 0$

(খ) $8x + y - 15 = 0$

(গ) স্পর্শক: $y = \frac{1}{8}(x - 1)$ ও অভিলম্ব: $y = -8(x - 1)$

04. (ক) $(1 + x)^x\left\{\frac{x}{1+x} + \ln(1 + x)\right\}$

05. (ক) $\frac{\pi}{90}\cos\left(\frac{\pi x}{60}\right) - \frac{\pi}{60}\frac{\pi x}{90}\sin\left(\frac{\pi x}{60}\right)$

06. (ক) $5x + 6x\ln(3x)$ (খ) গুরুমান = 38 ও লঘুমান = 37

(গ) $(1, 5)$ ক্রমবর্ধমান ও $(-\alpha, 1) \cup (5, \alpha)$ ক্রমহ্রাসমান

07. (ক) $\frac{dy}{dx} = \cot\frac{\theta}{2}$ (খ) $\left(\frac{5}{3}, \frac{256}{27}\right)$ (গ) $\frac{2\pm\sqrt{76}}{6}$

08. (খ) e (গ) $h = \frac{4a}{3}$

> আমি বিশেষ বুদ্ধিমান নই, আমি কেবল প্রশ্ন নিয়ে দীর্ঘ সময় লেগে থাকতে পারি!
>
> - Albert Einstein

Educationblog24.com

অধ্যায় ১০

যোগজীকরণ

সৃজনশীল (ক), (খ) ও (গ) নং প্রশ্নের জন্য এ অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	টাইপের নাম	যতবার প্রশ্ন এসেছে			যে বোর্ডে যে বছর এসেছে
			ক	খ	গ	CQ
০০	T-01	যোগজীকরণের সাধারণ সূত্র $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ব্যবহার করে	04	01	-	RB'21, 17; CB'21; Ctg.B'19
০	T-02	$\int f(ax+b)\,dx$ আকৃতির	01	-	-	Din.B'23
০	T-03	প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে 'z' ধরে যোগজীকরণ	03	-	-	Ctg.B'22, CB'22, 21
০	T-04	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ এবং $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx$ আকৃতির	02	-	-	BB'23; SB'17
০০	T-05	Exponential আকৃতির	04	-	-	Ctg.B, CB'23; RB'21; BB'17
০	T-06	$\int \sin ax \cdot \cos bx\,dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx\,dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx\,dx$ আকৃতি	02	-	-	JB'23; Ctg.B'21
০	T-07	$\int \frac{dx}{1+\sin ax}$, $\int \frac{dx}{1-\sin ax}$, $\int \frac{dx}{1+\cos ax}$, $\int \frac{dx}{1-\cos ax}$ আকারের	01	01	-	CB'23; JB'19
০	T-08	$\int \sin^m dx$; $\int \cos^m dx$; $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$ আকারের	01	-	-	SB'21
০০০	T-09	$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ আকারের যেখানে a, b, c যেকোনো ধ্রুবসংখ্যা	04	02	03	DB'23, 19; SB'22, 21; RB, Ctg.B'21; BB'21, 17; MB'21
০	T-10	$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$, $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ আকারের; যেখানে a, b, c, p, q যেকোন ধ্রুবক	-	01	-	SB'21
০	T-11	$\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$ $\int (ax+b)\sqrt{cx+d}\,dx$ $\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}$ আকারের	-	01	01	Ctg.B'22; BB'21
০০০	T-12	অংশক্রমে সমাকলন বা $\int uv\,dx$ সংক্রান্ত	10	08	01	DB'23, 22, 21, 17; BB'23; JB'23, 17; MB'23, 22, 21; Ctg.B'21, 19, 17; CB'21, 17; RB, SB'19; Din.B'19, 17
	T-13	অংশক্রমে সমাকলনের ক্ষেত্রে: $\int e^{ax}\{af(x)+f'(x)\}\,dx$ আকৃতি	-	-	-	
০০০	T-14	আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সমাকলন	-	10	04	RB'23, 19, 18; SB'23, 22; JB'23, 19; Din.B'22, 21; BB'22, 18; MB'21; CB'19, 18; Ctg.B'18; DB'17
০০০	T-15	নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য এর প্রয়োগ ও সাধারণ সমস্যা	10	26	09	RB, JB'23, 22, 21, 17; Ctg.B'23, 22, 21; SB'23, 21, 19, 17; BB, Din.B'23, 22, 21, 19, 17; MB'23, 22, 21; DB'22, 21, 19; CB'22, 21, 19, 17;
০০০	T-16	নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত	01	-	42	DB'23, 21, 19, 17; RB'23, 22, 19, 18, 17; Ctg.B'23, 22, 21, 19, 18; SB'23, 21, 19, 17; BB, CB'23, 22, 21, 19, 18, 17; JB'23, 22, 21; Din.B'23, 22, 19, 17; MB'23, 22, 21
০০	T-17	বিবিধ	01	02	01	Ctg.B'23; DB, Din.B'21; BB'19

Educationblog24.com

CQ প্রশ্ন ও সমাধান (ক, খ ও গ)

T-01: যোগজীকরণের সাধারণ সূত্র $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ব্যবহার করে

01. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\ (n \neq -1)$
02. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
03. $\int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx} + c$
04. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
05. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
06. $\int \cos x dx = \sin x + c$
07. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
08. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$
09. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$
10. $\int \operatorname{cosec} x\ \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$
11. $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + c = -\ln|\cos x| + c$
12. $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$
    $= -\ln|\operatorname{cosec} x + \cot x| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$
13. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$
    $= \ln\left|\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right\}\right| + c = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + c$
14. $\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + c$
15. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$
16. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$
17. $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$
    $= -\ln|\operatorname{cosec} x| + c$
18. $\int e^{mx}\{mf(x) + f'(x)\}\,dx = e^{mx} f(x) + c$
19. $\int uv dx = u\int v dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(u)\int v dx\right\}dx$
20. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$ নির্ণয় কর। [CB'21]

(ক) **Sol^n:** $\int \sqrt{1 - \sin 2x}dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}dx$
$= \int(\sin x - \cos x)\,dx$
$= -\cos x - \sin x + c$
$= -(\cos x + \sin x) + c$ **(Ans.)**

02. (ক) $\int\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$ নির্ণয় কর। [RB'17]

(ক) **Sol^n:** $\int\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$
$= \int\left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)dx$
$= \int(1 + \sin x)dx = (x - \cos x) + c$ **(Ans.)**

T-02: $\int f(ax + b)\,dx$ আকৃতির

Concept

$ax + b = z$ ধরতে হবে [সেক্ষেত্রে, $dx = \frac{dz}{a}$ হবে]

Shortcut: $\int f(ax + b)dx = \frac{(ax+b) \text{ এর সাপেক্ষে } f(ax+b) \text{ এর যোগজীকরণ}}{x \text{ এর সহগ}} = \frac{(ax+b) \text{ এর সাপেক্ষে } f(ax+b) \text{ এর যোগজীকরণ}}{a}$

সতর্কতা: শুধুমাত্র $ax + b$ থাকলেই (বা, x এর ঘাত 1 হলেই) এই Shortcut ব্যবহার করে যোগজীকরণ করা যাবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $\int(4 - 3x)^{\frac{3}{2}}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [Din.B'23]

(ক) **Sol^n:** $\int(4 - 3x)^{\frac{3}{2}}dx$

ধরি, $u = 4 - 3x, du = -3\,dx \Rightarrow \frac{du}{-3} = dx$

$= \int u^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{du}{-3} = \frac{-1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{-1}{3}\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c$
$= \frac{-1}{3} \times \frac{2}{5}(4 - 3x)^{\frac{5}{2}} + c$
$= \frac{-2}{15}(4 - 3x)^{\frac{5}{2}} + c$

02. $f(x) = \sin x - \cos x$ [RB'21]

(ক) $\int\{f(x)\}^2 dx$ নির্ণয় কর।

(খ) $\int\frac{1 - f(x)}{1 + f(x)}dx$ নির্ণয় কর।

Educationblog24.com

(খ) Sol^n: $\int f(x)^2\,dx = \int(\sin x - \cos x)^2 dx$
$= \int\{(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin x\cos x\}\,dx$
$= \int(1 - \sin 2x)dx = x + \frac{1}{2}\cos 2x + c$ (Ans.)

(গ) Sol^n: $\int \frac{1-f(x)}{1+f(x)}dx = \int \frac{1-(\sin x-\cos x)}{1+(\sin x-\cos x)}dx$
$= \int \frac{\{1-(\sin x-\cos x)\}^2 dx}{\{1+(\sin x-\cos x)\}\{1-(\sin x-\cos x)\}}$
$= \int \frac{1-2(\sin x-\cos x)+(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin 2x)}{1-(\sin x-\cos x)^2}dx$
$= \int \frac{2-\sin 2x-2\sin x+2\cos x}{(1-1)+\sin 2x}dx$
$= \int\{2\operatorname{cosec} 2x - 1 - \sec x - \operatorname{cosec} x\}\,dx$
$= \ln(\tan x) - x - \ln|\sec x + \tan x| - \ln\tan\frac{x}{2} + c$ (Ans.)

03. (ক) $\int(\cot^2 7x + \sec^2 9x)dx$ নির্ণয় কর। [Ctg.B'19]

(ক) Sol^n: $\int(\cot^2 7x + \sec^2 9x)\,dx$
$= \int(\operatorname{cosec}^2 7x - 1 + \sec^2 9x)dx$
$= -\frac{1}{7}\cot 7x - x + \frac{1}{9}\tan 9x + c$ (Ans.)

T-03: প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে 'z' ধরে যোগজীকরণ

Concept

(i) $\int f(x)\,f'(x)dx = \frac{\{f(x)\}^2}{2} + c$

(ii) $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ হলে, $\int f(g(x))\,g'(x)dx = F(g(x)) + c$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt{1-\cot^2 x}}dx$ নির্ণয় কর। [Ctg.B'22]

(ক) Sol^n: $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt{1-\cot^2 x}}dx$

[ধরি, $\cot x = z \therefore -\operatorname{cosec}^2 x\,dx = dz$]

$= \int \frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}} = \cos^{-1}(z) + c = \cos^{-1}(\cot x) + c$ (Ans.)

02. $h(x) = \tan x$ [CB'22]

(ক) $\int \frac{h'(x)}{(1+h(x))^2}dx$ নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: $h(x) = \tan x \therefore h'(x) = \sec^2 x$

$\therefore \int \frac{h'(x)}{(1+h(x))^2}dx = \int \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}dx$

ধরি, $1 + \tan x = z \Rightarrow \sec^2 x\,dx = dz$

$= \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + c = -\frac{1}{1+\tan x} + c$ (Ans.)

03. (ক) যোগজ নির্ণয় কর: $\int xe^{x^2}dx$. [CB'21]

(ক) Sol^n: ধরি, $x^2 = z \Rightarrow 2xdx = dz$

$\therefore \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{e^z}{2} + c = \frac{e^{x^2}}{2} + c$ (Ans.)

T-04: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ এবং $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$ আকৃতির

Concept

(i) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$

(ii) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$ নির্ণয় কর। [BB'23]

(ক) Sol^n: $\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$
$= \frac{1}{2}\int \frac{(\cos x+\sin x)+(-\sin x+\cos x)}{\cos x+\sin x}dx$
$= \frac{1}{2}\int\left(1 + \frac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\right)dx$
$= \frac{1}{2}\int 1\cdot dx + \frac{1}{2}\int \frac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}dx$
$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln|\cos x + \sin x| + c$

$\left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c\right]$

02. (ক) $\int \frac{xdx}{(x-1)}$ নির্ণয় কর। [SB'17]

(ক) Sol^n: $\int \frac{xdx}{x-1} = \int \frac{x-1+1}{x-1}dx$
$= \int dx + \int \frac{dx}{x-1}$
$= x + \ln|x-1| + c$ (Ans.)

Educationblog24.com

T-05: Exponential আকৃতির

Concept

Case	লব ও হরকে যা দিয়ে গুণ করতে হবে	ধরি
$\int \frac{dx}{a+be^{mx}}$	e^{-mx}	$e^{-mx} = z$
$\int \frac{dx}{a+be^{-mx}}$	e^{mx}	$e^{mx} = z$
$\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$	e^{mx} অথবা e^{-mx}	$e^{mx} = z$ অথবা $e^{-mx} = z$ লব ও হরকে যেটা দিয়ে গুণ করবো তাকে z ধরতে হবে।

➤ **Special Case:** $\int \frac{e^{mx}+e^{nx}}{e^{px}+e^{qx}} dx$ যেখানে, $m - n = p - q$

লব ও হর থেকে $e^{(m-p)x}$ বা $e^{(n-q)x}$ common নিতে হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $\int \frac{1}{e^{-x}+1} dx$ নির্ণয় কর। [Ctg.B'23]

(ক) **Sol^n:** $\int \frac{1}{e^{-x}+1} dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

ধরি $z = 1 + e^x \Rightarrow dz = e^x dx = \int \frac{dz}{z}$

$= \ln|z| + c = \ln|1 + e^x| + c$ **(Ans.)**

02. (ক) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ এর যোগজ নির্ণয় কর। [CB'23]

(ক) **Sol^n:** $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{dx}{e^{-x}(e^{2x}+1)}$

$= \int \frac{e^x dx}{(1+e^{2x})} = \int \frac{dz}{1+z^2}$ [ধরি, $z = e^x \therefore dz = e^x dx$]

$= \tan^{-1} z + c = \tan^{-1}(e^x) + c$ **(Ans.)**

03. (ক) $\int \frac{5e^{2x}}{1+e^{4x}} dx$ নির্ণয় কর। [RB'21]

(ক) **Sol^n:** $\int \frac{5e^{2x}}{1+e^{4x}} dx = \int \frac{\frac{5}{2}du}{1+u^2}$ [ধরি, $e^{2x} = u$]

$= \frac{5}{2} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{5}{2} \tan^{-1} u + c = \frac{5}{2} \tan^{-1}(e^{2x}) + c$ **(Ans.)**

04. (ক) $\int \frac{dx}{1+e^x}$ নির্ণয় কর। [BB'17]

(ক) **Sol^n:** ধরি, $1 + e^{-x} = z \therefore e^{-x} dx = -dz$

$\int \frac{Dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}(1+e^x)} dx = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$

$= \int \frac{-dz}{z} = -\ln|z| + c = -\ln|1 + e^{-x}| + c$ **(Ans.)**

T-06: $\int \sin ax . \cos bx\, dx$, $\int \sin ax . \sin bx\, dx$, $\int \cos ax . \cos bx\, dx$ আকৃতি

Concept

$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$; $2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$;

$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$

$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$ সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $\int \sin 9x \sin 11x\, dx$ নির্ণয় কর। [JB'23]

(ক) **Sol^n:** $\int \sin 9x \sin 11x\, dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin 9x \sin 11x\, dx$

$= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 20x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 20x}{20} \right) + c$

$= \frac{1}{40} (10 \sin 2x - \sin 20x) + c$ **(Ans.)**

02. (ক) সমাকলন কর: $\int 5 \cos 4x \sin 3x\, dx$ [Ctg.B'21]

ক) **Sol^n:** $\int 5 \cos 4x \sin 3x\, dx = \frac{5}{2} \int (2 \sin 3x \cos 4x) dx$

$= \frac{5}{2} \int (\sin 7x - \sin x) dx = \frac{5}{2} \int \sin 7x\, dx - \frac{5}{2} \int \sin x\, dx$

$= \frac{-5}{14} \cos 7x + \frac{5}{2} \cos x + c$ **(Ans.)**

03. (ক) $\int \sin 5x \sin 3x\, dx$ নির্ণয় কর।

[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ]

(ক) **Sol^n:** $\int \sin 5x \sin 3x\, dx$

$= \frac{1}{2} \int 2 \sin 5x \sin 3x\, dx$

$= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 8x}{8} \right) + c$

$= \frac{1}{16} (4 \sin 2x - \sin 8x) + c$ **(Ans.)**

Educationblog24.com

T-07: $\int \frac{dx}{1+\sin ax}, \int \frac{dx}{1-\sin ax}, \int \frac{dx}{1+\cos ax}, \int \frac{dx}{1-\cos ax}$ আকারের

Concept

$\int \frac{dx}{1+\sin ax}, \int \frac{dx}{1-\sin ax}$ এর জন্য প্রদত্ত যোগজের হরের বিপরীত রাশি দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে সরলীকরণ করতে হবে।

ব্যবহৃত সূত্র: $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$, $\int \sec x \cdot \tan x\, dx = \sec x + c$

$\int \text{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$, $\int \text{cosec} x \cdot \cot x\, dx = -\text{cosec}\, x + c$

$\int \frac{dx}{1+\cos ax}, \int \frac{dx}{1-\cos ax}$ এর জন্য, $1 + \cos ax = 2\cos^2 \frac{ax}{2}$; $1 - \cos ax = 2\sin^2 \frac{ax}{2}$ সূত্র ব্যবহার করে সমাধান করা যাবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $P(x) = \cos x$ [CB'23]

(খ) উদ্দীপকের আলোকে $\int \frac{d\theta}{1-\{P(\frac{\pi}{2}-\theta)\}}$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) **Soln:** দেওয়া আছে, $P(x) = \cos x$

$\therefore \int \frac{d\theta}{1-\{P(\frac{\pi}{2}-\theta)\}} = \int \frac{d\theta}{1-\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \int \frac{d\theta}{1-\sin\theta}$

$= \int \frac{(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} d\theta = \int \frac{1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta} d\theta$

$= \int \frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} d\theta = \int (\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta)\, d\theta$

$= \tan\theta + \sec\theta + c$ **(Ans.)**

02. (ক) $\int \frac{1}{1+\cos 4x} dx$ নির্ণয় কর। [JB'19]

(ক) **Soln:** $\int \frac{1}{1+\cos 4x} dx = \int \frac{1}{2\cos^2 2x} dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 2x\, dx$

$= \frac{1}{4}\int \sec^2 2x\, d(2x) = \frac{1}{4}\tan 2x + c$ **(Ans.)**

03. (ক) $\int \frac{1}{(1+\sin x)} dx$ নির্ণয় কর।

[আদমজী ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, ঢাকা]

(ক) **Soln:** $\int \frac{1}{1+\sin x} dx = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx$

$= \int (\sec^2 x - \tan x \sec x)\, dx = \tan x - \sec x + c$ **(Ans.)**

T-08: $\int \sin^m x\, dx; \int \cos^m x\, dx; \int \sin^m x.\cos^n x dx$ আকারের

Concept

$\int \sin^m x\, dx, \int \cos^m x\, dx$ আকারের জন্য

(i) m বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হলে $\sin^m x$ এর জন্য $\cos x = z$ ধরতে হবে এবং $\sin^m x$ কে $(\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} . \sin x$ আকারে প্রকাশ করতে হবে এবং $\cos^m x$ এর জন্য $\sin x = z$ ধরতে হবে এবং $\cos^m x$ কে $(\cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} . \cos x$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।

(ii) m জোড় পূর্ণসংখ্যা হলে $2\sin^2 x / 2\cos^2 x$ আকারে পরিণত করতে হবে ও $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ এবং $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ এর সূত্র ব্যবহার করতে হবে।

$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx$ আকারের জন্য

- **Case-01: m ও n উভয়ই বিজোড় হলে**

যেকোনটি অর্থাৎ sinx বা cosx = z ধরতে হবে তবে যার power বড় সেটা = z ধরলে সুবিধাজনক।

- **Case-02: m ও n এর যে কোনো একটি জোড় এবং অপরটি বিজোড়**

যার power জোড় সেটা = z ধরতে হবে।

- **Case-03: m ও n উভয়ই জোড়**

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ এবং $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ সূত্রের সাহায্যে একঘাত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে পরিবর্তিত করতে হবে। [এবং প্রয়োজনে, $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$; $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ সূত্রদ্বয় ব্যবহার করতে হবে]

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. [SB'21]

(ক) $\int \sin^{11} x \cos x\, dx$ নির্ণয় কর।

(ক) **Soln:** ধরি, $\sin x = z \therefore \cos x\, dx = dz \therefore \int \sin^{11} x \cos x\, dx = \int z^{11} dz = \frac{1}{12} z^{12} + c = \frac{1}{12}\sin^{12} x + c$ **(Ans.)**

Educationblog24.com

T-09: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ আকারের যেখানে a, b, c যেকোনো ধ্রুবসংখ্যা

Concept

$ax^2 + bx + c$ কে দুটি বর্গের সমষ্টি বা অন্তররূপে প্রকাশ করতে হবে

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left\{x^2+2.\frac{b}{2a}.x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\} = a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left\{\sqrt{\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2}\right\}^2\right]$$ নিম্নরূপে এবং এরপর $\int \frac{dx}{x^2-a^2}, \int \frac{dx}{x^2+a^2}, \int \frac{dx}{a^2-x^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx, \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx, \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$ সূত্রের সাহায্যে বাকিটুকু করতে হবে।

যেখানে,

01. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$ [ধরি, $x = a\tan\theta$]

02. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

03. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

04. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}+c$ [ধরি, $x = a\sin\theta$]

05. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|\sqrt{x^2+a^2}+x\right|+c$ [ধরি, $x = a\tan\theta$]

06. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\sqrt{x^2-a^2}+x\right|+c$ [ধরি, $x = a\sec\theta$]

07. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$ [ধরি, $x = a\tan\theta$]

08. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

09. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$ [ধরি, $x = a\sec\theta$]

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $\int \frac{1}{a^2+4x^2}dx$ নির্ণয় কর। [DB'23]

(ক) **Sol^n:** $\int \frac{1}{a^2+4x^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{a^2}{4}+x^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2}$

$= \frac{1}{4}\times\frac{2}{a}\tan^{-1}\frac{2x}{a}+c = \frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{2x}{a}+c$ **(Ans.)**

02. (ক) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ নির্ণয় কর। [SB'22]

(ক) **Sol^n:** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1^2-(2x)^2}}$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1}$ $\left[\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}2x$ **(Ans.)**

03. $f(x) = x^2$ [RB'21]

(খ) $\int \left[\frac{1+\{f(x)\}^2}{1+f(x)}+\frac{1}{f(x)+\sqrt{f(x)}+1}\right]dx$ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** $\int \left\{\frac{1+\{f(x)\}^2}{1+f(x)}+\frac{1}{f(x)+\sqrt{f(x)}+1}\right\}dx$

$= \int\left\{\frac{1+x^4}{1+x^2}+\frac{1}{x^2+x+1}\right\}dx$

$= \int \left\{\frac{x^4-1+2}{1+x^2}+\frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\right\}dx$

$= \int \left\{\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right\}dx$

$= \int (x^2-1)\,dx + 2\int \frac{dx}{1+x^2}+\int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \frac{x^3}{3}-x+2\tan^{-1}x+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c$

$= \frac{x^3}{3}-x+2\tan^{-1}x+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$ **(Ans.)**

04. $g(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ [Ctg.B'21]

(গ) $\int g(x)\,dx$ নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** $g(x) = \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{x^2-4+4}{x^2-4} = 1-\frac{4}{4-x^2}$

$\therefore \int g(x)\,dx = \int\left(1-\frac{4}{4-x^2}\right)dx$

$= \int dx - 4\int \frac{1}{2^2-x^2}dx$

$= x-4\times\frac{1}{2.2}\ln\left|\frac{2-x}{2+x}\right|+c = x-\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c$

Educationblog24.com

$h(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. [SB'21]

(খ) প্রমাণ কর যে, $\int h(x)\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$.

Sol^n: ধরি, $x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\,d\theta$

$\therefore \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$= \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta = \int a^2\cos^2\theta\,d\theta$

$= \frac{a^2}{2}\int 2\cos^2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta$

$= \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{4}\sin 2\theta = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\times 2\times\frac{x}{a}\times\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\times\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$

$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$

$\therefore \int h(x)\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$ (প্রমাণিত)

$f(x) = \sin x$ [BB'21]

(খ) $\int \frac{d\theta}{1+3\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^2}$ নির্ণয় কর।

Sol^n: $\int \frac{d\theta}{1+3\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^2} = \int \frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta} = \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{1+\tan^2\theta+3}$

$= \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{4+\tan^2\theta} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{2}\right) + c$ (Ans.)

(ক) সমাকলন কর: $\int \frac{dx}{4f(\cos^{-1}x^2)+9}$. [DB'19]

Sol^n: $\int \frac{dx}{4\cos(\cos^{-1}x^2)+9} = \int \frac{dx}{4x^2+9}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + c$ (Ans.)

08. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{12-16x^2}}$ এবং $\Psi(x) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)$ [BB'17]

(গ) উদ্দীপকের আলোকে নির্ণয় কর:

(i) $\int \varphi(x)dx$; (ii) $\int \Psi(x)dx$.

(গ) Sol^n: (i) $\int \varphi(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{12-16x^2}}$ [মান বসিয়ে]

$= \int \frac{1}{\sqrt{16\left(\frac{12}{16}-x^2\right)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)^2-(x)^2}}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c = \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}} + c$

(ii) $\int \Psi(x)dx = \int \tan^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)dx$ [মান বসিয়ে]

$= \int \tan^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)\cdot 1\cdot dx$

$= \tan^{-1}\frac{x}{5}\int 1\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{x}{5}\right)\int 1dx\right\}dx$

$= x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \int\left\{\frac{1}{1+\frac{x^2}{25}}\cdot\frac{1}{5}x\right\}dx$

$= x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \int\left(\frac{1}{\frac{25+x^2}{25}}\cdot\frac{x}{5}\right)dx$

$= x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \int\left(\frac{25}{25+x^2}\cdot\frac{x}{5}\right)dx$

$= x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \int\frac{5x}{25+x^2}\,dx$

$= x\tan^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{5}{2}\int\frac{2x}{25+x^2}\,dx$

$= x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \frac{5}{2}\int\frac{dz}{z}$ [ধরি, $25+x^2 = z \therefore 2xdx = dz$]

$= x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \frac{5}{2}\ln|z| + c$

$= x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \frac{5}{2}\ln|25+x^2| + c$ (Ans.)

নিজে করো

(ক) $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-36}}$ নির্ণয় কর। [MB'21] [Ans: $\frac{1}{5}\ln\left|\sqrt{x^2-\frac{36}{25}}+x\right| + c$]

T-10: $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$, $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ আকারের; যেখানে a, b, c, p, q যেকোন ধ্রুবক

Concept

$px+q = m\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) + n$ আকারে লিখতে হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

$f(x) = 3-2x, g(x) = 3+4x-4x^2$ [SB'21]

(খ) $\int \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}dx$ নির্ণয় কর।

Sol^n: $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{g(x)}} = \int \frac{3-2x}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx = \int \frac{1-2x+2}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx = \int \frac{1-2x}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx + \int \frac{2dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$

$= \frac{1}{4}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{z} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{-4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{4-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{z} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{3+4x-4x^2} + \sin^{-1}\left(x-\frac{1}{2}\right) + c$ (Ans.)

Educationblog24.com

T-11: $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$; $\int (ax+b)\sqrt{cx+d}\,dx$; $\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}$ আকারের

Concept

এ ধরণের প্রশ্নের ক্ষেত্রে $cx + d = z^2$ ধরতে হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $P(x) = 2x + 5$. [Ctg.B'22]

(গ) $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{P(x)}}$ নির্ণয় কর।

(গ) Soln: দেওয়া আছে, $P(x) = 2x + 5$

$$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{P(x)}} = \int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{2x+5}}$$

[ধরি, $2x + 5 = z^2 \Rightarrow 2x = z^2 - 5 \Rightarrow x = \frac{z^2}{2} - \frac{5}{2} \Rightarrow dx = zdz$]

$$= \int \frac{z\,dz}{(z^2-5+1)z} = \int \frac{dz}{z^2-4} = \int \frac{dz}{z^2-2^2} = \int \frac{dz}{(z+2)(z-2)}$$

এখন, $\frac{1}{(z+2)(z-2)} \equiv \frac{1}{-4(z+2)} + \frac{1}{4(z-2)}$

$$= \int \left(\frac{1}{4(z-2)} - \frac{1}{4(z+2)}\right) dz = \frac{1}{4}\int \frac{1}{z-2}\,dz - \frac{1}{4}\int \frac{1}{z+2}\,dz$$

$$= \frac{1}{4}\ln|z-2| - \frac{1}{4}\ln|z+2| + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{z-2}{z+2} + c \left[z = \sqrt{2x+5}\right] \text{ (Ans.)}$$

নিজে করো

02. $P(x) = 4x + 3$ [BB'21]

(খ) $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{p(x)}}$ নির্ণয় কর।

[Ans: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4x+3}-1}{\sqrt{4x+3}+1}\right| + c$]

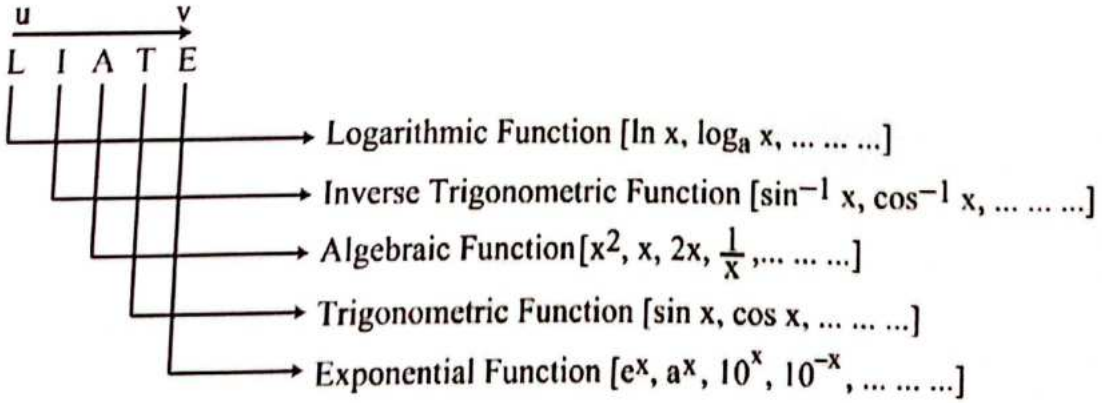
T-12: অংশক্রমে সমাকলন বা $\int uv\,dx$ সংক্রান্ত

Concept

অংশায়ন সূত্র: $\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int \left(\frac{du}{dx}\int v\,dx\right)dx$

অন্তরীকরণের ক্ষেত্রে যেকোনো ফাংশনকে u অথবা v ধরে অন্তরজ নির্ণয় করা যায়।

কিন্তু, যোগজীকরণের ক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে v কে যোগজীকরণ করা হচ্ছে এবং u কে অন্তরীকরণ করা হচ্ছে (অংশায়ন সূত্রে)। তাই অংশায়ন সূত্র ব্যবহারের ক্ষেত্রে যে ফাংশনকে সহজে যোগজীকরণ করা যায় তাকে 'v' এবং অপর ফাংশনকে 'u' ধরতে হয়। এক্ষেত্রে ১ম ফাংশন (u) কাকে ধরতে হবে তার জন্য LIATE শব্দটি ব্যবহার করা হয় এবং এটা দ্বারা সহজে u এবং v নির্ণয় করা যায়।



দুইটি ফাংশনের মধ্যে LIATE এর ক্রম অনুসারে যে ফাংশনের ক্রম আগে তাকে 'u' এবং যার ক্রম পরে তাকে v ধরতে হয়।

Educationblog24.com

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \sin^{-1} x$. [DB'23]
(খ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $\int x f(x)dx$. নির্ণয় কর।
Sol^n: দেওয়া আছে, $\int(x) = \sin^{-1} x$
$\therefore \int x \sin^{-1} x\,dx = \sin^{-1} x \int x\,dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)\int x\,dx\right\}dx$
$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$
$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$
$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} x - \sin^{-1} x\right\} + c$
$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\sin^{-1} x + c$ (Ans.)

(ক) $\int x \ln x\,dx$ নির্ণয় কর। [JB'23]
Sol^n: $\int x \ln x\,dx = \ln x \int x\,dx - \int \frac{d}{dx}(\ln x)\int x\,dx\,dx$
$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2}dx$
$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + c$ (Ans.)

(ক) $\int e^{\ln(\ln x)}dx$ নির্ণয় কর। [BB'23]
Sol^n: $\int e^{\ln(\ln x)}dx = \int \ln x\,dx$
$= x\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int 1\cdot dx$
$= x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$ (Ans.)

(ক) $\int \tan^{-1} x\,dx$ নির্ণয় কর। [MB'23]
Sol^n: $\int \tan^{-1} x\,dx = \int 1\cdot\tan^{-1} x\,dx$
$= x\tan^{-1} x - \int\left[\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)\cdot\int dx\right]dx$
$= x\tan^{-1} x - \int \frac{1}{1+x^2}.x\,dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$
$= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$ (Ans.)

দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \sin x$ [DB'22]
দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = e^x$.
(খ) $\int g(x) f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$ এর যোগজ নির্ণয় কর।
Sol^n: ধরি, $I = \int g(x) f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$
$= \int e^x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int e^x \cos x\,dx$
$= \cos x \int e^x dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\cos x)\int e^x dx\right]dx$
$= \cos x \cdot e^x - \int -\sin x\,.e^x dx$
$= e^x \cos x + \int \sin x\, e^x dx$
$= e^x \cos x + \sin x \int e^x dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\sin x)\cdot\int e^x dx\right]dx$
সুতরাং, $I = e^x\cos x + e^x \sin x - \int \cos x\cdot e^x dx + c_1$
$\Rightarrow I = e^x(\cos x + \sin x) - I + c_1$
$\Rightarrow 2I = e^x(\sin x + \cos x) + c_1$
$\Rightarrow I = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + \frac{c_1}{2}$
$\therefore I = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c\left[\text{যেখানে, } c = \frac{c_1}{2}\right]$ (Ans.)

06. (ক) $\int \sin^{-1} x\,dx$ নির্ণয় কর। [MB'22]
(ক) Sol^n: $\int \sin^{-1} x\,dx = \sin^{-1} x \int dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)\int dx\right]dx$
$= x\sin^{-1} x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x\,dx$ | ধরি, $1-x^2 = z$
$= x\sin^{-1} x - \int \frac{1}{\sqrt{z}}\cdot\left(-\frac{dz}{2}\right)$ | $\Rightarrow -2x dx = dz$
$= x\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$ | $\therefore x dx = -\frac{dz}{2}$
$= x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$ (Ans.)

07. (ক) $\int \ln x^3\,dx$ নির্ণয় কর। [DB'21]
(ক) Sol^n: $\int \ln x^3\,dx = \ln x^3 \int dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\ln x^3)\int dx\right]dx$
$= x\ln x^3 - \int \frac{3}{x}\times x\,dx = x\ln x^3 - 3x + c$ (Ans.)

08. $f(x) = x\sin^{-1} x^2$
(খ) যোগজ নির্ণয় কর: $\int f(x)\,dx$ [Ctg.B'21]
(খ) Sol^n: $f(x) = x\sin^{-1} x^2 \therefore \int f(x)\,dx = \int x\sin^{-1} x^2\,dx$
$= \int \frac{1}{2}\sin^{-1} u\,du$ | ধরি, $x^2 = u \therefore 2x\,dx = du$
$= \frac{1}{2}\left[\sin^{-1} u\int du - \int\left\{\frac{d}{du}(\sin^{-1} u)\int du\right\}du\right]$
$= \frac{1}{2}\left[u\sin^{-1} u - \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du\right]$
$= \frac{1}{2}\left[u\sin^{-1} u + \int \frac{dv}{2\sqrt{v}}\right]$ Let, $1-u^2 = v$
$\Rightarrow -2u du = dv = \frac{1}{2}\left[u\sin^{-1} u + \sqrt{v}\right] + c$
$= \frac{1}{2}\left[x^2\sin^{-1} x^2 + \sqrt{1-x^4}\right] + c$ (Ans.)

09. $h(\theta) = \tan^{-1}\theta$ [CB'21]
(খ) $\int x\,h(x)dx$ নির্ণয় কর।
(খ) Sol^n: $\int x h(x)\,dx = \int x\tan^{-1} x\,dx$
$= \tan^{-1} x\int x dx - \int\left(\frac{1}{1+x^2}\int x dx\right)dx$
$= \frac{x^2\tan^{-1} x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$
$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$
$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + c$ (Ans.)

10. $f(x) = x$ ..... (i) [Ctg.B'19]
$g(x) = \cos^{-1} x^2$ ..... (ii)
(খ) যোগজ নির্ণয় কর: $\int f(x)g(x)dx$.
(খ) Sol^n: ধরি, $x^2 = z \Rightarrow 2x\,dx = dz$; $x dx = \frac{dz}{2}$
$\int f(x)g(x)dx = \int x\cos^{-1} x^2 dx$
$\therefore \frac{1}{2}\int \cos^{-1} z\,dz = \frac{1}{2}\int 1\cdot\cos^{-1} z\,dz$
$= \frac{1}{2}\left[\cos^{-1} z\int 1dz - \int\left(\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}\times\int 1dz\right)dz\right]$
$= \frac{1}{2}\left[z\cos^{-1} z + \int \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz\right]$
$= \frac{1}{2}\left[z\cos^{-1} z + \left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{-2z}{\sqrt{1-z^2}}dz\right]$
$= \frac{1}{2}\left[z\cos^{-1} z - \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-z^2}\right] + c$
$= \frac{1}{2}\left[z\cos^{-1} z - \sqrt{1-z^2}\right] + c$ (Ans.) [যেখানে, $z = x^2$]

Educationblog24.com

11. (ক) $\int \ln x^4 dx$ নির্ণয় কর। [Din.B'19]

(ক) **Sol^n:** $\int \ln x^4 dx = \ln x^4 \int dx - \int \left(\frac{d}{dx}\ln x^4 \int dx\right) dx$

$= x\ln x^4 - \int \frac{4x^3}{x^4} \times x dx = x\ln x^4 - 4x + c$ **(Ans.)**

12. (ক) $\int \ln x dx$ নির্ণয় কর। [CB, DB'17]

(ক) **Sol^n:** $\int \ln x \, dx$

$= \ln x \int 1 \, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\ln x) \int 1 \, dx\right\} dx$

$= x\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x\ln x - x + c$ **(Ans.)**

13. দৃশ্যকল্প: $g(x) = x\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$ [Ctg.B'17]

(খ) দৃশ্যকল্পের আলোকে x এর সাপেক্ষে g(x) এর যোগজ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** $g(x) = x\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \int g(x) \, dx = \int x \, \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} dx$

$= \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} \int x \, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} \int x \, dx\right\} dx$

$= \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{-1}{\frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{x^2}{2} dx$

$= \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}}$

$= \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2} \, dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{1}{4}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\sin^{-1}x + c$

$= \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} - \frac{1}{4}\sin^{-1}x + c$ **(Ans.)**

নিজে করো

14. (ক) $\int x \ln 2x \, dx$ নির্ণয় কর। [JB'21] [Ans: $\frac{x^2}{2}\ln 2x - \frac{x^2}{4} + c$]

15. দৃশ্যকল্প: $g(x) = \cot^{-1}(x-1), f(x) = x$. [MB'21]

(খ) $\int f(x)g(x)dx$ নির্ণয় কর।

[Ans: $\frac{x^2}{2}\cot^{-1}(x-1) + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 2) + c$]

16. (ক) $\int \ln 7x dx$ নির্ণয় কর। [MB'21] [Ans: $x\ln 7x - x + c$]

17. $f(x) = \cos^{-1} 2x$. [SB'19]

(গ) $\int x f(x) \, dx$ নির্ণয় কর।

[Ans: $\frac{x^2}{2}\cos^{-1}2x - \frac{x}{8}\sqrt{1-4x^2} - \frac{1}{16}\sin^{-1}2x + c$]

18. (ক) $\int x \ln x^2 dx$ নির্ণয় কর। [RB'19] [Ans: $\frac{1}{2}(x^2\ln x^2 - x^2) + c$]

19. $g(z) = m z \sin^{-1} z$ একটি ফাংশন [Din.B'17]

(খ) $\int g(x) \, dx$ এর যোগজ নির্ণয় কর।

[Ans: $\frac{mx^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{m}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{m}{4}\sin^{-1}x + c$]

T-13: অংশক্রমে সমাকলনের ক্ষেত্রে: $\int e^{ax}\{af(x) + f'(x)\}dx$ আকৃতি

Concept

(i) $\int e^{ax}\{af(x) + f'(x)\}dx = e^{ax}f(x) + c$ এবং (ii) $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + c$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = e^x$ এবং $g(x) = x + 1$ [ন্যাশনাল আইডিয়াল কলেজ, খিলগাঁও, ঢাকা]

(খ) "দৃশ্যকল্প-১" এর সাহায্যে মান নির্ণয় কর: $\int_0^1 \frac{g(x-1)f(x)}{(g(x))^2}$

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $g(x) = x + 1; f(x) = e^x$

$\therefore \int_0^1 \frac{g(x-1)f(x)}{(g(x))^2} dx = \int_0^1 \frac{(x-1+1)e^x}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

$= \int_0^1 e^x \left\{\frac{x+1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right\} dx = \int_0^1 e^x \left\{\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}\right\} dx$

$= \int_0^1 e^x \left\{\frac{1}{(x+1)} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right)\right\} dx = \left[e^x\left(\frac{1}{1+x}\right)\right]_0^1 = e^1\frac{1}{2} - e^0 \times \frac{1}{1} = \frac{e}{2} - 1$ **(Ans.)**

Educationblog24.com

T-14: আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সমাকলন

Concept

Case-01: **আংশিক ভগ্নাংশের Thumb rule:**

$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ ভগ্নাংশটি লক্ষ কর। ভগ্নাংশটির হরে x এর একঘাত বিশিষ্ট পুনরাবৃত্তিহীন উৎপাদক বিদ্যমান এবং প্রকৃত ভগ্নাংশ। এক্ষেত্রে হরের প্রতিটি উৎপাদক পৃথক পৃথকভাবে শূন্য ধরে x এর যে মান পাওয়া যাবে তা অন্যান্য যে সকল স্থানে x থাকবে তার স্থলে বসাতে হবে।

লক্ষ করঃ $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1^2+1}{(x-1)(1-2)(1-3)} + \frac{2^2+1}{(2-1)(x-2)(2-3)} + \frac{3^2+1}{(3-1)(3-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$

$\therefore \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx = \int \frac{dx}{x-1} - 5\int \frac{dx}{x-2} + 5\int \frac{dx}{x-3} = \ln(x-1) - 5\ln(x-2) + 5\ln(x-3) + c$

Case-02: **প্রকৃত ভগ্নাংশের লবে x এর ঘাত জোড় এবং হরে x এর দ্বিঘাতবিশিষ্ট পুনরাবৃত্তিহীন উৎপাদক থাকলে:**

$x^2 = u$ ধরে, Case-01 এর নিয়মানুসারে করতে হবে।

Case-03: **অপ্রকৃত ভগ্নাংশের হরের প্রতিটি উৎপাদকের মাত্রা (সর্বোচ্চ ঘাত) = 1:**

ভগ্নাংশটি অপ্রকৃত হলে এবং হরের উৎপাদকগুলো x এর একঘাতবিশিষ্ট এবং পুনরাবৃত্তিহীন হলে, ভগ্নাংশটিকে প্রকৃত ভগ্নাংশে পরিণত করতে হবে তারপর (a) এর নিয়মানুসারে আংশিক ভগ্নাংশ করতে হবে।

Case-04: **প্রকৃত ভগ্নাংশের হরের এক বা একাধিক উৎপাদকের মাত্রা (সর্বোচ্চ ঘাত) > 1:**

যদি ভগ্নাংশ প্রকৃত এবং হরে x এর উৎপাদক $n[n \in \mathbb{N}]$ ঘাতী হয়, তখন নিম্নলিখিতভাবে ভাঙতে হয়।

$\frac{x}{(2x+3)^3(x+1)} = \frac{A}{(2x+3)^3} + \frac{B}{(2x+3)^2} + \frac{C}{(2x+3)} + \frac{D}{x+1}$ এবং $\frac{x}{(x+1)^2(2x-1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(2x-1)^2} + \frac{D}{2x-1}$

এবং $\frac{x}{(x+5)(x^2+7)} = \frac{A}{x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+7}$

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}$ [RB'23]

(খ) দৃশ্যকল্প-২ হতে $\int f(x)dx$ নির্ণয় কর।

Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}$ ফাংশনটিকে আংশিক ভগ্নাংশে ভেঙে আমরা পাই,

$\frac{x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+2)} \dots\dots\dots (i)$

(i) নং সমীকরণকে $(x+1)^2(x+2)$ দিয়ে গুণ করে পাই,

$x \equiv A(x+1)(x+2) + B(x+2) + C(x+1)^2 \dots\dots\dots (ii)$

সমীকরণে $x = -2$ বসিয়ে পাই, $-2 = 0 + 0 + C.1$

$\Rightarrow C = -2$

সমীকরণে $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$\Rightarrow -1 = A \cdot 0 + B(-1+2) + C \cdot 0$

$\Rightarrow -1 = -13 \therefore B = 1$

x^2 এর সহসমীকৃত করে পাই, $0 = A + C$

$\therefore \frac{x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+2}$

$\therefore \int \frac{x\,dx}{(x+1)^2(x+2)} = \int \frac{2\,dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{2dx}{x+2} \Rightarrow A = -C$

$\therefore A = 2 = 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} - 2\ln|x+2| + c$

02. $g(x) = e^x$. [SB'23]

(খ) $\int \frac{g(2x)}{\{g(x)-1\}\{g(2x)+1\}}dx$ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $g(x) = e^x$

$\int \frac{g(2x)}{\{g(x)-1\}\{g(2x)+1\}}dx = \int \frac{e^{2x}dx}{(e^x-1)(e^{2x}+1)}$ | ধরি, $e^x = y$ $\Rightarrow e^x dx = dy$

$= \int \frac{y^2dy}{(y-1)(y^2+1)}$

$= \int \frac{y-1}{(y-1)(y^2+1)}dy + \int \frac{dy}{(y-1)(y^2+1)}$

$= \int \frac{dy}{y^2+1} + \int \frac{dy}{(y-1)(y^2+1)} = \tan^{-1}y + \int \frac{dy}{(y-1)(y^2+1)} + c_1$

এখন, $\frac{1}{(y-1)(y^2+1)} \equiv \frac{A}{y-1} + \frac{By+C}{y^2+1}$

$\Rightarrow 1 \equiv A(y^2+1) + (By+C)(y-1)$

$\Rightarrow 1 \equiv Ay^2 + A + By^2 - By + Cy - C$

$\Rightarrow 1 \equiv (A+B)y^2 + (-B+C)y + A - C$

y^2, y, ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 0 \dots\dots\dots (i)$; $-B + C = 0 \dots\dots\dots (ii)$

$A - C = 1 \dots\dots\dots (iii)$

(i) হতে পাই, $A = -B$;

(ii) নং হতে পাই, $-B + C = 0 \Rightarrow A + C = 0 \dots\dots\dots (iv)$

Educationblog24.com

(iii) ও (iv) সমাধান করে পাই, $2A = 1 \therefore A = \frac{1}{2}$ $B = -\frac{1}{2}$

(iv) হতে পাই, $\frac{1}{2} + C = 0 \therefore C = -\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{(y-1)(y^2+1)} = \frac{1}{2(y-1)} - \frac{y+1}{2(y^2+1)}$

$\therefore \int \frac{y\,dy}{(y-1)(y^2+1)} = \tan^{-1} y + \int \frac{dy}{2(y-1)} - \int \frac{y+1}{2(y^2+1)} dy + c_1$

$= \tan^{-1} y + \frac{1}{2}\ln|y-1| - \int \frac{ydy}{2(y^2+1)} - \int \frac{1}{2(y^2+1)} + c_2$

$= \tan^{-1} y + \frac{1}{2}\ln|y-1| - \frac{1}{4}\ln|y^2+1| - \frac{1}{2}\tan^{-1} y + c$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1} y + \frac{1}{2}\ln|y-1| - \frac{1}{4}\ln|y^2+1| + c$ **(Ans.)**

03. $g(x) = x + 2$; $h(x) = (1-x)(x^2+4)$. **[JB'23]**

(গ) $\int \frac{g(x)}{h(x)} dx$ নির্ণয় কর। **[MB'21; JB'19]**

(গ) **Sol^n:** $g(x) = x + 2$; $h(x) = (1-x)(x^2+4)$

$\therefore \int \frac{g(x)}{h(x)} dx = \int \frac{(x+2)}{(1-x)(x^2+4)} dx$

ধরি, $\frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$\Rightarrow (x+2) \equiv A(x^2+4) + (Bx+C)(1-x) \ldots\ldots\ldots$ (i)

$\therefore x = 1$ বসিয়ে পাই, $3 = 5A \Rightarrow A = \frac{3}{5}$

এখন, $x + 2 \equiv Ax^2 + 4A - Bx^2 - Cx + Bx + C$

$\Rightarrow x + 2 \equiv x^2(A-B) + x(B-C) + (4A+C)$

$\therefore x^2$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $0 = A - B$

$\Rightarrow B = A = \frac{3}{5}$ $\therefore x$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $1 = B - C$

$\Rightarrow C = B - 1 = \frac{3}{5} - 1 = -\frac{2}{5}$

$\therefore I = \int \frac{g(x)}{h(x)} dx = \int \frac{3}{5(1-x)} dx + \int \frac{\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}}{x^2+4} dx$

$= \frac{3}{5}\int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{5}\int \frac{3x-2}{x^2+4} dx$

$= \frac{-3}{5}\ln|1-x| + \frac{1}{5}\left[\frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+4} dx - \int \frac{2}{x^2+2^2} dx\right] + c_1$

$= -\frac{3}{5}\ln|1-x| + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}\ln|x^2+4| - 2\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

$= -\frac{3}{5}\ln|1-x| + \frac{3}{10}\ln|x^2+4| - \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$ **(Ans.)**

04. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x^2+5)}$. **[BB'22]**

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\int f(x)dx$ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x^2+5)}$

ধরি, $\frac{x+3}{(x-1)(x^2+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+5}$

$\Rightarrow x + 3 = A(x^2+5) + (Bx+C)(x-1)$

$\Rightarrow x + 3 = Ax^2 + 5A + Bx^2 - Bx + Cx - C$

$\therefore x + 3 = (A+B)x^2 + (C-B)x + (5A-C) \ldots\ldots\ldots$ (i)

(i) নং সমীকরণ হতে x^2, x ও ধ্রুবপদের সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 0 \Rightarrow A = -B$; $C - B = 1 \Rightarrow C + A = 1$

$5A - C = 3 \Rightarrow 6A - (A + C) = 3$

$\Rightarrow 6A - 1 = 3 \therefore A = \frac{2}{3}$

আবার, $B = -A = -\frac{2}{3}$, $C = 1 - A = \frac{1}{3}$

এখন, $I = \int f(x)dx = \int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+5)} dx$

$= \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+5}\right) dx = \int \left[\frac{2}{3(x-1)} + \frac{-2x+1}{3(x^2+5)}\right] dx$

$= \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{2x}{x^2+5} dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+5}$

$I = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z+5} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{5})^2}$

[দ্বিতীয় পদে $x^2 = z$ ধরে]

$= \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|z+5| + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$

$I = \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x^2+5| + \frac{1}{3\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$

অথবা, $I = \frac{1}{15}\left\{10\ln|x-1| - 5\ln|x^2+5| + \sqrt{5}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}}\right\} + c$ **(Ans.)**

05. দৃশ্যকল্প-২: $h(x) = \frac{1}{x(x-1)^2(x^2+1)}$. **[Din.B'21]**

(খ) সমাকলন কর: $\int h(x)\,dx$.

(খ) **Sol^n:** $\frac{1}{x(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$

$1 = A(x-1)^2(x^2+1) + Bx(x-1)(x^2+1) + Cx(x^2+1) + (Dx+E)x(x-1)^2$

$x = 1 \Rightarrow 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots$ (i)

$x = 0 \Rightarrow 1 = -A \Rightarrow A = -1 \cdots\cdots\cdots$ (ii)

x^4 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $A + B + D = 0$

$\Rightarrow B + D = 1 \cdots\cdots\cdots$ (iii)

X^3 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $-2A - B + C + E - D = 0$

$\Rightarrow -2A + C + E = 1 \Rightarrow E = -\frac{3}{2}$

x এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $-2A - B + C + E = 0$

$\Rightarrow 2 - B + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow B = 1 \therefore D = 0$

$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{3}{2(x^2+1)}$

$\therefore \int \frac{1}{x(x-1)^2(x^2+1)} dx$

$= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$

$= -\ln x + \ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{2}\tan^{-1} x + c$ **(Ans.)**

06. $f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$ **[RB'19]**

(খ) $\int f(x)dx$ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** $f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} \ldots\ldots\ldots$ (i)

$\Rightarrow 1 \equiv A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(ii) এ $x = 0$ হলে, $1 = -A \therefore \boxed{A = -1}$

(ii) এ $x = 1$ হলে, $1 = C \therefore \boxed{C = 1}$

(ii) এর উভয়পক্ষে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে $\boxed{B = -1}$

$\therefore \frac{1}{x^2(x-1)} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

$\therefore \int \frac{1}{x^2(x-1)} dx = \frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x-1|$

$= \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c$ **(Ans.)**

Educationblog24.com

07. $f(y) = y - 1,\ g(y) = y^2 + 4$ ..... (ii) [JB'19]

(গ) $\int \frac{f(y)+1}{f(y)g(y)}dy$ নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: $\int \frac{f(y)+1}{f(y)g(y)} = \int \frac{y-1+1}{(y-1)(y^2+4)}dy = \int \frac{y}{(y-1)(y^2+4)}dy$

এখন, $\frac{y}{(y-1)(y^2+4)} \equiv \frac{A}{y-1} + \frac{By+c}{y^2+4}$

$\Rightarrow y \equiv A(y^2+4) + (By+c)(y-1)$ .... (i)

$y = 1$ বসিয়ে, $1 = 5A \Rightarrow A = \frac{1}{5}$

(i) এর উভয় পক্ষ হতে y^2 এর সহগ সমীকৃত করে,

$A + B = 0 \ \therefore B = -A = -\frac{1}{5}$

(i) এর উভয় পক্ষ হতে ধ্রুবপদ সমীকৃত করে,

$4A - C = 0 \ \therefore C = 4A = \frac{4}{5}$

$\therefore \int \frac{y\,dy}{(y-1)(y^2+4)} = \int \frac{1}{5(y-1)}dy + \int \frac{\left(-\frac{1}{5}y + \frac{4}{5}\right)}{y^2+4}$

$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{y-1}d(y-1) - \frac{1}{5}\int \frac{y-4}{y^2+4}dy$

$= \frac{1}{5}\int \frac{d(y-1)}{y-1} - \frac{1}{5}\frac{ydy}{y^2+4} + \frac{1}{5}\int \frac{4}{y^2+4}dy$

$= \frac{1}{5}\int \frac{d(y-1)}{y-1} - \frac{1}{10}\int \frac{d(y^2+4)}{y^2+4} + \frac{4}{5}\int \frac{dy}{y^2+2^2}$

$= \frac{1}{5}\ln|y-1| - \frac{1}{10}\ln|y^2+4| + \frac{4}{5}\tan^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) \times \frac{1}{2} +$

$c_1 + c_2 + c_3$

$= \frac{1}{5}\ln|y-1| - \frac{1}{10}\ln|y^2+4| + \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{y}{2} + c$ **(Ans.)**

08. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x + 1,\ g(x) = x - 1,$

$h(x) = x^2 + 9$ [CB'19]

(খ) $\int \left\{\frac{f(x)}{g(x)\,h(x)} + \sqrt[3]{x}\right\}dx$ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $\int \left\{\frac{f(x)}{g(x)h(x)} + \sqrt[3]{x}\right\}dx = \int \left\{\frac{x+1}{(x-1)(x^2+9)} + \sqrt[3]{x}\right\}dx$

এখন, ধরি, $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+9)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+9}$

$\therefore x + 1 \equiv A(x^2+9) + (Bx+C)(x-1)$ .... (i)

$x = 1$ হলে, $1 + 1 = A(1+9) \ \therefore A = \frac{1}{5}$

(i) নং হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $0 = A + B$

$\therefore B = -\frac{1}{5}$

আবার, ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই, $1 = 9A - C$

$\therefore C = 9A - 1 = \frac{4}{5}$

$\therefore \frac{x+1}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{1}{5(x-1)} - \frac{\frac{x}{5} - \frac{4}{5}}{x^2+9} = \frac{1}{5(x-1)} - \frac{x-4}{5(x^2+9)}$

তাহলে, $\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+9)}dx = \int \frac{dx}{5(x-1)} - \int \frac{x}{5(x^2+9)}dx + \int \frac{4}{5(x^2+9)}dx$

$= \frac{1}{5}\ln(x-1) - \frac{1}{10}\ln(x^2+9) + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান,

$= \frac{1}{5}\ln(x-1) - \frac{1}{10}\ln(x^2+9) + \frac{4}{15}\tan^{-1}\frac{x}{3} + \frac{3}{4}x^{4/3} + c$

(Ans.)

09. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x + 6.$ [RB, Ctg.B, BB, CB'18]

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = x^2$

(খ) $\int \frac{xdx}{f(x)[g(x)+4]}$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $I = \int \frac{xdx}{f(x)[g(x)+4]} = \int \frac{xdx}{(x+6)(x^2+4)}$

এখানে, $\frac{x}{(x+6)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{(x+6)} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$x \equiv A(x^2+4) + (Bx+C)(x+6)$

$\Rightarrow x \equiv A(x^2+4) + (Bx^2 + Cx + 6Bx + 6C)$

Comparing,

$A + B = 0$ ... (i)

$6B + C = 1$ ... (ii)

$6C + 4A = 0$ ... (iii)

$\Rightarrow A = -\frac{3}{20};\ B = -A = \frac{3}{20};\ C = 1 - 6B = \frac{1}{10}$

$I = \int \left(\frac{-3}{20(x+6)} + \frac{\frac{3}{20}x + \frac{1}{10}}{x^2+4}\right)dx$

$= \frac{-3}{20}\ln|x+6| + \int \left(\frac{1}{20}\frac{3x+2}{x^2+4}\right)dx$

$= \frac{-3}{20}\ln|x+6| + \int \left(\frac{1}{20}\frac{3x+2}{x^2+4}\right)dx$

$= -\frac{3}{20}\ln|x+6| + \frac{1}{20}\int \frac{\frac{3}{2}(2x)+2}{x^2+4}dx$

$= -\frac{3}{20}\ln|x+6| + \frac{1}{20}\cdot\frac{3}{2}\ln|x^2+4| + \frac{2}{20}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$

$= -\frac{3}{20}\ln|x+6| + \frac{3}{40}\ln|x^2+4| + \frac{1}{20}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$ **(Ans.)**

10. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+4)}$

[আদমজী ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, ঢাকা]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\int x\,f(x)dx$ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+4)}$

$\therefore \int x\,f(x)dx = \int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+4)}$ .... (i)

ধরি, $\frac{x}{(x-1)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+4}$

$\Rightarrow x = A(x^2+4) + (Bx+c)(x-1)$

$x = 1$ বসালে, $A = \frac{1}{5}$

আবার, x^2 এর সহগ হতে পাই, $A + B = 0 \ \therefore B = -A = \frac{-1}{5}$

এবং x এর সহগ হতে পাই, $C - B = 1 \Rightarrow C = B + 1 = \frac{4}{5}$

$\therefore$ (i) $\Rightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{5}}{(x-1)} + \frac{-\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}}{x^2+4}\right)dx = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{5}\int \frac{4-x}{x^2+4}dx$

$= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{4}{10}\int \frac{dx}{x^2+4} - \frac{1}{5}\int \frac{xdx}{x^2+4}$

$= \frac{1}{5}\ln|x-1| + \frac{4}{10}\tan^{-1}\frac{x}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + c$

$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}\right| + \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$ **(Ans.)**

Educationblog24.com

নিজে করো

11. $P = (x-4)^2(x-3)$ [SB'22]
(খ) $\int \frac{x}{p}dx$ নির্ণয় কর। [Ans: $3\ln\frac{x-3}{x-4} - \frac{4}{x-4} + c$]

12. $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+4)(x-1)}$ [Din.B'22]
(খ) $\int f(x)dx$ নির্ণয় কর।
[Ans: $\frac{7}{10}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{3}{10}\ln(x^2+4) + \frac{3}{4}\ln(x-1) + c$]

13. $f(x) = x$. [MB'21]
(গ) $\int \frac{f(x)}{\{f(x)-1\}\{f(x^2)+1\}}dx$ নির্ণয় কর।
[Ans: $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|1+x^2| + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$]

14. $f(y) = y-1,\ g(y) = y^2+4$ ..... (ii) [JB'19]
(গ) $\int \frac{f(y)+1}{f(y)g(y)}dy$ নির্ণয় কর।
[Ans: $\frac{1}{5}\ln|y-1| - \frac{1}{10}\ln|y^2+4| + \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{y}{2} + c$]

15. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}$. [DB'17]
(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\int f(x)dx$ নির্ণয় কর।
[Ans: $\frac{1}{2}\left\{\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x\right\} + c$]

T-15: নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য এর প্রয়োগ ও সাধারণ সমস্যা

Concept

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$ হলে, $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

➢ **যুগ্ম ও অযুগ্ম ফাংশন:**

যদি কোনো ফাংশনের ক্ষেত্রে $f(-x) = f(x)$ হয় তবে তাকে যুগ্ম ফাংশন বলে। আবার যদি কোনো ফাংশনের ক্ষেত্রে $f(-x) = -f(x)$ হয় তবে তাকে অযুগ্ম ফাংশন বলে। যেমন, $x^2, \cos x, x\sin x$ যুগ্ম ফাংশন এবং $x^3, \sin x, x\cos x$ অযুগ্ম ফাংশন।

সূত্র: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx = 2\int_{-a}^0 f(x)\,dx\ ; \text{যখন } f(x) \text{ যুগ্ম ফাংশন } [f(-x) = f(x)] \\ 0;\ \text{যখন } f(x) \text{ অযুগ্ম ফাংশন } [f(-x) = -f(x)] \end{cases}$

➢ **পরমমান ফাংশন:** পরমমানের সংজ্ঞানুসারে, $|x| = \begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$

$\int_a^b |x|\,dx$ বের করার ক্ষেত্রে যদি $a < 0 < b$ হয় তাহলে, $\int_a^b |x|dx = \int_a^0 |x|dx + \int_0^b |x|\,dx$ আকারে ভেঙ্গে নিতে হবে।
[অর্থাৎ, x এর যেসব মানের জন্য পরমমান ফাংশনের মান 0 আসে সেসব মানে গিয়ে যোগজীকরণকে আলাদা করে দিতে হবে]
যেমন: $\int_5^{10}|(x-7)(x-9)|\,dx$ এর ক্ষেত্রে, $x = 7$ এবং $x = 9$ এর জন্য পরমমান ফাংশনটির মান 0 আসে।
$\therefore \int_5^{10}|(x-7)(x-9)|\,dx = \int_5^7|(x-7)(x-9)|\,dx + \int_7^9|(x-7)(x-9)|\,dx + \int_9^{10}|(x-7)(x-9)|\,dx$ এভাবে ভেঙ্গে নিতে হবে।

Note: সমাকলনের ক্ষেত্রে $\int_a^b f(x) = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ এবং $\int_0^a f(x) = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ধর্ম ব্যবহার করে অনেক জটিল সমস্যা খুব সহজেই করা যায়।

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. (ক) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\cdot\sin^3 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [RB'23]

(ক) **Sol^n:** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\cdot\sin^3 x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\cdot(-\sin x)(1-\cos^2 x)dx$

$= -\int_1^0 \sqrt{z}\times(1-z^2)\,dz$

$= -\int_1^0 \sqrt{z}\,dz + \int_1^0 z^{\frac{5}{2}}\,dz$

ধরি, $\cos x = z$
$\Rightarrow -\sin x\,dx = dz$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
z	1	0

$= -\left[\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^0 + \left[\frac{z^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right]_1^0 = -\frac{2}{3}\left[z^{\frac{3}{2}}\right]_1^0 + \frac{2}{7}\left[z^{\frac{7}{2}}\right]_1^0$

$= -\frac{2}{3}(0-1) + \frac{2}{7}(0-1) = \frac{8}{21}$ (Ans.)

02. $f(x) = \sin x$ [Ctg.B'23]
(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{[\{f(x)\}^2-16]\{f(x)-3\}}dx$ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\therefore f'(x) = \cos x \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{[\{f(x)\}^2-16]\{f(x)-3\}}dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin^2 x-16)(\sin x-3)}dx$

$= \int_0^1 \frac{dz}{(z^2-16)(z-3)}$

$= \int_0^1 \frac{dz}{(z-4)(z+4)(z-3)}$

ধরি, $z = \sin x$
$dz = \cos x\,dx$

এখন $\frac{1}{(z-4)(z+4)(z-3)} \equiv \frac{A}{z-4} + \frac{B}{z+4} + \frac{C}{z-3}$

Educationblog24.com

$\Rightarrow 1 \equiv A(z+4)(z-3) + B(z-4)(z-3) + C(z+4)(z-4)$

$z = 4$ বসিয়ে পাই, $1 = A \times 8 \times 1 \therefore A = \frac{1}{8}$

$z = 3$ বসিয়ে পাই, $1 = C \times 7(-1) \therefore C = \frac{-1}{7}$

$z = -4$ বসিয়ে পাই, $1 = B \times (-8)(-7) \therefore B = \frac{1}{56}$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dz}{(z-4)(z+4)(z-3)} = \int_0^1 \left[\frac{1}{8(z-4)} + \frac{1}{56(z+4)} - \frac{1}{7(z-3)}\right] dz$$

$$= \frac{1}{8}[\ln|z-4|]_0^1 - \frac{1}{56}[\ln|z+4|]_0^1 - \frac{1}{7}[\ln|z-3|]_0^1$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
z	0	1

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{-3}{-4}\right| + \frac{1}{56}\ln\left|\frac{5}{4}\right| - \frac{1}{7}\ln\left|\frac{-2}{-3}\right|$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{4}{3}\right| + \frac{1}{56}\ln\left|\frac{4}{5}\right| - \frac{1}{7}\ln\left|\frac{2}{3}\right| \text{ (Ans.)}$$

11 $g(x) = e^x$. [SB'23]

(গ) $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln|g(x)| \sin^2 x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) **Soln:** $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln|g(x)| \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln|e^x| \sin^2 x\, dx$

[দেওয়া আছে, $g(x) = e^x$]

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x \sin^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} x(2\sin^2 x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} x(1-\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} (x - x\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} x\, dx - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} x\cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{4}\left[\frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{4}\left[\frac{\pi\times 0}{2} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{4}\right] = \frac{\pi^2}{8} \text{ (Ans.)}$$

12 দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{1}{(4+x^2)^{3/2}}$ [JB'23]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ ব্যবহার করে $\int_0^4 f(x)dx$ নির্ণয় কর।

(খ) **Soln:** দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

ধরি, $I = \int_0^4 f(x)\, dx = \int_0^4 \frac{dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

ধরি, $x = 2\tan\theta$

$\Rightarrow dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$

x	0	4
θ	0	$\tan^{-1}2$

$$\therefore I = \int_0^{\tan^{-1}\frac{1}{2}} \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(4+4\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\tan^{-1}2} \frac{2\sec^2\theta}{4^{\frac{3}{2}}(\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

$$= \int_0^{\tan^{-1}2} \frac{2\sec^2\theta}{8\sec^3\theta} d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\tan^{-1}2} \frac{1}{\sec\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\tan^{-1}2} \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}[\sin\theta]_0^{\tan^{-1}2} = \frac{1}{4}\sin(\tan^{-1}2)$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \text{ (Ans.)}$$

05. $f(x) = \sin x$

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\}^2 f(3x)dx$ এর মান নির্ণয় কর। [Din.B'23]

(খ) **Soln:** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

এখন, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\}^2 f(3x)dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \sin 3x\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos 2x)}{2} \cdot \sin 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3x - \sin 3x\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\sin 3x - \frac{1}{2}(2\sin 3x\cos 2x)\}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{2} - \frac{(\sin 5x + \sin x)}{4} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 3x}{2} - \frac{\sin 5x}{4} - \frac{\sin x}{4}\right) dx$$

$$= \left[\frac{\cos x}{4} - \frac{\cos 3x}{6} + \frac{\cos 5x}{20}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{15} \text{ (Ans.)}$$

06. $f(x) = \sin x$

(খ) $\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{9-(f(x))^2} dx$ নির্ণয় কর। [MB'23]

(খ) **Soln:** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{9-(f(x))^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{9-\sin^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3^2-(\sin x)^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dz}{3^2-z^2}$$

ধরি, $\sin x = z \Rightarrow \cos x\, dx = dz$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
z	0	1

$$= \frac{1}{2\times 3}\left[\ln\left|\frac{3+z}{3-z}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left[\ln\left|\frac{4}{2}\right| - \ln\left|\frac{3+0}{3-0}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{6}[\ln|2| - \ln|1|] = \frac{1}{6}\ln|2| \text{ (Ans.)}$$

07. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \sin x$ [DB'22]

(গ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)f(2x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) **Soln:** ধরি, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot f(2x)dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin 2x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, 2\sin x\cos x\, dx$$

$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\, dx$

$\therefore I = 2\int_0^1 z^2\, dz = 2\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1$

$= 2\left(\frac{1^3}{3} - 0\right)$

$\therefore I = \frac{2}{3}$ (Ans.)

ধরি, $\sin x = z$

$\Rightarrow \cos x = \frac{dz}{dx}$

$\therefore \cos x\, dx = dz$

X	z
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1

08. দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \cos x, h(x) = x^4$. [RB'22]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)\}^2 dx + \int_0^1 \frac{x}{1+h(x)} dx$ নির্ণয় কর।

Educationblog24.com

HSC প্রশ্নব্যাংক ২০২৫

(খ) **Sol^n:** দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $g(x) = \cos x, h(x) = x^4$

ধরি, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)\}^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cos 2x]\, dx$

$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}}{2} - 0 - 0\right] = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\therefore I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+h(x)} dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx = \int_0^1 \frac{x}{1+(x^2)^2} dx$

$\therefore I_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+z^2}\cdot\frac{dz}{2}$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}[\tan^{-1} z]_0^1$

$= \frac{1}{2}(\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}$

$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)\}^2 dx + \int_0^1 \frac{x}{1+h(x)} dx$

$= I_1 + I_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \therefore I = \frac{3\pi}{8}$ **(Ans.)**

ধরি, $x^2 = z$

$\Rightarrow 2x = \frac{dz}{dx}$

$\therefore xdx = \frac{dz}{2}$

x	z
0	0
1	1

09. $F(z) = z \ln z$. **[Ctg.B'22]**

(খ) $\int_1^{\sqrt{e}} F(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $F(z) = z\ln z \therefore F(x) = x\ln x$

এখন, $\int F(x)\, dx = \int x\ln x\, dx$

$= (\ln x)\int x\, dx - \int\left(\frac{1}{x}\int x dx\right)dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$

$\therefore \int_1^{\sqrt{e}} F(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^{\sqrt{e}}$

$= \left\{\frac{(\sqrt{e})^2}{2}\ln\sqrt{e} - \frac{(\sqrt{e})^2}{4}\right\} - \left\{0 - \frac{1}{4}\right\}$

$= \frac{e}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{e}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

10. (ক) $\int_1^2 \ln 2x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[BB'22]**

(ক) **Sol^n:** ধরি, $I = \int \ln 2x dx = \int \ln 2x \cdot 1\, dx$

$= \ln 2x \int dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\ln 2x)\int dx\right]dx$

$= (\ln 2x).x - \int \frac{1}{2x}\cdot 2\cdot x dx$

$I = x\ln 2x - x + c$ এখন, $\int_1^2 \ln 2x\, dx = [x\ln 2x - x]_1^2$

$= (2\ln 4 - 2) - (\ln 2 - 1) = 4\ln 2 - 2 - \ln 2 + 1$

$\therefore \int_1^2 \ln 2x\, dx = 3\ln 2 - 1$ **(Ans.)**

11. দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \cot^{-1} x$ **[JB'22]**

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে $\int_1^{\sqrt{3}} x\, g(x)\, dx$ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $g(x) = \cot^{-1} x$

$\therefore \int_1^{\sqrt{3}} g(x)dx = \int_1^{\sqrt{3}} x\cot^{-1} x dx$

$\therefore \int \underset{u}{\frac{x}{}}\ \underset{v}{\cot^{-1} x}\, dx = \cot^{-1} x\int x\, dx - \int\left(\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x)\int x\, dx\right)dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1} x - \int \frac{-x^2}{2(1+x^2)} dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2-1)}{1+x^2} dx$

$= \frac{1}{2}x^2\cot^{-1} x + \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} dx$

$= \frac{1}{2}x^2\cot^{-1} x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\tan^{-1} x + c$

$\therefore \int_1^{\sqrt{3}} x\cot^{-1} x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\cot^{-1} x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\tan^{-1} x\right]_1^{\sqrt{3}}$

$\therefore \int_1^{\sqrt{3}} x\cot^{-1} x dx = \frac{1}{2}\left[(\sqrt{3})^2\cot^{-1}\sqrt{3} + \sqrt{3} - \tan^{-1}\sqrt{3} - 1^2\cot^{-1}(1) - 1 + \tan^{-1} 1\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3.\pi}{6} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1\right)$

$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \therefore \int_1^{\sqrt{3}} x\cot^{-1} x\, dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

12. দৃশ্যকল্প-১: $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$ **[JB'22]**

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে $\int_0^{\ln 2} f(e^x)dx$ নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$

$\therefore f(e^x) = \frac{(e^x)^2}{\{1+(e^x)^2\}^2} = \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$

মনে করি, $e^{2x} = z \Rightarrow 2e^{2x}dx = dz$

$\Rightarrow e^{2x}dx = \frac{1}{2}dz \therefore e^{2x}dx = \frac{1}{2}dz$

$\int \frac{E^{2x}dx}{(1+e^{2x})^2} = \int \frac{\frac{1}{2}dz}{(1+z)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(1+z)^2} = \frac{1}{2}\times(-1)\frac{1}{1+z} + c$

$= \frac{-1}{2(1+z)} + c = \frac{-1}{2(1+e^{2x})} + c$

আবার, $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}dx}{(1+e^{2x})^2} = \left[-\frac{1}{2(1+e^{2x})}\right]_0^{\ln 2}$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+e^{2\ln 2}} - \frac{1}{1+e^0}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+e^{\ln 4}} - \frac{1}{1+1}\right]$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{20}$ **(Ans.)**

13. $h(x) = \tan x$ **[CB'22]**

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{30h'(x)dx}{[(h(x))^2-9](h(x)-2)}$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) **Sol^n:**

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{30\, h'(x)dx}{[(h(x))^2-9](h(x)-2)}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{30\sec^2 x dx}{[\tan^2 x - 9](\tan x - 2)}$

$= \int_0^1 \frac{30}{(z^2-9)(z-2)} dz$

$h(x) = \tan x$ এবং $h'(x)$

$= \sec^2 x$ ধরি, $\tan x = z$

$\Rightarrow \sec^2 x\, dx = dz$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
z	0	1

এখন, $\frac{30}{(z+3)(z-3)(z-2)} \equiv \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z-3} + \frac{C}{z-2}$ ..... (i)

$= \frac{1}{(z+3)} + \frac{5}{(z-3)} - \frac{6}{(z-2)} \therefore \int_0^1 \frac{30}{(z^2-9)(z-2)} dz$

$= \int_0^1 \left[\frac{1}{z+3} + \frac{5}{z-3} - \frac{6}{z-2}\right]dz$

$= [\ln|z+3| + 5\ln|z-3| - 6\ln|z-2|]_0^1$

$= \ln 4 + 5\ln 2 - 6\ln 1 - \ln 1 - \ln 3 - 5\ln 3 + 6\ln 2 = 2.41924$ **(Ans.)**

Educationblog24.com

14. (ক) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [Din.B'22]

(ক) Sol^n: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{4-\cos^2 x}$

$= \int_1^0 \frac{-dz}{4-z^2} = \int_0^1 \frac{dz}{4-z^2}$

$= \left[\frac{1}{4}\ln\frac{2+z}{2-z}\right]_0^1$

$= \frac{1}{4}[\ln 3 - \ln 1]$

$= \frac{\ln 3}{4} = 0.2746$ (Ans.)

ধরি, $\cos x = z$

$\Rightarrow -\sin x\,dx = dz$

$\Rightarrow \sin x\,dx = -dz$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
z	1	0

15. $g(x) = \cos x$. [MB'22]

(খ) $\int_1^5 \frac{1}{x}\sqrt{1-\{g(\ln x)\}^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $\int_1^5 \frac{1}{x}\sqrt{1-\{g(\ln x)\}^2}\,dx$

দেওয়া আছে, $g(x) = \cos x \therefore g(\ln x) = \cos(\ln x)$

এখন, $\int_1^5 \frac{1}{x}\sqrt{1-\{g(\ln x)\}^2}\,dx = \int_1^5 \frac{1}{x}\sqrt{1-\cos^2(\ln x)}\,dx$

$= \int_1^5 \frac{1}{x}\sin(\ln x)\,dx$

ধরি, $\ln x = z$ এবং $\frac{1}{x}dx = dz$

x	1	5
z	0	$\ln 5$

$\int_0^{\ln 5} \sin z\,dz = [-\cos z]_0^{\ln 5} = -\cos(\ln 5) + \cos 0$

$= 1.0386$ (Ans.) [In radian mode]

16. দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \sin x$. [DB'21]

(ক) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ নির্ণয় কর।

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g'(x)dx}{(1+g(x))(2+g(x))}$ এর মান নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

$= \int_1^{1+3\ln c} \frac{dy}{y}$

$= [\ln y]_1^{1+3\ln c}$

$= \ln(1+3\ln c) + k$

[যেখানে k ধ্রুবক] (Ans.)

ধরি, $1 + \ln x = y$

$\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dy$

x	1	e^3
z	1	$1+3\ln c$

(খ) Sol^n: $g(x) = \sin x$; $g'(x) = \cos x$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g'(x)dx}{(1+g(x))(2+g(x))}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$

$= \int_0^1 \frac{du}{(1+u)(2+u)}$

$= \int_0^1 \frac{du}{1+u} - \int_0^1 \frac{du}{2+u} = \int_0^1 \frac{d(1+u)}{(1+u)} - \int_0^1 \frac{d(2+u)}{(2+u)}$

$= [\ln|1+u|]_0^1 - [\ln|2+u|]_0^1 = \ln 2 - \ln 3$ (Ans.)

ধরি, $\sin x = g(x) = u$

$\therefore \cos x\,dx = du$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

17. $g(x) = x^4$ [RB'21]

(গ) প্রমাণ কর, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(\cos\theta)d\theta = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$

(গ) Sol^n: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(\cos\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)^2 d\theta$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)d\theta$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{1+2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right\}d\theta$

$= \frac{1}{4}\left[0 + \sin 2\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{3\pi}{8} + 1 - 0\right] = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$ (Proved)

18. $f(x) = x^2$ [RB'21]

(গ) $\int_1^2 \left[\sqrt{f(x)}e^{f(x)} + \frac{(f(x)-1)^2}{f(x)}\right]dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: $\int \left[\sqrt{f(x)}e^{f(x)} + \frac{(f(x)-1)^2}{f(x)}\right]dx$

$= \int \{xe^{x^2} + \frac{(x^2-1)^2}{x^2}\}dx = \int xe^{x^2}dx + \int \frac{x^4-2x^2+1}{x^2}dx$

$= \int xe^{x^2}dx + \int (x^2 - 2 + x^{-2})\,dx$

$= \frac{1}{2}\int e^u du + \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{x^{-1}}{-1} + c$

$= \frac{e^u}{2} + \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + c$

$= \frac{e^{x^2}}{2} + \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + c$

১ম সমাকলনে

ধরি, $x^2 = u$

$\therefore 2x\,dx = du$

$\therefore \int_1^2 \left[\sqrt{f(x)}e^{f(x)} + \frac{(f(x)-1)^2}{f(x)}\right]dx$

$= \left[\frac{e^{x^2}}{2} + \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x}\right]_1^2$

$= \frac{e^4}{2} + \frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{2} - \frac{e}{2} - \frac{1}{3} + 2 + 1 = \frac{e^4-e}{2} + \frac{5}{6}$ (Ans.)

19. $P(x) = \cos x$ [Ctg.B'21]

(ক) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos 2x}$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 P(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2}dx$

$= \frac{1}{2}[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}[1-0] = \frac{1}{2}$ (Ans.)

(খ) Sol^n: $\int x^2 p(x)\,dx = \int x^2 \cos x\,dx$

$= x^2\int \cos x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x^2)\int \cos x\,dx\right\}dx$

$= x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx$

$= x^2\sin x - 2\left[x\int \sin x\,dx - \int\left\{\frac{dx}{dx}\int \sin x\,dx\right\}dx\right]$

$= x^2\sin x - 2[-x\cos x - \int(-\cos x)dx]$

$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 p(x)\,dx$

$= [x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 - 0\right) = \frac{\pi^2}{4} - 2$ (Ans.)

Educationblog24.com

20. $P_1(x) = x$; $P_2(x) = \cot^{-1} x$ [SB'21]

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} P_1(x) P_2(x) dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $\int x \cot^{-1} x \, dx = \cot^{-1} x \int x \, dx - \int \left(-\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{2}\right) dx$

$= \frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$

$= \frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} P_1(x) P_2(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \tan^{-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{16} \cot^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 0.338944$ (Ans.)

21. $f(x) = \sin x$ [BB'21]

(গ) দেখাও যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{1 + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}^2 f(x) dx = \frac{7}{3}$.

(গ) Sol^n: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{1 + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}^2 f(x) dx\}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^2 \sin x \, dx$

[ধরি, $1 + \cos x = 7 \Rightarrow -\sin x \, dx = dz$]

$= -\frac{1}{3}\left[(1 + \cos x)^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}[1 - 8]$

$= \frac{7}{3}$ = R.H.S (দেখানো হল)

22. দৃশ্যকল্প: $f(x) = \cos x$ [JB'21]

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'x}{8 - (f x)^2} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'x}{8-(fx)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{8-\cos^2 x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{8-\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{du}{3^2 - u^2}$

$= \left[\frac{1}{2 \times 3} \ln\left|\frac{3+u}{3-u}\right|\right]_0^1$

$= \frac{1}{6}\left[\ln\frac{4}{2} - \ln\frac{3}{3}\right] = \frac{1}{6}\ln 2$ (Ans.)

ধরি, $\sin x = u$
$\Rightarrow \cos x \, dx = du$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

23. দৃশ্যকল্প: $f(x) = x^2\sqrt{16 - x^2}$ [JB'21]

(খ) $\int_{-2}^{2} f(x) dx$ এর নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $\int_{-2}^{2} f(x) dx = \int_{-2}^{2} x^2\sqrt{16 - x^2} dx$

$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 16 \sin^2\theta \left(\sqrt{16 - 16\sin^2\theta}\right) 4\cos\theta \, d\theta$

$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 256 \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta$

$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 64 \sin^2 2\theta \, d\theta$

$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 32(1 - \cos 4\theta) d\theta = 32\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$

$= 32\left[\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$= 32\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{32\pi}{3} - 8\sqrt{3}$ (Ans.)

ধরি, $x = 4\sin\theta$
$\therefore dx = 4\cos\theta \, d\theta$

x	−2	2
θ	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$

24. $f(x) = e^x$ [CB'21]

(খ) $\int_0^3 \frac{xf(x)}{(1+x)^2} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $\int_0^3 \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx = \int_0^3 e^x \left\{\frac{1+x}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2}\right\} dx$

$= \int_0^3 e^x \left\{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right\} dx = \left[\frac{e^x}{1+x}\right]_0^3 = \frac{e^3}{4} - 1$ (Ans.)

25. দৃশ্যকল্প-২: $h(x) = \frac{1}{x(x-1)^2(x^2+1)}$. [Din.B'21]

(ক) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\sin^{-1} x]_0^1 = \frac{\pi}{2}$ (Ans.)

26. $g(x) = \frac{2+x}{1+x^2}$. [Din.B'21]

(ক) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) 0 থেকে 1 সীমার মধ্যে $\int g(x) dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(ক) Sol^n: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -[0 - 1] = 1$ (Ans.)

(গ) Sol^n: $\int_0^1 \frac{2+x}{1+x^2} dx = 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx$

$= \left[2\tan^{-1} x + \frac{1}{2}\ln|1 + x^2|\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$

$= \frac{1}{2}(\pi + \ln 2)$ (Ans.)

27. $f(x) = \cos x$ [DB'19]

(খ) $\int_1^3 \frac{1}{x}\sqrt{1 - \{f(\ln x)\}^2} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $\int_1^3 \frac{1}{x}\sqrt{1 - \{f(\ln x)\}^2} dx$

$= \int_1^3 \frac{1}{x}\sqrt{1 - \cos^2(\ln x)} \, dx = \int_1^3 \frac{1}{x}\sin(\ln x) dx$

Let, $\ln x = z \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dz$.

x	1	3
z	0	ln 3

$\therefore \int_1^{\ln 3} \sin z \, dz = [-\cos z]_0^{\ln 3}$

$= -\cos(\ln 3) + \cos 0 = 1 - \cos(\ln 3)$ (Ans.)

28. $g(x) = \sin x$ [SB'19]

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)\}^5 \left\{\sqrt{1 - \{g(x)\}^2}\right\}^4 dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)\}^5 \left\{\sqrt{1 - \{g(x)\}^2}\right\}^4 dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \times \sin^4 x \sin x \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \, dx$

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x) d(\cos x)$

$= -\left[\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{2\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\left[0 - 0 + 0 - \frac{1}{5} + \frac{2}{7} - \frac{1}{9}\right] = \frac{8}{315}$ (Ans.)

Educationblog24.com

$f(x) = \cos^4 x$. [BB'19]

(খ) $\int_0^\pi xf(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: $\int_0^\pi xf(x)dx = \int_0^\pi x\cos^4 x\,dx$

$= \int_0^\pi \frac{x}{4}.(2\cos^2 x)^2 dx = \int_0^\pi \frac{x}{4}.(1+\cos 2x)^2 dx$

$= \int_0^\pi \frac{x}{4}(1+\cos^2 2x + 2\cos 2x)dx$

$= \int_0^\pi \frac{x}{8}(2+2\cos^2 2x + 4\cos 2x)\,dx$

$= \int_0^\pi \frac{x}{8}(2+1+\cos 4x + 4\cos 2x)dx$

$= \int_0^\pi \left(\frac{3x}{8} + \frac{x\cos 4x}{8} + \frac{x\cos 2x}{2}\right)dx$

এখন, $\int_0^\pi \frac{3x}{8}dx = \left[\frac{3}{8}\times\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{3\pi^2}{16}$

$\int_0^\pi \frac{x\cos 4x}{8}dx = \frac{1}{8}\int_0^\pi x\cos 4x dx$

$= \frac{1}{8}\left[x\int\cos 4x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int\cos 4x dx\right\}dx\right]_0^\pi$

$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}x\sin 4x - \frac{1}{4}\int\sin 4x\,dx\right]_0^\pi$

$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}x\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x\right]_0^\pi$

$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\pi\sin 4\pi + \frac{1}{16}\cos 4\pi - \frac{1}{16}\cos 0\right]$

$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right] = 0$ এবং $\int_0^\pi \frac{x\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi x\cos 2x$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int\sin 2x dx\right]_0^\pi$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^\pi = 0$

$\therefore \int_0^\pi x\,f(x)dx = \frac{3\pi^2}{16}$ (Ans.)

(ক) $\int_1^2 x^3 e^{x^4}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [CB'19]

(ক) Sol^n: ধরি, $x^4 = z \therefore 4x^3dx = dz \therefore x^3dx = \frac{1}{4}dz$

যখন, $x = 1$, তখন $z = 1$; যখন, $x = 2$, তখন $z = 16$

এখন, $\int_1^2 x^3e^{x^4}dx = \frac{1}{4}\int_1^{16} e^z dz = \frac{1}{4}(e^{16} - e)$ (Ans.)

(খ) $\int_0^{\ln 2}\frac{u^2}{1+u^2}dx$ এর মান নির্ণয় কর। [Din.B'19]

(খ) Sol^n: $\int_0^{\ln 2}\frac{u^2}{1+u^2}dx = \int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}\times 2dx}{1+e^{2x}}$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}\frac{d(1+e^{2x})}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2}[\ln|1+e^{2x}|]_0^{\ln 2}$

$= \frac{1}{2}(\ln|1+e^{2\ln 2}| - \ln|1+e^0|)$

$= \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$ (Ans.)

$f(x) = xe^x, g(x) = (x+1)^3$ [RB'17]

(খ) $\int_0^3 \frac{f(x)}{\frac{d}{dx}\{g(x)\}}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: ধরি, $I = \int_0^3 \frac{f(x)}{\frac{d}{dx}(g(x))}dx = \int_0^3 \frac{xe^x}{\frac{d}{dx}\{(x+1)^3\}}dx$ [মান বসিয়ে]

$= \int_0^3 \frac{xe^x}{3(x+1)^2}dx = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

এখন, $I_1 = \int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int\frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2}dx$

$= \int\left\{\frac{(x+1)e^x}{(x+1)^2} - \frac{e^x}{(x+1)^2}\right\}dx$

$= \int\frac{e^x}{(x+1)}dx - \int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx$

$= \frac{1}{x+1}\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right)\int e^x dx\right\}dx - \int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx$

$= e^x\cdot\frac{1}{x+1} + \int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx - \int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx = \frac{e^x}{x+1}$

$\therefore I = \frac{1}{3}\int_0^3\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{3}\left[\frac{e^x}{x+1}\right]_0^3$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3+1} - \frac{e^0}{0+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{4} - 1\right)$ (Ans.)

33. $f(x) = x-2$ এবং $g(x) = \sin^6 x$. [SB'17]

(খ) (i) $\int_0^2 f(x)\tan^{-1}(x-2)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\cos x dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: (i) $\int_0^2 (x-2)\tan^{-1}(x-2)dx$

ধরি, $x-2 = z,\ x = z+2 \therefore dx = dz$

$\therefore x = 2$ হলে, $z = 0$ $\therefore x = 0$ হলে, $z = -2$

$\therefore \int_{-2}^0 z\tan^{-1}z\,dz = \tan^{-1}z\int_{-2}^0 z\,dz - \int_{-2}^0\frac{z^2}{2}\times\frac{1}{1+z^2}dz$

$= -\frac{(-2)^2}{2}\tan^{-1}(-2) - \frac{1}{2}\int_{-2}^0\frac{1+z^2-1}{1+z^2}dz$

$= 2\tan^{-1}(2) - \frac{1}{2}\int_{-2}^0 dz + \frac{1}{2}\int_{-2}^0\frac{dz}{1+z^2}$

$= 2\tan^{-1}2 - \frac{1}{2}[z]_{-2}^0 + \frac{1}{2}[\tan^{-1}z]_{-2}^0$

$= 2\tan^{-1}2 - \frac{2}{2} - \frac{\tan^{-1}(-2)}{2}$

$= -1 + 2\tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\tan^{-1}(2)$

$= -1 + \frac{5}{2}\tan^{-1}(2)$ (Ans.)

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\cos x dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\,.\cos x\,dx$

ধরি, $\sin x = z$

$\cos x dx = dz$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
z	0	1

$\therefore I = \int_0^1 z^6\,dz = \frac{1}{7}[z^7]_0^1 = \frac{1}{7}$ (Ans.)

34. দৃশ্যকল্প-১: $f(\theta) = \cos^3\theta,\ g(\theta) = \sin\theta$ [BB'17]

(খ) দৃশ্যকল্প ১ হতে নির্ণয় কর:

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+g(\theta)}d\theta$; (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\sqrt[3]{g(\theta)}d\theta$.

(খ) Sol^n: (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+g(\theta)}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin\theta}\,d\theta$ [$\because g(\theta) = \sin\theta$]

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\,d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta$

Educationblog24.com

$= \left[\frac{-\cos\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2\left[\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} - (\sin 0 - \cos 0)\right]$

$= 2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0 - 1)\right] = 2 \times 1 = 2$

(ii) ধরি, $\sin\theta = z \therefore \cos\theta\, d\theta = dz$

আবার, $\theta = \frac{\pi}{2}$ হলে, $\sin\frac{\pi}{2} = z$ বা, $z = 1$

এবং $\theta = 0$ হলে, $\sin\theta = z$ বা, $z = 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\sqrt[3]{g(\theta)}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta\cos^2\theta\sqrt[3]{\sin\theta}\, d\theta$ [মান বসিয়ে]

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cos^2\theta\sqrt[3]{\sin\theta}\, d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos\theta(1 - \sin^2\theta)\sqrt[3]{\sin\theta}\}\, d\theta$

$= \int_0^1 (1 - z^2)\sqrt[3]{z}\, dz = \int_0^1 (1 - z^2)z^{\frac{1}{3}}\, dz$

$= \int_0^1 \left(z^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{7}{3}}\right)_{dz} = \left[\frac{z^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{z^{\frac{7}{3}+1}}{\frac{7}{3}+1}\right]_0^1 = \left[\frac{z^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{z^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}}\right]_0^1$

$= \left[\frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{10}z^{\frac{10}{3}}\right]_0^1 = \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{10}\right) - 0 = \frac{15-6}{20} = \frac{9}{20}$ (Ans.)

35. $H(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ [JB'17]

(গ) $\int_0^1 H(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: $I = \int_0^1 H(x)\, dx = \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$; $\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2}$

$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \therefore I = \int_0^1 e^x\left\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx$

$\frac{1}{x+1} = y$ হলে $y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$\therefore I = \int_0^1 e^x\left\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx = \left[\frac{e^x}{x+1}\right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1$ (Ans.)

36. $u = e^x$ [CB'17]

(খ) $\int_0^{\ln x} \frac{u}{1+u} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: ধরি, $1 + e^x = z \therefore e^x dx = dz$

আবার, $x = 0$ হলে, $1 + e^0 = z \Rightarrow z = 1 + 1 = 2$

এবং $x = \ln 2$ হলে, $1 + e^{\ln 2} = z$

$\Rightarrow 1 + 2 = z \Rightarrow z = 3; \int_0^{\ln 2} \frac{u}{1+u} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_2^3 \frac{dx}{z}$

$= [\ln z]_2^3 = \ln 3 - \ln 2$ (Ans.)

37. $f(x) = \ln x$ এবং $g(x) = e^x$. [Din.B'17]

(গ) $\int_1^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx + \int_1^2 g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx + \int_1^2 e^x\, dx$; $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$

ধরি, $\ln x = z \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dz$

x	1	e^2
z	0	2

$\Rightarrow \int_0^2 z dz = \frac{1}{2}[z^2]_0^2 = 2$

আবার, $\int_1^2 e^x dx = [e^x]_1^2 = e^2 - e$

$\therefore \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx + \int_1^2 e^x\, dx = 2 + e^2 - e$ (Ans.)

38. (ক) $\int_1^2 \frac{1}{z}\cos(\ln z)\, dz$ এর মান নির্ণয় কর। [Din.B'17]

(ক) Sol^n: $\int_1^2 \frac{1}{z}\cos(\ln z)dz = \int_1^2 \cos(\ln z)d(\ln z)$

$= [\sin(\ln z)]_1^2 = \sin(\ln 2) - \sin(0°)$

$= \sin(\ln 2)$ (Ans.)

39. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \sin x$

[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ ব্যবহার করে $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\frac{\pi}{2}-x)}{(f(x)+2)(f(x)+1)} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

এখন, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\frac{\pi}{2}-x)}{(f(x)+2)(f(x)+1)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{(\sin x+2)(\sin x+1)} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x+2)(\sin x+1)} dx$

ধরি, $\sin x + 1 = z$ | আবার, $x = \frac{\pi}{2}$ হলে $z = 2$

$\therefore \cos x\, dx = dz$ | $x = 0$ হলে $z = 1$

$\therefore \int_1^2 \frac{dz}{z(z+1)}$

ধরি, $\frac{1}{z(z+1)} \equiv \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1}$

$\Rightarrow 1 \equiv A(z + 1) + Bz$

$z = -1, 0$ বসিয়ে পাই, $A = 1; B = -1$

তাহলে, $\int_1^2 \frac{dz}{z(z+1)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)dz$

$= [\ln z - \ln(z + 1)]_1^2$

$= \left[\ln\frac{z}{z+1}\right]_1^2 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} + c$

$= \ln\frac{4}{3} + c$ (Ans.)

40. $u(x) = x^2$ [ঢাকা কলেজ]

(গ) $\int_1^2 \frac{u(x)+1}{\{u(x)\}^2+1} dx$ নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $u(x) = x^2$

এখন, প্রদত্ত রাশি, $\int_1^2 \frac{u(x)+1}{\{u(x)\}^2+1} dx = \int_1^2 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

$= \int_1^2 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int_1^2 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+(\sqrt{2})^2} dx$

ধরি, $x - \frac{1}{x} = z$ | $x = 2, z = \frac{3}{2}$

$\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx = dz$ | $x = 1, z = 0$

$\therefore \int \frac{dz}{z^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{2}}\right]_0^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (Ans.)

Educationblog24.com

নিজে করো

$g(x) = \sqrt{\cos x}\sin^3 x$

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর। [Ans: $\frac{8}{21}$]

$P_1(x) = x$; $P_2(x) = \cot^{-1} x$

(ক) $\int_2^5 \ln 2x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। |SB'21| [Ans: $\ln(6250) - 3$]

43. দৃশ্যকল্প: $f(y) = y$

(খ) $\int_0^8 f(x^2)\sqrt{64 - f(x^2)}\,dx$ নির্ণয় কর। [MB'21] [Ans: 256π]

44. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$ ..... (i)

$g(x) = x^2 + 1$ ..... (ii)

(গ) $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর। [RB'17] [Ans: -1]

T-16: নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত

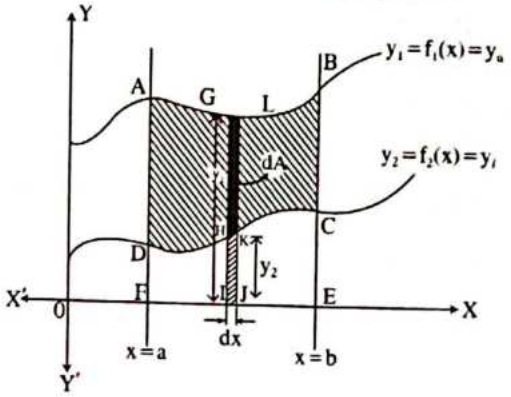
Concept

দুইটি বক্ররেখা ও দুইটি y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল [x-অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষেত্রফল] নির্ণয়:

ধরে করি,
$y_1 = f_1(x)$ এবং $y_2 = f_2(x)$ দুইটি ফাংশন এবং $x = a$ এবং $x = b$ দুইটি সরলরেখা (y-অক্ষের সমান্তরাল)। কল্পনা করা হচ্ছে, $y_1 = f_1(x)$ এবং $y_2 = f_2(x)$ এমন দুইটি ফাংশন যেন সব ক্ষেত্রেই $y_1 > y_2$ $[f_1(x) > f_2(x)]$
$x = a$ থেকে $x = b$ পর্যন্ত $y_1 = f_1(x)$ এবং $y_2 = f_2(x)$ এর মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল (ABCD অংশের ক্ষেত্রফল),

$A = \int_{x=a}^{x=b} dA = \int_a^b (y_1 - y_2)dx$

$\therefore \boxed{A = \int_a^b (y_u - y_l)dx}$ $[\because y_1 = y_u;\ y_2 = y_l]$

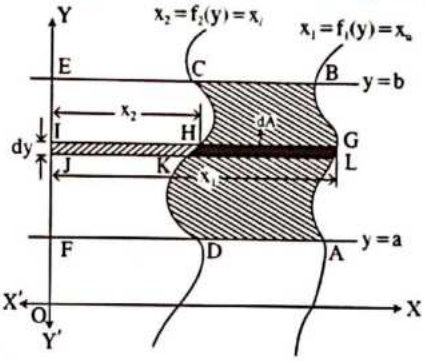


দুইটি বক্ররেখা ও দুইটি x-অক্ষের সমান্তরাল রেখা দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল [y-অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষেত্রফল] নির্ণয়:

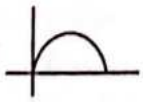
ধরে করি, $x_1 = f_1(y)$ এবং $x_2 = f_2(y)$ দুইটি ফাংশন এবং $y = a$ এবং $y = b$ দুইটি সরলরেখা (x-অক্ষের সমান্তরাল)। কল্পনা করা হচ্ছে, $x_1 = f_1(y)$ এবং $x_2 = f_2(y)$ এমন দুইটি ফাংশন যেন সব ক্ষেত্রেই $x_1 > x_2$ $[f_1(y) > f_2(y)]$
$y = a$ থেকে $y = b$ পর্যন্ত $x_1 = f_1(y)$ এবং $x_2 = f_2(y)$ এর মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল (ABCD অংশের ক্ষেত্রফল),

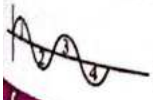
$A = \int_{y=a}^{y=b} dA = \int_a^b (x_1 - x_2)dy$

$\therefore \boxed{A = \int_a^b (x_u - x_l)dy}$ $[\because x_1 = x_u$ এবং $x_2 = x_l]$



Shortcut: ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্পর্কিত কিছু সূত্র:

- $y^2 = 4ax$ এবং $y = mx$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3m^3}$ বর্গ একক
- $x^2 = 4ay$ এবং $y = mx$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2m^3}{3}$ বর্গ একক
- $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4by$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{16ab}{3}$ বর্গ একক
- $y^2 = 4ax$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দ্বারা ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3}$ বর্গ একক
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}\pi ab - \frac{1}{2}ab$ বর্গ একক।
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল πab বর্গ একক
- $\sin x$ ও $\cos x$ এর গ্রাফে প্রতি half cycle  এর জন্য Area = 2 একক।



মোট ক্ষেত্রফল $= 4 \times 2 = 8$ বর্গ একক।

Educationblog24.com

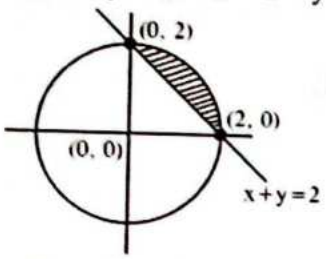
সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + y^2 = 4$ [DB'23]

(গ) সমাকলন পদ্ধতিতে দৃশ্যকল্প-১ ও $x + y = 2$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 = 4$

এবং $x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y$



$\therefore (2 - y)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 4 - 4y + y^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow 2y^2 - 4y = 0 \Rightarrow 2y(y - 2) = 0$

$\therefore y = 0, 2 \therefore x = 2, 0$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রফল $= \int_0^2 \{\sqrt{4 - x^2} - (2 - x)\}\, dx$

$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 - \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2$

$= \left[\frac{2}{2}\sqrt{4 - 2^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{2}{2} - \frac{0}{2}\sqrt{4 - 0^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{0}{2}\right]$

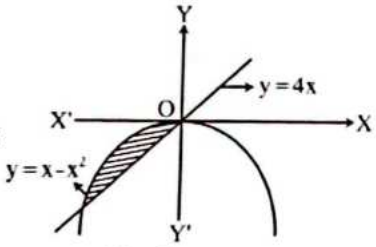
$- \left[2 \times 2 - \frac{2^2}{2} - 2 \times 0 + \frac{0^2}{2}\right]$

$= 2\sin^{-1} 1 - 4 + 2 = 2 \times \frac{\pi}{2} - 2 = \pi - 2$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $(\pi - 2)$ বর্গ একক। **(Ans.)**

02.

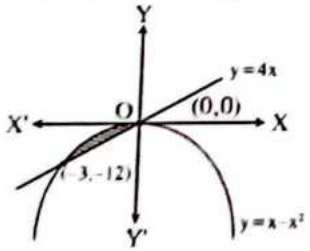
দৃশ্যকল্প-১:



[RB'23]

(গ) দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত চিত্রের ছায়াবৃত্ত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $y = 4x$



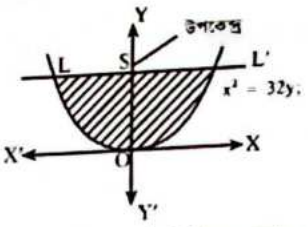
আবার, $y = x - x^2 \Rightarrow 4x = x - x^2 \Rightarrow x^2 + 3x = 0$

$\Rightarrow x(x + 3) = 0 \therefore x = 0, -3; y = 0, -12$

$A_1 = \int_0^{-3} 4x\, dx = 18; A_2 = \int_0^{-3} x - x^2 dx = \frac{27}{2}$

ক্ষেত্রফল $= A_1 - A_2 = 18 - \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

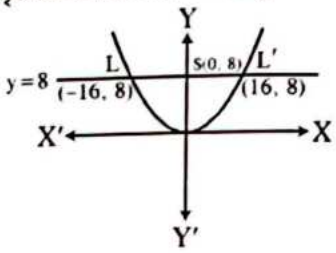
03.



[Ctg.B'23]

(গ) উদ্দীপকে উল্লিখিত পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** পরাবৃত্তের সমীকরণ, $x^2 = 32y$ ..... (i)



$\Rightarrow x^2 = 4 \times 8y \therefore a = 8$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $y = 8$ ..... (ii)

$y = 8$, (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x^2 = 32 \times 8$

$\therefore x = \pm 16$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \int_0^{16} \left(8 - \frac{x^2}{32}\right) dx = 2 \times \left[8x - \frac{1}{32} \times \frac{1}{3}x^3\right]_0^{16}$

$= 2 \times \left(8 \times 16 - \frac{1}{32} \times \frac{1}{3} \times 16^3\right)$

$= 2 \times \frac{256}{3} = \frac{512}{3}$ বর্গ একক

বিকল্প: [y এর সাপেক্ষে যোগজীকরণ করলে]

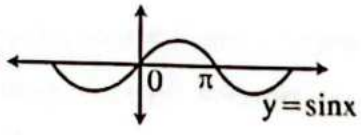
$\therefore$ নির্ণেয় আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^8 \sqrt{32}\sqrt{y}\, dy$

$= 2 \times \sqrt{32} \times \left[\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]^8 = 8\sqrt{2} \times \frac{2}{3} \times \left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^8$

$= \frac{16\sqrt{2}}{3} \times \left(8^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \frac{16\sqrt{2}}{3} \times 16\sqrt{2} = \frac{512}{3}$ বর্গ একক **(Ans.)**

04. (ক) x-অক্ষের সাথে $y = \sin x$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ যে কোনো একটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [SB'23]

(ক) **Sol^n:**



$A = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi}$

$= [-\cos\pi + \cos 0] = 1 + 1 = 2$

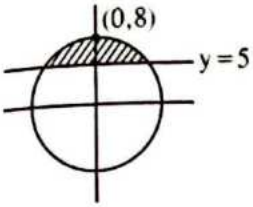
05. দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 = 64$ [JB'23]

$y = 5$.

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর বৃত্ত ও সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 = 64 \Rightarrow x^2 = 64 - y^2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{64 - y^2}$



$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2 \times \int_5^8 \sqrt{64 - y^2}\, dy$

ধরি, $y = 8\sin\theta$

$\Rightarrow dy = 8\cos\theta\, d\theta$

y	5	8
θ	$\sin^{-1}\frac{5}{8}$	$\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 2 \times \int_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{64 - 64\sin^2\theta} \cdot 8\cos\theta\, d\theta$

$= 2 \times \int_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}} 8 \times \cos\theta \times 8\cos\theta\, d\theta$

$= 64 \int_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\, d\theta$

$= 64 \int_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta + 1)\, d\theta$

$= 64 \left[\frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta\right]_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 64 \left[\frac{1}{2}\sin(\pi) + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{5}{8}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)\right]$

$= 64 \left[0 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{5}{8} \times \frac{\sqrt{8^2 - 5^2}}{8} - \sin^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)\right]$

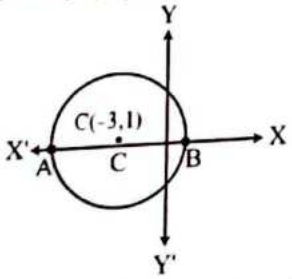
$= 64 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{5\sqrt{39}}{64} - \sin^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)\right]$

$= 32\pi - 5\sqrt{39} - 64\sin^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)$ **(Ans.)**

06. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15$ **[BB'23]**

(গ) $f(x, y) = 0$ এবং x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল বের কর।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15$



$F(x, y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$

$\Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$

$\Rightarrow (y - 1)^2 = 5^2 - (x + 3)^2$

$\Rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{5^2 - (x + 3)^2}$

x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশ x অক্ষের নিচে অবস্থিত তাই,

$y - 1 = -\sqrt{5^2 - (x + 3)^2}$

$\Rightarrow y = 1 - \sqrt{5^2 - (x + 3)^2}$

A ও B বিন্দুর জন্য, $y = 0$

$X^2 + 0^2 + 6x - 2 \times 0 - 15 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 6x - 15 = 0$

$\Rightarrow x = -3 + 2\sqrt{6}, -3 - 2\sqrt{6}$

$\therefore \int_{-3+2\sqrt{6}}^{-3-2\sqrt{6}} \left\{1 - \sqrt{25 - (x + 3)^2}\right\} dx$

$= \left[x - \frac{x+3}{2}\sqrt{25 - (x + 3)^2} - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{x+3}{5}\right]_{-3+2\sqrt{6}}^{-3-2\sqrt{6}}$

$= 29.337$ বর্গ একক। (প্রায়) **(Ans.)**

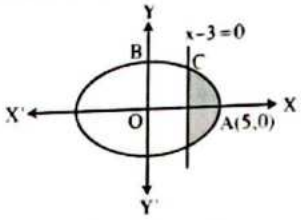
07. $g(x, y) = 9x^2 + 25y^2 - 225$ **[Din.B'23]**

$h(x) = x - 3.$

(গ) $g(x, y) = 0$ এবং $h(x) = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $g(x, y) = 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$

এবং $h(x) = x - 3 = 0$



এখানে, $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$

$\Rightarrow \frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \therefore A(5, 0)$

আবার, $9x^2 + 25y^2 = 225$

$\Rightarrow 25y^2 = 225 - 9x^2 \Rightarrow y = \pm\frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$

$\therefore$ ক্ষেত্র OAC এর ক্ষেত্রফল $= y = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$ বক্ররেখা এবং

$x = 3$ ও $x = 5$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \int_3^5 y\, dx = \int_3^5 \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}\, dx$

$= \frac{3}{5}\int_3^5 \sqrt{5^2 - x^2}\, dx$

$= \frac{3}{5}\left[\frac{x\sqrt{5^2 - x^2}}{2} + \frac{5^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}\right]_3^5$

$= \frac{3}{5}\left[0 + \frac{25}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{3 \times 4}{2} - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}\right]$

$= \frac{3}{5}\left[\frac{25\pi}{4} - 6 - \frac{25}{2}\sin^{1}\frac{3}{5}\right]$

$\therefore$ আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \frac{3}{5}\left[\frac{25\pi}{4} - 6 - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}\right]$

$= \frac{15\pi}{2} - \frac{35}{5} - 15\sin^{-1}\frac{3}{5}$ বর্গ একক **(Ans.)**

08. দৃশ্যকল্প -২: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ একটি উপবৃত্ত **[RB'22]**

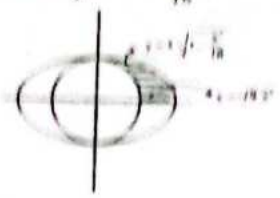
$x^2 + y^2 = 9$ একটি বৃত্ত

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর উপবৃত্ত এবং বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ১ম চতুর্ভাগের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Educationblog24.com

(গ) Sol": দৃশ্যকল্প ৯: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{9}=1-\frac{x^2}{16}$

$\therefore y=3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$ ..... (i)



$Y=0$ হলে,

(i) $\Rightarrow \frac{x^2}{16}+0=1$

$\Rightarrow x^2=16 \therefore x=\pm 4$

$\therefore$ ছেদবিন্দু $(4,0)$ এবং $(-4,0)$

এখন, (i) নং রেখা দ্বারা ১ম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$A_1=\int_0^4 y\,dx;\ A_1=\int_{x=0}^{4} 3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}dx$

ধরি, $x=4\sin\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta}=4\cos\theta \therefore dx=4\cos\theta\,d\theta$

$\therefore A_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{1-\frac{(4\sin\theta)^2}{16}}\cdot 4\cos\theta\,d\theta$

x	θ
0	0
4	$\frac{\pi}{2}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 12\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\times 2\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=6\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\,d\theta$

$A_1=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}|1+\cos 2\theta|\,d\theta=6\left|\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=6\left|\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-\left(0+\frac{\sin 0}{2}\right)\right|=6\left|\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-0\right|$

$A_1=3\pi$

আবার, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2=9$

$\therefore y=\sqrt{9-x^2}$ ..... (ii)

আবার, $y=0$ হলে, $x^2=9 \therefore x=\pm 3$

$\therefore$ x অক্ষের ছেদবিন্দু $(-3,0)$ ও $(3,0)$

এখন, (ii) নং সমীকরণ দ্বারা ১ম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A_2=\int_{x=0}^{3} y\,dx=\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-(3\sin\theta)^2}\cdot 3\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}\cdot 3\cos\theta\,d\theta$

ধরি, $x=3\sin\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta}=3\cos\theta \therefore dx=3\cos\theta\,d\theta$

এখানে, $A_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2\theta\,d\theta$

x	θ
0	0
3	$\frac{\pi}{2}$

$=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2 d\theta)=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$

$=\frac{9}{2}\left|\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{9}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-(0+0)\right\}=\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right) \therefore A_2=\frac{9\pi}{4}$

সুতরাং, উপবৃত্ত ও বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ১ম চতুর্ভাগের ক্ষেত্রফল-

$A=|A_1-A_2|=\left|3\pi-\frac{9\pi}{4}\right|=\left|\frac{12\pi-9\pi}{4}\right|=\frac{3\pi}{4}$ (Ans.)

9. $g(x,y)=16x^2+25y^2-400$. [ঢা'২২]

(গ) $g(x,y)=0$ সমীকরণ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের অর্থায়নকৃত ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

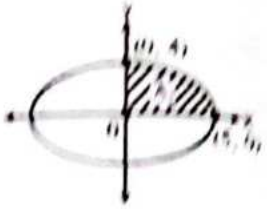
(গ) Sol": $g(x,y)=0 \Rightarrow 16x^2+25y^2-400=0$

$\Rightarrow 16x^2+25y^2=400$

$\Rightarrow \frac{16x^2}{400}+\frac{25y^2}{400}=1 \Rightarrow \left[\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\right]$

$25y^2=400-16x^2$

$\Rightarrow y^2=16-\frac{16}{25}x^2$



বর্গ একক।

$\Rightarrow y=1\sqrt{16-\frac{16}{25}x^2}$

$\therefore y=\sqrt{16-\frac{16}{25}x^2}$

১ম চতুর্ভাগে ক্ষেত্রফল, $A_1=\int_0^5 y\,dx$ বর্গ একক।

$=\int_0^5\sqrt{16-\frac{16}{25}x^2}dx$

ধরি, $x=5\sin\theta \therefore dx=5\cos\theta\,d\theta$

x	0	5
θ	0	$\frac{\pi}{2}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16-16\sin^2\theta}\,5\cos\theta\,d\theta$

$=4\times 5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=20\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

[১ম চতুর্ভাগে $x>0, y>0$]

$=10\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\,d\theta=10\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$

$=10\left|\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=10\left|\frac{\pi}{2}+\frac{0}{2}-0\right|=5\pi$ বর্গ একক।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল, $A=2A_1=2\times 5\pi$ বর্গ একক

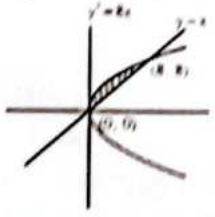
$=10\pi$ বর্গ একক। (Ans.)

10. দৃশ্যকল্প-২: $y^2=8x, x-y=0$. [BB'22]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত পরাবৃত্ত ও সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) Sol": দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই, $y^2=8x$ ..... (i)

$x-y=0 \therefore x=y$ ..... (ii)



(i) এ (ii) বসিয়ে পাই, $x^2=8x \Rightarrow x^2-8x=0$

$\Rightarrow x(x-8)=0 \therefore x=0,8$

$x=0$ হলে, $y=0$; $x=8$ হলে, $y=8$

$\therefore$ পরাবৃত্ত ও সরলরেখার ছেদবিন্দু $(0,0)$ এবং $(8,8)$

Educationblog24.com

∴ পরাবৃত্ত ও সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল;

$A = \int_{x=0}^{8}(y_1 - y_2)dx$ [যখন, $y_1 = \sqrt{8x}$ এবং $y_2 = x$]

$= \int_0^8 (\sqrt{8x} - x)dx, = \left[\sqrt{8}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^8$

$= \left[\frac{2\sqrt{8}}{3}(x)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^8 = \left(\frac{2\sqrt{8}}{3}\cdot(8)^{\frac{3}{2}} - \frac{8^2}{2}\right) - 0$

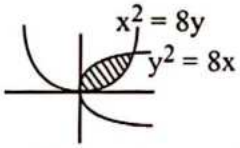
$A = \frac{128}{3} - 32 = \frac{32}{3}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

11. $g(x) = y^2 - 8x$ এবং $h(x) = x^2 - 8y$. **[JB'21]**

(গ) $g(x) = 0$ এবং $h(x) = 0$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** $g(x) = 0 \Rightarrow y^2 - 8x = 0 \Rightarrow y^2 = 8x \cdots\cdots$ (i)

$h(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 8y \cdots\cdots$ (ii)



(i) ও (ii) এর ছেদবিন্দুতে $y^4 = 64x^2 = 64 \times 8y$

$\Rightarrow y(y^3 - 8^3) = 0 \Rightarrow y = 0$ অথবা $y = 8$

$y = 0$ হলে $x = 0$ এবং $y = 8$ হলে $x = 8$

∴ ক্ষেত্রফল $= \int_0^8 (y_2 - y_1)\,dx = \int_0^8 \left(\sqrt{8x} - \frac{x^2}{8}\right)dx$

$= \left[\sqrt{8}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{24}\right]_0^8 = \frac{128}{3} - \frac{64}{3} = \frac{64}{3}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

12. $y = 2x \ldots\ldots$ (i), $x^2 + y^2 = 8x \ldots\ldots$ (ii) **[BB'19]**

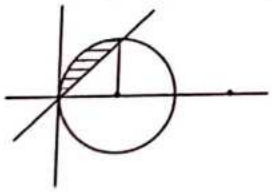
(গ) (i) নং ও (ii) নং বক্ররেখাদ্বয়ের সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** $y = 2x \ldots\ldots$ (i) ; $x^2 + y^2 = 8x \ldots\ldots$ (ii)

$\Rightarrow x^2 + 4x^2 = 8x \Rightarrow 5x^2 - 8x = 0$

∴ $x(5x - 8) = 0$ ∴ $x = 0$ অথবা $x = \frac{8}{5}$

(ii) নং একটি বৃত্ত। যার কেন্দ্র (4, 0)



∴ ক্ষেত্রফল $= \int_0^{8/5}(\sqrt{8x - x^2} - 2x)dx$

এখন, $\int_0^{\frac{8}{5}} 2x dx = \left[2.\frac{x^2}{2}\right]_0^{8/5} = \frac{64}{25}$ বর্গ একক

আবার, $\int_0^{\frac{8}{5}} \sqrt{8x - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{8}{5}} \sqrt{16 - 16 + 8x - x^2}\,dx$

$= \int_0^{8/5} \sqrt{16 - (x-4)^2}dx$

ধরি, $x - 4 = 4\sin\theta \Rightarrow dx = 4\cos\theta\,d\theta$

যখন, $x = 0$, তখন, $\theta = -\frac{\pi}{2}$

যখন, $x = \frac{8}{5}$, তখন, $\theta = \sin^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)$

তাহলে, $\int_0^{\frac{8}{5}} \sqrt{8x - x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\sin^{-1}(-\frac{3}{5})} \sqrt{16 - 16\sin^2\theta}\,.4\cos\theta\,d\theta$

$= 16\int_{-\pi/2}^{\sin^{-1}(-\frac{3}{5})} \cos^2\theta d\theta = 8\int_{-\pi/2}^{\sin^{-1}(-\frac{3}{5})}(1 + \cos 2\theta)d\theta$

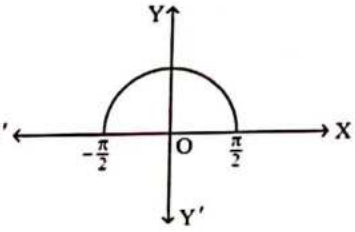
$= 8\left[x + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\sin^{-1}(-\frac{3}{5})} = 3.578$ বর্গ একক

∴ ক্ষেত্রফল $= 3.578 - \frac{64}{25} = 1.018$ বর্গ একক। **(Ans.)**

13. দৃশ্যকল্প-২: $y = \cos x$ **[CB'19]**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত ফাংশনটি দ্বারা x অক্ষের সাথে আবদ্ধ একটি চাপের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:**



ক্ষেত্রফল $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

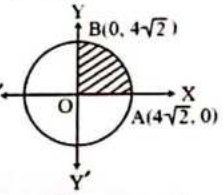
$= 2\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 2[\sin x]_0^{\pi/2} = 2.\sin\frac{\pi}{2} = 2$ বর্গ একক

∴ একটি চাপের ক্ষেত্রফল $= 2$ বর্গ একক **(Ans.)**

14. দৃশ্যকল্প-২: $2x^2 + 2y^2 = 64$. **[DB'17]**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ দ্বারা প্রথম চতুর্ভাগের আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:**



প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $2x^2 + 2y^2 = 64$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2$

অতএব, বৃত্তটির কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ $= 4\sqrt{2}$

$2x^2 + 2y^2 = 64 \Rightarrow y = \sqrt{32 - x^2}$

অতএব, ১ম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = OAB ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_0^{4\sqrt{2}} \sqrt{32 - x^2}\,dx$

ধরি, $x = 4\sqrt{2}\sin\theta$ তাহলে, $dx = 4\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

∴ OAB ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 32\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$

$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta = 16\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

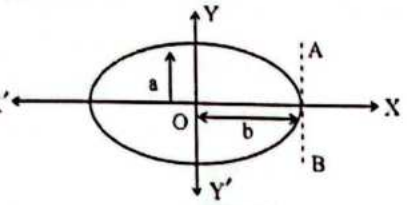
$= 16\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - 0 - \frac{\sin\frac{0}{2}}{2}\right] = 8\pi$ বর্গ একক। **(Ans.)**

Educationblog24.com

15. $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ একটি বক্ররেখা। [Din.B'17]

(গ) $b > a$ হলে উদ্দীপকে প্রদত্ত বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের অর্ধাংশের ক্ষেত্রফল বের কর।

(গ) Sol^n:



$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \therefore y=\pm a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}$

$\therefore$ AB এর equation, $x = b$

এখন, $y=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}$, x অক্ষ

y অক্ষ এবং $x = b$ দ্বারা আবদ্ধক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$\int_0^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}\,dx = \frac{a}{b}\int_0^b \sqrt{b^2-x^2}\,dx$

ধরি, $x = b\sin\theta, \therefore dx = b\cos\theta$, Then, $x = b, \theta = \frac{\pi}{2}$

$x = 0, \theta = 0$

$\therefore \frac{a}{b}\int_0^b \sqrt{b^2-x^2}\,dx = \frac{a}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} b^2\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta$

$= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\,d\theta = \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$

$= \frac{ab}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = \frac{ab}{4}\pi$

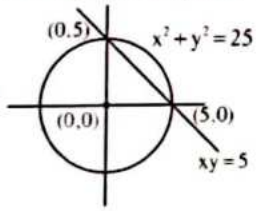
$\therefore$ অর্ধ বক্রক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$\frac{\pi ab}{4}\times 2 = \frac{\pi ab}{2}$ বর্গ একক **(Ans.)**

16. দৃশ্যকল্প-২: $2x^2 + 2y^2 = 50$ [রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]

(গ) যোগজীকরণের সাহায্যে দৃশ্যকল্প-২ এবং $x + y = 5$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n:



দেওয়া আছে, $2x^2 + 2y^2 = 50$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 25 \ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $x + y = 5 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(ii) হতে y এর মান (i)-এ বসিয়ে পাই, $x^2 + (5 - x)^2 = 25$

$\Rightarrow x^2 + 25 - 10x + x^2 = 25$

$\Rightarrow x^2 - 5x = 0 \therefore x(x - 5) = 0$

$\therefore x = 0, 5 \therefore y = 5, 0$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল $= \int_0^5\{\sqrt{25-x^2}-(5-x)\}\,dx$

$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{25-x^2}+\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}-5x+\frac{x^2}{2}\right]_0^5$

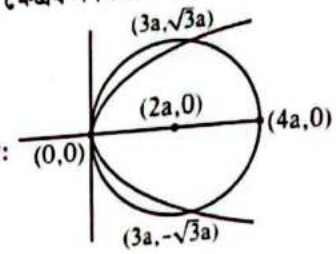
$= \frac{5}{2}\sqrt{25-25}+\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{5}{5}-25+\frac{25}{2}$

$= \frac{25\pi}{4}-\frac{75}{2}$ বর্গ একক **(Ans.)**

17. $v(x, y) = x^2 - 4ax + y^2$ [ঢাকা কলেজ]

(গ) $v(x, y) = 0$ এবং $y^2 = ax$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n:



প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়, $v(x, y)$

$= x^2 - 4ax + y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $y^2 = ax \ldots\ldots\ldots$ (ii)

Y^2 এর মান (i)-এ বসিয়ে পাই, $x^2 - 4ax + ax = 0$

$\Rightarrow x(x - 3a) = 0 \therefore x = 0, 3a; y = 0, \pm\sqrt{3}a$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^{3a}\sqrt{ax}\,dx + 2\int_{3a}^{4a}\sqrt{4ax-x^2}\,dx$

$= 2a\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{3a} + 2\int_{3a}^{4a}\sqrt{4a^2-(x^2-4ax+4a^2)}\,dx$

$= 2a\times\frac{2}{3}(3a)^{\frac{3}{2}} + 2\int_{3a}^{4a}\sqrt{(2a)^2-(x-2a)^2}\,dx$

$= \frac{4}{3}a(3a)^{\frac{3}{2}} + 2\left[\frac{x-2a}{2}\sqrt{(2a)^2-(x-2a)^2}+\frac{(2a)^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2a}\right]_{3a}^{4a}$

$= \frac{4}{3}a(3a)^{\frac{3}{2}} + 2\left[2a^2\sin^{-1}2-\frac{a^2}{2}\sqrt{3}+2a^2\sin^{-1}\frac{3}{2}\right]$

বর্গ একক

18. দৃশ্যকল্প-২: $x = 5\cos\theta, y = 3\sin\theta$ একটি উপবৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ। [আদমজী ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, ঢাকা]

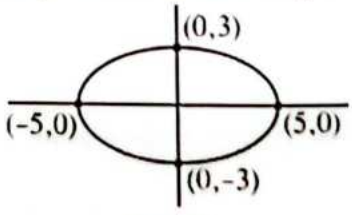
(গ) দৃশ্যকল্প-২ তে বর্ণিত সঞ্চারপথ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে,

$x = 5\cos\theta$	এবং $y = 3\sin\theta$
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{5}$	$\sin\theta = \frac{y}{3}$

$\therefore \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2} = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225$ যা একটি উপবৃত্ত।



$\therefore$ ক্ষেত্রফল: $4\times\int_0^5\sqrt{\frac{225-9x^2}{25}}\,dx = \frac{4}{5}\int_0^5 3\sqrt{5^2-x^2}\,dx$

$= \frac{12}{5}\left[\frac{x}{2}\sqrt{5^2-x^2}+\frac{5^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}\right]_0^5 = \frac{12}{5}\left[\frac{25}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]$

$= 15\pi$ বর্গ একক **(Ans.)**

Educationblog24.com

নিজে করো

19. $y = \frac{1}{8}x^2$ [BB'23]
(গ) দৃশ্যকল্পে উল্লিখিত পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের কর। [Ans: $\frac{1}{384}$ বর্গ একক]

20. $Q(x,y) = x^2 + y^2 - 25$, $L = x - 3$ [CB'23]
(গ) উদ্দীপকের আলোকে: $Q(x,y) = 0$ এবং $L = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[Ans: $\frac{25\pi}{2} - 12 - 25\sin^{-1}\frac{3}{5}$]

21. $g(x,y) = 25x^2 + 36y^2 - 900$. [MB'23]
(গ) $g(x,y) = 0$ বক্ররেখা $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[Ans: $\frac{5}{6}\left(6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$ বর্গ একক]

22. $g(x,y) = 16x^2 + 25y^2 - 400$ [Ctg.B'22]
(গ) $g(x,y) = 0$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের অর্ধাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: 10π বর্গ একক]

23. দৃশ্যকল্প-২: $y^2 = 2x$. [JB'22]
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এবং $x = 3y$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: 18 বর্গ একক]

24. $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ [CB'22]
(গ) যোগজীকরণের সাহায্যে $f(x,y) = 36$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: 6π বর্গ একক]

25. $g(x) = x^2$ দুটি ফাংশন। [Din.B'22]
(গ) $y = 4g(x)$ ও $y = 2x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: $\frac{1}{12}$ বর্গ একক]

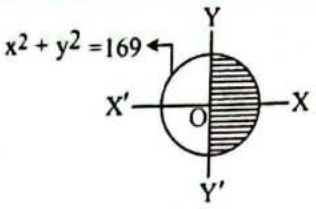
26. দৃশ্যকল্প-২: $9x^2 + 25y^2 = 225$ [DB'21]
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর উপবৃত্ত ও $x - 3 = 0$ সরলরেখা দ্বারা ১ম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[Ans: $\frac{15\pi}{4} - \frac{18}{5} - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$ বর্গ একক]

27. $g(x) = 2x^2 + 2y^2$. [JB'21]
(গ) নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে $g(x) = 72$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: 36π বর্গ একক]

28. $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - 36$ [MB'22]
(গ) $f(x,y) = 0$ কণিক দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: 6π বর্গ একক]

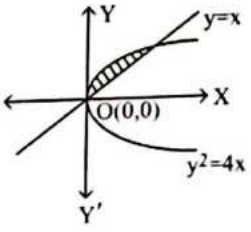
29. দৃশ্যকল্প-২: $y^2 = 12x$. [DB'21]
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: 24 বর্গ একক]

30. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$. [Ctg.B'21]
(গ) উদ্দীপকের উপবৃত্ত এবং $x = 3$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[Ans: $10\pi - \frac{15\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক]

31. 

[SB'21]
(গ) নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে চিত্রের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: $\frac{169\pi}{2}$ বর্গ একক]

32. $Q(x) = x$ [BB'21]
(গ) ক্যালকুলাসের সাহায্যে $4\{Q(x)\}^2 + 9\{Q(y)^2\}^2 = 36$ বক্ররেখাটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: 6π]

33. চিত্র: 

[CB'21]
(গ) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[Ans: $\frac{8}{3}$ বর্গ একক]

34. $g(x,y) = x^2 + y^2 - 225$. [MB'21]
(গ) $g(x,y) = 0$ দ্বারা x অক্ষের উপরিভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: $\frac{225\pi}{2}$ বর্গ একক]

35. $g(x,y) = 9x^2 + 25y^2$ [DB'19]
(গ) $g(x,y) = 225$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: 15π বর্গ একক]

36. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 6x$ ও একটি সরলরেখার সমীকরণ $y = x$. [RB'19]
(গ) উদ্দীপকের পরাবৃত্ত ও সরলরেখার দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: 6 বর্গ একক]

37. $f(x) = x$ ... ... (i) [Ctg.B'19]
$y^2 = 7x$ ... ... (iii)
(গ) (i) নং সরলরেখার ও (iii) নং বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: $\frac{49}{6}$ বর্গ একক]

38. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 16$ [SB'19]
(গ) $f(x,y) = 0$ বক্ররেখা এবং $x = 2$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[Ans: $\left(\frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right)$ sq. unit]

39. $f(x,y) = 16x^2 + 25y^2 - 400$ [Din.B'19]
(গ) সমাকলনের সাহায্যে $f(x,y) = 0$ দ্বারা x অক্ষের উপরিভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[Ans: 10π বর্গ একক]

Educationblog24.com

40. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x + 6$. [RB, Ctg.B, BB, CB'18]
দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = x^2$
(গ) $g(x)$ বক্ররেখা এবং $f(x)$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: $\frac{125}{6}$ বর্গ একক]

41. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$, $x = 3$ [RB'17]
(গ) উদ্দীপকের উপবৃত্ত এবং সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[Ans: $\frac{5}{3}\left(6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$ বর্গ একক]

42. $\varphi(x, y) = 9x^2 + 16y^2 - 144$; $f(x) = x - 2$ [SB'17]
(গ) $\varphi(x, y) = 0$ ও $f(x) = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: 4.65 বর্গ একক]

43. দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 = 36$. [BB'17]
(গ) দৃশ্যকল্প ২-এর আলোকে বৃত্তটি দ্বারা আবদ্ধক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমাকলন পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।
[Ans: 36π বর্গ একক]

44. $4x^2 + 9y^2 = 36$ [CB'17]
(গ) যোগজীকরণের সাহায্যে প্রদত্ত উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans: 6π বর্গ একক]

T-17: বিবিধ

সৃজনশীল প্রশ্ন (ক, খ ও গ)

01. $f(x) = \cos x$ [Ctg.B'23]
(গ) উদ্দীপকের আলোকে $\int\{f(x)\}^3\,dx + \int\sqrt{1-\{f(x)\}^2}\,\ln\{f(x)\}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$

$\therefore \int\{f(x)\}^3dx + \int\sqrt{1-\{f(x)\}^2}\cdot\ln\{f(x)\}dx$

$= \int\cos^3 x\,dx + \int\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\ln(\cos x)\,dx$

$= \int\sqrt{1-\sin^2 x}\cos dx + \int\sin x\cdot\ln(\cos x)\,dx$ ... ... (i)

এখানে $\int\sqrt{1-\sin^2 x}\cos x\,dx$

$= \int\sqrt{1-z^2}dz$ | ধরি, $z = \sin x$

$= \frac{z}{2}\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}z + c_1$ | $dz = \cos x\,dx$

$= \frac{\sin x}{2}\sqrt{1-\sin^2 x} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(\sin x) + c_1$

$= \frac{\sin x\cos x}{2} + \frac{x}{2} + c_1 = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + c_1$

এবং $\int\sin x\ln(\cos x)dx$

$= -\int\ln m\,dm$ | ধরি, $m = \cos x$

$= -(m\ln m - m) + c_2$ | $m = -\sin x\,dx$

$= -\cos x\ln(\cos x) + \cos x + c_2$

$\therefore$ (i) হতে পাই,

$\Rightarrow \int\{(x)\}^3dx + \int\sqrt{1-\{(x)\}^2}\cdot\ln\{f(x)\}dx$

$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} - \cos x\ln(\cos x) + \cos x + c\ [c = c_1 + c_2]$

02. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \tan x$. [DB'21]
দৃশ্যকল্প-২: $9x^2 + 25y^2 = 225$
(খ) যোগজ নির্ণয় কর: $\int\frac{dx}{5+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

(খ) **Sol^n:** $\int\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \tan\left(\frac{x}{2}-x\right) = \cot x$

ধরি, $\sin x = a(5\sin x + \cos x) + b\frac{d}{dx}(5\sin x + \cos x)$

$= 5a\sin x + a\cos x + 5b\cos x - b\sin x$

$= (5a - b)\sin x + (5b + a)\cos x$

সহগ সমীকৃত করে পাই, $5b + a = 0 \Rightarrow a = -5b$

$5a - b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{26} \therefore a = \frac{5}{26}$

$\therefore \int\frac{dx}{5+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \int\frac{dx}{5+\cot x} = \int\frac{dx}{5+\frac{\cos x}{\sin x}} = \int\frac{\sin x\,dx}{5\sin x+\cos x}$

$= \frac{5}{26}\int\frac{5\sin x+\cos x}{5\sin x+\cos x}dx - \frac{1}{26}\int\frac{5\cos x-\sin x}{5\sin x+\cos x}dx$

$= \frac{5x}{26} - \frac{1}{26}\ln|5\sin x + \cos x| + c$ (Ans.)

03. $f(x) = \frac{1}{1+\sin x-\cos x}$ [Din.B'21]
(খ) x এর সাপেক্ষে $f(x)$ এর সমাকলন কর।

(খ) **Sol^n:** $\int\frac{dx}{1+\sin x-\cos x} = \int\frac{dx}{1+\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} - \frac{\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\frac{x}{2}}}$

$= \int\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{1+\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}-1+\tan^2\frac{x}{2}} = \int\frac{dz}{z^2+z}\ [\because \tan\frac{x}{2} = z$ ধরে]

$= \int\frac{(z+1)-z}{z(z+1)}dz = \int\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)dz = \ln\left|\frac{z}{z+1}\right| + c$

$= \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right| + c$ (Ans.)

04. $l(x) = \sin 2x$ and $g(x) = \log x$
[ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ]
(ক) $\int l\left(\frac{x^\circ}{2}\right)dx$ নির্ণয় কর।
(খ) $\int\frac{\cos 2x}{\left(\sqrt{3+l(x)}\right)^3}dx$ নির্ণয় কর।
(গ) $\int\frac{1}{x\{1+g(x)\}^3}dx$ নির্ণয় কর।

(ক) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $l(x) = \sin 2x \therefore \int l\left(\frac{x^\circ}{2}\right)dx$

$= \int\sin\left(2\times\frac{x^\circ}{2}\right)dx = \int\sin\frac{\pi x}{180}dx = -\frac{180}{\pi}\cos\frac{\pi x}{180} + c$

(খ) **Sol^n:** দেওয়া আছে, $l(x) = \sin 2x$

$\therefore \int\frac{\cos 2x}{\left(\sqrt{3+l(x)}\right)^3}dx = \int\frac{\cos 2x dx}{\left(\sqrt{3+\sin 2x}\right)^3}$

$\frac{1}{2}dz = \cos 2x\,dx$; $\int\frac{\frac{1}{2}dz}{(\sqrt{z})^3} = \frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}dz = \frac{1}{2}\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}$

$= -z^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3+\sin 2x}} + c$ (Ans.)

Educationblog24.com

(গ) Sol^n: দেওয়া আছে, $g(x) = \log x$

$\therefore \int \frac{1}{x(1+g(x))^3}dx = \int \frac{dx}{x(1+\log x)^3}$

ধরি, $1 + \log x = z \Rightarrow \frac{dx}{x} = dz$

এখন, $\int \frac{dz}{z^3} = \frac{z^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{z^2} + c = \frac{-1}{2(1+\log x)^2} + c$

05. $f(x) = \sin x$ |ঢাকা সিটি কলেজ|

(খ) $\int \frac{dx}{1+3\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}^2}$ নির্ণয় কর।

(খ) Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\therefore \int \frac{dx}{1+3\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}} = \int \frac{dx}{1+3\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}^2} = \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

$= \int \frac{dx}{4-3\sin^2 x} = \int \frac{\sec^2 x dx}{4\sec^2 x - 3\tan^2 x}$

$= \int \frac{\sec^2 x dx}{4+4\tan^2 x - 3\tan^2 x} = \int \frac{\sec^2 x dx}{4+\tan^2 x} = \int \frac{dz}{2^2+z^2}$

[ধরি, $z = \tan x \therefore dz = \sec^2 x\, dx$]

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z}{2} + c = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\tan x}{2} + c$ (Ans.)

06. (ক) $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

|সরকারি বিজ্ঞান কলেজ, ঢাকা|

(ক) Sol^n: $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \int \frac{4}{(2\cos x \sin x)^2}dx$

$= 4\int \frac{dx}{\sin^2 2x} = 4\int \operatorname{cosec}^2 2x\, dx$

$= \frac{4}{2}(-\cot 2x) + c = -2\cot 2x + c$ (Ans.)

MCQ প্রশ্নের জন্য এই অধ্যায়ের বিভিন্ন টাইপের তুলনামূলক গুরুত্ব:

গুরুত্ব	টাইপ	টাইপের নাম	যতবার প্রশ্ন এসেছে	যে বোর্ডে যে বছর এসেছে MCQ
○○○	T-01	যোগজীকরণের সাধারণ সূত্র $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ব্যবহার করে	15	DB, RB'23; Ctg.B'23, 21; JB'23, 21, 19; BB, Din.B'21, 21; CB'22; MB'21; SB'19, 17
○○○	T-02	$\int f(ax+b)\,dx$ আকৃতির	17	DB'23, 21, 17; Mad.B'23; Din.B'22; BB'22, 21, 19; Ctg.B, SB'21
○○○	T-03	প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে 'z' ধরে যোগজীকরণ	8	Din.B'23, 21; SB'22; DB, RB, CB, MB'21; Ctg.B'19
○○○	T-04	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ এবং $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$ আকৃতির	13	Ctg.B'23; Din.B'23, 21, 19; MB'23, 22; BB, CB'21, 17; DB'21; RB'19
	T-05	Exponential আকৃতির	-	
○	T-06	$\int uv\,dx$ সংক্রান্ত	02	CB'23
	T-07	$\int \sin ax \cdot \cos bx dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx dx$ আকৃতি	-	-
○	T-08	$\int \frac{dx}{1+\sin ax}, \int \frac{dx}{1-\sin ax}, \int \frac{dx}{1+\cos ax}, \int \frac{dx}{1-\cos ax}$ আকারের	2	Ctg.B'23, 19
○○○	T-09	$\int \sin^m dx$; $\int \cos^m dx$; $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ আকারের	10	RB, MB'23; BB'22, 21; JB'22; DB, CB'21; Ctg.B'21, 17; SB'19
	T-10	$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ আকারের যেখানে a, b, c যেকোনো ধ্রুবসংখ্যা	-	-
	T-11	$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx, \int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ আকারের; যেখানে a, b, c, p, q যেকোন ধ্রুবক	-	-
○	T-12	$\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$; $\int (ax+b)\sqrt{cx+d}\,dx$ $\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}$ আকারের	2	CB'23; BB'17
○○	T-13	অংশক্রমে সমাকলনের ক্ষেত্রে: $\int e^{ax}\{af(x) + f'(x)\}dx$ আকৃতি	7	SB'23, 22; Ctg.B, BB'22; MB'21; DB'19
	T-14	আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সমাকলন	-	
○○○	T-15	নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য এর প্রয়োগ ও সাধারণ সমস্যা	66	DB, RB, Ctg.B, CB'23; 22, 21, 19, 17; SB, JB, Din.B'23, 22, 21, 19; BB'23, 21, 17; MB'23, 22, 21; Mad.B'23; All.B'18
○○○	T-16	নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত	18	Ctg.B, BB, JB'23, 21; SB'23, 22, 21, 17; Din.B'23, 19, 17; MB'22; DB, CB'21

Educationblog24.com

বিগত বোর্ড পরীক্ষামূহের MCQ প্রশ্ন

01. $f(x) = \ln(2x)$ হলে- [DB'23]
(i) $f'(x) = \frac{1}{x}$
(ii) $\int f(x)dx = x(\ln|2x| - 1) + c$
(iii) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2} - \ln 2$.
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

02. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{(1+\sin 2x)}\, dx = ?$ [DB'23]
(a) -2 (b) 0 (c) 1 (d) 2

03. যদি $\int P^x dx = F(x) + C$ হয়, তবে $F(x)$ এর মান কোনটি? [DB'23]
(a) $\frac{P^x}{\log_e P}$ (b) $P^x \log_e P$ (c) xP^{x-1} (d) $\frac{P^{x+1}}{x+1}$

04. যদি $\int \text{cosec}^2(5-8x)dx = a\cot(5-8x) + c$ হয়, তবে a এর মান কোনটি? [DB'23]
(a) -8 (b) $-\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{8}$ (d) 8

05. $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} dx = ?$ [RB'23]
(a) $\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$ (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$
(c) $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$ (d) $\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$

06. $\int e^{-5x} dx = ?$ [RB'23]
(a) $\frac{e^{-5x}}{5} + c$ (b) $-\frac{e^{-5x}}{5} + c$
(c) $5e^{-5x} + c$ (d) $-5e^{-5x} + c$

07. $\int_1^2 e^{2x+5} dx = ?$ [RB'23]
(a) $\frac{1}{2}(e^7 - e^9)$ (b) $2(e^9 - e^7)$
(c) $\frac{1}{2}(e^9 - e^7)$ (d) $2(e^9 + e^7)$

08. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = ?$ [RB'23]
(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) ∞

09. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos x dx =$ কত? [Ctg.B'23]
(a) $-\frac{5}{24}$ (b) $-\frac{1}{24}$ (c) $\frac{1}{24}$ (d) $\frac{5}{24}$

10. $\int \cos^2 3x\, dx =$ কত? [Ctg.B'23]
(a) $\frac{1}{2}(x + \sin 6x) + c$ (b) $\frac{1}{2}(x - \sin 6x) + c$
(c) $\frac{1}{12}(6x + \sin 6x) + c$ (d) $\frac{1}{12}(6x - \sin 6x) + c$

11. $\int \frac{1}{x^2} dx =$ কত? $[x \neq 0]$ [Ctg.B'23]
(a) $-\frac{1}{3x^3} + c$ (b) $-\frac{1}{x} + c$
(c) $\frac{1}{3x^3} + c$ (d) $\frac{1}{x} + c$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

01. d	02. d	03. a	04. c	05. a	06. b	07. c	08. b	09. c	10. c	11. b

01. (i) $f(x) = \ln(2x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x}\cdot 2 = \frac{1}{x}$
(ii) $\int f(x)\,dx = \int \ln(2x)\,dx = \ln 2\int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\ln 2x)\int dx\right\}dx$
$= x\ln 2x - \int \frac{1}{2x}\cdot 2\cdot x\,dx = x\ln|2x| - x + c = x(\ln|2x| - 1) + c$
(iii) $\int_1^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = [x(\ln|2x| - 1)]_1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(0-1) - 1\cdot(\ln 2 - 1)$
$= -\frac{1}{2} - \ln 2 + 1 = \frac{1}{2} - \ln 2$ সুতরাং (i), (ii) ও (iii) সবগুলোই সঠিক।

02. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1+\sin 2x)}dx$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x)}dx$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin x + \cos x)}dx$
$= [-\cos x + \sin]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + \cos 0 - \sin 0$
$= -0 + 1 + 1 - 0 = 2$

03. $\frac{d}{dx}(P^x) = \frac{P^x \log_e P}{1} = \int P^x \cdot \log_e P\, dx = P^x + c$
$\Rightarrow \log_e P \times \int P^x\, dx = P^x + c$
$\Rightarrow \int P^x\, dx = \frac{P^x}{\log_e P} + c = F(x) + c \therefore F(x) = \frac{P^x}{\log_e P}$

04. $\int \text{cosec}^2(5-8x)\,dx = -\frac{1}{8}\int \text{cosec}^2(5-8x)\,d(5-8x)$
$= \frac{1}{8}\cot(5-8x) + c$
এখন, $\frac{1}{8}\cot(5-8x) + c = a\cot(5-8x) + c$ হতে পাই, $a = \frac{1}{8}$

05. ধরি, $x = \sqrt{5}\sin\theta \Rightarrow dx = \sqrt{5}\cos\theta\, d\theta$ এবং $x = \sqrt{5}\sin\theta$ হলে,
$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{5}} \therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) \therefore \int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}dx = \int \frac{\sqrt{5}\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{5-5\sin^2\theta}}$
$= \int \frac{\sqrt{5}\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{5}\times\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta} = \int d\theta + c = \theta + c = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$

06. ধরি, $-5x = z \Rightarrow -5dx = dz$
$\therefore dx = \frac{-1}{5}dz$
$\int e^{-5x}dx = \int e^z \times \frac{-1}{5}dz = -\frac{1}{5}\int e^z dz$
$= -\frac{1}{5}e^z + c = -\frac{e^{-5x}}{5} + c$

07. ধরি, $2x + 5 = z \Rightarrow 2dx = dz \therefore dx = \frac{1}{2}dz$

x	1	2
z	7	9

$\int_1^2 e^{2x+5}dx = \int_7^9 e^z \cdot \frac{1}{2}dz = \frac{1}{2}[e^z]_7^9 = \frac{1}{2}(e^9 - e^7)$

08. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

09. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\cos x\, dx = \frac{1}{24}$ [using calculator]
বিকল্প:
ধরি $z = \sin x$
$\Rightarrow dz = \cos x\, dx$

x	0	$\frac{\pi}{6}$
z	0	$\frac{1}{2}$

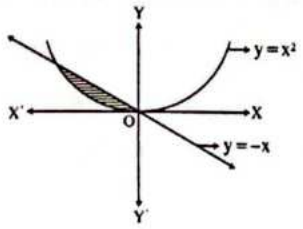
$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\cos x\, dx$
$= \int_0^{\frac{1}{2}} z^2\, dz = \frac{1}{3}[z^3]_0^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} - 0\right) = \frac{1}{24}$

10. $\int \cos^2 3x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\cos^2 3x\, dx$
$= \frac{1}{2}\int(1 + \cos 6x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 6x}{6}\right] + c$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{6x + \sin 6x}{6}\right) + c = \frac{1}{12}(6x + \sin 6x) + c$

11. $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$

Educationblog24.com

12. [Ctg.B'23]



চিত্রের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

(a) $-\frac{5}{6}$ (b) $-\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{5}{6}$

13. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+2}dx$ = কত? [Ctg.B'23]

(a) $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ (b) $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ (c) $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ (d) $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

14. $\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$ =? [SB'23]

(a) $1-\ln 2$ (b) $\ln 2$ (c) $\ln 2-1$ (d) $-\ln 2$

15. $\int e^x\left(\sin 3x+\frac{3}{\sec 3x}\right)dx$ =? [SB'23]

(a) $3e^x \sin 3x$ (b) $e^x \sin 3x$
(c) $3e^x \cos 3x$ (d) $e^x \cos 3x$

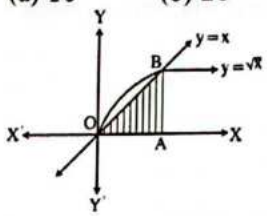
16. $\int e^x(x+1)dx$ =? [SB'23]

(a) $x+e^x+c$ (b) e^x+x+c
(c) $e^x x^2+c$ (d) xe^x+c

17. $y = 5x$, x-অক্ষ এবং $x = 4$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গএকক? [SB'23]

(a) 10 (b) 20 (c) 40 (d) 80

18.



চিত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [BB'23]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{3}{2}$ (d) 2

19. $f(x) = \sin 2x$ হলে- [BB'23]

(i) $\int f(x)\,dx = -\frac{\cos 2x}{2}+c$

(ii) $\int \sqrt{1+f(x)}\,dx = \sin x-\cos x+c$

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-f(x)}\,dx = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

20. $\int e^{-10x}dx$ =কত? [JB'23]

(a) $e^{-10x}+c$ (b) $-10e^{-10x}+c$
(c) $-\frac{e^{-10x}}{10}+c$ (d) $-e^{-10x}+c$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

12. c	13. a	14. a	15. b	16. d	17. c	18. a	19. a	20. c

12. দেওয়া আছে, $y = -x$ এবং $y = x^2$

$\Rightarrow -x = x^2 \Rightarrow x(x+1) = 0$

$\therefore x = 0, -1$

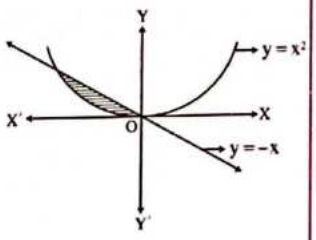
$x = 0$ হলে $y = 0$;

$x = -1$ হলে $y = 1$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \int_0^{-1}(x^2+x)dx$

$= \frac{1}{3}[x^3]_0^{-1} + \frac{1}{2}[x^2]_0^{-1}$

$= -\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$



13. ধরি, $z = x^3+2$; $dz = 3x^2\,dx$

x	0	1
z	2	3

$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+2}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+2}dx = \frac{1}{3}\int_2^3 \frac{dz}{z} = \frac{1}{3}[\ln|z|]_2^3$

$= \frac{1}{3}[\ln 3 - \ln 2] = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

14. $\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{1+x-1}{1+x}dx = \int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx$

$= [x-\ln|1+x|]_0^1$

$= 1-\ln 2-0+0 = 1-\ln 2$

15. $\int e^x\left(\sin 3x+\frac{3}{\sec 3x}\right)dx$

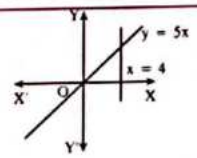
ধরি, $f(x) = \sin 3x$ এবং $f'(x) = 3\cos 3x = \frac{3}{\sec 3x}$

তাহলে, $\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx = e^x f(x)+c = e^x \sin 3x+c$

16. $\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx = e^x f(x)+c$

$\therefore \int e^x(x+1)dx = e^x \cdot x+1+c = xe^x+c$

17.



$\therefore A = \int_0^4 5x\,dx = 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 5\left[\frac{4^2}{2}-\frac{0}{2}\right] = 40$ একক।

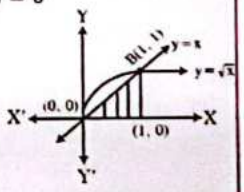
18. $y = x = \sqrt{x} \Rightarrow x = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0$

$\therefore x = 0, 1$; $x = 1$ হলে, $y = x = 1$

$\therefore B(1,1)$; $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$ বর্গ একক।

বিকল্প: ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\times 1\times 1 = \frac{1}{2}$ বর্গ একক।



19. (i) $\int f(x)\,dx = \int \sin 2x\,dx = \frac{-1}{2}\cos 2x+c$

(ii) $\int \sqrt{1+f(x)}\,dx = \int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$

$\int \sqrt{\sin^2 x+2\sin x.\cos x+\cos^2 x}\,dx$

$= \int \sqrt{(\sin x+\cos x)^2}\,dx = \int(\sin x+\cos x)\,dx$

$= -\cos x+\sin x+c$

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-f(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cdot\cos x}\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)\,dx = [\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 1+0-0-1 = 0$

কিন্তু গ্রাফের সাপেক্ষে দেখলে (iii) সঠিক নয়; (i) ও (ii) সঠিক।

20. $\int e^{-10}dx = \frac{e^{-10x}}{-10}+c$

Educationblog24.com

21. $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$ =কত? [JB'23]
(a) $4\ln 2$ (b) $\ln 2$ (c) π (d) $\frac{\pi}{4}$

22. $5x^2 + 20y^2 = 100$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [JB'23]
(a) 10 (b) 100 (c) 10π (d) 100π

23. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx$ এর মান কোনটি? [CB'23; MB'21]
(a) $2\ln 2 + 1$ (b) $2\ln 2 - 1$
(c) $\ln 2 + 1$ (d) $\ln 2 - 2$

24. $g(x) = \sqrt{x}$ হলে- [CB'23]
(i) $\int \frac{1}{g(x)}dx = 2\sqrt{x} + c$
(ii) $\int_0^1 g(x)dx = \frac{2}{3}$ (iii) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{g(\tan x)} = 2\sqrt{\tan x} + c$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

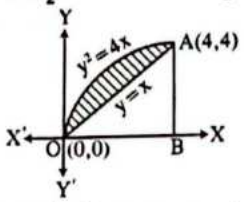
25. $\int_1^{\sqrt{e}} \ln x\,dx$ এর মান কোনটি? [CB'23]
(a) $-1 - \frac{1}{2}\sqrt{e}$ (b) $1 - \frac{1}{2}\sqrt{e}$
(c) $1 + \frac{1}{2}\sqrt{e}$ (d) $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{e}$

26. $\int x\sec^2 x\,dx$ = কত? [CB'23]
(a) $x\tan x + \ln|\sin x| + c$
(b) $x\tan x - \ln|\sin x| + c$
(c) $x\tan x + \ln|\cos x| + c$
(d) $x\tan x - \ln|\cos x| + c$

27. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = f(x) + c$ হলে $f(x)$ = কত? [Din.B'23; Ctg.B'23]
(a) $\sin^{-1} x$ (b) $\cos^{-1} x$
(c) $\ln(\sqrt{1-x^2})$ (d) $-\sqrt{1-x^2}$

28. $\int \frac{1+\tan^2 x}{(1-\tan x)^2}dx$ এর মান কোনটি? [Din.B'23]
(a) $\frac{-1}{1+\tan x} + c$ (b) $\frac{-1}{1-\tan x} + c$
(c) $\frac{1}{1-\tan x} + c$ (d) $\frac{1}{1+\tan x} + c$

29. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ =? [Din.B'23]
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $-\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) $-\pi$

30. 

[Din.B'23]
উপর্যুক্ত চিত্রের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?
(a) $\frac{16}{3}$ (b) $\frac{4}{3}$
(c) $\frac{8}{3}$ (d) $\frac{32}{3}$

31. $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$ এর মান কত? [MB'23]
(a) $\sin x + c$ (b) $\cos x + c$
(c) $\ln\sin x + c$ (d) $\ln\cos x + c$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

21. c	22. c	23. b	24. d	25. b	26. c	27. d	28. c	29. a	30. c	31. c

21. $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2} = 4[\tan^{-1}x]_0^1$
$= 4[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)] = 4\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \pi$

22. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল হলো πab।
তাহলে, $5x^2 + 20y^2 = 100 \Rightarrow \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$
সুতরাং $a = \sqrt{20}$ এবং $b = \sqrt{5}$ আর ক্ষেত্রফল $= \pi \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = 10\pi$

23. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx = \int_0^1 \left(\frac{-x-1+2}{1+x}\right)dx$
$= \int_0^1 \left(\frac{-(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x}\right)dx = [-x + 2\ln|1+x|]_0^1 = 2\ln 2 - 1$

24. (i) $\int \frac{1}{g(x)}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c$
(ii) $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}[1-0] = \frac{2}{3}$
(iii) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{g(\tan x)} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{\tan x}} = \int \frac{d(\tan x)}{\sqrt{\tan x}} = 2\sqrt{\tan x} + c$

25. $\int_1^{\sqrt{e}} \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^{\sqrt{e}}$
$= \sqrt{e}\ln\sqrt{e} - \sqrt{e} = -1\ln 1 + 1 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{e}$

26. $\int x\sec^2 x\,dx$
$= x\int \sec^2 x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int \sec^2 x\,dx\right\}dx = x\tan x - \int \tan x\,dx$
$= x\tan x - \ln|\sec x| + c = x\tan x + \ln|\cos x| + c$

27. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; ধরি, $u = 1 - x^2$; $du = -2x\,dx \Rightarrow \frac{du}{-2} = x\,dx$
$\Rightarrow \int \frac{\frac{du}{-2}}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{2}\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{1}{2} \times 2\sqrt{u} + c$
$= -\sqrt{u} + c = -\sqrt{1-x^2} + c \therefore f(x) = -\sqrt{1-x^2}$

28. ধরি, $u = 1 - \tan x$
$du = -\sec^2 x\,dx$; $-du = \sec^2 x\,dx$
$\int \frac{1+\tan^2 x}{(1-\tan x)^2}dx = \int \frac{\sec^2 x}{(1-\tan x)^2}dx = -\int \frac{du}{u^2}$
$= -\frac{u^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{1}{u} + c = \frac{1}{1-\tan x} + c$

29. ধরি, $u = x - 2$; $du = dx$

x	0	2
u	−2	0

$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-(4-4x+x^2)}} = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$
$= \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}} = \int_{-2}^0 \frac{du}{\sqrt{2^2-u^2}} = \left[\sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)\right]_{-2}^0$
$= \sin^{-1}(0) - \left(\sin^{-1}\left(-\frac{2}{2}\right)\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

30. $\int_0^4 (\sqrt{4x} - x)dx$
$= \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)dx = \left[2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4$
$= \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{4}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{4^2}{2} = \frac{32}{3} - 8 = \frac{32-24}{3} = \frac{8}{3}$

31. $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \cot x\,dx$
$= -\ln|\operatorname{cosec} x| + c = \ln|\sin x| + c$

Educationblog24.com

32. $\int \frac{1}{9+x^2} dx$ এর মান কত? [MB'23]

(a) $\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}+c$ (b) $\frac{-1}{3}\tan\frac{x}{3}+c$

(c) $\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{3}{x}+c$ (d) $\tan^{-1}\frac{x}{3}+c$

33. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x\, dx$ এর মান কত? [MB'23]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) π (d) $\frac{\pi}{8}$

34. $\int_{-1}^{1} x^2\, dx$ এর মান কত? [MB'23]

(a) 0 (b) $-\frac{2}{3}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{2}$

35. $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ এর মান কত? [MB'23]

(a) 1 (b) -1

(c) e (d) 0

36. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$ এর মান কত? [MB'23]

(a) ln e (b) ln(e + 1)

(c) 0 (d) ln(e + 1) − ln2

37. $\int \frac{\ln z}{z} dz$ এর মান কোনটি? [Mad.B'23]

(a) lnz + c (b) 2 lnz + c

(c) $\frac{1}{2}(\ln z)^2 + c$ (d) $2(\ln z)^2 + c$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = 1 + x^2$ এবং $g(x) = \tan^{-1} x$

38. $\int \frac{g(x)}{f(x)} dx$ =কত? [Mad.B'23]

(a) $\tan^{-1} x^2 + c$ (b) $2\tan^{-1} x^2 + c$

(c) $(\tan^{-1} x)^2 + c$ (d) $\frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2 + c$

39. $\int_0^3 f(x)dx$ = কত? [Mad.B'23]

(a) 6 (b) 9 (c) 10 (d) 12

40. $I = \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ হলে I এর মান কত? [DB, Ctg.B'22; All.B'18]

(a) e (b) e + 1 (c) ln e − 1 (d) ln 2

41. f(x) = 4x হলে- [DB'22, 17; RB'21]

(i) $\int \frac{dx}{f(x)} = \frac{1}{4}\ln x + c$ (ii) $\int e^{f(x)}dx = \frac{1}{4}e^{4x} + c$

(iii) $\int_0^2 f(x)dx = 8$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

42. $-\int_2^1 \ln x\, dx$ এর মান কোনটি? [DB, RB'22; JB, BB'21]

(a) 2 ln 2 − 1 (b) 2 ln 2 + 1

(c) 2 ln 2 (d) ln 2

43. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta$ = ? [DB'22]

(a) $\frac{1}{2}\ln 2$ (b) $\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$

(c) $\ln(\sqrt{2}+1)$ (d) $\ln(\sqrt{2}-1)$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

32. a	33. d	34. c	35. a	36. d	37. c	38. d	39. d	40. d	41. d	42. a	43. c

32. $\int \frac{dx}{9+x^2} = \int \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$

33. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\times 0\right) = \frac{\pi}{8}$

34. $\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}[1 - (-1)^3] = \frac{2}{3}$

35. $\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_1^e$

$= \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

36. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{dz}{z}$

$= [\ln|z|]_2^{e+1}$

$= \ln|e + 1| - \ln|2|$

ধরি, $e^x + 1 = z \Rightarrow e^x\, dx = dz$

x	0	1
z	2	e + 1

37. $\int \frac{\ln z}{z} dz$, ধরি $u = \ln z, du = \frac{1}{z} dz$

$\Rightarrow \int u\, du \Rightarrow \frac{u^2}{2} + c \Rightarrow \frac{(\ln z)^2}{2} + c \therefore \int \frac{\ln z}{z} dz = \frac{(\ln z)^2}{2} + c$

38. ধরি, $\tan^{-1} x = z \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = dz$

$\int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx = \int z\, dz = \frac{z^2}{2} + c = \frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2 + c$

39. $\int_0^3 (1 + x^2)\, dx = \int_0^3 1\, dx + \int_0^3 x^2 dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 12$

40. $I = \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

$= \int_1^2 \frac{dz}{z} = [\ln|z|]_1^2$

$= \ln|2| - \ln|1|$

$= \ln 2 - 0 = \ln 2$

ধরি, $1 + \ln x = z \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dz$

x	1	e
z	1	2

41. এখানে, f(x) = 4x

(i) $\int \frac{dx}{f(x)} = \int \frac{dx}{4x} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4}\ln|x| + c$

(ii) $\int e^{f(x)}dx = \int e^{4x}dx = \frac{e^{4x}}{4} + c = \frac{1}{4}e^{4x} + c$

(iii) $\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 4x\, dx = 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2[x^2]_0^2$

$= 2[2^2 - 0^2] = 8$

42. $-\int_2^1 \ln x\, dx = \int_1^2 \ln x\, dx$

$= [x\ln x - x]_1^2 = (2\ln 2 - 2) - (1.\ln 1 - 1)$

$= 2\ln 2 - 2 - (0 - 1) = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1$

43. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta = [\ln|\sec\theta + \tan\theta|]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \ln|\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}| - \ln|\sec 0 + \tan 0|$

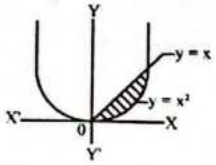
$= \ln|\sqrt{2} + 1| - \ln|1 + 0| = \ln(\sqrt{2}+1) - 0 = \ln(\sqrt{2}+1)$

Educationblog24.com

44. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ এর মান কোনটি? [RB'22]

(a) $2e^{-1}$ (b) $2(e-1)$

(c) $\frac{2}{e}-1$ (d) $1-\frac{1}{e}$

45. 

[RB'22]

চিত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গএকক?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{6}{5}$

46. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos 2x}$ এর মান কোনটি? [RB'22; MB'21]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) 1 (d) 2

47. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$ এর মান কোনটি? [RB'22]

(a) $\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}-2(1-x)^{\frac{1}{2}}+c$

(b) $-\frac{2}{3}(\sqrt{1-x})(x+2)+c$

(c) $\frac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}+c$

(d) $\frac{2}{3}(\sqrt{1-x})(x+2)+c$

48. $\int e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)dx$ = কত? [Ctg.B, BB'22; RB'21]

(a) $e^x \ln x + c$ (b) $e^x + \ln x + c$

(c) $e^x + c$ (d) $e^x + \frac{1}{x} + c$

49. $\int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}dx$ = কত? [SB'22]

(a) $\frac{-2}{\sqrt{\sin x}}+c$ (b) $\frac{-1}{2\sqrt{\sin x}}+c$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}+c$ (d) $2\sqrt{\sin x}+c$

50. $\int e^x \cos x(1+\tan x)dx$ এর মান কত? [SB'22]

(a) $e^x \cos x + c$ (b) $e^x \tan x + c$

(c) $e^x \sec x + c$ (d) $e^x \sin x + c$

51. $\int_0^3 f(x)\,dx = 4$ হলে, $\int_2^5 f(x-2)dx$ = কত? [SB'22]

(a) 0 (b) 4 (c) 3 (d) 2

52. y-অক্ষ এবং $x = 4 - y^2$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? [SB'22]

(a) $\frac{3}{32}$ বর্গ একক (b) $\frac{2}{33}$ বর্গ একক

(c) $\frac{32}{3}$ বর্গ একক (d) $\frac{33}{2}$ বর্গ একক

53. $\int 10^{5x}dx$ = কত? [BB'22; Ctg'21]

(a) $\frac{10^{5x}}{\ln 10}+c$ (b) $\frac{10^{5x}}{5\ln 10}+c$

(c) $5\cdot 10^{5x}\ln 10+c$ (d) $10^{5x}\ln 10+c$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

44. b	45. c	46. a	47. a	48. a	49. a	50. d	51. b	52. c	53. b

44. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$; ধরি, $\sqrt{x} = z \therefore \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dz$

x	0	1
z	0	1

$= 2\int_0^1 e^z dz = 2[e^z]_0^1 = 2(e-e^0) = 2(e-1)$

45. $y = mx$ ও $y = 4ax^2$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3m^3}$

$m = 1, a = \frac{1}{4} \therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3m^3} = \frac{8\times\left(\frac{1}{4}\right)^2}{3\times 1^3} = \frac{1}{6}$ বর্গএকক।

46. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x}$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\tan x) = \frac{1}{2}[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

47. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$ [ধরি, $1-x = z^2 \therefore -dx = 2zdz$]

$= \int \frac{1-z^2}{z}(-2z)dz = -2\int(1-z^2)dz = -2\left[z-\frac{z^3}{3}\right]+c$

$= -2z + \frac{2z^3}{3} + c = -2(1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + c$

48. $\int e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)dx = e^x \ln x + c$

[Formula: $\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx = e^x f(x)+c$]

এখানে, $f(x) = \ln x \therefore f'(x) = \frac{1}{x}$

49. মনে করি, $\sin x = z$

$\Rightarrow \cos x\,dx = dz \Rightarrow \int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x\sqrt{\sin x}}dx$

$= \int \frac{dz}{(z)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c = \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{\sqrt{z}} + c = \frac{-2}{\sqrt{\sin x}} + c$

50. $\int e^x \cos x(1+\tan x)dx$

$= \int e^x \cos x\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$

$= \int e^x(\cos x + \sin x)dx = e^x \sin x + c$

[এখানে, $f(x) = \sin x \therefore f'(x) = \cos x$]

51. $\int_0^3 f(z)\,dz = 4 \therefore \int_2^5 f(x-2)dx$

ধরি, $x-2 = z \therefore x = z+2 \therefore dx = dz$

$\therefore \int_0^3 f(z)dz = 4$

52. $y^2 = 4 - x$

$\Rightarrow y^2 = -(x-4)$

y অক্ষের ছেদবিন্দু, $x = 0 \therefore 4 - y^2 = 0$

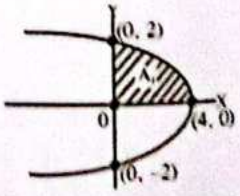
$\Rightarrow y = \pm 2$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^2 x\,dy$

$= 2\int_0^2(4-y^2)dy = 2\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_0^2$

$= 2\left[8-\frac{8}{3}-0\right]$ বর্গ একক।

$= \frac{32}{3}$ বর্গ একক।



53. $\int 10^{5x}dx$

ধরি, $5x = z \Rightarrow 5 = \frac{dz}{dx}$

$\therefore dx = \frac{dz}{5} = \frac{1}{5}\int 10^z dz = \frac{1}{5}\cdot\frac{10^z}{\ln 10} = \frac{10^{5x}}{5\ln 10} + c$

Educationblog24.com

54. $\int x^{-9}dx =$ কত? [BB'22]

(a) $-9x^{-8} + c$ (b) $-9x^{-10} + c$

(c) $-\frac{1}{10}x^{-10} + c$ (d) $-\frac{x^{-8}}{8} + c$

55. $\int \frac{1}{\sqrt{18-2x^2}}dx =$ কত? [BB, JB'22; DB, Ctg.B, CB'21]

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$ (b) $\frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{3} + c$

(c) $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + c$ (d) $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$

56. $\int_0^1 \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^x+e^{-x}}dx$ এর মান কোনটি? [JB'22]

(a) $4(e^4 - 1)$ (b) $\frac{1}{5}(e^5 - 1)$

(c) $5(e^5 - 1)$ (d) $\frac{1}{4}(e^4 - 1)$

57. $f(x) = \sqrt{x}$ হলে- [JB'22]

(i) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(ii) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3}$

(iii) $\int \frac{\sec^2 x}{f(\tan x)}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\tan x} + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

58. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\theta\cos\theta\, d\theta$ এর মান- [JB'22]

(a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{1}{8}$

(c) $\frac{1}{7}$ (d) 0

59. $\int \frac{1}{3\sqrt{x}}dx =$ কত? [CB'22; Ctg.B'21]

(a) $-\frac{2}{3}\sqrt{x} + c$ (b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} + c$

(c) $\frac{2}{3}\sqrt{x} + c$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x} + c$

60. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} =$ কত? [CB, MB'22; RB, CB'21; BB'17]

(a) $\frac{\pi}{24}$ (b) $\frac{\pi}{12}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

61. $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx =$ কত? [CB'22]

(a) $2\ln 2$ (b) $\frac{1}{2}\ln 2$ (c) $2(\ln 2)^2$ (d) $\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

62. $f(x) = \frac{x}{3}$ এবং $g(x) = x^2$ হলে– [Din.B'22]

(i) $\int f(x)dx = \frac{x^2}{6} + c$

(ii) $\int \frac{-1}{1+g(x)}dx = -\cot x + c$

(iii) $g''(0) = 2$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

63. $\int \frac{5}{1-5x}dx$ এর মান কোনটি? [Din.B'22; SB'21]

(a) $\ln(1-5x) + c$ (b) $-\ln(1-5x) + c$

(c) $\frac{\ln(1-5x)}{5}$ (d) $\frac{-\ln(1-5x)}{5}$

64. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx =$ কত? [MB'22; RB'19]

(a) $2\sqrt{\cos x} + c$ (b) $2\sqrt{\sin x} + c$

(c) $\frac{1}{2}\sqrt{\cos x} + c$ (d) $\frac{1}{2}\sqrt{\sin x} + c$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

54. d	55. a	56. d	57. a	58. a	59. c	60. b	61. d	62. c	63. b	64. b

54. $\int x^{-9}dx = \frac{x^{-9+1}}{-9+1} + c = \frac{x^{-8}}{-8} + c$

55. $\int \frac{1}{\sqrt{18-2x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$

56. $\int_0^1 \frac{e^{4x}(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})}dx = \int_0^1 e^{4x}dx = \left(\frac{e^{4x}}{4}\right)_0^1 = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^4 - 1)$

57. $f(x) = \sqrt{x}$

(i) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (ii) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

(iii) $\int \frac{\sec^2 x}{f(\tan x)}dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}dx = 2\sqrt{\tan x} + c$

58. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\theta\cos\theta\, d\theta$; ধরি, $\sin\theta = z, \cos d\theta = dz$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
z	0	1

$= \int_0^1 z^8 dz = \left[\frac{z^9}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{9}$

59. $\int \frac{1}{3\sqrt{x}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{x} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x} + c$

60. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = [\tan^{-1}x]_1^{\sqrt{3}}$

$= \tan^{-1}(\sqrt{3}) - \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi-3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$

61. ধরি, $\ln(x+1) = z \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{x+1} = dz$

x	0	1
z	0	ln 2

এখন, $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \int_0^{\ln 2} zdz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\ln 2} = \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

অথবা, এখানে $\frac{d}{dx}\{\ln(x+1)\} = \frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow d\{\ln(x+1)\} = \frac{dx}{x+1}$ $\left[\because \int xdx = \frac{x^2}{2} + c\right]$

আবার, $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \int_0^1 \ln(x+1)\, d\{\ln(x+1)\}$

$= \left[\frac{\{\ln(x+1)\}^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\{(\ln 2)^2 - (\ln 1)^2\} = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

62. (i) $\int f(x)\, dx = \int \frac{x}{3}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{6} + c$

(ii) $\int \frac{-1}{1+g(x)}dx = \int \frac{-1}{1+x^2}dx = \cot^{-1}x + c$

(iii) $g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x \Rightarrow g''(x) = 2 \therefore g''(0) = 2$

63. $\int \frac{5}{1-5x}dx = \frac{5\ln|1-5x|}{-5} + c = -\ln|1-5x| + c$

64. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin x}}$ [ধরি, $z = \sin x \Rightarrow dz = \cos x\, dx$]

$= \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + c = 2\sqrt{\sin x} + c$

Educationblog24.com

65. $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল– [MB'22]
(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$
(c) π (d) 2π

66. $\int \sin\left(10 - \frac{x}{5}\right) dx$ = কত? [DB'21]
(a) $5\cos\left(10 - \frac{x}{5}\right) + c$
(b) $-5\cos\left(10 - \frac{x}{5}\right) + c$
(c) $-\frac{1}{5}\cos\left(10 - \frac{x}{5}\right) + c$
(d) $\frac{1}{5}\cos\left(10 - \frac{x}{5}\right) + c$

67. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx$ এর মান কত? [DB, Ctg.B'21]
(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

68. $\int_0^1 e^{-2x} dx$ এর মান কোনটি? [DB'21; RB'19; Ctg.B'17]
(a) $2(1 - e^{-2})$ (b) $2(e^{-2} - 1)$
(c) $\frac{1}{2}(e^{-2} - 1)$ (d) $\frac{1}{2}(1 - e^{-2})$

69. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ উপবৃত্তটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [DB, SB'21; SB, Din.B'17]
(a) 16π (b) 20π
(c) 25π (d) 400π

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = \cot x, g(x) = \text{cosec}^2 x$

70. $\int f(x)\, dx$ = কত? [DB'21]
(a) $\text{cosec}^2 x + c$ (b) $-\text{cosec}^2 x + c$
(c) $\ln|\text{cosec } x| + c$ (d) $\ln(\sin x) + c$

71. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর: [DB'21]
(i) $\int g\left(\frac{x}{2}\right) dx = -2\cot\frac{x}{2} + c$
(ii) $\frac{d}{dx}\left\{f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right\} = 2\sec^2 2x$
(iii) $\int f(x)\, g(x) dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x + c$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

72. $\int \frac{1}{\cos^2 p\sqrt{\tan p}} dp$ =? [RB'21]
(a) $\sqrt{\tan p} + c$ (b) $\sqrt{\cot p} + c$
(c) $2\sqrt{\tan p} + c$ (d) $2\sqrt{\cot p} + c$

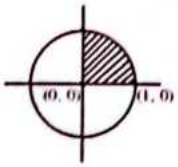
73. $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} p}{\sqrt{1-p^2}} dp$ এর মান কত? [RB, CB'21]
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi^2}{2}$ (c) $\frac{\pi^2}{4}$ (d) $\frac{\pi^2}{8}$

74. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{5 - \cos x} dx$ এর মান- [Ctg.B'21]
(a) $\ln 20$ (b) $-\ln 20$
(c) $\ln 5 - \ln 4$ (d) $\ln 4 - \ln 5$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

65. c	66. a	67. c	68. d	69. b	70. d	71. d	72. c	73. d	74. c

65. $x^2 + y^2 = 1 \therefore r = 1 \therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi$
অথবা, $y = \sqrt{1 - x^2}$
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$
$= \left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$
$\therefore$ মোট ক্ষেত্রফল $= 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$ বর্গ একক।



66. $10 - \frac{x}{5} = y \Rightarrow -\frac{dx}{5} = dy \Rightarrow dx = -5dy$
$\therefore \int \sin\left(10 - \frac{x}{5}\right) dx = \int \sin y(-5\, dy)$
$= 5\cos y + c = 5\cos\left(10 - \frac{x}{5}\right) + c$

67. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}$
$= \frac{1}{2} \times \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] = \frac{1}{2} \times (1 - 0) = \frac{1}{2}$

68. $\int_0^1 e^{-2x} dx = \frac{1}{-2}[e^{-2x}]_0^1 = -\frac{1}{2}[e^{-2} - e^0] = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$

69. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \therefore a = 4, b = 5$
$\therefore$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi ab = 4 \times 5\pi = 20\pi$ বর্গ একক

70. $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c$
$\left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c\right]$

71. (i) $\int \text{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = -\frac{\cot\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + c = -2\cot\left(\frac{x}{2}\right) + c$
(ii) $\frac{d}{dx}\left\{\cot\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right\} = \frac{d}{dx}(\tan 2x) = 2\sec^2 2x$
(iii) $\int \text{cosec}^2 x \cot x\, dx$
$= -\int \cot x(-\text{cosec}^2 x) dx$
$= -\int z\, dz = -\frac{z^2}{2} + c = -\frac{1}{2}\cot^2 x + c$
ধরি, $\cot x = z$
$\Rightarrow -\text{cosec}^2 x\, dx = dz$

72. $\int \frac{\sec^2 p\, dp}{\sqrt{\tan p}}$
$= \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{\tan p} + c$
ধরি, $\tan p = u$
$\sec^2 p\, dp = du$

73. $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} p\, dp}{\sqrt{1-p^2}}$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\, du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{4} - 0\right] = \frac{\pi^2}{8}$
$u = \sin^{-1} p$
$\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} dp = du$

p	0	1
u	0	$\frac{\pi}{2}$

74. $5 - \cos x = u$
$\Rightarrow \sin x\, dx = du$
$\therefore \int_4^5 \frac{du}{u} = [\ln u]_4^5 = \ln 5 - \ln 4$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	4	5

Educationblog24.com

75. $y = x^2$, x-অক্ষ, $x = 0$ এবং $x = 3$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল- [Ctg.B, JB'21]

(a) 3 (b) 6 (c) 8 (d) 9

76. $f(x) = \ln(x)$ হলে- [Ctg.B'21]

(i) $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{x}$

(ii) $\int f(x)\,dx = x\ln(x) - x + c$

(iii) $\int_1^2 f(x)\,dx = \ln 2$

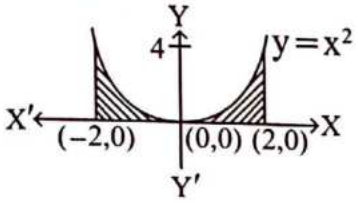
নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

77. $\int \sin x^\circ\,dx$ = কত? [Ctg.B'21; DB'17]

(a) $-\cos x^\circ + c$ (b) $\cos x^\circ + c$

(c) $-\frac{180}{\pi}\cos\frac{\pi x}{180} + c$ (d) $\frac{180^\circ}{\pi}\cos\frac{\pi x}{180} + c$

78. 

চিত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [SB'21; Din.B'19]

(a) $\frac{32}{3}$ (b) $\frac{16}{3}$ (c) $\frac{8}{3}$ (d) $\frac{4}{3}$

79. $f(x) = \sin 2x, g(x) = \sin^2 x$ হলে- [SB'21]

(i) $g'(x) = f(x)$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

80. $\int \frac{dx}{1-\cos x} = f(x) + c$ হলে $f(x)$ এর মান কোনটি? [SB'21; RB'19; All.B'18]

(a) $-\cot\frac{x}{2}$ (b) $-2\cot\frac{x}{2}$

(c) $2\cot\frac{x}{2}$ (d) $\cot\frac{x}{2}$

81. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2}\,dx$ এর মান কত? [SB'21]

(a) -2 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

82. $f(\theta) = \cos 2\theta$ হলে- [SB'21]

(i) $\int f(\theta)\,d\theta = \frac{\sin 2\theta}{2} + c$

(ii) $\int \sqrt{1 - f(\theta)}\,d\theta = -\sqrt{2}\cos\theta + c$

(iii) $\int \sqrt{1 + f(\theta)}\,d\theta = \sqrt{2}\sin\theta + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

83. x এর একটি ফাংশন $f(x)$ হলে, $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ = কত? [BB'21; JB'17]

(a) $f'(x) + c$ (b) $f(x) + c$

(c) $\ln|f'(x)| + c$ (d) $\ln|f(x)| + c$

84. যোগজীকরণের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য- [BB'21]

(i) $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, যেখানে c হলো যোগজীকরণ ধ্রুবক

(ii) $f(x)$ কে যোজ্য ফাংশন (Integrand) বলে

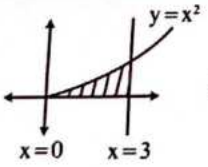
(iii) $\frac{d}{dx}$ ও $\int dx$ পরস্পর বিপরীত প্রক্রিয়া

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

75. d	76. a	77. c	78. b	79. c	80. a	81. d	82. d	83. d	84. d

75. 

$A = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3$

$= \left[\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = 9$ বর্গ একক।

76. (i) সঠিক (ii) এর ক্ষেত্রে $\int 1.\ln x\,dx$

$= \ln x \int 1.dx - \left\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int 1.dx\right\}dx$

$= x\ln x - \int \frac{x}{x}dx = x\ln x - x + c$

(iii) $\int_1^2 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^2$

$= 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1$

77. $x^\circ = \left(\frac{\pi x}{180}\right)^c \therefore \int \sin x^\circ\,dx$

$= \int \sin\frac{\pi x}{180}dx = \frac{-\cos\frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi}{180}} = -\frac{180}{\pi}\cos\frac{\pi x}{180} + c$

78. নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^2 x^2\,dx$

$= \frac{2}{3}[x^3]_0^2 = \frac{2}{3}[2^3 - 0] = \frac{16}{3}$ বর্গ একক

79. $g(x) = \sin^2 x \Rightarrow g'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x = f(x)$

আবার, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} 2\cot x$ = অসংজ্ঞায়িত

আবার, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = -\left[\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{1}{2}[\cos\pi - \cos 0] = \frac{1}{2}[-1 - 1] = 1$

80. $\int \frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cot\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right] + c = -\cot\frac{x}{2} + c$

81. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2}dx = \left[\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2[1 - 0] = 2$

82. $\int \cos 2\theta\,d\theta = \frac{\sin 2\theta}{2} + c$

আবার, $\int \sqrt{1 - \cos 2\theta}\,d\theta = \int \sqrt{2\sin^2\theta}\,d\theta$

$= \int \sqrt{2}\sin\theta\,d\theta = -\sqrt{2}\cos\theta + c$

আবার, $\int \sqrt{1 + \cos 2\theta}\,d\theta = \int \sqrt{2\cos^2\theta}\,d\theta$

$= \int \sqrt{2}\cos\theta\,d\theta = \sqrt{2}\sin\theta + c$

Educationblog24.com

85. $\int \sqrt{2-3x}\,dx =$ কত? [BB'21]

(a) $-\frac{2}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}}+c$ (b) $-\frac{1}{6}(2-3x)^{-\frac{1}{2}}+c$

(c) $-(2-3x)^{\frac{3}{2}}+c$ (d) $-3(2-3x)^{-\frac{1}{2}}+c$

86. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = K\cot^{-1}\frac{a}{x}+c$ হলে, K = ? [BB'21]

(a) $-a$ (b) $-\frac{1}{a}$ (c) $\frac{1}{a}$ (d) a

87. $y^2 = 4ax$ ও $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুটি দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের জন্য কোন যোগজটি সঠিক? [BB'21]

(a) $\int_0^{4a}\left(2\sqrt{ax}-\frac{x^2}{4a}\right)dx$ (b) $\int_0^{4a}\left(2\sqrt{ax}-\frac{4a}{x^2}\right)dx$

(c) $\int_0^{4a}\left(\frac{4a}{x^2}-2\sqrt{ax}\right)dx$ (d) $\int_0^{4a}\left(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{2a}\right)dx$

88. $F(x) = \text{cosec } x$ হলে- [JB'21]

(i) $\int F(x)\,dx = \ln|\text{cosec } x + \cot x| + c$

(ii) $\int F(x)\,dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

(iii) $\int F(x)\,dx = -\ln|\text{cosec } x + \cot x| + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

89. $\int \frac{\tan(\ln x)}{x}dx =$ কত? [CB'21]

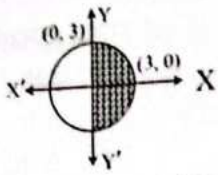
(a) $\ln(\sec^2 x)+c$ (b) $\ln\sec(\ln x)+c$

(c) $\ln(\sec x)+c$ (d) $\ln(\tan^2 x)+c$

90. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx =$ কত? [Din.B, CB'21]

(a) $\frac{1}{2}f(x)+c$ (b) $\sqrt{f(x)}+0$

(c) $2f(x)+c$ (d) $2\sqrt{f(x)}+c$



91. [CB'21]

চিত্রটির ক্ষেত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

(a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{9\pi}{4}$ (c) $\frac{9\pi}{2}$ (d) 9π

92. যদি $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln P$ হয় তবে P এর মান কত? [Din.B'21]

(a) 3 (b) 9 (c) 10 (d) 81

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = \tan x$ এবং $g(x) = \sec^2 x$.

93. $\int f(x)\,dx =$ কত? [Din.B'21]

(a) $-\ln\cos x + c$ (b) $-\ln\sec x + c$

(c) $\ln\cos x + c$ (d) $\ln\sin x + c$

94. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\{f(x)+g(x)\}\,dx =$ কত? [Din.B'21]

(a) 0 (b) $e^{\frac{\pi}{4}}$

(c) 1 (d) $e^{\frac{\pi}{4}}-1$

95. $f(x) = \cos x$ হলে- [Din.B'21]

(i) $f'(2t) = -\sin 2t$

(ii) $\int f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = -\cos x + c$

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)\,dx = \frac{1}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

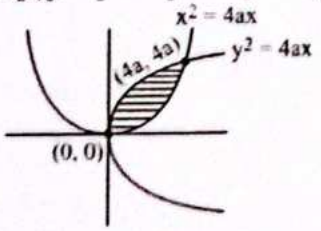
85. a	86. c	87. a	88. c	89. b	90. d	91. c	92. a	93. a	94. b	95. d

85. $\int(2-3x)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}(2-3x)^{\frac{3}{2}}+c$

$= -\frac{2}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}}+c$

86. $\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c = \frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{a}{x}+c \therefore K = \frac{1}{a}$

87.



$x^2 = 4ay$ এবং $y^2 = 4ax$ সমাধান করে পাই, ছেদবিন্দুগুলো

(0, 0), (4a, 4a)

$y^2 = 4ax \Rightarrow y = 2\sqrt{ax}$; আবার, $x^2 = 4ay \Rightarrow y = \frac{x^2}{4a}$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^{4a}\left(2\sqrt{ax}-\frac{x^2}{4a}\right)dx$ বর্গ একক।

88. $\int \text{cosec } x\,dx = \ln|\text{cosec } x - \cot x| + c$

আবার, $\int \text{cosec } x\,dx = -\ln|\text{cosec } x + \cot x| + c$

এবং $\int \text{cosec } x\,dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

89. $\int\frac{\tan(\ln x)}{x}dx = \int\tan z\,dz$

$= \ln|\sec z| + c = \ln|\sec(\ln x)| + c \quad [z = \ln x \Rightarrow dz = \frac{1}{x}dx]$

90. ধরি, $f(x) = z \therefore f'(x)dx = dz$

$\therefore \int\frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}+c = 2\sqrt{f(x)}+c$

91. $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi\times 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$ বর্গ একক [চিত্র হতে r = 3]

92. $\int_1^5\frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}[\ln|2x-1|]_1^5$

$= \frac{1}{2}[\ln 9 - \ln 1] = \ln 3 = \ln P \therefore P = 3$

93. $\int\tan x\,dx = \ln|\sec x| + c = \ln|\cos x|^{-1} + c = -\ln|\cos x| + c$

94. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\{\tan x + \sec^2 x\}dx$

$= [e^x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[e^{\frac{\pi}{4}}\tan\frac{\pi}{4} - e^0\tan 0\right] = e^{\frac{\pi}{4}}$

95. $f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(2t) = -\sin 2t$

$\int f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int\sin x\,dx = -\cos x + c$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

96. $\int \frac{4x^3}{1+x^8}dx = f(x) + c$ হলে $f(x)$ এর মান কত? [Din.B'21]
(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $\sin^{-1}x^3$
(c) $\tan^{-1}x^4$ (d) $\tan^{-1}x^3$

97. $\int \frac{\ln x^2}{x}dx = ?$ [MB'21]
(a) $2(\ln x)^2 + c$ (b) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$
(c) $\ln x + c$ (d) $(\ln x)^2 + c$

98. $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ এর মান- [MB'21]
(a) $1 - \frac{2}{e}$ (b) 1 (c) $\frac{1}{2}(e-1)$ (d) $\frac{1}{4}e$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = \sec x$ এবং $g(x) = \tan x$

99. $\int f(x)dx = ?$ [MB'21]
(a) $\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + c$ (b) $\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$
(c) $\ln|\sec x - \tan x| + c$ (d) $\ln|\tan x - \sec x| + c$

100. $\int e^x f(x)\{1 + g(x)\}dx = ?$ [MB'21]
(a) $e^x f(x) + c$ (b) $e^x g(x) + c$
(c) $-e^x f(x) + c$ (d) $-e^x g(x) + c$

101. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx = ?$ [MB'21]
(a) $\ln 2 - 2$ (b) $1 - 2\ln 2$
(c) $2\ln 2 - 1$ (d) $2\ln 2 + 2$

102. $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$ এর মান- [DB'19; RB'17]
(a) 0 (b) 1
(c) $\ln 3$ (d) $\ln 2$

103. $\int e^x(\cos x - \sin x)dx = ?$ [DB'19]
(a) $e^x \sin x + c$ (b) $e^x \cos x + c$
(c) $-e^x \cos x + c$ (d) $-e^x \sin x + c$

104. $\int \sin^4 x \cos x dx = f(x) + c$, যেখানে c একটি ধ্রুবক হলে $f(x) = ?$ [Ctg.B'19]
(a) $\frac{1}{5}\cos^5 x$ (b) $\frac{1}{5}\sin^5 x$
(c) $\frac{-\sin^5 x \cos^2 x}{10}$ (d) $-\frac{1}{5}\cos^5 x$

105. $\int xe^{x^2}dx = ? + c$ [Ctg.B'19]
(a) $2e^{x^2}$ (b) e^{x^2} (c) xe^{x^2} (d) $\frac{1}{2}e^{x^2}$

106. $\int_0^1 \frac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ এর মান কত? [Ctg.B'19]
(a) $\frac{\pi^2}{8}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{8}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = x^2, g(x) = 2x$

107. $\int g(x)dx =$ কত? [SB'19]
(a) $x + c$ (b) $2x^2 + c$ (c) $2x + c$ (d) $x^2 + c$

108. $\int_0^1 e^x\{f(x) + g(x)\}dx =$ কত? [SB'19]
(a) e (b) $-e$ (c) $2e$ (d) $-2e$

109. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx =$ কত? [SB'19]
(a) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$
(b) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} - \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$
(c) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x} + \frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$
(d) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} - \frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

96. c	97. d	98. c	99. b	100. a	101. c	102. d	103. b	104. b	105. d	106. a	107. d	108. a	109. a

96. $\int \frac{4x^3}{1+(x^4)^2}dx = \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1}(z) + c$
$= \tan^{-1}(x^4) + c$ [ধরি, $x^4 = z \Rightarrow 4x^3dx = dz$]

97. $\ln x^2 = y \therefore \frac{2xdx}{x^2} = dy \Rightarrow \frac{2}{x}dx = dy$
$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{2} \therefore \int \frac{\ln x^2}{x}dx = \int \frac{y}{2}dy = \frac{y^2}{4} + c$
$= \frac{(\ln x^2)^2}{4} + c = \frac{(2\ln x)^2}{4} + c = (\ln x)^2 + c$
বিকল্প: $\int \frac{\ln x^2}{x}dx = \int \frac{2\ln x}{x}dx$
$= 2\int zdz = 2.\frac{z^2}{2} + c = (\ln x)^2 + c$
ধরি, $\ln x = z$
$\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dz$

98. $\int_0^1 xe^{x^2}dx$
$= \int_0^1 \frac{e^u}{2}du$
$= \frac{1}{2}[e^u]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$
$x^2 = u$; $2xdx = du \Rightarrow x\,dx = \frac{du}{2}$

x	0	1
u	0	1

99. $\int \sec x\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$

100. $\int e^x \sec x(1 + \tan x)dx$
$= \int e^x(\sec x + \sec x \tan x)dx$
$= \int e^x\left\{\sec x + \frac{d}{dx}(\sec x)\right\}dx$
$= e^x \sec x + c = e^x f(x) + c$

101. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{2-(1+x)}{1+x}dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x} - 1\right)dx$
$= [2\ln|1+x| - x]_0^1 = 2\ln 2 - 1$

102. $\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = [\ln|1+x^2|]_0^1 = \ln|1+1| - \ln|1+0| = \ln 2$

103. $\int e^x(\cos x - \sin x)dx = \int e^x\left[\cos x + \frac{d}{dx}(\cos x)\right]dx = e^x \cos x + c$

104. ধরি, $\sin x = z \Rightarrow \cos x\,dx = dz \int z^4dz = \frac{z^5}{5} + c = \frac{\sin^5 x}{5} + c$

105. ধরি, $x^2 = z \Rightarrow 2xdx = dz \Rightarrow xdx = \frac{dz}{2}$
$\frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{1}{2}e^z + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

106. $z = \cos^{-1}x \Rightarrow -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dz$

x	0	1
z	$\pi/2$	0

$-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 zdz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} zdz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} - 0 = \frac{\pi^2}{8}$

107. $\int 2x\,dx = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$

108. $\int_0^1 e^x\{x^2 + 2x\}dx = \int_0^1 e^x\left\{x^2 + \frac{d}{dx}(x^2)\right\}dx = [e^x x^2]_0^1 = e$

Educationblog24.com

110. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx$ = কত? [BB'19]

(a) $\frac{1}{2}\sec 2x + c$ (b) $2\sec 2x + c$

(c) $\frac{1}{2}\operatorname{cosec} 2x + c$ (d) $2\operatorname{cosec} 2x + c$

111. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = f(x) + c$ হলে $f(x)$ এর মান- [JB'19]

(a) $\cos^{-1} x$ (b) $\sec^{-1} x$

(c) $\sin^{-1} x$ (d) $\operatorname{cosec}^{-1} x$

112. $\int_0^{\pi/2} 2\sin^2 x dx$ =? [JB'19]

(a) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 1 (d) 2

113. $\int \sin\left(5 - \frac{x}{10}\right) dx = f(x) + c$ হলে $f(x)$ এর মান কত? [CB'19]

(a) $-10\cos\left(5 - \frac{x}{10}\right)$ (b) $10\cos\left(5 - \frac{x}{10}\right)$

(c) $-\frac{1}{10}\cos\left(5 - \frac{x}{10}\right)$ (d) $\frac{1}{10}\cos\left(5 - \frac{x}{10}\right)$

114. $\int_0^1 e^{5x+3} dx$ এর মান কত? [CB'19]

(a) $e^8 - e^3$ (b) $(e^3 - e^8)$

(c) $\frac{1}{5}(e^8 - e^3)$ (d) $5(e^8 - e^3)$

115. $\int \frac{\ln x}{x} dx$ এর মান কোনটি? [Din.B'19]

(a) $2(\ln x)^2 + c$ (b) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$

(c) $\ln x + c$ (d) $2\ln x + c$

116. $\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x dx$ = কত? [Din.B'19]

(a) $-\frac{1}{4}$ (b) $\frac{e}{2} - \frac{1}{4}$ (c) $\frac{e}{2} + \frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{4}$

117. $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$ = কত? [Ctg.B'17]

(a) $\sin^{-1} x + C$ (b) $\sin^{-1}\frac{x}{6} + C$

(c) $\frac{1}{6}\sin^{-1} x + C$ (d) $\frac{1}{6}\sin^{-1}\frac{x}{6} + C$

118. $\int \operatorname{cosec} x dx$ -এর মান কোনটি? [SB'17]

(a) $\ln|\sin x| + c$ (b) $\ln|\sec x| + c$

(c) $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$ (d) $\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$

119. $\int \ln x dx$ =? [BB'17]

(a) $\frac{1}{x}$ (b) $x\ln x - x$ (c) $x\ln x + x$ (d) $\frac{1}{x^2}$

120. $\int \frac{e^\theta d\theta}{1+e^\theta}$ =? [BB'17]

(a) $\ln(1 + e^\theta) + c$ (b) $1 + e^\theta + c$

(c) $\ln e^\theta + c$ (d) $\theta + c$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = \ln 2x.$

121. $\int f(x) dx$ এর মান কোনটি? [JB'17]

(a) $\frac{1}{2x} + c$ (b) $\frac{1}{x} + c$

(c) $x\ln 2x + x + c$ (d) $x\ln 2x - x + c$

122. $f(x) = \sin 2x, g(x) = \sin^2 x$ এর প্রেক্ষিতে $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ কোনটি? [CB'17]

(a) $2\ln|1 + \cos 2x| + c$ (b) $-\ln|1 - \cos 2x| + c$

(c) $\ln|1 + \cos 2x| + c$ (d) $\ln|1 - \cos 2x| + c$

123. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ এর মান নিচের কোনটি? [CB'17]

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

110. a	111. b	112. b	113. b	114. c	115. b	116. d	117. b	118. c	119. b	120. a	121. d	122. d	123. c

110. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx = \int \tan 2x \cdot \sec 2x dx = \frac{1}{2}\sec 2x + c$

111. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + c$

112. $\int_0^{\pi/2} 2\sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx = \left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

113. ধরি, $5 - \frac{x}{10} = z \therefore -\frac{1}{10} dx = dz$

$\therefore dx = -10dz; \int \sin\left(5 - \frac{x}{10}\right) dx$

$= -10 \int \sin z dz = -10.(-\cos z) + c = 10\cos\left(5 - \frac{x}{10}\right) + c$

114. $\int_0^1 e^{5x+3} dx = \frac{1}{5}[e^{5x+3}]_0^1 = \frac{1}{5}(e^8 - e^3)$

115. $\int \ln x d(\ln x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$

116. $\int x\ln x dx = \ln x \int x dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\ln x) \int x dx\right\} dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2x} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$

$\therefore \int_1^{\sqrt{e}} x\ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{e}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{e}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

117. $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{6} + C$

119. $I = \int \ln x dx = \ln x \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\ln x) . \int dx\right\} dx$

$= \ln x \int dx - \int \frac{1}{x} . x dx; \ln x \int dx - \int dx = x\ln x - x + c$

120. $\int \frac{e^\theta d\theta}{1+e^\theta}\left[\frac{d}{dx}(1 + e^\theta) = e^\theta\right] \therefore \int \frac{e^\theta d\theta}{1+e^\theta} = \ln|1 + e^\theta| + c$

121. $\int f(x) dx$

$= \int \ln 2x dx = \ln 2x \int dx - \int \frac{d}{dx}(\ln 2x) \int dx = \frac{1}{2}(2x\ln 2x - 2x)$

$= x\ln 2x - x + c [\because \int \ln x dx = x\ln x - x + c]$

122. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x} dx [\int \frac{f'(x)}{f(x)}$ আকৃতি]

$= \ln|\sin^2 x| + c = \ln\left|\frac{1-\cos 2x}{2}\right| + c$

$= \ln|1 - \cos 2x| - \ln 2 + c = \ln|1 - \cos 2x| + c$

123. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1$

Educationblog24.com

বিভিন্ন কলেজের টেস্ট পরীক্ষার MCQ প্রশ্ন

124. $\int \sin\left(3-\frac{x}{10}\right)dx = f(x)+c$ হলে, $f(x)$ এর মান কত?
[ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ]
(a) $-10\cos\left(3-\frac{x}{10}\right)$ (b) $10\cos\left(3-\frac{x}{10}\right)$
(c) $-\frac{1}{10}\cos\left(3-\frac{x}{10}\right)$ (d) $\frac{1}{10}\cos\left(3-\frac{x}{10}\right)$

125. $\int \cos^2 2x\,dx =$ কোনটি? [পাবনা ক্যাডেট কলেজ]
(a) $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+c$ (b) $\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{6}\sin 4x\right)+c$
(c) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)+c$ (d) $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)+c$

126. $\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}dx$ এর মান কত? [কুমিল্লা ক্যাডেট কলেজ]
(a) $\ln 3$ (b) $\ln 2$ (c) 1 (d) 0

127. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\,d\theta =$ কত? [রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]
(a) $\frac{1}{2}\ln 2$ (b) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$
(c) $\ln(\sqrt{2}+1)$ (d) $\ln(\sqrt{2}-1)$

128. $f(\theta)=\cos 2\theta$ হলে- [রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]
(i) $\int f(\theta)\,d\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}+c$
(ii) $\int \sqrt{1-f(\theta)}\,d\theta = -\sqrt{2}\cos\theta+c$
(iii) $\int \sqrt{1+f(\theta)}\,d\theta = \sqrt{2}\sin\theta+c$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

129. $y^2=x, y=0, x=1$ এবং $x=4$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [ঢাকা কলেজ]
(a) $\frac{27}{2}$ (b) $\frac{21}{2}$ (c) $\frac{14}{3}$ (d) $\frac{11}{2}$

130. $\int \frac{\tan(\ln x)}{x}dx = g(x)+c$ হলে, $g(x) =$ কত?
[আইডিয়াল স্কুল অ্যান্ড কলেজ, মতিঝিল]
(a) $\ln|\sec^2 x|$ (b) $\ln|\sec(\ln x)|$
(c) $\ln|\sec x|$ (d) $\ln|\tan^2 x|$

131. যদি $\int f(x)\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+c$ হয়, তাহলে $f(x) =$ কত? [ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ]
(a) $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
(c) $\sqrt{x^2-1}$ (d) $(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$

132. $y=\frac{\sin(\sin 7\theta)+\cos(\sin 7\theta)}{\sqrt{1+\sin(2\sin 7\theta)}}$ হলে, $\int_0^3 y\,dx$ এর মান নিম্নের কোনটি? [হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]
(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

133. $\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx =$ কত?
[বীরশ্রেষ্ঠ মুন্সী আব্দুর রউফ পাবলিক কলেজ]
(a) $-\frac{1}{4}$ (b) $\frac{e}{2}-\frac{1}{4}$ (c) $\frac{e}{2}+\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{4}$

134. $\int \sin x^\circ\,dx =$ কত?
[বীরশ্রেষ্ঠ মুন্সী আব্দুর রউফ পাবলিক কলেজ]
(a) $\cos x^\circ + c$ (b) $-\cos x^\circ + c$
(c) $-\frac{180}{\pi}\cos x^\circ + c$ (d) $\frac{180}{\pi}\cos x^\circ + c$

135. $\int_0^6 f(x)\,dx = 8$ হলে, $\int_0^3 f(2x)\,dx$ এর মান কত?
[বীরশ্রেষ্ঠ নূর মোহাম্মদ পাবলিক কলেজ, ঢাকা]
(a) 0 (b) 6 (c) 10 (d) 4

136. $\int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$ এর মান কোনটি?
[গাজীপুর ক্যান্টনমেন্ট কলেজ]
(a) $\cos\left(\frac{1}{x}\right)+c$ (b) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)+c$
(c) $\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (d) $-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+c$

137. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin x+\cos x)dx =$ কত? [সিরাজগঞ্জ সরকারি কলেজ]
(a) e^2 (b) $e^{\frac{\pi}{2}}$ (c) $e^{\frac{1}{2}}$ (d) e^π

138. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ এর মান নিচের কোনটি?
[ব্রাহ্মণবাড়িয়া সরকারি মহিলা কলেজ]
(a) $\ln x^3$ (b) $\ln x^2$
(c) $\ln x$ (d) $3^{-1}(\ln x)^3$

139. $y=f(x)$ ফাংশনটি $[a,b]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হলে, $x=a$, $x=b, y=f(x)$ এবং x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি?
[চট্টগ্রাম প্রকৌশল বিশ্ববিদ্যালয় স্কুল ও কলেজ]
(a) $\int_a^b x\,dy$ (b) $\int_a^b y\,dy$
(c) $\int_0^b y\,dx$ (d) $\int_a^b y\,dx$

140. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$ এর মান কত?
[বাংলাদেশ নৌবাহিনী স্কুল এন্ড কলেজ কাপ্তাই, রাঙ্গামাটি]
(a) $\sec x + c$ (b) $-\sec x + c$
(c) $\operatorname{cosec} x + c$ (d) $-\operatorname{cosec} x + c$

141. $\int \frac{\tan(\ln x)}{x}dx$ এর মান নিচের কোনটি?
[বান্দরবান ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ]
(a) $\ln\{\sec(\ln x)\}+c$ (b) $\ln(\sec x)+c$
(c) $\ln(\ln x)+c$ (d) $\ln(\sec^2 x)+c$

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

124. b	125. a	126. b	127. c	128. d	129. c	130. b	131. b	132. a	133. d	134. c
135. d	136. d	137. b	138. d	139. d	140. d	141. a				

Educationblog24.com

124. $\int \sin\left(3-\frac{x}{10}\right)dx = \frac{-\cos\left(3-\frac{x}{10}\right)}{\frac{d}{dx}\left(3-\frac{x}{10}\right)} + c$

$= \frac{-\cos\left(3-\frac{x}{10}\right)}{-\frac{1}{10}} + c = 10\cos\left(3-\frac{x}{10}\right) + c$

125. $\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}$

$\int(1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$

126. $\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \int_1^2 \frac{1}{z}dz$

$= [\ln z]_1^2 = \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

ধরি, $1 + \ln x = z \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dz$

x	e	1
z	2	1

127. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\,d\theta = [\ln(\sec\theta + \tan\theta)]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \ln\left(\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right) - \ln(1+0) = \ln(\sqrt{2}+1)$

129. $y^2 = x, y = 0, x = 1, x = 4$

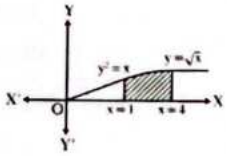
∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$= \int_1^4 y\,dx$ বর্গ একক

$= \int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

$= \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$ বর্গ একক



130. $\int \frac{\tan(\ln x)}{x}dx$

$= \int \tan z\,dz$

$= \ln|\sec z| + c$

$= \ln|\sec(\ln x)| + c$

ধরি, $\ln x = z$

$\therefore \frac{1}{x}dx = dz$

132. $y = \frac{\sin(\sin 7\theta)+\cos(\sin 7\theta)}{\sqrt{1+\sin(2\sin 7\theta)}} = \frac{\sin(\sin 7\theta)+\cos(\sin 7\theta)}{\sqrt{\sin^2(\sin 7\theta)+\cos^2(\sin 7\theta)+2\sin(\sin 7\theta)\cos(\sin 7\theta)}}$

$= \frac{\sin(\sin 7\theta)+\cos(\sin 7\theta)}{\sqrt{(\sin(\sin 7\theta)+\cos(\sin 7\theta))^2}} = 1 \therefore \int_0^3 y\,dx = \int_0^3 1\,dx = [x]_0^3 = 3-0 = 3$

135. $\int_0^6 f(x)\,dx = 8$

$\therefore \int_0^6 f(z)\,dz = 8$

এখন, $\int_0^3 f(2x)\,dx = \int_0^6 f(z)\frac{dz}{2}$

$= \frac{1}{2}\int_0^6 f(z)\,dz = \frac{1}{2}\times 8 = 4$

ধরি, $2x = z \Rightarrow 2dx = dz$

$\therefore dx = \frac{1}{2}dz$

x	0	3
z	0	6

Shortcut: $\frac{1}{x\text{ এর সহগ}} = \frac{\int_0^6 f(x)dx}{x\text{ এর সহগ}} = \frac{8}{2} = 4$

136. $\int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$

$= \int -\cos z\,dz$

$= -\sin z + c = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + c$

ধরি, $\frac{1}{x} = z \Rightarrow -\frac{1}{x^2}dx = dz$

$\therefore \frac{1}{x^2}dx = -dz$

138. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int u^2\,du$

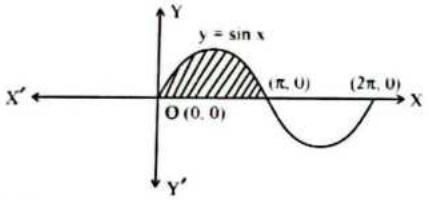
$= \frac{u^3}{3} = \frac{(\ln x)^3}{3} = 3^{-1}(\ln x)^3$

ধরি, $\ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x}dx = du$

সাজেশনভিত্তিক মডেল টেস্ট: অধ্যায়-১০

পূর্ণমান: ৫০ | **MCQ** | সময়: ৫০ মিনিট

01.



লেখচিত্রটিতে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত?

(a) −2 (b) 2 (c) $\frac{\pi^2}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{1-\pi^2}} - 1$

02. $\int \frac{dx}{9x^2-16} = ?$

(a) $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x+4}{3x-4}\right|$ (b) $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right|$

(c) $\frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{4}{3}$ (d) $\frac{1}{9}\sin^{-1}\sqrt{x-4}$

03. $\int e^x \sec x(1+\tan x)dx = f(x) + c, f(x) = ?$

(a) $e^x\sin x$ (b) $e^x\cos x$ (c) $e^x\tan x$ (d) $e^x\sec x$

04. $\int e^{5x}\left(5\ln x + \frac{1}{x}\right)dx = ?$

(a) $5e^{5x}\ln x + c$ (b) $\frac{e^{5x}\ln x}{5} + c$

(c) $e^{5x}\ln x + c$ (d) $25e^{5x}\ln x + c$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = x$ এবং $g(x) = \sin^{-1} x$

05. $\int \frac{g(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = ?$

(a) $\frac{\sin^{-1}x^2}{2} + c$ (b) $\sin^{-1}x^2 + c$

(c) $\frac{(\sin^{-1}x)^2}{2} + c$ (d) $(\sin^{-1}x)^2 + c$

06. $\int f(x)\,dx = g(x) + c$ হলে, $g(x) = ?$

(a) $\frac{1}{2}x^2$ (b) $\frac{1}{3}x^3$ (c) 1 (d) 0

07. $\sin x = m, \cos x = n, \tan x = p$ হলে-

(i) $\int m\,dx = -n + c$

(ii) $\int n\,dx = -m + c$

(iii) $\int p\,dx = -\ln|n| + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

08. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ এর মান কত?

(a) $\sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$ (b) $\sqrt{1-x^2} + c$

(c) $\sin^{-1}x + c$ (d) $\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

09. $u = e^{2x}, v = e^{-2x}$ হলে-

(i) $\frac{d}{dx}(u+v) = 2(u-v)$

(ii) $\frac{d}{dx}(uv) = 0$ (iii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{u}{v}\right) = 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

10. $\int_0^1 x\left(1-\sqrt{x}\right)^2 dx = ?$

(a) $\frac{1}{30}$ (b) $\frac{2}{15}$ (c) $\frac{1}{17}$ (d) $-\frac{1}{30}$

11. $\int \tan x \sec^2 x\,dx$ কত?

(a) $\frac{\tan^2 x}{4} + c$ (b) $\frac{\sec^2 x}{2} + c$ (c) $\tan x + c$ (d) $\sec x + c$

Educationblog24.com

12. $\int \sqrt{(1-\sin 2x)}\,dx$ = কত?
(a) $-(\cos x - \sin x) + c$ (b) $\cos x + \sin x + c$
(c) $-\cos x + \sin x + c$ (d) $\cos x - \sin x + c$

13. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$ = কত?
(a) $\ln\left|\frac{x-2}{x-3}\right| + c$ (b) $\ln\left|\frac{x+2}{x-3}\right| + c$
(c) $\ln\left|\frac{x+3}{x-2}\right| + c$ (d) $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$ = কত?
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

15. $\int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$ = কত?
(a) $\sqrt{16-x^2} + c$ (b) $-\sqrt{16-x^2} + c$
(c) $\sqrt{4-x^2} + c$ (d) $-\sqrt{4-x^2} + c$

16. $\int \frac{3x^2}{1+x^6} dx = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ এর সঠিক মান নিচের কোনটি?
(a) $\tan^{-1} x^3$ (b) $\tan^{-1}(3x^3)$
(c) $\frac{1}{3}\tan^{-1} x^3$ (d) $3\tan^{-1} x^3$

17. $\int_2^3 \frac{2x-1}{x(x-1)} dx$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) $\ln 4$ (b) $2\ln 3$ (c) $\ln 3$ (d) $\ln 2$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = \tan^2 x, g(x) = \sec^2 x$

18. $\int f(x)dx$ এর মান কোনটি?
(a) $\sec^2 x + c$ (b) $\tan^3 x + c$
(c) $\tan x - x + c$ (d) $\sec x - x + c$

19. $\int f(x)g(x)dx$ =?
(a) $\tan^3 x + c$ (b) $\sec^3 x + c$
(c) $\frac{1}{3}\tan^3 x + c$ (d) $\frac{1}{2}\sec^3 x + c$

20. x অক্ষ এবং $y = 4x - x^2$ বক্ররেখার দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?
(a) $\frac{16}{3}$ বর্গ একক (b) $\frac{8}{3}$ বর্গ একক
(c) $\frac{32}{3}$ বর্গ একক (d) $\frac{4}{3}$ বর্গ একক

21. $\int e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx$ এর মান–
(a) $e^x \cos\frac{x}{2} + c$ (b) $e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right) + c$
(c) $e^x \tan\left(\frac{x}{2}\right) + c$ (d) $e^x \cot\left(\frac{x}{2}\right) + c$

22. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} d\theta$ এর মান কোনটি?
(a) 1 (b) $1 - \frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) π

23. $y = -\sqrt{a^2-x^2}$ ও $y = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?
(a) $\frac{1}{4}\pi a^2$ (b) $\frac{1}{2}\pi a^2$ (c) πa^2 (d) $\frac{1}{2}a^2$

24. $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta$ = কত?
(a) $\tan\theta + c$ (b) $-\operatorname{cosec}\theta + c$
(c) $\operatorname{cosec}\theta + c$ (d) $\cot\theta + c$

25. $\int \ln ax\,dx$ =?
(a) $ax(\ln ax - 1) + c$ (b) $x(\ln ax - a) + c$
(c) $x(\ln ax - 1) + c$ (d) $x(a\ln x - 1) + c$

26. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ কোন শর্তে প্রযোজ্য নয়?
(a) $n = 1$ (b) $n = -1$ (c) $n = 2$ (d) $n \neq -2$

27. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$ এর মান কত?
(a) $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$ (b) $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$
(c) $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + c$ (d) $\ln\frac{a+x}{a-x}$

28. $xy = 10$ অধিবৃত্ত x-অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 3$ রেখা দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?
(a) $10\ln\frac{1}{3}$ (b) $10\ln 3$
(c) $5\ln 3$ (d) $2\ln 3$

29. $\int \sin x \cos x dx$ এর মান-
(i) $\frac{\sin^2 x}{2} + c$ (ii) $-\frac{\cos 2x}{4} + c$
(iii) $-\frac{\cos^2 x}{2} + c$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

30. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর:
(i) $\frac{d}{dx}\{e^{2\ln(\sin x)} + \cos^2 x\} = 0$
(ii) $\int e^{2x}\left(2\ln x + \frac{1}{x}\right)dx = e^{2x}\ln x + c$
(iii) $\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{e^{2x}(\sin 3x + 2\cos 3x)}{13} + c$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

31. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2^2}}$ =?
(a) $\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$ (b) $\sin^{-1}\frac{x}{2} + c$
(c) $\frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$ (d) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

32. $\int \sec^2 x\, e^{2\tan x} dx$ = কত?
(a) $e^{2\tan x} + c$ (b) $\frac{1}{2}e^{2\tan x} + c$
(c) $2e^{2\tan x} + c$ (d) $\frac{1}{2}e^{\tan x} + c$

33. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} dx$ = কত?
(a) 1 (b) $\frac{\pi}{2} - 1$ (c) $\frac{\pi}{2} + 1$ (d) $\frac{\pi}{2}$

34. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$ = ?
(a) 2 (b) $\sqrt{2}$
(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

35. $\int f(x)dx = F(x)$ হলে $\int_a^b f(x)dx$ –
(i) নির্দিষ্ট যোগজ (ii) $[F(x)]_a^b$
(iii) $F(b) - F(a)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

36. $\int e^{-x^3} x^2 dx$ এর সমাকলন কোনটি?
(a) $-\frac{1}{3}e^{-x^3} + c$ (b) $\frac{1}{3}e^{x^3} + c$
(c) $-\frac{1}{3}e^{x^4} + c$ (d) $-\frac{1}{3}e^{x^6} + c$

Educationblog24.com

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ এবং $g(x) = \sin^{-1} x$ দুইটি ফাংশন

37. $\int \frac{g(x)}{f(x)} dx$ এর যোগজ নিচের কোনটি?

(a) $\frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2 + c$ (b) $\tan^{-1} x + c$

(c) $\frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2 + c$ (d) $\sin^{-1} x + c$

38. $\int \sin ax\, dx = ?$

(a) $\frac{1}{ax}\cos ax + c$ (b) $-\frac{1}{a}\cos ax + c$

(c) $a\cos ax + c$ (d) $-a\cos ax + c$

39. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = ?$

(a) $\frac{14}{16}$ (b) $-\frac{14}{16}$ (c) 1 (d) 2

40. $\int \frac{dx}{ay-bx} = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ কোনটি? [এখানে, y ধ্রুবক]

(a) $-\frac{1}{b}\ln(ay-bx)$ (b) $\frac{1}{b}\ln(ay-bx)$

(c) $\ln(ay-bx)$ (d) $\frac{1}{a}\ln(ay-bx)$

41. $\int_0^4 f(x)\, dx = 6$ হলে, $\int_{-1}^3 f(x+1)\, dx = ?$

(a) 0 (b) 5 (c) 6 (d) 7

42. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-6x}} = f(x) + c$ হলে, $f(x) = ?$

(a) $\frac{1}{4}(1-6x)^{\frac{2}{3}}$ (b) $\frac{1}{4}(1-6x)^{\frac{3}{2}}$

(c) $-\frac{1}{4}(1-6x)^{2/3}$ (d) $-\frac{1}{4}(1-6x)^{3/2}$

43. $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos 3x\, dx$ এর মান-

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) কোনোটিই নয়

44. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2\, dx = ?$

(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) π

45. $\int_{-1}^1 |x|\, dx$ এর মান কত?

(a) 2 (b) -1 (c) 1 (d) 0

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি বক্ররেখার ঢাল $\frac{dy}{dx} = \ln(2x)$; বক্ররেখাটি $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

46. বক্ররেখাটির সমীকরণ-

(a) $y = x\ln(x) - x$ (b) $y = \ln(2x) + 2$

(c) $y = x\ln(2x) - x + 1$ (d) $y = x\ln(2x) - x + 2$

47. x এর কোন মানের জন্য বক্ররেখাটির ঢাল শূন্য হবে?

(a) $x = \frac{1}{2}$ (b) $x = 1$ (c) $x = 0$ (d) $x = \frac{1}{4}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y = x^3$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ এবং $y = f(x)$

48. $\int x^2[\sin\{f(x)\}]dx = ?$

(a) $\frac{-1}{3}\cos(x^3) + c$ (b) $\frac{1}{3}\cos(x^3) + c$

(c) $\frac{1}{3}x^2 \sin x + x\cos x - \sin x + c$

(d) $\frac{1}{2}\cos^2 x + c$

49. প্রদত্ত বক্ররেখা এবং $x = 1$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{3}$

50. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\theta \cos\theta\, d\theta$ এর মান-

(a) $\frac{1}{3}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{7}$ (d) $\frac{1}{9}$

CQ

পূর্ণমান: ৫০ সময়: ২:৩৫ মিনিট

(যেকোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও:)

01. $f(x) = e^x + 1, g(x) = x\sqrt{4-x}$ এবং $y^2 = 4ax$ ও $x^2 = 4ay$ দুটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

(ক) $\int \frac{dx}{f(x)}$ মান বের কর।

(খ) $\int_0^4 g(x)dx$ নির্ণয় কর।

(গ) পরাবৃত্তদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

02. $x^2 + y^2 = 16 \cdots\cdots\cdots (i), g(x) = x - 2$ এবং $f(x) = \ln x, x > 0$

(ক) $\int \sin^2 x \cos 2x\, dx = ?$

(খ) $u = \{1 - f(x)\}e^{2f(x)}$ বক্ররেখাটির যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল তাদের ভুজ নির্ণয় কর।

(গ) (i) নং বৃত্ত এবং $g(x) = 0$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

03. $f(x) = \sin x$

(ক) $\int e^x\{\sec x + \sec x \tan x\}\, dx$ নির্ণয় কর।

(খ) $\int e^x f(x)$ এর যোগজীকরণ কর।

(গ) $y = f(x)$ বক্ররেখা x অক্ষের সাথে সৃষ্ট একটি চাপ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

04. $p = \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$ এবং $q = \cos^3 x\sqrt{\sin x}$

(ক) $\int (uv)dx$ = কত? [যেখানে u এবং v উভয়ই x এর ফাংশন।]

(খ) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2}} p\, dx$ = কত?

(গ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} q\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

05. $f(x) = \sec x.\operatorname{cosec} x$, $g(x) = \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}$ এবং $h(x) = \cot^{-1} x$

(ক) $\int f(x)dx$ নির্ণয় কর।

(খ) $\int g(x)dx$ নির্ণয় কর।

(গ) $\int_1^{\sqrt{3}} xh(x)dx$ নির্ণয় কর।

06. $f(x) = \int x\sin^{-1} x dx$ এবং $g(x) = \int_8^{27} \frac{dx}{x - x^{\frac{1}{3}}}$

(ক) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx = ?$

(খ) $f(x)$ এর যোগজীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) $g(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

07. $f(x) = (x-1)^2$ এবং $g(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$

(ক) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-6x}} = ?$

(খ) $\int \frac{dx}{f(x)f(x-1)(x-2)} = ?$

(গ) $\int_0^3 e^x g(x)$ নির্ণয় কর।

08. $f(0) = \sin\theta$

(ক) $\int \frac{1}{1+\tan z} dz$ এর মান কত?

(খ) $\sqrt{1 + f(\theta)}$ এর যোগজ নির্ণয় কর।

(গ) $\int f\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta$ এর মান বের কর।

Educationblog24.com

MCQ উত্তরমালা ও ব্যাখ্যামূলক সমাধান

MCQ

01. b	02. b	03. d	04. c	05. c	06. a	07. b	08. d	09. d	10. a	11. b	12. b	13. d	14. d	15. d
16. a	17. c	18. c	19. c	20. c	21. c	22. b	23. b	24. b	25. c	26. b	27. b	28. b	29. d	30. a
31. c	32. b	33. c	34. a	35. d	36. a	37. c	38. b	39. d	40. a	41. c	42. c	43. d	44. d	45. c
46. c	47. a	48. a	49. b	50. d										

01. $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -[\cos x]_0^{\pi} = 2$

02. $\int \frac{dx}{9x^2-16} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2\times\frac{4}{3}}\ln\left|\frac{x-\frac{4}{3}}{x+\frac{4}{3}}\right| = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right|$

03. $\int e^x \sec x(1+\tan x).dx = \int e^x(\sec x + \sec x.\tan x).dx = e^x\sec x + c$

04. $\int e^{5x}\left\{5\ln x + \frac{d}{dx}(\ln x)\right\}.dx = \int d(\ln x \times e^{5x}) = e^{5x}\ln x + c$

05. $\int \frac{\sin^{-1}x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \sin^{-1}x.d(\sin^{-1}(x)) = \frac{(\sin^{-1}x)^2}{2} + c$

08. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
$= \sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

11. $\int \tan x.\sec^2 x\,dx = \int \sec x.d(\sec x) = \frac{\sec^2 x}{2} + c$

12. $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2 \therefore \int \sqrt{1-\sin 2x}\cdot dx$
$= \pm\int(\sin x - \cos x)\cdot dx = \pm(-\cos x - \sin x) + c = \pm(\cos x + \sin x) + c$

13. $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = -\frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-3)}$;
$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{1}{x-3}.dx - \int \frac{1}{x-2}.dx$
$= \ln|x-3| - \ln|x-2| + c = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{4-z^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

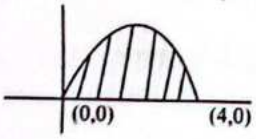
15. $\int \frac{1}{2}\frac{2x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-1}{2}\int \frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{4-x^2} + c$

17. $\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx = \int_{x=2}^{x=3}\frac{d(x^2-x)}{x^2-x}dx$
$= [\ln|x^2-x|]_2^3 = \ln|9-3| - \ln|4-2| = \ln\left(\frac{9-3}{4-2}\right) = \ln\left(\frac{6}{2}\right) = \ln 3$

18. $\int \tan^2 x\cdot dx = \int(\sec^2 x - 1)\cdot dx = \tan x - x + c$

19. $\int \tan^2 x\cdot\sec^2 x\cdot dx = \int \tan^2 x\cdot d(\tan x) = \frac{\tan^3 x}{3} + c$

20.



$y = 4x - x^2$; $\int_0^4 y\cdot dx = \left[\frac{4x^2}{2}\right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{32}{3}$ বর্গ একক

21. $\int e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx = \int e^x\left(\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}\right)dx = e^x\tan\frac{x}{2} + c$

22. $1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta\ 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$
$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\cdot d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta - 1)\,d\theta = [\tan\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$

24. $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot d\theta = \int \cot\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta\cdot d\theta = -\operatorname{cosec}\theta + c$

25. ধরি, $ax = z$; $dx = \frac{1}{a}dz$; $\int \ln ax\,dx$
$= \frac{1}{a}\int \ln z\,dz = \frac{1}{a}(z\ln z - z) + c = \frac{1}{a}(ax\ln ax - ax) + c$
$x\ln ax - x + c = x(\ln ax - 1) + c$

28. $xy = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{x} \Rightarrow$ Area $= \int_1^3 \frac{10}{x}\cdot dx = 10 \times \ln 3$

30. (i) $\frac{d}{dx}\left(e^{2\ln(\sin x)} + \cos^2 x\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln(\sin^2 x)} + \cos^2 x\right)$
$= \frac{d}{dx}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{d}{dx}1 = 0$ (ii) $\int e^{2x}\left(2\ln x + \frac{1}{x}\right)dx$
$= \int e^{2x}\left(2\ln x + \frac{d}{dx}(\ln x)\right)\cdot dx = e^{2x}\ln x + c$
(iii) $\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x)}{13} + c$

31. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}} = \frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

36. $\int e^{-x^3}x^2\,dx = -\frac{1}{3}\int e^{-x^3}\,d(-x^3) = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + c$

39. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\left[\sqrt{x}\right]_1^4 = 2$

41. ধরি, $x + 1 = z \therefore dx = dz$; $z = 0$ হলে, $x = -1$
$z = 4$ হলে, $x = 3 \therefore \int_{-1}^3 (x+1)\,dx = \int_0^4 f(z)dz = 6$

42. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-6x}} = \int(1-6x)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{(1-6x)^{-\frac{1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1}\times\frac{1}{-6} + c = \frac{-1}{4}(1-6x)^{\frac{2}{3}} + c$

43. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\cdot\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 6x\,dx = \frac{-1}{12}[\cos 6x]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{6}$

44. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x + \cos x)^2 dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1 + \sin 2x)\,dx = \left[x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$
$= \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cos\pi\right] = \pi$

45. $\int_{-1}^1 |x|\,dx = \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^1 x\,dx = 1$

46. $y = \int \ln(2x)\,dx$; $z = 2x$ হলে, $y = \frac{1}{2}\int \ln z\,dz$
$\therefore y = \frac{1}{2}[z\ln z - z] + c = \frac{1}{2}[2x\ln(2x) - 2x] + c$
$\therefore y = x\ln(2x) - x + c$ বক্ররেখাটি $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ বিন্দু দিয়ে গেলে $c = 1$

47. $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \ln(2x) = 0 \Rightarrow \ln(2x) = \ln(1) \therefore x = \frac{1}{2}$

48. $\int x^2\sin x^3\,dx = \frac{1}{3}\int \sin x^3 dx(x^3) = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$

49. Area $= \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$

CQ

01. (ক) $x - \ln|1 + e^x| + c$ (খ) $\frac{128}{15}$ (গ) $\frac{16a^2}{3}$

02. (ক) $\frac{1}{4}\left(\sin 2x - x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$
(খ) $\therefore x = \sqrt{e}$ (গ) $\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

03. (ক) $e^x\sec x + c$ (খ) $\frac{1}{2}(e^x\sin x - e^x\cos x) + c$
(গ) 2

04. (ক) $u\int v\,dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v\,dx\right\}dx$
(খ) $e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{3}}$ (গ) $\frac{\theta}{21}$

05. (ক) $\ln|\sec x| - \ln|\operatorname{cosec} x| + c$
(খ) $\tan z + c = \tan(xe^x) + c$
(গ) $\frac{6\sqrt{3}+\pi}{12} - \frac{1}{2}$

06. (ক) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + c$
(খ) $\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\sin^{-1}x(1-2x^2)$
(গ) $\frac{3}{2}\ln\frac{8}{3}$

07. (ক) $-\frac{1}{4}(1-6x)^{\frac{2}{3}} + c$
(খ) $-\frac{x-2}{x-1} - 3\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + 3\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 + c$
(গ) $\frac{e^3}{2} + 1$

08. (ক) $\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\ln|\sin z + \cos z| + c$
(খ) $2\sin\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2} + c$
(গ) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3\theta + \sin\theta\right) + c$

Educationblog24.com

শর্ট সিলেবাস ২০২৫

মডেল টেস্ট

পূর্ণমান: ৫০+২৫=৭৫ | সময়: ৩ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৫০ | সময়: ২: ৩৫ মিনিট

(প্রত্যেক বিভাগ হতে কমপক্ষে দুইটি করে প্রশ্ন নিয়ে মোট পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও:)

ক বিভাগ–বীজগণিত ও জ্যামিতি

01. $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix}4\\6\\5\end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

(ক) $\begin{bmatrix}1 & 7\\P & 4\end{bmatrix}$ প্রতিসম হলে P এর মান কত? 2

(খ) $AX = R$ সমীকরণটি ক্রেমারের নিয়মের সাহায্যে সমাধান কর। 4

(গ) $f(A) = I$ হলে সমীকরণটি হতে A^{-1} নির্ণয় কর। 4

02. $L(2,3), M(-1,4), A(-2,4)$ এবং $B(4,-5)$

(ক) $r(1+\cos\theta) = 2$ সমীকরণটি কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর। 2

(খ) AB রেখা C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো যেন $AB = 3BC$ হয়। L বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

(গ) P বিন্দুটি একটি সেটের সদস্য যেন, $PL: PM = 2:3$ হয়। P বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

03. $2x - y - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i) এবং $3x - 4y + 6 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(ক) $ax + by = c$ এবং $x\cos x + y\sin x = P$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে P এর মান a, b এবং c তে প্রকাশ কর। 2

(খ) দুইটি সরলরেখা (i) এবং (ii) রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + y = 7$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) যদি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখাটি (i) এবং (ii) রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $4x + 3y - 6 = 0$ রেখার সমান্তরাল হয়, তবে a এবং b এর মান নির্ণয় কর। 4

04. দৃশ্যকল্প ০১: $x = 0, y = 0$ এবং $x = a$ তিনটি রেখার সমীকরণ।

দৃশ্যকল্প ০২: $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক অক্ষদ্বয় থেকে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে।

(ক) মূলবিন্দু হতে (1,2) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প ০১ এ উল্লিখিত রেখা তিনটিকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প ০২ এ উল্লিখিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

খ বিভাগ – ত্রিকোণমিতি ও ক্যালকুলাস

05. $P = e^x$ এবং $y = \sin(m\sin^{-1}x)$

(ক) $\frac{d}{dx}(e^{\tan^{-1}x})$ কত? 2

(খ) মূল নিয়ম P এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ 4

06. $g(x) = 9e^x + 16e^{-x}$ এবং $y = \sqrt{2 + 5\sin x}$

(ক) x এর সাপেক্ষে $(1+x)^x$ এর অন্তরক নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 2$ 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $g(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান 24 4

Educationblog24.com

07. $f(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$ এবং $g(x) = \sqrt{\cos x}\sin^3 x\, dx$

(ক) দেখাও যে, $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}\, dx = e^x f(x) + c$ 2

(খ) $\int f(x)\, dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(y)\, dy$ এর মান নির্ণয় কর। 4

08. $f(x) = x^3\sqrt{1+3x^4}, g(x) = x-4, h(x) = 2x^2 + 2y^2$

(ক) $\int \frac{\tan(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_0^1 f(x)\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) $g(x) = 0$ এবং $h(x) = 72$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ২৫ সময়: ২৫ মিনিট

01. A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর আকার যথাক্রমে $4\times5, 5\times4$ এবং 5×2 হলে, $(B^T + A)C$ ম্যাট্রিক্সের আকার হবে-

(a) 5×4 (b) 4×2

(c) 5×2 (d) 2×4

02. $A = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ হলে, A একটি-

(i) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (ii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

(iii) 3×3 ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

03. $\begin{bmatrix}p+1&6\\4&-8\end{bmatrix}$-ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে p এর মান–

(a) -8 (b) -4

(c) 4 (d) 8

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

দুইটি সরলরেখা $(4,-5)$ বিন্দুগামী এবং তারা যথাক্রমে x অক্ষের সমান্তরাল ও তার উপর লম্ব।

04. x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণের কোনটি?

(a) $y-5=0$ (b) $y+5=0$

(c) $x+4=0$ (d) $x-4=0$

05. x-অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ কত?

(a) $y+5=0$ (b) $y-5=0$

(c) $x-4=0$ (d) $x+4=0$

06. ত্রিভুজের যেকোন দুইটি শীর্ষবিন্দু $(-1,1), (2,2)$ এবং ভরকেন্দ্র $(3,1)$ হলে, অপর শীর্ষবিন্দু কোনটি?

(a) $(-8,0)$ (b) $(1,-1)$

(c) $(8,0)$ (d) $(2,1)$

07. $4x+6y+c=0$ এবং $2x+3y+1=0$ সমীকরণদ্বয় একই রেখা নির্দেশ করলে c এর মান কোনটি?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) $\frac{2}{3}$

08. $y^2 = 4(x+1)$ সমীকরণটির পোলার আকৃতি কোনটি?

(a) $r(1-\cos\theta) = 2$ (b) $r(1+\cos\theta) = 2$

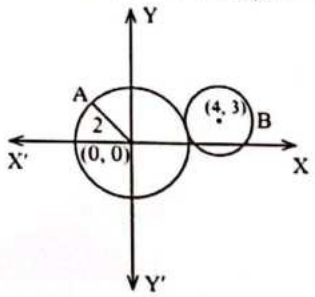
(c) $r(1-\sin\theta) = 2$ (d) $r(1+\sin\theta) = 2$

09. $3x^2 + 3y^2 - x + \frac{y}{2} - 5 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র-

(a) $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$

(c) $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



10. B বৃত্তের ব্যাসার্ধ নিচের কোনটি?

(a) 7 একক (b) 6 একক

(c) 8 একক (d) 3 একক

11. B বৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি?

(a) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$

(d) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 16 = 0$

Educationblog24.com

HSC প্রশ্নব্যাংক ২০২৫

12. $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$ হলে A কোণের মান কত?
(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

13. $(-1, \sqrt{3})$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক-
(a) $\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$ (b) $\left(-2, \frac{\pi}{3}\right)$
(c) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ (d) $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$

14. $\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$ = কত?
(a) $\tan\theta$ (b) $\cot\theta$ (c) $\tan^2\theta$ (d) 1

15. $\sin 27° + \cos 27°$ এর মান কত?
(a) $\cos 18°$ (b) $2\cos 18°$
(c) $\sqrt{2}\cos 18°$ (d) $\sqrt{2}\sin 18°$

16. $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং θ সূক্ষ্মকোণ হলে-
(i) $\sin\theta = \frac{5}{13}$ (ii) $\cos\theta = -\frac{12}{13}$
(iii) $\sec\theta + \tan\theta = \frac{3}{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

17. $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = ?$
(a) e (b) $\frac{1}{e}$ (c) $\sqrt{e}$ (d) e^2

18. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) = ?$
(a) $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) 0 (c) $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) 2

19. $y = x^3 + 2$ সমীকরণের ক্ষেত্রে $\frac{d^3y}{dx^3}$ = কত?
(a) 6x (b) $3x^2$ (c) 2 (d) 6

20. $y^2 - 2x - 3 = 0$ বক্ররেখার $(-1,1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত?
(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

21. $s = 6 + 4t - t^2$ হলে 2 sec পর ত্বরণ-
(a) $4\ ms^{-2}$ (b) $-4\ ms^{-2}$
(c) $2\ ms^{-2}$ (d) $-2\ ms^{-2}$

22. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল-
(a) 16π (b) 25π
(c) 20π (d) 400π

23. $\int e^x \sec x(1+\tan x)dx = f(x) + c, f(x) = ?$
(a) $e^x\sin x$ (b) $e^x\cos x$
(c) $e^x\tan x$ (d) $e^x\sec x$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta.\cos\theta\, d\theta = ?$
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{6}$

25. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$ এর মান কত?
(a) $2(e-1)$ (b) $(e+1)$
(c) $2(e+1)$ (d) $(e-1)$

উত্তরপত্র

01. b	02. b	03. b	04. b	05. c	06. c	07. b	08. a	09. a	10. d	11. c	12. c	13. d	14. a	15. c
16. b	17. c	18. b	19. d	20. d	21. d	22. c	23. d	24. d	25. a					

এইচএসসি বোর্ড পরীক্ষা ২০২১, ২২ ও ২৩
সালের সকল বোর্ডের
CQ ও MCQ প্রশ্ন একত্রে দেখতে
QR কোডটি স্ক্যান করো

Educationblog24.com

উদ্ভাসিত আলোর মাঝে
দেখো তোমার মুখ;
জীবন মানে সংগ্রাম
আর বিজয় মানে সুখ।

দেশব্যাপী উদ্ভাস-এর
শাখাসমূহের ঠিকানা দেখতে
QR কোডটি স্ক্যান করো

অনলাইনে ভর্তির জন্য ভিজিট করো অথবা ফোন করো

www.udvash.com 09666775566