ACS

উচ্চতর গণিত

Experience The Best Approach

২য় পত্র

HSC
কম্প্যাক্ট সিরিজ

শতভাগ গোছানো প্রস্তুতি

সুপার কম্প্যাক্ট ফরম্যাট

সর্বোচ্চ কোয়ালিটির নিশ্চয়তা

অভি | রাকিব

উচ্চতর গণিত ২য় পত্র
Experience The Best Approach

এক নজরে আমাদের বই

- পুরো সিলেবাসকে নিখুঁতভাবে বিশ্লেষণ করে আমরা বেছে নিয়েছি গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নমালা যা একজন HSC পরীক্ষার্থীকে স্বল্প সময়ে সম্পূর্ণ সিলেবাস আয়ত্ত করতে সাহায্য করবে।
- প্রতিটি সৃজনশীল প্রশ্নের উত্তর আমাদের কন্টেন্ট টিম কর্তৃক এমনভাবে প্রস্তুত করা হয়েছে যেন একজন শিক্ষার্থী পরীক্ষায় সর্বোচ্চ নম্বর অর্জন করতে পারে।
- MCQ প্রশ্নের জন্য প্রয়োজনীয় ব্যাখ্যা প্রদান করা হয়েছে। পর্যাপ্ত Shortcut Technique দেখানো হয়েছে যেন পরীক্ষায় দ্রুত উত্তর করতে পারো।

কীভাবে বইটি অধ্যয়ন করবে?

বোর্ড পরীক্ষার জন্য কোনো অধ্যায়ের চূড়ান্ত প্রস্তুতির অংশ হিসেবে ওই অধ্যায়ের সকল সৃজনশীল এবং বহুনির্বাচনী প্রশ্ন পড়ে ফেলো। প্রশ্নগুলো এমন ভাবে বাছাই করা হয়েছে যে এতে তোমার খুব দ্রুত একটি কার্যকর এবং পূর্ণাঙ্গ প্রস্তুতি হয়ে যাবে।

রচনায়

অভি দত্ত তুষার
ME'15, BUET

কাজী রাকিবুল হাসান
CSE'10, BUET

মোঃ সুজাউল ইসলাম
NAME'14, BUET

নাফিয়া মানফি
EEE'15, BUET

আলভি সাখাওয়াত অর্নব
NAME'18, BUET

হাবিব উল্লাহ খান
IPE'18, BUET

পরাগ কুমার কবিরাজ
EEE'21, BUET

মোঃ মাসুদ মিয়া
MME'16, BUET

প্রকাশ কুমার
CE'22, BUET

ধ্রুব কিশোর নাগ
CSE'21, BUET

প্রিতম চন্দ্র রায়
CE'21, BUET

সঞ্জয় কুমার সেন
EEE'21, BUET

খালিদ আল মাসফিক
EEE'21, BUET

প্রসেনজিৎ দাস
CE'23, BUET

সম্পাদকীয় বার্তা

প্রিয় HSC পরীক্ষার্থীবৃন্দ,

কয়েকমাস পরেই তোমরা জীবনের একটি খুবই গুরুত্বপূর্ণ পরীক্ষায় অংশগ্রহণ করতে যাচ্ছো। তোমাদের মনে প্রশ্ন আসতে পারে বাজারের এত বইয়ের সমাহারের মাঝে আমাদের বইটি আলাদা কী গুরুত্ব বহন করছে? আমাদের বইয়ের বিশেষত্বই বা কী?

একজন HSC পরীক্ষার্থীর জন্য পরীক্ষার আগের কয়েকটি মাস খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এ সময় বিশাল সিলেবাসকে একদম গুছিয়ে পড়তে হয় অন্যথায় হাবুডুবু খেতে হয়। এ ব্যাপারটি মাথায় রেখে আমরা তোমাদের জন্য নিয়ে এসেছি কম্প্যাক্ট সাজেশন বুক। আমাদের কন্টেন্ট টিম রীতিমতো গবেষণা করে একেকটি অধ্যায়ের জন্য সীমিত পরিমাণে এমনভাবে সৃজনশীল এবং বহুনির্বাচনি প্রশ্ন বাছাই করেছে যা তোমাদের প্রত্যেকটি অধ্যায়ের সকল টপিক দ্রুত কভার করতে সাহায্য করবে। আমরা আশাবাদী যে আমাদের এই বইগুলো তোমাদের প্রস্তুতিকে অন্য মাত্রায় নিয়ে যাবে।

তোমাদের ভবিষ্যৎ জীবনের প্রতি অনেক শুভকামনা।

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়

অভি দত্ত তুষার

মঈনুল হাসান

প্রকাশনা

রম্বস পাবলিকেশন্স

মিরপুর ডিওএইচএস, ঢাকা - ১২১৬

প্রথম প্রকাশ : ডিসেম্বর, ২০২৪

সম্পাদনায় : মোঃ সুজাউল ইসলাম

প্রচ্ছদ : তারিকুজ্জামান

গ্রাফিক্স : ইফরান আহম্মেদ ইউশা
শরিয়ত উল্লাহ

অঙ্গসজ্জা : রাজন সামি

বর্ণবিন্যাস : মাহফুজুর রহমান
মোঃ শাহজালাল
রফিকুল ইসলাম

মূদ্রন ও বাধাই : রম্বস পাবলিকেশন্স

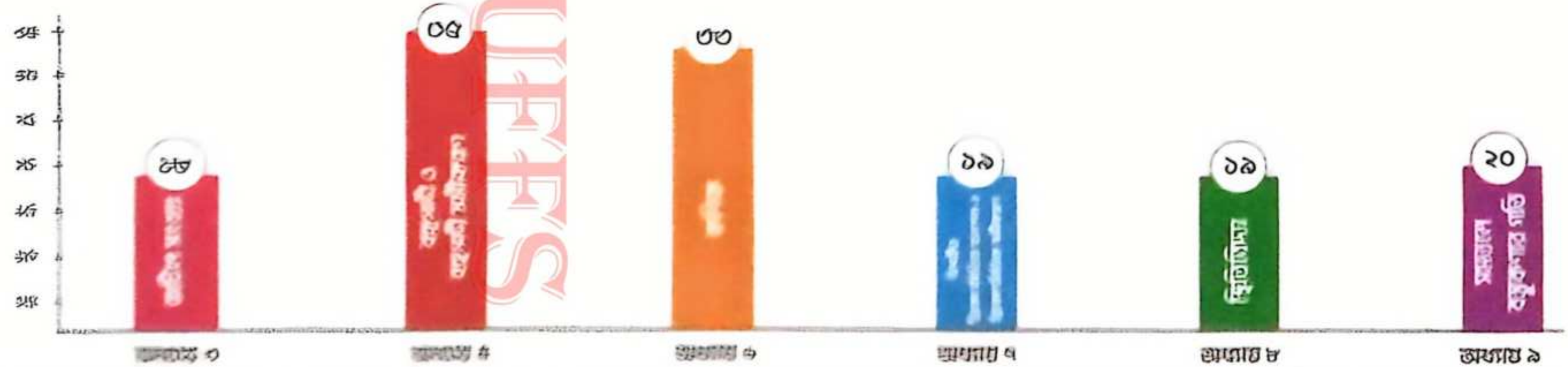
মূল্য : ৪৫০.০০(চারশত পঞ্চাশ) টাকা

উৎসর্গ

পরম করুণাময় সৃষ্টিকর্তা যিনি আমাদের সৃষ্টি করেছেন এবং মা-বাবা কে যাদের কল্যাণে আমরা পৃথিবীর আলো দেখতে পেরেছি!

অধ্যায়ভিত্তিক বোর্ডে আসা সৃজনশীল প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ

অধ্যায়	সাল / বোর্ড	ঢাকা	ময়মনসিংহ	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর	মোট	সর্বমোট
জটিল সংখ্যা	২০২৩	১	১	১	১	১	১	১	১	১	০৯	২৮
	২০২২	১	১	১	১	১	১	১	১	১	০৮	
বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ	২০২৩	২	২	২	২	১	২	২	২	২	১৭	৩৫
	২০২২	২	২	২	২	২	২	২	২	২	১৮	
কণিক	২০২৩	২	১	২	২	২	২	২	২	১	১৬	৩৩
	২০২২	২	২	২	২	১	২	২	২	২	১৭	
বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ	২০২৩	১	১	১	২	১	১	১	১	১	১০	১৯
	২০২২	১	১	১	১	১	১	১	১	১	০৯	
স্থিতিবিদ্যা	২০২৩	১	১	১	১	১	১	১	১	১	০৯	১৯
	২০২২	১	১	১	১	২	১	১	১	১	১০	
সমতলে বস্তুকণার গতি	২০২৩	১	২	১	১	১	১	১	১	২	১১	২০
	২০২২	১	১	১	১	১	১	১	১	১	০৯	



সূচিপত্র

০৩ জটিল সংখ্যা
Complex Number

Board Questions Analysis

সৃজনশীল প্রশ্ন

বোর্ড / সাল	ঢাকা	ময়মনসিংহ	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০২৩	১	১	১	১	১	১	১	১	১
২০২২	১	১	১	১	১	১	১	১	১

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

বোর্ড / সাল	ঢাকা	ময়মনসিংহ	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০২৩	৪	৪	৪	৪	৫	৪	৪	৪	৫
২০২২	৪	৪	৫	৪	৪	৪	৩	৪	৪

এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

❑ **কাল্পনিক সংখ্যার ধারণা:**

i হলো কাল্পনিক সংখ্যার একক। যেখানে, $i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1; i^3 = -i; i^4 = 1; i^{4n} = 1$

$i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = i^2 = -1; i^{4n+3} = i^3 = -i; i^{4n+4} = i^4 = 1$

$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$; যেখানে, $n \in \mathbb{N}$

❑ **মডুলাস ও আর্গুমেন্ট:**

জটিল সংখ্যা $z = x + iy$ হলে, মডুলাস, $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

(i) (x, y) ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে,

আর্গুমেন্ট, $\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

(ii) (x, y) ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে,

আর্গুমেন্ট, $\theta = \arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

(iii) (x, y) ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে,

আর্গুমেন্ট, $\theta = \arg(z) = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

(iv) (x, y) ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে,

আর্গুমেন্ট, $\theta = \arg(z) = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

আর্গুমেন্টের মুখ্যমানের সীমা $-\pi < \theta \le \pi$

❑ **পোলার ও অয়লার আকৃতি:**

$z = x + iy$ জটিল সংখ্যার মডুলাস r ও আর্গুমেন্ট θ হলে, জটিল সংখ্যাটির−

(i) পোলার আকৃতি, $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$

(ii) অয়লার আকৃতি, $z = re^{i\theta}$ [যেখানে, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$]

❑ **অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা:**

$z = x + iy$ জটিল সংখ্যার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা, $\bar{z} = x - iy$

এখানে, z ও $\bar{z}$ এর মডুলাস পরস্পর সমান অর্থাৎ, $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

❑ **জটিল সংখ্যার ধর্মাবলি:**

(i) $x + iy = 0$ হলে, $x = 0, y = 0$

(ii) যদি দুইটি জটিল সংখ্যা পরস্পর সমান হয়, তবে তাদের বাস্তব অংশদ্বয় ও কাল্পনিক অংশদ্বয় পরস্পর সমান হবে। অর্থাৎ, $x + iy = a + ib$ হলে, $x = a$ এবং $y = b$ হবে।

(iii) দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার সমষ্টি ও গুণফল বাস্তব সংখ্যা।

$z + \bar{z} = 2x$, যা বাস্তব সংখ্যা

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$ যা বাস্তব সংখ্যা

(iv) অনুবন্ধী নয় এমন দুইটি জটিল সংখ্যার সমষ্টি, বিয়োগফল, গুণফল ও ভাগফল প্রত্যেকটিই জটিল সংখ্যা হবে।

(v) $z = x + iy$ জটিল সংখ্যা এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে z^n জটিল সংখ্যা হবে। যেখানে, $|z^n| = |z|^n$

❑ **পোলার আকারের দুইটি জটিল সংখ্যার গুণফল ও ভাগফল:**

দুইটি জটিল সংখ্যা z_1 ও z_2 হলে−

গুণফলের মডুলাস, $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

গুণফলের আর্গুমেন্ট, $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

ভাগফলের মডুলাস, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

ভাগফলের আর্গুমেন্ট, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

জটিল সংখ্যার বর্গমূল:

$x + iy$ এর বর্গমূল $= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{r+x} + i\sqrt{r-x}\right)$

$x - iy$ এর বর্গমূল $= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{r+x} - i\sqrt{r-x}\right)$ যেখানে, $r = \sqrt{x^2+y^2}$

এককের ঘনমূল:

এককের জটিল ঘনমূল দুইটির একটি ω হলে, অপরটি ω^2

যেখানে, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\bar{\omega} = \omega^2$; $\bar{\omega}^2 = \omega$; $\omega^3 = 1$; $\omega^{3n} = 1$; $\omega^{3n+1} = \omega$; $\omega^{3n+2} = \omega^2$

এবং $\omega = \frac{1}{\omega^2}$

$1 + \omega + \omega^2 = 0$

$\omega^n + \omega^{n+1} + \omega^{n+2} = 0$; যেখানে, $n \in \mathbb{N}$

সঞ্চারপথ: $z = x + iy$ হলে,

(i) $|z + a| = |z + b|$; সরলরেখা নির্দেশ করে।

(ii) $|z| = k$; বৃত্ত নির্দেশ করে যার কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= k$

(iii) $|z + a| = k$; বৃত্ত নির্দেশ করে যার কেন্দ্র $(a, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= k$

(iv) $|az + k_1| = |bz + k_2|$; বৃত্ত নির্দেশ করে।

(v) $z\bar{z} = 0$; বিন্দু বৃত্ত নির্দেশ করে।

(vi) $\left|\frac{z+a}{z+b}\right| = k$; $k = 1$ হলে, সরলরেখা নির্দেশ করে। $k \neq 1$ হলে, বৃত্ত নির্দেশ করে।

(vii) $|z + k| = x$ হলে, পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।

(viii) $|az + k| = x$ হলে, উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$

$\sqrt[3]{n^3} = n, n\omega, n\omega^2$

$\sqrt[3]{-n^3} = -n, -n\omega, -n\omega^2$

$\sqrt[3]{-in^3} = ni, ni\omega, ni\omega^2$

$\sqrt[3]{in^3} = -ni, -ni\omega, -ni\omega^2$

$\sqrt[4]{-n^2} = \pm\sqrt{\frac{n}{2}}(1 \pm i)$

$\sqrt[4]{n^4} = \pm n, \pm ni$

$\sqrt[4]{-n^4} = \pm\frac{n}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

$\sqrt[6]{-n^3} = \pm\sqrt{n}\, i, \pm\sqrt{n}\, i\omega, \pm\sqrt{n}\, i\omega^2$

$\sqrt[6]{-n^2} = \pm\sqrt[3]{n}\, i, \pm\sqrt[3]{n}\, i\omega, \pm\sqrt[3]{n}\, i\omega^2$

$\sqrt[6]{n^6} = \pm n, \pm n\omega, \pm n\omega^2$

$\sqrt[6]{-n^6} = \pm ni, \pm ni\omega, \pm ni\omega^2$

HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন ▸ ১ উদ্দীপক-১: $z = -1 + i$ একটি জটিল সংখ্যা।

উদ্দীপক-২: $z = x + iy$

(ক) $z = i$ হলে $\bar{z}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২; চ. বো. ২২]

(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট আর্গন্ড চিত্রে দেখাও। [কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩; দি. বো. ২৩ সি. বো. ২২; কু. বো. ১৭]

(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে $|z + 2| = 5$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ১১]

সমাধান:

ক এখানে, $z = i \therefore \bar{z} = -i$

$-i = \frac{1}{2} \times (-2i)$

$= \frac{1}{2}(1 - 2i - 1)$

$= \frac{1}{2}(1^2 - 2i + i^2)$ $[\because i^2 = -1]$

$= \frac{1}{2}(1 - i)^2$

$\therefore \sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$ **(Ans.)**

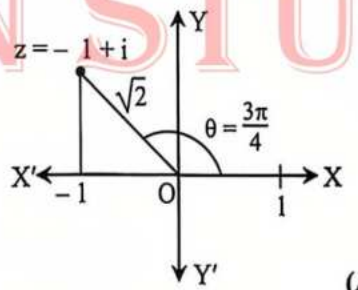
খ উদ্দীপক-১ এ $z = -1 + i$

z এর মডুলাস, $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

এখানে, $(-1, 1)$ বিন্দুটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore z$ এর আর্গুমেন্ট, $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{1}{-1}\right| = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

আর্গন্ড চিত্রে z এর অবস্থান:



(Ans.)

গ উদ্দীপক-২ হতে, $z = x + iy$

এখানে, $|z + 2| = 5$

$\Rightarrow |x + iy + 2| = 5$

$\Rightarrow |(x + 2) + iy| = 5$

$\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 5$

$\Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 5^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \{x - (-2)^2\} + (y - 0)^2 = 5^2$ ...... (i)

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-2, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ 5 একক। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২ $M = -5 + 12\sqrt{-1}$, $p = \sqrt[3]{a + ib}$ এবং $q = x + iy$

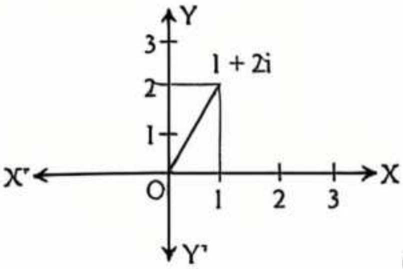
(ক) $1 + 2i$ কে আর্গন্ড চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ কর। [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২]

(খ) M এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩ অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২২, ১৯; দি. বো. ২৩; য. বো. ১৯; কু. বো. ১৭]

(গ) $p = q$ হলে, প্রমাণ কর যে, $4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২০]

সমাধান:

ক $1 + 2i$ সংখ্যাটির আর্গন্ড চিত্র নিচে দেখানো হলো:



(Ans.)

খ এখানে, $M = -5 + 12\sqrt{-1}$

$= -5 + 12i \quad [\because i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}]$

$= 4 - 9 + 12i$

$= 4 + 9i^2 + 12i \quad [\because i^2 = -1]$

$= (2)^2 + 2.2.3i + (3i)^2$

$= (2 + 3i)^2$

$\therefore$ M এর বর্গমূল, $\sqrt{M} = \pm\sqrt{(2 + 3i)^2} = \pm(2 + 3i)$ (Ans.)

গ দেওয়া আছে, $p = \sqrt[3]{a + ib}$ এবং $q = x + iy$

এখন, $p = q$ হলে, $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$

$\Rightarrow (a + ib)^{\frac{1}{3}} = x + iy$

$\Rightarrow \left\{(a + ib)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 = (x + iy)^3$

$\Rightarrow a + ib = x^3 + 3x^2.iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3$

$\Rightarrow a + ib = x^3 + 3x^2yi + 3xi^2y^2 + i^3y^3$

$\Rightarrow a + ib = x^3 + 3x^2y.i - 3xy^2 - iy^3 \quad [\because i^2 = -1; i^3 = -i]$

$\Rightarrow a + ib = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$a = x^3 - 3xy^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3$

এখন, $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{x^3 - 3xy^2}{x} + \frac{3x^2y - y^3}{y}$

$\Rightarrow \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = x^2 - 3y^2 + 3x^2 - y^2$

$\Rightarrow \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4x^2 - 4y^2$

$\Rightarrow \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4(x^2 - y^2)$

$\therefore 4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ (Proved)

প্রশ্ন ▶ ৩ উদ্দীপক-১: $z = x + iy$

উদ্দীপক-২: $7 + i8 = (p + iq)^3$

(ক) এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে দেখাও যে, $\left(1 + \omega + \frac{3}{\omega}\right)^6 = 64$ [চ. বো. ২৩]

(খ) $3|z - 1| = 2|z - 2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩; য. বো. ১৯, ১৭]

(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $p^2 - q^2 = \frac{7}{4p} + \frac{2}{q}$ [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩; য. বো. ২২]

সমাধান:

ক $L.H.S = \left(1 + \omega + \frac{3}{\omega}\right)^6$

$= \left(\frac{\omega + \omega^2 + 3}{\omega}\right)^6$

$= \left(\frac{-1 + 3}{\omega}\right)^6 \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$= \left(\frac{2}{\omega}\right)^6 = \frac{2^6}{\omega^6} = \frac{64}{(\omega^3)^2} = \frac{64}{1} \quad [\because \omega^3 = 1]$

$= 64 = R.H.S$ (Showed)

খ দেওয়া আছে, $z = x + iy$

এখানে, $3|z - 1| = 2|z - 2|$

$\Rightarrow 3|x + iy - 1| = 2|x + iy - 2|$

$\Rightarrow 3|(x - 1) + iy| = 2|(x - 2) + iy|$

$\Rightarrow 3\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$

$\Rightarrow 9(x^2 - 2x + 1 + y^2) = 4(x^2 - 4x + 4 + y^2)$ [∵ বর্গ করে]

$\Rightarrow 9x^2 - 18x + 9 + 9y^2 = 4x^2 - 16x + 16 + 4y^2$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 = 2x + 7$

$\therefore 5x^2 + 5y^2 - 2x - 7 = 0$; যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ। (Ans.)

গ $(p + iq)^3 = 7 + i8$

$\Rightarrow p^3 + 3p^2iq + 3p(iq)^2 + (iq)^3 = 7 + 8i$

$\Rightarrow p^3 + 3p^2iq + 3pi^2q^2 + i^3q^3 = 7 + 8i$

$\Rightarrow p^3 + 3p^2iq - 3pq^2 - iq^3 = 7 + 8i \quad [\because i^2 = -1; i^3 = -i]$

$\Rightarrow p^3 - 3pq^2 + i(3p^2q - q^3) = 7 + 8i$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$p^3 - 3pq^2 = 7$

এবং $3p^2q - q^3 = 8$

$R.H.S = \frac{7}{4p} + \frac{2}{q}$

$= \frac{7}{4p} + \frac{8}{4q}$

$= \frac{p^3 - 3pq^2}{4p} + \frac{3p^2q - q^3}{4q}$

$= \frac{p^3}{4p} - \frac{3pq^2}{4p} + \frac{3p^2q}{4q} - \frac{q^3}{4q}$

$= \frac{p^2}{4} - \frac{3q^2}{4} + \frac{3p^2}{4} - \frac{q^2}{4}$

$= \frac{4p^2}{4} - \frac{4q^2}{4}$

$= p^2 - q^2 = L.H.S$

$\therefore L.H.S = R.H.S$ (Proved)

প্রশ্ন ▶ ৪ দৃশ্যকল্প-১: $z_1 = -1+\sqrt{3}i$ এবং $z_2 = 1-\sqrt{3}i$

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = l + mx + nx^2$

(ক) $\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২৩]

(খ) প্রমাণ কর যে, $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ [রা. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ, $l+m+n=0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 = 27\,lmn$ [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩; ব. বো. ১৭]

সমাধান:

ক এখানে, $\sqrt{-1} = i$

$$= \frac{1}{2}\times 2i$$
$$= \frac{1}{2}(1+2i-1)$$
$$= \frac{1}{2}(1^2+2i+i^2)$$
$$= \frac{1}{2}(1+i)^2$$
$$\therefore \sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \textbf{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে,

$z_1 = -1+\sqrt{3}i$ এবং $z_2 = 1-\sqrt{3}i$

$\arg(z_1) = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right|$ [∵ ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত]

$$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$\arg(z_2) = -\tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = -\frac{\pi}{3}$ [∵ ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত]

$$z_1z_2 = (-1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)$$
$$= -1+\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-(\sqrt{3}i)(\sqrt{3}i)$$
$$= -1+2\sqrt{3}i-(\sqrt{3}i)^2$$
$$= -1+2\sqrt{3}i-3i^2$$
$$= -1+2\sqrt{3}i+3 \quad [\because i^2=-1]$$
$$= 2+2\sqrt{3}i$$

$$\text{L.H.S} = \arg(z_1z_2) = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{3}}{2}\right| = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{R.H.S} = \arg(z_1)+\arg(z_2) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi-\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S **(Proved)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = l+mx+nx^2$

ধরি, $g(\omega) = l + m\omega + n\omega^2 = p$

এবং $g(\omega^2) = l + m\omega^2 + n(\omega^2)^2$

$$= l + m\omega^2 + n\omega^4$$
$$= l + m\omega^2 + n\omega = q \quad [\because \omega^4 = \omega^3.\omega = \omega]$$

$$\text{L.H.S} = \{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3$$
$$= p^3 + q^3$$
$$= (p+q)(p^2-pq+q^2)$$
$$= (p+q)\{p^2+pq(\omega+\omega^2)+\omega^3q^2\} \quad [\because 1+\omega+\omega^2=0;\ \omega^3=1]$$
$$= (p+q)(p^2+pq\omega+pq\omega^2+\omega^3q^2)$$
$$= (p+q)\{p(p+q\omega)+q\omega^2(p+\omega q)\}$$
$$= (p+q)(p+q\omega^2)(p+q\omega)$$

এখন, $p+q = l+m\omega+n\omega^2+l+m\omega^2+n\omega$

$$= 2l + m(\omega+\omega^2) + n(\omega^2+\omega)$$
$$= 2l - m - n$$
$$= 3l - (l+m+n)$$
$$= 3l \quad [\because l+m+n=0]$$

আবার, $p+q\omega^2 = l+m\omega+n\omega^2+l\omega^2+n\omega^4+n\omega^3$

$$= l(1+\omega^2) + m(\omega+\omega) + n(\omega^2+1)$$
$$= -l\omega + 2m\omega - n\omega$$
$$= \omega(2m-l-n)$$
$$= \omega\{3m-(l+m+n)\}$$
$$= 3m\omega \quad [\because l+m+n=0]$$

আবার, $p+q\omega^2 = l+m\omega+n\omega^2+l\omega+m\omega^3+n\omega^2$

$$= l(1+\omega)+m(\omega+1)+2n\omega^2$$
$$= -l\omega^2 - m\omega^2 + 2n\omega^2$$
$$= \omega^2(2n-l-m)$$
$$= \omega^2\{3n-(l+m+n)\}$$
$$= 3n\omega^2 \quad [\because l+m+n=0]$$

$$\therefore (p+q)(p+q\omega^2)(p+q\omega) = 3l\times 3m\omega \times 3n\omega^2$$
$$= 27\,lmn\omega^3$$
$$= 27\,lmn \textbf{ (Proved)}$$

প্রশ্ন ▶ ৫ $z = x+iy$ জটিল সংখ্যাটির অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $\bar{z}$।

(ক) $\sqrt[4]{-2401}$ এর মান নির্ণয় কর। [ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩]

(খ) $x = 2$ এবং $y = 2$ হলে, z এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২; রা. বো. ২২; কু. বো. ১৭]

(গ) $|z+4| - |\bar{z}-4| = 10$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২৩; চ. বো. ২২, ১৭; সি. বো. ২২, ১৯; য. বো. ১৯]

সমাধান:

ক ধরি, $x = \sqrt[4]{-2401}$

$$\Rightarrow x^4 = -2401$$
$$\Rightarrow (x^2)^2 = (49i)^2$$
$$\Rightarrow x^2 = \pm 49i$$
$$\Rightarrow x^2 = \left\{\frac{49}{2}(\pm 2i)\right\}$$
$$\Rightarrow x^2 = \left\{\frac{49}{2}(1\pm 2i-1)\right\}$$
$$\Rightarrow x^2 = \left\{\frac{49}{2}(1\pm 2i+i^2)\right\} \quad [\because i^2=-1]$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{49}{2}(1\pm i)^2$$
$$\Rightarrow x = \pm\frac{7}{\sqrt{2}}(1\pm i) \textbf{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $z = x + iy$; $x = 2$ এবং $y = 2$

$\therefore z = 2 + 2i$

ধরি, $\sqrt{2+2i} = x + iy$

$\Rightarrow 2 + 2i = x^2 + 2xiy + i^2y^2$

$\Rightarrow 2 + 2i = x^2 + 2xyi - y^2$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে,

$x^2 - y^2 = 2$ ...... (i)

এবং $2xy = 2$

$\therefore x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2}$

$= \sqrt{(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2}$

$= \sqrt{2^2 + 2^2}$

$= 2\sqrt{2}$ .... (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2x^2 = 2\sqrt{2} + 2$

$\Rightarrow x^2 = \sqrt{2} + 1$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{2}+1}$

(ii) – (i) $\Rightarrow 2y^2 = 2\sqrt{2} - 2$

$\Rightarrow y^2 = \sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$

$\therefore \sqrt{2+2i} = x + iy = \pm\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$ (Ans.)

গ দেওয়া আছে, $z = x + iy$

$\therefore \bar{z} = x - iy$

$|z + 4| - |\bar{z} - 4| = 10$

$\Rightarrow |x + iy + 4| - |x - iy - 4| = 10$

$\Rightarrow |x + iy + 4| = 10 + |x - iy - 4|$

$\Rightarrow \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 + \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$

$\Rightarrow (x+4)^2 + y^2 = 10^2 + 20\sqrt{(x-4)^2+y^2} + \{(x-4)^2 + y^2\}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 = 100 + 20\sqrt{(x-4)^2+y^2} + x^2 - 8x + 16 + y^2$

$\Rightarrow 16x - 100 = 20\sqrt{(x-4)^2+y^2}$

$\Rightarrow 4x - 25 = 5\sqrt{(x-4)^2+y^2}$

$\Rightarrow (4x-25)^2 = \left\{5\sqrt{(x-4)^2+y^2}\right\}^2$

$\Rightarrow 16x^2 - 200x + 625 = 25(x^2 - 8x + 16 + y^2)$

$\Rightarrow 25x^2 - 16x^2 - 200x + 200x + 25y^2 = 625 - 400$

$\Rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225$

$\Rightarrow \frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$; নির্দেশিত সঞ্চারপথ যা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

(Ans.)

প্রশ্ন ▶ ৬ দৃশ্যকল্প-১: $p(x) = a + bx + cx^2$

দৃশ্যকল্প-২: এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω।

(ক) $-3 - 4i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [ব. বো. ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে যদি $\{p(\omega)\}^3 + \left\{P\left(\frac{1}{\omega}\right)\right\}^3 = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $a = \frac{1}{2}(b + c)$ অথবা $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

[ব. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩; কু. বো. ১৭]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $1 + \omega + \omega^2 = 0$ [ব. বো. ১৯]

সমাধানঃ

ক $-3 - 4i = 1 - 4i - 4$

$= 1 - 2.1.2i + 4i^2$ [$\because i^2 = -1$]

$= 1 - 2.1.2i + (2i)^2$

$= (1 - 2i)^2$

$\Rightarrow \sqrt{-3-4i} = \pm(1 - 2i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $p(x) = a + bx + cx^2$

$p(\omega) = a + b\omega + c\omega^2$

$p\left(\frac{1}{\omega}\right) = p(\omega^2)$ $\left[\because \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2\right]$

$= a + b\omega^2 + c(\omega^2)^2$

$= a + b\omega^2 + c\omega^4$

$= a + b\omega^2 + c\omega$ [$\because \omega^4 = \omega^3.\omega = \omega$]

দেওয়া আছে,

$\{p(\omega)\}^3 + \left\{p\left(\frac{1}{\omega}\right)\right\}^3 = 0$

$\Rightarrow (a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3 = 0$

$\Rightarrow (a + b\omega + c\omega^2)^3 = -(a + b\omega^2 + c\omega)^3$

$\Rightarrow \left\{\frac{a + b\omega + c\omega^2}{-(a + b\omega^2 + c\omega)}\right\}^3 = 1$

$\Rightarrow \left\{\frac{a + b\omega + c\omega^2}{-(a + b\omega^2 + c\omega)}\right\} = \sqrt[3]{1} = 1, \omega, \omega^2$ [$\because$ এককের ঘনমূল $1, \omega, \omega^2$]

এখন,

$\frac{a + b\omega + c\omega^2}{-(a + b\omega^2 + c\omega)} = 1$

$\Rightarrow a + b\omega + c\omega^2 = -a - b\omega^2 - c\omega$

$\Rightarrow 2a = b(-\omega - \omega^2) + c(-\omega - \omega^2)$

$\Rightarrow 2a = b + c$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$]

$\therefore a = \frac{1}{2}(b + c)$

আবার,

$\frac{a + b\omega + c\omega^2}{-(a + b\omega^2 + c\omega)} = \omega$

$\Rightarrow a + b\omega + c\omega^2 = -a\omega - b\omega^3 - c\omega^2$

$\Rightarrow 2c\omega^2 = -a - a\omega - b\omega^3 - b\omega$

$\Rightarrow 2c\omega^2 = -a(1 + \omega) - b(\omega + 1)$

$\Rightarrow 2c\omega^2 = a\omega^2 + b\omega^2$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 1$]

$\therefore c = \frac{1}{2}(a + b)$

$\therefore a = \frac{1}{2}(b + c)$ অথবা $c = \frac{1}{2}(a + b)$ **(Showed)**

গ একক এর ঘনমূল $\sqrt[3]{1}$

ধরি, $x = \sqrt[3]{1}$

তাহলে, $x^3 = 1$

$\Rightarrow (x^3 - 1) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$

হয়, $x - 1 = 0$

$\therefore x = 1$

আবার, $x^2 + x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times1\times1}}{2\times1}$

$\therefore x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

প্রশ্নমতে, ω একটি কাল্পনিক ঘনমূল

তাহলে ধরি, $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

$\therefore \omega^2 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \dfrac{(-1)^2 + 2\sqrt{-3}(-1) + (\sqrt{-3})^2}{(2)^2}$

$= \dfrac{1 - 2\sqrt{-3} - 3}{4}$

$= \dfrac{-2 - 2\sqrt{-3}}{4}$

$= \dfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

$\therefore \text{L.H.S} = 1 + \omega + \omega^2$

$= 1 + \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

$= \dfrac{2 - 1 + \sqrt{-3} - 1 - \sqrt{-3}}{2}$

$= \dfrac{0}{2} = 0$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ৭ **(i)** $p = x + iy$

(ii) $p^2 + p + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β।

(ক) $(-1 - \sqrt{3}i)$ সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩]

(খ) p জটিল সংখ্যাটির অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা q হলে $|p + 3i| = |q + 4|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩ অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২; য. বো. ১৯, ১৭]

(গ) প্রমাণ কর যে, $\alpha^s + \beta^s = -1$, যখন s এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য নয় এরূপ পূর্ণসংখ্যা। [ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২৩; সি. বো. ১৯]

সমাধান:

ক $z = -1 - \sqrt{3}i$

যেহেতু বিন্দুটি ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত তাই,

$\arg(z) = -\pi + \tan^{-1}\left|\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = -\pi + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}$ **(Ans.)**

খ $p = x + iy \therefore q = x - iy$ [q, p এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা]

দেওয়া আছে,

$|p + 3i| = |q + 4|$

$\Rightarrow |x + iy + 3i| = |x - iy + 4|$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (-y)^2}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + 8x + 16 + y^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 8x - 6y + 7 = 0$; যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$p^2 + p + 1 = 0$ এবং মূলদ্বয় α ও β

$\therefore p = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times1\times1}}{2\times1}$

$= \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$= \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ $[\because i^2 = -1]$

$\therefore p = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \omega = \alpha$

$p = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \omega^2 = \beta$

$\therefore \alpha^s + \beta^s = \omega^s + (\omega^2)^s$

s এর মান 3 দ্বারা বিভজ্য না হলে, ধরি, $s = 3n + 1$ এবং $s = 3n + 2$

$s = 3n + 1$ হলে,

$\alpha^s + \beta^s = \omega^{3n+1} + (\omega^2)^{3n+1}$

$= \omega^{3n}.\omega + (\omega^{3n})^2.\omega^2$

$= 1.\omega + 1^2.\omega^2$ $[\because \omega^{3n} = 1]$

$= \omega + \omega^2$

$= -1$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$s = 3n + 2$ হলে,

$\alpha^s + \beta^s = \omega^{3n+2} + (\omega^2)^{3n+2}$

$= \omega^{3n}.\omega^2 + (\omega^{3n})^2.(\omega^2)^2$

$= \omega^2 + \omega^4$

$= \omega^2 + \omega$

$= -1$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ৮ দৃশ্যকল্প: $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$

(ক) $(1 - i)^{-2} - (1 + i)^{-2}$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২

(খ) দৃশ্যকল্পে $\theta = 45°$ ও $r = 1$ হলে, $z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1$ এর মা নির্ণয় কর। [কু. বো. ২

(গ) দৃশ্যকল্প হতে প্রমাণ কর যে, $\text{Arg}(z^2) = 2\text{Arg}(z)$ [কু. বো. ২

সমাধান:

ক $(1 - i)^{-2} - (1 + i)^{-2}$

$= \dfrac{1}{(1-i)^2} - \dfrac{1}{(1+i)^2}$

$= \dfrac{1}{1 - 2i + i^2} - \dfrac{1}{1 + 2i + i^2}$

$= \dfrac{1}{-2i} - \dfrac{1}{2i}$

$= \dfrac{-1-1}{2i} = \dfrac{-2}{2i} = \dfrac{-1}{i} = \dfrac{i^2}{i} = i$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\theta = 45°$; $r = 1$

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$
$$= 1\cos45° + i\sin45°$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$
$$z^2 = \frac{(1+i)^2}{(\sqrt{2})^2}$$
$$= \frac{1+2i+i^2}{2}$$
$$= \frac{1+2i-1}{2}$$
$$= \frac{2i}{2}$$
$$= i$$

প্রদত্ত রাশি,

$$z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1$$
$$= (z^2)^4 + (z^2)^3 + (z^2)^2 + z^2 + 1$$
$$= i^4 + i^3 + i^2 + i + 1$$
$$= 0 + 1 \quad [i + i^2 + i^3 + i^4 = 0]$$
$$= 1 \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= re^{i\theta} \quad [\because e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta]$$

যেখানে, r মডুলাস এবং θ আর্গুমেন্ট।

এখন, $L.H.S = Arg(z^2)$

$$= Arg\{r^2(e^{i\theta})^2\} \quad [\because z = re^{i\theta}]$$
$$= Arg(r^2e^{i2\theta})$$
$$= 2\theta$$

$$R.H.S = 2Arg(z)$$
$$= 2.Arg(re^{i\theta})$$
$$= 2\theta$$
$$= L.H.S \text{ (Proved)}$$

প্রশ্ন ▶ ৯ $Z_1 = 1 - ix$ এবং $Z_2 = a + ib$ যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$

(ক) $x = \sqrt{3}$ হলে, Z_1 কে পোলার আকারে প্রকাশ কর। [চ. বো. ২৩]

(খ) প্রমাণ কর যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{Z_1}{\overline{Z_1}} = \overline{Z_2}$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে যেখানে $a^2 + b^2 = 1$ [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২]

(গ) $\sqrt[3]{Z_2} = p + iq$ হলে, প্রমাণ কর যে, $-2(p^2+q^2) = \frac{a}{p} - \frac{b}{q}$

[চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩; য. বো. ২২]

সমাধানঃ

ক দেওয়া আছে, $x = \sqrt{3}$

$$\therefore Z_1 = 1 - i\sqrt{3}$$
$$\therefore |Z_1| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$
$$Arg(Z_1) = -\tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| \quad [\because \text{চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত}]$$
$$= -\frac{\pi}{3}$$

$\therefore Z_1$ এর পোলার আকার $2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

$[\because \text{polar form} = r(\cos\theta + i\sin\theta)]$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \text{ (Ans.)}$$

$[\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$

খ দেওয়া আছে, $Z_1 = 1 - ix \quad \therefore \overline{Z_1} = 1 + ix$

আবার, $Z_2 = a + ib \quad \therefore \overline{Z_2} = a - ib$

$$\therefore \frac{Z_1}{\overline{Z_1}} = \overline{Z_2}$$
$$\Rightarrow \frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$$
$$\Rightarrow \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1}{a-ib}$$
$$\Rightarrow \frac{1+ix-1+ix}{1+ix+1-ix} = \frac{1-a+ib}{1+a-ib} \quad [\text{বিয়োজন-যোজন}]$$
$$\Rightarrow \frac{2ix}{2} = \frac{(1-a+ib)(1+a+ib)}{(1+a-ib)(1+a+ib)}$$
$$\Rightarrow ix = \frac{(1-a+ib)(1+a+ib)}{(1+a)^2 - (ib)^2}$$
$$\Rightarrow ix = \frac{(1+ib)^2 - a^2}{1+2a+a^2-i^2b^2}$$
$$\Rightarrow ix = \frac{1+2ib+i^2b^2-a^2}{1+2a+a^2+b^2} \quad [\because i^2 = -1]$$
$$\Rightarrow ix = \frac{1+2ib-(a^2+b^2)}{1+2a+a^2+b^2}$$
$$\Rightarrow ix = \frac{1+2ib-1}{1+2a+1} \quad [\text{দেওয়া আছে, } a^2+b^2 = 1]$$
$$\Rightarrow ix = \frac{2ib}{2+2a}$$

$\therefore x = \frac{2b}{2+2a} = \frac{b}{1+a}$; যা একটি বাস্তব সংখ্যা।

$\therefore$ x এর একটি বাস্তব মান (i) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে। **(Proved)**

গ $Z_2 = a + ib$

এবং $\sqrt[3]{Z_2} = p + iq$

$\sqrt[3]{a+ib} = p + iq$

$\Rightarrow a + ib = (p + iq)^3$ [ঘন করে]

$\Rightarrow a + ib = p^3 + 3p^2iq + 3pi^2q^2 + i^3q^3$

$\Rightarrow a + ib = p^3 + i3p^2q - 3pq^2 - iq^3$ [$\because i^2 = -1; i^3 = -i$]

$\Rightarrow a + ib = p^3 - 3pq^2 + i(3p^2q - q^3)$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে–

$\therefore a = p^3 - 3pq^2$

$\therefore b = 3p^2q - q^3$

$$\text{R.H.S} = \frac{a}{p} - \frac{b}{q}$$

$$= \frac{p^3 - 3pq^2}{p} - \frac{3p^2q - q^3}{q}$$

$$= p^2 - 3q^2 - 3p^2 + q^2$$

$$= -2p^2 - 2q^2$$

$$= -2(p^2 + q^2)$$

$$= \text{L.H.S}$$

$\therefore -2(p^2 + q^2) = \frac{a}{p} - \frac{b}{q}$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▸ ১০ $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} - i$.

(ক) z_1 এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [ব. বো. ২৩]

(খ) দেখাও যে, $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$

[ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২]

(গ) প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{1}{2}\bar{z}_1\right)^n + \left(\frac{1}{2}z_1\right)^n = 2$, যখন n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য অথবা, -1, যখন n এর মান অন্য কোনো পূর্ণসংখ্যা।

[ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২৩ সি. বো. ১৯]

সমাধান:

ক $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{3}{2}}i + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}i\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i\right)^2$$

$\because \sqrt{z_1} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \sqrt{3}i\right)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ যা ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত

$\therefore \text{Arg}(z_1) = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

$z_2 = \sqrt{3} - i$ যা ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত

$\therefore \text{Arg}(z_2) = -\tan^{-1}\left|\frac{-1}{\sqrt{3}}\right| = -\frac{\pi}{6}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{(-1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)}$$

$$= \frac{-\sqrt{3} - i - i\sqrt{3} \times \sqrt{3} - i^2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 - i^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{3} - i - 3i + \sqrt{3}}{3 - (-1)}$$

$$= \frac{-4i}{4} = -i = 0 - i$$

$$\text{L.H.S} = \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

$$= \text{Arg}(0 - i)$$

$$= -\tan^{-1}\left|\frac{-1}{0}\right|$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{R.H.S} = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$$

$$= -\frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{-4\pi + \pi}{6}$$

$$= -\frac{3\pi}{6}$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S **(Showed)**

গ দেওয়া আছে,

$z_1 = -1 - i\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \omega$

$\therefore \frac{1}{2}\bar{z}_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \omega^2$

$$\text{L.H.S} = \left(\frac{1}{2}\bar{z}_1\right)^n + \left(\frac{1}{2}z_1\right)^n$$

$$= (\omega^2)^n + (\omega)^n$$

n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে, ধরি $n = 3m$

$= (\omega^2)^{3m} + (\omega)^{3m}$

$= (\omega^3)^{2m} + (\omega^3)^m$

$= (1)^{2m} + (1)^m$ [$\because \omega^3 = 1$]

$= 1 + 1$

$= 2 =$ R.H.S **(Proved)**

আবার,

n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য না হলে, ধরি, $n = 3m + 1$

অথবা, $n = 3m + 2$, যেখানে $m \in \mathbb{Z}$

$n = 3m + 1$ হলে, $L.H.S = (\omega^2)^{3m+1} + (\omega)^{3m+1}$
$= (\omega^3)^{2m}.\omega^2 + \omega^{3m}.\omega$
$= (\omega^3)^{2m}.\omega^2 + (\omega^3)^m.\omega$
$= \omega + \omega^2 = -1$

$n = 3m + 2$ হলে, $L.H.S = (\omega^2)^{3m+2} + (\omega)^{3m+2}$
$= (\omega^3)^{2m}.\omega^4 + \omega^{3m}.\omega^2$
$= (\omega^3)^{2m}.\omega^3.\omega + (\omega^3)^m.\omega^2$
$= \omega + \omega^2 \quad [\because \omega^3 = 1]$
$= -1 \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$\therefore \left(\frac{1}{2}z_1\right)^n + \left(\frac{1}{2}\bar{z}_1\right)^n = 2$, যখন n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য অথবা -1, যখন n এর মান অন্য কোনো পূর্ণসংখ্যা। (Proved)

প্রশ্ন ▶ ১১ দৃশ্যকল্প-১: $z = x + iy$

দৃশ্যকল্প-২: $2x = -1 + \sqrt{-3}$ এবং $2y = -1 - \sqrt{-3}$

(ক) $-1 + \sqrt{3}i$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $\sqrt[3]{p + iq} = z$ হলে, দেখাও যে, $\sqrt[3]{p - iq} = \bar{z}$ [ঢা. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর, $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = -1$ [ঢা. বো. ২৩]

সমাধান:

ক ধরে নিই, $z = -1 + \sqrt{3}i$

$\therefore$ মডুলাস, $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$ (Ans.)

এখানে, $(-1, \sqrt{3})$ বিন্দুটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore \arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right|$
$= \pi - \frac{\pi}{3}$
$= \frac{2\pi}{3}$ (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $z = x + iy \therefore \bar{z} = x - iy$

এখন, $\sqrt[3]{p + iq} = z$ হলে $\sqrt[3]{p + iq} = x + iy$

$\Rightarrow p + iq = (x + iy)^3$

$\Rightarrow p + iq = x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3$

$\Rightarrow p + iq = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 \quad [\because i^2 = -1; i^3 = -i]$

$\Rightarrow p + iq = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) \ldots\ldots (i)$

বাস্তব ও অবাস্তব অংশে সমীকৃত করে পাই,

$p = x^3 - 3xy^2$ এবং $q = 3x^2y - y^3$

$L.H.S = \sqrt[3]{p - iq}$
$= \sqrt[3]{x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3)}$
$= \sqrt[3]{x^3 - 3xy^2 - 3ix^2y + iy^3}$
$= \sqrt[3]{x^3 + 3x^2(-iy) + 3x(-iy)^2 + (-iy)^3} \quad [\because i^2 = -1, i^3 = -i]$
$= \sqrt[3]{(x - iy)^3}$
$= x - iy = \bar{z} = R.H.S$ (Showed)

গ দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই,

$2x = -1 + \sqrt{-3}$

$\Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \omega$

এবং $2y = -1 - \sqrt{-3}$

$\Rightarrow y = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \omega^2$

যেখানে ω এবং ω^2 এককের কাল্পনিক ঘনমূল,

$L.H.S = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$
$= (\omega)^4 + (\omega)^3.\omega^2 + (\omega)^2.(\omega^2)^2 + \omega.(\omega^2)^3 + (\omega^2)^4$
$= \omega^4 + \omega^3.\omega^2 + \omega^2.\omega^4 + \omega(\omega^3)^2 + \omega^8$
$= \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega + \omega^2 \quad [\because \omega^3 = 1; \omega^6 = 1]$
$= (\omega + \omega^2 + 1) + (\omega + \omega^2)$
$= 0 + (-1) \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$
$= -1$

$\therefore L.H.S = R.H.S$ (Proved)

প্রশ্ন ▶ ১২ $a = 4, b = \sqrt{-4}, z = \frac{1}{n}(l + im)$ একটি জটিল সংখ্যা

(ক) $\frac{2 - 3i}{4 - 4i}$ কে $A + iB$ আকারে প্রকাশ কর। [রা. বো. ২৩]

(খ) $\sqrt{a + b}$ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩; কু. বো. ১৭]

(গ) $l = m = 3, n = \sqrt{18}$ হলে $|z|$ এর বর্গমূলগুলোর যোগফল নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩]

সমাধান:

ক প্রদত্ত রাশি $= \frac{2 - 3i}{4 - 4i}$
$= \frac{(2 - 3i)(4 + 4i)}{(4 - 4i)(4 + 4i)}$
$= \frac{8 - 12i + 8i - 12i^2}{4^2 - (4i)^2}$
$= \frac{8 - 4i + 12}{16 + 16} \quad [\because i^2 = -1]$
$= \frac{20 - 4i}{32} = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}i$
$= \frac{5}{8} + \left(\frac{-1}{8}\right)i$; যা $A + iB$ আকারে প্রকাশিত। (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $a = 4$

$$b = \sqrt{-4} = \sqrt{-1} \times \sqrt{4} = 2i \quad [\because i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}]$$

প্রদত্ত রাশি $= \sqrt{a+b} = \sqrt{4+2i}$

ধরি, $\sqrt{4+2i} = x + iy$

$\Rightarrow 4 + 2i = (x+iy)^2$

$\Rightarrow 4 + 2i = x^2 + 2xyi + i^2y^2$

$\Rightarrow 4 + 2i = x^2 + 2xyi - y^2$

বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে,

$x^2 - y^2 = 4$ .... (i)

এবং $2xy = 2$ ...... (ii)

এখন, $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2$

$= 4^2 + (2xy)^2$

$= 16 + 4 = 20$

$\therefore x^2 + y^2 = 2\sqrt{5}$ ..... (iii)

(i) + (iii) হতে,

$x^2 - y^2 + x^2 + y^2 = 4 + 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow 2x^2 = 4 + 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow x^2 = 2 + \sqrt{5}$

$\therefore x = \pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$

(iii) – (i) হতে,

$x^2 + y^2 - x^2 + y^2 = 2\sqrt{5} - 4$

$\Rightarrow 2y^2 = 2\sqrt{5} - 4$

$\Rightarrow y^2 = \sqrt{5} - 2$

$\therefore y = \pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$

এখন,

$\sqrt{a+b} = x + iy$

$= \pm\left(\sqrt{2+\sqrt{5}} + i\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $l = m = 3$, $n = \sqrt{18}$

প্রদত্ত জটিল সংখ্যা, $z = \frac{1}{n}(l + im)$

$$z = \frac{1}{\sqrt{18}}(3+3i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

z এর মডুলাস, $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

ধরি, 1 এর ঘনমূল, $\sqrt[3]{1} = x$

$\Rightarrow 1 = x^3$

$\Rightarrow x^3 - 1 = 0$

$\therefore (x-1)(x^2+x+1) = 0$

হয়, $(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$

অথবা, $x^2 + x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4.1.1}}{2.1}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$\therefore x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

আবার, $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

ঘনমূল তিনটির যোগফল $= 1 + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

$= \frac{2 - 1 + \sqrt{-3} - 1 - \sqrt{-3}}{2}$

$= \frac{0}{2} = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৩ দৃশ্যকল্প-১: $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = 1 - i$

দৃশ্যকল্প-২: $(1+y)^n = b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \cdots + b_ny^n$

(ক) $(2+i)(x+iy) = 1 + 3i$ হলে x, y নির্ণয় কর। [দি. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\sqrt{z_1z_2}$ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ১৭]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণ হতে দেখাও যে,

$(b_0 - b_2 + b_4 \ldots\ldots)^2 = (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots) - (b_1 - b_3 + b_5 - \ldots\ldots)^2$ [চ. বো. ২২]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে,

$(2+i)(x+iy) = 1 + 3i$

$\Rightarrow 2x + 2yi + xi + yi^2 = 1 + 3i$

$\Rightarrow (2x - y) + i(x + 2y) = 1 + 3i \quad [\because i^2 = -1]$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে,

$2x - y = 1$

$\Rightarrow y = 2x - 1$ ...... (i)

এবং $x + 2y = 3$

$\Rightarrow x + 2(2x-1) = 3$ [(i) নং হতে]

$\Rightarrow x + 4x - 2 = 3$

$\Rightarrow 5x = 5$

$\therefore x = 1$

(i) নং হতে পাই, $y = 2 \times 1 - 1 = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $x = 1, y = 1$ **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $z_1 = 1 - 3i$ এবং $z_2 = 1 - i$

এখন, $z_1z_2 = (1-3i)(1-i)$

$= 1 - i - 3i + 3i^2$

$= -2 - 4i \quad [\because i^2 = -1]$

ধরি, $\sqrt{-2-4i} = x + iy$

$\Rightarrow -2 - 4i = (x+iy)^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow -2 - 4i = x^2 + 2.x.iy + (iy)^2$

$\Rightarrow -2 - 4i = x^2 + 2xyi + i^2y^2$

$\Rightarrow -2 - 4i = x^2 - y^2 + 2ixy \quad [\because i^2 = -1]$

এখন, বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে,

$x^2 - y^2 = -2$ ...... (i)

এবং $2xy = -4$ .... (ii)

এখন, $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2$

$= (-2)^2 + (-4)^2$

$= 4 + 16 = 20$

$\therefore x^2 + y^2 = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ...... (iii)

(iii) + (i) $\Rightarrow x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = 2\sqrt{5} - 2$

$\Rightarrow 2x^2 = 2\sqrt{5} - 2$

$\Rightarrow x^2 = \sqrt{5} - 1$

$\therefore x = \pm\sqrt{\sqrt{5} - 1}$

(iii) − (i) $\Rightarrow x^2 + y^2 - x^2 + y^2 = 2\sqrt{5} + 2$

$\Rightarrow 2y^2 = 2\sqrt{5} + 2$

$\Rightarrow y^2 = \sqrt{5} + 1$

$\therefore y = \pm\sqrt{\sqrt{5} + 1}$

(ii) নং হতে পাই xy এর মান ঋণাত্মক হবে।

$\therefore$ x ও y এর যেকোনো একটির মান ধনাত্মক হলে অপরটির মান ঋণাত্মক হবে।

$\therefore \sqrt{-2-4i} = \pm\left(\sqrt{\sqrt{5}-1} - i\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)$ **(Ans.)**

গ এখানে, $(1 + y)^n = b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \ldots\ldots + b_ny^n$ .... (i)

(i) নং এ $y = 1$ বসিয়ে পাই,

$(1 + 1)^n = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots + b_n$

$\Rightarrow 2^n = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots. + b_n$ ....(ii)

(i) নং এ $y = i$ বসিয়ে পাই,

$(1 + i)^n = b_0 + b_1i + b_2i^2 + b_3i^3 + \ldots\ldots$

$\Rightarrow (1 + i)^n = b_0 + b_1i - b_2 - b_3i + \ldots\ldots$ [$\because i^2 = -1;\ i^3 = -i$]

$\Rightarrow (1+i)^n = (b_0 - b_2 + b_4 - \ldots.) + i(b_1 - b_3 + b_5 - \ldots)$ ....(iii)

আবার, (i) নং এ $y = -i$ বসিয়ে পাই,

$(1 - i)^n = b_0 + b_1(-i) + b_2(-i)^2 + b_3(-i)^3 + \ldots.$

$\Rightarrow (1 - i)^n = b_0 - b_1i + b_2i^2 - b_3i^3 + \ldots.$

$\Rightarrow (1 - i)^n = b_0 - b_1i - b_2 + b_3i + b_4 - \ldots\ldots$ [$\because i^2 = -1;\ i^3 = -i$]

$\Rightarrow (1 - i)^n = (b_0 - b_2 + b_4 - \ldots.) - i(b_1 - b_3 + b_5 - \ldots\ldots)$... (iv)

(iii) নং ও (iv) গুণ করে পাই,

$(1+i)^n \times (1-i)^n = (b_0 - b_2 + b_4 - \ldots)^2 - i^2(b_1 - b_3 + b_5 - \ldots)^2$

$\Rightarrow (1 - i^2)^n = (b_0 - b_2 + b_4 - \ldots)^2 + (b_1 - b_3 + b_5 - \ldots)^2$

$\Rightarrow (1 + 1)^n = (b_0 - b_2 + b_4 - \ldots)^2 + (b_1 - b_3 + b_5 - \ldots)^2$

$\Rightarrow 2^n = (b_0 - b_2 + b_4 - \ldots)^2 + (b_1 - b_3 + b_5 - \ldots)^2$ ...(v)

(ii) নং ও (v) নং হতে পাই,

$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ \ldots = (b_0 - b_2 + b_4 - \ldots)^2 + (b_1 - b_3 + b_5 - \ldots)^2$

$\Rightarrow (b_0 - b_2 + b_4 \ldots.)^2 = (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots.) - (b_1 - b_3 + b_5 - \ldots\ldots)^2$

(Showed)

প্রশ্ন ▶ ১৪ $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ এবং $g(x) = p + qx + rx^2$ দুইটি ফাংশন।

(ক) $Z = \dfrac{1 + 2i}{1 - 3i}$ এর মডুলাস বের কর। [সি. বো. ২২]

(খ) $f(1)$ এর ঘনমূল নির্ণয় কর। [সি. বো. ২২]

(গ) $p + q + r = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\{g(\omega)\}^2 + \{g(\omega^2)\}^2 = 3(p^2 + 2qr)$, যেখানে ω এককের ঘনমূলগুলোর একটি জটিল মূল। [সি. বো. ২২]

সমাধানঃ

ক দেওয়া আছে,

$Z = \dfrac{1 + 2i}{1 - 3i} = \dfrac{(1 + 2i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)}$

$= \dfrac{1 + 3i + 2i + 6i^2}{1 - 9i^2}$

$= \dfrac{1 + 5i - 6}{1 + 9}$

$= \dfrac{-5 + 5i}{10}$

$= -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

মডুলাস, $|Z| = \left|-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right|$

$= \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{2}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

$\therefore f(1) = \dfrac{2 \times 1}{1 + 1^2} = 1$

$\therefore f(1)$ এর ঘনমূল $= \sqrt[3]{f(1)} = \sqrt[3]{1}$

ধরি, $x = \sqrt[3]{1}$

$\Rightarrow x^3 = 1$

$\Rightarrow x^3 - 1^3 = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

হয়, $x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1$

অথবা, $x^2 + x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$

$= \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$= \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$\therefore f(1)$ এর ঘনমূলগুলো $1, \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = p + qx + rx^2$

$\therefore g(\omega) = p + q\omega + r\omega^2$

$g(\omega^2) = p + q\omega^2 + r\omega^4 = p + q\omega^2 + r\omega$ $[\because \omega^4 = \omega]$

এবং $p + q + r = 0$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= \{g(\omega)\}^2 + \{g(\omega^2)\}^2 \\
&= (p + q\omega + r\omega^2)^2 + (p + q\omega^2 + r\omega)^2 \\
&= p^2 + q^2\omega^2 + r^2\omega^4 + 2pq\omega + 2qr\omega^3 + 2rp\omega^2 + p^2 \\
&\quad + q^2\omega^4 + r^2\omega^2 + 2pq\omega^2 + 2qr\omega^3 + 2rp\omega \\
&= 2p^2 + q^2(\omega^2 + \omega) + r^2(\omega + \omega^2) + 2pq(\omega + \omega^2) + 4qr \\
&\quad + 2rp(\omega^2 + \omega) \; [\because \omega^3 = 1;\ \omega^4 = \omega] \\
&= 2p^2 - q^2 - r^2 - 2pq + 4qr - 2rp \; [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0] \\
&= 2p^2 - (q^2 + r^2) + 4qr - 2p(q + r) \\
&= 2p^2 - \{(q + r)^2 - 2qr\} + 4qr - 2p(-p) \; [\because p + q + r = 0] \\
&= 2p^2 - \{(-p)^2 - 2qr\} + 4qr + 2p^2 \\
&= 2p^2 - p^2 + 2qr + 4qr + 2p^2 \\
&= 3p^2 + 6qr = 3(p^2 + 2qr) = \text{R.H.S}
\end{aligned}$$
(Proved)

প্রশ্ন ▶ ১৫ $z_1 = 1 + ix$, $z_2 = a + ib$ এবং $z_3 = x + iy$ তিনটি জটিল সংখ্যা।

(ক) $15 + 8i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [ব. বো. ১৭]

(খ) $|z_2|^2 = 1$ হলে, দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{\overline{z_1}}{z_1} = \overline{z_2}$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। [ম. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩]

(গ) $\sqrt[3]{z_2} = z_3$ হলে প্রমাণ কর যে, $|z_3| = \sqrt{\frac{b}{2y} - \frac{a}{2x}}$ [ম. বো. ২২]

সমাধান:

ক $15 + 8i$

$= 16 - 1 + 2.4.i$

$= 4^2 + i^2 + 2.4.i$ $[\because i^2 = -1]$

$= (4 + i)^2$

$\therefore 15 + 8i$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{(4 + i^2)}$

$= \pm(4 + i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z_1 = 1 + ix$ এবং $z_2 = a + ib \Rightarrow |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$

এখন, $|z_2|^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$

আবার, $\frac{\overline{z_1}}{z_1} = \overline{z_2}$ ...... (i)

$\Rightarrow \frac{1 - ix}{1 + ix} = a - ib$

$\Rightarrow \frac{1 - ix - 1 - ix}{1 - ix + 1 + ix} = \frac{a - ib - 1}{a - ib + 1}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

$\Rightarrow \frac{-2ix}{2} = \frac{a - 1 - ib}{(a + 1) - ib}$

$\Rightarrow -ix = \frac{(a - 1 - ib)(a + 1 + ib)}{\{(a + 1) - ib\}\{(a + 1) + ib\}}$

$= \frac{a^2 + a + iab - a - 1 - ib - iab - ib - i^2b^2}{(a + 1)^2 - (ib)^2}$

$= \frac{a^2 + b^2 - 1 - 2ib}{(a + 1)^2 - i^2b^2}$

$= \frac{a^2 + b^2 - 1 - 2ib}{a^2 + 2a + 1 + b^2}$ $[\because i^2 - 1]$

$= \frac{1 - 1 - 2ib}{1 + 2a + 1}$ $[\because a^2 + b^2 = 1]$

$= \frac{-2ib}{2 + 2a}$

$\Rightarrow ix = \frac{ib}{1 + a}$

$\therefore x = \frac{b}{a + 1}$; যা x এর একটি বাস্তব মান।

$\therefore$ x এর একটি বাস্তব মান (i) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে। **(Showed)**

গ দেওয়া আছে, $z_2 = a + ib$ এবং $z_3 = x + iy$

এখানে, $\sqrt[3]{z_2} = z_3$

$\Rightarrow \sqrt[3]{a + ib} = x + iy$

$\Rightarrow \left\{(a + ib)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 = (x + iy)^3$ [ঘন করে]

$\Rightarrow a + ib = x^3 + 3x^2.iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3$

$\Rightarrow a + ib = x^3 - 3xy^2 + 3x^2iy - iy^3$ $[\because i^2 = -1;\ i^3 = -i]$

$\Rightarrow a + ib = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে,

$a = x^3 - 3xy^2$

এবং $b = 3x^2y - y^3$

$\text{L.H.S} = |z_3| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{aligned}
\text{R.H.S} &= \sqrt{\frac{b}{2y} - \frac{a}{2x}} \\
&= \sqrt{\frac{3x^2y - y^3}{2y} - \frac{x^3 - 3xy^2}{2x}} \\
&= \sqrt{\frac{y(3x^2 - y^2)}{2y} - \frac{x(x^2 - 3y^2)}{2x}} \\
&= \sqrt{\frac{3x^2 - y^2 - x^2 + 3y^2}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{2x^2 + 2y^2}{2}} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

$\therefore |z_3| = \sqrt{\frac{b}{2y} - \frac{a}{2x}}$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ১৬ দৃশ্যকল্প-১: $|z + 1| + |z - 1| = 4$; যেখানে $z = x + iy$.

দৃশ্যকল্প-২ $a = p + q$, $b = p + \omega q$ এবং $c = p + \omega^2 q$.

(ক) $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^3$ কে $A + iB$ আকারে প্রকাশ কর। [রা., কু., চ. ও ব. বো. ১৮]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $3x^2 + 4y^2 = 12$ [রা., কু., চ. ও ব. বো. ১৮]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $a^3 + b^3 + c^3 = 3(p^3 + q^3)$ [রা., কু., চ. ও ব. বো. ১৮]

সমাধানঃ

ক এখানে, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 = \left\{\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right\}^3$ [∵ লব ও হরকে $(1+i)$ দ্বারা গুণ]

$$= \left\{\frac{(1+i)^2}{(1-i)\,(1+i)}\right\}^3$$
$$= \left(\frac{1+2i+i^2}{(1)^2 - i^2}\right)^3$$
$$= \left(\frac{1+2i-1}{1+1}\right)^3 \quad [\because i^2 = -1]$$
$$= \left(\frac{2i}{2}\right)^3$$
$$= i^3$$
$$= -i \quad [\because i^3 = -i]$$

$= 0 + (-1).i$; যা $A + iB$ আকারের। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$|z+1| + |z-1| = 4$, যেখানে $z = x + iy$

$$\Rightarrow |x+iy+1| + |x+iy-1| = 4$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4^2 - 2\times 4\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2} + x^2 - 2x + 1 + y^2$$

[বর্গ করে]

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 16 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}$$
$$\Rightarrow 4x - 16 = -8\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}$$
$$\Rightarrow x - 4 = -2\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}$$
$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2)$$
$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 - 4x^2 + 8x - 4 - 4y^2 = 0$$
$$\Rightarrow -3x^2 - 4y^2 + 12 = 0$$
$$\Rightarrow -3x^2 - 4y^2 = -12$$

$\therefore 3x^2 + 4y^2 = 12$ **(Proved)**

গ $\text{L.H.S} = a^3 + b^3 + c^3$

$$= (p+q)^3 + (p+\omega q)^3 + (p+\omega^2 q)^3$$
$$= p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + p^3 + 3p^2.\omega q + 3p.\omega^2 q^2 + \omega^3 q^3 + p^3 + 3p^2.\omega^2 q + 3p\omega^4 q^2 + \omega^6 q^3$$
$$= 3p^3 + 3p^2q(1 + \omega + \omega^2) + 3pq^2(1 + \omega^2 + \omega^4) + q^3(1 + \omega^3 + \omega^6)$$
$$= 3p^3 + 3p^2q.0 + 3pq^2(1 + \omega^2 + \omega) + q^3(1 + 1 + 1)$$

$[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0;\ \omega^3 = 1]$

$$= 3p^3 + 0 + 0 + 3q^3$$

$= 3(p^3 + q^3) = \text{R.H.S}$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ **দৃশ্যকল্প-১: $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 1 + 2i$**

দৃশ্যকল্প-২: $y^2 + y + 1 = 0$

(ক) $\frac{1}{2-i}$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৭]

(খ) উদ্দীপকের আলোকে $\overline{z_1 - z_2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২; রা. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণটির মূলদ্বয় **p, q** হলে, দেখাও যে,

$$p^m + q^m = \begin{cases} 2, \text{ যখন } m \text{ এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য} \\ -1, \text{ যখন } m \text{ অপর কোনো পূর্ণসংখ্যা} \end{cases}$$

[সি. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২৩; ব. বো. ২৩]

সমাধানঃ

ক $\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{(2-i)(2+i)}$

$$= \frac{2+i}{2^2 - i^2}$$
$$= \frac{2+i}{4+1} \quad [\because i^2 = -1]$$
$$= \frac{2}{5} + \frac{i}{5}$$

আর্গুমেন্ট θ হলে, $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}\right|$ [∵ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত]

$= \tan^{-1}\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z_1 = 2 + 3i;\ z_2 = 1 + 2i$

$$\therefore z_1 - z_2 = 2 + 3i - 1 - 2i = 1 + i$$

সুতরাং, $\overline{z_1 - z_2} = 1 - i$

ধরি, $1 - i$ এর বর্গমূল $\sqrt{1-i} = x + iy$

$$\Rightarrow 1 - i = x^2 + 2xyi + i^2y^2$$
$$\Rightarrow 1 - i = x^2 + 2xyi - y^2 \quad [\because i^2 = -1]$$
$$\Rightarrow 1 - i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x^2 - y^2 = 1$ ...... (i)

$2xy = -1$ ...... (ii)

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ ...... (iii)

(iii) + (i) $\Rightarrow x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = \sqrt{2} + 1$

$$\Rightarrow 2x^2 = \sqrt{2} + 1$$
$$\Rightarrow x = \pm\frac{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$$

(iii) – (i) $\Rightarrow x^2 + y^2 - x^2 + y^2 = \sqrt{2} - 1$

$$\Rightarrow 2y^2 = \sqrt{2} - 1$$
$$\Rightarrow y^2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$
$$\Rightarrow y = \pm\frac{(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$$

(ii) নং থেকে পাই, xy এর মান ঋণাত্মক।

∴ x ও y এর যেকোনো একটির মান ধনাত্মক হলে অপরটির মান ঋণাত্মক হবে।

∴ $\overline{z_1 - z_2}$ এর বর্গমূল,

$\sqrt{\overline{z_1 - z_2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\right\}$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত সমীকরণ,

$$y^2 + y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.1}}{2.1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$\therefore$ দেওয়া আছে, সমীকরণের মূলদ্বয় p, q।

ধরি, $p = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \omega$

এবং, $q = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \omega^2$

$L.H.S = p^m + q^m = \omega^m + \omega^{2m}$

যখন m, 3 দ্বারা বিভাজ্য

ধরি, $m = 3n, n \in \mathbb{Z}$

যখন m, অপর কোনো পূর্ণসংখ্যা

ধরি, $m = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}$

এবং, $m = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}$

$\therefore m = 3n + 1$ হলে,

$$L.H.S = \omega^{3n+1} + \omega^{2(3n+1)}$$
$$= \omega^{3n+1} + \omega^{6n+2}$$
$$= \omega^{3n}.\omega + \omega^{6n}.\omega^2$$
$$= (\omega^3)^n.\omega + (\omega^3)^{2n}.\omega^2$$
$$= 1.\omega + 1.\omega^2 \quad [\because \omega^3 = 1]$$
$$= \omega + \omega^2$$
$$= -1 \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$$
$= R.H.S$ **(Showed)**

$m = 3n + 2$ হলে,

$$L.H.S = \omega^{3n+2} + \omega^{6n+4}$$
$$= \omega^{3n}.\omega^2 + \omega^{6n}.\omega^4$$
$$= 1.\omega^2 + 1.\omega$$
$$= \omega^2 + \omega \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$$
$$= -1$$
$= R.H.S$ **(Showed)**

যখন, $m = 3n$

$$\therefore L.H.S = \omega^{3n} + \omega^{6n}$$
$$= (\omega^3)^n + (\omega^3)^{2n}$$
$$= 1^n + 1^{2n}$$
$$= 1 + 1$$
$$= 2$$
$$= R.H.S$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ দৃশ্যকল্প-১: $x + iy = 2e^{-i\theta}$

দৃশ্যকল্প-২: z একটি জটিল সংখ্যা এবং $g(y) = y - 2$

(ক) $\mathbb{R}$ ও $\mathbb{C}$ দ্বারা কী বোঝায়? এদের মধ্যে সম্পর্ক কী? [ঢা., য., সি. ও দি. বো. ১৮]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = 4$. [য. বো. ১৭]

(গ) $z = p + iq$ হলে, $|g(z + 6)| + |g(z - 2)| = 10$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২৩; চ. বো. ২২, ১৭; সি. বো. ২২; য. বো. ১৯]

সমাধান:

ক $\mathbb{R}$ হচ্ছে বাস্তব সংখ্যার সেট।

$\mathbb{C}$ হচ্ছে জটিল সংখ্যার সেট।

$\mathbb{R}$ ও $\mathbb{C}$ এর মধ্যে সম্পর্ক হচ্ছে $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ অর্থাৎ বাস্তব সংখ্যার সেট জটিল সংখ্যার উপসেট।

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $x + iy = 2e^{-i\theta}$

$$\Rightarrow x + iy = 2(\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$\Rightarrow x + iy = 2\cos\theta - i2\sin\theta$$

বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x = 2\cos\theta,\ y = -2\sin\theta$

$$\therefore x^2 + y^2 = (2\cos\theta)^2 + (-2\sin\theta)^2$$
$$= 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta$$
$$= 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$
$$= 4 \times 1 \ [\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1]$$
$$= 4$$

$\therefore x^2 + y^2 = 4$ **(Proved)**

গ $g(y) = y - 2$ এবং $z = p + iq$

$$\therefore g(z + 6) = z + 6 - 2 = z + 4$$
$$= p + iq + 4$$
$$g(z - 2) = z - 2 - 2 = z - 4$$
$$= p + iq - 4$$

এখন, $|g(z + 6)| + |g(z - 2)| = 10$

$$\Rightarrow |(p + 4) + iq| + |(p - 4) + iq| = 10$$
$$\Rightarrow \sqrt{(p + 4)^2 + q^2} = 10 - \sqrt{(p - 4)^2 + q^2}$$
$$\Rightarrow p^2 + 8p + 16 + q^2 = 100 - 20\sqrt{(p - 4)^2 + q^2} + p^2 - 8p + 16 + q^2$$ [বর্গ করে]
$$\Rightarrow 16p - 100 = -20\sqrt{(p - 4)^2 + q^2}$$
$$\Rightarrow 4p - 25 = -5\sqrt{(p - 4)^2 + q^2}$$ [4 দ্বারা ভাগ করে]
$$\Rightarrow 16p^2 - 200p + 625 = 25(p^2 - 8p + 16 + q^2)$$ [বর্গ করে]
$$\Rightarrow 16p^2 - 200p + 625 = 25p^2 - 200p + 400 + 25q^2$$
$$\Rightarrow 9p^2 + 25q^2 = 225$$
$$\Rightarrow \frac{p^2}{25} + \frac{q^2}{9} = 1$$ [225 দ্বারা ভাগ করে]
$$\therefore \frac{p^2}{5^2} + \frac{q^2}{3^2} = 1$$

$\therefore$ সঞ্চারপথটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ১৯ দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x^2 + x + 1$

দৃশ্যকল্প-২: $x = \sqrt[6]{-64}$

(ক) ω কে পোলার আকৃতিতে প্রকাশ কর।

(খ) $\{f(x)\}^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots\dots + a_{2n}x^{2n}$ হলে প্রমাণ কর যে, $a_0 + a_3 + a_6 + \dots = 3^{n-1}$ [চ. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে,

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

মনে করি, পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ)

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{1+3}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{4}{4}}$$
$$= 1$$

আর্গুমেন্ট, $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right|$ [∵ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত]

$$= \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1}\right)$$
$$= \pi - \tan^{-1}\sqrt{3}$$
$$= \pi - \frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{2\pi}{3}$$

নির্ণেয় পোলার স্থানাঙ্ক, $(r, \theta) = \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$

পোলার আকার $= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$= 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + x + 1 = 1 + x + x^2$

$\therefore \{f(x)\}^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots\dots + a_{2n}x^{2n}$

$\Rightarrow (1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$ ...... (i)

(i) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots\dots + a_{2n} = 3^n$ ...... (ii)

(i) নং এ $x = \omega$ বসিয়ে পাই,

$(1 + \omega + \omega^2)^n = 0$

$\Rightarrow 0 = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + a_4\omega^4 + a_5\omega^5 + a_6\omega^6 + \dots + a_{2n}\omega^{2n}$

$\Rightarrow a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3 + a_4\omega + a_5\omega^2 + a_6 + \dots + a_{2n}\omega^{2n} = 0$ ..... (iii) $[\omega^3 = 1]$

(i) নং এ $x = \omega^2$ বসিয়ে পাই,

$(1 + \omega + \omega^2)^n = a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + a_3\omega^6 + a_4\omega^8 + a_5\omega^{10} + a_6\omega^{12} + \dots + a_{2n}(\omega^2)^{2n}$

$\Rightarrow a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega + a_3 + a_4\omega^2 + a_5\omega + a_6 + \dots + a_{2n}\omega^{2n} = (1 + \omega^2 + \omega)^n = 0$ ..... (iv)

$[\because \omega^3 = 1, 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

(ii) + (iii) + (iv) $\Rightarrow$

$3a_0 + a_1(1 + \omega + \omega^2) + a_2(1 + \omega^2 + \omega) + 3a_3 + a_4(1 + \omega + \omega^2) + a_5(1 + \omega^2 + \omega) + 3a_6 + \dots = 3^n$

$\Rightarrow 3(a_0 + a_3 + a_6 + \dots) = 3^n$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$\therefore a_0 + a_3 + a_6 + \dots = 3^{n-1}$ **(Proved)**

গ $x = \sqrt[6]{-64}$

$\Rightarrow x^6 = \left\{(-64)^{\frac{1}{6}}\right\}^6$

$\Rightarrow x^6 = -64$

$\Rightarrow x^6 + 64 = 0$

$\Rightarrow (x^2)^3 + (4)^3 = 0$

$\Rightarrow (x^2 + 4)(x^4 - 4x^2 + 16) = 0$

$\therefore x^2 + 4 = 0$ অথবা, $x^4 - 4x^2 + 16 = 0$

$\Rightarrow x^2 = -4$

$\Rightarrow x^2 = 4i^2$

$\Rightarrow x = \pm 2i$

$\therefore x^2 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 16}}{2 \times 1}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 64}}{2}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{2}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{16 \times 3i^2}}{2}$ $[\because i^2 = -1]$

$= 2 \pm 2\sqrt{3}i$

$= 3 \pm 2\sqrt{3}i - 1$

$= (\sqrt{3})^2 \pm 2\sqrt{3}i + i^2$

$= (\sqrt{3} \pm i)^2$

$\therefore x = \pm(\sqrt{3} \pm i)$

$\therefore \sqrt[6]{-64}$ এর মান $= \pm 2i, \pm(\sqrt{3} \pm i)$ **(Ans.)**

HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

জটিল সংখ্যার ধারণা, জ্যামিতিক প্রকাশ এবং অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা

১। $z = \frac{2-3i}{2+i}$ হলে Re(z) = ? [ঢা. বো. ২৩]

ⓚ $-\frac{8}{5}$ ⓛ $-\frac{1}{5}$

ⓜ $\frac{1}{5}$ ⓝ $\frac{8}{5}$

উত্তর: ⓜ $\frac{1}{5}$

ব্যাখ্যা: $z = \frac{2-3i}{2+i} = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}i$ [Using Calculator]

$\therefore \text{Re}(z) = \frac{1}{5}$

২। i^{4n+4} এর মান কত? [চ. বো. ২৩]

ⓚ 1 ⓛ −1

ⓜ i ⓝ −i

উত্তর: ⓚ 1

ব্যাখ্যা: n = 0 বসিয়ে, $i^{4n+4} = i^4 = 1$

Note: $i^4 = 1, i^8 = 1, i^{12} = 1, i^{4n} = 1$

৩। $i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9$ এর মান কত? [কু. বো. ২৩]

ⓚ −1 ⓛ −i

ⓜ 1 ⓝ i

উত্তর: ⓝ i

ব্যাখ্যা: $i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9 = i$ [Using EX/CW Calculator]

৪। $i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3}$ = কত? $(m \in \mathbb{Z})$ [রা. বো. ১৭]

ⓚ −1 ⓛ −i

ⓜ 0 ⓝ i

উত্তর: ⓜ 0

ব্যাখ্যা: i এর চারটি ক্রমিক পাওয়ার সম্বলিত পদের যোগফল = 0

$\therefore i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3} = 0$

Note: $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$

$\therefore i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$

৫। i^{-49} এর মান কোনটি? [কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২; ম. বো. ২২]

ⓚ −i ⓛ i

ⓜ −1 ⓝ 1

উত্তর: ⓚ −i

ব্যাখ্যা: Using Calculator

বিকল্প পদ্ধতি:

$i^{-49} = \frac{1}{i^{49}} = \frac{1}{(i^2)^{24}.i} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$

৬। $i^7 + i^9 + i^{11} + i^{13}$ এর মান কত? [দি. বো. ২...]

ⓚ −1 ⓛ 1

ⓜ −i ⓝ 0

উত্তর: ⓝ 0

ব্যাখ্যা: $i^7 + i^9 = 0$ এবং $i^{11} + i^{13} = 0$

$\therefore i^7 + i^9 + i^{11} + i^{13} = 0$

i এর পাওয়ার দুটি ক্রমিক জোড় সংখ্যা/ক্রমিক বিজোড় সংখ্যা হ... এদের যোগফল শূন্য হয়।

যেমন $i^2 + i^4 = 0 ; i + i^3 = 0$

Note: EX/CW Calculator দিয়ে Direct $i^7 + i^9 + i^{11} + i^{13}$ এর মান বের করা সম্ভব। Calculator অবশ্যই Complex Mode এ রাখতে হবে।

৭। $n \in \mathbb{N}$ হলে i^{8n+5} এর মান কত? [সি. বো. ২...]

ⓚ 1 ⓛ −1

ⓜ i ⓝ −i

উত্তর: ⓜ i

ব্যাখ্যা: $i^{8n+5} = i^{8n}.i^5 = (i^2)^{4n}.(i^2)^2.i$

$= (-1)^{4n}.(-1)^2.i$ $[\because i^2 = -1]$

$= i$

৮। $i^{-70} + 1$ এর মান কোনটি? [য. বো. ১...]

ⓚ 0 ⓛ 2

ⓜ 1 − i ⓝ 1 + i

উত্তর: ⓚ 0

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{i^{70}} + 1 = \frac{1}{i^{4\times68+2}} + 1 = \frac{1}{-1} + 1 = 0$

Note: EX/CW Calculator দিয়ে Direct মান বের করা সম্ভব অবশ্যই Complex Mode ব্যবহার করতে হবে।

৯। কাল্পনিক সংখ্যা i এবং $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $i^{4n} - i + i^{4n+1} - 1$ এর মান কত? [সম্মিলিত বো. ১৮]

ⓚ −i ⓛ i

ⓜ 0 ⓝ 1

উত্তর: ⓜ 0

ব্যাখ্যা: $i^{4n} - i + i^{4n+1} - 1$

$= 1 - i + i^{4n}.i - 1$ $[i^{4n} = 1]$

$= 0 - i + i = 0$

১০। $\frac{i^{-5}}{1+i^9}$ এর বাস্তব ও কাল্পনিক অংশের সমষ্টি কত? [সি. বো. ২...]

ⓚ −1 ⓛ 0

ⓜ 1 ⓝ 2

উত্তর: ⓚ −1

ব্যাখ্যা: $\frac{i^{-5}}{1+i^9} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ [Using Calculator]

$\therefore$ বাস্তব ও কাল্পনিক অংশের সমষ্টি $= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$

১১। $\sqrt{-3}\times\sqrt{-1}$ এর মান কোনটি? [রা. বো. ২২]

ⓚ $\sqrt{3}i$ ⓑ $\pm\sqrt{3}$

ⓖ $-\sqrt{3}$ ⓓ $\sqrt{3}$

উত্তর: ⓖ $-\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator in Complex Mode

১২। $i^2=-1$ হলে, $\frac{-i-i^{-5}}{2i^{-5}+i}$ এর মান– [চ. বো. ২২]

ⓚ –2 ⓑ 0

ⓖ $\frac{1}{2}$ ⓓ 2

উত্তর: ⓑ 0

ব্যাখ্যা: $\frac{-i-\frac{1}{i^5}}{\frac{2}{i^5}+i}=\frac{-i-\frac{1}{i}}{\frac{2}{i}+i}=\frac{-i^2-1}{2+i^2}=\frac{1-1}{2-1}=0$

Note: EX/CW Calculator দিয়ে Direct মান বের করা সম্ভব। অবশ্যই Complex Mode ব্যবহার করতে হবে।

১৩। $z=-2i$ একটি জটিল সংখ্যা। $\bar{z}$ এর প্রতিরূপী বিন্দু কোনটি? [রা. বো. ১৯]

ⓚ (– 2, 0) ⓑ (0, – 2)

ⓖ (2, 0) ⓓ (0, 2)

উত্তর: ⓓ (0, 2)

ব্যাখ্যা: $\bar{z}=2i=0+2i$

$\therefore$ প্রতিরূপী বিন্দু $(x, y)\equiv(0, 2)$

১৪। $2x-i3y$ জটিল সংখ্যাটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত? [সি. বো. ১৭]

ⓚ ১ম চতুর্ভাগে ⓑ ২য় চতুর্ভাগে

ⓖ ৩য় চতুর্ভাগে ⓓ ৪র্থ চতুর্ভাগে

উত্তর: ⓓ ৪র্থ চতুর্ভাগে

ব্যাখ্যা: $2x-i3y$ এর প্রতিরূপী বিন্দু $(2x, -3y)$ যা ৪র্থ চতুভার্গে অবস্থিত।

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১৫ ও ১৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি জটিল সংখ্যা $z=\frac{1}{2+i}$

১৫। জটিল সংখ্যাটি কার্তেসীয় সমতলে যে বিন্দু নির্দেশ করে, তার স্থানাঙ্ক– [ম. বো. ২৩]

ⓚ $\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$ ⓑ $\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$

ⓖ $\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$ ⓓ $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$

উত্তর: ⓖ $\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$

ব্যাখ্যা: $z=\frac{1}{2+i}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

$\therefore$ প্রতিরূপী বিন্দু $\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$

১৬। z এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা কোনটি? [ম. বো. ২৩]

ⓚ $\frac{2-i}{3}$ ⓑ $\frac{2+i}{3}$

ⓖ $\frac{2+i}{5}$ ⓓ $\frac{2-i}{5}$

উত্তর: ⓖ $\frac{2+i}{5}$

ব্যাখ্যা: $z=\frac{1}{2+i}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$ [Using Calculator]

$\bar{z}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i=\frac{2+i}{5}$

১৭। যদি $a=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ হয়, তবে a^6 এর মান হবে–

ⓚ – 1 ⓑ i

ⓖ 1 ⓓ – i

উত্তর: ⓓ – i

ব্যাখ্যা: Calculator দিয়ে Direct মান বের করে ফেলা যায়।

অথবা, $a=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow a^2=i$

$\therefore a^6=(a^2)^3=i^3=-i$

Note: $\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}; \sqrt{-i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

১৮। n এর ধনাত্মক সর্বনিম্ন অখণ্ড মান বের কর যার জন্য $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=1$

ⓚ 2 ⓑ 3

ⓖ 6 ⓓ 4

উত্তর: ⓓ 4

ব্যাখ্যা: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=1$

$\Rightarrow i^n=1$ $\left[\text{Using Calculator } \frac{1+i}{1-i}=i\right]$

$\therefore$ n এর সর্বনিম্ন মান 4 $[i^4=1]$

Note: $\frac{1+i}{1-i}=i; \frac{1-i}{1+i}=-i$

জটিল সংখ্যা A + iB আকারের

১৯। $A+iB=\frac{2-3i}{5-4i}$ হলে, B এর মান কোনটি? [দি. বো. ২৩]

ⓚ $-\frac{7}{9}$ ⓑ $-\frac{7}{41}$

ⓖ $\frac{22}{41}$ ⓓ $\frac{3}{4}$

উত্তর: ⓑ $-\frac{7}{41}$

ব্যাখ্যা: $A+iB=\frac{2-3i}{5-4i}=\frac{22}{41}-\frac{7}{41}i$ [Using Calculator]

$\therefore B=-\frac{7}{41}$

২০। $\frac{1+i}{i} = p + iq$ হলে, q এর মান কত? [রা. বো. ২৩]

ক $-i$ খ -1
গ i ঘ 1

উত্তর: খ -1

ব্যাখ্যা: $\frac{1+i}{i} = 1 - i$ [Using Calculator]

$\therefore p + iq = 1 - i$

$\therefore p = 1; q = -1$

জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়

২১। $-i$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট– [চ. বো. ২২]

ক 1 ও 0 খ 1 ও $-\frac{\pi}{2}$
গ 1 ও π ঘ 1 ও $\frac{\pi}{2}$

উত্তর: খ 1 ও $-\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator in Complex Mode

$$\left[\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2};\ \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}\right]$$

২২। $1 + i$ জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট কত? [সি. বো. ১৯]

ক $2, \frac{\pi}{4}$ খ $\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$
গ $\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}$ ঘ $2, \frac{\pi}{2}$

উত্তর: খ $\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator

বিকল্প পদ্ধতি:

$|1 + i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\arg(1 + i) = \tan^{-1}\left|\frac{1}{1}\right|$ [প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত]

$= \frac{\pi}{4}$

২৩। $-1 - i\sqrt{3}$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত? [কু. বো. ২২]

ক $-\frac{2\pi}{3}$ খ $\frac{2\pi}{3}$
গ $-\frac{4\pi}{3}$ ঘ $\frac{4\pi}{3}$

উত্তর: ক $-\frac{2\pi}{3}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator

বিকল্প পদ্ধতি:

$-1 - i\sqrt{3}$ [তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত]

$\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

২৪। $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত? [কু. বো. ২৩]

ক $-\frac{2\pi}{3}$ খ $-\frac{\pi}{3}$
গ $\frac{\pi}{3}$ ঘ $\frac{2\pi}{3}$

উত্তর: ক $-\frac{2\pi}{3}$

ব্যাখ্যা: $\arg\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$ [Using Calculator]

২৫। $z_1 = 1 + i$ এবং $z_2 = 2 + i$ হলে, $z_1\overline{z_2}$ এর মডুলাস– [দি. বো. ২২]

ক $\tan^{-1}2$ খ $2\sqrt{5}$
গ $5\sqrt{2}$ ঘ $\sqrt{10}$

উত্তর: ঘ $\sqrt{10}$

ব্যাখ্যা: $z_1\overline{z_2} = (1 + i)(2 - i)$

$= 2 + 2i - i - i^2$

$= 2 + i + 1$

$= 3 + i$

$|z_1\overline{z_2}| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$

অথবা, $|z_1\overline{z_2}| = |z_1||\overline{z_2}|$

$= \sqrt{1^2 + 1^2} \times \sqrt{2^2 + 1^2}$

$= \sqrt{2} \times \sqrt{5}$

$= \sqrt{10}$

২৬। $z_1 = 1 + 2i$ এবং $z_2 = 3 + i$, হলে $\overline{z_1} - z_2$ এর মডুলাস হল– [ঢা. বো. ২২]

ক $\sqrt{5}$ খ $\sqrt{13}$
গ $\sqrt{25}$ ঘ $5\sqrt{2}$

উত্তর: খ $\sqrt{13}$

ব্যাখ্যা: $\overline{z_1} - z_2 = 1 - 2i - 3 - i = -2 - 3i$

$|\overline{z_1} - z_2| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

অথবা, Using Calculator

২৭। $z = 2 + 3i$ একটি জটিল সংখ্যা হলে, $z - \overline{z}$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত? [য. বো. ২৩]

ক 0 খ $\frac{\pi}{2}$
গ π ঘ $\frac{3\pi}{2}$

উত্তর: খ $\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: $\overline{z} = 2 - 3i$

$z - \overline{z} = 2 + 3i - 2 + 3i = 6i$

$\text{Arg}(z - \overline{z}) = \frac{\pi}{2}$ $\left[\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2};\ \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}\right]$

২৮। $z = (1-i)^3$ হলে, arg(z) হবে– [চা. বো. ২০]

ক $-\frac{3\pi}{4}$ খ $-\frac{\pi}{4}$

গ $\frac{\pi}{4}$ ঘ $\frac{3\pi}{4}$

উত্তর: ক $-\frac{3\pi}{4}$

ব্যাখ্যা: $\arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$ [Using Calculator]

২৯। $z = -1 + i$ হলে, $\bar{z}$ এর আর্গুমেন্ট কত? [য. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২]

ক $-\frac{3\pi}{4}$ খ $-\frac{5\pi}{4}$

গ $\frac{\pi}{4}$ ঘ $-\frac{\pi}{4}$

উত্তর: ক $-\frac{3\pi}{4}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator

বিকল্প পদ্ধতি:

$\bar{z} = -1 - i$

$\arg(\bar{z}) = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{-1}{-1}\right|$ [∵ তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত]

$= -\pi + \frac{\pi}{4}$

$= -\frac{3\pi}{4}$

৩০। $1 - \sqrt{3}i$ এর সাধারণ আর্গুমেন্ট কত? [সম্মিলিত বো. ১৮]

ক $2n\pi - \frac{\pi}{3}; n \in Z$ খ $2n\pi + \frac{\pi}{3}; n \in Z$

গ $2n\pi - \frac{5\pi}{3}; n \in Z$ ঘ $2n\pi + \frac{5\pi}{3}; n \in Z$

উত্তর: ক $2n\pi - \frac{\pi}{3}; n \in Z$

ব্যাখ্যা: $1 - \sqrt{3}i$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট $= -\frac{\pi}{3}$

∴ সাধারণ আর্গুমেন্ট $= 2n\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$

Note: সাধারণ আর্গুমেন্ট = $2n\pi$ + মুখ্য আর্গুমেন্ট

৩১। $z = 3i$ হলে, $\bar{z}$ এর সাধারণ আর্গুমেন্ট কত? [রা. বো. ২২]

ক $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ খ $2n\pi - \frac{\pi}{2}$

গ $n\pi + \frac{\pi}{2}$ ঘ $n\pi - \frac{\pi}{2}$

উত্তর: খ $2n\pi - \frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: $z = 3i$ হলে, $\bar{z} = -3i$

$\arg(\bar{z}) = -\tan^{-1}\left|\frac{-3}{0}\right|$ = $\bar{z}$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট

$= -\tan^{-1}\infty$

$= -\frac{\pi}{2}$

$\bar{z}$ এর সাধারণ আর্গুমেন্ট $= 2n\pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$= 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

৩২। $-1 - i\sqrt{3}$ এর অনুবন্ধী রাশির আর্গুমেন্ট কত? [রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২; দি. বো. ২১]

ক $-\frac{\pi}{3}$ খ $\frac{\pi}{3}$

গ $-\frac{2\pi}{3}$ ঘ $\frac{2\pi}{3}$

উত্তর: ঘ $\frac{2\pi}{3}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator

অথবা, $-1 - i\sqrt{3}$ এর অনুবন্ধী $-1 + i\sqrt{3}$

$\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right|$ [∵ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত]

$= \pi - \frac{\pi}{3}$

$= \frac{2\pi}{3}$

জটিল সংখ্যার পোলার ও অয়লার আকার

৩৩। $-1 + i$ এর পোলার আকার– [কু. বো. ২২]

ক $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ খ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

গ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ঘ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

উত্তর: ঘ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

ব্যাখ্যা: Calculator দিয়ে r ও θ বের করো।

$r = \sqrt{2}, \theta = 135 = \frac{3\pi}{4}$

অথবা, $p = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{1}{-1}\right| = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

পোলার আকার, $r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

জটিল সংখ্যার মূল নির্ণয়

৩৪। $8+4\sqrt{5}i$ এর বর্গমূল কোনটি? [ব. বো. ২২]

ক $\pm(3-2i)$ খ $\pm(\sqrt{10}-\sqrt{2}i)$
গ $\pm(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)$ ঘ $\pm(3+2i)$

উত্তর: গ $\pm(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)$

ব্যাখ্যা: $8+4\sqrt{5}i = 10+4\sqrt{5}i-2$
$= 10+4\sqrt{5}i+2i^2$
$= (\sqrt{10})^2+2\sqrt{10}.\sqrt{2}i+(\sqrt{2}i)^2$
$= (\sqrt{10}+\sqrt{2}i)^2$
$\therefore 8+4\sqrt{5}i = \pm(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)$

অথবা, Option Test: ক্যালকুলেটর দিয়ে যে অপশন কে বর্গ করলে প্রশ্নে প্রদত্ত মান পাওয়া যায় সেটিই উত্তর।

৩৫। $11-60i$ এর বর্গমূল কত? [দি. বো. ১৯]

ক $\pm(5-6i)$ খ $\pm(6+5i)$
গ $\pm(6-5i)$ ঘ $\pm(6i-5)$

উত্তর: গ $\pm(6-5i)$

ব্যাখ্যা: Option Test: ক্যালকুলেটর দিয়ে যে অপশন কে বর্গ করলে প্রশ্নে প্রদত্ত মান পাওয়া যায় সেটিই উত্তর।

অথবা, ধরি, $\sqrt{11-60i} = \pm(x-iy)$
এখানে, $r=\sqrt{(11)^2+(-60)^2}=61$
$\therefore x=\sqrt{\frac{r+a}{2}}=\sqrt{\frac{61+11}{2}}=6$
$\therefore y=\sqrt{\frac{r-a}{2}}=\sqrt{\frac{61-11}{2}}=5$
$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(6-5i)$

Note: $\sqrt{a+ib} = \pm(x+iy)$ ধরবে
এবং $\sqrt{a-ib} = \pm(x-iy)$ ধরবে

৩৬। i এর বর্গমূল কোনটি? [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৭]

ক $\pm\frac{1}{2}(1+i)$ খ $\pm\frac{1}{2}(1-i)$
গ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ ঘ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

উত্তর: ঘ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

ব্যাখ্যা: Option Test: ক্যালকুলেটর দিয়ে যে অপশন কে বর্গ করলে প্রশ্নে প্রদত্ত মান পাওয়া যায় সেটিই উত্তর।

অথবা, $i=\frac{1}{2}\times 2i=\frac{1}{2}(1+2i-1)$
$=\frac{1}{2}(1+2i+i^2)$
$=\frac{1}{2}(1+i)^2$
$\sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

৩৭। $\frac{1}{i}$ এর বর্গমূল কত? [কু. বো. ..]

ক $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ খ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$
গ $\pm(1+i)$ ঘ $\pm(1-i)$

উত্তর: খ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{i}=-i$

Option Test: ক্যালকুলেটর দিয়ে যে অপশন কে বর্গ করলে প্রশ্নে প্রদত্ত মান পাওয়া যায় সেটিই উত্তর।

অপশন খ $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right\}^2=-i$

৩৮। 2i এর বর্গমূল কত? [সি. বো. ..]

ক $1+i$ খ $-(1+i)$
গ $\pm(1+i)$ ঘ $\pm(1-i)$

উত্তর: গ $\pm(1+i)$

ব্যাখ্যা: বর্গমূলের আগে $(\pm)$ দিতে হবে।

Option Test: ক্যালকুলেটর দিয়ে যে অপশন কে বর্গ করলে প্রশ্নে প্রদত্ত মান পাওয়া যায় সেটিই উত্তর।

অথবা, $2i = 1+2i-1$
$=(1+2i+i^2)$ [$\because i^2=-1$]
$=(1+i)^2$
$\sqrt{2i}=\pm(1+i)$

৩৯। $\sqrt{-6i}$ এর মান– [ঢা. বো. ..]

ক $\pm\sqrt{3}(1+i)$ খ $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
গ $\pm\sqrt{3}(1-i)$ ঘ $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)$

উত্তর: গ $\pm\sqrt{3}(1-i)$

ব্যাখ্যা: Option Test: ক্যালকুলেটর দিয়ে যে অপশন কে বর্গ করলে প্রশ্নে প্রদত্ত মান পাওয়া যায় সেটিই উত্তর।

অপশন গ $\{\sqrt{3}(1-i)\}^2=-6i$

৪০। $\frac{1}{3}i$ এর বর্গমূল কোনটি? [কু. বো. ..]

ক $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1+i)$ খ $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1-i)$
গ $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1+i)$ ঘ $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1-i)$

উত্তর: গ $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1+i)$

ব্যাখ্যা: Option Test: ক্যালকুলেটর দিয়ে যে অপশন কে বর্গ করলে প্রশ্নে প্রদত্ত মান পাওয়া যায় সেটিই উত্তর।

অথবা, $\frac{1}{3}i=\frac{1}{6}(2i)=\frac{1}{6}(1+2i+i^2)=\frac{1}{6}(1+i)^2$
$\therefore \sqrt{\frac{1}{3}i}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1+i)$

৪১। $\sqrt{i}+\sqrt{-i}$ এর মান নিচের কোনটি?

ⓚ $5i$ ⓚ i

ⓖ 2 ⓖ $\sqrt{2}$

উত্তর: ⓘ $\sqrt{2}$

ব্যাখ্যা: $\sqrt{i}+\sqrt{-i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ [Using Calculator]

Note: $\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{-i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

৪২। $\frac{5+12i}{3-4i}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

ক $\pm\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i\right)$ খ $\pm(2+5i)$

গ $\pm(3+7i)$ ঘ $\pm(9+11i)$

উত্তর: ক $\pm\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i\right)$

ব্যাখ্যা: $\frac{5+12i}{3-4i}=-\frac{33}{25}+\frac{56}{25}i$ [Using Calculator]

যে অপশনকে বর্গ করলে $-\frac{33}{25}+\frac{56}{25}i$ পাওয়া যায় সেটিই সঠিক উত্তর।

অপশন ক $\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i\right)^2=-\frac{33}{25}+\frac{56}{25}i$

৪৩। $(2i)^{-\frac{1}{2}}+(-2i)^{-\frac{1}{2}}$ এর মান কত? [য. বো. ১৯]

ক $\frac{1}{2}$ খ 1

গ 0 ঘ ∞

উত্তর: খ 1

ব্যাখ্যা: ধরি, $(2i)^{-\frac{1}{2}}+(-2i)^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2i}}+\frac{1}{\sqrt{-2i}}$

$=\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$

$=1$ [Using Calculator]

Note: $\sqrt{\pm 2i}=\pm(1\pm i)$

৪৪। $z=1-i$ হলে $z-\bar{z}$ এর বর্গমূল কত? [ঢা. বো. ২২]

ক $-1-i$ খ $\pm(1+i)$

গ $\pm(1-i)$ ঘ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

উত্তর: গ $\pm(1-i)$

ব্যাখ্যা: $z-\bar{z}=(1-i)-(1+i)=-2i$

এখন অপশন গুলোর মধ্যে যেটা বর্গ করলে $-2i$ হয় সেটাই উত্তর।

৪৫। i এর ঘনমূল–

ক $-i, \frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$ খ $-i, \frac{-i\pm\sqrt{3}}{2}$

গ $i, \frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$ ঘ $i, \frac{-i\pm\sqrt{3}}{2}$

উত্তর: ক $-i, \frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$

ব্যাখ্যা: $\sqrt[3]{i}=x$

$\Rightarrow x^3-i=0$

$\Rightarrow x^3+(i)^3=0$ $[i^3=-i]$

$\Rightarrow (x+i)(x^2-ix+i^2)=0$

$\Rightarrow (x+i)(x^2-ix-1)$

$\therefore x=-i$ এবং $x=\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$

অথবা, Option Test: ক্যালকুলেটর দিয়ে যে অপশন এর Power 3 করলে প্রশ্নে প্রদত্ত মান পাওয়া যায় সেটিই উত্তর।

৪৬। $\sqrt[4]{-49}$ এর মান কোনটি? [ঢা. বো. ২৪]

ক $\pm\sqrt{7}i$ খ $\pm\sqrt{\frac{7}{2}}(1\pm i)$

গ $\pm\frac{7}{2}(1\pm i)$ ঘ $\frac{7}{\sqrt{2}}(1\pm 2i)$

উত্তর: খ $\pm\sqrt{\frac{7}{2}}(1\pm i)$

ব্যাখ্যা: Option Test: ক্যালকুলেটর দিয়ে যে অপশন এর Power 4 করলে প্রশ্নে প্রদত্ত মান পাওয়া যায় সেটিই উত্তর।

অথবা, $\sqrt[4]{-n^2}=\pm\sqrt{\frac{n}{2}}(1\pm i)$

$\sqrt[4]{-49}=\sqrt[4]{-7^2}=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}(1\pm i)$

৪৭। $\sqrt[4]{-81}$ এর মান কত?

ক $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ খ $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm 2i)$

গ $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(2\pm i)$ ঘ $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(1\pm i)$

উত্তর: ক $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

ব্যাখ্যা: Option Test: ক্যালকুলেটর দিয়ে যে অপশন এর Power 4 করলে প্রশ্নে প্রদত্ত মান পাওয়া যায় সেটিই উত্তর।

অথবা, $\sqrt[4]{-n^2}=\pm\sqrt{\frac{n}{2}}(1\pm i)$

$\therefore \sqrt[4]{-81}=\sqrt[4]{-9^2}=\pm\sqrt{\frac{9}{2}}(1\pm i)=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

অথবা, Option গুলোর মধ্যে যেটার পাওয়ার 4 দিলে -81 আসে ওটাই উত্তর। Use EX/CW Calculator.

৪৮। $(-i)^{\frac{1}{6}} = ?$

ⓚ $\pm\sqrt{i}, \pm\sqrt{i\omega}, \pm\sqrt{i\omega^2}$
ⓛ $\pm 2i, \pm 2i\sqrt{\omega}, \pm 2i\sqrt{\omega^2}$
ⓜ $+\sqrt{i}, \pm\sqrt{3i\omega}, \pm\sqrt{3i\omega^2}$
ⓝ None

উত্তর: ⓚ $\pm\sqrt{i}, \pm\sqrt{i\omega}, \pm\sqrt{i\omega^2}$

ব্যাখ্যা: $x = (-i)^{\frac{1}{6}}$

$\Rightarrow x^6 = -i = i^3$

$\Rightarrow \frac{x^2}{i} = \sqrt[3]{1} = 1, \omega, \omega^2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{i}, \pm\sqrt{i\omega}, \pm\sqrt{i\omega^2}$

শর্ত সাপেক্ষে মান নির্ণয়

৪৯। $z = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{7})$ হলে, $z - \bar{z}$ এর মান কত? [রা. বো. ২৩]

ⓚ $-i\sqrt{7}$ ⓛ -1
ⓜ $i\sqrt{7}$ ⓝ 1

উত্তর: ⓚ $-i\sqrt{7}$

ব্যাখ্যা: $\bar{z} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{7})$

$\therefore z - \bar{z} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{7}) - \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{7})$

$= -i\sqrt{7}$ [Using Calculator]

৫০। $a = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ এবং এর অনুবন্ধী $\bar{a}$ হলে, কোনটি সত্য? [সম্মিলিত বো. ১৮]

ⓚ $a\bar{a} = a^2$ ⓛ $a + \bar{a} = 2a$
ⓜ $a + \bar{a} = -1$ ⓝ $\bar{a} + a^2 = -1$

উত্তর: ⓜ $a + \bar{a} = -1$

ব্যাখ্যা: এখানে, $a = \omega \therefore \bar{a} = \omega^2$

$\therefore a + \bar{a} = \omega + \omega^2 = -1$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$]

Note: $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$; $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

৫১। $z = 3 - 4i$ এবং $\sqrt{z} = x + iy$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক? [ব. বো. ২৩]

ⓚ $x^2 - y^2 = 5$ ⓛ $x^2 + y^2 = 5$
ⓜ $x^2 + y^2 = 3$ ⓝ $x^2 - y^2 = 4$

উত্তর: ⓛ $x^2 + y^2 = 5$

ব্যাখ্যা: $z = (x + iy)^2 = x^2 + 2xiy + i^2y^2$

$\Rightarrow 3 - 4i = x^2 - y^2 + i2xy$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে,

$x^2 - y^2 = 3$ ও $2xy = -4$

$\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = = 9 + 16$

$\therefore x^2 + y^2 = 5$

৫২। $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ হলে, $x + \frac{1}{x}$ এর মান কত? [ব. বো. ১

ⓚ -1 ⓛ $-\sqrt{3}i$
ⓜ $\sqrt{3}i$ ⓝ 1

উত্তর: ⓚ -1

ব্যাখ্যা: $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \omega$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega}$ [$\because \omega^3 = 1$]

$= \omega^2$

$\therefore x + \frac{1}{x} = \omega + \omega^2 = -1$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$]

অথবা, [Using Calculator]

৫৩। $x = 2 - i$ হলে, $x^3 - 3x^2 + x + 10$ এর মান নির্ণয় কর।

ⓚ 4 ⓛ 2
ⓜ 5 ⓝ -2

উত্তর: ⓜ 5

ব্যাখ্যা: $x^3 - 3x^2 + x + 10 = 5$

[$x = 2 - i$ বসিয়ে Using Calculator]

৫৪। $x = 1 + \sqrt{2}\, i$ হলে $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ এর মান কত? [ম. বো. ২

ⓚ 4 ⓛ 2
ⓜ 1 ⓝ -2

উত্তর: সঠিক উত্তর নেই।

ব্যাখ্যা: $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = -8 + 12\sqrt{2}i$

[$x = 1 + \sqrt{2}\, i$ বসিয়ে Using Calculator]

৫৫। $x + iy = i^{-2021} + 2(\omega)^{-2019}$ হলে, $\frac{y}{x} = ?$ [রা. বো.

ⓚ $\frac{1}{2}$ ⓛ $-\frac{1}{2}$
ⓜ 2 ⓝ -2

উত্তর: ⓛ $-\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা: $x + iy = i^{-2021} + 2(\omega)^{-2019}$

$= \frac{1}{i^{2021}} + \frac{2}{\omega^{2019}}$

$= \frac{1}{i} + 2$ [ω^{2019}, 3 দ্বারা বিভাজ্য]

$= -i + 2$

সহগ সমীকৃত করে, $x = 2$

$y = -1$

$\therefore \frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$

Note: $\frac{1}{i} = -i$

৫৬। $\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+........\infty}}}=?$

ⓚ $-\sqrt{3}i$ ⓛ $\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$

ⓖ $\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}$ ⓘ $\frac{1\pm\sqrt{11}}{2}$

উত্তর: ⓖ $\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}$

ব্যাখ্যা: ধরি, $x=\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+........\infty}}}$

$\Rightarrow x=\sqrt{-3+x}$

$\Rightarrow x^2=-3+x$

$\Rightarrow x^2-x+3=0$

$\therefore x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times3}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}$

সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়

৫৭। $z=x+iy$ হলে, $z\bar{z}=1$ সমীকরণের জ্যামিতিক রূপ কোনটি? [কু. বো. ১৯]

ⓚ অধিবৃত্ত ⓛ বৃত্ত

ⓖ পরাবৃত্ত ⓘ উপবৃত্ত

উত্তর: ⓛ বৃত্ত

ব্যাখ্যা: $z\bar{z}=1$

$\Rightarrow (x+iy)(x-iy)=1$

$\Rightarrow x^2-i^2y^2=1$

$\therefore x^2+y^2=1$; যা বৃত্ত নির্দেশ করে।

৫৮। $p=x+iy$ হলে, $|p-2|=3$ সমীকরণটি নির্দেশ করে– [সি. বো. ২৩]

ⓚ বৃত্ত ⓛ সরলরেখা

ⓖ বিন্দুবৃত্ত ⓘ উপবৃত্ত

উত্তর: ⓚ বৃত্ত

ব্যাখ্যা: $|x+iy-2|=3$

$\Rightarrow (x-2)^2+y^2=9$; যা বৃত্ত নির্দেশ করে।

৫৯। $z=x+iy$ হলে, $|z+1|=|z-2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ কোনটি? [য. বো. ২৩]

ⓚ সরলরেখা ⓛ বৃত্ত

ⓖ পরাবৃত্ত ⓘ উপবৃত্ত

উত্তর: ⓚ সরলরেখা

ব্যাখ্যা: $|x+iy+1|=|x+iy-2|$

$\Rightarrow (x+1)^2+y^2=(x-2)^2+y^2$

$\Rightarrow (x+1)^2=(x-2)^2$

$\Rightarrow x^2+2x+1=x^2-4x+4$

$\Rightarrow 6x-3=0$

$\therefore 2x-1=0$; যা সরলরেখা নির্দেশ করে।

৬০। $z=x-2iy$ হলে $z\bar{z}=7$ এর সঞ্চারপথ একটি– [চ. বো. ১৯]

ⓚ পরাবৃত্ত ⓛ উপবৃত্ত

ⓖ বৃত্ত ⓘ অধিবৃত্ত

উত্তর: ⓛ উপবৃত্ত

ব্যাখ্যা: $z=x-2iy;\ \bar{z}=x+i2y$

$z\bar{z}=7$

$\Rightarrow (x-2iy)(x+i2y)=7$

$\Rightarrow x^2-(2iy)^2=7$

$\Rightarrow x^2+4y^2=7$

$\therefore \frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{\frac{7}{4}}=1$; যা উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

Note: $ax^2+by^2=c$ এই টাইপের সমীকরণের ক্ষেত্রে–

(i) বৃত্ত হতে হলে x^2 ও y^2 এর সহগ সমান হতে হবে।

(ii) উপবৃত্তের সমীকরণের ক্ষেত্রে x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান এবং উভয়ের সহগের চিহ্ন একই হবে। অধিবৃত্তের সমীকরণে, x^2 ও y^2 এর যেকোনো একটির সহগ ধনাত্মক এবং অন্যটির সহগ ঋণাত্মক হবে।

৬১। $z=2x+i3y$ হলে, $|z|=1$ কি নির্দেশ করে– [চ. বো. ২৩]

ⓚ বৃত্ত ⓛ পরাবৃত্ত

ⓖ উপবৃত্ত ⓘ অধিবৃত্ত

উত্তর: ⓖ উপবৃত্ত

ব্যাখ্যা: $|2x+i3y|=1$

$\Rightarrow 4x^2+9y^2=1$; যা একটি উপবৃত্ত।

৬২। $z=x+iy$ হলে $|z|=5$ সমীকরণটি প্রকাশ করে– [য. বো. ২২]

ⓚ সরলরেখা ⓛ বৃত্ত

ⓖ পরাবৃত্ত ⓘ উপবৃত্ত

উত্তর: ⓛ বৃত্ত

ব্যাখ্যা: $|z|=5$

$\Rightarrow |x+iy|=5$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=5$

$\Rightarrow x^2+y^2=5^2$; যা বৃত্ত নির্দেশ করে।

এককের ঘনমূল

৬৩। এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $\omega^{6n\times3}=?$ [ব. বো. ১৭]

ⓚ -1 ⓛ 1

ⓖ ω ⓘ ω^2

উত্তর: ⓛ 1

ব্যাখ্যা: $\omega^{3n}=1$

$\therefore \omega^{6n\times3}=\omega^{18n}=(\omega^{3n})^6=1$

৬৪। এককের কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির গুণফল কত?

ক -1 খ $-\frac{1}{2}$

গ $\frac{1}{2}$ ঘ 1

উত্তর: ঘ 1

ব্যাখ্যা: এককের ঘনমূল তিনটি হচ্ছে: $1, \omega, \omega^2$। এদের মধ্যে ω ও ω^2 এই দুইটি কাল্পনিক/জটিল ঘনমূল।

$\therefore$ এককের কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির গুণফল $\omega \cdot \omega^2 = \omega^3 = 1$

Note: এককের ঘনমূল তিনটির যোগফল, $1 + \omega + \omega^2 = 0$
এককের কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির যোগফল, $\omega + \omega^2 = -1$
কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয়ের একটি অপরটির বর্গের সমান, $\omega = \omega^2$

৬৫। $\sqrt[3]{2^2}$ এর মূলত্রয়ের যোগফল কত? [য. বো. ২৩]

ক 0 খ 1

গ 2ω ঘ $2\omega^2$

উত্তর: ক 0

ব্যাখ্যা: যেকোনো সংখ্যার ঘনমূলত্রয়ের যোগফল $= 0$

৬৬। $1 + \omega^{19999} + \omega^{15557} = ?$

ক 0 খ 1

গ -1 ঘ 2

উত্তর: ক 0

ব্যাখ্যা: $1 + \omega^{19999} + \omega^{15557}$
$= 1 + \omega + \omega^2$
$= 0$

Note: $1 + \omega + \omega^2 = 0$
$\omega^3 = 1, \omega^{3n} = 1$

৬৭। $\frac{1}{\omega^{2015}} + \frac{1}{\omega^{2016}} + \frac{1}{\omega^{2017}}$ এর মান– [চ. বো. ২২]

ক $-2\omega^2$ খ $-\omega$

গ 0 ঘ 3

উত্তর: গ 0

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{\omega^{2015}} + \frac{1}{\omega^{2016}} + \frac{1}{\omega^{2017}}$
$= \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\omega}$
$= \omega + 1 + \omega^2$
$= 0$

$\omega^3 = 1$
$\therefore \frac{1}{\omega^2} = \omega$
এবং $\frac{1}{\omega} = \omega^2$

৬৮। এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $\frac{2}{\omega^{13} + \omega^{26}}$ এর মান– [চ. বো. ২২]

ক -2 খ -1

গ 0 ঘ 2

উত্তর: ক -2

ব্যাখ্যা: $\omega^3 = 1$ এখন, $\frac{2}{\omega^{13} + \omega^{26}} = \frac{2}{\omega + \omega^2} = -2$

৬৯। $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ এবং $y = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$ হলে $1 - x - y + xy$ এর মান কত? [বি. বো.]

ক -2 খ 2

গ 3 ঘ -3

উত্তর: গ 3

ব্যাখ্যা: $x \to \omega;\ y \to \omega^2$
$\therefore 1 - \omega - \omega^2 + \omega^3 = 2 - (\omega + \omega^2) = 3$

৭০। ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল হলে, $(\omega^5 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8)(\omega^{-1} + \omega^{-3} + \omega^{-5} + \omega^{-7})$ এর মান– [দি. বো.]

ক ω খ ω^2

গ 1 ঘ 0

উত্তর: ক ω

ব্যাখ্যা: $(\omega^5 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8)(\omega^{-1} + \omega^{-3} + \omega^{-5} + \omega^{-7})$
$= \omega^5 \times \omega^{-1} = \omega^4 = \omega$

Note: $\omega^n + \omega^{n+1} + \omega^{n+2} = 0$

৭১। এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, $(1 + \omega - \omega^2)(\omega + \omega^2 - 1)(\omega^2 + 1 - \omega)$ এর মান কত? [সি. বো. ২২]

ক -8 খ 8

গ 0 ঘ 1

উত্তর: ক -8

ব্যাখ্যা: $(1 + \omega - \omega^2)(\omega + \omega^2 - 1)(\omega^2 + 1 - \omega)$
$= (-2\omega^2) \times (-1 - 1) \times (-2\omega) = -8$

৭২। ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল হলে, $(1 - \omega^4)(1 - \omega^8)(1 - \omega^{10})(1 - \omega^{14})$ এর মান হলো– [চ. বো. ১৯]

ক -1 খ 1

গ 3 ঘ 9

উত্তর: ঘ 9

ব্যাখ্যা: $(1 - \omega^4)(1 - \omega^8)(1 - \omega^{10})(1 - \omega^{14})$
$= (1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega)(1 - \omega^2)$
$= \{(1 - \omega)(1 - \omega^2)\}^2 = \{(1 - \omega^2 - \omega + \omega^3)\}^2$
$= (1 + 1 + 1)^2 = 9$

৭৩। এককের জটিল ঘনমূলদ্বয় p ও q হলে, $p^5 + q^5 =$ কত? [য. বো. ২৩]

ক -1 খ 1

গ ω ঘ ω^2

উত্তর: ক -1

ব্যাখ্যা: $p = \omega;\ q = \omega^2$
$\therefore p^5 + q^5 = \omega^5 + (\omega^2)^5$
$= \omega^2 + \omega$
$= -1$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৭৪ ও ৭৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$p = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ একটি জটিল সংখ্যা

৭৪। $(p+\bar{p})^2 =$ কত? [ব. বো. ২৩]

ক) 1 খ) p

গ) – 1 ঘ) $\bar{p}$

উত্তর: ক) 1

ব্যাখ্যা: $p = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \omega$

$\bar{p} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \omega^2$

$\therefore (p+\bar{p})^2 = (\omega+\omega^2)^2 = (-1)^2 = 1$

৭৫। $\sqrt{p^2+\bar{p}^2} =$ কত? [ব. বো. ২৩]

ক) i খ) – i

গ) – 1 ঘ) 1

উত্তর: ক) i

ব্যাখ্যা: $\sqrt{p^2+\bar{p}^2} = \sqrt{\omega^2+(\omega^2)^2} = \sqrt{-1} = i$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক

৭৬। $n \in \mathbb{Z}$ হলে– [ঢা. বো. ২৩]

(i) $i^{4n} = 1$

(ii) $(i)^{2n+1} = -1$

(iii) $(i)^{8n+4} = 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii

গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: খ) i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $i^{4n} = (i^4)^n = 1$

(ii) $i^{2n+1} = i^{2n}.i = (i^2)^n.i = (-1)^n.i$

(iii) $i^{8n+4} = i^{8n}.i^4 = (i^8)^n.1 = 1$

৭৭। $z = 2-2i$ হলে– [কু. বো. ২৩]

(i) $Re(z) + Im(z) = 0$

(ii) $z\bar{z} = 8$

(iii) z এর পোলার আকার $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) ii ও iii

গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: ঘ) i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $Re(z) = 2$; $Im(z) = -2$

$\therefore Re(z) + Im(z) = 2-2 = 0$

(ii) $z\bar{z} = 8$ [Using Calculator]

(iii) $|z| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

$\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ পোলার আকার $= 2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right\}$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

৭৮। অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার ক্ষেত্রে– [দি. বো. ২২]

(i) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(ii) $\bar{\bar{z}} = z$

(iii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1.\bar{z}_2$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii

গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: ঘ) i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i), (ii) ও (iii) জটিল সংখ্যার ধর্ম।

৭৯। যদি $z = x+iy$, $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$ তিনটি জটিল সংখ্যা হয়, তবে– [ব. বো. ২৩]

(i) $Re(z) \le |z|$

(ii) $\arg(z_1z_2) \le \arg z_1 + \arg z_2$

(iii) $|z_1-z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii

গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: খ) i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $Re(z) = x$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\therefore \sqrt{x^2+y^2} \ge x$

(ii) $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(iii) $z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2$

$= (x_1-x_2) + i(y_1-y_2)$

$|z_1-z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$|z_1| - |z_2| = \sqrt{x_1^2+y_1^2} - \sqrt{x_2^2+y_2^2}$

যখন,

$y_1 = 0$; $y_2 = 0$ $\therefore |z_1| - |z_2| = |z_1| - |z_2|$

$y_1 \ne 0$; $y_2 \ne 0$ হলে, $|z_1-z_2| > |z_1| - |z_2|$

৮০। $z = x+iy$ হলে– [ম. বো. ২২]

(i) $|z| = |\bar{z}|$

(ii) $z.\bar{z} = |z|^2$

(iii) $\arg(\bar{z}) = \arg(z)$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii

গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: ক) i ও ii

ব্যাখ্যা: $z = x+iy$ হলে, $\bar{z} = x-iy$

(i) $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|\bar{z}| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

$|z| = |\bar{z}|$ [(i) নং সঠিক]

(ii) $z.\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2+y^2$

$|z|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2+y^2 = z.\bar{z}$ [(ii) নং সঠিক]

(iii) $\arg(z) = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [∵ (1, 1) বিন্দুটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত]

$\arg(\bar{z}) = -\tan^{-1}\left|\frac{-y}{x}\right|$ [∵ (+1, – 1) বিন্দুটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত]

$\arg(z) \ne \arg(\bar{z})$ [(iii) নং সঠিক নয়]

৮১। z একটি জটিল সংখ্যা হলে– [ব. বো. ২৩]

(i) $\frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1$

(ii) $z . \bar{z} = |\bar{z}|^2$

(iii) $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \arg(z) + \arg(\bar{z})$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) $z = x + iy$ হলে,

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \therefore \frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1$$

(ii) $z . \bar{z} = (x + iy)(x - iy)$
$= x^2 + y^2 = |\bar{z}|^2$

(iii) $\arg\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \arg(z) - \arg(\bar{z})$

৮২। $z = i - 1$ এর– [য. বো. ২৩]

(i) মডুলাস $= \sqrt{2}$

(ii) আর্গুমেন্ট $= \frac{\pi}{4}$

(iii) $z\bar{z}$ একটি বাস্তব সংখ্যা

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $z = i - 1$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

(ii) $\arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left|\left(\frac{1}{-1}\right)\right|$ [দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত]
$= \pi - \frac{\pi}{4}$
$= \frac{3\pi}{4}$

(iii) $\bar{z} = -1 - i$

$z\bar{z} = (-1 + i)(-1 - i)$
$= (-1)^2 - (i)^2$
$= 1 - i^2$
$= 1 + 1 = 2$; যা বাস্তব সংখ্যা

৮৩। $z = x + iy$ হলে– [ঢা. বো. ২২]

(i) $z - \bar{z}$ একটি কাল্পনিক সংখ্যা

(ii) $z.\bar{z}$ একটি বাস্তব সংখ্যা

(iii) z^n একটি বাস্তব সংখ্যা; যেখানে $n \in \mathbb{N}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

(i) $z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy \leftarrow$ কাল্পনিক

(ii) $z.\bar{z} = x^2 + y^2 \leftarrow$ বাস্তব

(iii) $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xiy + (iy)^2$
$= x^2 - y^2 + i2xy$

$\therefore z^n \rightarrow$ কাল্পনিক ↑

কাল্পনিক, কারণ i আছে।

৮৪। $z = -1 - i$ জটিল সংখ্যাটির– [রা. বো. ২৩]

(i) আর্গুমেন্ট $-\frac{3\pi}{4}$

(ii) বাস্তব অংশ -1

(iii) অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $1 - i$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) $-1 - i$ [তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত]

$$\arg(-1 - i) = -\pi + \tan^{-1}\left|\left(\frac{-1}{-1}\right)\right|$$
$$= -\pi + \frac{\pi}{4}$$
$$= -\frac{3\pi}{4}$$

অথবা, [Using Calculator]

(ii) $z = -1 - i = x + iy$
x(বাস্তব অংশ) $= -1$

(iii) $z = -1 - i$ হলে $\bar{z} = -1 + i$

৮৫। $z = -i + 1$ [চ. বো. ২৩]

(i) z এর মডুলাস $\sqrt{2}$

(ii) z এর আর্গুমেন্ট $\frac{-\pi}{4}$

(iii) $z\bar{z} = z + \bar{z}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) এবং (ii) [Using Calculator]

(iii) $z\bar{z} = (-i + 1)(i + 1) = 2$
$z + \bar{z} = -i + 1 + i + 1 = 2$
$\therefore z\bar{z} = z + \bar{z}$

৮৬। $z = -1 + i\sqrt{3}$ হলে– [দি. বো. ১৭]

(i) $z^9 = 64$

(ii) z এর আর্গুমেন্ট $120°$

(iii) z-এর বর্গমূল $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}(1 - i\sqrt{3})$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ⓛ ii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓛ ii

ব্যাখ্যা: (i) Using Calculator $[z^9 = 512]$

(ii) Using Calculator

(iii) Using Calculator; $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}(1 - i\sqrt{3})\right)^2 = -1 - \sqrt{3}i \neq z$

৮৭। এককের জটিল ঘনমূল α, β হলে– [ঢা. বো. ২৩]

(i) $\alpha\beta = 1$

(ii) $\alpha^2 = \beta$

(iii) $\alpha + \beta = -1$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓝ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $\alpha = \omega$; $\beta = \omega^2$

(i) $\alpha\beta = \omega . \omega^2 = \omega^3 = 1$

(ii) $\alpha^2 = \omega^2 = \beta$

(iii) $\alpha + \beta = \omega + \omega^2 = -1$

৮৮। কাল্পনিক একক i এবং এককের জটিল ঘনমূল ω হলে– [কু. বো. ১৭]

(i) $\omega^3 = -1$

(ii) $i^2 = -1$

(iii) $\omega + \omega^2 = -1$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓜ ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $\omega^3 = 1$

(ii) $i^2 = -1$

(iii) $\omega + \omega^2 = -1$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

৮৯। $\sqrt[3]{1}$ এর মূলত্রয়ের– [চ. বো. ২২]

(i) যোগফল শূন্য

(ii) দুইটি জটিল

(iii) একটি মূল অপর একটি মূলের বর্গের সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓝ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) মূলত্রয়ের যোগফল $= 1 + \omega + \omega^2 = 0$

(ii) ω, ω^2 এই দুইটি জটিল মূল।

(iii) একটি মূল অপরটির বর্গের সমান।

৯০। এককের জটিল ঘনমূল দুইটি a ও b হলে– [কু. বো. ১৭]

(i) $1 + a + b = 0$

(ii) $ab = 1$

(iii) $b = a^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓝ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: এককের কাল্পনিক ঘনমূল $\underset{\substack{\uparrow \\ a}}{\omega}$ ও $\underset{\substack{\uparrow \\ b}}{\omega^2}$

(i) $1 + a + b = 1 + \omega + \omega^2 = 0$

(ii) $ab = \omega^3 = 1$

(iii) $b = \omega^2 = a^2$ $[\because a = \omega \Rightarrow a^2 = \omega^2]$

৯১। এককের জটিল ঘনমূল x ও y হলে– [ঢা. বো. ১৯]

(i) $x^2 = y$

(ii) $x^2 + y^2 = i^2$

(iii) $x^2y^2 = i^4$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓝ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $x = \omega$ ও $y = \omega^2$

(i) $x^2 = y \therefore \omega^2 = \omega^2$

(ii) $x^2 + y^2 = \omega^2 + \omega^4 = \omega^2 + \omega = -1 = i^2$

(iii) $x^2y^2 = \omega^2 . \omega^4 = \omega^2 . \omega = \omega^3 = 1 = i^4$

৯২। 1 এর ঘনমূল তিনটির যোগফল– [কু. বো. ১৯]

(i) 0

(ii) ω^2

(iii) $1 + \omega + \omega^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓛ i ও iii

ব্যাখ্যা: 1 এর ঘনমূল 1, ω, ω^2

(i) $1 + \omega + \omega^2 = 0$ (সঠিক) [সূত্র]

(ii) ভুল

(iii) সঠিক

নিজেকে যাচাই করো

১। $z = \frac{2-3i}{2+i}$ হলে $Re(z) = ?$

ⓚ $-\frac{8}{5}$ ⓛ $-\frac{1}{5}$ ⓜ $\frac{1}{5}$ ⓝ $\frac{8}{5}$

২। $\frac{1+i}{i} = p + iq$ হলে, q এর মান কত?

ⓚ $-i$ ⓛ -1 ⓜ i ⓝ 1

৩। $-1 + i$ এর পোলার আকার–

ⓚ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ⓛ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ⓜ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ⓝ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

৪। $x + iy = i^{-2021} + 2(\omega)^{-2019}$ হলে, $\frac{y}{x} = ?$

ⓚ $\frac{1}{2}$ ⓛ $-\frac{1}{2}$ ⓜ 2 ⓝ -2

৫। $z = x + iy$ হলে, $|z+1| = |z-2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ কোনটি?

ⓚ সরলরেখা ⓛ বৃত্ত ⓜ পরাবৃত্ত ⓝ উপবৃত্ত

৬। এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, $(1+\omega-\omega^2)(\omega+\omega^2-1)(\omega^2+1-\omega)$ এর মান কত?

ⓚ -8 ⓛ 8 ⓜ 0 ⓝ 1

৭। $i^2 = -1$ হলে, $\frac{-i-i^{-5}}{2i^{-5}+i}$ এর মান–

ⓚ -2 ⓛ 0 ⓜ $\frac{1}{2}$ ⓝ 2

৮। $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত?

ⓚ $-\frac{2\pi}{3}$ ⓛ $-\frac{\pi}{3}$ ⓜ $\frac{\pi}{3}$ ⓝ $\frac{2\pi}{3}$

৯। $8 + 4\sqrt{5}i$ এর বর্গমূল কোনটি?

ⓚ $\pm(3-2i)$ ⓛ $\pm(\sqrt{10}-\sqrt{2}i)$

ⓜ $\pm(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)$ ⓝ $\pm(3+2i)$

১০। $x = 2 - i$ হলে, $x^3 - 3x^2 + x + 10$ এর মান নির্ণয় কর।

ⓚ 4 ⓛ 2 ⓜ 5 ⓝ -2

১১। $z = x - 2iy$ হলে $z\bar{z} = 7$ এর সঞ্চারপথ একটি–

ⓚ পরাবৃত্ত ⓛ উপবৃত্ত ⓜ বৃত্ত ⓝ অধিবৃত্ত

১২। $\sqrt{-3} \times \sqrt{-1}$ এর মান কোনটি?

ⓚ $\sqrt{3}i$ ⓛ $\pm\sqrt{3}$ ⓜ $-\sqrt{3}$ ⓝ $\sqrt{3}$

১৩। $z = (1-i)^3$ হলে, arg(z) হবে–

ⓚ $-\frac{3\pi}{4}$ ⓛ $-\frac{\pi}{4}$ ⓜ $\frac{\pi}{4}$ ⓝ $\frac{3\pi}{4}$

১৪। $\sqrt{i} + \sqrt{-i}$ এর মান নিচের কোনটি?

ⓚ $5i$ ⓛ i ⓜ 2 ⓝ $\sqrt{2}$

১৫। $\sqrt[3]{2^2}$ এর মূলত্রয়ের যোগফল কত?

ⓚ 0 ⓛ 1 ⓜ 2ω ⓝ $2\omega^2$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১৬ ও ১৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$p = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-3}\right)$ একটি জটিল সংখ্যা

১৬। $(p+\bar{p})^2 =$ কত?

ⓚ 1 ⓛ p ⓜ -1 ⓝ $\bar{p}$

১৭। $\sqrt{p^2+\bar{p}^2} =$ কত?

ⓚ i ⓛ $-i$ ⓜ -1 ⓝ 1

১৮। $1-\sqrt{3}i$ এর সাধারণ আর্গুমেন্ট কত?

ⓚ $2n\pi - \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$ ⓛ $2n\pi + \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

ⓜ $2n\pi - \frac{5\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$ ⓝ $2n\pi + \frac{5\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

১৯। $(2i)^{-\frac{1}{2}} + (-2i)^{-\frac{1}{2}}$ এর মান কত?

ⓚ $\frac{1}{2}$ ⓛ 1 ⓜ 0 ⓝ ∞

২০। $x = 1 + \sqrt{2}\,i$ হলে $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ এর মান কত?

ⓚ 4 ⓛ 2 ⓜ 1 ⓝ None

২১। $1 + \omega^{19999} + \omega^{15557} = ?$

ⓚ 0 ⓛ 1 ⓜ -1 ⓝ 2

২২। যদি $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ তিনটি জটিল সংখ্যা হয়, তবে–

(i) $Re(z) \le |z|$

(ii) $\arg(z_1z_2) \le \arg z_1 + \arg z_2$

(iii) $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

২৩। $n \in \mathbb{Z}$ হলে–

(i) $i^{4n} = 1$

(ii) $(i)^{2n+1} = -1$

(iii) $(i)^{8n+4} = 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

২৪। $z = -1 + i\sqrt{3}$ হলে–

(i) $z^9 = 64$

(ii) z এর আর্গুমেন্ট 120°

(iii) z-এর বর্গমূল $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}(1 - i\sqrt{3})$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ⓛ ii ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

২৫। $\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\ldots\ldots\infty}}} = ?$

ⓚ $-\sqrt{3}i$ ⓛ $\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$ ⓜ $\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}$ ⓝ $\frac{1\pm\sqrt{11}}{2}$

উত্তরপত্র		১	গ	২	খ	৩	ঘ	৪	খ	৫	ক	৬	ক	৭	খ	৮	ক	৯	গ	১০	গ	১১	খ	১২	গ
১৩	ক	১৪	ঘ	১৫	ক	১৬	ক	১৭	ক	১৮	ক	১৯	খ	২০	ঘ	২১	ক	২২	খ	২৩	খ	২৪	খ	২৫	গ

০৪ বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ
Polynomial and Polynomial Equation

Board Questions Analysis

সৃজনশীল প্রশ্ন

বোর্ড / সাল	ঢাকা	ময়মনসিংহ	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০২৩	২	২	২	২	১	২	২	২	২
২০২২	২	২	২	২	২	২	২	২	২

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

বোর্ড / সাল	ঢাকা	ময়মনসিংহ	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০২৩	৪	৫	৬	৪	৪	৪	৫	৫	৪
২০২২	৫	৪	৩	৪	৪	৫	৪	৪	৫

এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

- $f(x)$ একটি বহুপদী এবং $f(a) = 0$ হলে $(x - a)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে।
- $f(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে $f(a)$ ভাগশেষ নির্দেশ করে।
- $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $D = b^2 - 4ac$ কে নিশ্চায়ক বা পৃথায়ক বলে।
  (i) $D = 0$ হলে, মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে
  (ii) $D > 0$ হলে, মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে
  (a) D পূর্ণবর্গ হলে মূলদ্বয় মূলদ হবে
  (b) D পূর্ণবর্গ না হলে মূলদ্বয় অমূলদ হবে
  (iii) $D < 0$ হলে, মূলদ্বয় জটিল ও অনুবন্ধী হবে।
- $ax^2 + bx + c$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হলে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক শূন্য হবে।
- $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}, \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

- $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\ (a \neq 0)$ ত্রিঘাত সমীকরণের মূলত্রয়, α, β ও γ হলে, $\sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma = -\dfrac{b}{a}$,
  $\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \dfrac{c}{a}, \alpha\beta\gamma = -\dfrac{d}{a}$
- (i) α ও β মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$
  (ii) α, β ও γ মূলবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণ,
  $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$
- ত্রিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে মূলগুলো
  (i) সমান্তর প্রগমনভুক্ত হলে মূলগুলো $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$ আকারের হবে
  (ii) গুণোত্তর প্রগমনভুক্ত হলে মূলগুলো $\dfrac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$ আকারের হবে
  (iv) ভাজিত/Harmonic/সমান্তর প্রগমনের গুণাত্মক বিপরীত হলে $\dfrac{1}{\alpha - d}, \dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\alpha + d}$ আকারের হবে
- $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0\ (a_1 \neq 0)$ ও $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0\ (a_2 \neq 0)$ সমীকরণদ্বয়ের দুটি সাধারণ মূল থাকার শর্ত, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$
- $ax^2 + bx + c$ রাশির সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান $= -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ হবে।
  $a > 0$ হলে সর্বনিম্ন ও $a < 0$ হলে সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে।
- $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে,
  (i) $-\alpha, -\beta, -\gamma$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $f(-x) = 0$
  (ii) $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}, \dfrac{1}{\gamma}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$
  (iii) $\alpha + k, \beta + k, \gamma + k$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $f(x - k) = 0$
  (iv) $\alpha - k, \beta - k, \gamma - k$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $f(x + k) = 0$

HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন ▶ ১ দৃশ্যকল্প-১: দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + b = 0$; $[a \neq 0]$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ একটি দ্বিঘাত ফাংশন।

(ক) $2x^2 - 2(p+q)x + (p^2 + q^2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে, প্রমাণ কর যে, $p = q$। [ঢা. বো. ২৩]

(খ) উদ্দীপকের দৃশ্যকল্প-১ এর সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $m : 3n$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{m}{n}} + 3\sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{3b}{a}} = 0$

[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩; ঢা. বো ২২; য. বো. ২১; সি. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ $a = 1, b = -2n, c = n^2 - m^2$ হলে এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যার মূলদ্বয়, $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল ও অন্তরফলের যোগবোধক মান হবে।

[দি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩; দি. বো. ২২, ১৯]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $2x^2 - 2(p+q)x + (p^2 + q^2) = 0$

সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে, নিশ্চায়ক শূন্য হবে। অর্থাৎ সমীকরণটির নিশ্চায়ক,

$$D = \{-2(p+q)\}^2 - 4.2.(p^2+q^2) = 0$$
$$\Rightarrow 4(p+q)^2 - 8(p^2+q^2) = 0$$
$$\Rightarrow 4(p^2 + 2pq + q^2 - 2p^2 - 2q^2) = 0$$
$$\Rightarrow 2pq - p^2 - q^2 = 0$$
$$\Rightarrow p^2 - 2pq + q^2 = 0$$
$$\Rightarrow (p-q)^2 = 0$$
$$\Rightarrow p - q = 0$$
$$\therefore p = q \text{ (Proved)}$$

খ প্রদত্ত সমীকরণ, $ax^2 + bx + b = 0$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাত $m : 3n$

ধরি, মূলদ্বয় $m\alpha$ ও $3n\alpha$

$$\therefore m\alpha + 3n\alpha = -\frac{b}{a}$$
$$\therefore m + 3n = -\frac{b}{a\alpha}$$

এবং $m\alpha \times 3n\alpha = \frac{b}{a}$

$$\therefore mn = \frac{b}{3a\alpha^2}$$

বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{m}{n}} + 3\sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{3b}{a}}$

$$= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} + \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{m}} + \sqrt{\frac{3b}{a}}$$
$$= \frac{(\sqrt{m})^2 + 3(\sqrt{n})^2}{\sqrt{mn}} + \sqrt{\frac{3b}{a}}$$
$$= \frac{m+3n}{\sqrt{mn}} + \sqrt{\frac{3b}{a}}$$
$$= \frac{-\frac{b}{a\alpha}}{\sqrt{\frac{b}{3a\alpha^2}}} + \sqrt{\frac{3b}{a}} = -\frac{\frac{b}{a\alpha}}{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{3a}\alpha}} + \sqrt{\frac{3b}{a}}$$
$$= -\frac{b}{a\alpha} \times \frac{\sqrt{3a}\alpha}{\sqrt{b}} + \sqrt{\frac{3b}{a}} = -\frac{\sqrt{b} \times \sqrt{3}}{\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{3b}{a}}$$
$$= -\sqrt{\frac{3b}{a}} + \sqrt{\frac{3b}{a}} = 0 = \text{ডানপক্ষ।}$$
$$\therefore \sqrt{\frac{m}{n}} + 3\sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{3b}{a}} = 0 \text{ (Proved)}$$

গ এখানে, $f(x) = 0$

$\therefore ax^2 + bx + c = 0$ .... (i)

দেওয়া আছে, $a = 1, b = -2n, c = n^2 - m^2$

(i) নং হতে পাই, $x^2 - 2nx + n^2 - m^2 = 0$ .... (ii)

মনে করি, (ii) নং সমীকরণের মূল দুটি α ও β.

$\therefore \alpha + \beta = -(-2n) = 2n$

এবং $\alpha\beta = n^2 - m^2$

নির্ণেয় সমীকরণের মূল দুটি হবে $|\alpha + \beta|$ এবং $|\alpha - \beta|$

$$\therefore \alpha - \beta = \pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$$
$$= \pm\sqrt{4n^2 - 4(n^2 - m^2)}$$
$$= \pm\sqrt{4m^2}$$
$$= \pm 2m$$

$\alpha - \beta$ এর যোগবোধক মান $= 2m$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণের মূল দুটির যোগফল,

$(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 2n + 2m = 2(n+m)$

এবং গুণফল, $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 2n.2m = 4nm$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2 - 2(n+m)x + 4nm = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২ উদ্দীপক-১: $2mx^2 + nx + 1 = 0$ এবং $nx^2 + 2mx + 1 =$

উদ্দীপক-২: $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

(ক) $x^3 + (p^2 - 3)x - (p+2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল $-1 + i$ হলে, সমীকরণটি সমাধান কর। [ঢা. বো.

(খ) উদ্দীপক-১ এর সমীকরণ দুইটির একটিমাত্র সাধারণ মূল থাক প্রমাণ কর যে, $2m + n + 1 = 0$।

[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩; ম. বো.

(গ) উদ্দীপক-২ এর সমীকরণটির মূলত্রয় α, β, γ হলে, $\sum(\alpha - \beta)^2$ মান নির্ণয় কর। [ঢা. বো.

সমাধান:

ক দেওয়া আছে,

$x^3 + (p^2 - 3)x - (p+2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল $-1 + ip$

আমরা জানি, জটিল মূলগুলো অনুবন্ধী যুগলরূপে থাকে।

$\therefore$ সমীকরণটির অপর একটি মূল $= -1 - ip$

ধরি, সমীকরণটির অপর মূল α

প্রদত্ত সমীকরণ হতে পাই,

$$x^3 + (p^2 - 3)x - (p+2) = 0$$
$$\therefore (-1 + ip) + (-1 - ip) + \alpha = 0$$
$$\Rightarrow -1 + ip - 1 - ip + \alpha = 0$$
$$\Rightarrow \alpha - 2 = 0$$
$$\therefore \alpha = 2$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2, -1 + ip, -1 - ip$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$2mx^2 + nx + 1 = 0$

এবং $nx^2 + 2mx + 1 = 0$

মনে করি, সমীকরণ দুইটির সাধারণ মূল α যা উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

$\therefore 2m\alpha^2 + n\alpha + 1 = 0$ ......(i)

এবং $n\alpha^2 + 2m\alpha + 1 = 0$ .....(ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে বজ্রগুণন সূত্রানুসারে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{n-2m} = \frac{\alpha}{n-2m} = \frac{1}{4m^2-n^2}$$

২য় ও ৩য় অনুপাত থেকে,

$$\frac{\alpha}{n-2m} = \frac{1}{4m^2-n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{n-2m} = \frac{1}{(2m)^2-n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{n-2m} = \frac{1}{(2m+n)(2m-n)}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-1}{2m+n}$$

১ম ও ২য় অনুপাত থেকে,

$$\frac{\alpha^2}{n-2m} = \frac{\alpha}{n-2m}$$

$$\Rightarrow \alpha = 1$$

α এর মানদ্বয় হতে, $\frac{-1}{2m+n} = 1$

$\therefore 2m + n + 1 = 0$ **(Proved)**

গ দেওয়া আছে,

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = -\frac{p}{1} = -p$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{q}{1} = q$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{r}{1} = -r$$

এখন, $\sum(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2$

$= (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) + (\beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2) + (\gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2)$

$= 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= 2\{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= 2(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 6(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= 2(-p)^2 - 6q$

$= 2p^2 - 6q$

$= 2(p^2 - 3q)$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $2(p^2 - 3q)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩ $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ এবং $P(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 10$

(ক) $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২]

(খ) $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $|\alpha - \beta|$ এবং $\alpha^2 + \beta^2$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩]

(গ) $P(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল 5 হলে, অপর মূলগুলো নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২১; দি. বো. ২১]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ এবং $f(x) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$

সমীকরণটির নিশ্চায়ক, $D = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1$

$= 16 - 12$

$= 4 > 0$

যেহেতু $D > 0$ এবং পূর্ণবর্গ

অতএব, সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

এবং $f(x) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$

সমীকরণটির মূলদ্বয় α ও β

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{3}$$

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $|\alpha - \beta|$ এবং $\alpha^2 + \beta^2$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore |\alpha - \beta| = \frac{2}{3}$$

আবার,

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{9}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল এবং গুণফল হবে–

$$\{|\alpha-\beta|\} + \{\alpha^2 + \beta^2\} = \frac{2}{3} + \frac{10}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\{|\alpha-\beta|\} \times \{\alpha^2 + \beta^2\} = \frac{2}{3} \times \frac{10}{9} = \frac{20}{27}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{20}{27} = 0$

$\Rightarrow 27x^2 - 48x + 20 = 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 10$

আবার, $P(x) = 0$

$\Rightarrow x^3 - 7x^2 + 8x + 10 = 0$

সমীকরণটির একটি মূল 5

$\therefore (x-5)$, $x^3 - 7x^2 + 8x + 10$ রাশির একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - 7x^2 + 8x + 10 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 5x^2 - 2x^2 + 10x - 2x + 10 = 0$

$\Rightarrow x^2(x-5) - 2x(x-5) - 2(x-5) = 0$

$\Rightarrow (x-5)(x^2 - 2x - 2) = 0$

হয়, $x - 5 = 0$ অথবা, $x^2 - 2x - 2 = 0$

$\therefore x = 5$

$$\therefore x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{3}$$

$\therefore$ সমীকরণের মূলগুলো: $5, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪ দৃশ্যকল্প-১: $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ
দৃশ্যকল্প-২: $q(x) = lx^2 + mx + n$; $r(x) = nx^2 + mx + l$

(ক) কোন শর্তে $2x^2 - 2(a + b)x + a^2 + b^2 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব হবে? [দি. বো. ২৩; সি. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে দেখাও যে, $\sum(\alpha - \beta)^2 = \frac{18(b^2 - ac)}{a^2}$ [কু. বো. ২৩]

(গ) $r(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল $q(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুণ হলে, দেখাও যে, $l = 2n$ অথবা $2m^2 = (l + 2n)^2$।
[রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২; ঢা. বো. ১৯, ১৭]

সমাধান:

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $2x^2 - 2(a + b)x + a^2 + b^2 = 0$

সমীকরণটির মূলগুলো বাস্তব হবে যদি এর নিশ্চায়কের মান শূন্য অথবা ধনাত্মক হয়।

সমীকরণটির নিশ্চায়ক $= \{-2(a + b)\}^2 - 4 \times 2(a^2 + b^2)$
$= 4(a^2 + 2ab + b^2) - 8(a^2 + b^2)$
$= 4(a^2 + 2ab + b^2 - 2a^2 - 2b^2)$
$= 4(-a^2 - b^2 + 2ab)$
$= -4(a^2 - 2ab + b^2)$
$= -4(a - b)^2 \leq 0$

কিন্তু নিশ্চায়কের মান ঋণাত্মক হলে, মূলগুলো বাস্তব হতে পারে না।
কাজেই সমীকরণটির মূলগুলো বাস্তব হবে যদি নিশ্চায়কের মান শূন্য হয়।

অর্থাৎ, $(a - b)^2 = 0$
$\Rightarrow a - b = 0$
$\therefore a = b$
$\therefore a = b$ হলে সমীকরণটির মূলগুলো বাস্তব হবে। (Ans.)

খ $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = -\frac{3b}{a}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{3c}{a}$

এবং $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$

এখন, $\sum(\alpha - \beta)^2$
$= (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2$
$= (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) + (\beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2) + (\gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2)$
$= 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$
$= 2\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$
$[\because (a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)]$
$= 2(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$
$= 2(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 6(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$
$= 2\left(-\frac{3b}{a}\right)^2 - 6 \times \frac{3c}{a}$
$= 2 \times \frac{9b^2}{a^2} - \frac{18c}{a}$
$= \frac{18b^2 - 18ac}{a^2} = \frac{18(b^2 - ac)}{a^2}$

$\sum(\alpha - \beta)^2 = \frac{18(b^2 - ac)}{a^2}$ (Showed)

গ দেওয়া আছে, $q(x) = lx^2 + mx + n$ এবং $q(x) = 0$

$\therefore lx^2 + mx + n = 0$ ......(i)

আবার, $r(x) = nx^2 + mx + l$ এবং $r(x) = 0$

$\therefore nx^2 + mx + l = 0$ ......(ii)

এখানে, (ii) নং সমীকরণের একটি মূল (i) নং সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুণ।

মনে করি, (i) নং সমীকরণের একটি মূল α

$\therefore$ (ii) নং সমীকরণের একটি মূল 2α

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $l\alpha^2 + m\alpha + n = 0$ ..... (iii)

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $n(2\alpha)^2 + m.2\alpha + l = 0$

$\Rightarrow 4n\alpha^2 + 2m\alpha + l = 0$ ...... (iv)

(iii) নং ও (iv) নং সমীকরণে বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{lm - 2mn} = \frac{\alpha}{4n^2 - l^2} = \frac{1}{2lm - 4mn}$$

২য় ও ৩য় অনুপাত থেকে,

$$\alpha = \frac{4n^2 - l^2}{2lm - 4mn}$$

১ম ও ২য় অনুপাত থেকে,

$$\alpha = \frac{lm - 2nm}{4n^2 - l^2}$$

$\therefore \frac{4n^2 - l^2}{2lm - 4mn} = \frac{lm - 2nm}{4n^2 - l^2}$

$\Rightarrow (4n^2 - l^2)^2 = (l m - 2mn) \times (2lm - 4mn)$
$\Rightarrow \{(2n)^2 - l^2\}^2 = m(l - 2n) \times 2m(l - 2n)$
$\Rightarrow \{(2n - l)(2n + l)\}^2 = 2m^2(2n - l)^2$
$\Rightarrow (2n - l)^2(2n + l)^2 - 2m^2(2n - l)^2 = 0$
$\Rightarrow (2n - l)^2 \{(2n + l)^2 - 2m^2\} = 0$

হয়, $2n = l$ অথবা, $(2n + l)^2 = 2m^2$

$\therefore l = 2n$ $\Rightarrow 2m^2 = (l + 2n)^2$ (Showed)

প্রশ্ন ▶ ৫ (i) $mx^2 + nx + n = L$
(ii) $S = 6x^3 - 20x^2 + 5$ এবং $T = 6 - 6x - 9x^2$

(ক) মূলদ সহগবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি মূল $(3 + \sqrt{2i})^{-1}$
[কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩; ম. বো. ২২; ব. বো. ২১; ঢা. বো. ১৯]

(খ) যদি $L = 0$ সমীকরণের মূল দুটির অনুপাত $p : q$ হয় তাহলে প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{m}} = 0$
[য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো ২২; য. বো. ২১; সি. বো. ২১]

(গ) যদি $S = T$ সমীকরণটির মূলগুলো সমান্তর প্রগমনের গৌণিক বিপরীত প্রগমনভুক্ত হয় তবে x এর মান নির্ণয় কর। [য. বো. ...]

সমাধানঃ

ক এখানে, দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $(3+i\sqrt{2})^{-1}$

$$=\frac{1}{3+i\sqrt{2}}$$
$$=\frac{3-i\sqrt{2}}{(3+i\sqrt{2})(3-i\sqrt{2})}$$
$$=\frac{3-i\sqrt{2}}{(3)^2-(i\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{3-i\sqrt{2}}{9-2i^2}$$
$$=\frac{3-i\sqrt{2}}{9+2} \quad [\because i^2=-1]$$
$$=\frac{1}{11}(3-i\sqrt{2})$$

আমরা জানি, কোনো মূলদ সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের জটিল মূলগুলো অনুবন্ধী আকারে থাকে।

$\therefore$ তাই, অপর মূলটি $\frac{1}{11}(3+i\sqrt{2})$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$$x^2-\left\{\frac{1}{11}(3+i\sqrt{2})+\frac{1}{11}(3-i\sqrt{2})\right\}x+\frac{1}{11}(3+i\sqrt{2})\times\frac{1}{11}(3-i\sqrt{2})=0$$
$$\Rightarrow x^2-\left\{\frac{1}{11}(3+i\sqrt{2}+3-i\sqrt{2})\right\}x+\frac{1}{121}(3^2-2i^2)=0$$
$$\Rightarrow x^2-\frac{1}{11}\times 6x+\frac{1}{121}(9+2)=0 \quad [\because i^2=-1]$$
$$\Rightarrow x^2-\frac{6}{11}x+\frac{1}{121}\times 11=0$$
$$\Rightarrow x^2-\frac{6}{11}x+\frac{1}{11}=0$$

$\therefore 11x^2-6x+1=0$; যা নির্ণেয় সমীকরণ। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$mx^2+nx+n=L$

আবার, $L=0$

$\therefore mx^2+nx+n=0$

সমীকরণটির মূলদ্বয়ের অনুপাত $p:q$

মনে করি, মূলদ্বয় $p\alpha$ ও $q\alpha$

$\therefore p\alpha+q\alpha=-\frac{n}{m}$ এবং $p\alpha\times q\alpha=\frac{n}{m}$

$\therefore p+q=-\frac{n}{m\alpha}$ $\therefore pq=\frac{n}{m\alpha^2}$

$$\text{বামপক্ষ}=\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{m}}$$
$$=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}+\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}+\sqrt{\frac{n}{m}}$$
$$=\frac{(\sqrt{p})^2+(\sqrt{q})^2}{\sqrt{pq}}+\sqrt{\frac{n}{m}}$$
$$=\frac{p+q}{\sqrt{pq}}+\sqrt{\frac{n}{m}}$$
$$=\frac{-\frac{n}{m\alpha}}{\sqrt{\frac{n}{m\alpha^2}}}+\sqrt{\frac{n}{m}}$$
$$=\frac{-\frac{n}{m\alpha}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\alpha}}+\sqrt{\frac{n}{m}}$$
$$=-\frac{n}{m\alpha}\times\frac{\sqrt{m}\alpha}{\sqrt{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}$$
$$=-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}+\sqrt{\frac{n}{m}}$$
$$=0=\text{ডানপক্ষ}$$

$\therefore \sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{m}}=0$ **(Proved)**

গ দেওয়া আছে, $S=6x^3-20x^2+5$

এবং $T=6-6x-9x^2$

আবার, $S=T$

$\Rightarrow 6x^3-20x^2+5=6-6x-9x^2$

$\therefore 6x^3-11x^2+6x-1=0$.......(i)

(i) নং সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর প্রগমণের গৌণিক বিপরীত প্রগমনভুক্ত হলে, ধরি মূলগুলো $\frac{1}{\alpha-d},\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha+d}$

(i) নং সমীকরণের x এর পরিবর্তে $\frac{1}{x}$ বসিয়ে পাই,

$$6.\left(\frac{1}{x}\right)^3-11\left(\frac{1}{x}\right)^2+6\left(\frac{1}{x}\right)-1=0$$
$$\Rightarrow \frac{6}{x^3}-\frac{11}{x^2}+\frac{6}{x}-1=0$$
$$\Rightarrow 6-11x+6x^2-x^3=0$$

$\therefore x^3-6x^2+11x-6=0$ .....(ii)

এখন, (ii) নং সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর প্রগমনভুক্ত হওয়ায় মূলগুলো $\alpha-d, \alpha, \alpha+d$

$$\therefore (\alpha-d)+\alpha+(\alpha+d)=-\frac{-6}{1}$$
$$\Rightarrow 3\alpha=6$$
$$\therefore \alpha=2$$

আবার, $(\alpha-d)\times\alpha\times(\alpha+d)=-\frac{-6}{1}$

$\Rightarrow \alpha(\alpha^2-d^2)=6$

$\Rightarrow 2(2^2-d^2)=6$ [α এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow d^2=1$

$\therefore d=\pm 1$

$\alpha=2, d=1$ হলে, (ii) এর মূলগুলো,

$=\alpha-d, \alpha, \alpha+d$

$=2-1, 2, 2+1$

$=1, 2, 3$

আবার,

$\alpha = 2, d = -1$ হলে, (ii) এর মূলগুলো,

$= \alpha - d, \alpha, \alpha + d$

$= 2 - (-1), 2, 2 + (-1)$

$= 3, 2, 1$

$\therefore$ (i) নং সমীকরণের মূলগুলো $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় মানঃ $x = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ দৃশ্যকল্প-১: $ax^2 + bx + c = 0$ এবং $bx^2 + cx + a = 0$

দৃশ্যকল্প-২: $8x^3 - 36x^2 + 22x + 21 = 0$

(ক) $x^2 - x + k = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হলে k এর মান নির্ণয় কর। [রা. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর দ্বিঘাত সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. [ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩; ঢা. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণের মূলত্রয় সমান্তর প্রগমনভুক্ত হলে মূলগুলো নির্ণয় কর। [ম. বো. ২৩]

সমাধানঃ

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 - x + k = 0$ .... (i)

$\therefore$ (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব। তাই, পৃথায়ক $D \geq 0$ হবে।

$\therefore D \geq 0$

$\Rightarrow 1 - 4k \geq 0$

$\Rightarrow -4k \geq -1$

$\Rightarrow 4k \leq 1$ [উভয় পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore k \leq \frac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $k \leq \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$

এবং $bx^2 + cx + a = 0$

মনে করি, সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α যা উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

$\therefore a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ .... (i)

এবং $b\alpha^2 + c\alpha + a = 0$ ..... (ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ হতে বজ্রগুণন সূত্রানুসারে,

$\frac{\alpha^2}{ab - c^2} = \frac{\alpha}{bc - a^2} = \frac{1}{ca - b^2}$

$\therefore \frac{\alpha}{bc - a^2} = \frac{1}{ca - b^2}$

$\therefore \alpha = \frac{bc - a^2}{ca - b^2}$

আবার, $\frac{\alpha^2}{ab - c^2} = \frac{\alpha}{bc - a^2}$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{ab - c^2} = \frac{1}{bc - a^2}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{ab - c^2}{bc - a^2}$

$\Rightarrow \frac{bc - a^2}{ca - b^2} = \frac{ab - c^2}{bc - a^2}$ [α এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow (bc - a^2)(bc - a^2) = (ab - c^2)(ca - b^2)$

$\Rightarrow (bc - a^2)^2 = (ab - c^2)(ca - b^2)$

$\Rightarrow b^2c^2 - 2a^2bc + a^4 = a^2bc - ac^3 - ab^3 + b^2c^2$

$\Rightarrow a^4 = -ab^3 - ac^3 + 3a^2bc$

$\Rightarrow a^3 = -b^3 - c^3 + 3abc$

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ **(Proved)**

গ প্রদত্ত সমীকরণ, $8x^3 - 36x^2 + 22x + 21 = 0$..... (i)

(i) নং সমীকরণের মূলত্রয় সমান্তর প্রগমনভুক্ত হলে,

ধরি, মূলত্রয় $\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta$

$\therefore (\alpha - \beta) + \alpha + (\alpha + \beta) = -\frac{-36}{8}$

$\Rightarrow 3\alpha = \frac{9}{2} \therefore \alpha = \frac{3}{2}$

আবার, $(\alpha - \beta).\alpha.(\alpha + \beta) = -\frac{21}{8}$

$\Rightarrow \alpha(\alpha^2 - \beta^2) = -\frac{21}{8}$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \beta^2\right\} = -\frac{21}{8}$

$\Rightarrow \frac{9}{4} - \beta^2 = \frac{-7}{4}$

$\Rightarrow \beta^2 = 4$

$\therefore \beta = \pm 2$

এখন, $\alpha = \frac{3}{2}$ এবং $\beta = 2$ হলে,

মূলত্রয় $= \alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta$

$= \frac{3}{2} - 2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + 2$

$= -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}$

আবার, $\alpha = \frac{3}{2}$ এবং $\beta = -2$ হলে,

মূলত্রয় $= \alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta$

$= \frac{3}{2} + 2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} - 2$

$= \frac{7}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলগুলো: $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭ দৃশ্যকল্প-১: $x^2 - 2x - 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ.

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = x^2 + x + 1$ .... (i)

$x^3 - 11x^2 + 47x - 85 = 0$ .... (ii)

(ক) (i) নং সমীকরণে $f(x) = 0$ হলে মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২; ব. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ হলে, দেখাও যে, $5b^2 + 4ac = 0$

(গ) দৃশ্যকল্প-২: এ (ii) নং সমীকরণের মূলগুলি 5, α, β হলে, $\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। [ম. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩, ১৭; রা. বো. ২১; সি. বো. ২১]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + x + 1$ এবং $f(x) = 0$

$\therefore x^2 + x + 1 = 0$

নিশ্চায়ক, $D = 1^2 - 4 \times 1 \times 1$

$= 1 - 4$

$= -3$, যা ঋণাত্মক

যেহেতু, $D < 0$, তাই সমীকরণটির মূলদ্বয় জটিল ও অসমান। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $x^2 - 2x - 5 = 0$; মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{-2}{1} = 2$

$\alpha\beta = -5$

আবার, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ;

$\therefore \gamma + \delta = -\frac{b}{a}$

$\gamma\delta = \frac{c}{a}$

এখন,

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

$\Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\gamma + \delta}{\gamma - \delta}$ [যোজন বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{(\gamma + \delta)^2}{(\gamma - \delta)^2}$ [বর্গ করে]

$$\Rightarrow \frac{2^2}{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2}{(\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta}$$

$$\Rightarrow \frac{2^2}{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{24} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}$$

$\Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{b^2}{b^2 - 4ac}$

$\Rightarrow 6b^2 = b^2 - 4ac$

$\therefore 5b^2 + 4ac = 0$ **(Showed)**

গ উদ্দীপকের (ii) নং হতে পাই,

$x^3 - 11x^2 + 47x - 85 = 0$ .... (i)

এবং (i) নং সমীকরণের মূলত্রয় $5, \alpha, \beta$

$\therefore 5 + \alpha + \beta = 11$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 11 - 5$

$\therefore \alpha + \beta = 6$

এবং $5.\alpha.\beta = 85$

$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{85}{5}$

$\therefore \alpha\beta = 17$

এখন, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল,

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= 17 + 2 + \frac{1}{17}$$

$$= 19 + \frac{1}{17}$$

$$= \frac{323 + 1}{17}$$

$$= \frac{324}{17}$$

মূলদ্বয়ের যোগফল,

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha + \beta) + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

$$= (\alpha + \beta) + \frac{(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}$$

$$= 6 + \frac{6}{17}$$

$$= \frac{108}{17}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 -$ (মূলদ্বয়ের সমষ্টি)$x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{108}{17}x + \frac{324}{17} = 0$

$\Rightarrow \frac{17x^2 - 108x + 324}{17} = 0$

$\therefore 17x^2 - 108x + 324 = 0$; যা নির্ণেয় সমীকরণ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮ $ax^2 + 2cx + 2b = 0$ .... (i)

$ax^2 + 2bx + 2c = 0$ .... (ii)

(ক) $a + b + c = 0$ এবং a, b, c বাস্তব হলে দেখাও যে, (ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে। [চ. বো. ২৩]

(খ) (i) ও (ii) নং সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $a + 2b + 2c = 0$ [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩; ম. বো. ২৩]

(গ) সমীকরণ (i) ও (ii) এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য সমান হলে দেখাও যে, $b = c$ এবং $b + c + 2a = 0$ [চ. বো. ২৩]

সমাধান:

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $ax^2 + 2bx + 2c = 0$

$\therefore$ নিশ্চায়ক, $D = (2b)^2 - 4.a.2c$

$= 4b^2 - 8ac$

$= 4[\{-(a + c)\}^2 - 2ac]$ $[\because a + b + c = 0]$

$= 4[(a + c)^2 - 2ac]$

$= 4[\{(a + c)\}^2 - 2ac]$

$= 4(a^2 + c^2)$, যা ধনাত্মক।

কেননা দুটি সংখ্যার বর্গের যোগফল ঋণাত্মক হয় না।

$\therefore D > 0$ হওয়ায়, মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে। **(Showed)**

খ প্রদত্ত সমীকরণ,

$ax^2 + 2cx + 2b = 0$ ...... (i)

এবং $ax^2 + 2bx + 2c = 0$ ..... (ii)

মনে করি, (i) ও (ii) নং এর সাধারণ মূল α

$\therefore a\alpha^2 + 2c\alpha + 2b = 0$ ..... (iii)

এবং $a\alpha^2 + 2b\alpha + 2c = 0$ ..... (iv)

(iii) ও (iv) নং সমীকরণে বজ্রগুণনের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{4c^2 - 4b^2} = \frac{\alpha}{2ab - 2ac} = \frac{1}{2ab - 2ac}$$

২য় ও ৩য় অনুপাত থেকে,

$$\alpha = \frac{2ab - 2ac}{2ab - 2ac} = 1$$

আবার, ১ম ও ২য় অনুপাত থেকে,

$$\alpha = \frac{4c^2 - 4b^2}{2ab - 2ac}$$

$$\therefore 1 = \frac{4c^2 - 4b^2}{2ab - 2ac}$$

$\Rightarrow 4c^2 - 4b^2 = 2ab - 2ac$

$\Rightarrow 4(c + b)(c - b) = -2a(c - b)$

$\Rightarrow (c - b)\{4(c + b) + 2a\} = 0$

হয়, $c - b = 0$

$\Rightarrow b = c$

যা সম্ভব নয় কারণ $b = c$ হলে উভয় মূলই সাধারণ।

অথবা,

$4(c + b) + 2a = 0$

$\Rightarrow 2c + 2b + a = 0$

$\therefore a + 2b + 2c = 0$ **(Showed)**

গ প্রদত্ত সমীকরণ,

$ax^2 + 2cx + 2b = 0$ ...... (i)

এবং $ax^2 + 2bx + 2c = 0$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α_1, β_1 হলে,

$\alpha_1 + \beta_1 = -\frac{2c}{a}$ এবং $\alpha_1\beta_1 = \frac{2b}{a}$

আবার, (ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α_2, β_2 হলে,

$\alpha_2 + \beta_2 = -\frac{2b}{a}$ এবং $\alpha_2\beta_2 = \frac{2c}{a}$

$$\therefore |\alpha_1 - \beta_1| = \sqrt{(\alpha_1 + \beta_1)^2 - 4\alpha_1\beta_1} = \sqrt{\left(\frac{-2c}{a}\right)^2 - 4 \times \frac{2b}{a}} = \sqrt{\frac{4c^2}{a^2} - \frac{8b}{a}} = \sqrt{\frac{4c^2 - 8ab}{a^2}}$$

আবার,

$$|\alpha_2 - \beta_2| = \sqrt{(\alpha_2 + \beta_2)^2 - 4\alpha_2\beta_2} = \sqrt{\left(\frac{-2b}{a}\right)^2 - 4 \times \frac{2c}{a}} = \sqrt{\frac{4b^2}{a^2} - \frac{8c}{a}} = \sqrt{\frac{4b^2 - 8ac}{a^2}}$$

প্রশ্নমতে, $|\alpha_1 - \beta_1| = |\alpha_2 - \beta_2|$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4c^2 - 8ab}{a^2}} = \sqrt{\frac{4b^2 - 8ac}{a^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{4c^2 - 8ab}{a^2} = \frac{4b^2 - 8ac}{a^2} \quad \text{[বর্গ করে]}$$

$\Rightarrow 4c^2 - 8ab = 4b^2 - 8ac$

$\Rightarrow 4b^2 - 4c^2 = -8ab + 8ac$

$\Rightarrow 4(b^2 - c^2) = -8a(b - c)$

$\Rightarrow 4(b - c)(b + c) + 8a(b - c) = 0$

$\Rightarrow (b - c)(4b + 4c + 8a) = 0$

হয়, $b - c = 0$ অথবা, $4b + 4c + 8a = 0$

$\therefore b = c$ $\therefore b + c + 2a = 0$

(Showed)

প্রশ্ন ▶ ৯ দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = ax^2 + bx + c$

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = px^2 + qx + r$

(ক) $4x^2 - kx + 1 = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে k এর মান নির্ণয় কর।** [কু. বো. ২৩]

(খ) $g(x) = 0$ **সমীকরণের মূল দুইটি** α **ও** α^2 **হলে প্রমাণ কর যে,** $p^2r + pr^2 + q^3 = 3pqr$ [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২]

(গ) $f(x) = 0$ **ও** $g(x) = 0$ **সমীকরণদ্বয়ের মূলগুলোর অনুপাত সমান হলে প্রমাণ কর,** $\frac{b^2}{ca} = \frac{q^2}{pr}$ [কু. বো. ২৩]

সমাধান:

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $4x^2 - kx + 1 = 0$

সমীকরণটির নিশ্চায়ক, $D = (-k)^2 - 4 \times 4 \times 1$

$= k^2 - 16$

সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হবে যদি, $D = 0$ হয়।

অর্থাৎ, $k^2 - 16 = 0$

$\Rightarrow k^2 = 16$

$\therefore k = \pm 4$

$\therefore$ নির্ণেয় k এর মান: $-4, 4$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$g(x) = px^2 + qx + r$

আবার, $g(x) = 0$

$\Rightarrow px^2 + qx + r = 0$

এখানে, সমীকরণটির মূলদ্বয় α ও α^2

$\therefore \alpha + \alpha^2 = -\frac{q}{p}$ ..... (i)

এবং $\alpha \times \alpha^2 = \frac{r}{p}$

$\therefore \alpha^3 = \frac{r}{p}$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে ঘন করে পাই,

$$(\alpha + \alpha^2)^3 = \left(-\frac{q}{p}\right)^3$$

$$\Rightarrow \alpha^3 + (\alpha^2)^3 + 3.\alpha.\alpha^2(\alpha + \alpha^2) = -\frac{q^3}{p^3}$$

$$\Rightarrow \alpha^3 + (\alpha^3)^2 + 3\alpha^3(\alpha + \alpha^2) = -\frac{q^3}{p^3}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{p} + \left(\frac{r}{p}\right)^2 + 3.\frac{r}{p}\left(-\frac{q}{p}\right) = -\frac{q^3}{p^3} \quad \text{[(i) ও (ii) ব্যবহার করে]}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{p} + \frac{r^2}{p^2} - \frac{3qr}{p^2} = -\frac{q^3}{p^3}$$

$$\Rightarrow p^2r + r^2p - 3pqr = -q^3 \quad \text{[}p^3\text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\therefore p^2r + pr^2 + q^3 = 3pqr \textbf{ (Proved)}$$

গ দেওয়া আছে,

$f(x) = ax^2 + bx + c$ এবং $f(x) = 0$

$\therefore ax^2 + bx + c = 0$ ...... (i)

আবার, $g(x) = px^2 + qx + r$ এবং $g(x) = 0$

$\therefore px^2 + qx + r = 0$ ...... (ii)

মনে করি, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

আবার, মনে করি, (ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় γ ও δ

$\gamma + \delta = -\frac{q}{p}$ এবং $\gamma\delta = \frac{r}{p}$

শর্তমতে, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

$$\Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\gamma + \delta}{\gamma - \delta} \quad \text{[যোজন-বিয়োজন করে]}$$

$$\Rightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{(\gamma + \delta)^2}{(\gamma - \delta)^2} \quad \text{[বর্গ করে]}$$

$$\Rightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \frac{(\gamma + \delta)^2}{(\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2}{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}} = \frac{\left(-\frac{q}{p}\right)^2}{\left(-\frac{q}{p}\right)^2 - \frac{4r}{p}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \frac{\frac{q^2}{p^2}}{\frac{q^2 - 4rp}{p^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{b^2 - 4ca} = \frac{q^2}{q^2 - 4pr}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 - 4ca}{b^2} = \frac{q^2 - 4pr}{q^2} \quad \text{[ব্যস্তকরণ করে]}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 - 4ca - b^2}{b^2} = \frac{q^2 - 4pr - q^2}{q^2} \quad \text{[বিয়োজন করে]}$$

$$\Rightarrow \frac{-4ca}{b^2} = \frac{-4pr}{q^2}$$

$$\Rightarrow \frac{ca}{b^2} = \frac{pr}{q^2}$$

$$\therefore \frac{b^2}{ca} = \frac{q^2}{pr} \textbf{ (Proved)}$$

প্রশ্ন ▶ ১০ **$2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ একটি বহুপদী সমীকরণ এবং $g(x) = px^2 + qx + r$**

(ক) a এর মান কত হলে $x^2 - 4ax + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হবে? [রা. বো. ২১]

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত ত্রিঘাত সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে $\Sigma\alpha^2\beta$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২]

(গ) যদি $g(x) = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি γ ও δ হয়, তবে $rp(x^2 + 1) - (q^2 - 2rp)x = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি γ, δ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২, ১৭; সি. বো. ২২; ঢা. বো. ২১; রা. বো. ২১, ১৯; দি. বো. ২১; য. বো. ২১]

সমাধানঃ

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 - 4ax + 4 = 0$ ...... (i)

$\therefore$ (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল।

$D = (-4a)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16a^2 - 16$

যেহেতু (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল। তাই পৃথায়ক $D < 0$ হবে।

$\therefore D < 0$

$\Rightarrow 16a^2 - 16 < 0$

$\Rightarrow 16(a^2 - 1) < 0$

$\Rightarrow a^2 - 1 < 0$

$\Rightarrow (a + 1)(a - 1) < 0$ .... (ii)

(ii) নং অসমতা সত্য হবে যদি $a + 1 > 0$ ও $a - 1 < 0$ হয়।

অর্থাৎ, $a > -1$ ও $a < 1$ হয়

$\therefore$ নির্ণেয় মান $-1 < a < 1$ **(Ans.)**

খ এখানে, $2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ ...... (i)

সমীকরণ (i) এর মূলত্রয় α, β, γ

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{4}{2} = 2$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore \Sigma\alpha^2\beta &= \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\beta + \gamma^2\alpha \\ &= \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \alpha\beta\gamma + \beta^2\gamma + \gamma^2\beta + \alpha\beta\gamma + \gamma^2\alpha \\ &\quad + \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma - 3\alpha\beta\gamma \\ &= \alpha\beta(\alpha + \beta + \gamma) + \beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ &\quad + \gamma\alpha(\alpha + \beta + \gamma) - 3\alpha\beta\gamma \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma \\ &= \frac{3}{2} \times 2 - 3 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$\therefore \Sigma\alpha^2\beta = \frac{3}{2}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$g(x) = px^2 + qx + r$

এবং $g(x) = 0$

$\Rightarrow px^2 + qx + r = 0$

সমীকরণটির মূলদ্বয় γ ও δ

$\therefore \gamma + \delta = -\frac{q}{p}$ এবং $\gamma\delta = \frac{r}{p}$

এখানে, $rp(x^2+1) - (q^2 - 2rp)\ x = 0$

$\Rightarrow \frac{r}{p}(x^2+1) + \left(2.\frac{r}{p} - \frac{q^2}{p^2}\right) x = 0$ [p^2 দ্বারা ভাগ করে।]

$\Rightarrow \gamma\delta(x^2+1) + \{2\gamma\delta - (\gamma+\delta)^2\}\ x = 0$

$\Rightarrow \gamma\delta(x^2+1) - \{(\gamma+\delta)^2 - 2\gamma\delta\}\ x = 0$

$\Rightarrow \gamma\delta(x^2+1) - \{(\gamma^2+\delta^2)x\} = 0$

$\Rightarrow \gamma\delta x^2 + \gamma\delta - \gamma^2 x - \delta^2 x = 0$

$\Rightarrow \gamma\delta x^2 - \gamma^2 x - \delta^2 x + \gamma\delta = 0$

$\Rightarrow \gamma x(\delta x - \gamma) - \delta(\delta x - \gamma) = 0$

$\Rightarrow (\delta x - \gamma)(\gamma x - \delta) = 0$

$\therefore$ হয় $\delta x - \gamma = 0$ অথবা, $\gamma x - \delta = 0$

$\Rightarrow \delta x = \gamma$ $\quad\quad \Rightarrow \gamma x = \delta$

$\therefore x = \frac{\gamma}{\delta}$ $\quad\quad \therefore x = \frac{\delta}{\gamma}$

$\therefore$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো।

$\therefore$ নির্ণেয় মূলদ্বয়: $\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\delta}{\gamma}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১১ $f(x) = mx^2 + nx + l$.

(ক) $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $\sum\alpha^2$ এর মান নির্ণয় কর। [ব. বো. ২৩]

(খ) যদি $f(x) = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি p ও q হয়, তবে দেখাও যে, $(mp+n)^{-2} + (mq+n)^{-2} = \frac{n^2 - 2lm}{l^2m^2}$ [ব. বো. ২৩]

(গ) যদি $f(y) = 0$ এবং $f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$ সমীকরণের একটি মূল সাধারণ থাকে, তবে দেখাও যে, $l + m = \pm n$. [ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২২, ১৯; দি. বো. ২২; চা. বো. ১৭]

সমাধান:

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

সমীকরণটির মূলগুলো α, β, γ

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{0}{3} = 0$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{3}$

$\therefore \sum\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

$= (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \times 0$

$= \frac{4}{9}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $\frac{4}{9}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = mx^2 + nx + l$ এবং $f(x) = 0$

$\Rightarrow mx^2 + nx + l = 0$

সমীকরণটির মূলদ্বয় p ও q

$\therefore p + q = -\frac{n}{m}$ এবং $pq = \frac{l}{m}$

$\Rightarrow mp + mq = -n$

$\therefore mp + n = -mq$

আবার, $mq + n = -mp$

এখন, $(mp+n)^{-2} + (mq+n)^{-2}$

$= (-mq)^{-2} + (-mp)^{-2}$

$= \frac{1}{(-mq)^2} + \frac{1}{(-mp)^2}$

$= \frac{1}{m^2q^2} + \frac{1}{m^2p^2}$

$= \frac{1}{m^2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right)$

$= \frac{1}{m^2} \times \frac{p^2+q^2}{p^2q^2}$

$= \frac{1}{m^2} \times \frac{(p+q)^2 - 2pq}{(pq)^2}$

$= \frac{1}{m^2} \times \frac{\left(-\frac{n}{m}\right)^2 - \frac{2l}{m}}{\frac{l^2}{m^2}}$

$= \frac{1}{m^2} \times \frac{\frac{n^2 - 2lm}{m^2}}{\frac{l^2}{m^2}}$

$= \frac{1}{m^2} \times \frac{n^2 - 2lm}{l^2}$

$= \frac{n^2 - 2lm}{l^2m^2}$

$\therefore (mp+n)^{-2} + (mq+n)^{-2} = \frac{n^2 - 2lm}{l^2m^2}$ **(Showed)**

গ দেওয়া আছে,

$f(x) = mx^2 + nx + l$

$\therefore f(y) = my^2 + ny + l$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = m\left(\frac{1}{y}\right)^2 + n\left(\frac{1}{y}\right) + l$

আবার, $f(y) = 0$

$\therefore my^2 + ny + l = 0$

এবং $f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$

$\Rightarrow m\left(\frac{1}{y}\right)^2 + n\left(\frac{1}{y}\right) + l = 0$

$\Rightarrow \frac{m}{y^2} + \frac{n}{y} + l = 0$

$\Rightarrow m + ny + y^2 l = 0$

$\therefore ly^2 + ny + m = 0$

মনে করি, সাধারণ মূলটি α যা উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

$\therefore m\alpha^2 + n\alpha + l = 0$ .....(i)

এবং $l\alpha^2 + n\alpha + m = 0$ ......(ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ হতে বজ্রগুণন সূত্রানুসারে,

$$\frac{\alpha^2}{mn - ln} = \frac{\alpha}{l^2 - m^2} = \frac{1}{mn - ln}$$

২য় ও ৩য় অনুপাত থেকে,

$$\alpha = \frac{l^2 - m^2}{mn - ln} = \frac{(l+m)(l-m)}{-n(l-m)} = \frac{-(l+m)}{n}$$

১ম ও ২য় অনুপাত থেকে,

$$\alpha = \frac{mn - ln}{l^2 - m^2} = \frac{-n(l-m)}{(l+m)(l-m)} = \frac{-n}{l+m}$$

α এর মানদ্বয় হতে, $\frac{-(l+m)}{n} = \frac{-n}{l+m}$

$\Rightarrow (l+m)^2 = n^2$

$\therefore l + m = \pm n$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▶ ১২ দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} - \frac{1}{m}$.

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = x^2 + \frac{q}{p}x + \frac{r}{p}$.

(ক) $x^2 - 4x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর। [সি. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অন্তর n হলে প্রমাণ কর যে, $l = 2m \pm \sqrt{4m^2 + n^2}$ [দি. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ $g(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে, দেখাও যে, $\frac{p}{r} = \left(\frac{p-q}{r-q}\right)^3$ এবং $3q - p - r = \frac{q^3}{pr}$

[দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো ২১]

সমাধান:

ক $x^2 - 4x + 4 = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক,

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$$

যেহেতু সমীকরণটির নিশ্চায়ক = 0

$\therefore$ সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, সমান এবং মূলদ। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} - \frac{1}{m}$

আবার, $f(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} - \frac{1}{m} = 0$

$\Rightarrow \frac{m(l-x) + mx - x(l-x)}{mx(l-x)} = 0$

$\Rightarrow \frac{ml - mx + mx - lx + x^2}{mx(l-x)} = 0$

$\Rightarrow x^2 - lx + lm = 0$ ...... (i)

মনে করি, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয়, α ও β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{-l}{1} = l$

$\alpha\beta = \frac{lm}{1} = lm$

শর্তমতে, $|\alpha - \beta| = n$

$\Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = n^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = n^2$

$\Rightarrow l^2 - 4lm - n^2 = 0$

$$\therefore l = \frac{-(-4m) \pm \sqrt{(-4m)^2 - 4 \times 1(-n^2)}}{2 \times 1} = \frac{4m \pm \sqrt{16m^2 + 4n^2}}{2} = \frac{4m \pm \sqrt{4(4m^2 + n^2)}}{2} = \frac{4m \pm 2\sqrt{4m^2 + n^2}}{2} = 2m \pm \sqrt{4m^2 + n^2}$$

$\therefore l = 2m \pm \sqrt{4m^2 + n^2}$ **(Proved)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = x^2 + \frac{q}{p}x + \frac{r}{p}$

এবং $g(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{q}{p}x + \frac{r}{p} = 0$

$\Rightarrow \frac{px^2 + qx + r}{p} = 0$

$\Rightarrow px^2 + qx + r = 0$ ...... (i)

মনেকরি, (i) নং সমীকরণের একটি মূল α

$\therefore$ অপর মূলটি α^2

$\therefore \alpha + \alpha^2 = -\frac{q}{p}$ ..... (ii)

এবং $\alpha \times \alpha^2 = \frac{r}{p}$

$\therefore \alpha^3 = \frac{r}{p}$ ...... (iii)

এখন, (ii) + (iii) $\Rightarrow$

$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = -\frac{q}{p} + \frac{r}{p}$

$\Rightarrow \alpha(1 + \alpha + \alpha^2) = \frac{r-q}{p}$

$\Rightarrow \alpha\left(1 - \frac{q}{p}\right) = \frac{r-q}{p}$ [ii নং হতে]

$\therefore \alpha = \frac{r-q}{p-q}$

এখন α এর মান (iii) এ বসাই,

$\frac{(r-q)^3}{(p-q)^3} = \frac{r}{p}$

$\therefore \frac{p}{r} = \left(\frac{p-q}{r-q}\right)^3$

আবার, (ii) নং সমীকরণকে ঘন করে পাই,

$$(\alpha+\alpha^2)^3 = \left(-\frac{q}{p}\right)^3$$

$$\Rightarrow \alpha^3 + (\alpha^2)^3 + 3.\alpha.\alpha^2(\alpha+\alpha^2) = -\frac{q^3}{p^3}$$

$$\Rightarrow \alpha^3 + (\alpha^3)^2 + 3\alpha^3(\alpha+\alpha^2) = -\frac{q^3}{p^3}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{p} + \frac{r^2}{p^2} + \frac{3r}{p}\left(-\frac{q}{p}\right) = -\frac{q^3}{p^3}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{p} + \frac{r^2}{p^2} - \frac{3rq}{p^2} = -\frac{q^3}{p^3}$$

$$\Rightarrow \frac{rp + r^2 - 3rq}{p^2} = -\frac{q^3}{p^3}$$

$$\Rightarrow -r(3q-p-r) = -\frac{q^3}{p}$$

$$\therefore 3q-p-r = \frac{q^3}{pr}$$

$\therefore \frac{p}{r} = \left(\frac{p-q}{r-q}\right)^3$ এবং $3q-p-r = \frac{q^3}{pr}$ (Showed)

প্রশ্ন ▸ ১৩ দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 13x + 30$

(ক) $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় a, b, c হলে $\sum\frac{1}{a^2b}$ এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ $g(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল $1-2i$ হলে সমীকরণটি সমধান কর। [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

এখানে, $b^2 - 4ac$ কে পৃথায়ক বলা হয় এবং একে D দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(i) $D \equiv b^2 - 4ac = 0$ হলে মূলদ্বয় পরস্পর সমান, বাস্তব ও মূলদ হবে।

(ii) $D \equiv b^2 - 4ac > 0$ হলে এবং পূর্ণবর্গ না হলে মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান এবং অমূলদ হবে।

(iii) $D \equiv b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ হলে মূলদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও অসমান হবে।

(iv) $D \equiv b^2 - 4ac < 0$ হলে মূলদ্বয় জটিল এবং অসমান হবে।

(Ans.)

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$

এবং $f(x) = 0$

$$\Rightarrow 3x^3 - 2x^2 + x - 4 = 0$$

সমীকরণটির মূলত্রয় a, b, c

$$\therefore a+b+c = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$ab+bc+ca = \frac{1}{3}$$

$$abc = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\sum\frac{1}{a^2b} = \frac{1}{a^2b}+\frac{1}{a^2c}+\frac{1}{b^2c}+\frac{1}{b^2a}+\frac{1}{c^2a}+\frac{1}{c^2b}$$

$$= \frac{bc^2+b^2c+ca^2+c^2a+ab^2+a^2b}{a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{(a^2b+ca^2+abc)+(b^2c+ab^2+abc)+(bc^2+ac^2+abc) - 3abc}{a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{a(ab+bc+ca)+b(ab+bc+ca)+c(ab+bc+ca) - 3abc}{a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc}{(abc)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} - 3\times\frac{4}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{9}-4}{\frac{16}{9}} = \frac{-34}{9}\times\frac{9}{16} = -\frac{17}{8}$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $-\frac{17}{8}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 13x + 30$

এবং $g(x) = 0$

$$\Rightarrow x^4 + 3x^3 + x^2 + 13x + 30 = 0 \ ...(i)$$

(i) নং সমীকরণের একটি মূল $1-2i$

আমরা জানি, জটিল মূলগুলি যুগলরূপে থাকে।

সুতরাং সমীকরণটির অপর একটি মূল $1+2i$

$(1+2i)$ ও $(1-2i)$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ,

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

$$\Rightarrow x^2 - (1+2i+1-2i)x + (1+2i)(1-2i) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 4i^2 = 0$$

$$\therefore x^2 - 2x + 5 = 0$$

এখানে, $x^2 - 2x + 5$ রাশিটি (i) নং এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^4 + 3x^3 + x^2 + 13x + 30 = 0$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 5x^3 - 10x^2 + 25x + 6x^2 - 12x + 30 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x^2-2x+5) + 5x(x^2-2x+5) + 6(x^2-2x+5) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-2x+5)(x^2+5x+6) = 0$$

$\therefore$ হয় $x^2 - 2x + 5 = 0$ অথবা, $x^2 + 5x + 6 = 0$

$\therefore x = 1+2i, 1-2i$ $\quad \Rightarrow (x+3)(x+2) = 0$

$\therefore x = -3, -2$

$\therefore$ সমীকরণটির নির্ণেয় সমাধান: $x = -3, -2, 1+2i, 1-2i$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ১৪ দৃশ্যকল্প-১: $3x^2 + 4x + 7 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β।

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = x^3 - px^2 + qx - r$

(ক) λ এর কোন মানের জন্য $(\lambda+1)x^2 + 2(\lambda+2)x + (\lambda-3) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে? [ম বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২; ঢা. বো. ২১; য. বো. ২১, ১৯; ম. বো. ২১; রা. বো. ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে α^{-2} ও β^{-2} মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৭]

(গ) $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে, $\sum\frac{1}{\alpha^3}$ এর মান নির্ণয় কর। [ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $(\lambda+1)x^2+2(\lambda+2)x+(\lambda-3)=0$

সমীকরণটির নিশ্চায়ক,

$$D=\{2(\lambda+2)\}^2-4(\lambda+1)(\lambda-3)$$
$$=4(\lambda+2)^2-4(\lambda^2-3\lambda+\lambda-3)$$
$$=4(\lambda^2+4\lambda+4-\lambda^2+2\lambda+3)$$
$$=4(6\lambda+7)$$

সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে যদি নিশ্চায়ক $D=0$ হয়

অর্থাৎ, $4(6\lambda+7)=0$

$$\Rightarrow 6\lambda+7=0$$
$$\Rightarrow 6\lambda=-7$$
$$\therefore \lambda=-\frac{7}{6}\ \textbf{(Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $3x^2+4x+7=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$\alpha+\beta=\frac{-4}{3}$ এবং $\alpha\beta=\frac{7}{3}$

এখন, $\alpha^{-2}+\beta^{-2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$
$$=\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^2-2\times\frac{7}{3}}{\left(\frac{7}{3}\right)^2}=\frac{\frac{16}{9}-\frac{14}{3}}{\frac{49}{9}}$$
$$=\frac{\frac{16-42}{9}}{\frac{49}{9}}=-\frac{26}{9}\times\frac{9}{49}$$
$$=-\frac{26}{49}$$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha^{-2}\times\beta^{-2}=\frac{1}{\alpha^2.\beta^2}$

$$=\frac{1}{(\alpha\beta)^2}=\frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{49}{9}}=\frac{9}{49}$$

নির্ণেয় সমীকরণ, x^2- (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x+$ মূলদ্বয়ের গুণফল $=0$

$$\Rightarrow x^2-\left(-\frac{26}{49}\right)x+\frac{9}{49}=0$$
$$\therefore 49x^2+26x+9=0\ \textbf{(Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $f(x)=x^3-px^2+qx-r$ এবং $f(x)=0$

$$\Rightarrow x^3-px^2+qx-r=0$$

সমীকরণটির মূলত্রয় α, β, γ

$$\therefore \alpha+\beta+\gamma=-\frac{-p}{1}=p$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{q}{1}=q$$
$$\alpha\beta\gamma=-\frac{-r}{1}=r$$

$$\therefore \sum\frac{1}{\alpha^3}=\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}$$
$$=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+\left(\frac{1}{\beta}\right)^3+\left(\frac{1}{\gamma}\right)^3-\frac{3}{\alpha\beta\gamma}+\frac{3}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1}{\beta\gamma}-\frac{1}{\gamma\alpha}\right)+\frac{3}{\alpha\beta\gamma}$$

$[\because a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)]$

$$=\left(\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}\right)\left\{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)^2-2\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)-\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)\right\}+\frac{3}{\alpha\beta\gamma}$$

$[\because a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)]$

$$=\left(\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\right)\left\{\left(\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\right)^2-3\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)\right\}+\frac{3}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\left(\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\right)\left\{\left(\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\right)^2-3\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right)\right\}+\frac{3}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\frac{q}{r}\left\{\left(\frac{q}{r}\right)^2-3\left(\frac{p}{r}\right)\right\}+\frac{3}{r}$$
$$=\frac{q}{r}\left(\frac{q^2}{r^2}-\frac{3p}{r}\right)+\frac{3}{r}=\frac{q^3}{r^3}-\frac{3pq}{r^2}+\frac{3}{r}$$
$$=\frac{q^3-3pqr+3r^2}{r^3}$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $\frac{q^3-3pqr+3r^2}{r^3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৫ দৃশ্যকল্প-১: $(m^2+n^2)x^2+2(mp+nq)x+p^2+q^2=0$

দৃশ্যকল্প-২: $M(y)=8y^3-42y^2+63y-27$

(ক) $x-\frac{1}{x}=k$ সমীকরণটির একটি মূল $\sqrt{5}-2$ হলে k এর মান নির্ণয় কর। [ম. বো. ২১]

(খ) দেখাও যে, দৃশ্যকল্প-১ এর সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হলে তারা সমান হবে এবং মূলগুলো নির্ণয় কর। [চ. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে, $M(x)=0$ সমীকরণটির মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমনভুক্ত হলে সমীকরণটি সমাধান কর। [য. বো. ২২]

সমাধান:

ক প্রদত্ত সমীকরণ,

$$x-\frac{1}{x}=k$$
$$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x}=k$$
$$\Rightarrow x^2-kx-1=0\ \text{.........}\ (i)$$

$\because$ (i) নং সমীকরণের একটি মূল $\sqrt{5}-2$

সুতরাং, অপর মূলটি $-\sqrt{5}-2$ [∵ অমূলদ মূল অনুবন্ধী আকারে হয়]

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল,

$$\sqrt{5}-2-\sqrt{5}-2=(-)\frac{-k}{1}$$
$$\Rightarrow -4=k$$
$$\Rightarrow k=-4$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $k=-4$ **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ এ,

$(m^2+n^2)x^2+2(mp+nq)x+p^2+q^2=0$....(i)

সমীকরণ (i) এর নিশ্চায়ক D হলে,

$D=\{2(mp+nq)\}^2-4.(m^2+n^2).(p^2+q^2)$
$=4(m^2p^2+2mpqn+n^2q^2)-4(m^2p^2+m^2q^2+n^2p^2+n^2q^2)$
$=4\{m^2p^2+n^2q^2+2mnpq-m^2p^2-m^2q^2-n^2p^2-n^2q^2\}$
$=4\{-m^2q^2+2mnpq-n^2p^2\}$
$=-4\{(mq)^2-2mq.np+(np)^2\}$
$=-4(mq-np)^2$

এখন, $-4(mq-np)^2$ বাস্তব হবে যদি ও কেবল যদি $mq-np=0$ হয়। $mq-np=0$ হলে, $D=-4.(0)^2=0$ অর্থাৎ মূলদ্বয় সমান হবে।

ধরি, সমান মূলদ্বয় α

$\therefore \alpha+\alpha=-\dfrac{2(mp+nq)}{m^2+n^2}$

$\Rightarrow \alpha=\dfrac{-(mp+nq)}{m^2+n^2}$ **(Ans.)**

গ এখানে, $M(y)=8y^3-42y^2+63y-27$

$\therefore M(x)=8x^3-42x^2+63x-27$

এখন, $M(x)=0$

$\Rightarrow 8x^3-42x^2+63x-27=0$ ...... (i)

ধরি, সমীকরণ (i) এর মূলদ্বয় $\frac{\alpha}{r}$, α, αr

$\therefore \frac{\alpha}{r}.\alpha.\alpha r=-\frac{-27}{8}$

$\Rightarrow \alpha^3=\frac{27}{8}$

$\therefore \alpha=\frac{3}{2}$

আবার, $\frac{\alpha}{r}+\alpha+\alpha r=-\frac{-42}{8}=\frac{21}{4}$

$\Rightarrow \alpha\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=\frac{21}{4}$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\left(\frac{1+r+r^2}{r}\right)=\frac{21}{4}$

$\Rightarrow \frac{1+r+r^2}{r}=\frac{7}{2}$

$\Rightarrow 2r^2-5r+2=0$

$\Rightarrow 2r^2-4r-r+2=0$

$\Rightarrow 2r(r-2)-1(r-2)=0$

$\Rightarrow (2r-1)(r-2)=0$

হয়, $2r-1=0$ অথবা, $r-2=0$

$\Rightarrow r=\frac{1}{2}$ $\quad\Rightarrow r=2$

এখন, $r=\frac{1}{2}$ হলে

$\frac{\alpha}{r}=\frac{3\times 2}{2}=3$

$\alpha r=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

আবার, $r=2$ হলে,

$\frac{\alpha}{r}=\frac{3}{2\times 2}=\frac{3}{4}$; $\alpha r=\frac{3}{2}\times 2=3$

$\therefore$ মূলত্রয় $\frac{3}{4},\frac{3}{2}, 3$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৬ উদ্দীপক-১: $x^2-2x+b=0$ এবং $x^2-bx+2=0$ দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

উদ্দীপক-২: $f(x)=x^2-4x+5$, $g(x)=x+1$

(ক) দেখাও যে, $2x^2+6x-8=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ হবে। [রা. বো. ২২]

(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত সমীকরণ দুইটির মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুব রাশি হলে প্রমাণ কর যে, $b^2+4b-12=0$ [কু. বো. ২২]

(গ) $f(x).g(x)=0$ সমীকরণের মূলত্রয় p, q, r হলে, Σp^3q নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২১]

সমাধান:

ক আমরা জানি, কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের নিশ্চায়ক ধনাত্মক ও পূর্ণবর্গ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও অসমান হবে।

$2x^2+6x-8=0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক, $=b^2-4ac$
$=6^2-4.2.(-8)$
$=100=10^2$

এখানে, নিশ্চায়ক ধনাত্মক পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

$\therefore$ সমীকরণটির মূলদ্বয় মূলদ। **(Showed)**

খ উদ্দীপক-১ এ

$x^2-2x+b=0$ .....(i)

$x^2-bx+2=0$......(ii)

ধরি, সমীকরণ (i) এর মূলদ্বয় α, β এবং সমীকরণ (ii) এর মূলদ্বয় γ, δ।

শর্তানুসারে, $|\alpha-\beta|=|\gamma-\delta|=$ ধ্রুবক

$\therefore |\alpha-\beta|=|\gamma-\delta|$

$\Rightarrow (\alpha-\beta)^2=(\gamma-\delta)^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta$ ..... (iii)

$[\because (a-b)^2=(a+b)^2-4ab]$

সমীকরণ (i) হতে, $\alpha+\beta=-\frac{-2}{1}=2$, $\alpha\beta=\frac{b}{1}=b$

সমীকরণ (ii) হতে, $\gamma+\delta=-\frac{-b}{1}=b$, $\gamma\delta=\frac{2}{1}=2$

$\therefore$ (iii) হতে পাই,

$(2)^2-4.b=(b)^2-4.2$

$\Rightarrow 4-4b=b^2-8$

$\therefore b^2+4b-12=0$ **(Proved)**

গ দেওয়া আছে, $f(x)=x^2-4x+5$

$g(x)=x+1$

এখন, $f(x).g(x)=0$

$\Rightarrow (x^2-4x+5)(x+1)=0$

$\Rightarrow x^3+x^2-4x^2-4x+5x+5=0$

$\Rightarrow x^3-3x^2+x+5=0$.....(i)

ধরি, (i) নং এর মূলত্রয় p, q, r

$\therefore p+q+r=3$

$pq+qr+rp=1$

$pqr=-5$

$\Sigma p^3q=p^3q+p^3r+q^3r+q^3p+r^3p+r^3q$
$=pq(p^2+q^2+r^2)+qr(p^2+q^2+r^2)+rp(p^2+q^2+r^2)-pqr^2-p^2qr-pq^2r$
$=(p^2+q^2+r^2)(pq+qr+rp)-pqr(p+q+r)$
$=\{(p+q+r)^2-2(pq+qr+rp)\}.1-(-5).3$
$=(3^2-2.1)+15=22$

$\therefore$ নির্ণেয় $\Sigma p^3q=22$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ $f_1(x) = 4x^2 - 7x + 3$

$f_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

(ক) m এর মান কত হলে $(m^2 - 3)x^2 + 3mx + 3m + 1 = 0$ সমীকরণের মূল দুটি পরস্পর গৌণিক বিপরীত হবে? [ঢা. বো. ২১]

(খ) $f_2(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে a এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $\alpha = 9, \beta = 2$ এবং $\gamma = -\frac{1}{3}(a + 2)$ [রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২]

(গ) $f_1(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় p, q হলে $\frac{1}{p^3}$ ও $\frac{1}{q^3}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২]

সমাধান:

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $(m^2 - 3)x^2 + 3mx + 3m + 1 = 0$ .... (i)

মনে করি, (i) নং সমীকরণের একটি মূল α

$\therefore$ অপর মূলটি $\frac{1}{\alpha}$ [$\because$ মূলদ্বয় পরস্পর গৌণিক বিপরীতক]

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল,

$\alpha.\frac{1}{\alpha} = \frac{3m+1}{m^2-3}$

$\Rightarrow 1 = \frac{3m+1}{m^2-3}$

$\Rightarrow m^2 - 3 = 3m + 1$

$\Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0$

$\Rightarrow m^2 - 4m + m - 4 = 0$

$\Rightarrow m(m-4) + 1(m-4) = 0$

$\Rightarrow (m-4)(m+1) = 0$

হয়, $m - 4 = 0$ অথবা, $m + 1 = 0$

$\therefore m = 4$ $\Rightarrow m = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $m = 4, -1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f_2(x) = 0$

$\Rightarrow \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

$\Rightarrow 9x^2 + 2x - \frac{1}{3}(a+2) = 0$ $\left[\because \alpha = 9, \beta = 2, \gamma = \frac{-1}{3}(a+2)\right]$

$\Rightarrow 27x^2 + 6x - (a+2) = 0$ এর একটি মূল অপরটির বর্গের সমান।

$\therefore$ ধরি, মূলদ্বয় m, m^2

$\therefore m + m^2 = \frac{-6}{27} = \frac{-2}{9}$

$\Rightarrow 9m^2 + 9m + 2 = 0$

$\Rightarrow 9m^2 + 6m + 3m + 2 = 0$

$\Rightarrow (3m+2)(3m+1) = 0$

$\therefore m = \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}$

এবং $m.m^2 = \frac{-(a+2)}{27}$

$\Rightarrow m^3 = \frac{-(a+2)}{27}$ .....(i)

$m = \frac{-2}{3}$ হলে, (i) নং হতে পাই, $\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{-(a+2)}{27}$

$\Rightarrow \frac{-8}{27} = \frac{-(a+2)}{27}$

$\Rightarrow a + 2 = 8$

$\therefore a = 6$

$m = \frac{-1}{3}$ হলে, (i) নং হতে পাই, $\left(\frac{-1}{3}\right)^3 = \frac{-(a+2)}{27}$

$\Rightarrow \frac{-1}{27} = \frac{-(a+2)}{27}$

$\Rightarrow a + 2 = 1$

$\therefore a = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $a = -1, 6$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f_1(x) = 4x^2 - 7x + 3$

এবং $f_1(x) = 0$

$\Rightarrow 4x^2 - 7x + 3 = 0$ এর মূলদ্বয় p ও q হলে,

$p + q = -\left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4}$ এবং $pq = \frac{3}{4}$

এখন, $\frac{1}{p^3}, \frac{1}{q^3}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

$\therefore \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} = \frac{p^3 + q^3}{p^3q^3} = \frac{(p+q)^3 - 3pq(p+q)}{(pq)^3}$

$= \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^3 - 3.\frac{3}{4}.\frac{7}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{91}{27}$

এবং $\frac{1}{p^3} \cdot \frac{1}{q^3} = \left(\frac{1}{pq}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$

$\therefore \frac{1}{p^3}$ ও $\frac{1}{q^3}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ:

$x^2 - \left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3}\right)x + \frac{1}{p^3} \cdot \frac{1}{q^3} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{91}{27}x + \frac{64}{27} = 0$

$\therefore 27x^2 - 91x + 64 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ $f(x) = ax^2 + bx + c$ এবং $g(x) = x^2 - px + q$

(ক) $3x^2 - mx + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপর মূলটির তিনগুণ হলে, m এর মান নির্ণয় কর। [য. বো. ২২]

(খ) $f(x) = 0$ সমীকরণের মূল দুটির অনুপাত r হলে, দেখাও যে, $\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$ [য. বো. ২২]

(গ) $g(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়, α, β হলে, $\frac{q}{p-\alpha}$ এবং $\frac{q}{p-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২২]

সমাধানঃ

ক এখানে, $3x^2 - mx + 4 = 0$ ...... (i)
ধরি, সমীকরণ (i) এর মূলদ্বয় α এবং 3α

$\therefore \alpha + 3\alpha = -\frac{-m}{3}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{m}{12}$ ...... (ii)

আবার, $\alpha.3\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow 3\alpha^2 = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow 3 \times \left(\frac{m}{12}\right)^2 = \frac{4}{3}$ [α এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow m^2 = \frac{4 \times 144}{3 \times 3} = 64$

$\therefore m = \pm 8$ **(Ans.)**

খ এখানে, $f(x) = ax^2 + bx + c$ এবং $f(x) = 0$
অর্থাৎ, $ax^2 + bx + c = 0$ .....(i)
ধরি, সমীকরণ (i) এর মূলদ্বয় α ও $r\alpha$

শর্তমতে, $\alpha + r\alpha = \frac{-b}{a} \Rightarrow \alpha(r+1) = -\frac{b}{a}$

$\Rightarrow \alpha^2(r+1)^2 = \frac{b^2}{a^2}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{b^2}{a^2(r+1)^2}$ .... (i)

আবার, $\alpha.r\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow r\alpha^2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow r.\frac{b^2}{a^2(r+1)^2} = \frac{c}{a}$ [(i) হতে α^2 এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow \frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{a}{c}$

$\therefore \frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$ **(Showed)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = x^2 - px + q$
এবং $g(x) = 0$ অর্থাৎ $x^2 - px + q = 0$ ...... (i)
সমীকরণ (i) এর মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \beta = -\frac{-p}{1} = p$

এবং $\alpha\beta = \frac{q}{1} = q$

এখন, $\frac{q}{p-\alpha}$ এবং $\frac{q}{p-\beta}$ মূলদ্বয়বিশিষ্ট সমীকরণ,

$$x^2 - \left(\frac{q}{p-\alpha} + \frac{q}{p-\beta}\right)x + \frac{q}{p-\alpha} \cdot \frac{q}{p-\beta} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - q\left(\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{p-\beta}\right)x + \frac{q^2}{(p-\alpha)(p-\beta)} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - q \cdot \frac{p-\alpha+p-\beta}{(p-\alpha)(p-\beta)}x + \frac{q^2}{p^2-(\alpha+\beta)p+\alpha\beta} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - q \cdot \frac{2p-(\alpha+\beta)}{p^2-(\alpha+\beta)p+\alpha\beta}x + \frac{q^2}{p^2-p.p+q} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - q \cdot \frac{2p-p}{p^2-p^2+q}x + \frac{q^2}{p^2-p^2+q} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{pq}{q}x + \frac{q^2}{q} = 0$$

$\therefore x^2 - px + q = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ উদ্দীপক-১: $ax^3 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ।
উদ্দীপক-২: $mx^2 + nx + p = 0$ .... (i)
$px^2 - 4nx + 16m = 0$ .... (ii)

(ক) $3x^2 + 2x + 2 = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ এর মান বের কর। [ব. বো. ২২]

(খ) উদ্দীপক-১ এর সাহায্যে $\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}$ ও $\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২২]

(গ) উদ্দীপক-২ এর (i) এর সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে (ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয়কে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।
[চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২; চ. বো. ১৭]

সমাধানঃ

ক দেওয়া আছে, $3x^2 + 2x + 2 = 0$ .... (i)
(i) নং এর মূলদ্বয় α, β হলে,

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{2}{3}$

এবং $\alpha\beta = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} = \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{2}{3}} = -1$ **(Ans.)**

খ উদ্দীপক-১ হতে পাই,
$ax^3 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = -\frac{0}{a} = 0$

সুতরাং $\alpha + \beta = -\gamma, \beta + \gamma = -\alpha$ এবং $\gamma + \alpha = -\beta$

$\therefore \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{b}{a}$

$\therefore \alpha\beta\gamma = -\frac{c}{a}$

$\therefore \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}$ ও $\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$$x^3 - \left(\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}\right)x^2$$
$$+ \left(\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} + \frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}\cdot\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}\right)x - \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}\cdot\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - \left(\frac{\gamma^2}{-\gamma} + \frac{\alpha^2}{-\alpha} + \frac{\beta^2}{-\beta}\right)x^2 +$$
$$\left\{\frac{\gamma^2\alpha^2}{(-\gamma)(-\alpha)} + \frac{\alpha^2.\beta^2}{(-\alpha)(-\beta)} + \frac{\gamma^2.\beta^2}{(-\gamma)(-\beta)}\right\}x - \left(\frac{\gamma^2}{-\gamma}\cdot\frac{\alpha^2}{-\alpha}\cdot\frac{\beta^2}{-\beta}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + (\gamma+\alpha+\beta)x^2 + (\gamma\alpha+\alpha\beta+\beta\gamma)x + \gamma\alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + 0.x^2 + \frac{b}{a}.x - \frac{c}{a} = 0$$

$\therefore ax^3 + bx - c = 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $mx^2 + nx + p = 0$ .....(i)

$px^2 - 4nx + 16m = 0$ .....(ii)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে,

$\alpha + \beta = -\frac{n}{m}$ এবং $\alpha\beta = \frac{p}{m}$

এখন, সমীকরণ(ii) কে m দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{p}{m}x^2 - \frac{4n}{m}x + 16 = 0$

$\Rightarrow \frac{p}{m}x^2 + 4\left(-\frac{n}{m}\right)x + 16 = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 + 4(\alpha + \beta)x + 16 = 0$ $\left[\frac{p}{m}\right.$ এবং $-\frac{n}{m}$ এর মান বসিয়ে$\left.\right]$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 + 4\alpha x + 4\beta x + 16 = 0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x + 4) + 4(\beta x + 4) = 0$

$\Rightarrow (\beta x + 4)(\alpha x + 4) = 0$

হয়, $\beta x + 4 = 0$	অথবা, $\alpha x + 4 = 0$
$\Rightarrow \beta x = -4$	$\Rightarrow \alpha x = -4$
$\therefore x = -\frac{4}{\beta}$	$\therefore x = -\frac{4}{\alpha}$

অর্থাৎ সমীকরণ (ii) এর মূলদ্বয় $-\frac{4}{\alpha}, -\frac{4}{\beta}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২০ দৃশ্যকল্প-১: $(p + 1)x^2 + 2(p + 3)x + 2p + 3 = 0$ একটি রাশি।

দৃশ্যকল্প-২: $ax^2 + 2bx + c = 0$ এর একটি মূল $cx^2 + 2bx + a = 0$ সমীকরণের একটি মূলের তিনগুণ।

(ক) $2x^3 - 9x^2 + 9x + 2 \equiv (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ হলে a, b, c এর মান নির্ণয় কর যেখানে a, b এবং c ধ্রুবক। [দি. বো. ২২]

(খ) p এর মান কত হলে ১ম দৃশ্যকল্পে উল্লিখিত রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে? [দি. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সাহায্যে দেখাও যে, $c = 3a$ অথবা $12b^2 = (c + 3a)^2$ [ব. বো. ২২]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $2x^3 - 9x^2 + 9x + 2 \equiv (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

$\Rightarrow 2x^3 - 9x^2 + 9x + 2 \equiv ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$

$\Rightarrow 2x^3 - 9x^2 + 9x + 2 \equiv ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$

সমীকরণটির উভয়পক্ষ হতে x^3, x^2, x এর সহগ ও ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$2 = a$	$-9 = b - 2a$	$9 = c - 2b$
$\Rightarrow a = 2$	$\Rightarrow -9 = b - 2 \times 2$	$\Rightarrow 9 = c - 2(-5)$
	$\therefore b = -5$	$\Rightarrow c = -1$

$\therefore$ a, b, c এর মান 2, – 5, – 1 **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই,

$(p + 1)x^2 + 2(p + 3)x + 2p + 3 = 0$ .... (i)

এখানে, রাশিটি হলো: $(p + 1)x^2 + 2(p + 3)x + 2p + 3$

রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে যদি (i) নং সমীকরণটির নিশ্চায়ক শূন্য হয়।

$\therefore$ নিশ্চায়ক $= \{2(p + 3)\}^2 - 4.(p + 1).(2p + 3)$

$= 4(p^2 + 9 + 6p) - 4(2p^2 + 3p + 2p + 3)$

$= 4p^2 + 36 + 24p - 8p^2 - 12p - 8p - 12$

$= -4p^2 + 4p + 24$

শর্তমতে, $-4p^2 + 4p + 24 = 0$

$\Rightarrow p^2 - p - 6 = 0$

$\Rightarrow p^2 - 3p + 2p - 6 = 0$

$\Rightarrow (p - 3)(p + 2) = 0$

$\therefore p - 3 = 0$ অথবা, $p + 2 = 0$

$\Rightarrow p = 3$ $\Rightarrow p = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $p = -2, 3$ **(Ans.)**

গ উদ্দীপক-২ হতে পাই, $ax^2 + 2bx + c = 0$ ..... (i)

$cx^2 + 2bx + a = 0$ ..... (ii)

ধরি, (ii) নং এর একটি মূল α

$\therefore$ (i) নং এর একটি মূল 3α

অর্থাৎ, $a.(3\alpha)^2 + 2b(3\alpha) + c = 0$

$\Rightarrow 9a\alpha^2 + 6b\alpha + c = 0$..... (iii)

এবং $c\alpha^2 + 2b\alpha + a = 0$ ..... (iv)

সমীকরণ (iii) ও (iv) হতে বজ্রগুণের নিয়মে পাই,

$\frac{\alpha^2}{6ab - 2bc} = \frac{\alpha}{c^2 - 9a^2} = \frac{1}{18ab - 6bc}$

$\therefore \frac{\alpha^2}{6ab - 2bc} = \frac{\alpha}{c^2 - 9a^2}$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{6ab - 2bc} = \frac{1}{c^2 - 9a^2}$

$\therefore \alpha = \frac{6ab - 2bc}{c^2 - 9a^2}$

আবার, $\frac{\alpha}{c^2 - 9a^2} = \frac{1}{18ab - 6bc}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{c^2 - 9a^2}{18ab - 6bc}$

$\therefore \frac{6ab - 2bc}{c^2 - 9a^2} = \frac{c^2 - 9a^2}{18ab - 6bc}$

$\Rightarrow (c^2 - 9a^2)^2 = (6ab - 2bc)(18ab - 6bc)$

$\Rightarrow \{(c + 3a)(c - 3a)\}^2 = 2b(3a - c) \times 6b(3a - c)$

$\Rightarrow (3a + c)^2(3a - c)^2 = 12b^2(3a - c)^2$

$\Rightarrow (3a - c)^2\{(3a + c)^2 - 12b^2\} = 0$

হয়, $(3a - c)^2 = 0$	অথবা, $(3a + c)^2 - 12b^2 = 0$
$\Rightarrow 3a = c$	$\Rightarrow (3a + c)^2 = 12b^2$
$\therefore c = 3a$	$\therefore 12b^2 = (c + 3a)^2$

অর্থাৎ, $c = 3a$ অথবা $12b^2 = (c + 3a)^2$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▶ ২১ দৃশ্যকল্প-১: $x^2 - px + pq = 0$

দৃশ্যকল্প-২: $x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 33x + 14 = 0$

(ক) a, b মূলদ হলে, দেখাও যে, $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সর্বদা মূলদ হবে। [দি. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সমীকরণটির মূলদ্বয়ের অন্তর r হলে p কে q ও r এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [কু. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণটির একটি মূল $3 - \sqrt{2}$ হলে সমীকরণটি সমাধান কর। [দি. বো. ২২]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ..... (i)

$\therefore$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক,

$= (-2a)^2 - 4.1(a^2 - b^2)$

$= 4a^2 - 4a^2 + 4b^2 = 4b^2 = (2b)^2$ [যা ধনাত্মক ও পূর্ণবর্গ]

এখানে, a, b মূলদ হলে, $4b^2$ মূলদ ও একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

$\therefore$ (i) নং এর মূলদ্বয় সর্বদা মূলদ হবে। **(Showed)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই,

$x^2 - px + pq = 0$ ...... (i)

ধরি, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\alpha + \beta = -\frac{-p}{1} = p$

এবং $\alpha\beta = pq$

প্রশ্নমতে, $\alpha - \beta = \pm r$

$\Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\pm r)^2$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = r^2$

$\Rightarrow p^2 - 4pq = r^2$

$\Rightarrow p^2 - 2.p.2q + (2q)^2 - (2q)^2 = r^2$

$\Rightarrow (p - 2q)^2 = r^2 + 4q^2$

$\Rightarrow p - 2q = \pm\sqrt{r^2 + 4q^2}$

$\therefore p = 2q \pm \sqrt{r^2 + 4q^2}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 33x + 14 = 0$ ...... (i)

সমীকরণটির একটি মূল $3 - \sqrt{2}$ হলে অপর একটি মূল হবে $3 + \sqrt{2}$

ধরি, সমীকরণের অপর মূলদ্বয় α ও β

মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta + 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = -\left(\frac{-9}{1}\right) = 9$

$\therefore \alpha + \beta = 3$ ...... (ii)

মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = \frac{14}{1}$

$\Rightarrow \alpha\beta\{3^2 - (\sqrt{2})^2\} = 14$

$\Rightarrow \alpha\beta(9 - 2) = 14$

$\therefore \alpha\beta = 2$

আবার, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= 3^2 - 4 \times 2$

$= 1$

$\therefore \alpha - \beta = \pm 1$

$\therefore \alpha - \beta = 1$ ..... (iii)

এবং $\alpha - \beta = -1$ ..... (iv)

(ii) নং এবং (iii) নং যোগ করে পাই,

$\Rightarrow 2\alpha = 4$

$\Rightarrow \alpha = 2$

$\therefore \beta = 3 - \alpha$ [ii থেকে]

$= 3 - 2 = 1$

আবার, (ii) এবং (iv) নং যোগ করে পাই,

$\alpha + \beta + \alpha - \beta = 3 - 1$

$\Rightarrow 2\alpha = 2$

$\Rightarrow \alpha = 1$

$\therefore \beta = 3 - \alpha$ [ii থেকে]

$= 3 - 1 = 2$

$\therefore$ (i) নং সমীকরণটির মূলগুলো হলো: $2, 1, 3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২২ দৃশ্যকল্প-১: $p(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$

দৃশ্যকল্প-২: $ax^2 + bx + c = 0$ .... (i)

$cx^2 - 2bx + 4a = 0$ .... (ii)

(ক) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত m : n হলে দেখাও যে, $ac(m + n)^2 = b^2mn$

(খ) p(x) রাশিটি পূর্ণবর্গ হলে দেখাও যে, a = b = c [ম. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β এবং (ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় β ও γ হলে প্রমাণ কর যে, $2a + c = 0$ অথবা $(2a - c)^2 + 2b^2 = 0$ [ম. বো. ২২]

সমাধান:

ক ধরি, $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় $m\alpha, n\alpha$

এখন, $m\alpha + n\alpha = \frac{-b}{a}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{-b}{a(m + n)}$

এবং $m\alpha.n\alpha = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow mn\left\{\frac{-b}{a(m + n)}\right\}^2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow mn.\frac{b^2}{a^2(m + n)^2} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow \frac{b^2mn}{a^2(m + n)^2} = \frac{c}{a}$

$\therefore ac(m + n)^2 = b^2mn$ **(Showed)**

খ দেওয়া আছে,

$p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$
$= x^2 - bx - ax + ab + x^2 - cx - bx + bc + x^2 - ax - cx + ca$
$= 3x^2 - (b + a + c + b + a + c)x + ab + bc + ca$

$\therefore p(x) = 3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca$

p(x) রাশিটি পূর্ণবর্গ হলে রাশিটি দ্বারা গঠিত সমীকরণের নিশ্চায়কের মান শূন্য হবে।

অর্থাৎ, $\{-2(a+b+c)\}^2 - 4\times3\times(ab+bc+ca) = 0$

$\Rightarrow 4(a+b+c)^2 - 12(ab+bc+ca) = 0$

$\Rightarrow 4(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) - 12ab - 12bc - 12ca = 0$

$\Rightarrow 4a^2+4b^2+4c^2+8ab+8bc+8ca-12ab-12bc-12ca=0$

$\Rightarrow 4a^2+4b^2+4c^2-4ab-4bc-4ca=0$

$\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$\Rightarrow a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=0$

$\Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

আমরা জানি, কতগুলো বর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হতে তাদের প্রত্যেকটিকে আলাদা আলাদাভাবে শূন্য হতে হবে।

অর্থাৎ, $(a-b)^2=0$ আবার, $(b-c)^2=0$ আবার, $(c-a)^2=0$

$\Rightarrow a-b=0$ $\Rightarrow b-c=0$ $\Rightarrow c-a=0$

$\therefore a=b$ $\therefore b=c$ $\therefore c=a$

$\therefore a=b=c$ **(Showed)**

গ দেওয়া আছে, $ax^2+bx+c=0$ ...... (i)

এবং $cx^2-2bx+4a=0$ ...... (ii)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং (ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় β, γ

এখানে, (i) নং ও (ii) নং সমীকরণের একটি সাধারণ মূল β

$\therefore a\beta^2+b\beta+c=0$ ..... (iii)

$c\beta^2-2b\beta+4a=0$ .... (iv)

এখন, (iii) ও (iv) নং হতে বজ্রগুণনের সূত্রানুসারে,

$$\frac{\beta^2}{4ab+2bc}=\frac{\beta}{c^2-4a^2}=\frac{1}{-2ab-bc}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^2}{2(bc+2ab)}=\frac{\beta}{c^2-4a^2}=\frac{1}{-(bc+2ab)}$$

$$\therefore \frac{\beta^2}{2(bc+2ab)}=\frac{\beta}{c^2-4a^2}$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{2(bc+2ab)}{-4a^2+c^2}=\frac{2b(c+2a)}{(c+2a)(c-2a)}$$

আবার, $\beta=\frac{c^2-4a^2}{-2ab-bc}=\frac{(c+2a)(c-2a)}{-b(2a+c)}$

$$\therefore \frac{2b(c+2a)}{(c+2a)(c-2a)}=\frac{(c+2a)(c-2a)}{-b(2a+c)}$$

$\Rightarrow -2b^2(c+2a)^2=(c+2a)^2(c-2a)^2$

$\Rightarrow (c+2a)^2\{-2b^2-(c-2a)^2\}=0$

হয়, $(2a+c)^2=0$ অথবা, $-2b^2-(c-2a)^2=0$

$\therefore 2a+c=0$ $\Rightarrow (2a-c)^2+2b^2=0$

$\therefore 2a+c=0$ অথবা $(2a-c)^2+2b^2=0$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ২৩ দৃশ্যকল্প-১: $\varphi(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$\Psi(x)=x^2-mx+l$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x)=x^2+2px+q$

$g(x)=x^2+mx+l$

(ক) $x^3+qx+r=0$ এর মূলগুলো α, β, γ হলে,

$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\alpha+\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে φ(x) ফাংশনে $a=0$, $b=1$, $c=-l$ এবং $d=m$ হলে, $\varphi(x)=0$ এবং $\Psi(x)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুবক রাশি হলে প্রমাণ কর যে, $l+m+4=0$. [ঢা. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে $f(x)=0$ সমীকরণে $p=\frac{l}{2}$ এবং $q=m$. আবার, $f(x)=0$ ও $g(x)=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল বিদ্যমান হলে দেখাও যে, $2x^2+(l+m-2)x=(l+m-2)^2$ সমীকরণের মূলদ্বয় 3 এবং $\frac{-3}{2}$ [ঢা. বো. ২১]

সমাধান:

ক $x^3+qx+r=0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=0$ ...... (i)

এবং, (i) নং হতে পাই,

$\alpha+\beta=-\gamma$, $\alpha+\gamma=-\beta$

এবং $\beta+\gamma=-\alpha$

প্রদত্ত রাশি $=\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\alpha+\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$

$=\frac{\alpha^2}{-\alpha}+\frac{\beta^2}{-\beta}+\frac{\gamma^2}{-\gamma}$

$=-\alpha-\beta-\gamma$

$=-(\alpha+\beta+\gamma)$

$=0$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 0 **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\varphi(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

যেখানে, $a=0$, $b=1$, $c=-l$, $d=m$

এবং $\psi(x)=x^2-mx+l$

$\therefore x^2-lx+m=0$ .... (i)

$x^2-mx+l=0$ .... (ii)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে,

$\alpha+\beta=l$

$\alpha\beta=m$

(ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় γ ও σ হলে,

$\gamma+\sigma=m$

$\gamma\sigma=l$

প্রশ্নমতে,

$|\alpha-\beta| = |\gamma-\sigma| = k$ [যেখানে k একটি ধ্রুবক]

$\therefore |\alpha-\beta| = |\gamma-\sigma|$

$\Rightarrow (\alpha-\beta)^2 = (\gamma-\sigma)^2$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma+\sigma)^2 - 4\gamma\sigma$

$\Rightarrow l^2 - 4m = m^2 - 4l$

$\Rightarrow l^2 - m^2 + 4l - 4m = 0$

$\Rightarrow (l+m)(l-m) + 4(l-m) = 0$

$\Rightarrow (l-m)(l+m+4) = 0$

$\therefore l - m = 0$ হলে (i) ও (ii) নং সমীকরণ একই হয়ে যায় তাই $l - m \neq 0$

$\therefore l + m + 4 = 0$ **(Proved)**

গ এখানে, $f(x) = x^2 + 2px + q$ এবং $f(x) = 0$

$\therefore x^2 + 2px + q = 0$

$p = \frac{l}{2}$ এবং $q = m$ হলে সমীকরণটি হতে পাই,

$x^2 + 2\frac{l}{2}x + m = 0$

$\therefore x^2 + lx + m = 0$ ....(i)

এখানে, $g(x) = x^2 + mx + l$

এবং $g(x) = 0$

$\therefore x^2 + mx + l = 0$ ....(ii)

ধরি, (i) নং ও (ii) নং সমীকরণের একটি সাধারণ মূল বিদ্যমান যা α

(i) নং ও (ii)নং সমীকরণ হতে পাই,

$\alpha^2 + l\alpha + m = 0$ .... (iii)

এবং $\alpha^2 + m\alpha + l = 0$ .... (iv)

(iii) নং হতে (iv) নং বিয়োগ করে পাই,

$\alpha^2 + l\alpha + m - \alpha^2 - m\alpha - l = 0$

$\Rightarrow l\alpha + m - m\alpha - l = 0$

$\Rightarrow l\alpha - m\alpha + m - l = 0$

$\Rightarrow \alpha(l-m) = l - m$

$\Rightarrow \alpha = \frac{l-m}{l-m}$

$\therefore \alpha = 1$

α এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$1^2 + l.1 + m = 0$

$\Rightarrow 1 + l + m = 0$

$\therefore l + m = -1$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ,

$2x^2 + (l+m-2)x = (l+m-2)^2$

$\Rightarrow 2x^2 + (-1-2)x = (-1-2)^2$ [মান বসিয়ে]

$\Rightarrow 2x^2 - 3x = 9$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 3x - 9 = 0$

$\Rightarrow 2x(x-3) + 3(x-3) = 0$

$\Rightarrow (x-3)(2x+3) = 0$

হয়, $x - 3 = 0$ অথবা, $2x + 3 = 0$

$\therefore x = 3$ বা, $2x = -3$

$\therefore x = -\frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলদ্বয় 3 এবং $-\frac{3}{2}$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▸ ২৪ দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + ax + b = 0$ এবং $x^2 + bx + a = 0$.

দৃশ্যকল্প-২: $ax^2 + bx - c = 2$.

(ক) কোন শর্তে $cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণের মূলগুলো (i) জটিল ও অসমান (ii) মূলদ ও অসমান হবে।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, তাদের অপর দুটি মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণটি $x^2 + x + ab = 0$.

[কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২১]

(গ) যদি দৃশ্যকল্প-২ এ $a = 27, b = 6, c = m$ এবং সমীকরণটির একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হয়, তবে m এর মানগুলো নির্ণয় কর।

[কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৯]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $cx^2 + bx + a = 0$

এর নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

(i) সমীকরণটির মূলগুলি জটিল ও অসমান হবে যদি $D = b^2 - 4ac < 0$ হয়। **(Ans.)**

(ii) সমীকরণটির মূলগুলি মূলদ ও অসমান হবে যদি $D = b^2 - 4ac$ ধনাত্মক পূর্ণবর্গ সংখ্যা হয়। **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $x^2 + ax + b = 0$ .... (i)

এবং $x^2 + bx + a = 0$ .... (ii)

ধরি, (i) নং ও (ii) নং সমীকরণের একটি সাধারণ মূল বিদ্যমান এবং তা α। তাই, α দ্বারা (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ সিদ্ধ হবে।

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ .... (iii)

এবং $\alpha^2 + b\alpha + a = 0$ .... (iv)

(iii)নং হতে (iv) সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$\alpha^2 + a\alpha + b - \alpha^2 - b\alpha - a = 0$

$\Rightarrow a\alpha + b - b\alpha - a = 0$

$\Rightarrow a\alpha - b\alpha + b - a = 0$

$\Rightarrow \alpha(a-b) = a - b$

$\Rightarrow \alpha = \frac{a-b}{a-b}$

$\therefore \alpha = 1$

$\therefore \alpha$ এর মান (iii) নং সমীকরণের বসিয়ে পাই,

$1^2 + a.1 + b = 0$

$\Rightarrow 1 + a + b = 0$

$\therefore a + b = -1$ .... (v)

ধরি, (i) নং সমীকরণের অপর মূলটি β

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha\beta = b$

$\Rightarrow 1.\beta = b$ $[\because \alpha = 1]$

$\therefore \beta = b$

আবার, ধরি, (ii) নং সমীকরণের অপর মূলটি γ

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\gamma = a$

$\Rightarrow 1.\gamma = a$

$\therefore \gamma = a$

$\therefore \beta$ ও γ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^2 - (\gamma+\beta)x + \gamma\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - (a+b)x + ab = 0$

$\Rightarrow x^2 - (-1)x + ab = 0$ [∵ (v) নং হতে পাই]

$\therefore x^2 + x + ab = 0$ **(Showed)**

গ দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই, $ax^2 + bx - c = 2$ .... (i)

$a = 27, b = 6, c = m$ হলে (i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$27x^2 + 6x - m = 2$

$\therefore 27x^2 + 6x - (m+2) = 0$ .... (ii)

ধরি, (ii)নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, α^2

$\therefore \alpha + \alpha^2 = -\frac{6}{27}$

$\Rightarrow \alpha + \alpha^2 = -\frac{2}{9}$

$\Rightarrow 9\alpha + 9\alpha^2 = -2$

$\Rightarrow 9\alpha^2 + 6\alpha + 3\alpha + 2 = 0$

$\Rightarrow 3\alpha(3\alpha + 2) + 1(3\alpha + 2) = 0$

$\Rightarrow (3\alpha + 2)(3\alpha + 1) = 0$

$\therefore \alpha = -\frac{2}{3}$ অথবা, $\alpha = -\frac{1}{3}$

এবং $\alpha.\alpha^2 = -\left(\frac{m+2}{27}\right)$

$\therefore \alpha^3 = -\left(\frac{m+2}{27}\right)$ .... (iii)

$\alpha = -\frac{2}{3}$ হলে, (iii) নং হতে পাই,

$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\left(\frac{m+2}{27}\right)$

$\Rightarrow \frac{-8}{27} = -\left(\frac{m+2}{27}\right)$

$\Rightarrow -8 = -(m+2)$

$\Rightarrow 8 = m + 2$

$\therefore m = 6$

$\alpha = -\frac{1}{3}$ হলে, (iii) নং হতে পাই,

$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\left(\frac{m+2}{27}\right)$

$\Rightarrow \frac{-1}{27} = -\left(\frac{m+2}{27}\right)$

$\Rightarrow 1 = m + 2$

$\therefore m = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $m = -1, 6$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ২৫ **দৃশ্যকল্প-১: $3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ সমীকরণের তিনটি মূল α, β, γ.**

দৃশ্যকল্প-২: একটি ত্রিঘাত সমীকরণের একটি মূল $2 - 3\sqrt{-1}$ এবং মূলগুলোর গুণফল 65।

(ক) $3x^2 - 2(c+1)x + c = 0$ সমীকরণ হতে দেখাও যে, $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-c} = 0; x \neq 0, 1, c$

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি গঠন কর। [য. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে সমীকরণটি নির্ণয় কর। [য. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্নঃ সি. বো. ১৭]

সমাধানঃ

ক দেওয়া আছে, $3x^2 - 2(c+1)x + c = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 2cx - 2x + c = 0$

$\Rightarrow x^2 - cx + x^2 - x - cx + c + x^2 - x = 0$

$\Rightarrow x(x - c) + x(x - 1) - c(x - 1) + x(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x(x - c) + (x - 1)(x - c) + x(x - 1) = 0$

$\therefore \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-c} = 0$ [$x(x-1)(x-c)$ দ্বারা ভাগ করে]

(Showed)

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ ....(i)

এবং (i) নং সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = -\frac{2}{3}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{-1}{3}$

এবং $\alpha\beta\gamma = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$

এখন, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$

$= \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = -1$

$\therefore \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}$

$= \frac{\gamma + \alpha + \beta}{\alpha\beta\gamma}$

$= \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = -2$

এবং $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

$\therefore \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^3 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)x^2 + \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}\right)x - \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 0$

$\Rightarrow x^2 - (-1)x^2 + (-2)x - 3 = 0$

$\therefore x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$; যা নির্ণেয় সমীকরণ। **(Ans.)**

গ দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই,

একটি ত্রিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\alpha = 2 - 3\sqrt{-1} = 2 - 3i$

আমরা জানি, বাস্তব সহগ বিশিষ্ট সমীকরণের জটিল মূলগুলো যুগলে থাকে।

$\therefore$ দ্বিতীয় মূলটি হবে $\beta = 2 + 3i$

ধরি, তৃতীয় মূলটি γ

প্রশ্নমতে, $\alpha\beta\gamma = 65$

$(2-3i)(2+3i).\gamma = 65$

$\Rightarrow \{2^2-(3i)^2\}\gamma = 65$

$\Rightarrow (4-9i^2)\gamma = 65$

$\Rightarrow (4+9)\gamma = 65$

$\Rightarrow 13\gamma = 65$

$\Rightarrow \gamma = \frac{65}{13}$

$\therefore \gamma = 5$

এখন, $\alpha+\beta+\gamma = 2-3i+2+3i+5$
$= 9$

এবং $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = (2-3i)(2+3i)+(2+3i).5+5.(2-3i)$
$= (2^2-9i^2)+10+15i+10-15i$
$= 4+9+20$
$= 33$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma = 0$

$\therefore x^3-9x^2+33x-65 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৬ দৃশ্যকল্প-১ : $f(x) = x^4-3x^3-11x^2+23x-10.$

দৃশ্যকল্প-২ : $f(x) = ax^2+bx+c;\ g(x) = px^2+qx+r$

(ক) $x^2+5x+3=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}$ এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $f(x)=0$ সমীকরণের একটি মূল 1 এবং অপর মূলগুলি α, β, γ হলে $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে যদি $f(x)=0$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাত $g(x)=0$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাতের সমান হয়, তাহলে দেখাও যে, $b:q = \sqrt{6}:\sqrt{35}$ যখন $a=2, c=3, p=5, r=7$ [ম. বো. ২১]

সমাধান:

ক প্রদত্ত সমীকরণ,

$x^2+5x+3=0$ .... (i)

এবং (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha+\beta = -5$

এবং $\alpha\beta = 3$

$\therefore (\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$= (-5)^2-4\times3$
$= 25-12$
$= 13$

$\therefore \alpha-\beta = \pm\sqrt{13}$

এখন, $\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}$
$= \frac{\pm\sqrt{13}}{3}$
$= \pm\frac{1}{3}\sqrt{13}$ **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $f(x) = x^4-3x^3-11x^2+23x-10$

এবং $f(x) = 0$

$\therefore x^4-3x^3-11x^2+23x-10 = 0$...............(i)

এবং (i) নং সমীকরণের একটি মূল 1। তাই, $f(1) = 0$ হবে।

$\therefore (x-1)$, $f(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক

(i) নং হতে পাই,

$x^4-3x^3-11x^2+23x-10 = 0$

$\Rightarrow x^4-x^3-2x^3+2x^2-13x^2+13x+10x-10 = 0$

$\Rightarrow x^3(x-1)-2x^2(x-1)-13x(x-1)+10(x-1) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x^3-2x^2-13x+10) = 0$

$\Rightarrow x^3-2x^2-13x+10 = 0$ ...... (ii)

(ii) নং সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ

$\therefore \alpha+\beta+\gamma = 2$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = -13$

এবং $\alpha\beta\gamma = -10$

প্রদত্ত রাশি, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma+3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha+\beta+\gamma)\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\}+3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$= 2\{(2)^2-2(-13)-(-13)\}+3(-10)$

$= 2(4+26+13)-30$

$= 2\times43-30$

$= 86-30$

$= 56$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$f(x) = ax^2+bx+c$ ...... (i)

$g(x) = px^2+qx+r$ ...... (ii)

এখানে, $f(x)=0$ এবং $g(x)=0$

যখন, $a=2, c=3, p=5, r=7$

(i) নং ও (ii) নং হতে পাই,

$2x^2+bx+3=0$ ...... (iii)

এবং $5x^2+qx+7=0$ ...... (iv)

ধরি, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha+\beta = -\frac{b}{2}$

এবং $\alpha\beta = \frac{3}{2}$

আবার, (ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় m, n

$\therefore m+n = -\frac{q}{5}$

এবং $mn = \frac{7}{5}$

প্রশ্নমতে,

$\alpha : \beta = m : n$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$

$\Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{m-n}{m+n}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

$\Rightarrow \frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2}$ [উভয় পক্ষে বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{(m+n)^2 - 4mn}{(m+n)^2}$

$\Rightarrow \frac{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - 4.\frac{3}{2}}{\left(-\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\left(-\frac{q}{5}\right)^2 - 4.\frac{7}{5}}{\left(-\frac{q}{5}\right)^2}$

$\Rightarrow \frac{\frac{b^2-24}{4}}{\frac{b^2}{4}} = \frac{\frac{q^2-140}{25}}{\frac{q^2}{25}}$

$\Rightarrow \frac{b^2-24}{b^2} = \frac{q^2-140}{q^2}$

$\Rightarrow \frac{b^2-24-b^2}{b^2} = \frac{q^2-140-q^2}{q^2}$ [বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{-24}{b^2} = \frac{-140}{q^2}$

$\Rightarrow \frac{6}{b^2} = \frac{35}{q^2}$

$\Rightarrow \frac{b^2}{q^2} = \frac{6}{35}$

$\Rightarrow \frac{b}{q} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{35}}$ [উভয় পক্ষকে বর্গমূল করে]

$\therefore b : q = \sqrt{6} : \sqrt{35}$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▸ ২৭ $f(x) = ax^2 + bx + c$ .... (i)

$\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + 21x - 5$ .... (ii)

(ক) $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β ও γ হলে $\Sigma\frac{1}{\alpha^2}$ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২১]

(খ) (i) নং হতে $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে α, β হলে দেখাও যে, $(a\alpha + b)^{-3} + (a\beta + b)^{-3} = \frac{b^3 - 3abc}{a^3c^3}$ [ঢা. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১]

(গ) (ii) নং হতে $\varphi(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল 5 হলে অপর মূলদ্বয় নির্ণয় কর। [ব. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২১]

সমাধান:

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ .... (i)

এবং (i) নং সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = a$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = b$

এবং $\alpha\beta\gamma = c$

এখন, $\Sigma\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$

$= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}\right)$

$= \left(\frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right)$

$= \left(\frac{b}{c}\right)^2 - 2.\left(\frac{a}{c}\right)$

$= \frac{b^2}{c^2} - \frac{2a}{c}$

$= \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$

$= \frac{1}{c^2}(b^2 - 2ac)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 0$ বা, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β তাহলে মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

$\Rightarrow a\alpha + a\beta = -b$

$\therefore a\alpha + b = -a\beta$ এবং $a\beta + b = -a\alpha$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$L.H.S = (a\alpha + b)^{-3} + (a\beta + b)^{-3}$

$= (-a\beta)^{-3} + (-a\alpha)^{-3}$

$= \frac{-1}{a^3\beta^3} + \frac{-1}{a^3\alpha^3}$

$= \frac{-1}{a^3} \times \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3\beta^3}$

$= -\frac{1}{a^3} \times \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}$

$= -\frac{1}{a^3} \times \frac{\frac{-b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}}{\frac{c^3}{a^3}}$

$= \frac{-\frac{1}{a^3} \times \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}}{\frac{c^3}{a^3}}$

$= -\frac{1}{a^3} \times \frac{-b^3 + 3abc}{c^3}$

$= \frac{b^3 - 3abc}{a^3c^3}$

$= R.H.S$

$\therefore (a\alpha + b)^{-3} + (a\beta + b)^{-3} = \frac{b^3 - 3abc}{a^3c^3}$ **(Showed)**

গ এখানে, $\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + 21x - 5$

এবং $\varphi(x) = 0$

$\therefore x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = 0$ .... (i)

এবং (i) নং সমীকরণের একটি মূল 5

ধরি, অপর মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha + \beta + 5 = 9$

$\Rightarrow \beta = 9 - 5 - \alpha$

$\therefore \beta = 4 - \alpha$ .... (ii)

এবং $\alpha\beta + \beta.5 + 5.\alpha = 21$

$\Rightarrow \alpha\beta + 5\beta + 5\alpha = 21$

$\Rightarrow \alpha(4-\alpha) + 5(4-\alpha) + 5\alpha = 21$

$\Rightarrow 4\alpha - \alpha^2 + 20 - 5\alpha + 5\alpha = 21$

$\Rightarrow -\alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0$

$$\therefore \alpha = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

α এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\alpha = 2 + \sqrt{3}$ হলে, $\beta = 4 - (2 + \sqrt{3}) = 4 - 2 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$

এবং $\alpha = 2 - \sqrt{3}$ হলে, $\beta = 4 - (2 - \sqrt{3}) = 4 - 2 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলদ্বয় $2 + \sqrt{3}$ ও $2 - \sqrt{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৮ **দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + px + q = 0, p,q \neq 0$ এর মূলদ্বয় u এবং v**

দৃশ্যকল্প-২: $y^2 + y + 1 = 0$ দুটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

(ক) দ্বিঘাত সমীকরণের পৃথায়ক বলতে কি বুঝ ব্যাখ্যা কর।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $qx^2 + px + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় $\frac{1}{u}$ এবং $\frac{1}{v}$। [য. বো. ১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে দেখাও যে, $\alpha^2 = \beta$ এবং $\beta^2 = \alpha$ [ম. বো. ২২]

সমাধানঃ

ক $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণে, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

এক্ষেত্রে $(b^2 - 4ac)$ রাশিটি মূল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে বর্গমূল চিহ্নের ভিতরে থাকে। সুতরাং $b^2 - 4ac$ এর মান ধনাত্মক না ঋণাত্মক তা পর্যালোচনা করে সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নিরূপণ করা যায়। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$x^2 + px + q = 0$ এর মূলদ্বয় u এবং v।

$\therefore u + v = -p$ এবং $u.v = q$

আবার,

$qx^2 + px + 1 = 0$

$\Rightarrow uvx^2 - (u+v)x + 1 = 0$ $\quad [\because u + v = -p$ এবং $uv = q]$

$\Rightarrow uvx^2 - ux - vx + 1 = 0$

$\Rightarrow ux(vx - 1) - 1(vx - 1) = 0$

$\Rightarrow (ux - 1)(vx - 1) = 0$

হয়, $ux - 1 = 0$ $\quad$ অথবা, $vx - 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{u}$ $\quad$ $\Rightarrow x = \frac{1}{v}$

$\therefore$ মূলদ্বয় $\frac{1}{u}$ এবং $\frac{1}{v}$ **(Showed)**

গ প্রদত্ত ২য় সমীকরণ, $y^2 + y + 1 = 0$

$$\Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$\therefore$ ধরি,সমীকরণটির মূলদ্বয়,

$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ এবং $\beta = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

তাহলে, $$\alpha^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2.(-1).(\sqrt{-3}) - 3}{4} = \frac{-2 - 2\sqrt{-3}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \beta$$

$\therefore \alpha^2 = \beta$

এবং $$\beta^2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2.(-1).(\sqrt{-3}) - 3}{4} = \frac{-2 + 2\sqrt{-3}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \alpha$$

$\therefore \beta^2 = \alpha$

$\therefore \alpha^2 = \beta ; \beta^2 = \alpha$ **(Showed)**

HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

বহুপদী রাশির বৈশিষ্ট্য, উৎপাদক উপপাদ্য ও ভাগশেষ উপপাদ্য সংক্রান্ত

১। কোন ফাংশনটি বহুপদী? [সম্মিলিত. বো. ১৮; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২]

ⓚ $2x^2 - 5\sqrt{x} + 1$ ⓛ $x^2 - \frac{3}{x^2} + 4x + 1$

ⓜ $x^3 + 2x^2 - 3x + x^{-1}$ ⓝ $2x^2 - x + 1$

উত্তর: ⓝ $2x^2 - x + 1$

ব্যাখ্যা: বহুপদী রাশির শর্ত: চলকের ঘাত ঋণাত্মক/ভগ্নাংশ হতে পারবে না। অপশন ⓝ তে x এর ঘাতে ঋণাত্মক/ভগ্নাংশ নেই। তাই এটিই সঠিক উত্তর।

২। k এর মান কত হলে, $x^2 + 7x + 3 + k = 0$ সমীকরণের উৎপাদক $x + 3$ হবে? [রা. বো. ২৩]

ⓚ -33 ⓛ -9

ⓜ 9 ⓝ 33

উত্তর: ⓜ 9

ব্যাখ্যা: উৎপাদক $x + 3$ হলে একটি মূল -3 হবে।

$\therefore 9 - 21 + 3 + k = 0$

$\Rightarrow k - 9 = 0$

$\therefore k = 9$

৩। k এর কোন মানের জন্য $x^2 - 3x + 2 + k$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x - 3)$ হবে?

ⓚ -3 ⓛ -2

ⓜ 1 ⓝ 2

উত্তর: ⓛ -2

ব্যাখ্যা: $f(x) = x^2 - 3x + 2 + k$

বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 3$

অর্থাৎ, $x = 3$ বসালে বহুপদীর মান 0 আসবে।

$\therefore f(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 2 + k = 0$

$\Rightarrow k + 2 = 0$

$\therefore k = -2$

৪। $4x^3 + 2x^2 + 3x - 6$ কে $x - 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? [য. বো. ১৯]

ⓚ 1 ⓛ 3

ⓜ -11 ⓝ 0

উত্তর: ⓛ 3

ব্যাখ্যা: $4x^3 + 2x^2 + 3x - 6$ রাশিতে x এর স্থলে 1 বসালেই ভাগশেষ পাওয়া যাবে।

$\therefore$ ভাগশেষ $f(1) = 4 + 2 + 3 - 6$

$= 3$

৫। $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ বহুপদীর দুইটি উৎপাদক $(x - 1)$ ও $(x + 2)$ হলে, $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় হবে–

ⓚ $1, -2, -3$ ⓛ $1, -2, 3$

ⓜ $1, 2, -3$ ⓝ $-1, 2, 3$

উত্তর: ⓛ $1, -2, 3$

ব্যাখ্যা: $(x - 1)$ ও $(x + 2)$ দুইটি উৎপাদক হওয়ায়, দুটি মূল 1 ও -2

এখন, $f(3) = 3^3 - 2 \times 3^2 - 5 \times 3 + 6$

$= 27 - 18 - 15 + 6 = 0$

$\therefore$ অপর মূল $= 3$

অথবা, $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

$\therefore$ মূলত্রয় $x = 1, -2, 3$ [Using Calculator]

৬। $f(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$ একটি বহুপদী হলে [ম. বো. ২৩]

(i) $f(x) = 0$ সমীকরণের মূল 4টি

(ii) $f(x) = 0$ এর একটি মূল 2

(iii) $x - 1$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii

ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓚ i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) ও (ii) Using Calculator

(iii) $x - 1$, $f(x)$ এর উৎপাদক নয়।

নিশ্চায়ক ও মূলের প্রকৃতি

৭। p এর কোন মানের জন্য $px^2 + 3x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে? [ব. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২৩]

ⓚ $p = \frac{9}{16}$ ⓛ $p < \frac{16}{9}$

ⓜ $p < \frac{9}{16}$ ⓝ $p > \frac{9}{16}$

উত্তর: ⓜ $p < \frac{9}{16}$

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে, $D > 0$ হবে।

$\therefore 3^2 - 4 \times 4 \times p > 0$

$\Rightarrow 9 - 16p > 0$

$\Rightarrow -16p > -9$

$\Rightarrow 16p < 9$

$\therefore p < \frac{9}{16}$

Note: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের পৃথায়ক/নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

(i) $D = 0$ হলে সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে এবং $ax^2 + bx + c$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে।

(ii) $D > 0$ হলে সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে।

(iii) $D < 0$ হলে সমীকরণের মূলদ্বয় অবাস্তব/জটিল হবে।

(iv) $D > 0$ এবং পূর্ণবর্গ হলে সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান হবে।

৮। কোন শর্তে $ax^2 + bx + c$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হবে?

ক $4ac = b^2$ খ $4ac > b^2$

গ $4ac < b^2$ ঘ $ac = b$

উত্তর: ক $4ac = b^2$

ব্যাখ্যা: শর্তানুসারে, $D = 0$

$\Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

$\therefore 4ac = b^2$

Note: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের পৃথায়ক/নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

- $D = 0$ হলে, সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে এবং $ax^2 + bx + c$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে।
- $D > 0$ হলে, সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে।
- $D > 0$ এবং পূর্ণবর্গ হলে, সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান হবে।
- $D < 0$ হলে, সমীকরণের মূলদ্বয় অবাস্তব/জটিল হবে।

৯। $2x^2 - 5x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হবে− [কু. বো. ২৩]

ক বাস্তব ও সমান খ বাস্তব ও অসমান

গ জটিল ও সমান ঘ জটিল ও অসমান

উত্তর: ঘ জটিল ও অসমান

ব্যাখ্যা: $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 25 - 32 = -7 < 0$

$\therefore$ মূলদ্বয় জটিল ও অসমান।

অথবা, ক্যালকুলেটর দিয়ে সমীকরণ সমাধান করে জটিল মূলদ্বয় পাওয়া যায়।

১০। k এর মান কত হলে $(k+2)x^2 - (k+2)x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো জটিল হবে? [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১]

ক $-2 \le k < 2$ খ $-2 < k \le 2$

গ $-2 \le k \le 2$ ঘ $-2 < k < 2$

উত্তর: ঘ $-2 < k < 2$

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয় জটিল হলে, নিশ্চয়ক $D < 0$

$\Rightarrow (k+2)^2 - 4(k+2).1 < 0$

$\Rightarrow (k-2)(k+2) < 0$

$\therefore -2 < k < 2$

১১। k এর মান কত হলে, $(k+1)x^2 + (k+1)x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি কাল্পনিক হবে?

ক $-1 < k < 3$ খ $-3 < k < 1$

গ $1 \le k \le 3$ ঘ $1 < k < 3$

উত্তর: ক $-1 < k < 3$

ব্যাখ্যা: শর্তানুসারে, $D < 0$

$\Rightarrow (k+1)^2 - 4(k+1) \times 1 < 0$

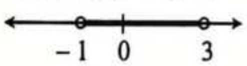
$\Rightarrow k^2 + 2k + 1 - 4k - 4 < 0$

$\Rightarrow k^2 - 2k - 3 < 0$

$\Rightarrow k^2 - 3k + k - 3 < 0$

$\Rightarrow k(k-3) + 1(k-3) < 0$

$\Rightarrow (k-3)(k+1) < 0$



$\therefore -1 < k < 3$

১২। a এর কোন ডোমেনের জন্য $x^2 + ax + 3 = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে?

ক $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ খ $(-\infty, -2\sqrt{3})$

গ $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$ ঘ $(2\sqrt{3}, \infty)$

উত্তর: গ $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$

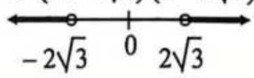
ব্যাখ্যা: শর্তানুসারে, $D > 0$

$\Rightarrow a^2 - 4 \times 1 \times 3 > 0$

$\Rightarrow a^2 - 12 > 0$

$\Rightarrow a^2 - (2\sqrt{3})^2 > 0$

$\Rightarrow (a + 2\sqrt{3})(a - 2\sqrt{3}) > 0$



$\therefore a \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$

১৩। $2x^2 - kx + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে k এর মান কত? [চ. বো. ২১]

ক $(-4, 4)$ খ $(4, -4)$

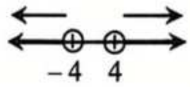
গ $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ ঘ $(-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$

উত্তর: গ $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে, $D > 0$

$\Rightarrow k^2 - 16 > 0$

$\therefore k < -4$ ও $k > 4$



অর্থাৎ k এর মান − 4 হতে ছোট ও 4 হতে বড় হবে।

$(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

১৪। $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূলই অশূন্য হওয়ার শর্ত নিচের কোনটি? [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩]

ক $b \ne 0$ খ $c \ne 0$

গ $c = 0$ ঘ $b = c = 0$

উত্তর: খ $c \ne 0$

Note: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল শূন্য হবে যখন $c = 0$ এবং দুটি মূলই অশূন্য হবে যখন $c \ne 0$

১৫। $x^2 - 8x + c = 0$ এর মূলদ্বয়− [রা. বো. ২২]

(i) সমান হবে যদি $c = 8$ হয়

(ii) জটিল হবে যদি $c > 16$ হয়

(iii) বাস্তব হবে যদি $c \le 16$ হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) সমান হলে, $b^2 = 4ac$

$\Rightarrow 64 = 4 \times 1 \times c \therefore c = 16$

(ii) জটিল হলে, $b^2 - 4ac < 0$

$\Rightarrow 64 - 4c < 0 \therefore c > 16$

(iii) বাস্তব হলে, $b^2 - 4ac \ge 0$

$\Rightarrow c \le 16$

১৬। দ্বিঘাত সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব হবে যদি– [দি. বো. ২১]

(i) পৃথায়ক শূন্য হয়
(ii) পৃথায়ক ধনাত্মক হয়
(iii) পৃথায়ক ঋণাত্মক হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii
খ i ও iii
গ ii ও iii
ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: দ্বিঘাত সমীকরণের পৃথায়ক D হলে,

(i) মূলদ্বয় বাস্তব যখন $D \geq 0$
(ii) মূলদ্বয় সমান যখন $D = 0$
(iii) মূলদ্বয় জটিল যখন $D < 0$

১৭। a এর কোন মানের জন্য $ax^2 - x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে? [রা. বো. ২১]

ক $\frac{1}{16}$
খ $-\frac{1}{16}$
গ $\frac{1}{4}$
ঘ $-\frac{1}{4}$

উত্তর: ক $\frac{1}{16}$

ব্যাখ্যা: $D = 0$

$\Rightarrow 1 - 4 \times 4.a = 0$

$\therefore a = \frac{1}{16}$

১৮। k এর কোন মানের জন্য $(k-1)x^2 - (k+2)x + 4$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে? [কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২১]

ক $-10, 2$
খ $10, -2$
গ $2, 10$
ঘ $-2, -10$

উত্তর: গ 2, 10

ব্যাখ্যা: $D = 0$

$\Rightarrow (k+2)^2 - 4(k-1).4 = 0$

$\Rightarrow k^2 + 4k + 4 - 16k + 16 = 0$

$\therefore k = 10, 2$

১৯। $ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার– [ম. বো. ১৯]

(i) $c = 0$ হলে, একটি মূল শূন্য
(ii) $b = 0$ হলে, মূল দুটি সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে
(iii) c ও a একই চিহ্নবিশিষ্ট হলে মূল দুটি বাস্তব হবে

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii
খ i ও iii
গ ii ও iii
ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) $c = 0$ হলে, $ax^2 + bx = 0$

$\Rightarrow x(ax + b) = 0$

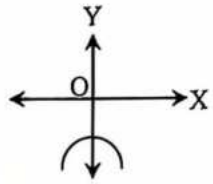
$\therefore x = 0, x = -\frac{b}{a}$

(ii) $b = 0$ হলে, $ax^2 + c = 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

(iii) $\boxed{a = 2}$, $b = 1$, $\boxed{c = 2}$ ধরে মূল বের করো

২০। $y = ax^2 + bx + c$ এর গ্রাফ নিম্নরূপ হলে–



ক $b^2 - 4ac > 0$
খ $\frac{c}{a} > 0$
গ $b^2 - 4ac = 0$
ঘ $\frac{c}{a} < 0$

উত্তর: খ $\frac{c}{a} > 0$

ব্যাখ্যা: x অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ না করায়, $b^2 - 4ac < 0$

আবার, x অক্ষের নিচে অবস্থিত বলে a ঋণাত্মক এবং y অক্ষের ঋণাত্মক অংশে ছেদ করায় c ঋণাত্মক।

$\therefore \frac{c}{a} > 0$

দ্বিঘাত সমীকরণের মূল সহগ সম্পর্ক সংক্রান্ত

২১। $2x^2 + bx + 6 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির যোগফল 5 হলে, b এর মান হলো– [ম. বো. ২৩]

ক -10
খ $-\frac{5}{2}$
গ $\frac{5}{2}$
ঘ 10

উত্তর: ক -10

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয়ের যোগফল $= -\frac{b}{2} = 5$

$\therefore b = -10$

Note: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে মূলসহগ সম্পর্ক হতে,

মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

২২। k এর মান কত হলে, $x^2 - 5x + k = 0$ এর মূল দুইটি ক্রমিক সংখ্যা হবে? [ব. বো. ২৩]

ক 2
খ 6
গ 30
ঘ 0

উত্তর: খ 6

ব্যাখ্যা: ধরি, মূলদ্বয় $\alpha, \alpha + 1$

$\therefore \alpha + \alpha + 1 = 5$

$\therefore \alpha = 2$

এবং $\alpha(\alpha + 1) = k$

$\Rightarrow 2 \times 3 = k$

$\therefore k = 6$

২৩। k এর মান কত হলে $x^2 + (k^2 - 4)x + 2k - 6 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি পরস্পর উল্টা ও বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে? [ঢা. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩]

ক $\pm\sqrt{3}$ খ $\pm\sqrt{5}$
গ $\frac{5}{2}$ ঘ $\frac{7}{2}$

উত্তর: গ $\frac{5}{2}$

ব্যাখ্যা: ধরি মূলদ্বয় $\alpha, -\frac{1}{\alpha}$

এখন মূলদ্বয়ের গুণফল, $-1 = \frac{2k-6}{1}$

$\therefore k = \frac{5}{2}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ২৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
$x^2 + 2x - p = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

২৪। সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল 4 হলে p এর মান কত? [ব. বো. ২১]

ক 4 খ 2
গ −4 ঘ −2

উত্তর: গ −4

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{-p}{1} = 4$

$\therefore p = -4$

২৫। $3x^2 - px + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির তিনগুণ হলে, p এর মান কত? [চ. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২১]

ক ± 3 খ $\pm 2\sqrt{2}$
গ ± 6 ঘ ± 8

উত্তর: ঘ ± 8

ব্যাখ্যা: ধরি, সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha,\ 3\alpha$

মূলদ্বয়ের গুণফল, $3\alpha.\ \alpha = \frac{4}{3}$

$\therefore \alpha = \pm\frac{2}{3}$

মূলদ্বয়ের যোগফল, $3\alpha + \alpha = \frac{p}{3} \Rightarrow 4 \times \left(\pm\frac{2}{3}\right) = \frac{p}{3}$

$\therefore p = \pm 8$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ২৬ ও ২৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
$x^2 + x + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় α^{-1} ও β^{-1} হলে−

২৬। $(\alpha - \beta)$ এর মান কত? [য. বো. ২১]

ক 1 খ $\sqrt{3}i$
গ −1 ঘ $1 + 3i$

উত্তর: খ $\sqrt{3}i$

ব্যাখ্যা: $x^2 + x + 1 = 0$

মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = -1$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -1$

$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = -1$

$\therefore \alpha + \beta = -1$

মূলদ্বয়ের গুণফল

$\alpha^{-1}.\ \beta^{-1} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha\beta} = 1$

$\therefore \alpha\beta = 1$

$\therefore \alpha - \beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \pm\sqrt{1-4} = \pm\sqrt{3}i$

২৭। α এর মান কত? [য. বো. ২১]

ক $1 - i$ খ $1 + i$
গ $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ঘ $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

উত্তর: গ $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = -1$

$\alpha - \beta = \pm\sqrt{3}i$

$\therefore 2\alpha = -1 \pm \sqrt{3}i$ [যোগ করে]

$\therefore \alpha = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

২৮। $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল α হলে অন্য মূলটি হবে− [য. বো. ১৯]

ক $-\alpha$ খ $\frac{1}{\alpha^2}$
গ $\frac{1}{\alpha}$ ঘ α^3

উত্তর: গ $\frac{1}{\alpha}$

ব্যাখ্যা: ধরি, অপর মূল β

মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = 1$

$\therefore \beta = \frac{1}{\alpha}$

২৯। দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{-i+1}$ হলে অপর মূলটি− [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২৩]

ক $i + 1$ খ $-i + 1$
গ $\frac{1}{2}(-i+1)$ ঘ $\frac{1}{2}(i+1)$

উত্তর: গ $\frac{1}{2}(-i+1)$

ব্যাখ্যা: একটি মূল $\frac{1}{-i+1} = \frac{1+i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+i}{1^2-(i)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$\therefore$ অপর মূল $= \frac{1}{2}(-i+1)$ [অনুবন্ধী]

৩০। $2x^2 - 5x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\sum\alpha^3$ এর মান কত? [কু. বো. ২৩]

ক $\frac{8}{35}$ খ $\frac{35}{8}$
গ 20 ঘ $\frac{215}{8}$

উত্তর: খ $\frac{35}{8}$

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = \frac{5}{2}$

$\alpha\beta = \frac{3}{2}$

$\sum\alpha^3 = \alpha^3 + \beta^3$

$= (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$= \frac{125}{8} - 3 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{8}$

৩১। $mx^2 - x + n = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি কত? (যেখানে $m \neq 0$) [সি. বো. ২১]

ⓚ $\frac{2mn-1}{m^2}$ ⓛ $\frac{1-2mn}{m^2}$

ⓜ $\frac{2n-1}{m^2}$ ⓝ $\frac{1-2n}{m^2}$

উত্তর: ⓛ $\frac{1-2mn}{m^2}$

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = \frac{1}{m}$; $\alpha\beta = \frac{n}{m}$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{1}{m^2} - \frac{2n}{m} = \frac{1-2mn}{m^2}$$

৩২। $x^2 - kx + 2 = 0$, সমীকরণের একটি মূল 3 হলে– [ঢা. বো. ২২]

(i) অপর মূল $\frac{2}{3}$

(ii) k এর মান $\frac{11}{3}$

(iii) প্রদত্ত সমীকরণের নিশ্চায়ক = 7

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ ii ও iii

ⓜ i ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓚ i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{2}{1}$; অপর মূল α হলে,

$$3\alpha = 2 \therefore \alpha = \frac{2}{3}$$

(ii) একটি মূল 3 মানে 3 দ্বারা সমীকরণ সিদ্ধ হবে $3^2 - 3k + 2 = 0$;

$$k = \frac{11}{3}$$

(iii) $x^2 - \frac{11}{3}x + 2 = 0$

$$D = \left(\frac{11}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 2 = \frac{49}{9} \neq 7$$

৩৩। $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-p} = \frac{1}{q}$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে– [ঢা. বো. ২২]

(i) $\alpha + \beta = p$

(ii) $\alpha\beta = pq$

(iii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{q}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ ii ও iii

ⓜ i ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓝ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-p} = \frac{1}{q}$

$$\Rightarrow \frac{x-p-x}{x(x-p)} = \frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow x^2 - px + pq = 0$$

(i) মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha + \beta = p$

(ii) মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = pq$

(iii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{p}{pq} = \frac{1}{q}$

৩৪। $x^2 - 5x + 6 = 0$ এবং $x^2 + x - 12 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের– [য. বো. ২১]

(i) প্রতিটির মূলদ্বয় মূলদ

(ii) সাধারণ মূল 3

(iii) প্রথম সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি 5

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ⓛ ii

ⓜ i ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓝ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $x^2 - 5x + 6 = 0$ এর মূলদ্বয় 2 ও 3

$x^2 + x - 12 = 0$ এর মূলদ্বয় 3 ও –4

অতএব, সমীকরণদ্বয়ের মূলগুলি মূলদ, সাধারণ মূল 3 এবং প্রথম সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি 5

৩৫। $3x^2 + 2x + 1 = 0$ এর ক্ষেত্রে– [চ. বো. ২৩]

(i) মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান

(ii) মূলদ্বয়ের যোগফল $-\frac{2}{3}$

(iii) মূলদ্বয়ের গুণফল $\frac{1}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii

ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓜ ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) ক্যালকুলেটর দিয়ে সমীকরণ সমাধান করে মূলগুলো চেক করো।

(ii) মূলদ্বয়ের যোগফল $= \frac{-b}{a} = \frac{-2}{3}$

(iii) মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$

৩৬। $x^2 + 1 = 0$ এর একটি মূল α হলে $|\alpha|$ এর মান কত? [ব. বো. ২৩]

ⓚ 2 ⓛ $\sqrt{-1}$

ⓜ $\sqrt{2}$ ⓝ 1

উত্তর: ⓝ 1

ব্যাখ্যা: $x^2 = -1$

$$\therefore x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$\therefore \alpha = \pm i$$

$$\therefore |\alpha| = \sqrt{1^2} = 1$$

৩৭। দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ হলে অপর মূল কোনটি? [ম. বো. ২২]

ⓚ $\sqrt{2}+1$ ⓛ $-\sqrt{2}-1$
ⓜ $\sqrt{2}-1$ ⓝ $-\sqrt{2}+1$

উত্তর: ⓛ $-\sqrt{2}-1$

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$ [Using Calculator]

$\therefore$ অপর মূল $=-\sqrt{2}-1$

৩৮। $x^2-4x+k=0$ সমীকরণের একটি মূল 3 হলে অন্যটি– [ঢা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২১]

ⓚ 1 ⓛ 3
ⓜ –3 ⓝ –4

উত্তর: ⓚ 1

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha+3=4$

$\therefore \alpha=1$

দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বা উভয় মূল সাধারণ থাকা সংক্রান্ত

৩৯। $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ এবং $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ সমীকরণের উভয় মূলই সাধারণ হওয়ার শর্ত– [সি. বো. ২২]

ⓚ $a_1b_2=a_2b_1$
ⓛ $(a_1b_2-a_2b_1)=(c_1a_2-c_2a_1)^2$
ⓜ $a_1+a_2=b_1+b_2=c_1+c_2$
ⓝ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

উত্তর: ⓝ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

ব্যাখ্যা: শর্ত: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

৪০। $x^2+ax+b=0$ এবং $x^2+bx+a=0$ সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকলে $a+b=$ কত? [ব. বো. ২৩]

ⓚ 0 ⓛ –1
ⓜ 1 ⓝ ∞

উত্তর: ⓛ –1

ব্যাখ্যা: ধরি, সাধারণ মূল: α

$\alpha^2+a\alpha+b=0$

$\alpha^2+b\alpha+a=0$

বজ্রগুণনের সূত্রানুসারে, $\frac{\alpha^2}{a^2-b^2}=\frac{\alpha}{b-a}=\frac{1}{b-a}$

২য় ও ৩য় অনুপাত থেকে, $\alpha=1$

১ম ও ২য় অনুপাত থেকে, $\alpha=\frac{a^2-b^2}{b-a}=-(a+b)$

$\therefore 1=-(a+b)$

$\therefore a+b=-1$

৪১। $x^2+bx+a=0$ এবং $x^2-4x+b=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল 3 হলে, a এর মান কোনটি? [দি. বো. ২৩]

ⓚ –18 ⓛ 0
ⓜ 3 ⓝ 18

উত্তর: ⓚ –18

ব্যাখ্যা: একটি মূল 3 হলে, $3^2-4\times3+b=0$

$\therefore b=3$

আবার, $b=3$ এবং একটি মূল 3 হলে, $3^2+3\times3+a=0$

$\therefore a=-18$

ত্রিঘাত সমীকরণের মূল সহগ সম্পর্ক

৪২। $x^3-2x^2+4=0$ এর মূলগুলো p, q, r হলে, pqr এর মান– [ব. বো. ২১]

ⓚ –2 ⓛ –4
ⓜ 2 ⓝ 4

উত্তর: ⓛ –4

ব্যাখ্যা: $pqr=-\frac{4}{1}$

$=-4$

Note: $ax^3+bx^2+cx+d=0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β ও γ হলে,

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

৪৩। $x^3-3x^2-16x+48=0$ সমীকরণের দুটি মূলের যোগফল শূন্য হলে, তৃতীয় মূল কোনটি? [কু. বো. ১৯]

ⓚ –4 ⓛ –3
ⓜ 3 ⓝ 4

উত্তর: ⓜ 3

ব্যাখ্যা: ধরি, মূল তিনটি α, β ও γ

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=3$

$\therefore \alpha=3$ $[\because \beta+\gamma=0]$

৪৪। $4x^3+12x^2-3x+52=0$ সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{2}-\sqrt{3}i$ হলে, এর বাস্তব মূল কোনটি? [রা. বো. ১৭]

ⓚ –5 ⓛ –4
ⓜ 4 ⓝ 5

উত্তর: ⓛ –4

ব্যাখ্যা: Using Calculator

৪৫। কী শর্তে $x^3+px^2+qx-r=0$ সমীকরণের দুটি মূলের সমষ্টি শূন্য হবে? [য. বো. ২১]

ⓚ $pr=q$ ⓛ $pq+r=0$
ⓜ $qr=p$ ⓝ $r=p$

উত্তর: ⓛ $pq+r=0$

ব্যাখ্যা: ধরি, মূলত্রয় $\alpha, -\alpha, \beta$

$\alpha + (-\alpha) + \beta = -p$

$\therefore \beta = -p$

এখন যেহেতু β উক্ত সমীকরণের একটি মূল। তাই β এর মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

$(-p)^3 + p(-p)^2 + q(-p) - r = 0$

$\Rightarrow -p^3 + p^3 - pq - r = 0$

$\therefore pq + r = 0$

৪৬। $x^3 - px^2 + q = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β ও γ হলে $\Sigma\alpha^2$ এর মান কত? [দি. বো. ২১]

ক p^2 খ $p^2 - 2q$
গ $-p^2$ ঘ $-q$

উত্তর: ক p^2

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta + \gamma = p; \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0; \alpha\beta\gamma = -q$

$\Sigma\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$
$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = p^2$

৪৭। $3x^3 - 1 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = ?$ [ঢা. বো. ২২]

ক -1 খ 0
গ $\frac{1}{3}$ ঘ 1

উত্তর: ঘ 1

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta + \gamma = 0; \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0; \alpha\beta\gamma = \frac{1}{3}$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$
$= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma$
$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$
$= 0 + 3 \times \frac{1}{3} = 1$

৪৮। $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β এবং γ হলে $\sum\alpha\beta = ?$ [ঢা. বো. ২৩]

ক $-\frac{1}{3}$ খ 0
গ $\frac{2}{3}$ ঘ $-\frac{2}{3}$

উত্তর: খ 0

ব্যাখ্যা: $\sum\alpha\beta = \frac{0}{3} = 0$

৪৯। $6x^3 + 3x^2 + 2 = 0$ ত্রিঘাত সমীকরণটির মূলত্রয় a, b ও c হলে, Σa^2b^2 এর মান কোনটি? [সি. বো. ২১]

ক $-\frac{1}{3}$ খ 3
গ $\frac{4}{3}$ ঘ $\frac{3}{4}$

উত্তর: ক $-\frac{1}{3}$

ব্যাখ্যা: $a + b + c = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

$ab + bc + ca = 0 ; abc = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

$\Sigma a^2b^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$
$= (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$
$= (ab + bc + ca)^2 - 2(ab.bc + bc.ca + ca.ab)$
$= 0 - 2abc(a + b + c)$
$= -2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$
$= -\frac{1}{3}$

৫০। $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $\Sigma\alpha^2\beta$ এর মান কত?

ক $\frac{2}{3}$ খ 0
গ $-\frac{1}{3}$ ঘ 1

উত্তর: ঘ 1

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$

এবং $\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{3}$

$\therefore \Sigma\alpha^2\beta = \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \gamma^2\beta$
$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma$
$= \frac{2}{3} \times 0 - 3\left(-\frac{1}{3}\right)$
$= 1$

৫১। $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = ?$

ক $p^2 + 2q$ খ $p^2 + 2r$
গ $p^2 - 2q$ ঘ $p^2 - 2r$

উত্তর: গ $p^2 - 2q$

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta + \gamma = -p$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$

এবং $\alpha\beta\gamma = -r$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$
$= (-p)^2 - 2q$
$= p^2 - 2q$

৫২। $2x^3 - 3x - 5 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় p, q, r হলে $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ এর মান কত? [কু. বো. ২১]

ক $-\frac{3}{5}$ খ $\frac{3}{5}$
গ $-\frac{3}{2}$ ঘ $\frac{2}{5}$

উত্তর: ক $-\frac{3}{5}$

ব্যাখ্যা: $p + q + r = 0$; $pq + qr + rp = -\frac{3}{2}$; $pqr = \frac{5}{2}$

$$\therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{qr + pr + pq}{pqr} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5}$$

৫৩। $x^3 - \frac{1}{3}x - 15 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে- [কু. বো. ২২]

(i) $\Sigma\alpha = 0$

(ii) $\Sigma\alpha\beta = -\frac{1}{3}$

(iii) $\alpha\beta\gamma = 15$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii   খ i ও iii

গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $\Sigma\alpha = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 0$

(ii) $\Sigma\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-\frac{1}{3}}{1} = -\frac{1}{3}$

(iii) $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} = 15$

সমীকরণ গঠন সংক্রান্ত

৫৪। $1 - i$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি?

ক $x^2 + 2x + 2 = 0$ খ $x^2 - 2x + 2 = 0$

গ $x^2 - 2x - 2x = 0$ ঘ $x^2 + 2x - 2 = 0$

উত্তর: খ $x^2 - 2x + 2 = 0$

ব্যাখ্যা: $x = 1 - i$

$\Rightarrow (x - 1)^2 = (-i)^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = i^2$

$\therefore x^2 - 2x + 2 = 0$

অথবা, অপর মূল $1 + i$

$\therefore$ সমীকরণ: $x^2 - (1 - i + 1 + i)x + (1 + i)(1 - i) = 0$

$\therefore x^2 - 2x + 2 = 0$

Note: দ্বিঘাত সমীকরণের জটিল মূলদ্বয় অনুবন্ধী আকারে থাকে। $a + ib$ এর অনুবন্ধী মূল $a - ib$

৫৫। $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের একটি মূল $3 + i$ হলে p ও q এর মান কত? [রা. বো. ১৭]

ক $-6, -10$ খ $-6, 10$

গ $6, -10$ ঘ $6, 10$

উত্তর: খ $-6, 10$

ব্যাখ্যা: $x = 3 + i$

$\Rightarrow (x - 3)^2 = i^2$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 10 = 0$ $[\because i^2 = -1]$

$\therefore p = -6$ ও $q = 10$

❖ **নিচের তথ্যের আলোকে ৫৬ ও ৫৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**

$\alpha + \beta = 2, \alpha^3 + \beta^3 = 8$ [ম. বো. ২৩]

৫৬। $\Sigma\alpha^2$ এর মান কত?

ক 0   খ 4

গ 8   ঘ 16

উত্তর: খ 4

ব্যাখ্যা: $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 8$

$\Rightarrow (2)^3 - 3\alpha\beta.2 = 8$

$\therefore \alpha\beta = 0$

$\Sigma\alpha^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (2)^2 - 2 \times 0 = 4$

৫৭। α, β মূলবিশিষ্ট সমীকরণ হলো-

ক $x^2 + 2 = 0$ খ $x^2 + 2x = 0$

গ $2x^2 - 1 = 0$ ঘ $x^2 - 2x = 0$

উত্তর: ঘ $x^2 - 2x = 0$

ব্যাখ্যা: $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 0 = 0$

$\therefore x^2 - 2x = 0$

৫৮। $\sqrt{-3} + 1$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নিচের কোনটি? [রা. বো. ২৩]

ক $x^2 + 2x + 4 = 0$ খ $x^2 - 2x + 4 = 0$

গ $x^2 + 2x - 4 = 0$ ঘ $x^2 - 2x - 4 = 0$

উত্তর: খ $x^2 - 2x + 4 = 0$

ব্যাখ্যা: $x = \sqrt{-3} + 1$

$\Rightarrow (x - 1)^2 = (\sqrt{-3})^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0$

৫৯। কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{1 + i}$ হলে, সমীকরণটি হবে-

ক $x^2 - x + 1 = 0$ খ $2x^2 - 2x + 1 = 0$

গ $x^2 + x + 1 = 0$ ঘ $2x^2 + 2x + 1 = 0$

উত্তর: খ $2x^2 - 2x + 1 = 0$

ব্যাখ্যা: সমীকরণের একটি মূল, $x = \frac{1}{1 + i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ [Using Calculator]

$\Rightarrow 2x = 1 - i$

$\Rightarrow (2x - 1)^2 = (-i)^2$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = -1$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 2 = 0$

$\therefore 2x^2 - 2x + 1 = 0$

৬০। $x^2 - 5x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \beta$ ও $\alpha\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [দি. বো. ২৩]

ক $x^2 - 14x + 45 = 0$ খ $x^2 + 14x + 45 = 0$

গ $x^2 + 4x + 45 = 0$ ঘ $x^2 + 4x - 45 = 0$

উত্তর: ক $x^2 - 14x + 45 = 0$

ব্যাখ্যা: $x^2 - 5x + 9 = 0$ এর মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha + \beta = 5$; $\alpha\beta = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (5 + 9)x + 5 \times 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 14x + 45 = 0$

৬১। যদি α ও β সমীকরণ $x^2 + 3x + 2 = 0$ এর মূল হয়, তবে $(\alpha, -\beta)$ যে দ্বিঘাত সমীকরণের মূল তা হলো–

ক $x^2 + x + 2 = 0$ খ $x^2 - 3x - 2 = 0$
গ $x^2 - x + 2 = 0$ ঘ $x^2 + x - 2 = 0$

উত্তর: ঘ $x^2 + x - 2 = 0$

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = -3$ এবং $\alpha\beta = 2$

$\therefore \alpha - \beta = \pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$
$= \pm\sqrt{(-3)^2 - (4\times 2)}$
$= \pm 1$

$\therefore \alpha, -\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,
$x^2 - (\alpha - \beta)x + (-\alpha\beta) = 0$
$\therefore x^2 \pm x - 2 = 0$

৬২। $13x^2 - 6x - 7 = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha^{-1} + 1$ ও $\beta^{-1} + 1$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [রা. বো. ১৭]

ক $7x^2 - 8x - 12 = 0$ খ $7x^2 - 20x = 0$
গ $7x^2 + 8x - 12 = 0$ ঘ $7x^2 + 8x = 0$

উত্তর: ক $7x^2 - 8x - 12 = 0$

ব্যাখ্যা: $13x^2 - 6x - 7 = 0$ এর মূল, $\alpha = 1, \beta = -\frac{7}{13}$

এখন, $\frac{1}{\alpha} + 1 = 2$ ও $\frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{6}{7}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হবে,

$\therefore x^2 - \left(2 - \frac{6}{7}\right)x + 2 \times \left(-\frac{6}{7}\right) = 0$

$\Rightarrow 7x^2 - 8x - 12 = 0$

৬৩। যদি $\alpha + \beta = 3$ ও $\alpha^3 + \beta^3 = 7$ হয়, তবে α ও β যে সমীকরণের মূল তা নিচের কোনটি হবে?

ক $x^2 - 3x + 7 = 0$ খ $x^2 - 3x - 7 = 0$
গ $9x^2 - 27x + 20 = 0$ ঘ $9x^2 - 27x - 20 = 0$

উত্তর: গ $9x^2 - 27x + 20 = 0$

ব্যাখ্যা: $\alpha^3 + \beta^3 = 7$
$\Rightarrow (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 7$
$\Rightarrow 27 - 9\alpha\beta = 7$
$\therefore \alpha\beta = \frac{20}{9}$

এখন, α ও β মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,
$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$
$\Rightarrow x^2 - 3x + \frac{20}{9} = 0$
$\therefore 9x^2 - 27x + 20 = 0$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৬৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$3x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল α ও β

৬৪। α^2 ও β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ– [দি. বো. ২২]

ক $9x^2 - 19x + 1 = 0$ খ $9x^2 - 19x - 1 = 0$
গ $9x^2 + 19x - 1 = 0$ ঘ $9x^2 + 19x + 1 = 0$

উত্তর: ক $9x^2 - 19x + 1 = 0$

ব্যাখ্যা: $\alpha = \frac{5+\sqrt{13}}{6}$; $\beta = \frac{5-\sqrt{13}}{6}$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = \frac{19}{9}$

এবং $\alpha^2\beta^2 = \frac{1}{9}$ [Using Calculator]

এখন,
α^2 ও β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হবে,
$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$
$\therefore x^2 - \frac{19x}{9} + \frac{1}{9} = 0$
$\Rightarrow 9x^2 - 19x + 1 = 0$

৬৫। $x^2 + mx + n = 0$ সমীকরণের একটি মূল $2 + i$ হলে m, n এর মান কত? [রা. বো. ২২]

ক $m = 4, n = 5$ খ $m = -4, n = 5$
গ $m = -4, n = 6$ ঘ $m = 4, n = -5$

উত্তর: খ $m = -4, n = 5$

ব্যাখ্যা: একটি মূল $2 + i$ হলে অপর মূল $2 - i$
মূলদ্বয়ের যোগফল $= -m$
$\Rightarrow 2 + i + 2 - i = -m$
$\therefore m = -4$
এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $= n$
$\Rightarrow (2+i)(2-i) = n$
$\Rightarrow 4 - i^2 = n$
$\therefore n = 5$

৬৬। একটি পুকুরের দৈর্ঘ্য একটি দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করে। সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল যথাক্রমে $\frac{11}{2}$ ও -20 হলে, পুকুরের দৈর্ঘ্য =?

ক 5 খ 2
গ 8 ঘ $\frac{2}{5}$

উত্তর: গ 8

ব্যাখ্যা: পুকুরের দৈর্ঘ্যের সমীকরণ,
$x^2 - \frac{11}{2}x - 20 = 0$
$\Rightarrow 2x^2 - 11x - 40 = 0$
$\Rightarrow 2x^2 - 16x + 5x - 40 = 0$
$\Rightarrow 2x(x-8) + 5(x-8) = 0$
$\therefore x = 8$ $\left[\because x = -\frac{5}{2}\text{ গ্রহণযোগ্য নয়}\right]$

৬৭। একটি ত্রিঘাত সমীকরণের দুটি মূল 2 ও (1 + 2i) হলে, সমীকরণটি নিচের কোনটি?

ক $x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$ খ $x^3 + 4x^2 + 9x + 10 = 0$

গ $x^3 - 4x^2 - 9x - 10 = 0$ ঘ $x^3 + 4x^2 + 9x - 10 = 0$

উত্তর: ক $x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$

ব্যাখ্যা: একটি মূল $1 + 2i$ হলে, আরেকটি মূল $1 - 2i$ হবে। $(1 + 2i)$ ও $(1 - 2i)$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $x^2 - 2x + 5 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $(x - 2)(x^2 - 2x + 5) = 0$

$\Rightarrow x^3 - 2x^2 + 5x - 2x^2 + 4x - 10 = 0$

$\therefore x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$

দ্বিঘাত রাশির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান সংক্রান্ত

৬৮। $2x^2 - x + 2$ এর ন্যূনতম মান কত? [ঢা. বো. ১৯]

ক 2 খ $\frac{15}{8}$

গ $\frac{3}{8}$ ঘ $\frac{17}{8}$

উত্তর: খ $\frac{15}{8}$

ব্যাখ্যা: সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মান $= -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{1 - 16}{4.2} = \frac{15}{8}$

Note: $ax^2 + bx + c$ দ্বিঘাত রাশির সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মান হবে

$= -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

x^2 এর সহগ ঋণাত্মক হলে সর্বোচ্চ মান থাকবে এবং x^2 এর সহগ ধনাত্মক হলে সর্বনিম্ন মান থাকবে।

৬৯। x এর মান বাস্তব হলে $-4x^2 + 4ax + b^2$ এর সর্বোচ্চ মান– [য. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২১]

ক $a^2 + b^2$ খ $a + b$

গ $a^2 - b^2$ ঘ $a - b$

উত্তর: ক $a^2 + b^2$

ব্যাখ্যা: সর্বোচ্চ মান $= -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(4a)^2 - 4.(-4).b^2}{4.(-4)}$

$= -\frac{16a^2 + 16b^2}{-16}$

$= a^2 + b^2$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৭০ ও ৭১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = 1 + 3x - 2x^2$

৭০। f(x) এর গরিষ্ঠ মান কত? [চ. বো. ২১]

ক $-\frac{17}{8}$ খ $-\frac{1}{8}$

গ $\frac{1}{8}$ ঘ $\frac{17}{8}$

উত্তর: ঘ $\frac{17}{8}$

ব্যাখ্যা: গরিষ্ঠ মান $= -\frac{D}{4a} = -\frac{3^2 - 4.(-2).1}{4.(-2)} = \frac{17}{8}$

৭১। f(x) = 0 এর মূলদ্বয় α ও β হলে – α ও – β মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নিচের কোনটি? [চ. বো. ২১]

ক $2x^2 - 3x + 1 = 0$ খ $2x^2 + 3x - 1 = 0$

গ $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ঘ $2x^2 + 3x + 1 = 0$

উত্তর: খ $2x^2 + 3x - 1 = 0$

ব্যাখ্যা: $-\alpha$ ও $-\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয়ের জন্য প্রদত্ত সমীকরণে x এর স্থানে $-x$ বসাতে হবে।

$1 + 3.(-x) - 2.(-x)^2 = 0$

$\Rightarrow -2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\therefore 2x^2 + 3x - 1 = 0$

৭২। $y = (x + 5)^2 + 4$ ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান কত?

ক 10 খ 23

গ 4 ঘ 0

উত্তর: গ 4

ব্যাখ্যা: $y = (x + 5)^2 + 4$

$\because$ বর্গরাশির সর্বনিম্ন মান শূন্য

অর্থাৎ, $(x + 5)^2 = 0$

$\therefore y_{min} = 0^2 + 4 = 4$

৭৩। $3x^2 - 6x - 2$ রাশির ক্ষুদ্রতম মান এবং ক্ষুদ্রতম মানের জন্য x এর মান যথাক্রমে–

ক 1, 1 খ 1, – 1

গ – 5, 1 ঘ – 5, – 1

উত্তর: গ – 5, 1

ব্যাখ্যা: ক্ষুদ্রতম মান $= -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$= -\frac{36 + 24}{4 \times 3}$

$= -5$

x এর মান $= -\frac{b}{2a}$

$= -\frac{-6}{2 \times 3}$

$= 1$

প্রতিসম মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত সমীকরণ

৭৪। $\sqrt{2}x^2 + 3x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল দুটি α, β হলে, $\frac{1}{\alpha}$ ও $\frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ হবে− [ঢা. বো. ২৩]

ক $\sqrt{2}x^2 - 3x + 1 = 0$ খ $\sqrt{2}x^2 + 3x - 1 = 0$
গ $x^2 + 3x + \sqrt{2} = 0$ ঘ $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$

উত্তর: গ $x^2 + 3x + \sqrt{2} = 0$

ব্যাখ্যা: x এর স্থলে $\frac{1}{x}$ বসালে $\frac{1}{\alpha}$ ও $\frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ পাওয়া যাবে।

$$\therefore \sqrt{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3\frac{1}{x} + 1 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 3x + \sqrt{2} = 0$$

৭৫। $x^2 + 4x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + 2$ এবং $\beta + 2$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নিচের কোনটি? [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩]

ক $x^2 - 1 = 0$ খ $x^2 - 8x + 1 = 0$
গ $x^2 + 1 = 0$ ঘ $x^2 + 8x + 1 = 0$

উত্তর: গ $x^2 + 1 = 0$

ব্যাখ্যা: 2 বড় মূলবিশিষ্ট সমীকরণ বের করতে x এর স্থলে $(x - 2)$ বসাতে হবে।

$$\therefore (x-2)^2 + 4(x-2) + 5 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x - 8 + 5 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 1 = 0$$

৭৬। $x^3 - bx^2 + cx - a = 0$ সমীকরণের মূলগুলির বিপরীত মূলগুলি দ্বারা গঠিত সমীকরণ নিচের কোনটি? [ঢা. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩]

ক $-x^3 + bx^2 - cx + a = 0$ খ $ax^3 + cx^2 - bx + 1 = 0$
গ $x^3 + bx^2 + cx + a = 0$ ঘ $ax^3 - cx^2 + bx - 1 = 0$

উত্তর: ঘ $ax^3 - cx^2 + bx - 1 = 0$

ব্যাখ্যা: x এর স্থলে $\frac{1}{x}$ বসালে বিপরীত মূলবিশিষ্ট সমীকরণ পাওয়া যাবে।

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3 - b\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{c}{x} - a = 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^3} - \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} - a = 0$$
$$\therefore ax^3 - cx^2 + bx - 1 = 0$$

৭৭। যদি $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হয়, তাহলে $\frac{q}{p-\alpha}$ ও $\frac{q}{p-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ−

ক $x^2 - qx + p = 0$ খ $x^2 - px + q = 0$
গ $px^2 - qx + q = 0$ ঘ $qx^2 - px + p = 0$

উত্তর: খ $x^2 - px + q = 0$

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = p; \alpha\beta = q$

$$\frac{q}{p-\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha} = \alpha ; \frac{q}{p-\beta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\beta} = \beta$$

∴ সমীকরণটি,

$$x^2 - \left(\frac{q}{p-\alpha} + \frac{q}{p-\beta}\right)x + \left(\frac{q}{p-\alpha} \times \frac{q}{p-\beta}\right) = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$
$$\therefore x^2 - px + q = 0$$

৭৮। $2x^2 - 5x - 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 1 কম মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [সি. বো. ২১]

ক $2x^2 - x + 4 = 0$ খ $2x^2 + x + 6 = 0$
গ $2x^2 - x - 6 = 0$ ঘ $2x^2 + 9x + 4 = 0$

উত্তর: গ $2x^2 - x - 6 = 0$

ব্যাখ্যা: 1 কম মূলবিশিষ্ট সমীকরণ বের করতে x এর স্থলে $(x + 1)$ বসাতে হবে।

$$2(x+1)^2 - 5(x+1) - 3 = 0$$
$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 2 - 5x - 5 - 3 = 0$$
$$\therefore 2x^2 - x - 6 = 0$$

৭৯। $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, −α, −β, −γ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি?

ক $x^3 - px^2 - qx + r = 0$ খ $x^3 + px^2 - qx - r = 0$
গ $x^3 - px^2 + qx + r = 0$ ঘ $x^3 - px^2 + qx - r = 0$

উত্তর: ঘ $x^3 - px^2 + qx - r = 0$

ব্যাখ্যা: x এর স্থলে −x বসালে −α, −β, −γ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ পাওয়া যাবে।

$$(-x)^3 + p(-x)^2 + q(-x) + r = 0$$
$$\Rightarrow -x^3 + px^2 - qx + r = 0$$
$$\therefore x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

৮০। $6x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হবে−

ক $x^2 - 3x + 5 = 0$ খ $x^2 - 5x + 6 = 0$
গ $x^2 + 3x - 5 = 0$ ঘ $x^2 + 5x + 6 = 0$

উত্তর: ঘ $x^2 + 5x + 6 = 0$

ব্যাখ্যা: $-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ হবে,

$$6\left(-\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{6}{x^2} + \frac{5}{x} + 1 = 0$$
$$\Rightarrow 6 + 5x + x^2 = 0$$
$$\therefore x^2 + 5x + 6 = 0$$

নিজেকে যাচাই করো

১। কোন ফাংশনটি বহুপদী?

ক $2x^2 - 5\sqrt{x} + 1$ খ $x^2 - \frac{3}{x^2} + 4x + 1$
গ $x^3 + 2x^2 - 3x + x^{-1}$ ঘ $2x^2 - x + 1$

২। $4x^3 + 2x^2 + 3x - 6$ কে $x - 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

ক 1 খ 3 গ −11 ঘ 0

৩। $f(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$ একটি বহুপদী হলে
(i) $f(x) = 0$ সমীকরণের মূল 4টি (ii) $f(x) = 0$ এর একটি মূল 2
(iii) $x - 1$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৪। p এর কোন মানের জন্য $px^2 + 3x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে?

ক $p = \frac{9}{16}$ খ $p < \frac{16}{9}$ গ $p < \frac{9}{16}$ ঘ $p > \frac{9}{16}$

৫। k এর মান কত হলে $(k + 2)x^2 - (k + 2)x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো জটিল হবে?

ক $-2 \le k < 2$ খ $-2 < k \le 2$ গ $-2 \le k \le 2$ ঘ $-2 < k < 2$

৬। k এর কোন মানের জন্য $(k - 1)x^2 - (k + 2)x + 4$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে?

ক −10, 2 খ 10, −2 গ 2, 10 ঘ −2, −10

৭। $ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার–
(i) $c = 0$ হলে, একটি মূল শূন্য
(ii) $b = 0$ হলে, মূল দুটি সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে
(iii) c ও a একই চিহ্নবিশিষ্ট হলে মূল দুটি বাস্তব হবে
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৮ ও ৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + x + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় α^{-1} ও β^{-1} হলে–

৮। $(\alpha - \beta)$ এর মান কত?

ক 1 খ $\sqrt{3}i$ গ −1 ঘ $1 + 3i$

৯। α এর মান কত?

ক $1 - i$ খ $1 + i$ গ $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ঘ $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

১০। $x^2 - kx + 2 = 0$, সমীকরণের একটি মূল 3 হলে–
(i) অপর মূল $\frac{2}{3}$ (ii) k এর মান $\frac{11}{3}$ (iii) প্রদত্ত সমীকরণের নিশ্চায়ক = 7
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

১১। $x^2 + 1 = 0$ এর একটি মূল α হলে, $|\alpha|$ এর মান কত?

ক 2 খ $\sqrt{-1}$ গ $\sqrt{2}$ ঘ 1

১২। $mx^2 - x + n = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি কত? (যেখানে $m \ne 0$)

ক $\frac{2mn - 1}{m^2}$ খ $\frac{1 - 2mn}{m^2}$ গ $\frac{2n - 1}{m^2}$ ঘ $\frac{1 - 2n}{m^2}$

১৩। $x^2 + ax + b = 0$ এবং $x^2 + bx + a = 0$ সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকলে $a + b =$ কত?

ক 0 খ −1 গ 1 ঘ ∞

১৪। $3x^3 - 1 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = ?$

ক −1 খ 0 গ $\frac{1}{3}$ ঘ 1

১৫। $6x^3 + 3x^2 + 2 = 0$ ত্রিঘাত সমীকরণটির মূলত্রয় a, b ও c হলে, Σa^2b^2 এর মান কোনটি?

ক $-\frac{1}{3}$ খ 3 গ $\frac{4}{3}$ ঘ $\frac{3}{4}$

১৬। $x^3 - \frac{1}{3}x - 15 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে–
(i) $\Sigma\alpha = 0$
(ii) $\Sigma\alpha\beta = -\frac{1}{3}$
(iii) $\alpha\beta\gamma = 15$
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ১৭ ও ১৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$\alpha + \beta = 2, \alpha^3 + \beta^3 = 8$

১৭। $\Sigma\alpha^2$ এর মান কত?

ক 0 খ 4 গ 8 ঘ 16

১৮। α, β মূলবিশিষ্ট সমীকরণ হলো–

ক $x^2 + 2 = 0$ খ $x^2 + 2x = 0$ গ $2x^2 - 1 = 0$ ঘ $x^2 - 2x = 0$

১৯। $x^2 + 4x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, α + 2 এবং β + 2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নিচের কোনটি?

ক $x^2 - 1 = 0$ খ $x^2 - 8x + 1 = 0$
গ $x^2 + 1 = 0$ ঘ $x^2 + 8x + 1 = 0$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ২০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$3x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল α ও β

২০। α^2 ও β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ–

ক $9x^2 - 19x + 1 = 0$ খ $9x^2 - 19x - 1 = 0$
গ $9x^2 + 19x - 1 = 0$ ঘ $9x^2 + 19x + 1 = 0$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ২১ ও ২২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = 1 + 3x - 2x^2$

২১। f(x) এর গরিষ্ঠ মান কত?

ক $-\frac{17}{8}$ খ $-\frac{1}{8}$ গ $\frac{1}{8}$ ঘ $\frac{17}{8}$

২২। $f(x) = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β হলে −α ও −β মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নিচের কোনটি?

ক $2x^2 - 3x + 1 = 0$ খ $2x^2 + 3x - 1 = 0$
গ $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ঘ $2x^2 + 3x + 1 = 0$

২৩। $\sqrt{2}x^2 + 3x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল দুটি α, β হলে, $\frac{1}{\alpha}$ ও $\frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ হবে–

ক $\sqrt{2}x^2 - 3x + 1 = 0$ খ $\sqrt{2}x^2 + 3x - 1 = 0$
গ $x^2 + 3x + \sqrt{2} = 0$ ঘ $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$

২৪। $x^3 - bx^2 + cx - a = 0$ সমীকরণের মূলগুলির বিপরীত মূলগুলি দ্বারা গঠিত সমীকরণ নিচের কোনটি?

ক $-x^3 + bx^2 - cx + a = 0$ খ $ax^3 + cx^2 - bx + 1 = 0$
গ $x^3 + bx^2 + cx + a = 0$ ঘ $ax^3 - cx^2 + bx - 1 = 0$

২৫। $2x^2 - 5x - 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 1 কম মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি?

ক $2x^2 - x + 4 = 0$ খ $2x^2 + x + 6 = 0$
গ $2x^2 - x - 6 = 0$ ঘ $2x^2 + 9x + 4 = 0$

উত্তরপত্র		১	ঘ	২	খ	৩	ক	৪	গ	৫	ঘ	৬	গ	৭	ক	৮	খ	৯	গ	১০	ক	১১	ঘ	১২	খ
১৩	খ	১৪	ঘ	১৫	ক	১৬	ঘ	১৭	খ	১৮	ঘ	১৯	গ	২০	ক	২১	ঘ	২২	খ	২৩	গ	২৪	ঘ	২৫	গ

০৬ কণিক
Conics

Board Questions Analysis

সৃজনশীল প্রশ্ন

বোর্ড / সাল	ঢাকা	ময়মনসিংহ	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০২৩	২	১	২	২	২	২	২	২	১
২০২২	২	২	২	২	১	২	২	২	২

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

বোর্ড / সাল	ঢাকা	ময়মনসিংহ	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০২৩	৫	৫	৫	৫	৩	৩	৫	৫	৫
২০২২	৫	৫	৫	৫	৫	৫	৫	৬	৫

এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

- কণিকের সাধারণ সমীকরণ $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$
  - (i) $a = b$ এবং $h = 0$ হলে কণিকটি বৃত্ত নির্দেশ করে
  - (ii) $h^2 - ab = 0$ হলে কণিকটি পরাবৃত্ত নির্দেশ করে
  - (iii) $h^2 - ab < 0$ হলে কণিকটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে
  - (iv) $h^2 - ab > 0$ হলে কণিকটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করে

- $SP = e.PM$ কণিকের সমীকরণ নির্দেশ করে যেখানে S উপকেন্দ্র, P কণিকের উপর যেকোনো একটি বিন্দু। PM হচ্ছে P বিন্দু থেকে নিয়ামক রেখার লম্ব দূরত্ব এবং e উৎকেন্দ্রিকতা।

- পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ হলে,
  - (i) শীর্ষ (0, 0)
  - (ii) উপকেন্দ্র (a, 0)
  - (iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$
  - (iv) নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $x = -a$
  - (v) অক্ষ রেখার সমীকরণ, $y = 0$
  - (vi) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x = a$
  - (vii) উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, \pm 2a)$
  - (viii) পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$
  - (ix) শীর্ষ (α, β) ও অক্ষরেখা x অক্ষের সমান্তরাল হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$
  - (x) শীর্ষ (α, β) ও অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ $(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$
  - (xi) $y = mx + c$, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত $c = \frac{a}{m}$ এবং স্পর্শবিন্দু $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$
  - (xii) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y.y_1 = 4a.\frac{x + x_1}{2}$

- উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a > b$ হলে
  - (i) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, 0)
  - (ii) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$
  - (iii) বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a$
  - (iv) ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b$
  - (v) বৃহদাক্ষের সমীকরণ, $y = 0$ এবং ক্ষুদ্রাক্ষের সমীকরণ, $x = 0$
  - (vi) নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $x = \pm\frac{a}{e}$

(vii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a}$

(viii) উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

(ix) উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2ae$

(x) নিয়ামকরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{2a}{e}$

(xiii) কেন্দ্র (α, β) হলে উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

উপবৃত্তটির বৃহদাক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল যখন $a > b$

উপবৃত্তটির বৃহদাক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল যখন $b > a$

(xiv) পরামিতিক সমীকরণ $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$

(xv) ক্ষেত্রফল $= \pi ab$

(xi) $y = mx + c$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত $c^2 = a^2m^2 + b^2$

(xii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

❑ অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ হলে,

(i) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, 0)

(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$

(iii) আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য, 2a

(iv) অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য, 2b

(v) আড় অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$

(vi) অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ, $x = 0$

(vii) নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $x = \pm\frac{a}{e}$

(viii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a}$

(xi) উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

(x) উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2ae$

(xi) নিয়ামকরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{2a}{e}$

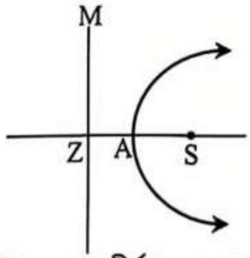
(xii) অসীমতটের সমীকরণ, $y = \pm\frac{b}{a}x$

(xiii) পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(a\sec\theta, b\tan\theta)$

(xiv) কেন্দ্র (α, β) ও অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন ▸ ১



চিত্রের পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র S, শীর্ষ A এবং MZ নিয়ামকরেখা।

(ক) $3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$ পরাবৃত্তের নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩; চ. বো. ২২; য. বো. ২১; সকল বো. ১৮]

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত A ও S বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 3) ও (2, 7) হলে, পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২৩]

(গ) A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 1, 3) এবং MZ রেখার সমীকরণ $2x - 3y + 2 = 0$ হলে, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২৩]

সমাধান:

ক প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 + 2x) - 4y - 5 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 + 2x + 1) - 4y - 5 - 3 = 0$

$\Rightarrow 3(x + 1)^2 = 4y + 8$

$\Rightarrow (x + 1)^2 = \frac{4}{3}(y + 2)$ ...... (i)

(i) নং কে $X^2 = 4aY$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$X = x + 1,\ Y = y + 2$

$4a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

$\therefore$ নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $Y = -a$

অর্থাৎ, $y + 2 = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{3} - 2 = \frac{-7}{3}$

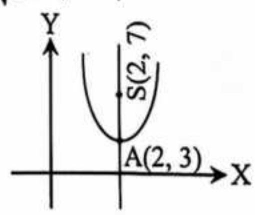
$\therefore 3y + 7 = 0$ **(Ans.)**

খ এখানে, পরাবৃত্তটির শীর্ষ A(2, 3) এবং উপকেন্দ্র S(2, 7) হলে অক্ষরেখা হবে y অক্ষের সমান্তরাল

[∵ পরাবৃত্তটির শীর্ষ এবং উপকেন্দ্রের ভুজ একই]

আবার, $AS = a = \sqrt{(2-2)^2 + (7-3)^2}$

$= \sqrt{0 + 4^2} = 4$



আমরা জানি, (α, β) শীর্ষ ও অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$

$\therefore$ (2, 3) শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 2)^2 = 4.a\,(y - 3)$

$\Rightarrow (x - 2)^2 = 4.4\,(y - 3)$ [∵ a = 4]

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 16y - 48$

$\therefore x^2 - 4x - 16y + 52 = 0$ **(Ans.)**

গ এখানে, পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু $A(-1, 3)$ এবং

নিয়ামক রেখা MZ, $2x - 3y + 2 = 0$ .... (i)

আবার, অক্ষরেখা নিয়ামকরেখার উপর লম্ব বলে, অক্ষরেখার সমীকরণ,

$3x + 2y + k = 0$ যা $(-1, 3)$ বিন্দুগামী

$\therefore 3 \times (-1) + 2 \times 3 + k = 0$

$\Rightarrow -3 + 6 + k = 0$

$\therefore k = -3$

$\therefore$ অক্ষরেখার সমীকরণ, $3x + 2y - 3 = 0$ ..... (ii)

Z হচ্ছে অক্ষরেখা ও নিয়ামকরেখার ছেদবিন্দু।

অর্থাৎ সমীকরণ (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু

এখন, (i) $\times 2$ + (ii) $\times 3$ হতে পাই, $13x - 5 = 0 \quad \therefore x = \frac{5}{13}$

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$2 \times \frac{5}{13} - 3y + 2 = 0 \therefore y = \frac{12}{13}$

$\therefore Z\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$

ধরি, উপকেন্দ্র $S(\alpha, \beta)$

আবার, Z ও S এর মধ্যবিন্দু A

$\frac{\alpha + \frac{5}{13}}{2} = -1$ $\qquad$ $\frac{\beta + \frac{12}{13}}{2} = 3$

$\therefore \alpha = \frac{-31}{13}$ $\qquad$ $\therefore \beta = \frac{66}{13}$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $S = \left(-\frac{31}{13}, \frac{66}{13}\right)$

আবার, উপকেন্দ্রিক লম্ব অক্ষরেখার উপর লম্ব এবং যা উপকেন্দ্র S বিন্দুগামী।

সুতরাং উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $2x - 3y + k = 0$ ..... (iii)

(iii) নং সমীকরণ, $S = \left(-\frac{31}{13}, \frac{66}{13}\right)$ বিন্দুগামী,

$\therefore 2 \times \left(\frac{-31}{13}\right) - 3 \times \frac{66}{13} + k = 0$

$\Rightarrow \frac{-62}{13} - \frac{198}{13} + k = 0$

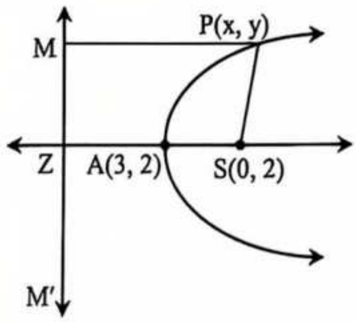
$\Rightarrow \frac{-260}{13} + k = 0$

$\Rightarrow -20 + k = 0$

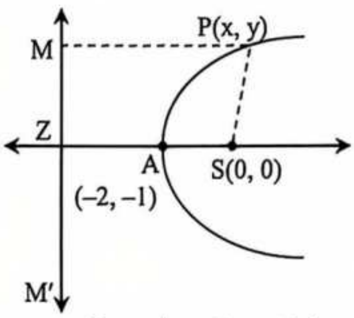
$\therefore k = 20$

k এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $2x - 3y + 20 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২ উদ্দীপক-১:



উদ্দীপক-২:



(ক) $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$ **অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।**

(খ) **উদ্দীপক-১ এ চিহ্নিত পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

(গ) **উদ্দীপক-২ এ SP : PM = 1 : 3 এবং MZM′ এর সমীকরণ** $x + y - 2 = 0$ **হলে, কণিকটি চিহ্নিত করে এর সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান:

ক প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ:

$9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$

$\Rightarrow 9x^2 - 4y^2 = -36$

$\Rightarrow \frac{x^2}{-4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$

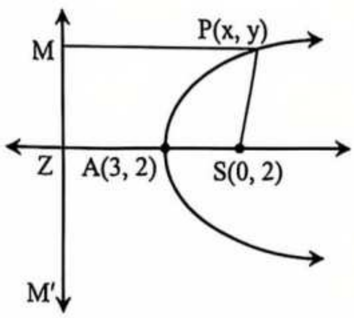
একে $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই

$b = 3, a = 2$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ **(Ans.)**

খ এখানে, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(0, 2)$ এবং শীর্ষবিন্দু $A(3, 2)$

ধরি, $Z = (\alpha, \beta)$



পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে, $AZ = AS$ অর্থাৎ ZS রেখার মধ্যবিন্দু A।

সুতরাং $\frac{\alpha+0}{2} = 3$ | এবং $\frac{\beta+2}{2} = 2$

$\therefore \alpha = 6$ | $\therefore \beta = 2$

সুতরাং, Z বিন্দুর স্থানাংক (6, 2)

এখন, AZ রেখার সমীকরণ: $\frac{y-2}{x-3} = \frac{2-2}{3-0}$

$\Rightarrow \frac{y-2}{x-3} = 0$

$\Rightarrow y - 2 = 0$

MZM′ রেখা AZ রেখার উপর লম্ব

সুতরাং MZM′ রেখার সমীকরণ হবে $x + k = 0$ ...... (i)

(i) নং সমীকরণ (6, 2) বিন্দুগামী,

$\therefore 6 + k = 0 \Rightarrow k = -6$

k এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x - 6 = 0$ যা নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $SP = PM$

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \left|\frac{x-6}{\sqrt{1^2}}\right|$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 2.y.2 + 2^2} = |x - 6|$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = (x-6)^2$ [বর্গ করে এবং $|a|^2 = a^2$]

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2.x.6 + 6^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 - x^2 + 12x - 36 = 0$

$\therefore y^2 - 4y + 12x - 32 = 0$ **(Ans.)**

গ এখানে, কনিকটির ক্ষেত্রে,

$SP : PM = 1 : 3$

অর্থাৎ, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{SP}{PM} = \frac{1}{3} < 1$

সুতরাং, কণিকটি হবে একটি উপবৃত্ত।

এক্ষেত্রে, উপকেন্দ্র S(0, 0), উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{3}$

এবং নিয়ামকরেখা (MZM′) এর সমীকরণ, $x + y - 2 = 0$

উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে পাই, $SP = e.PM$

$\Rightarrow SP^2 = e^2.PM^2$

$\Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{x+y-2}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4y - 4x}{2}$

$\Rightarrow 18x^2 + 18y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 4y - 4x + 4$

$\Rightarrow 18x^2 + 18y^2 - x^2 - y^2 - 2xy + 4y + 4x - 4 = 0$

$\therefore 17x^2 + 17y^2 - 2xy + 4x + 4y - 4 = 0$

ইহা নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩ **দৃশ্যকল্প-১: $3x^2 + 9x - 6y - 8 = 0$ একটি কণিকের সমীকরণ।**

দৃশ্যকল্প-২: একটি কণিকের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 6 ও উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$।

(ক) $3y^2 - 5x^2 = 15$ কণিকটির উপকেন্দ্র নির্ণয় কর।

[রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২; য. বো. ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লিখিত কণিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ও নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৪]

(গ) স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত কণিকের অক্ষদ্বয় বিবেচনা করে এর সমীকরণ এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[য. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২০]

সমাধান:

ক $3y^2 - 5x^2 = 15$

$\Rightarrow \frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{3} = 1$

$\Rightarrow \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$

$\therefore b = \sqrt{5}$; $a = \sqrt{3}$ এবং $b > a$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 + \frac{3}{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

উপকেন্দ্র $(0, \pm be) \equiv \left(0, \pm\sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right) \equiv (0, \pm 2\sqrt{2})$ **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই,

$3x^2 + 9x - 6y - 8 = 0$ ...... (i)

$\Rightarrow 3(x^2 + 3x) - 6y - 8 = 0$

$\Rightarrow 3\left\{x^2 + 2.x.\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} - 6y - 8 - \frac{27}{4} = 0$

$\Rightarrow 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 6y + \frac{59}{4}$

$\Rightarrow 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 6\left(y + \frac{59}{24}\right)$

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 2\left(y + \frac{59}{24}\right)$

$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 4 \times \frac{1}{2}\left(y + \frac{59}{24}\right)$; যা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

একে $X^2 = 4aY$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$X = x + \frac{3}{2}, Y = y + \frac{59}{24}, a = \frac{1}{2}$

এখন, উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক,

$(X, Y) = (\pm 2a, a)$

$\therefore X = \pm 2a$ | এবং $Y = a$

$\Rightarrow x + \frac{3}{2} = \pm 2 \times \frac{1}{2}$ | $\Rightarrow y + \frac{59}{24} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x + \frac{3}{2} = \pm 1$ | $\Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{59}{24}$

$\Rightarrow x = -\frac{3}{2} \pm 1$ | $\therefore y = -\frac{47}{24}$

$\therefore x = -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক

$\left(-\frac{5}{2}, \frac{-47}{24}\right)$ ও $\left(-\frac{1}{2}, \frac{-47}{24}\right)$ **(Ans.)**

নিয়ামকরেখার সমীকরণ,

$$Y = -a$$

অর্থাৎ, $y + \frac{59}{24} = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y = -\frac{71}{24}$$

$\therefore 24y + 71 = 0$ **(Ans.)**

গ কণিকটি হচ্ছে উপবৃত্ত যেহেতু উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{1}{2}$ $\left[\because \frac{1}{2} < 1\right]$

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ যেখানে, $a > b$ ..... (i)

এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $\frac{2b^2}{a} = 6$

$$\Rightarrow 2b^2 = 6a$$

$$\therefore b^2 = 3a \text{ .... (ii)}$$

আবার,

আমরা জানি, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ $[\because a > b]$

$$\Rightarrow e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - 3a}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{a^2 - 3a}{a^2}$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 12a = a^2$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 12a = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a = 0$$

$$\Rightarrow a(a - 4) = 0$$

$$\Rightarrow a = 4 \quad [\because a \neq 0]$$

$$\therefore a^2 = 16$$

a এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$b^2 = 3 \times 4$$

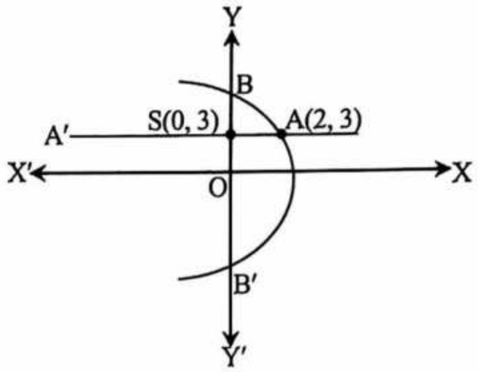
$$\therefore b^2 = 12$$

(i) নং সমীকরণে a^2 ও b^2 এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ **(Ans.)**

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2 \times 4 = 8$ একক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪



(ক) $9x^2 - 4y^2 = 36$ কণিকের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩]

(খ) A কে শীর্ষবিন্দু ও S কে উপকেন্দ্র ধরে অঙ্কিত পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২৩; ঢা. বো. ২২; দি. বো. ২১; রা. বো. ১৯; য. বো. ১৯; কু. বো. ১৭; সি. বো. ১৭]

(গ) উদ্দীপকে $OB' = 4$ এবং $AS = A'S$ হলে, BB' কে বৃহৎ অক্ষ ও AA' কে ক্ষুদ্র অক্ষ ধরে অঙ্কিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ বের কর। [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২১; সি. বো. ১৭]

সমাধান:

ক প্রদত্ত কণিকের সমীকরণ,

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$; যা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

একে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2$ এবং $b = 3$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{3^2}{2^2}}$

$$= \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

নিয়ামকের সমীকরণ, $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{2}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \pm\frac{4}{\sqrt{13}}$

$\therefore \sqrt{13}x = \pm 4$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, পরাবৃত্তের শীর্ষ A(2, 3) এবং উপকেন্দ্র S(0, 3)

যেহেতু পরাবৃত্তের শীর্ষ ও উপকেন্দ্রের কোটি একই সুতরাং অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল এবং x অক্ষের ঋণাত্মক দিকে উন্মুক্ত থাকবে।

এমন পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(y - 3)^2 = -4a(x - 2)$ ..... (i)

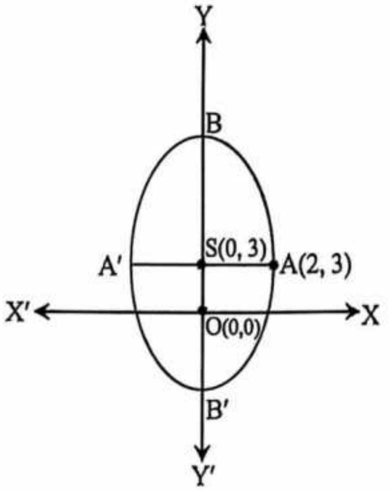
এখন, $a = AS = \sqrt{(2-0)^2 + (3-3)^2} = 2$

a এর মান (i) বসিয়ে পাই,

$$(y - 3)^2 = -4 \times 2(x - 2)$$

$\therefore (y - 3)^2 = -8(x - 2)$; যা নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

গ



এখানে, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 3)

S বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 3)

O বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)

$OB' = 4$

এবং $AS = A'S$

$AS = \sqrt{(2-0)^2 + (3-3)^2} = 2$

$OS = \sqrt{(0-0)^2 + (0-3)^2} = 3$

$\therefore AS = A'S = 2$

$B'S = OB' + OS = 4 + 3 = 7$

$BS = B'S = 7$

BB′ কে বৃহৎ অক্ষ এবং AA′ কে ক্ষুদ্র অক্ষ ধরে অঙ্কিত উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ, $2b = BB'$

$\Rightarrow 2b = B'S + BS = 7 + 7 = 14$

$\therefore b = 7$

এবং ক্ষুদ্র অক্ষ, $2a = AA'$

$\Rightarrow 2a = AS + A'S = 2 + 2 = 4$

$\therefore a = 2$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-0)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{7^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{7^2} = 1$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$

$= \sqrt{1 - \frac{2^2}{7^2}}$ $[\because a < b]$

$= \sqrt{1 - \frac{4}{49}}$

$= \sqrt{\frac{49-4}{49}}$

$= \sqrt{\frac{45}{49}}$

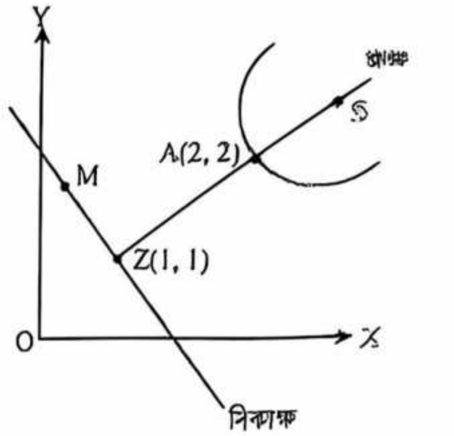
$= \frac{3\sqrt{5}}{7}$

$\therefore$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ,

$y - 3 = \pm be = \pm 7 \times \frac{3\sqrt{5}}{7} = \pm 3\sqrt{5}$

$\therefore y - 3 \pm 3\sqrt{5} = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $4x^2 + 5y^2 + 10y - 16x + 1 = 0$

(ক) $y^2 = 4(4 - x)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২; ঢা. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে কণিকটির উপকেন্দ্র ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২; কু. বো. ২১; ঢা. বো. ১৭; দি. বো. ১৬]

সমাধান:

ক প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 4(4 - x)$

$\Rightarrow y^2 = -4(x - 4)$ .... (i)

(i) নং সমীকরণ কে পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ $Y^2 = 4aX$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $X = x - 4$ এবং $Y = y$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)

অর্থাৎ, $X = 0$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x - 4 = 0$ এবং $y = 0$

$\therefore x = 4$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 0) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, অক্ষরেখা ও নিয়ামকরেখার ছেদবিন্দু Z(1, 1) এবং শীর্ষবিন্দু A(2, 2)

ধরি, উপকেন্দ্র $S(\alpha, \beta)$

পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে Z ও S এর মধ্যবিন্দু A

$\therefore \frac{\alpha + 1}{2} = 2$ | $\frac{\beta + 1}{2} = 2$

$\alpha + 1 = 4$ | $\Rightarrow \beta + 1 = 4$

$\Rightarrow \alpha = 4 - 1 = 3$ | $\Rightarrow \beta = 4 - 1 = 3$

$\therefore$ উপকেন্দ্র S(3, 3) **(Ans.)**

অক্ষরেখার সমীকরণ, $y - 1 = \frac{2-1}{2-1}(x - 1)$

$\Rightarrow y - 1 = x - 1$

$\therefore x - y = 0$

আবার, নিয়ামকরেখা অক্ষ রেখার ওপর লম্ব বলে নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $x + y + k = 0$ ...... (i)

(i) নং রেখা Z(1, 1) বিন্দুগামী

$\therefore 1 + 1 + k = 0$

$\Rightarrow 2 + k = 0$

$\therefore k = -2$

k এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x + y - 2 = 0$

নির্ণেয় পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র (3, 3)

এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $x + y - 2 = 0$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত কণিকের সমীকরণ,

$$4x^2 + 5y^2 + 10y - 16x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow 4(x^2 - 4x) + 5(y^2 + 2y) + 1 = 0$$
$$\Rightarrow 4(x^2 - 2.x.2 + 2^2) + 5(y^2 + 2.y.1 + 1^2) + 1 - 5 - 16 = 0$$
$$\Rightarrow 4(x-2)^2 + 5(y+1)^2 = 20$$
$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1 \text{ .... (i)}$$

(i) নং কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ, $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $X = x - 2$; $Y = y + 1$ এবং

$a = \sqrt{5}$, $b = 2$ অর্থাৎ, $a > b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{2^2}{(\sqrt{5})^2}}$

$$= \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

উপকেন্দ্র $(\pm ae, 0)$

অর্থাৎ, $X = \pm ae$

$\Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow x - 2 = \pm 1$

$\Rightarrow x = 2 \pm 1$

$\therefore x = 3, 1$

এবং $Y = 0$

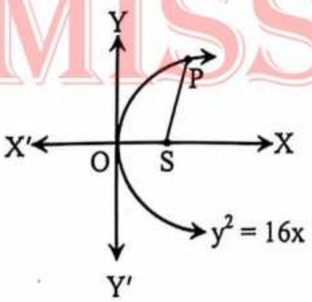
$\Rightarrow y + 1 = 0$

$\therefore y = -1$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয় $(3, -1)$ এবং $(1, -1)$ **(Ans.)**

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট একটি কণিক যা $(4, -2\sqrt{6})$ বিন্দুগামী; যার অক্ষদ্বয় যথাক্রমে x ও y অক্ষ বরাবর অবস্থিত।

(ক) $4x^2 + 5y^2 = 1$ উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২; সি. বো. ২২, চ. বো. ২১; ম. বো. ২১; ঢা. বো. ১৯; য. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ S উপকেন্দ্র এবং SP = 6 একক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২২]

সমাধান:

ক প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ,

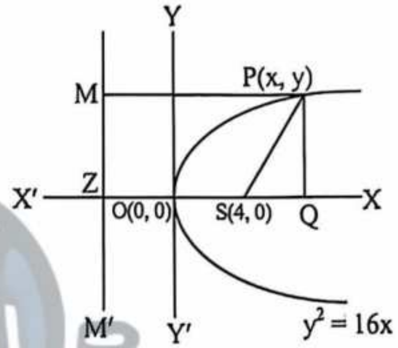
$$4x^2 + 5y^2 = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{5}} = 1$$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1$ কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$ অর্থাৎ, $a > b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ **(Ans.)**

খ



ধরি, পরাবৃত্তটির উপরস্থ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) যেখানে, SP = 6 এবং $y^2 = 16x$, এটিকে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ, $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = 16$ বা, $a = 4$

এখানে, $OS = OZ = a = 4$

অতএব, শীর্ষবিন্দু O(0, 0) এবং ফোকাস S(4, 0)। P বিন্দু থেকে অক্ষের উপর PQ লম্ব আঁকি।

এখন, $SP = PM$

$\Rightarrow SP = ZQ = OZ + OQ$

$\Rightarrow 6 = a + x = 4 + x$

$\Rightarrow x = 6 - 4$

$\therefore x = 2$

যেহেতু P(x, y) বিন্দুটি $y^2 = 16x$ এর উপর অবস্থিত।

সমীকরণটিতে, x = 2 বসিয়ে পাই,

$y^2 = 16 \times 2 = 32$

$\therefore y = \pm 4\sqrt{2}$

অতএব, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, \pm 4\sqrt{2})$ **(Ans.)**

গ দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

অর্থাৎ, কণিকটি একটি উপবৃত্ত।

ধরি, উপবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$....(i)

(i) নং উপবৃত্তটি $(4, -2\sqrt{6})$ বিন্দুগামী

$$\therefore \frac{4^2}{a^2} + \frac{(-2\sqrt{6})^2}{b^2} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{16}{a^2} + \frac{24}{b^2} = 1 \text{ .... (ii)}$$

আবার, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore a^2 = 2b^2$

এখন, (ii) নং হতে পাই,

$\frac{16}{2b^2} + \frac{24}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{8}{b^2} + \frac{24}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{32}{b^2} = 1$

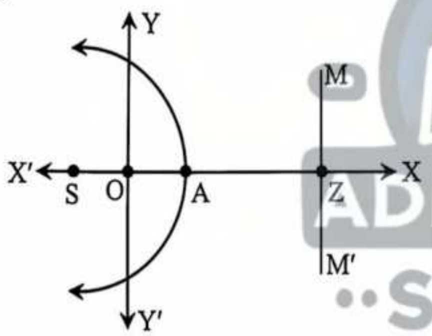
$\Rightarrow b^2 = 32$

$\therefore a^2 = 2 \times 32 = 64$

(i) নং সমীকরণে a^2 ও b^2 এর মান বসিয়ে পাই,

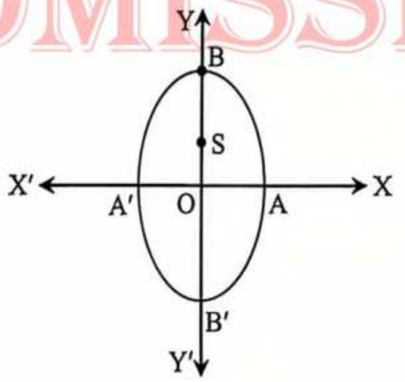
$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{32} = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭ দৃশ্যকল্প-১:



OA = OS = 1

দৃশ্যকল্প-২:



AA' = 6, AO < OB

(ক) কণিক ও কণিকের উপকেন্দ্রের সংজ্ঞা লিখ। [ঢা. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ নিয়ামকরেখা MZM' এর সমীকরণ x = 3 হলে পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্র S এর স্থানাঙ্ক (0, 4) হলে এর নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২]

সমাধান:

ক **কণিক:** কোনো সমতলে একটি স্থির বিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হতে যেসব বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত একটি ধ্রুবক, সেসব বিন্দুর সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথকে কণিক বলা হয়।

কণিকের উপকেন্দ্র: কণিকের যে স্থির বিন্দু থেকে কণিকের উপরস্থ চলমান বিন্দু ও নির্দিষ্ট রেখার লম্ব দূরত্বের অনুপাত ধ্রুবক হয়, কণিকের উক্ত স্থির বিন্দুকে কণিকের উপকেন্দ্র বলা হয়।

খ এখানে,

$OA = OS = 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $S(-1, 0)$

নিয়ামক MZM' এর সমীকরণ, $x = 3$

$\therefore x - 3 = 0$

ধরি, পরাবৃত্তের উপরস্থিত কোনো বিন্দু $P(x, y)$

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $SP = PM$

$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2} = \left|\frac{x-3}{\sqrt{1^2+0^2}}\right|$

$\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = (x-3)^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 6x + 9$

$\Rightarrow y^2 = -8x + 8$

$\therefore y^2 + 8x - 8 = 0$ **(Ans.)**

আবার, $y^2 + 8x - 8 = 0$

$\Rightarrow y^2 = -8x + 8$

$\therefore y^2 = -8(x-1)$; যা $y^2 = -4ax$ আকারের।

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |-8| = 8$ একক **(Ans.)**

গ দৃশ্যকল্প-২ এর উপবৃত্তটির বৃহদাক্ষ y অক্ষ বরাবর ও ক্ষুদ্র অক্ষ x অক্ষ বরাবর।

এরূপ উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $[b > a]$

এরূপ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(0, \pm be)$

দেওয়া আছে, $AA' = 6$ একক

$\Rightarrow 2a = 6$

$\therefore a = 3$

আবার, উপকেন্দ্র $S(0, 4)$

এটিকে উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(0, be)$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$\therefore be = 4$ ...... (i)

$\Rightarrow b\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = 4$ $[\because b > a]$

$\Rightarrow b^2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = 16$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow b^2 - a^2 = 16$

$\Rightarrow b^2 = 16 + a^2 = 16 + 3^2$ $[\because a = 3]$

$\therefore b = 5$

$\therefore e = \frac{4}{b} = \frac{4}{5}$ [(i) থেকে]

আবার, $b > a$ হলে, উপবৃত্তের নিয়ামকরেখার সমীকরণ,

$y = \pm\frac{b}{e} = \pm\frac{5}{\frac{4}{5}} = \pm\frac{5 \times 5}{4}$

$\therefore 4y = \pm 25$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮ $A(1, -3), B(0, 7), C(1, 1)$

(ক) $4x^2 + 5y^2 = 1$ উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও এর অনুরূপ নিয়ামক রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [দি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২১]

(খ) $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ A এবং এটি B বিন্দুগামী হলে a, b, c এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২; রা. বো. ২১]

(গ) A ও C কোনো উপবৃত্তের শীর্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে, উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২২]

সমাধান:

ক প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ, $4x^2 + 5y^2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{5}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1$$; যা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

এটিকে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = \frac{1}{2}$ এবং $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $a > b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্র ও অনুরূপ নিয়ামক রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$$\frac{a}{e} - ae = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y = ax^2 + bx + c$ ..... (i)

পরাবৃত্তের শীর্ষ $A(1, -3)$ বিন্দুতে এবং অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল।

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 1)^2 = 4a'(y + 3)$ ..... (ii)

এখন, (ii) নং পরাবৃত্তটি $B(0, 7)$ বিন্দুগামী।

$\therefore (0 - 1)^2 = 4a'(7 + 3)$

$\Rightarrow 1 = 40a'$ $\therefore a' = \frac{1}{40}$

(ii) নং সমীকরণে $a' = \frac{1}{40}$ বসিয়ে পাই,

$(x - 1)^2 = 4.\frac{1}{40}(y + 3)$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{10}(y + 3)$

$\Rightarrow 10x^2 - 20x + 10 = y + 3$

$\therefore y = 10x^2 - 20x + 7$..... (iii)

এখন (i) নং ও (iii) নং সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$a = 10, b = -20, c = 7$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $a = 10, b = -20, c = 7$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দুদ্বয় $A(1, -3)$ ও $C(1, 1)$

এখানে, উপবৃত্তটির বৃহদাক্ষ Y অক্ষের সমান্তরাল যেহেতু শীর্ষ বিন্দুদ্বয়ের ভুজ একই।

এবং কেন্দ্রের স্থানাংক $\left(\frac{1+1}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (1, -1)$

ধরি, $(1, -1)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$ .... (i) $[b > a]$

আবার, বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য,

$2b = AC = \sqrt{(1-1)^2 + (-3-1)^2} = 4$

$\Rightarrow b = 2$

$\therefore b^2 = 4$

এখানে, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow e^2 = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 1 - \frac{a^2}{b^2} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 1 - \frac{3}{4} = \frac{a^2}{4}$ $[\because b^2 = 4]$

$\Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore a^2 = 1$

$\therefore$ (i) নং সমীকরণে a^2 ও b^2 এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯ দৃশ্যকল্প-১: $x = by^2 + cy + a$ একটি কণিক।

দৃশ্যকল্প-২: কোনো পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত-বিন্দুদ্বয় $(-2, 2)$ এবং $(-4, 2)$।

(ক) $x^2 - 4y^2 = 2$ কণিকের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

[চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২২; ঢা. বো. ২১; সকল বো. ১৮; চ. বো. ১৭; সি. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-১ এ কণিকের শীর্ষবিন্দু $(1, -2)$ এবং এটি $(3, 0)$ বিন্দুগামী হলে a, b, c এর মান নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২৩; ঢা. বো. ২১]

সমাধান:

ক এখানে, $x^2 - 4y^2 = 2$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{4y^2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$, একে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = \sqrt{2}$; $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{(\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ **(Ans.)**

খ এখানে, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে $(-2, 2)$ এবং $(-4, 2)$

প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের যেহেতু কোটি একই সুতরাং উপকেন্দ্রিক লম্ব x অক্ষের সমান্তরাল।

সুতরাং, অক্ষরেখা হবে y অক্ষের সমান্তরাল।

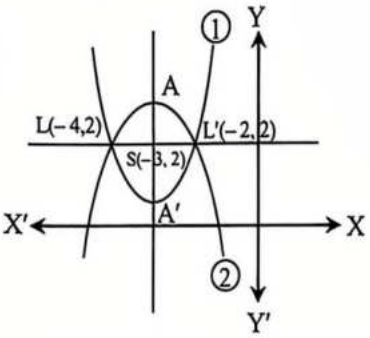
$\therefore$ উপকেন্দ্র $S \equiv \left(\frac{-2-4}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \equiv (-3, 2)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$

$|4a| = \sqrt{(-2+4)^2 + (2-2)^2} = 2$

$\therefore 4a = \pm 2$

$\Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$



(α, β) শীর্ষ ও অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$

$\Rightarrow (x-\alpha)^2 = \pm 4 \times \frac{1}{2}(y-\beta)$

পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $X^2 = 4aY$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

উপকেন্দ্র $(0, a)$

$\therefore X = 0$

$\Rightarrow x - \alpha = 0$

$\Rightarrow -3 - \alpha = 0$ [উপকেন্দ্রের ভুজ $x = -3$]

$\therefore \alpha = -3$

এবং $Y = a$

$\Rightarrow y - \beta = \pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2 - \beta = \pm\frac{1}{2}$ [উপকেন্দ্রের কোটি $y = 2$]

(+) নিয়ে,	(−) নিয়ে,
$2 - \beta = \frac{1}{2}$	$2 - \beta = -\frac{1}{2}$
$\therefore \beta = \frac{3}{2}$	$\therefore \beta = \frac{5}{2}$

$\therefore$ শীর্ষ $\left(-3, \frac{3}{2}\right)$ বা $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$

$\therefore \left(-3, \frac{3}{2}\right)$ শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(x+3)^2 = 4 \times \frac{1}{2}\left(y - \frac{3}{2}\right)$

$\therefore (x+3)^2 = 2\left(y - \frac{3}{2}\right)$ **(Ans.)**

আবার, $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$ শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(x+3)^2 = -4 \times \frac{1}{2}\left(y - \frac{5}{2}\right)$

$\therefore (x+3)^2 = -2\left(y - \frac{5}{2}\right)$ **(Ans.)**

গ দৃশ্যকল্প-১ এ প্রদত্ত কণিক, $x = by^2 + cy + a$ ...... **(i)**

কণিকটির অক্ষরেখা x অক্ষের সমান্তরাল

এখন, $(1, -2)$ শীর্ষবিন্দু এবং অক্ষরেখা x অক্ষের সমান্তরাল পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(y+2)^2 = 4p(x-1)$ .... (ii)

(ii) নং সমীকরণ $(3, 0)$ বিন্দুগামী

$\therefore (0+2)^2 = 4p(3-1)$

$\Rightarrow 4 = 4p \times 2$

$\therefore 4p = 2$

$\therefore$ (ii) নং হতে পাই,

$(y+2)^2 = 2(x-1)$

$\Rightarrow y^2 + 4y + 4 = 2x - 2$

$\Rightarrow 2x = y^2 + 4y + 6$

$\Rightarrow x = \frac{y^2}{2} + 2y + 3$ ...... (iii)

(iii) নং কে সমীকরণকে (i) এর সাথে তুলনা কর পাই,

$a = 3, b = \frac{1}{2}, c = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০ দৃশ্যকল্প-১: পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(1, -2)$ এবং $2x - y + 4 = 0$ রেখাটি শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক।

দৃশ্যকল্প-২: উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $S(-2, 0)$ এবং $S'(2, 0)$

(ক) একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব উহার বৃহৎ অক্ষের এক-তৃতীয়াংশ। উহার উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর উপরস্থ কোনো বিন্দু $(4, 0)$ হলে, উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ [যেখানে $a > b$]

উপকেন্দ্রিক লম্ব $= \frac{2b^2}{a}$ এবং বৃহৎ অক্ষ $= 2a$

প্রশ্নমতে, $\frac{2b^2}{a} = \frac{1}{3} \times 2a$

$\Rightarrow \frac{b^2}{a} = \frac{a}{3}$

$\therefore a^2 = 3b^2$

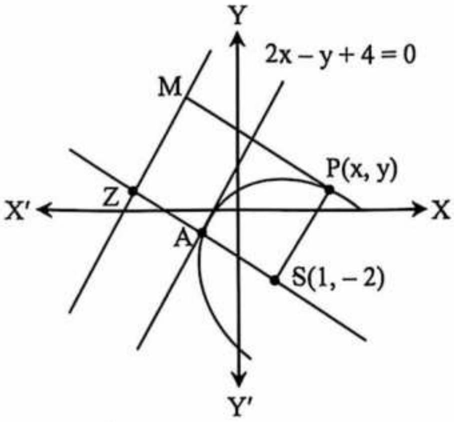
$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$= \sqrt{1 - \frac{b^2}{3b^2}}$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{3}}$

$= \sqrt{\frac{2}{3}}$ **(Ans.)**

ঘ দেওয়া আছে, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র, $S(1, -2)$ এবং $2x - y + 4 = 0$ রেখাটি শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকরেখা।
তাহলে, প্রদত্ত রেখা এবং পরাবৃত্তের নিয়ামকরেখা পরস্পর সমান্তরাল হবে।



$\therefore$ নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $2x - y + k = 0$ ..... (i)
এখানে, k ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।
যেহেতু, Z ও S এর মধ্যবিন্দু A
$\therefore$ আমরা পাই, $SZ = 2SA$

$\Rightarrow \left|\frac{2\times1-(-2)+k}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right| = 2\left|\frac{2\times1-(-2)+4}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right|$

$\Rightarrow \left|\frac{2+2+k}{\sqrt{4+1}}\right| = 2\left|\frac{2+2+4}{\sqrt{4+1}}\right|$

$\Rightarrow \left|\frac{k+4}{\sqrt{5}}\right| = 2\left|\frac{8}{\sqrt{5}}\right|$

$\Rightarrow k + 4 = 16$

$\therefore k = 12$

k এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে প্রাপ্ত নিয়ামক রেখার সমীকরণ,
$2x - y + 12 = 0$
ধরি, পরাবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে কোনো একটি বিন্দু।

তাহলে, $SP = \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$
$= \sqrt{x^2-2x+1+y^2+4y+4}$
$= \sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}$

এবং P থেকে MZ এর উপর লম্ব দূরত্ব,

$PM = \left|\frac{2x-y+12}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right|$
$= \left|\frac{2x-y+12}{\sqrt{5}}\right|$

পরাবৃত্তের সংজ্ঞা হতে পাই,
$SP = PM$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5} = \left|\frac{2x-y+12}{\sqrt{5}}\right|$

$\Rightarrow x^2+y^2-2x+4y+5 = \frac{(2x-y+12)^2}{5}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 5x^2+5y^2-10x+20y+25 = 4x^2+y^2+144-4xy-24y+48x$

$\Rightarrow x^2+4y^2+4xy-58x+44y-119 = 0$

$\therefore (x+2y)^2 - 58x + 44y - 119 = 0$; যা নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $S(-2, 0)$, $S'(2, 0)$
এখানে, S ও S′ এর মধ্যবিন্দু উপবৃত্তটির কেন্দ্র।

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (0, 0)$

যেহেতু উপকেন্দ্রদ্বয়ের কোটি শূন্য সুতরাং অক্ষরেখা X অক্ষ
(0, 0) কেন্দ্রবিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ...... (i)
(i) নং উপবৃত্তের উপরস্থ কোনো বিন্দু $P(4, 0)$। তাই $P(4, 0)$ বিন্দুটি দ্বারা (i) নং সমীকরণ সিদ্ধ হবে।

$\therefore \frac{4^2}{a^2}+\frac{0}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{16}{a^2}+0 = 1$

$\therefore a^2 = 16$

(i) নং উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$, $(-ae, 0)$

$\therefore 2ae = SS'$

$\Rightarrow 2ae = \sqrt{(-2-2)^2+(0-0)^2}$

$\Rightarrow 2ae = 4$

$\Rightarrow ae = 2$

$\Rightarrow a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = 2$

$\Rightarrow a\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = 2$

$\Rightarrow \sqrt{a^2-b^2} = 2$

$\Rightarrow a^2 - b^2 = 4$

$\Rightarrow b^2 = a^2 - 4$

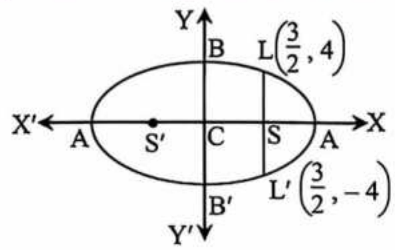
$\Rightarrow b^2 = 16 - 4$

$\Rightarrow b^2 = 12$

$\therefore a^2$ এবং b^2 এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\therefore \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12} = 1$; যা নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১১ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $f(x, y) = x^2 - 8x - 4y + 20$ একটি ফাংশন।

(ক) $3x^2 + 2y^2 = 1$ উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।
[সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$ হলে, এর সমীকরণ নির্ণয় কর।
[সি. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে, $f(x, y) = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, নিয়ামকের সমীকরণ ও অক্ষরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২২]

সমাধান:

ক প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ, $3x^2 + 2y^2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

সমীকরণটিকে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$; এখানে, $b > a$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

খ এখানে, $L\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ ও $L'\left(\frac{3}{2}, -4\right)$

উপকেন্দ্র S হলো L ও L′ এর মধ্যবিন্দু

$$\therefore S = \left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{2}, \frac{4-4}{2}\right) \equiv \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .... (i) [যেহেতু কেন্দ্র (0, 0)]

যেখানে, $a > b$ [$\because$ বৃহৎ অক্ষ x অক্ষ]

উপকেন্দ্র $(\pm ae, 0)$

অর্থাৎ, $(\pm ae, 0) \equiv \left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$$\therefore \pm ae = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \pm a \times \frac{1}{3} = \frac{3}{2} \quad \left[\because e = \frac{1}{3}\right]$$

$$\Rightarrow a = \pm\frac{9}{2}$$

$$\therefore a^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

আবার, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$$\Rightarrow e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$= \frac{81}{4} \times \left(1 - \frac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{81}{4} \times \frac{8}{9}$$

$$= 18$$

এখন, a ও b এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $\frac{4x^2}{81} + \frac{y^2}{18} = 1$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x, y) = x^2 - 8x - 4y + 20$

এবং $f(x, y) = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 4y + 20 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x = 4y - 20$$

$$\Rightarrow x^2 - 2.x.4 + 16 = 4y - 20 + 16$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = 4(y-1)$$

$\Rightarrow (x-4)^2 = 4 \times 1(y-1)$; যা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

এটিকে $X^2 = 4aY$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$X = x - 4,\ Y = y - 1,\ a = 1$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ:

$Y = a$

$\Rightarrow y - 1 = 1$

$\therefore y = 2$ **(Ans.)**

নিয়ামকের সমীকরণ:

$Y = -a$

$\Rightarrow y - 1 = -1$

$\therefore y = 0$ **(Ans.)**

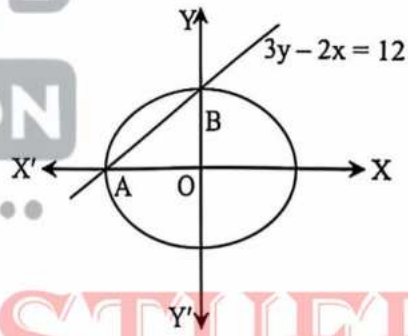
অক্ষরেখার সমীকরণ,

$X = 0$

$\Rightarrow x - 4 = 0$

$\therefore x = 4$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১২ উদ্দীপক-১:



উদ্দীপক-২: $5x^2 - 20x - y + 19 = 0$ একটি পরাবৃত্ত।

(ক) $y^2 = 80x$ কণিকের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২]

(খ) উদ্দীপক-১ এ বর্ণিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২]

(গ) উদ্দীপক-২ এর পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু, ফোকাস, উপকেন্দ্রিক লম্ব ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ বের কর।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $y^2 = 80x$

$\Rightarrow y^2 = 4 \times 20x$ যা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

এটিকে $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 20$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাংক $= (a, 0) = (20, 0)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, AB রেখার সমীকরণ,

$3y - 2x = 12$

$$\Rightarrow \frac{3y}{12} - \frac{2x}{12} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y}{4} + \frac{x}{-6} = 1$$

$\Rightarrow \frac{x}{-6} + \frac{y}{4} = 1$

$\therefore OA = |-6| = 6$ একক

$\therefore a = 6$

$OB = |4| = 4$ একক

$\therefore b = 4$

$\therefore a > b$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x = \pm ae$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4^2}{6^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x = \pm ae = \pm 6\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore x = \pm 2\sqrt{5}$ **(Ans.)**

গ উদ্দীপক-২ হতে পাই,

$5x^2 - 20x - y + 19 = 0$

$\Rightarrow 5(x^2 - 4x) - y + 19 = 0$

$\Rightarrow 5(x^2 - 2.x.2 + 4) = y - 19 + 20$

$\Rightarrow 5(x-2)^2 = y + 1$

$\Rightarrow (x-2)^2 = \frac{1}{5}(y+1)$

$\Rightarrow (x-2)^2 = 4 \times \frac{1}{20}(y+1)$

যা $X^2 = 4aY$ পরাবৃত্তের অনুরূপ।

যেখানে, $X = x - 2$, $a = \frac{1}{20}$ এবং $Y = y + 1$

শীর্ষবিন্দু (0, 0)

অর্থাৎ, $X = 0$	এবং $Y = 0$
$\Rightarrow x - 2 = 0$	$\Rightarrow y + 1 = 0$
$\therefore x = 2$	$\therefore y = -1$

$\therefore$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু $(2, -1)$ **(Ans.)**

ফোকাস (0, a)

অর্থাৎ, $X = 0$	এবং $Y = a$
$\Rightarrow x - 2 = 0$	$\Rightarrow y + 1 = \frac{1}{20}$
$\therefore x = 2$	$\Rightarrow y = \frac{1}{20} - 1$
	$\therefore y = -\frac{19}{20}$

$\therefore$ পরাবৃত্তটির ফোকাস $\left(2, -\frac{19}{20}\right)$ **(Ans.)**

পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ,

$Y - a = 0$

$\Rightarrow y + 1 - \frac{1}{20} = 0$

$\therefore 20y + 19 = 0$ **(Ans.)**

নিয়ামক রেখার সমীকরণ,

$Y + a = 0$

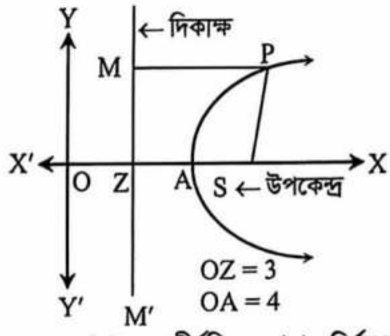
$\Rightarrow y + 1 + \frac{1}{20} = 0$

$\Rightarrow y + \frac{21}{20} = 0$

$\Rightarrow 20y + 21 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ➤ ১৩ দৃশ্যকল্প-১: $25x^2 + ky^2 - 25k = 0$.

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) $x^2 = -22(y - 17)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দুগামী হলে k এর মান নির্ণয় কর। আবার উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক বের কর।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত কণিকটির আদর্শ সমীকরণ নির্ণয়ের মাধ্যমে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 = -22(y - 17)$

$\Rightarrow x^2 = -4 \cdot \frac{11}{2}(y - 17)$; যা $X^2 = -4aY$ আকারের।

যেখানে, $X = x$, $a = \frac{11}{2}$ এবং $Y = y - 17$

শীর্ষবিন্দু (0, 0)	এবং $Y = 0$
অর্থাৎ, $X = 0$	$\Rightarrow y - 17 = 0$
$\therefore x = 0$	$\therefore y = 17$

$\therefore$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (0, 17) **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই,

$25x^2 + ky^2 - 25k = 0$ .... (i)

যেহেতু, (i) নং উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দুগামী

$\therefore 25.6^2 + k.4^2 - 25k = 0$

$\Rightarrow 900 + 16k - 25k = 0$

$\Rightarrow 900 - 9k = 0$

$\Rightarrow 9k = 900$

$\therefore k = 100$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $k = 100$ **(Ans.)**

আবার, $k = 100$ হলে (i) নং হতে পাই,

$25x^2 + 100y^2 - 25 \times 100 = 0$

$\Rightarrow 25x^2 + 100y^2 - 2500 = 0$

$\Rightarrow 25x^2 + 100y^2 = 2500$

$\Rightarrow \frac{25x^2}{2500} + \frac{100y^2}{2500} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ ....(ii)

(ii) নং উপবৃত্তকে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 10$, $b = 5$ এবং $a > b$

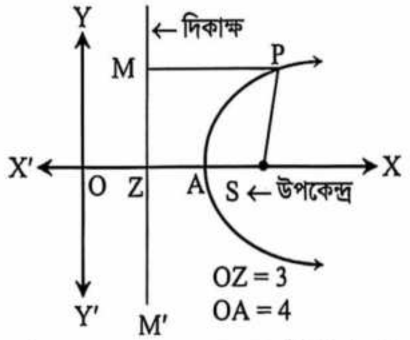
$\therefore$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

এবং উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, $(\pm ae, 0)$

$$= \left(\pm 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$= (\pm 5\sqrt{3}, 0) \text{ (Ans.)}$$

গ দৃশ্যকল্প–২ হতে পাই,



উল্লিখিত পরাবৃত্তের অক্ষরেখা x অক্ষ এবং শীর্ষ $A(\alpha, \beta)$ হলে, পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ ...... (i)

এখন, $OZ = 3$ এবং $OA = 4$

$\therefore a = AS = AZ = OA - OZ = 4 - 3 = 1$

$\therefore$ শীর্ষ A এর স্থানাঙ্ক (4, 0)

a ও A এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

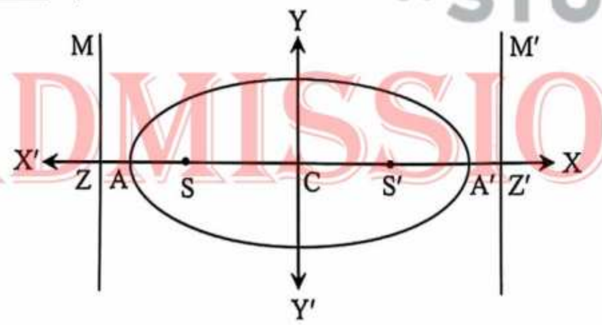
$(y - 0)^2 = 4 \times 1(x - 4)$

$\therefore y^2 = 4(x - 4)$ যা $Y^2 = 4aX$ আকারের।

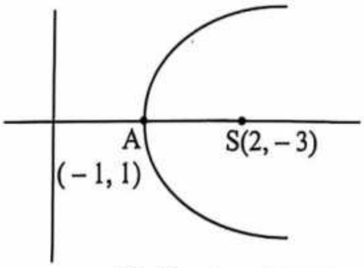
যেখানে, $Y = y, X = x - 4$ এবং $a = 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |4.1| = 4$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৪ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



(ক) $\mathbf{3x - 2y + 5 = 0}$ **রেখাটি** $\mathbf{y^2 = 4ax}$ **পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে a এর মান নির্ণয় কর।**

(খ) **দৃশ্যকল্প-১ এ** $\mathbf{SS' = 4\sqrt{3}}$ **এবং** $\mathbf{ZZ' = 14\sqrt{3}}$ **হলে, উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।**

(গ) **দৃশ্যকল্প-২ হতে পরাবৃত্তটির নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান:

ক প্রদত্ত রেখা সমীকরণ, $3x - 2y + 5 = 0$

$\Rightarrow 2y = 3x + 5$

$\therefore y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ .... (i)

(i) নং সমীকরণকে $y = mx + c$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $m = \frac{3}{2}$, $c = \frac{5}{2}$ এবং পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 4ax$ .... (ii)

আমরা জানি,

$y = mx + c$ রেখা $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে $c = \frac{a}{m}$ হয়।

$\therefore c = \frac{a}{m}$

$\Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{a}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{2a}{3} \Rightarrow 4a = 15 \therefore a = \frac{15}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $a = \frac{15}{4}$ **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প–১ হতে পাই,

এখানে, উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $SS' = 4\sqrt{3}$

এবং নিয়ামক রেখা দুটির দূরত্ব $ZZ' = 14\sqrt{3}$

মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ....(i)

(i) নং উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব = 2ae

$\therefore 2ae = SS'$

$\Rightarrow 2ae = 4\sqrt{3}$

$\therefore e = \frac{2\sqrt{3}}{a}$ .... (ii)

$\therefore$ নিয়ামকরেখা দুটির দূরত্ব = ZZ'

$\Rightarrow \frac{2a}{e} = 14\sqrt{3}$

$\Rightarrow 2a = 14\sqrt{3}e$

$\Rightarrow 2a = 14\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{a}$ [(ii) নং হতে]

$\Rightarrow 2a^2 = 84$

$\therefore a^2 = 42$

এখন, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{42}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{42}}$

$\Rightarrow \frac{2}{7} = 1 - \frac{b^2}{42}$ [মান বসিয়ে]

$\Rightarrow 2 = \frac{42 - b^2}{6}$ [উভয়পক্ষে 7 দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow 42 - b^2 = 12$

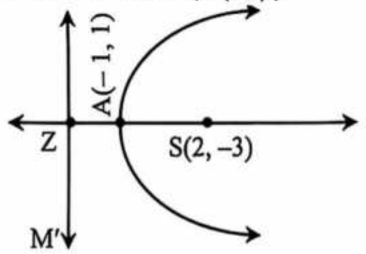
$\Rightarrow b^2 = 42 - 12$

$\therefore b^2 = 30$

$\therefore a^2$ এবং b^2 মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $\frac{x^2}{42} + \frac{y^2}{30} = 1$

যা নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

গ মনে করি, পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র $S(2, -3)$, শীর্ষবিন্দু $A(-1, 1)$ এবং অক্ষরেখা ও নিয়ামকরেখার ছেদবিন্দু $Z(\alpha, \beta)$।



SZ এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{\alpha+2}{2}, \frac{\beta-3}{2}\right)$

যেহেতু, $A(-1, 1)$, SZ এর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং, $\left(\frac{\alpha+2}{2}, \frac{\beta-3}{2}\right) \equiv (-1, 1)$

অর্থাৎ, $\frac{\alpha+2}{2} = -1$
$\Rightarrow \alpha + 2 = -2$
$\therefore \alpha = -4$

এবং $\frac{\beta-3}{2} = 1$
$\Rightarrow \beta - 3 = 2$
$\therefore \beta = 5$

$\therefore$ Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $(-4, 5)$

এখন, অক্ষরেখার সমীকরণ অর্থাৎ SZ রেখার সমীকরণ,

$\frac{x-2}{2+4} = \frac{y+3}{-3-5}$

$\Rightarrow \frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-8}$

$\Rightarrow -8x + 16 = 6y + 18$

$\Rightarrow 8x + 6y + 2 = 0$

$\therefore 4x + 3y + 1 = 0$ ...... (i) যা অক্ষরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

ধরি, নিয়ামকরেখার সমীকরণ অর্থাৎ (i) নং রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ,

$3x - 4y + k = 0$ .... (ii) যা $Z(-4, 5)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 3 \times (-4) - 4 \times (5) + k = 0$

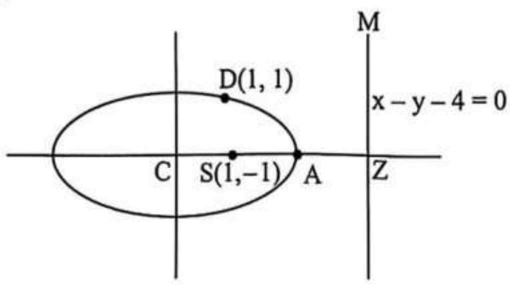
$\Rightarrow -12 - 20 + k = 0$

$\therefore k = 32$

k এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$\therefore 3x - 4y + 32 = 0$; যা নির্ণেয় নিয়ামকরেখার সমীকরণ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৫ দৃশ্যকল্প-১:



উপবৃত্তের উপকেন্দ্র S এবং নিয়ামক রেখা MZ

দৃশ্যকল্প-২: $5x^2 + 4y^2 - 10x - 8y - 11 = 0$

(ক) $y^2 = -6x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে কণিকটির নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ১৯; ব. বো. ১৭]

সমাধানঃ

ক প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = -6x$, একে পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = -6$

আমরা জানি, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |-6| = 6$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(1, -1)$

নিয়ামকরেখা $MZ \equiv x - y - 4 = 0$

ধরি, উপবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$। উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$SP = e.PM$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = e \cdot \left|\frac{x-y-4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}\right|$ ...... (i)

(i) নং সমীকরণ $D(1, 1)$ বিন্দুগামী

$\therefore \sqrt{(1-1)^2 + (1+1)^2} = e \cdot \left|\frac{1-1-4}{\sqrt{1+1}}\right|$

$\Rightarrow \sqrt{0 + 2^2} = e \cdot \left|\frac{-4}{\sqrt{2}}\right| \Rightarrow 2 = e \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ (i) নং সমীকরণে $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ বসিয়ে পাই,

$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left|\frac{x-y-4}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-y-4)^2}{2}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = \frac{1}{4}(x-y-4)^2$

$\Rightarrow 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 + 8y + 4 = x^2 + y^2 + 16 - 2xy - 8x + 8y$

$\therefore 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 8 = 0$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত কণিকটির সমীকরণ,

$5x^2 + 4y^2 - 10x - 8y - 11 = 0$

$\Rightarrow 5(x^2 - 2x) + 4(y^2 - 2y) - 11 = 0$

$\Rightarrow 5(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 - 2y + 1) - 11 - 5 - 4 = 0$

$\Rightarrow 5(x-1)^2 + 4(y-1)^2 = 20$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$ .... (i)

(i) নং কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ,

$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$X = x - 1, Y = y - 1$

$a = 2$; $b = \sqrt{5}$ $\therefore b > a$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ, $Y = \pm \frac{b}{e}$

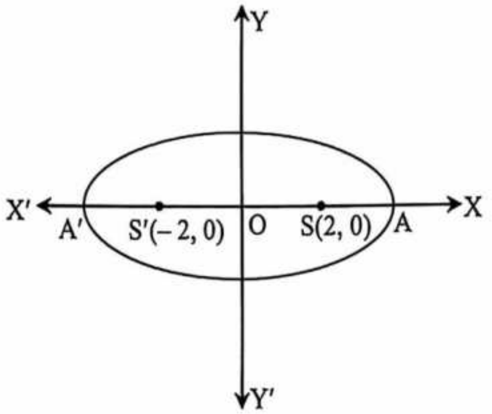
অর্থাৎ, $y - 1 = \pm \frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \Rightarrow y - 1 = \pm 5$

(+) চিহ্ন নিয়ে পাই,
$\therefore y - 1 = 5$
$\Rightarrow y = 5 + 1 = 6$
$\therefore y = 6$

এবং (−) চিহ্ন নিয়ে পাই,
$y - 1 = -5$
$\Rightarrow y = -5 + 1 = -4$
$\therefore y = -4$

নির্ণেয় কণিকটির নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $y = 6, y = -4$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৬ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

(ক) $y^2-2x^2=2$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $AA'=8$ হলে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) $x-y-5=0$ রেখাটি দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত কণিকটিকে স্পর্শ করলে স্পর্শ-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ, $y^2-2x^2=2$

$\Rightarrow \frac{y^2}{2}-\frac{2x^2}{2}=1$

$\therefore \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{x^2}{1^2}=1$ ...... (i)

(i) নং অধিবৃত্তকে $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ অধিবৃত্তের সাথে তুলনা করে পাই,

$a=1, b=\sqrt{2}$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2+1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই,

উপকেন্দ্রদ্বয় $S(2, 0)$ এবং $S'(-2, 0)$

এখানে, বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $AA'=8$ একক

মনে করি, উপবৃত্তের উপরস্থ কোনো বিন্দু $P(x, y)$

$\therefore SP=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}$

এবং $S'P=\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}$

যেহেতু উপবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব দুইটির সমষ্টি বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান।

তাহলে, $SP+S'P=AA'$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=8$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}=8-\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Rightarrow (x-2)^2+y^2=\left(8-\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right)^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2=64-16\sqrt{(x+2)^2+y^2}+(x+2)^2+y^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x+4=64-16\sqrt{(x+2)^2+y^2}+x^2+4x+4+y^2$

$\Rightarrow 16\sqrt{(x+2)^2+y^2}=8x+64$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+2)^2+y^2}=x+8$

$\Rightarrow 4(x^2+4x+4+y^2)=(x+8)^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 4x^2+4y^2+16x+16=x^2+16x+64$

$\Rightarrow 3x^2+4y^2=48$

$\Rightarrow \frac{3x^2}{48}+\frac{4y^2}{48}=1$

$\therefore \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

সরলরেখার সমীকরণ, $x-y-5=0$

$\therefore x=y+5$ .... (i)

এবং দৃশ্যকল্প-১ এর সমীকরণ, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ...... (ii)

$\Rightarrow \frac{(y+5)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ [(i) নং হতে মান বসিয়ে]

$\Rightarrow 9(y+5)^2+16y^2=144$

$\Rightarrow 9y^2+90y+225+16y^2=144$

$\Rightarrow 25y^2+90y+81=0$ .... (iii)

$\Rightarrow (5y)^2+2.5y.9+9^2=0$

$\Rightarrow (5y+9)^2=0$

$\Rightarrow (5y+9)(5y+9)=0$

$\therefore y=-\frac{9}{5}, -\frac{9}{5}$

যেহেতু x এর মান দুইটি সমান সুতরাং প্রদত্ত রেখাটি প্রদত্ত উপবৃত্তে স্পর্শক।

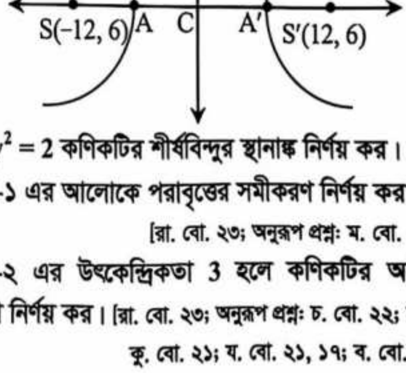
(i) নং এ y এর মান বসিয়ে পাই,

$x=-\frac{9}{5}+5=\frac{16}{5}$

$\therefore$ স্পর্শ বিন্দুটি $\left(\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}\right)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ দৃশ্যকল্প-১: একটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু **(1, 1)** এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ, **$2x+y-1=0$**

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) $2x^2+y^2=2$ কণিকটির শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২৩; সি. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর উৎকেন্দ্রিকতা 3 হলে কণিকটির অসীমতট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২; দি. বো.২২, ২১; কু. বো. ২১; য. বো. ২১, ১৭; ব. বো. ১৯; রা. বো. ১৭]

সমাধানঃ

ক $2x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$; যা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

$\therefore a = 1 ; b = \sqrt{2} \therefore b > a$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, \pm b) \equiv (0, \pm\sqrt{2})$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $A(1, 1)$ এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $2x + y - 1 = 0$ ..... (i)

$\therefore$ অক্ষরেখার সমীকরণ, $x - 2y + k = 0$ যা $A(1, 1)$ বিন্দুগামী,

$\therefore 1 - 2.1 + k = 0$

$\Rightarrow -1 + k = 0$

$\therefore k = 1$

$\therefore$ অক্ষরেখার সমীকরণ, $x - 2y + 1 = 0$ ..... (ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ সমাধান করে পাই, $x = \frac{1}{5}, y = \frac{3}{5}$

$\therefore$ নিয়ামকের পাদবিন্দু $Z\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$

ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(\alpha, \beta)$

$\therefore$ ZS এর মধ্যবিন্দু হবে $A(1, 1)$

$\therefore \frac{\alpha + \frac{1}{5}}{2} = 1$ এবং $\frac{\beta + \frac{3}{5}}{2} = 1$

$\Rightarrow \alpha = 2 - \frac{1}{5}$ | $\Rightarrow \beta = 2 - \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{9}{5}$ | $\Rightarrow \beta = \frac{7}{5}$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $S\left(\frac{9}{5}, \frac{7}{5}\right)$

ধরি, পরাবৃত্তের উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু।

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $SP = PM$

$$\sqrt{\left(x - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{5}\right)^2} = \left|\frac{2x + y - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right|$$

$\Rightarrow \left(x - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{5}\right)^2 = \frac{(2x + y - 1)^2}{5}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 5\left(x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{81}{25} + y^2 - \frac{14}{5}y + \frac{49}{25}\right) = (2x + y - 1)^2$

$\Rightarrow 5\left(x^2 + y^2 - \frac{18}{5}x - \frac{14}{5}y + \frac{26}{5}\right) = 4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 4x - 2y$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 18x - 14y + 26 - 4x^2 - y^2 - 1 - 4xy + 4x + 2y = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 - 4xy - 14x - 12y + 25 = 0$

$\therefore (x - 2y)^2 - 14x - 12y + 25 = 0$ **(Ans.)**

গ এখানে, অধিবৃত্তের আড় অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল।

উপকেন্দ্রদ্বয় $S(-12, 6)$ ও $S'(12, 6)$

কেন্দ্র $C\left(\frac{-12 + 12}{2}, \frac{6 + 6}{2}\right) = (0, 6)$

এখন, $(0, 6)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{(x - 0)^2}{a^2} - \frac{(y - 6)^2}{b^2} = 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $SS' = \sqrt{(12 + 12)^2 + (6 - 6)^2}$

$= \sqrt{(24)^2 + 0} = 24$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = 3$ [দেওয়া আছে]

$\therefore 2ae = 24$

$\Rightarrow 2 \times a \times 3 = 24$

$\Rightarrow 6a = 24$

$\therefore a = 4$

আবার, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow 3^2 = 1 + \frac{b^2}{4^2} \Rightarrow 9 = 1 + \frac{b^2}{16} \Rightarrow \frac{b^2}{16} = 8$

$\Rightarrow b^2 = 128$

$\therefore b = 8\sqrt{2}$

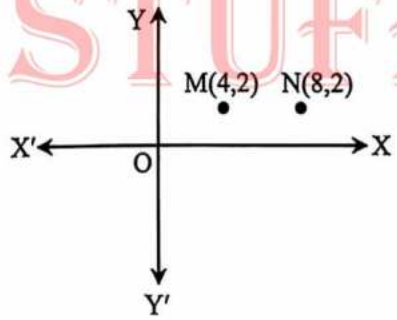
$\therefore$ অসীমতটের সমীকরণ, $Y = \pm\frac{b}{a}X$

$\Rightarrow y - 6 = \pm\frac{8\sqrt{2}}{4}x$

$\Rightarrow y - 6 = \pm 2\sqrt{2}x$

$\therefore y = 6 \pm 2\sqrt{2}x$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: একটি কণিকের উপকেন্দ্রদ্বয় (10, 5) ও (8, 3) এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$

(ক) $y = 2x + c$ রেখাটি $3x^2 + 4y^2 = 12$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করলে c এর মান বের কর। [চ. বো. ২১]

(খ) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র M এবং শীর্ষ O। [দি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২; ম. বো. ২২; য. বো. ২১; কু. বো. ২১; চ. বো. ২১; ঢা. বো. ১৯; য. বো. ১৭; ব. বো. ১৭]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ম. বো. ২২]

সমাধানঃ

ক দেওয়া আছে, $y = 2x + c$ ...... (i)

এবং $3x^2 + 4y^2 = 12$ .... (ii)

(i) নং হতে y এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$3x^2 + 4(2x + c)^2 = 12$

$\Rightarrow 3x^2 + 4(4x^2 + 4cx + c^2) = 12$

$\Rightarrow 3x^2 + 16x^2 + 16cx + 4c^2 - 12 = 0$

$\Rightarrow 19x^2 + 16cx + 4c^2 - 12 = 0$ ...... (iii)

যেহেতু, (i) নং রেখা (ii) নং উপবৃত্তকে স্পর্শ করে।

তাই (iii) নং সমীকরণের নিশ্চায়ক শূন্য হবে।

অর্থাৎ $(16c)^2 - 4 \times 19(4c^2 - 12) = 0$

$\Rightarrow 256c^2 - 304c^2 + 912 = 0$

$\Rightarrow -48c^2 + 912 = 0$

$\Rightarrow 48c^2 = 912$

$\Rightarrow c^2 = 19$

$\therefore c = \pm\sqrt{19}$ **(Ans.)**

খ ধরি, পরাবৃত্তটির অক্ষরেখা ও নিয়ামকরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাংক Z(a, b)

এখানে, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু O(0, 0)

এবং উপকেন্দ্র M(4, 2)

যেহেতু, O, MZ এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \frac{a+4}{2} = 0$ এবং $\frac{b+2}{2} = 0$

$\Rightarrow a = -4$ | $\Rightarrow b = -2$

$\therefore$ Z বিন্দুর স্থানাংক $(-4, -2)$

এখন, OM অক্ষরেখার ঢাল $= \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$

OM অক্ষরেখা, নিয়ামকরেখার সাথে লম্ব।

$\therefore$ নিয়ামকরেখার ঢাল $= -2$

এখন, $Z(-4, -2)$ বিন্দুগামী নিয়ামক রেখার সমীকরণ,

$y + 2 = -2(x + 4)$

$\Rightarrow y + 2 + 2x + 8 = 0$

$\therefore 2x + y + 10 = 0$

ধরি, পরাবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু P(x, y)

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

MP = PM′ [PM′, P বিন্দু থেকে নিয়ামকরেখার উপর লম্ব দূরত্ব]

$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = \left|\frac{2x + y + 10}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right|$

$\Rightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 = \frac{(2x + y + 10)^2}{5}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 5(x^2 + 16 - 8x + y^2 + 4 - 4y) = 4x^2 + y^2 + 100 + 4xy + 20y + 40x$

$\Rightarrow 5x^2 - 4x^2 + 5y^2 - y^2 - 40x - 40x - 20y - 20y - 4xy + 100 - 100 = 0$

$\therefore x^2 + 4y^2 - 4xy - 80x - 40y = 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, কণিকটির উপকেন্দ্রদ্বয় (10, 5) ও (8, 3)

এবং উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{2}$

$\therefore$ কণিকটি একটি অধিবৃত্ত [$\because e > 1$]

$\therefore$ কণিকটি কেন্দ্রের স্থানাংক $\left(\frac{10+8}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = (9, 4)$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$2ae = \sqrt{(10-8)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$\Rightarrow 2.a.\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\therefore a = 1$

অধিবৃত্তটির বৃহদাক্ষের ঢাল $= \frac{5-3}{10-8} = \frac{2}{2} = 1$

যেহেতু বৃহদাক্ষ ও ক্ষুদ্রাক্ষ পরস্পর লম্ব

সেহেতু ক্ষুদ্রাক্ষের ঢাল $= -1$ এবং এটি (9, 4) বিন্দুগামী।

$\therefore$ ক্ষুদ্রাক্ষের সমীকরণ,

$y - 4 = -1(x - 9) = -x + 9$

$\Rightarrow x + y - 4 - 9 = 0$

$\therefore x + y - 13 = 0$ .... (i)

(i) নং রেখা থেকে নিয়ামক রেখার দূরত্ব $= \frac{a}{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

নিয়ামক রেখা ক্ষুদ্রাক্ষের সমান্তরাল এবং কেন্দ্র থেকে নিয়ামকের দূরত্ব $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

ধরি, নিয়ামক রেখার সমীকরণ,

$x + y + k = 0$ ....(ii)

শর্তমতে,

$\left|\frac{9 + 4 + k}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \left|\frac{k + 13}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow |k + 13| = 1$

$\Rightarrow k + 13 = \pm 1$

$\therefore k = -12, -14$

$k = -12$ হলে, নিয়ামকরেখা $x + y - 12 = 0$

$k = -14$ হলে, নিয়ামকরেখা $x + y - 14 = 0$

উপকেন্দ্র (8, 3) হলে অনুরূপ নিয়ামক রেখা,

$x + y - 12 = 0$

$\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ,

$(x-8)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{2})^2 . \frac{(x + y - 12)^2}{1^2 + 1^2}$

$\Rightarrow (x-8)^2 + (y-3)^2 = (x + y - 12)^2$

$\Rightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + y^2 + 144 + 2xy - 24x - 24y$

$\therefore 2xy - 8x - 18y + 71 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ দৃশ্যকল্প-১: $y^2 = 4px$

দৃশ্যকল্প-২: অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(-6, 0)$ এবং $S'(6, 0)$

(ক) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{25} = 1$ উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দুগামী হলে, উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য বের কর।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ নির্দেশিত পরাবৃত্তটি (3, – 2) বিন্দুগামী হলে, এর উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, নিয়ামকের সমীকরণ ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 10 একক হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{25} = 1$ ...... (i)

(i) নং উপবৃত্ত (6, 4) বিন্দুগামী।

$\therefore \frac{6^2}{p} + \frac{4^2}{25} = 1 \Rightarrow \frac{36}{p} + \frac{16}{25} = 1 \Rightarrow \frac{36}{p} = 1 - \frac{16}{25}$

$\Rightarrow \frac{36}{p} = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{36}{p} = \frac{9}{25}$

$\therefore p = 100$

(i) নং হতে পাই, $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

এখানে, $a = 10$, $b = 5$ এবং $a > b$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2 \times 10 = 20$ একক **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $y^2 = 4px$ ..... (i)

ইহা $(3, -2)$ বিন্দুগামী হলে, $(-2)^2 = 4.p.3$

$\Rightarrow 12p = 4$

$\Rightarrow 3p = 1$

$\therefore p = \frac{1}{3}$

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 4 \times \frac{1}{3} . x$ ..... (ii)

এখানে, $a = \frac{1}{3}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x = a$ হলে, $\Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$\therefore 3x - 1 = 0$ **(Ans.)**

আবার, নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $x = -a$ হলে, $\Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$\therefore 3x + 1 = 0$ **(Ans.)**

এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = \left|4 \times \frac{1}{3}\right| = \frac{4}{3}$ একক **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(-6, 0)$ এবং $S'(6, 0)$

$\therefore$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র $C\left(\frac{-6+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = C(0, 0)$

যেহেতু উপকেন্দ্রদ্বয়ের কোটি শূন্য সুতরাং অক্ষরেখা X অক্ষ

$\therefore$ (0, 0) কেন্দ্রবিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ..... (i)

(i) নং অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $(ae, 0)$ এবং $(-ae, 0)$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $= 2ae$

$\therefore 2ae = SS'$

$\Rightarrow 2ae = \sqrt{(-6-6)^2 + (0-0)^2}$

$\Rightarrow 2ae = \sqrt{(12)^2 + 0}$

$\Rightarrow 2ae = 12$

$\Rightarrow ae = 6$

$\Rightarrow a\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = 6$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 6$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 36$ ...... (ii)

(i) নং অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a}$

শর্তমতে, $\frac{2b^2}{a} = 10$

$\Rightarrow \frac{b^2}{a} = 5$

$\therefore b^2 = 5a$ ...... (iii)

b^2 এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$a^2 + 5a = 36$

$\Rightarrow a^2 + 5a - 36 = 0$

$\Rightarrow a^2 + 9a - 4a - 36 = 0$

$\Rightarrow a(a+9) - 4(a+9) = 0$

$\Rightarrow (a-4)(a+9) = 0$

$\therefore a = 4, -9$

a এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$a = 4$ হলে, $b^2 = 5 \times 4 = 20$

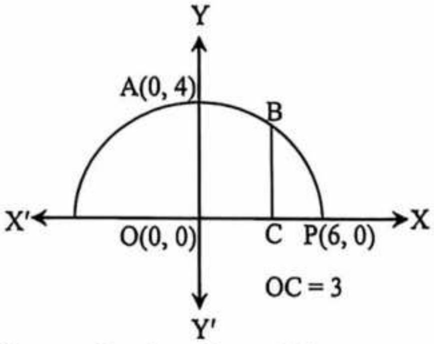
$a = -9$ হলে, $b^2 = 5(-9) = -45$ যা গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ, $b^2 = -45$ হলে, সমীকরণটি অধিবৃত্ত না হয়ে উপবৃত্ত হয়ে যায়।

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$; যা নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ।

(Ans.)

প্রশ্ন ▶ ২০ উদ্দীপক-১: $16x^2 + 25y^2 - 32x + 100y - 284 = 0$

উদ্দীপক-২:



(ক) $4x^2 - 9y^2 = 36$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২৩; ম. বো. ২৩]

(খ) উদ্দীপক-১ এর নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৩]

(গ) উদ্দীপক-২ এর চিত্রটি একটি পরাবৃত্ত এবং শীর্ষবিন্দু A হলে, CB রেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৩]

সমাধানঃ

ক এখানে, $4x^2 - 9y^2 = 36$

$$\Rightarrow \frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \text{ .... (i)}$$

$\therefore a = 3, b = 2$

$\therefore$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ, $y = \pm \frac{b}{a} x$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{2}{3} x \textbf{ (Ans.)}$$

খ উদ্দীপক-১ এ,

$$16x^2 + 25y^2 - 32x + 100y - 284 = 0$$

$$\Rightarrow 16(x^2 - 2x) + 25(y^2 + 4y) - 284 = 0$$

$$\Rightarrow 16(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 + 4y + 4) - 284 - 16 - 100 = 0$$

$$\Rightarrow 16(x-1)^2 + 25(y+2)^2 = 400$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{(y+2)^2}{4^2} = 1 \text{....... (i)}$$

$\therefore a = 5$ এবং $b = 4$ $\therefore a > b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}}$

$$= \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $x - 1 = \pm \frac{5}{\frac{3}{5}}$

$$\Rightarrow x - 1 = \pm \frac{25}{3}$$

(+) চিহ্ন নিয়ে পাই,

$$x - 1 = \frac{25}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{25}{3} + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{28}{3}$$

$\therefore 3x - 28 = 0$

(−) চিহ্ন নিয়ে পাই,

$$x - 1 = -\frac{25}{3}$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{25}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-22}{3}$$

$\therefore 3x + 22 = 0$

$\therefore$ নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $3x - 28 = 0, 3x + 22 = 0$ **(Ans.)**

গ এখানে, পরাবৃত্তটির শীর্ষ A(0, 4) এবং অক্ষ y-অক্ষ বরাবর।

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $x^2 = 4a(y - 4)$ .... (i)

(i) নং পরাবৃত্তটি P(6, 0) বিন্দুগামী।

$\therefore 6^2 = 4a(0 - 4)$

$\Rightarrow 4a = \frac{36}{-4} = -9$

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, $x^2 = -9(y - 4)$ .... (ii)

দেওয়া আছে, OC = 3 সুতরাং C(3, 0)

আবার, CB রেখা y অক্ষের সমান্তরাল।

$\therefore$ CB রেখার সমীকরণ, $x = 3$ ...... (iii)

(ii) নং এ $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$$3^2 = -9(y - 4)$$

$$\Rightarrow 9 = -9(y - 4)$$

$$\Rightarrow -1 = y - 4$$

$$\Rightarrow y = -1 + 4 = 3$$

$\therefore y = 3$

$\therefore$ B(3, 3)

$\therefore CB = \sqrt{(3-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{0 + 3^2} = 3$ একক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ২১ $f(x,y) = x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11$

এবং $g(x, y) = 4y^2 - 20x - 4y + 30$

(ক) $x^2 - 4y - 2 = 0$ **পরাবৃত্তটির অক্ষরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।** [য. বো. ২৩]

(খ) $f(x, y) = 0$ **কণিকের প্রকৃতি নির্ণয় করে উহার উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।**

[কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্নঃ য. বো. ২৩; সি. বো. ২৩; ব. বো. ২২; সকল বো. ১৮]

(গ) $g(x, y) = 4y - 9$ **হলে, কণিকটির অক্ষরেখা ও নিয়ামকের ছেদবিন্দু নির্ণয় কর।** [য. বো. ২৩]

সমাধানঃ

ক $x^2 - 4y - 2 = 0$

$$\Rightarrow x^2 = 4y + 2$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \times 1 \times \left(y + \frac{1}{2}\right)$$

$\therefore$ অক্ষরেখার সমীকরণ, $x = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x, y) = x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11$ এবং $f(x, y) = 0$

$$\therefore x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 6x) - 4(y^2 + 4y) - 11 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2.x.3 + 3^2) - 4(y^2 + 2.y.2 + 2^2) - 11 - 9 + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 - 4(y+2)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{2^2} - \frac{(y+2)^2}{1^2} = 1$....... (i) যা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

এখানে, $a = 2$; $b = 1$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$$2ae = 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= 2\sqrt{5} \textbf{ (Ans.)}$$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a}$

$$= \frac{2.1^2}{2}$$

$$= 1 \textbf{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $g(x, y) = 4y^2 - 20x - 4y + 30$

এবং $g(x, y) = 4y - 9$

$\therefore 4y^2 - 20x - 4y + 30 = 4y - 9$

$\Rightarrow 4y^2 - 4y - 4y = 20x - 9 - 30$

$\Rightarrow 4y^2 - 8y = 20x - 39$

$\Rightarrow 4(y^2 - 2y) = 20x - 39$

$\Rightarrow 4(y^2 - 2.y.1 + 1^2) = 20x - 39 + 4$

$\Rightarrow 4(y - 1)^2 = 20x - 35$

$\Rightarrow (y - 1)^2 = 5x - \frac{35}{4}$

$\therefore (y - 1)^2 = 5\left(x - \frac{7}{4}\right)$ .... (i)

(i) নং কে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$X = x - \frac{7}{4}$, $Y = y - 1$ এবং $4a = 5 \therefore a = \frac{5}{4}$

অক্ষরেখার সমীকরণ $Y = 0$ অর্থাৎ, $y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = 1$ ...... (ii) **(Ans.)**

নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $X = -a$

অর্থাৎ, $x - \frac{7}{4} = -\frac{5}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4}$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ .... (iii)

(ii) ও (iii) নং হতে পাই, $x = \frac{1}{2}, y = 1$

$\therefore$ অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার ছেদবিন্দু $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২২ উদ্দীপক-১: একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় **x** ও **y** অক্ষরেখা, একটি উপকেন্দ্র **(2, 0)** এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$

উদ্দীপক-২: একটি অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$, উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব **18**।

(ক) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৩]

(খ) নিয়ামকরেখা x-অক্ষরেখার উপর লম্ব ও (8, 0) বিন্দুগামী হলে, উদ্দীপক-১ হতে দেখাও যে, উপবৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + 2y^2 + 8x - 56 = 0$
[কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩; দি. বো. ২৩; য. বো. ২২; চ. বো. ২২; দি. বো. ২১; সকল বো. ১৮]

(গ) অধিবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে উদ্দীপক-২ এর অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৩]

সমাধান:

ক $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$.....(i)

$\therefore a = 2\sqrt{2}$; $b = 2 \therefore a > b$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ একক **(Ans.)**

খ উদ্দীপক-১ হতে পাই,

কণিকটির উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং উপকেন্দ্র $S \equiv (2, 0)$।

ধরি, কণিকের উপরস্থ $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু।

নিয়ামক রেখা x অক্ষের উপর লম্ব।

$\therefore$ নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $x = a$....(i)

(i) নং রেখাটি আবার, (8, 0) বিন্দুগামী

$\therefore 8 = a$

$\therefore$ নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $x = 8$

$\Rightarrow x - 8 = 0$

$\therefore$ উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$SP = ePM$ [যেখানে PM হলো P থেকে নিয়ামকরেখার উপর লম্ব]

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|x-8|}{\sqrt{1^2}}$

$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{2}(x-8)^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 16x + 64)$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 8 + 2y^2 - x^2 + 16x - 64 = 0$

$\therefore x^2 + 2y^2 + 8x - 56 = 0$ **(Showed)**

Note: এই প্রশ্নের ক্ষেত্রে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x ও y অক্ষ নয়, x ও y অক্ষ হলে, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ আকারের হতো।

গ ধরি, অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .... (i)

এখানে, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{3}$

এবং উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $2ae = 18$

$\Rightarrow 2a \times \sqrt{3} = 18 \Rightarrow a = \frac{18}{2\sqrt{3}}$

$\therefore a = 3\sqrt{3}$

আবার, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

$\Rightarrow e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow (\sqrt{3})^2 = 1 + \frac{b^2}{(3\sqrt{3})^2}$

$\Rightarrow 3 - 1 = \frac{b^2}{9 \times 3}$

$\Rightarrow 2 = \frac{b^2}{27}$

$\Rightarrow b^2 = 54$

$\therefore b = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

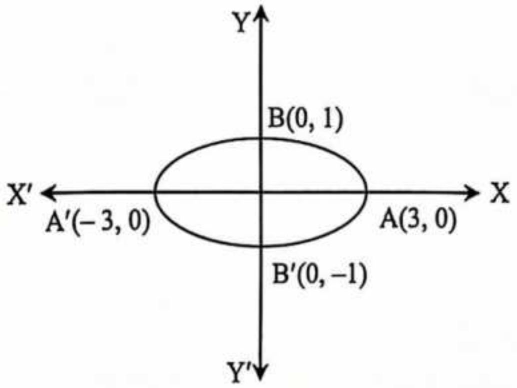
এখন, a ও b এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2}{(3\sqrt{3})^2} - \frac{y^2}{(3\sqrt{6})^2} = 1$

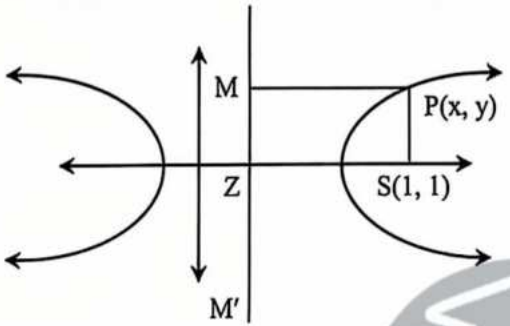
$\Rightarrow \frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{54} = 1$

$\therefore 2x^2 - y^2 = 54$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ২৩ উদ্দীপক-১:



উদ্দীপক-২:



$2x + y = 1$ হলো দিকাক্ষ MM' এর সমীকরণ।

(ক) $2x^2 + 3y^2 = 1$ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২২]

(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৭]

(গ) উদ্দীপক-২ এ উল্লিখিত অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ হলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২১; ম. বো. ২১]

সমাধান:

ক এখানে, $2x^2 + 3y^2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

সমীকরণটিকে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

এখানে, $a > b$

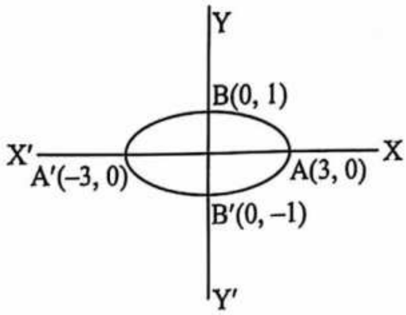
$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{3} \times \sqrt{2}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$ একক **(Ans.)**

খ উদ্দীপক-১ এ উল্লেখিত উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ X এবং ক্ষুদ্রাক্ষ Y।

এখানে, $AA' = 2a = \sqrt{\{3 - (-3)\}^2 + (0 - 0)^2} = 6$

$\therefore a = \frac{6}{2} = 3$



$BB' = 2b = \sqrt{(0 - 0)^2 + \{1 - (-1)\}^2} = 2$

$\therefore b = 1$

এখানে, $a > b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1^2}{3^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ **(Ans.)**

উপকেন্দ্রের সমীকরণ, $x = \pm ae$

$\Rightarrow x = \pm 3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore x = \pm 2\sqrt{2}$ **(Ans.)**

নিয়ামক রেখার সমীকরণ: $x = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm\frac{3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \pm\frac{9}{2\sqrt{2}}$ **(Ans.)**

গ এখানে, অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিতা $e = \sqrt{3}$, উপকেন্দ্র $S(1, 1)$ এবং অধিবৃত্তের উপর একটি বিন্দু $P(x, y)$, দিকাক্ষ $2x + y = 1$

$\therefore P(x, y)$ হতে দিকাক্ষের লম্ব দূরত্ব, $PM = \left|\frac{2x + y - 1}{\sqrt{2^2 + 1}}\right|$

$\therefore$ অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$SP = ePM$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{3} \times \left|\frac{2x + y - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right|$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1} = \sqrt{3} \times \left|\frac{2x + y - 1}{\sqrt{4 + 1}}\right|$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = \left\{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}(2x + y - 1)\right\}^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 5x^2 - 10x + 10 + 5y^2 - 10y = 3(4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 2y - 4x)$

$\Rightarrow 5x^2 - 10x + 10 + 5y^2 - 10y - 12x^2 - 3y^2 - 3 - 12xy + 6y + 12x = 0$

$\Rightarrow -7x^2 + 2x + 7 + 2y^2 - 4y - 12xy = 0$

$\therefore 7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 4y - 7 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৪ দৃশ্যকল্প-১: $4x^2 + ay^2 = 1$ একটি কণিকের সমীকরণ।

দৃশ্যকল্প-২: $\sqrt{3}$ উৎকেন্দ্রিকতাবিশিষ্ট একটি কণিকের নিয়ামক রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 4।

(ক) $(x-3)^2 = 4(y+2)$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [সি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১; ব. বো. ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর কণিকটি $(0, \pm 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে কণিকটির অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য বের কর। [সি. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর কণিকের অক্ষদ্বয় স্থানাংকের অক্ষদ্বয় বরাবর হলে, কণিকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২২]

সমাধান:

ক প্রদত্ত $(x-3)^2 = 4(y+2)$ পরাবৃত্তকে $X^2 = 4aY$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$X = x-3,\ Y = y+2,\ a = 1$ এবং উপকেন্দ্র $(0, a)$

উপকেন্দ্র: $X = 0,$ $\Rightarrow x - 3 = 0$ $\therefore x = 3$ | $Y = a$ $\Rightarrow y + 2 = 1$ $\therefore y = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(3, -1)$ **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে, $4x^2 + ay^2 = 1$ ..... (i)

(i) নং কণিকটি $(0, \pm 1)$ বিন্দুগামী,

$0 + a(\pm 1)^2 = 1$

$\therefore a = 1$

(i) নং এ $a = 1$ বসিয়ে পাই,

$4x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \dfrac{y^2}{1^2} = 1$; যা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

ইহাকে $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{2},\ b = 1;\ b > a$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 2 \times 1 = 2$ একক **(Ans.)**

এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$ একক **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{3} > 1$

$\therefore$ কণিকটি একটি অধিবৃত্ত।

কণিকের অক্ষদ্বয় স্থানাংকের অক্ষদ্বয় বরাবর ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ,

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$....(i)

এবং নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 4$

অর্থাৎ, $2 \cdot \dfrac{a}{e} = 4 \Rightarrow a = 2e$

$\Rightarrow a = 2 \times \sqrt{3}$

$\therefore a^2 = 12$

আবার, $e = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2 + b^2}{a^2} = 3$

$\Rightarrow 3a^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 2a^2 = b^2$

$\Rightarrow 2 \times 12 = b^2\ [\because a^2 = 12]$

$\Rightarrow b^2 = 24$

এখন, a^2 ও b^2 এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\therefore \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{24} = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৫ উদ্দীপক-১: একটি কণিকের উপকেন্দ্র $(0, \pm 4)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\dfrac{4}{5}$।

উদ্দীপক-২: $9y^2 - 16x^2 - 64x - 54y - 127 = 0$

(ক) একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $(1, 2)$ এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ $x - y = 0$ হলে পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে কণিকের অক্ষ বিবেচনা করে উদ্দীপক-১ এর কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) উদ্দীপক-২ এর আলোকে অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক, উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক মনে করি, পরাবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে কোনো একটি বিন্দু।

পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(1, 2)$

এবং নিয়ামকরেখা MZM' এর সমীকরণ,

$x - y = 0$ .... (i)

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $SP = PM$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \left|\dfrac{x-y}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}\right|$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = \dfrac{(x-y)^2}{2}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = \dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{2}$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 10 = x^2 - 2xy + y^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 8y + 10 = 0$

$\therefore (x+y)^2 - 4x - 8y + 10 = 0$; যা নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, কণিকের উপকেন্দ্র $(0, \pm 4)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \dfrac{4}{5}$ যেহেতু, উৎকেন্দ্রিকতা $0 < e < 1$; তাই কণিকটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ...... (i)

এখানে, উপকেন্দ্রদ্বয়, $(0, \pm be) = (0, \pm 4)$

$\therefore \pm be = \pm 4$

$\Rightarrow b \cdot \dfrac{4}{5} = 4$

$\Rightarrow b = 5$

$\therefore b^2 = 25$

এখন, $e^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow e^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$

$\Rightarrow b^2e^2 = b^2 - a^2$

$\Rightarrow a^2 = b^2 - b^2e^2$

$\Rightarrow a^2 = 25 - 25 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$\Rightarrow a^2 = 25 - 16$

$\therefore a^2 = 9$

a^2 এবং b^2 এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$; যা নির্ণেয় কণিকের সমীকরণ। **(Ans.)**

গ প্রদত্ত সমীকরণ, $9y^2 - 16x^2 - 64x - 54y - 127 = 0$

$\Rightarrow 9(y^2 - 6y) - 16(x^2 + 4x) = 127$

$\Rightarrow 9(y-3)^2 - 16(x+2)^2 = 127 + 81 - 64$

$\Rightarrow 9(y-3)^2 - 16(x+2)^2 = 144$

$\Rightarrow \frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$

এটি $\frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = 1$ আকারের সমীকরণ যা একটি অধিবৃত্ত।

যেখানে, $Y = y - 3$ এবং $X = x + 2$

এখানে, $b^2 = 16$ এবং $a^2 = 9$

এবং $e^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

$\therefore e = \frac{5}{4}$

উপকেন্দ্র $(0, \pm be)$

স্থানাঙ্কের জন্য $X = 0$

$\Rightarrow x + 2 = 0$

$\therefore x = -2$

$Y = \pm be$

$\Rightarrow y - 3 = \pm 4 \cdot \frac{5}{4}$

$\Rightarrow y = \pm 5 + 3 = 8, -2$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-2, 8), (-2, -2)$ **(Ans.)**

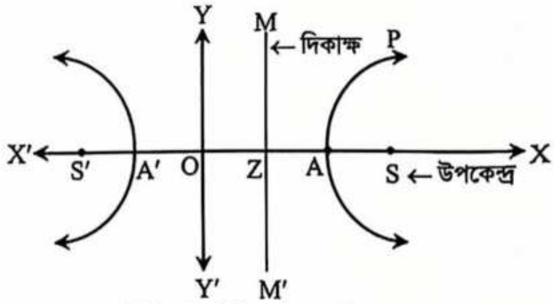
উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(-2+2)^2 + (8+2)^2}$

$= 10$ একক **(Ans.)**

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2}$ একক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৬ **দৃশ্যকল্প-১: একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় (3, –1) ও (1, – 1) এবং যেকোনো উপকেন্দ্র হতে শীর্ষদ্বয়ের দূরত্বের গুণফল 4 একক।**

দৃশ্যকল্প-২:



$OZ = 1; OS = 4, e = 2$

(ক) $x = 5y^2 - 4y + 7$ পরাবৃত্তের অক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ, $x = 5y^2 - 4y + 7$

$\Rightarrow 5\left(y^2 - \frac{4}{5}y\right) = x - 7$

$\Rightarrow 5\left(y^2 - 2.y.\frac{2}{5} + \frac{4}{25}\right) = x - 7 + \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \left(y - \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}(5x - 31)$

$\Rightarrow \left(y - \frac{2}{5}\right)^2 = 4 \times \frac{1}{20}\left(x - \frac{31}{5}\right)$

$\Rightarrow Y^2 = 4aX$

যেখানে, $Y = y - \frac{2}{5}$, $a = \frac{1}{20}$ এবং $X = x - \frac{31}{5}$

$\therefore$ পরাবৃত্তের অক্ষের সমীকরণ, $Y = 0 \Rightarrow y - \frac{2}{5} = 0$

$\therefore 5y - 2 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের অক্ষের সমীকরণ, $5y - 2 = 0$ **(Ans.)**

খ উপকেন্দ্রদ্বয় $S(3, -1)$ এবং $S'(1, -1)$

এর মধ্যবিন্দু কেন্দ্র, $C\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) = (2, -1)$

যেহেতু উপকেন্দ্রদ্বয়ের কোটি একই সুতরাং বৃহদাক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল।

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ: $\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$

এখন, $2ae = \sqrt{(3-1)^2 + (-1+1)^2} = 2$

$\therefore ae = 1$

আবার, $(a - ae)(a + ae) = 4$

$\Rightarrow a^2 - a^2e^2 = 4$ ..... (i)

$\Rightarrow a^2 - a^2.\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 4$

$\Rightarrow a^2 - a^2 + b^2 = 4$

$\Rightarrow b^2 = 4$

$\therefore b = 2$

$a^2 - a^2e^2 = 4$ [(i) হতে]

$\Rightarrow a^2 - 1^2 = 4$

$\therefore a = \sqrt{5}$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ **(Ans.)**

গ দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই,

এখানে, $OZ = 1$, $OS = 4$, $e = 2$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $S(4, 0)$

সুতরাং $ae = 4$

$\Rightarrow a.2 = 4$

$\therefore a = 2$

আবার, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow 2^2 = 1 + \frac{b^2}{2^2}$

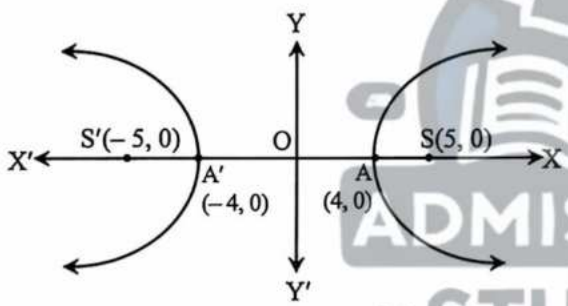
$\therefore b^2 = 12$

কেন্দ্র, $O \equiv (0, 0)$

$\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-0)^2}{2^2} - \frac{(y-0)^2}{12} = 1$ [যেহেতু আড় অক্ষ x অক্ষ]

$$\therefore \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▸ ২৭



(ক) $5x^2 + 4y^2 = 1$ **কণিকের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।** [ম. বো.২২]

(খ) **উদ্দীপকের সাহায্যে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২২]

(গ) **উদ্দীপকের A ও A' কে উপকেন্দ্র ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি নিয়ামকের সমীকরণ,** $5x - 36 = 0$ [ব. বো. ২৩]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $5x^2 + 4y^2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{5}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1;$$ যা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

এখানে, $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ এবং $b = \frac{1}{2}$; $b > a$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times \frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$ **(Ans.)**

খ এখানে, অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু $A(4, 0)$ এবং $A'(-4, 0)$

ধরি, অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .... (i)

শীর্ষ $(\pm a, 0)$

$\therefore a = 4$

উপকেন্দ্রদ্বয় $S'(-5, 0)$ এবং $S(5, 0)$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 5 - (-5) = 5 + 5 = 10$ একক

আমরা জানি, উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2ae$

$\therefore 2ae = 10 \Rightarrow 2 \times 4 \times e = 10 \therefore e = \frac{5}{4}$

আবার, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

$\Rightarrow e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow (e^2 - 1)a^2 = b^2$

$\Rightarrow \left\{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1\right\} \times 4^2 = b^2$

$\Rightarrow \left(\frac{25}{16} - 1\right) \times 16 = b^2$

$\Rightarrow b^2 = 9$

$\therefore b = 3$

এখন a ও b এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$\Rightarrow 9x^2 - 16y^2 = 144$ **(Ans.)**

গ ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .... (i) যেখানে $a > b$

এখানে, উপকেন্দ্র $A'(-4, 0)$ এবং $A(4, 0)$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $AA' = \sqrt{\{4-(-4)\}^2 + (0-0)^2} = 8$

আমরা জানি, নিয়ামকের সমীকরণ: $x = \pm \frac{a}{e}$

এখানে, নিয়ামকের সমীকরণ,

$5x - 36 = 0 \Rightarrow x = \frac{36}{5}$

$\therefore \frac{a}{e} = \frac{36}{5}$ ...... (ii)

আবার, $AA' = 2ae = 8$ ...... (iii)

(ii) নং ও (iii) নং সমীকরণ গুণ করে পাই,

$\frac{a}{e} \times 2ae = \frac{36}{5} \times 8 \Rightarrow 2a^2 = \frac{36}{5} \times 8$

$\Rightarrow a^2 = \frac{144}{5}$

$\therefore a = \frac{12}{\sqrt{5}}$

a এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$2 \times \frac{12}{\sqrt{5}} \times e = 8 \Rightarrow e = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow e^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow b^2 = \frac{4}{9} \times \frac{144}{5}$$

$$\therefore b^2 = \frac{64}{5}$$

এখন, a ও b এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{\left(\frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{64}{5}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{144}{5}} + \frac{y^2}{\frac{64}{5}} = 1$$

$$\therefore \frac{5x^2}{144} + \frac{5y^2}{64} = 1 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ২৮ দৃশ্যকল্প-১: একটি কণিকের উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{13}}{3}$ এবং উহা $\left(4, \frac{\sqrt{28}}{3}\right)$ বিন্দুগামী।

দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + 2y^2 - 12x + 28 = 0$

(ক) $4x^2 - 9y^2 - 1 = 0$ কণিকটি প্রমাণ আকারে প্রকাশ করে শনাক্ত কর। [কু. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লিখিত কণিকের অক্ষদ্বয়কে x অক্ষ ও y অক্ষ ধরে উহার অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত কণিকের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর [কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২; ব. বো. ২২, ২১; রা. বো. ২১; দি. বো. ২১; চা. বো. ১৭; দি. বো. ১৭]

সমাধান:

ক প্রদত্ত কণিকের সমীকরণ,

$$4x^2 - 9y^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 9y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1;$$ যা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে। (Ans.)

খ এখানে, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{\sqrt{13}}{3} > 1$ যা অধিবৃত্ত নির্দেশ করে।

ধরি, অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.... (i)

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

$$\Rightarrow 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{13}{9} \quad \text{[বর্গ করে]}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{13}{9} - 1 = \frac{13-9}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \quad \text{[বর্গমূল করে]}$$

$$\therefore a = \frac{3b}{2} \text{ ..... (ii)}$$

আবার, (i) নং সমীকরণটি $\left(4, \frac{\sqrt{28}}{3}\right)$ বিন্দুগামী।

$$\therefore \frac{(4)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{\sqrt{28}}{3}\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{16}{\left(\frac{3b}{2}\right)^2} - \frac{\frac{28}{9}}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{64}{9b^2} - \frac{28}{9b^2} = 1$$

$$\Rightarrow 9b^2 = (64 - 28) = 36$$

$$\Rightarrow b^2 = 4$$

$$\therefore b = 2$$

সুতরাং, $a = \frac{3b}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2 \times 3 = 6$ একক

এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 2 \times 2 = 4$ একক। (Ans.)

গ দৃশ্যকল্প-২ হতে, $x^2 + 2y^2 - 12x + 28 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 2.x.6 + 6^2 + 2y^2 + 28 - 36 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)^2 + 2y^2 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)^2 + 2y^2 = 8$$

$$\Rightarrow \frac{(x-6)^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ ....(i)}$$

সমীকরণ (i) কে $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$X = x - 6$, $Y = y$ এবং $a = 2\sqrt{2}$; $b = 2$ $\therefore a > b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{8}}$

$$= \sqrt{\frac{4}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$

অর্থাৎ, $X = \pm ae$

$$\Rightarrow x - 6 = \pm 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

এবং $Y = 0$

$$\Rightarrow y = 0$$

(+) চিহ্ন নিয়ে, $x - 6 = 2$

$\therefore x = 8$

(–) চিহ্ন নিয়ে, $x - 6 = -2$

$\therefore x = 4$

$\therefore$ নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $X = \pm \frac{a}{e}$

$$\Rightarrow x - 6 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm 2 \times 2 = \pm 4$$

(+) চিহ্ন নিয়ে, $x - 6 = 4$

$\therefore x = 10$

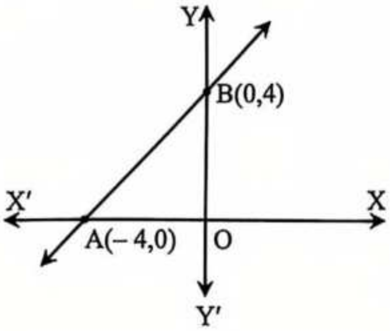
(–) চিহ্ন নিয়ে, $x - 6 = -4$

$\therefore x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (8, 0), (4, 0) এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ $x = 10$, $x = 2$ (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ২৯ দৃশ্যকল্প-১: কোনো কণিকের উপকেন্দ্র $(\pm 3\sqrt{2}, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $= \sqrt{2}$

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} + 1 = 0$ কণিকের অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে, স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে কণিকটির অক্ষ ধরে কণিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, নিয়ামকরেখার সমীকরণ এবং কণিকের উপরস্থ $(4, \sqrt{7})$ বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে O কে কেন্দ্র এবং AB কে নিয়ামক ধরে অঙ্কিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে,

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = -1$$
$$\Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{y^2}{5^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$$
$\therefore a = 3, b = 5$

$\therefore$ আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 10$, অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 6$ **(Ans.)**

খ কণিকটি একটি অধিবৃত্ত যেহেতু উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{2}$ $(e > 1)$

$\therefore$ কণিকটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

উপকেন্দ্র $(\pm ae, 0) \equiv (\pm 3\sqrt{2}, 0)$

$\therefore ae = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow a.\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$\therefore a = 3$

আবার,

$$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$
$$\Rightarrow (\sqrt{2})^2 = 1 + \frac{b^2}{3^2}$$
$$\Rightarrow 2 - 1 = \frac{b^2}{9}$$
$$\Rightarrow b^2 = 9$$
$\therefore b = 3$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{3} = 6$ একক **(Ans.)**

নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $x = \pm \frac{a}{e}$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$$
$\therefore \sqrt{2}x \pm 3 = 0$ **(Ans.)**

এখন, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক, $(a\sec\theta, b\tan\theta)$

$(x, y) \equiv (4, \sqrt{7})$ [দেওয়া আছে]

$\therefore y = b\tan\theta$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{y}{b}$$
$$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3}$$
$$= 41.41°$$

$\therefore (4, \sqrt{7})$ বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক,

$(3\sec\theta, 3\tan\theta)$ যেখানে $\theta = 41.41°$ **(Ans.)**

গ AB রেখা বা নিয়ামকরেখার সমীকরণ,

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{4} = 1$$
$$\Rightarrow x - y + 4 = 0 \text{ ...... (i)}$$

কেন্দ্র O(0, 0) হতে নিয়ামকরেখার দূরত্ব $= \left|\frac{4}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right|$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

$\because$ কেন্দ্র (0, 0) হতে নিয়ামক রেখার দূরত্ব $= \frac{a}{e}$

$\therefore \frac{a}{e} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow a = 2 \times \sqrt{2} \times e$

$\Rightarrow a = 2 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[\because e = \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$\therefore a = 2$

$ae = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\therefore$ কেন্দ্র (0, 0) ও উপকেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= ae = \sqrt{2}$

নিয়ামকের উপর লম্ব মূলবিন্দুগামী বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ,

$x + y = 0 + 0$

$\therefore x + y = 0$ .... (ii)

ধরি, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (α, β)

$\therefore (\alpha, \beta)$ বিন্দুটি (ii) নং রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore \alpha + \beta = 0$

$\Rightarrow \beta = -\alpha$

আবার,

কেন্দ্র (0, 0) ও উপকেন্দ্র (α, β) এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

$\therefore \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{2}$ [∵ কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{2}$]

$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha^2 = 2 \quad [\because \beta = -\alpha]$

$\Rightarrow 2\alpha^2 = 2$

$\Rightarrow \alpha^2 = 1$

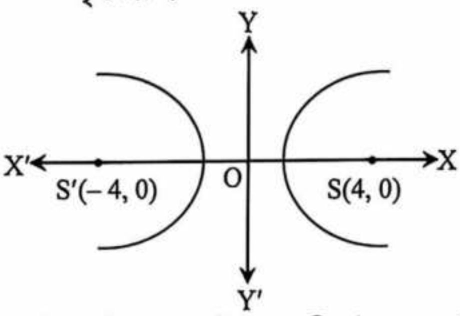
$\therefore \alpha = \pm 1$

যখন $\alpha = 1, \beta = -1$, এবং, $\alpha = -1, \beta = 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয় $(1, -1)$ এবং $(-1, 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ৩০ দৃশ্যকল্প-১: $4x^2 - 9y^2 - 16x + 54y - 101 = 0.$

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) $16y^2 - 9x^2 = 144$ অধিবৃত্তের অসীমতট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর কণিকটিকে প্রমাণ আকারে প্রকাশ করে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ম. বো.২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ S ও S′ উপকেন্দ্র, কেন্দ্র হতে নিয়ামকরেখার দূরত্ব 3 একক হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ এবং অসীমতটের সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২৩]

সমাধান:

ক প্রদত্ত সমীকরণ,

$16y^2 - 9x^2 = 144$

$\Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

$\Rightarrow \frac{y^2}{(3)^2} - \frac{x^2}{(4)^2} = 1$

$\therefore b = 3, a = 4$

$\therefore$ অধিবৃত্তের অসীমতট রেখার সমীকরণ,

$y = \pm \frac{b}{a} x$

$\therefore y = \pm \frac{3}{4} x$ **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ এ কণিকটির সমীকরণ,

$4x^2 - 9y^2 - 16x + 54y - 101 = 0$

$\Rightarrow 4(x^2 - 4x) - 9(y^2 - 6y) - 101 = 0$

$\Rightarrow 4(x^2 - 2.x.2 + 2^2) - 9(y^2 - 2.y.3 + 3^2) - 101 - 16 + 81 = 0$

$\Rightarrow 4(x-2)^2 - 9(y-3)^2 = 36$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3^2} - \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$ ...... (i)

এটি $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ আকারের সমীকরণ যা একটি অধিবৃত্ত।

যেখানে, $X = x - 2, Y = y - 3$

$a = 3$ এবং $b = 2$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{2^2}{3^2}}$

$= \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9+4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 2^2}{3} = \frac{8}{3}$ **(Ans.)**

নিয়ামকরেখার সমীকরণ,

$X = \pm \frac{a}{e}$

$\Rightarrow x - 2 = \pm \frac{3}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \pm \frac{9}{\sqrt{13}}$

$\Rightarrow x = 2 \pm \frac{9}{\sqrt{13}}$ **(Ans.)**

গ ধরি, অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .... (i)

এখানে, $S'(-4, 0)$ এবং $S(4, 0)$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$2ae = SS' = \sqrt{\{4 - (-4)\}^2 + (0-0)^2} = 8$

$\therefore ae = 4$ ...... (ii)

আবার, কেন্দ্র হতে নিয়ামকরেখার দূরত্ব = 3

$\therefore \frac{a}{e} = 3$ .... (iii)

(ii) নং ও (iii) নং গুণ করে পাই, $ae \times \frac{a}{e} = 4 \times 3$

$\Rightarrow a^2 = 12$

$\therefore a = 2\sqrt{3}$

a এর (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$2\sqrt{3} \times e = 4$

$\Rightarrow e = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow e^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow b^2 = \frac{1}{3} \times a^2$

$\Rightarrow b^2 = \frac{1}{3} \times 12 = 4$

$\therefore b = 2$

এখন, a ও b এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$\Rightarrow x^2 - 3y^2 = 12$ **(Ans.)**

$\therefore$ অসীমতটের সমীকরণ,

$y = \pm \frac{b}{a} x = \pm \frac{2}{2\sqrt{3}} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} x$

$\therefore \sqrt{3}y \pm x = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩১ দৃশ্যকল্প-১: একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় (4, 2), (10, 2) এবং উৎকেন্দ্রিকতা 3।

দৃশ্যকল্প-২: কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং y-অক্ষ বরাবর আড় অক্ষবিশিষ্ট কোনো অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 24 এবং উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব 16।

(ক) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর, যেখানে θ উৎকেন্দ্রিক কোণ। [চ. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর তথ্যের সাহায্যে অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২২]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1 \text{ ....(i)}$$

সমীকরণ (i) কে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ এর সাথে তুলনা করে,

$a=4$; $b=2$ অর্থাৎ $a>b$

আমরা জানি,উপবৃত্তের পরামিতিক স্থানাংক $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$

∴ উপবৃত্তটির পরামিতিক স্থানাংক ≡ $(4\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ যেখানে θ উপকেন্দ্রিক কোণ। **(Ans.)**

খ এখানে, উৎকেন্দ্রিকতা, $e=3$

এবং উপকেন্দ্রদ্বয় $S_1(4, 2)$ ও $S_2(10, 2)$

উপকেন্দ্র দুটির কোটি সমান বলে, অধিবৃত্তটির আড় অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল।

এখন, অধিবৃত্তটির কেন্দ্র = উপকেন্দ্র দুটির সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু

$$=\left(\frac{10+4}{2}, \frac{2+2}{2}\right)$$

$$=(7, 2)$$

∴ অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{(x-7)^2}{a^2}-\frac{(y-2)^2}{b^2}=1$

∴ উপকেন্দ্র দুটির দূরত্ব $S_1S_2=2ae=|10-4|=6$

$$\Rightarrow 2\times 3\times a=6$$

$$\therefore a=1$$

আবার, $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$

$$\Rightarrow 3=\sqrt{1+\frac{b^2}{1}} \quad [\because a=1]$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+b^2}=3$$

$$\Rightarrow 1+b^2=9 \quad \text{[বর্গ করে]}$$

$$\Rightarrow b^2=8$$

$$\therefore b=2\sqrt{2}$$

∴ অধিবৃত্তটির সমীকরণ,

$$\frac{(x-7)^2}{1^2}-\frac{(y-2)^2}{(2\sqrt{2})^2}=1$$

$$\therefore \frac{(x-7)^2}{1}-\frac{(y-2)^2}{8}=1 \text{ (Ans.)}$$

গ এখানে, অধিবৃত্তটির আড় অক্ষ y অক্ষ বরাবর এবং কেন্দ্র হলো মূলবিন্দুতে।

ধরি, অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ ..... (i)

সুতরাং, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $\frac{2a^2}{b}=24$

$$\Rightarrow a^2=12b \text{ .... (ii)}$$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব,

$$2be=16$$

$$\Rightarrow be=8$$

$$\Rightarrow b^2e^2=64$$

$$\Rightarrow b^2\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)=64$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=64$$

$$\Rightarrow b^2+12b-64=0 \text{ [(i) হতে]}$$

$$\Rightarrow b^2+16b-4b-64=0$$

$$\Rightarrow b(b+16)-4(b+16)=0$$

$$\Rightarrow (b+16)(b-4)=0$$

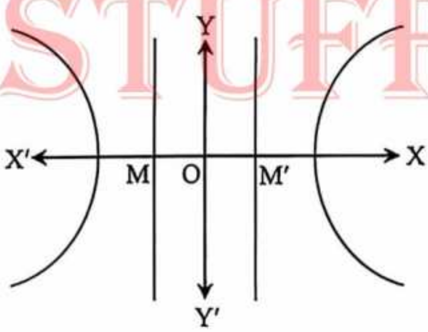
হয়, $b-4=0$	অথবা, $b+16=0$
$\Rightarrow b=4$	$\Rightarrow b=-16$
$\therefore b^2=16$	কিন্তু, $b\neq -16$

$\therefore a^2=12b=12\times 4=48$ [(ii) নং হতে]

এখন, a^2 এবং b^2 এর মান সমীকরণ (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{48}=1 \Rightarrow 3y^2-x^2=48 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৩২ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: S এর স্থানাংক (7, 3) এবং A বিন্দুর স্থানাংক (– 1, 3)।

(ক) $y^2=32x$ পরাবৃত্তস্থ কোনো বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 10; বিন্দুটির স্থানাংক নির্ণয় কর।

(খ) দৃশ্যকল্প-১: এর ক্ষেত্রে MM′ = 4 এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ হলে কণিকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর SA রেখাংশকে বৃহদক্ষ ধরে কনিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{3}}{2}$।

সমাধানঃ

ক $y^2 = 32x$

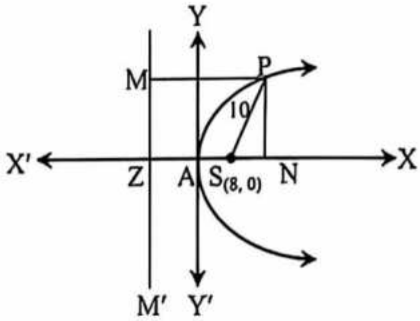
$\therefore y^2 = 4.8x$ ...... (i)

(i) নং কে $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 8$

ধরি, পরবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু $P(\alpha, \beta)$

অতএব, $P(\alpha, \beta)$ বিন্দুটি (i) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

$\therefore \beta^2 = 32\alpha$ .... (ii)



P হতে অক্ষরেখা ও নিয়ামকের উপর যথাক্রমে PN ও PM লম্ব আঁকি।

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $SP = PM$

$\Rightarrow SP = NZ$

$\Rightarrow SP = AN + AZ$

$\Rightarrow SP = AN + AS$

$\Rightarrow 10 = \alpha + 8$ [এখানে ফোকাস দূরত্ব, $SP = 10$]

$\therefore \alpha = 2$

α এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$\beta^2 = 32 \times 2 = 64$

$\therefore \beta = \pm 8$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, \pm 8)$ **(Ans.)**

খ ধরি, অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .... (i)

দেওয়া আছে,

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{2}$

নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $2\frac{a}{e} = 4$

$\Rightarrow a = 2e$

$\Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

আবার,

$e = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{2}$ [$\because$ x অক্ষ আড়অক্ষ]

$\Rightarrow 1 + \frac{b^2}{a^2} = 2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{b^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$

$\Rightarrow b^2 = 8$

(i) নং হতে, $\frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{8} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, এখানে $e < 1$

অতএব, উল্লিখিত কনিকটি উপবৃত্ত।

এখন, বৃহৎ অক্ষের প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক $S(7, 3)$ এবং $A(-1, 3)$ যেহেতু বৃহৎ অক্ষের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের কোটি একই অর্থাৎ 3

সুতরাং, উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল এবং ক্ষুদ্রাক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল।

এখন, উপবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $C\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{3+3}{2}\right)$ বা $C(3, 3)$

ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্রাক্ষ যথাক্রমে x ও y–অক্ষের সমান্তরাল এবং C(3, 3) কেন্দ্র বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{(x-3)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$ ...... (i)

এখন, (i) নং উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য, $2a = SA$

$\Rightarrow 2a = \sqrt{(7+1)^2 + (3-3)^2}$

$\Rightarrow 2a = 8$

$\Rightarrow a = 4$

$\therefore a^2 = 16$

আবার, (i) নং উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow e^2 = \frac{3}{4}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{3}{4}$ [এখানে, $a > b$]

$\Rightarrow \frac{16 - b^2}{16} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 64 - 4b^2 = 48$

$\Rightarrow 4b^2 = 16$

$\therefore b^2 = 4$

a এবং b এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\therefore \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ **(Ans.)**

HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

কণিকের প্রকৃতি

১। কোনো কণিকের উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে, সেটি একটি– [সি. বো. ২৩]

ক) পরাবৃত্ত খ) উপবৃত্ত
গ) অধিবৃত্ত ঘ) সম অধিবৃত্ত

উত্তর: খ) উপবৃত্ত

ব্যাখ্যা: $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ যা উপবৃত্তের শর্ত

২। $(x-1)^2 + 3y = 0$ সমীকরণটি কী নির্দেশ করে? [ম. বো. ২৩]

ক) সরলরেখা খ) বৃত্ত
গ) পরাবৃত্ত ঘ) অধিবৃত্ত

উত্তর: গ) পরাবৃত্ত

ব্যাখ্যা: $(x-1)^2 + 3y = 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 = -4 \times \frac{3}{4} y$

এটি $X^2 = -4aY$ আকারের যা একটি পরাবৃত্ত।

৩। $9x^2 - 24xy + 12y^2 - 48x - 24y + 36 = 0$ সমীকরণটি কী নির্দেশ করে? [রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১]

ক) বৃত্ত খ) পরাবৃত্ত
গ) উপবৃত্ত ঘ) অধিবৃত্ত

উত্তর: ঘ) অধিবৃত্ত

ব্যাখ্যা: কণিকের সাধারণ সমীকরণ,

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$ হলে কণিকটি হবে জোড়া সরলরেখা।

$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \neq 0$ হলে, $h^2 - ab = 0$ হলে পরাবৃত্ত

$h^2 - ab > 0$ হলে অধিবৃত্ত

$h^2 - ab < 0$ হলে উপবৃত্ত

$h = 0, a = b \neq 0$ হলে বৃত্ত

এখানে, $9x^2 - 24xy + 12y^2 - 48x - 24y + 36 = 0$

তুলনা করে, $h = -12$; $a = 9$; $b = 12$

$h^2 = 144$ $h^2 > ab$; অধিবৃত্ত

$ab = 108$

৪। একটি কণিকের উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$। কণিকটি একটি– [রা. বো. ২১]

ক) বৃত্ত খ) উপবৃত্ত
গ) অধিবৃত্ত ঘ) পরাবৃত্ত

উত্তর: গ) অধিবৃত্ত

ব্যাখ্যা: $\because \sqrt{2} > 1$ $\therefore$ এটি একটি অধিবৃত্ত।

৫। কেন্দ্রবিহীন কণিক কোনটি? [কু. বো. ২১]

ক) $x^2 + y^2 = 0$ খ) $x^2 + y = 0$
গ) $x^2 - y^2 = 10$ ঘ) $x^2 + 2y^2 = 10$

উত্তর: খ) $x^2 + y = 0$

ব্যাখ্যা: পরাবৃত্ত হলো কেন্দ্রবিহীন কণিক।

৬। $7x^2 + 7y^2 - 2xy - 30x + 50y + 103 = 0$ সমীকরণটি নিচের কোনটি বোঝায়? [য. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২১]

ক) বৃত্ত খ) উপবৃত্ত
গ) পরাবৃত্ত ঘ) অধিবৃত্ত

উত্তর: খ) উপবৃত্ত

ব্যাখ্যা: $a = 7$; $b = 7$; $h = -1$

$h^2 < ab$; উপবৃত্ত

৭। $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ কণিকের উৎকেন্দ্রিকতা শূন্য হলে বক্ররেখাটির নাম– [ম. বো. ২১]

ক) উপবৃত্ত খ) বৃত্ত
গ) পরাবৃত্ত ঘ) অধিবৃত্ত

উত্তর: খ) বৃত্ত

ব্যাখ্যা: বৃত্ত হলে $e = 0$

পরাবৃত্ত হলে $e = 1$

উপবৃত্ত হলে $0 < e < 1$

অধিবৃত্ত হলে $e > 1$

পরাবৃত্তের সমীকরণ থেকে বিভিন্ন উপাদান নির্ণয়

৮। $y^2 = 4x + 3y - 7$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য– [ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩]

ক) 4 খ) 8
গ) 16 ঘ) কোনোটিই নয়

উত্তর: ক) 4

ব্যাখ্যা: $y^2 - 3y = 4x - 7$

$\Rightarrow y^2 - 2.y.\frac{3}{2} + \frac{9}{4} = 4x - 7 + \frac{9}{4}$

$\Rightarrow \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 4x - \frac{19}{4}$

$\Rightarrow \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 4 \times 1 \left(x - \frac{19}{16}\right)$

$\therefore a = 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = 4$

৯। $y^2 = 4x + 4y - 8$ পরাবৃত্তের শীর্ষের স্থানাঙ্ক– [ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২১; ম. বো. ২১]

ক) (1, 2) খ) (2, 1)
গ) (2, 2) ঘ) (2, 4)

উত্তর: ক) (1, 2)

ব্যাখ্যা: $y^2 - 4y = 4x - 8$

$\Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 4x - 8 + 4$

$\Rightarrow (y-2)^2 = 4x - 4$

$\Rightarrow (y-2)^2 = 4.1\ (x-1)$

$\therefore$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু (1, 2)

১০। $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের নিয়ামকরেখার সমীকরণ কোনটি? [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১]

ক) $x - 2 = 0$ খ) $x + 2 = 0$
গ) $y - 2 = 0$ ঘ) $y + 2 = 0$

উত্তর: খ) $x + 2 = 0$

ব্যাখ্যা: $y^2 = 4 \times 2.x$ $\therefore a = 2$

নিয়ামক: $x = -a = -2$

$\Rightarrow x + 2 = 0$

১১। $x^2 = 16y$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর ভুজ 16 হলে, P বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব কত? [কু. বো. ২৩]

ক 12 খ 20
গ 24 ঘ 36

উত্তর: খ 20

ব্যাখ্যা: $x^2 = 16y$

$\Rightarrow x^2 = 4 \times 4y$

$\therefore a = 4$

$x = 16$ হলে, $(16)^2 = 16y \Rightarrow y = 16$

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (16, 16)

$\therefore$ P বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= y + a = 16 + 4 = 20$ একক

১২। $x^2 = py$ পরাবৃত্তটি $(6, -3)$ বিন্দুগামী হলে, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক স্থানাঙ্ক– [দি. বো. ২৩]

ক $(0, 3)$ খ $(3, 0)$
গ $(0, -3)$ ঘ $(-3, 0)$

উত্তর: গ $(0, -3)$

ব্যাখ্যা: $x^2 = py$ পরাবৃত্তটি $(6, -3)$ বিন্দুগামী

$36 = -3p$

$\Rightarrow p = -12$

$p = -12$ পরাবৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2 = -12y = 4(-3)y$

$\therefore a = -3$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, a) = (0, -3)$

১৩। $y^2 - kx = 0$ পরাবৃত্তটির নিয়ামক রেখার সমীকরণ $x - 1 = 0$ হলে, k এর মান– [ম. বো. ২৩]

ক $4\sqrt{2}$ খ 4
গ -4 ঘ $-4\sqrt{2}$

উত্তর: গ -4

ব্যাখ্যা: $y^2 = kx = 4.\frac{k}{4}x$

$a = \frac{k}{4}$

নিয়ামক, $x + a = 0$

শর্তমতে, $x + a = x - 1$

$\Rightarrow \frac{k}{4} = -1$

$\therefore k = -4$

১৪। $(x - 1)^2 = -y$ এর [য. বো. ২৩]

(i) শীর্ষ (1, 0)

(ii) উপকেন্দ্র $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

(iii) উপকেন্দ্র থেকে নিকটতম নিয়ামকের দূরত্ব $= \frac{1}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: $(x - 1)^2 = -y$

$\Rightarrow (x - 1)^2 = -4 \times \frac{1}{4}y$

শীর্ষ (1, 0)

উপকেন্দ্র $(0, a) = \left(0, -\frac{1}{4}\right)$

$\therefore x - 1 = 0 \;|\; y = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x = 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$

উপকেন্দ্র ও নিয়ামকের দূরত্ব $= 2a = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

❖ **নিচের তথ্যের আলোকে ১৫ ও ১৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**
$x^2 + 5y = 0$ একটি কণিক।

১৫। কণিকটির নিয়ামকের সমীকরণ কোনটি?
[সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২; চ. বো. ২২]

ক $5x + 4 = 0$ খ $5x - 4 = 0$
গ $4y + 5 = 0$ ঘ $4y - 5 = 0$

উত্তর: ঘ $4y - 5 = 0$

ব্যাখ্যা: $x^2 + 5y = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{5}{4} \times 4y$

$\therefore a = \frac{5}{4}$

$\therefore y = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow 4y - 5 = 0$

১৬। কণিকটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?
[সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২২; চ. বো. ২২]

ক $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ খ $\left(0, -\frac{5}{4}\right)$
গ $\left(0, \frac{4}{5}\right)$ ঘ $\left(0, -\frac{4}{5}\right)$

উত্তর: খ $\left(0, -\frac{5}{4}\right)$

ব্যাখ্যা: $(0, -a) \equiv \left(0, -\frac{5}{4}\right)$

❖ **নিচের তথ্যের আলোকে ১৭ ও ১৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**
$y^2 - 4x + 4y - 6 = 0$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

১৭। পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক–
[ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২; চ. বো. ২২]

ক $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ খ $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$
গ $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ ঘ $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$

উত্তর: ঘ $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$

ব্যাখ্যা: $y^2 - 4x + 4y - 6 = 0$

$\Rightarrow y^2 + 4y + 4 - 4x - 6 - 4 = 0$

$\Rightarrow (y + 2)^2 = 4x + 10$

$\Rightarrow (y + 2)^2 = 4 \times 1 \times \left(x + \frac{5}{2}\right)$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $(a, 0) \equiv \left(x + \frac{5}{2} = 1, y + 2 = 0\right) = \left(-\frac{3}{2}, -2\right)$

১৮। পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক− [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২; রা. বো. ২১]

ক $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ খ $\left(\frac{5}{2}, -2\right)$

গ $\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$ ঘ $\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$

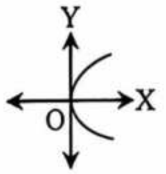
উত্তর: ঘ $\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$

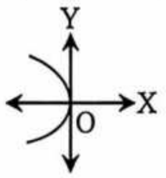
ব্যাখ্যা: শীর্ষ $= \left(x + \frac{5}{2} = 0, y + 2 = 0\right)$

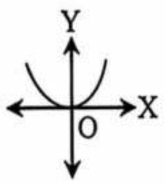
$= \left(-\frac{5}{2}, -2\right)$

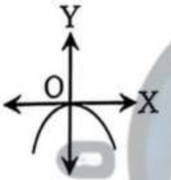
১৯। $x^2 = -12y$ এর স্কেচ কোনটি?

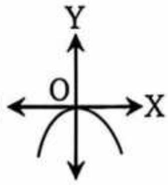
[কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২১; রা. বো. ১৭]

ক 

খ 

গ 

ঘ 

উত্তর: ঘ 

ব্যাখ্যা: $x^2 = 4 \times (-3)y$ শীর্ষবিন্দু $(0, 0)$

যেহেতু a এর মান Negative তাই পরাবৃত্তটির উন্মুক্ত অংশ y অক্ষের ঋণাত্মক দিকে থাকবে।

২০। $y^2 = 18x$ পরাবৃত্তের উপরস্থ $(2, 6)$ বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব কত?

[কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২, ২১]

ক $\frac{3}{2}$ খ $\frac{5}{2}$

গ $\frac{21}{2}$ ঘ $\frac{13}{2}$

উত্তর: ঘ $\frac{13}{2}$

ব্যাখ্যা: $y^2 = 18x$

$y^2 = 4 \times \frac{9}{2}x$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$

$\therefore$ $(2, 6)$ বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= \sqrt{\left(\frac{9}{2} - 2\right)^2 + (6-0)^2}$

$= \frac{13}{2}$

২১। $x^2 + 4x + 2y = 0$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্ব x অক্ষের সাথে কত কোণ তৈরি করে? [সি. বো. ২২]

ক $\frac{\pi}{2}$ খ π

গ $\frac{\pi}{4}$ ঘ 0

উত্তর: ঘ 0

ব্যাখ্যা: $x^2 + 4x + 4 = -2y + 4$

$\Rightarrow (x+2)^2 = -4 \times \frac{1}{2}(y - 2)$

$[(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$ এর উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $y - \beta = a]$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ,

$y - 2 = -\frac{1}{2}$

$\therefore y = \frac{3}{2}$; যা x অক্ষের সমান্তরাল।

$\therefore$ x অক্ষের সমান্তরাল হওয়ায় x অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ $0°$।

২২। $x^2 = 16y$ কণিকের উৎকেন্দ্রিকতা কত হবে?

[দি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২]

ক $e = 1$ খ $e = 0$

গ $e > 1$ ঘ $0 < e < 1$

উত্তর: ক $e = 1$

ব্যাখ্যা: পরাবৃত্তের $e = 1$

২৩। $x^2 = -12y$ পরাবৃত্তের− [সি. বো. ২২]

(i) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, -3)$

(ii) নিয়ামকের সমীকরণ $y - 3 = 0$

(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $y + 3 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $x^2 = 4 \times (-3)y$; $a = 3$

(i) উপকেন্দ্র $\equiv (0, -a) \equiv (0, -3)$ 

(ii) নিয়ামকের সমীকরণ, $y = a$

$\Rightarrow y - 3 = 0$

(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $y = -a$

$\Rightarrow y + 3 = 0$

২৪। $y^2 = 1 - x$ এর নিয়ামক রেখা কোনটি?

[ঘ. বো. ২২; চ. বো. ২২; রা. বো. ২১]

ক $x = 0$ খ $x - 2 = 0$

গ $4x - 3 = 0$ ঘ $4x - 5 = 0$

উত্তর: ঘ $4x - 5 = 0$

ব্যাখ্যা: $y^2 = 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)(x - 1)$

নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $x - 1 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow 4x - 5 = 0$

২৫। $y^2 = 12ax$ পরাবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দুগামী হলে পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? [সি. বো. ২১]

ⓚ $\frac{4}{3}$ ⓛ $\frac{9}{4}$
ⓜ $\frac{4}{9}$ ⓝ $\frac{2}{3}$

উত্তর: ⓚ $\frac{4}{3}$

ব্যাখ্যা: $(3, -2)$ বিন্দুগামী হওয়ায় $(3, -2)$ দ্বারা $y^2 = 12ax$ সিদ্ধ হবে।

$\Rightarrow 4 = 12 \times a \times 3 \therefore a = \frac{1}{9}$

$\therefore y^2 = 12 \times \frac{1}{9}.x$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্ব $= \left|\frac{12}{9}\right| = \frac{4}{3}$

২৬। u ও a ধ্রুবক হলে $v^2 = u^2 + 2as$ এর লেখচিত্র হবে– [ম. বো. ২১]

ⓚ সরলরেখা ⓛ পরাবৃত্ত
ⓜ অধিবৃত্ত ⓝ উপবৃত্ত

উত্তর: ⓛ পরাবৃত্ত

ব্যাখ্যা: u ও a ধ্রুবক হলে $v^2 \propto s$; পরাবৃত্তের সমীকরণ এর মতো, তাই এটা পরাবৃত্তাকার।

২৭। $(x-3)^2 = -4(y-4)$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ– [ম. বো. ২১]

ⓚ $y+3=0$ ⓛ $y-3=0$
ⓜ $x+3=0$ ⓝ $x-3=0$

উত্তর: ⓛ $y-3=0$

ব্যাখ্যা: পরাবৃত্ত টি Y অক্ষের ঋনাত্মক দিকে হবে। উপকেন্দ্রিক লম্ব হবে X অক্ষের সমান্তরাল। X অক্ষের যে কোন রেখার সমীকরণ, $y = -a$

$\therefore y - 4 = -1$ | $(x-3)^2 = -4 \times 1 \times (y-4)$
$\Rightarrow y - 3 = 0$ | $\therefore a = 1$

২৮। $(x-2)^2 = 16(y+3)$ পরাবৃত্তের– [দি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১]

(i) উপকেন্দ্র (2, 1)
(ii) নিয়ামকের সমীকরণ, $y - 7 = 0$
(iii) অক্ষরেখার সমীকরণ, $x - 2 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓛ i ও iii

ব্যাখ্যা: $(x-2)^2 = 4 \times 4(y+3)$

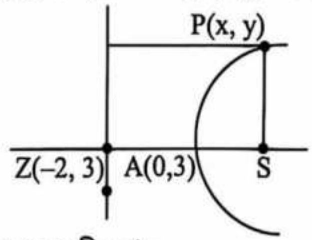
(i) উপকেন্দ্র | $(0, a)$
$x - 2 = 0$ | $y + 3 = a$
$\therefore x = 2$ | $\Rightarrow y + 3 = 4$
| $\therefore y = 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্র (2, 1)

(ii) নিয়ামক, $y + 3 = -a$
$y + 3 = -4$
$\Rightarrow y + 7 = 0$

(iii) অক্ষরেখা হল y অক্ষ।
$x - 2 = 0$ [y অক্ষের সমীকরণ, X = 0]

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ২৯ ও ৩০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



২৯। পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ– [য. বো. ২১]

ⓚ $y = 3$ ⓛ $x + 2 = 0$
ⓜ $y = -3$ ⓝ $x - 2 = 0$

উত্তর: ⓛ $x + 2 = 0$

ব্যাখ্যা: AZ এর সমীকরণ, $\frac{y-3}{3-3} = \frac{x}{2}$

$\therefore y - 3 = 0$

দিকাক্ষ AZ এর উপর লম্ব এবং $(-2, 3)$ বিন্দুগামী।

$x + k = 0$ যা $(-2, 3)$ বিন্দুগামী

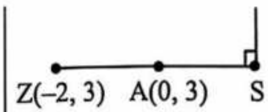
$\therefore$ দিকাক্ষ, $x + 2 = 0$

৩০। উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ– [য. বো. ২১]

ⓚ $x = 4$ ⓛ $x = -2$
ⓜ $x = 8$ ⓝ $x = 2$

উত্তর: ⓝ $x = 2$

ব্যাখ্যা: ZS এর মধ্যবিন্দু A
S(2, 3)
এখন,



AZ এর উপর লম্ব হল উপকেন্দ্রিক লম্ব। উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x + k = 0$ যা $(2, 3)$ বিন্দুগামী।

$k = -2$

$\therefore x - 2 = 0$

$\therefore x = 2$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৩১ ও ৩২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$ একটি পরাবৃত্ত।

৩১। পরাবৃত্তটির ফোকাস কোনটি? [দি. বো. ২১]

ⓚ $\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$ ⓛ $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$
ⓜ $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ ⓝ $(-1, -2)$

উত্তর: ⓚ $\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$

ব্যাখ্যা: $3x^2 - 4y + 6x - 5$

$\Rightarrow 3(x^2 + 2x + 1) = 4y + 5 + 3$

$\Rightarrow (x+1)^2 = 4 \times \frac{1}{3}(y+2) \rightarrow X^2 = 4aY \quad \left[a = \frac{1}{3}\right]$

ফোকাস, $(0, a)$

$x + 1 = 0$ $\qquad y + 2 = \frac{1}{3}$

$\therefore x = -1$ $\qquad \Rightarrow y = -\frac{5}{3}$

ফোকাস $\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$

৩২। পরাবৃত্তটির নিয়ামক রেখা কোনটি? [দি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২]

ক $3y+2=0$ খ $3y+5=0$

গ $3y+7=0$ ঘ $3y-7=0$

উত্তর: গ $3y+7=0$

ব্যাখ্যা: নিয়ামক, $y+2=-a$

$$\Rightarrow y+2+\frac{1}{3}=0 \therefore 3y+7=0$$

উপবৃত্তের সমীকরণ থেকে বিভিন্ন উপাদান নির্ণয়

৩৩। $x^2+4y^2=100$ কণিকের উৎকেন্দ্রিকতা কত? [সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩; সি. বো. ২২]

ক $\frac{\sqrt{3}}{2}$ খ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

গ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ঘ $\frac{2}{\sqrt{5}}$

উত্তর: ক $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ব্যাখ্যা: $x^2+4y^2=100$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

$\therefore a=10$; $b=5$ অর্থাৎ $a>b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $=\sqrt{1-\frac{25}{100}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

৩৪। $2x^2+y^2=4$ কণিকটির বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য– [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩]

ক 4 খ 2

গ $2\sqrt{2}$ ঘ $\sqrt{2}$

উত্তর: ক 4

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$

$b=2$; বৃহৎ অক্ষ $=2b=4$

৩৫। $27x^2+8y^2=216$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ হলো– [ম. বো. ২৩]

ক $x=0$ খ $y=0$

গ $x=2\sqrt{2}$ ঘ $y=3\sqrt{2}$

উত্তর: ক $x=0$

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{27}=1$; বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ : $x=0$

৩৬। $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{12}=1$ উপবৃত্তটির– [রা. বো. ২৩]

(i) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(3,-1)$

(ii) বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 8 একক

(iii) উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{12}=1$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{4^2}+\frac{(y+1)^2}{(2\sqrt{3})^2}=1$$

$\therefore a=4, b=2\sqrt{3}$

কেন্দ্র $(x-3=0, y+1=0)$

(i) $x=3$ | $y=-1$ $\therefore (3,-1)$

(ii) বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a=2\times 4=8$

(ii) উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{16-12}{16}}=\frac{1}{2}$

৩৭। $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত? $(a>b)$ [ব. বো. ২৩]

ক $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ খ $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$

গ $\left(\pm\frac{a}{e}, 0\right)$ ঘ $(0, \pm ae)$

উত্তর: খ $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$

ব্যাখ্যা: $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm ae, 0)=\left(\pm a\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, 0\right)=(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$

৩৮। $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রে– [দি. বো. ২৩]

(i) উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(ii) নিয়ামকের সমীকরণ $\sqrt{5}y=\pm 9$

(iii) শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=4$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

$a=2, b=3(b>a)$

(i) উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

(ii) নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $y=\pm\frac{b}{e}=\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\Rightarrow \sqrt{5}y=\pm 9$

(iii) শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=|2b|=|2\times 3|=6$

৩৯। স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে উপবৃত্তের অক্ষ বিবেচনা করে, বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 12 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $=\frac{1}{3}$ হলে ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য কত? [ঢা. বো. ২২]

ক $4\sqrt{2}$ খ $8\sqrt{2}$

গ $9\sqrt{2}$ ঘ $4\sqrt{6}$

উত্তর: খ $8\sqrt{2}$

ব্যাখ্যা: $2a = 12 \therefore a = 6$

$$e = \frac{1}{3} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$\therefore b = 4\sqrt{2}$

$\therefore$ ক্ষুদ্রাক্ষ $= 2b = 8\sqrt{2}$ একক।

৪০। $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ– [চ. বো. ২২]

ক $x = 0$ খ $y = 3$
গ $x = 4$ ঘ $y = 0$

উত্তর: ঘ $y = 0$

ব্যাখ্যা: এখানে $a > b$; তাই বৃহৎ অক্ষ হল x অক্ষ।
x অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$

৪১। $3x^2 + 4y^2 = 12$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব কত? [ম. বো. ২২]

ক 2 খ $\sqrt{3}$
গ 1 ঘ $\frac{2}{\sqrt{3}}$

উত্তর: ক 2

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1 \qquad e = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2ae = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৪২ ও ৪৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$9x^2 + 25y^2 = 225$

৪২। উদ্দীপকের কণিকের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি? [কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২১]

ক $(\pm 4, 0)$ খ $(\pm 5, 0)$
গ $(0, \pm 4)$ ঘ $(0, \pm 5)$

উত্তর: ক $(\pm 4, 0)$

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

$e = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

$a = 5$

উপকেন্দ্র $= (\pm ae, 0)$
$= (\pm 4, 0)$

৪৩। উদ্দীপকের কণিকের নিয়ামক রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? [কু. বো. ২২]

ক $\frac{25}{2}$ খ $\frac{25}{2}$
গ 4 ঘ 8

উত্তর: খ $\frac{25}{2}$

ব্যাখ্যা: নিয়ামক রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{2a}{e} = \frac{2 \times 5 \times 5}{4} = \frac{25}{2}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৪৪ ও ৪৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$8x^2 + 3y^2 = 1$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

৪৪। উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি? [ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১; কু. বো. ২১]

ক $\frac{\sqrt{2}}{3}$ খ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
গ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ঘ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

উত্তর: ঘ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times \frac{1}{8}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

৪৫। উপবৃত্তটির শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নিচের কোনটি? [ব. বো. ২২]

ক $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ খ $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$
গ $\left(0, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ ঘ $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$

উত্তর: ক $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$

শীর্ষবিন্দু $(0, \pm b) = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৪৬ ও ৪৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে উপবৃত্তের অক্ষ ধরে ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য 2 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{5}}$।

৪৬। বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য কত একক? [দি. বো. ২২]

ক $\sqrt{5}$ খ $\frac{3}{\sqrt{5}}$
গ $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ঘ $\frac{1}{\sqrt{5}}$

উত্তর: ক $\sqrt{5}$

ব্যাখ্যা: $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ [ধরি, $a > b$]

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}$

$\therefore a = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষ $= 2a = \sqrt{5}$

$2b = 2$
$\therefore b = 1$

৪৭। উপবৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি? [দি. বো. ২২]

ক $3x^2 + 5y^2 = 5$ খ $4x^2 + 3y^2 = 5$
গ $2x^2 + 3y^2 = 5$ ঘ $4x^2 + 5y^2 = 5$

উত্তর: ঘ $4x^2 + 5y^2 = 5$

ব্যাখ্যা: $b = 1$; $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

$\frac{4x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$

$\therefore 4x^2 + 5y^2 = 5$

৪৮। $4x^2 + y^2 = 1$ দ্বারা নির্দেশিত কণিকটির উৎকেন্দ্রিকতা কত?

[চ. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২১]

ক $\frac{2}{\sqrt{5}}$ খ $\frac{2}{\sqrt{3}}$

গ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

উত্তর: গ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ | $e = \sqrt{1 - \frac{(ছোট)^2}{(বড়)^2}}$

$e = \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{4}}{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

৪৯। $x^2 + 3y^2 = 3$ কণিকের নিয়ামকের সমীকরণ কোনটি?

[ব. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২১]

ক $\sqrt{2}x = \pm 3$ খ $2x = \pm 3$

গ $x = \pm\sqrt{2}$ ঘ $x = \pm 2$

উত্তর: ক $\sqrt{2}x = \pm 3$

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(1)^2} = 1$

নিয়ামক $x = \pm\frac{a}{e}$ | $e = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, a = \sqrt{3}$

$\Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore \sqrt{2}x = \pm 3$

৫০। $3x^2 + 2y^2 = 12$ কণিকটির নিয়ামকরেখার সমীকরণ– [য. বো. ২১]

ক $2x = \pm\sqrt{3}$ খ $x = \pm 2\sqrt{3}$

গ $y = \pm 2\sqrt{3}$ ঘ $y = \pm 3\sqrt{2}$

উত্তর: ঘ $y = \pm 3\sqrt{2}$

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} = 1; a = 2, b = \sqrt{6} \therefore b > a$

নিয়ামক, $y = \pm\frac{b}{e}$ | $e = \sqrt{1 - \frac{4}{6}}$

$\Rightarrow y = \pm 3\sqrt{2}$ | $= \frac{1}{\sqrt{3}}$

৫১। $x^2 = 4 - 4y^2$ উপবৃত্তের– [য. বো. ২১]

(i) পরামিতিক স্থানাংক $(2\cos\theta, \sin\theta)$

(ii) ক্ষুদ্রাক্ষ x অক্ষ বরাবর

(iii) ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব $2\sqrt{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: $x^2 + 4y^2 = 4$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1} = 1$

(i) $x = a\cos\theta$ ও $y = b\sin\theta$

$\therefore x = 2\cos\theta$ ও $y = \sin\theta$, পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(2\cos\theta, \sin\theta)$

(ii) $a > b$; ক্ষুদ্রাক্ষ y অক্ষ বরাবর।

(iii) ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব $= 2ae$ | $e = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$

$= 2\sqrt{3}$ | $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$

৫২। $25x^2 + y^2 = 25$ এর উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি?

[ঢা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩]

ক $(0, \pm 2\sqrt{6})$ খ $\left(\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}, 0\right)$

গ $\left(\pm\frac{\sqrt{26}}{5}, 0\right)$ ঘ $(0, \pm\sqrt{26})$

উত্তর: ক $(0, \pm 2\sqrt{6})$

ব্যাখ্যা: উপকেন্দ্র $\equiv (0, \pm be)$ | $e = \sqrt{1 - \frac{1^2}{5^2}}; a = 1, b = 5$

$= \left(0, \pm 5\,\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$ | $= \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$= (0, \pm 2\sqrt{6})$

৫৩। $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক কোনটি?

[কু. বো. ২১]

ক $(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$ খ $(0, 2), (0, -2)$

গ $(2, 3), (2, -1)$ ঘ $(2, -3), (2, 1)$

উত্তর: সঠিক উত্তর নেই

ব্যাখ্যা: $a = \sqrt{2}, b = 2\sqrt{2}$ ie. $b > a$

$e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{2}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

উপকেন্দ্র $(0, \pm be)$

এখানে,

$x - 2 = 0$ ও $y - 1 = \pm be$

$\therefore x = 2 \quad \therefore y = \pm\sqrt{6} + 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $(2, \pm\sqrt{6} + 1)$

৫৪। $9x^2 + 7y^2 = 63$ কণিকের ক্ষেত্রফল কত? [রা. বো. ২২]

ক 7π খ 9π

গ $7\sqrt{3}\pi$ ঘ $3\sqrt{7}\pi$

উত্তর: ঘ $3\sqrt{7}\pi$

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এই কণিকের ক্ষেত্রফল $= \pi ab$

$\Rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{7})^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \rightarrow \Delta = \pi ab = 3\sqrt{7}\pi$

অধিবৃত্তের সমীকরণ থেকে বিভিন্ন উপাদান নির্ণয়

৫৫। $7x^2 - 9y^2 + 63 = 0$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য হলো– [ঢা. বো. ২৩]

ক $\frac{14}{3}$ খ $\frac{14}{9}$

গ $\frac{18}{7}$ ঘ $\frac{18}{\sqrt{7}}$

উত্তর: ঘ $\frac{18}{\sqrt{7}}$

ব্যাখ্যা: $7x^2 - 9y^2 = -63$

$\Rightarrow \frac{9y^2}{63} - \frac{7x^2}{63} = 1$

$\Rightarrow \frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$

$b = \sqrt{7}$; $a = 3$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{18}{\sqrt{7}}$

৫৬। $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব– [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩; ব. বো. ২২]

ক $2\sqrt{13}$ খ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

গ $\frac{2\sqrt{13}}{3}$ ঘ $\sqrt{2}$

উত্তর: ক $2\sqrt{13}$

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

$a = 3, b = 2$

$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2ae = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{13}}{3} = 2\sqrt{13}$

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ৫৭ ও ৫৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$9x^2 - 16y^2 = 144$

৫৭। অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? [রা. বো. ২৩]

ক $(\pm 4, 0)$ খ $(\pm 5, 0)$

গ $(0, \pm 4)$ ঘ $(0, \pm 5)$

উত্তর: ক $(\pm 4, 0)$

ব্যাখ্যা: $9x^2 - 16y^2 = 144$

$\Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

$\because a = 4, b = 3$

শীর্ষ $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$

৫৮। অধিবৃত্তটির অসীমতটের সমীকরণ কোনটি? [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২; য. বো. ২১]

ক $2x = \pm 3y$ খ $3y = \pm 2x$

গ $3x = \pm 4y$ ঘ $4x = 3y$

উত্তর: গ $3x = \pm 4y$

ব্যাখ্যা: $\because (a = 4) > (b = 3)$

$\therefore$ অসীমতট রেখার সমীকরণ $y = \pm \frac{b}{a} x$

$\Rightarrow y = \pm \frac{3}{4} x$

$\therefore 3x = \pm 4y$

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ৫৯ ও ৬০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$4y^2 - 5x^2 = 20$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

৫৯। অধিবৃত্তটির অসীমতট রেখার সমীকরণ কোনটি? [কু. বো. ২৩]

ক $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} x$ খ $y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} x$

গ $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} y$ ঘ $x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} y$

উত্তর: ক $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} x$

ব্যাখ্যা: $\frac{4y^2}{20} - \frac{5x^2}{20} = 1$

$\Rightarrow \frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$

$a = 2, b = \sqrt{5}$

$\therefore$ অসীমতট রেখার সমীকরণ, $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} x$

৬০। অধিবৃত্তটির নিয়ামক রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত একক? [কু. বো. ২৩]

ক $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ খ $\frac{10}{3}$

গ $\frac{12}{\sqrt{5}}$ ঘ 6

উত্তর: খ $\frac{10}{3}$

ব্যাখ্যা: নিয়ামক রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{2b}{e}$

$e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\therefore \frac{2b}{e} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\frac{3}{\sqrt{5}}} = \frac{10}{3}$

৬১। $2y^2 - x^2 = 1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কোনটি? [য. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২; রা. বো. ২১]

ক $\sqrt{\frac{3}{2}}$ খ $\sqrt{3}$

গ $\frac{3}{2}$ ঘ 3

উত্তর: খ $\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: $\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \dfrac{x^2}{1^2} = 1$

$$e = \sqrt{1 + \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{3}$$

৬২। $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{25} = 1$ অধিবৃত্তের আড় অক্ষ নিচের কোনটি? [দি. বো. ২২]

ক x অক্ষ
খ y অক্ষ
গ x অক্ষের সমান্তরাল
ঘ y অক্ষের সমান্তরাল

উত্তর: খ y অক্ষ

ব্যাখ্যা: অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে যেটা '+ ve' থাকবে ওইটাই আড় অক্ষ।

৬৩। $\dfrac{(y+2)^2}{4} - \dfrac{x^2}{5} = 1$ অধিবৃত্তের– [ম. বো. ২২]

(i) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-2, 0)$
(ii) আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য 4
(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 5

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii
খ i ও iii
গ ii ও iii
ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) কেন্দ্র, $y + 2 = 0$ $\therefore x = 0$

$\therefore y = -2$

$(0, -2)$

(ii) আড় অক্ষ $= 2b = 4$

$$\frac{(y+2)^2}{2^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$$

$$\frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$$

(iii) উপকেন্দ্রিক লম্ব $= \dfrac{2a^2}{b} = \dfrac{2\times 5}{2} = 5$

৬৪। $16y^2 - 9x^2 = 144$ কণিকটির– [চা. বো. ২২]

(i) অসীমতট রেখার সমীকরণ $y = \pm\dfrac{3}{4}x$
(ii) নিয়ামক রেখার সমীকরণ $5y \pm 9 = 0$
(iii) পরামিতিক সমীকরণ: $x = 3\sec\theta$, $y = 4\tan\theta$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii
খ ii ও iii
গ i ও iii
ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: $a = 4$; $b = 3$

(i) অসীমতটের সমীকরণ, $y = \pm\dfrac{b}{a}x$

$$\therefore y = \pm\frac{3}{4}x$$

(ii) $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ এর নিয়ামকের সমীকরণ,

$y = \pm\dfrac{b}{e} \Rightarrow y = \pm\dfrac{3}{\frac{5}{3}}$

$e = \sqrt{1 + \dfrac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 + \dfrac{16}{9}} = \dfrac{5}{3}$

$\therefore 5y \pm 9 = 0$

(iii) $x = a\tan\theta$; $y = b\sec\theta$

$= 4\tan\theta$ $= 3\sec\theta$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৬৫ ও ৬৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$9x^2 - 16y^2 = 144$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

৬৫। অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কোনটি? [রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২১; ম. বো. ২১]

ক $\dfrac{9}{8}$
খ $\dfrac{9}{2}$
গ $\dfrac{32}{5}$
ঘ $\dfrac{32}{9}$

উত্তর: খ $\dfrac{9}{2}$

ব্যাখ্যা: $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

$\therefore a = 4, b = 3$ ie. $a > b$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2\times b^2}{a} = \dfrac{2\times 9}{4} = \dfrac{9}{2}$

৬৬। নিয়ামক রেখার সমীকরণ কোনটি? [রা. বো. ২২]

ক $x = \dfrac{16}{5}$
খ $y = \dfrac{16}{5}$
গ $x = \pm\dfrac{16}{5}$
ঘ $y = \pm\dfrac{16}{5}$

উত্তর: গ $x = \pm\dfrac{16}{5}$

ব্যাখ্যা: নিয়ামকরেখা, $x = \pm\dfrac{a}{e}$

$$e = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4}; a = 4$$

$$x = \pm\frac{16}{5}$$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৬৭ ও ৬৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$25x^2 - 16y^2 + 400 = 0$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

৬৭। অধিবৃত্তটির আড় অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে– [সি. বো. ২২]

ক 10, 8
খ 8, 10
গ 5, 4
ঘ 4, 5

উত্তর: ক 10, 8

ব্যাখ্যা: $\dfrac{y^2}{5^2} - \dfrac{x^2}{4^2} = 1$

$\therefore a = 5, b = 4$ ie. $a > b$

আড় অক্ষ $= 2\times 5 = 10$

অনুবন্ধী অক্ষ $= 2\times 4 = 8$

৬৮। নিয়ামক রেখার সমীকরণ কেনটি? [সি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১]

ক $y = \pm\dfrac{16}{\sqrt{41}}$
খ $y = \pm\dfrac{25}{\sqrt{39}}$
গ $y = \pm\dfrac{25}{\sqrt{41}}$
ঘ $y = \pm\dfrac{\sqrt{41}}{25}$

উত্তর: গ $y = \pm\dfrac{25}{\sqrt{41}}$

ব্যাখ্যা: $\dfrac{y^2}{5^2} - \dfrac{x^2}{4^2} = 1$

$\therefore a = 4, b = 5$ ie. $b > a$

$\therefore e = \sqrt{1 + \dfrac{16}{25}} = \dfrac{\sqrt{41}}{5}$

$\therefore b = 5$

নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $y = \pm\dfrac{b}{e}$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{25}{\sqrt{41}}$$

৬৯। $x^2 - 4y^2 - 2x = 3$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত? [য. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২১]

ক $\frac{\sqrt{5}}{2}$ খ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
গ $2\sqrt{5}$ ঘ $2\sqrt{3}$

উত্তর: ক $\frac{\sqrt{5}}{2}$

ব্যাখ্যা: $x^2 - 2x + 1 - 4y^2 = 3 + 1$
$\Rightarrow (x-1)^2 - 4y^2 = 4$
$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1; a = 2, b = 1$
$e = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

৭০। $4y^2 - 9x^2 = 36$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু কত? [ব. বো. ২১]

ক $(\pm 3, 0)$ খ $(0, \pm 3)$
গ $(\pm 2, 0)$ ঘ $(0, \pm 2)$

উত্তর: খ $(0, \pm 3)$

ব্যাখ্যা: $\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1; a = 2, b = 3$
শীর্ষবিন্দু $\equiv (0, \pm b) = (0, \pm 3)$

৭১। $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ অধিবৃত্তের (hyperbola) অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য কত? [ব. বো. ২১]

ক 4 খ 5
গ 6 ঘ 8

উত্তর: গ 6

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$; $a = 4, b = 3 \therefore a > b$
$\therefore$ অনুবন্ধী অক্ষ $= 2b = 6$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৭২ ও ৭৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

৭২। অধিবৃত্তটির আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য কত? [চ. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১]

ক 4 খ 6
গ 8 ঘ 18

উত্তর: খ 6

ব্যাখ্যা: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$
$\Rightarrow \frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1; a = 2, b = 3$
আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 2 \times 3 = 6$ $[\because b > a]$

৭৩। অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাংক কত? [চ. বো. ২১]

ক $(\pm\sqrt{13}, 0)$ খ $(\pm\sqrt{5}, 0)$
গ $(0, \pm\sqrt{5})$ ঘ $(0, \pm\sqrt{13})$

উত্তর: ঘ $(0, \pm\sqrt{13})$

ব্যাখ্যা: উপকেন্দ্র $\equiv (0, \pm be)$
$= (0, \pm\sqrt{13})$

$e = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$
$b = 3$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৭৪ ও ৭৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$16y^2 - 25x^2 = 400$ একটি কণিকের সমীকরণ।

৭৪। কণিকটির উৎকেন্দ্রিকতা কোনটি? [সি. বো. ২১]

ক $\frac{3}{4}$ খ $\frac{3}{5}$
গ $\frac{\sqrt{41}}{4}$ ঘ $\frac{\sqrt{41}}{5}$

উত্তর: ঘ $\frac{\sqrt{41}}{5}$

ব্যাখ্যা: $\frac{y^2}{5^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$
$\therefore a = 4, b = 5$ ie. $b > a$
$e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 + \frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{41}}{5}$

৭৫। কণিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ কত? [সি. বো. ২১]

ক $x = \pm\sqrt{41}$ খ $y = \pm\sqrt{41}$
গ $x = \pm 3$ ঘ $y = \pm 3$

উত্তর: খ $y = \pm\sqrt{41}$

ব্যাখ্যা: উপকেন্দ্রিক লম্ব, $y = \pm be$
$\Rightarrow y = \pm\sqrt{41}$

$b = 5,$
$e = \sqrt{\frac{41}{5}}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৭৬ ও ৭৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$px^2 - 16y^2 = 144$ কণিকটি $(\pm 4, 0)$ বিন্দুগামী।

৭৬। p এর মান– [ম. বো. ২১]

ক -9 খ -4
গ 8 ঘ 9

উত্তর: ঘ 9

ব্যাখ্যা: $px^2 - 16y^2 = 144$ যা $(\pm 4,0)$ বিন্দুগামী
$\Rightarrow p(\pm 4)^2 - 16 \times 0^2 = 144 \therefore p = 9$

৭৭। উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক– [ম. বো. ২১]

ক $(0, \pm 4)$ খ $(\pm 4, 0)$
গ $(0, \pm 5)$ ঘ $(\pm 5, 0)$

উত্তর: ঘ $(\pm 5, 0)$

ব্যাখ্যা: $p = 9$
$9x^2 - 16y^2 = 144$
$\Rightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$
উপকেন্দ্র $(\pm ae, 0) \equiv (\pm 5, 0)$

$e = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$
$a = 4$

৭৮। $(\pm 3, 0)$ শীর্ষবিন্দু এবং $\sqrt{3}$ উৎকেন্দ্রিকতাবিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি? [কু. বো. ২১]

ক $x^2 - 2y^2 = 18$ খ $2x^2 - y^2 = 18$
গ $2y^2 - x^2 = 18$ ঘ $y^2 - 2x^2 = 18$

উত্তর: খ $2x^2 - y^2 = 18$

ব্যাখ্যা: শীর্ষবিন্দু $\equiv (\pm a, 0)$; $\therefore a = 3$
$e = \sqrt{3} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \therefore b = 3\sqrt{2}$
$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1$
$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{18} = 1$
$\therefore 2x^2 - y^2 = 18$

কণিকের পরামিতিক সমীকরণ

❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ৭৯ ও ৮০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
কোনো বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(2\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$

৭৯। সঞ্চারপথটি কী নির্দেশ করে? [ব. বো. ২৩]
ⓚ পরাবৃত্ত ⓛ উপবৃত্ত
ⓜ বৃত্ত ⓝ অধিবৃত্ত
উত্তর: ⓛ উপবৃত্ত
ব্যাখ্যা: $x = 2\cos\theta$
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{2}$ ...... (i)
এবং $y = \sqrt{3}\sin\theta$
$\Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{3}}$ .... (ii)
(i) ও (ii) নং বর্গ করে যোগ করে,
$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$; যা একটি উপবৃত্ত।

৮০। কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত? [ব. বো. ২৩]
ⓚ $(2, \sqrt{3})$ ⓛ $(0, 0)$
ⓜ $(2, 0)$ ⓝ $(0, \sqrt{3})$
উত্তর: ⓛ $(0, 0)$
ব্যাখ্যা: কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (0, 0)$

৮১। $4x^2 - y^2 + 16 = 0$ অধিবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক কোনটি? [য. বো. ২৩]
ⓚ $(4\sec\theta, 2\tan\theta)$ ⓛ $(2\sec\theta, 4\tan\theta)$
ⓜ $(4\tan\theta, 2\sec\theta)$ ⓝ $(2\tan\theta, 4\sec\theta)$
উত্তর: ⓝ $(2\tan\theta, 4\sec\theta)$
ব্যাখ্যা: $4x^2 - y^2 = -16$
$\Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$
$\therefore a = 2, b = 4$
$y = 4\sec\theta, x = 2\tan\theta$
$\therefore (x, y) = (2\tan\theta, 4\sec\theta)$

৮২। $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ এর পরামিতিক সমীকরণ হলো- [চ. বো. ২৩]
ⓚ $x = 5\sec\theta, y = 4\tan\theta$ ⓛ $x = 4\sec\theta, y = 5\tan\theta$
ⓜ $x = 4\tan\theta, y = 5\sec\theta$ ⓝ $x = 5\tan\theta, y = 4\sec\theta$
উত্তর: ⓚ $x = 5\sec\theta, y = 4\tan\theta$
ব্যাখ্যা: $x = a\sec\theta, y = b\tan\theta$
$x = 5\sec\theta, y = 4\tan\theta$

৮৩। $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ- [সি. বো. ২৩]
ⓚ $x = 5\tan\theta, y = 4\sec\theta$ ⓛ $x = 5\sec\theta, y = 4\tan\theta$
ⓜ $x = 5\sin\theta, y = 4\cos\theta$ ⓝ $x = 4\tan\theta, y = 5\sec\theta$
উত্তর: ⓝ $x = 4\tan\theta, y = 5\sec\theta$
ব্যাখ্যা: $y = 5\sec\theta, x = 4\tan\theta$

৮৪। $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ অধিবৃত্তের (x, y) বিন্দুর পরামিতি স্থানাঙ্ক- [দি. বো. ২৩]
ⓚ $(4\sec\theta, 3\tan\theta)$ ⓛ $(4\sin\theta, -3\cos\theta)$
ⓜ $(4\cos\theta, 3\sin\theta)$ ⓝ $(4\tan\theta, 3\sec\theta)$
উত্তর: ⓚ $(4\sec\theta, 3\tan\theta)$
ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$
$a = 4, b = 3$
(x, y) বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক
$(a\sec\theta, b\tan\theta) = (4\sec\theta, 3\tan\theta)$

৮৫। $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক কোনটি? [রা. বো. ২১]
ⓚ $(at^2, 2at)$ ⓛ $(-at^2, 2at)$
ⓜ $(2at, at^2)$ ⓝ $(-2at, at^2)$
উত্তর: ⓚ $(at^2, 2at)$
ব্যাখ্যা: $y^2 = 4ax$ ... ... (i)
$\Rightarrow x = \frac{y^2}{4a} = a\left(\frac{y}{2a}\right)^2 = at^2$ $\left[\text{যেখানে, } t = \frac{y}{2a}\right]$
(i) থেকে পাই, $y^2 = 4a.at^2$ $[\because x = at^2]$
$= 4a^2t^2 = (2at)^2$
$\therefore y = 2at$
পরামিতিক স্থানাঙ্ক: $(at^2, 2at)$

৮৬। একটি অধিবৃত্তের উপর যে কোনো বিন্দুর পরামিতিক স্থানাংক $(4\sec\theta, 6\tan\theta)$। অধিবৃত্তটির সমীকরণ- [চ. বো. ২১]
ⓚ $16x^2 + 25y^2 = 400$ ⓛ $16x^2 - 25y^2 = 400$
ⓜ $9x^2 - 4y^2 = 144$ ⓝ $4x^2 - 9y^2 = 144$
উত্তর: ⓜ $9x^2 - 4y^2 = 144$
ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর পরামিতিক স্থানাঙ্ক,
$x = a\sec\theta$ ও $y = b\tan\theta$; $(4\sec\theta, 6\tan\theta)$ [দেওয়া আছে]
$\therefore a = 4, b = 6$
$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$
$\Rightarrow 9x^2 - 4y^2 = 144$

৮৭। $4x^2 - y^2 + 16 = 0$ অধিবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক কোনটি? [য. বো. ২৩]
ⓚ $(4\sec\theta, 2\tan\theta)$ ⓛ $(2\sec\theta, 4\tan\theta)$
ⓜ $(4\tan\theta, 2\sec\theta)$ ⓝ $(2\tan\theta, 4\sec\theta)$
উত্তর: ⓝ $(2\tan\theta, 4\sec\theta)$
ব্যাখ্যা: $4x^2 - y^2 = -16$
$\Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$
$y = 4\sec\theta, x = 2\tan\theta$
$\therefore (x, y) = (2\tan\theta, 4\sec\theta)$

৮৮। $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ এর পরামিতিক সমীকরণ হলো- [চ. বো. ২৩]
ⓚ $x = 5\sec\theta, y = 4\tan\theta$ ⓛ $x = 4\sec\theta, y = 5\tan\theta$
ⓜ $x = 4\tan\theta, y = 5\sec\theta$ ⓝ $x = 5\tan\theta, y = 4\sec\theta$
উত্তর: ⓚ $x = 5\sec\theta, y = 4\tan\theta$
ব্যাখ্যা: $x = a\sec\theta, y = b\tan\theta$
$x = 5\sec\theta, y = 4\tan\theta$

৮৯। $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$ অধিবৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ– [সি. বো. ২৩]

ক $x=5\tan\theta, y=4\sec\theta$ খ $x=5\sec\theta, y=4\tan\theta$
গ $x=5\sin\theta, y=4\cos\theta$ ঘ $x=4\tan\theta, y=5\sec\theta$

উত্তর: ঘ $x=4\tan\theta, y=5\sec\theta$

ব্যাখ্যা: $a=5, b=4$

$y=5\sec\theta, x=4\tan\theta$

৯০। $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ অধিবৃত্তের (x, y) বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক– [দি. বো. ২৩]

ক $(4\sec\theta, 3\tan\theta)$ খ $(4\sin\theta, -3\cos\theta)$
গ $(4\cos\theta, 3\sin\theta)$ ঘ $(4\tan\theta, 3\sec\theta)$

উত্তর: ক $(4\sec\theta, 3\tan\theta)$

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$

$a=4, b=3$

(x, y) বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক

$(a\sec\theta, b\tan\theta)=(4\sec\theta, 3\tan\theta)$

স্পর্শক সংক্রান্ত

৯১। b এর মান কত হলে $y=4x+1$ সরলরেখাটি $y^2=8bx$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করবে? [রা. বো. ২৩]

ক $\frac{1}{4}$ খ $\frac{1}{2}$
গ 2 ঘ 4

উত্তর: গ 2

ব্যাখ্যা: $y=mx+c$ সরলরেখা $y^2=4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত, $c=\frac{a}{m}$

$y=4x+1$ এ $m=4, c=1$

এবং $y^2=8bx$ কে $y^2=4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a=2b$

$\therefore c=\frac{a}{m} \Rightarrow a=\frac{2b}{4} \Rightarrow b=2$

৯২। $x+y+c=0$ সরলরেখাটি $y^2=x$ পরাবৃত্তটিকে স্পর্শ করলে c এর মান কত? [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২]

ক -4 খ $-\frac{1}{4}$
গ $\frac{1}{4}$ ঘ 4

উত্তর: গ $\frac{1}{4}$

ব্যাখ্যা: $y=-x-c$ .... (i)

এখানে, $m=-1$

$y^2=4\cdot\frac{1}{4}x$ .... (ii)

এখানে, $a=\frac{1}{4}$

(i) নং রেখা (ii) নং পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে, $-c=\frac{a}{m}$

$\Rightarrow -c=\frac{\frac{1}{4}}{-1}$

$\therefore c=\frac{1}{4}$

৯৩। $y=x+c$ সরলরেখাটি $9x^2+16y^2=144$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করলে c এর মান– [ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো, ২১; ব. বো. ২১]

ক ± 3 খ ± 4
গ ± 5 ঘ ± 6

উত্তর: গ ± 5

ব্যাখ্যা: উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

$\therefore a=4, b=3$ ie. $a>b$

$\because y=x+c$ রেখাটি উপবৃত্তটিকে স্পর্শ করে

$\therefore c^2=a^2m^2+b^2=4^2\times1^2+3^2$ $[\because m=1, a=4, b=3]$

$\Rightarrow c^2=25$

$\therefore c=\pm 5$

৯৪। $3x^2-4y^2=12$ অধিবৃত্তের (4, 3) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢালের মান– [চ. বো. ২৩]

ক -1 খ $\frac{3}{4}$
গ 1 ঘ $\frac{4}{3}$

উত্তর: গ 1

ব্যাখ্যা: $3x^2-4y^2=12$

(4, 3) অধিবৃত্তের উপরস্থ বিন্দু

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $3\times4x-4\times3y=12$

$\Rightarrow x-y=1$

$y=x-1$

ঢাল, $m=1$

৯৫। $y=mx+c$ রেখাটি $y^2=4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে বিন্দুর স্থানাঙ্ক– [সি. বো. ২২]

ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ খ $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{m}{2a}\right)$
গ $\left(\frac{2a}{m}, \frac{a}{m^2}\right)$ ঘ $\left(\frac{m^2}{a}, \frac{2a}{m}\right)$

উত্তর: ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

ব্যাখ্যা: স্পর্শ বিন্দু $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

৯৬। $y^2=6x$ পরাবৃত্তটি $y=mx+c$ রেখাকে স্পর্শ করলে– [ঢা. বো. ২২]

(i) $c=\frac{3}{2m}$

(ii) পরাবৃত্ত ও সরলরেখার সমীকরণ উভয়ই মূলবিন্দু গামী

(iii) স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3}{2m^2}, \frac{3}{m}\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ i ও iii

ব্যাখ্যা:

(i) $c=\frac{a}{m}=\frac{3}{2m}$

(ii) $y=mx+c$; মূলবিন্দুগামী না।

(iii) স্পর্শ বিন্দু $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)\equiv\left(\frac{3}{2m^2}, \frac{3}{m}\right)$

$y^2=4\frac{6}{4}.x$

$a=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

৯৭। (2, 4) বিন্দুতে $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [ঢা. বো. ২১]

ⓚ $x + y - 2 = 0$ ⓛ $x - y - 2 = 0$
ⓖ $x - y + 2 = 0$ ⓘ $x = 0$

উত্তর: ⓖ $x - y + 2 = 0$

ব্যাখ্যা: $4 \times y = 8 \times \left(\frac{x+2}{2}\right)$

$\Rightarrow 4y = 4x + 8$

$\therefore x - y + 2 = 0$

$x^2 \rightarrow xx_1$
$y^2 \rightarrow yy_1$
$x \rightarrow \frac{x + x_1}{2}$
$y \rightarrow \frac{y + y_1}{2}$

৯৮। k এর মান কত হলে $2y - 4x - k = 0$ রেখাটি $y^2 = 10x$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হবে? [সি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২১]

ⓚ $\frac{5}{4}$ ⓛ $\frac{4}{5}$
ⓖ $\frac{5}{2}$ ⓘ $\frac{2}{5}$

উত্তর: ⓖ $\frac{5}{2}$

ব্যাখ্যা: $y = mx + c$ রেখা $y^2 = 4ax$ এর স্পর্শক হলে $c = \frac{a}{m}$

দেওয়া আছে,

$2y - 4x - k = 0$

$\Rightarrow 2y = 4x + k$

$\Rightarrow y = 2x + \frac{k}{2}$

$\therefore c = \frac{k}{2}, m = 2$

এবং $y^2 = 4 \times \frac{10}{4} x$

$\therefore a = \frac{10}{4}$

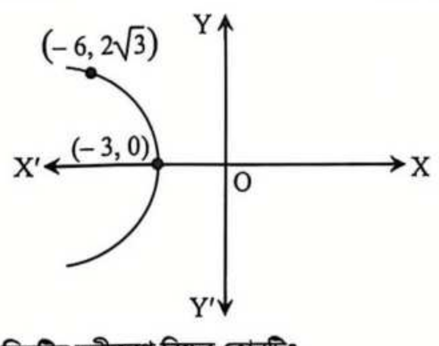
$c = \frac{a}{m}$

$\Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{10}{4 \times 2}$

$\therefore k = \frac{5}{2}$

বিবিধ

৯৯।



চিত্রটির সমীকরণ নিচের কোনটি?

ⓚ $y^2 = -8(x - 3)$ ⓛ $y^2 = -4(x + 3)$
ⓖ $x^2 = -4(y - 3)$ ⓘ $x^2 = -8(y + 3)$

উত্তর: ⓛ $y^2 = -4(x + 3)$

ব্যাখ্যা: পরাবৃত্তের শীর্ষ (–3, 0) এবং অক্ষরেখা x অক্ষ। পরাবৃত্তটির উন্মুক্ত অংশ x অক্ষের ঋণাত্মক দিকে আছে।

পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(y - \beta)^2 = -4a(x - \alpha)$

$\Rightarrow (y - 0)^2 = -4a(x + 3)$ যা $(-6, 2\sqrt{3})$ বিন্দুগামী।

$\therefore (2\sqrt{3})^2 = -4a(-6 + 3)$

$\Rightarrow a = 1$

$\therefore$ সমীকরণ $y^2 = -4(x + 3)$

১০০। কোনো উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষের অর্ধেক হলে উৎকেন্দ্রিকতা–

ⓚ $\frac{1}{2}$ ⓛ $\frac{1}{\sqrt{2}}$
ⓖ $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ⓘ $\frac{2}{\sqrt{5}}$

উত্তর: ⓛ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ব্যাখ্যা: প্রশ্নমতে, $\frac{2b^2}{a} = \frac{2a}{2}$

$\Rightarrow 2b^2 = a^2$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$= \sqrt{1 - \frac{b^2}{2b^2}}$

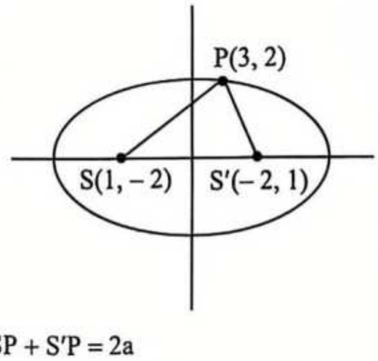
$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

১০১। একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় (1, – 2) এবং (– 2, 1)। যদি (3, 2) বিন্দু উক্ত উপবৃত্তের সমীকরণকে সিদ্ধ করে, তবে বৃহাক্ষের দৈর্ঘ্য কত?

ⓚ $\sqrt{13} + \sqrt{5}$ ⓛ $\sqrt{26} + 2\sqrt{5}$
ⓖ $2\sqrt{26} + 4\sqrt{5}$ ⓘ $\sqrt{13} + 3\sqrt{5}$

উত্তর: ⓛ $\sqrt{26} + 2\sqrt{5}$

ব্যাখ্যা:



$SP + S'P = 2a$

$\therefore 2a = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-2)^2} + \sqrt{(-2-3)^2 + (1-2)^2}$

$= \sqrt{26} + 2\sqrt{5}$

নিজেকে যাচাই করো

১। $9x^2 - 24xy + 12y^2 - 48x - 24y + 36 = 0$ সমীকরণটি কী নির্দেশ করে?
ⓚ বৃত্ত ⓚ পরাবৃত্ত ⓖ উপবৃত্ত ⓘ অধিবৃত্ত

২। কেন্দ্রবিহীন কণিক কোনটি?
ⓚ $x^2+y^2=0$ ⓚ $x^2+y=0$ ⓖ $x^2-y^2=10$ ⓘ $x^2+2y^2=10$

৩। $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ কণিকের উৎকেন্দ্রিকতা শূন্য হলে বক্ররেখাটির নাম–
ⓚ উপবৃত্ত ⓚ বৃত্ত ⓖ পরাবৃত্ত ⓘ অধিবৃত্ত

৪। $x^2 + 4x + 2y = 0$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্ব x অক্ষের সাথে কত কোণ তৈরি করে?
ⓚ $\frac{\pi}{2}$ ⓚ π ⓖ $\frac{\pi}{4}$ ⓘ 0

৫। $x^2 = 16y$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর ভুজ 16 হলে, P বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব কত?
ⓚ 12 ⓚ 20 ⓖ 24 ⓘ 36

৬। $y^2 - kx = 0$ পরাবৃত্তটির নিয়ামক রেখার সমীকরণ $x - 1 = 0$ হলে, k এর মান–
ⓚ $4\sqrt{2}$ ⓚ 4 ⓖ -4 ⓘ $-4\sqrt{2}$

৭। $(x-1)^2 = -y$ এর–
(i) শীর্ষ (1, 0) (ii) উপকেন্দ্র $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$
(iii) উপকেন্দ্র থেকে নিকটতম নিয়ামকের দূরত্ব $= \frac{1}{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৮। u ও a ধ্রুবক হলে $v^2 = u^2 + 2as$ এর লেখচিত্র হবে–
ⓚ সরলরেখা ⓚ পরাবৃত্ত ⓖ অধিবৃত্ত ⓘ উপবৃত্ত

৯। $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{12}=1$ উপবৃত্তটির–
(i) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (3, – 1) (ii) বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 8 একক
(iii) উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚ ii ও iii ⓖ i ও iii ⓘ i, ii ও iii

১০। $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত? $(a > b)$
ⓚ $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ ⓚ $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$
ⓖ $\left(\pm\frac{a}{e}, 0\right)$ ⓘ $(0, \pm ae)$

১১। $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রে–
(i) উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (ii) নিয়ামকের সমীকরণ $\sqrt{5}y = \pm 9$
(iii) শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব = 4
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

১২। $3x^2 + 4y^2 = 12$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব কত?
ⓚ 2 ⓚ $\sqrt{3}$ ⓖ 1 ⓘ $\frac{2}{\sqrt{3}}$

১৩। $9x^2 + 7y^2 = 63$ কণিকের ক্ষেত্রফল কত?
ⓚ 7π ⓚ 9π ⓖ $7\sqrt{3}\pi$ ⓘ $3\sqrt{7}\pi$

১৪। $\frac{(y+2)^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$ অধিবৃত্তের–
(i) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (– 2, 0) (ii) আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য 4
(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 5
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

১৫। $16y^2 - 9x^2 = 144$ কণিকটির–
(i) অসীমতট রেখার সমীকরণ $y = \pm\frac{3}{4}x$

(ii) নিয়ামক রেখার সমীকরণ $5y \pm 9 = 0$
(iii) পরামিতিক সমীকরণ: $x = 3\sec\theta, y = 4\tan\theta$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚ ii ও iii ⓖ i ও iii ⓘ i, ii ও iii

১৬। (± 3, 0) শীর্ষবিন্দু এবং $\sqrt{3}$ উৎকেন্দ্রিকতাবিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি?
ⓚ $x^2-2y^2=18$ ⓚ $2x^2-y^2=18$
ⓖ $2y^2-x^2=18$ ⓘ $y^2-2x^2=18$

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ১৭ ও ১৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$4y^2 - 5x^2 = 20$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

১৭। অধিবৃত্তটির অসীমতট রেখার সমীকরণ কোনটি?
ⓚ $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$ ⓚ $y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$ ⓖ $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}y$ ⓘ $x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}y$

১৮। অধিবৃত্তটির নিয়ামক রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত একক?
ⓚ $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ ⓚ $\frac{10}{3}$ ⓖ $\frac{12}{\sqrt{5}}$ ⓘ 6

❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ১৯ ও ২০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
কোনো বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(2\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$

১৯। সঞ্চারপথটি কী নির্দেশ করে?
ⓚ পরাবৃত্ত ⓚ উপবৃত্ত ⓖ বৃত্ত ⓘ অধিবৃত্ত

২০। কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?
ⓚ $(2, \sqrt{3})$ ⓚ (0, 0) ⓖ (2, 0) ⓘ $(0, \sqrt{3})$

২১। $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক কোনটি?
ⓚ $(at^2, 2at)$ ⓚ $(-at^2, 2at)$ ⓖ $(2at, at^2)$ ⓘ $(-2at, at^2)$

২২। b এর মান কত হলে $y = 4x + 1$ সরলরেখাটি $y^2 = 8bx$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করবে?
ⓚ $\frac{1}{4}$ ⓚ $\frac{1}{2}$ ⓖ 2 ⓘ 4

২৩। $y = x + c$ সরলরেখাটি $9x^2 + 16y^2 = 144$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করলে c এর মান–
ⓚ ± 3 ⓚ ± 4 ⓖ ± 5 ⓘ ± 6

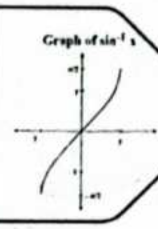
২৪। $3x^2 - 4y^2 = 12$ অধিবৃত্তের (4, 3) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢালের মান–
ⓚ – 1 ⓚ $\frac{3}{4}$ ⓖ 1 ⓘ $\frac{4}{3}$

২৫। $y^2 = 6x$ পরাবৃত্তটি $y = mx + c$ রেখাকে স্পর্শ করলে–
(i) $c = \frac{3}{2m}$
(ii) পরাবৃত্ত ও সরলরেখার সমীকরণ উভয়ই মূলবিন্দু গামী
(iii) স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3}{2m^2}, \frac{3}{m}\right)$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚ ii ও iii ⓖ i ও iii ⓘ i, ii ও iii

উত্তরপত্র		১	ⓘ	২	ⓚ	৩	ⓚ	৪	ⓘ	৫	ⓚ	৬	ⓖ	৭	ⓚ	৮	ⓚ	৯	ⓘ	১০	ⓚ	১১	ⓚ	১২	ⓚ
১৩	ⓘ	১৪	ⓖ	১৫	ⓚ	১৬	ⓚ	১৭	ⓚ	১৮	ⓚ	১৯	ⓚ	২০	ⓚ	২১	ⓚ	২২	ⓖ	২৩	ⓖ	২৪	ⓖ	২৫	ⓖ

০৭ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

Inverse Trigonometric Functions and Trigonometric Equations



ACS

Board Questions Analysis

সৃজনশীল প্রশ্ন

বোর্ড / সাল	ঢাকা	ময়মনসিংহ	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০২৩	১	১	১	১	২	১	১	১	১
২০২২	১	১	১	১	১	১	১	১	১

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

বোর্ড / সাল	ঢাকা	ময়মনসিংহ	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০২৩	৩	৩	৪	৪	৫	৪	৫	৪	৫
২০২২	৫	৪	৫	৪	৪	৫	৭	৫	৪

এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

❑ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ:

ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ
$\sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}x$	$(-\infty, +\infty)$ বা $\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1}x$	$(-\infty, +\infty)$ বা $\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
$\sec^{-1}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ বা $\mathbb{R} - (-1, 1)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
$\operatorname{cosec}^{-1}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ বা $\mathbb{R} - (-1, 1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

❑ (i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$
(ii) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$
(iii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$
(iv) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x$
(v) $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1}x$
(vi) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x$

❑ (i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

❑ (i) $\sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right)$
(ii) $\cos^{-1}x \pm \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left(xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$
(iii) $\tan^{-1}x \pm \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right)$

❑ $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

❑ (i) $\sin\theta = 0$ হলে, $\theta = n\pi$
(ii) $\sin\theta = 1$ হলে, $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$
(iii) $\sin\theta = -1$ হলে, $\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$
(iv) $\sin\theta = \sin\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$

❑ (i) $\cos\theta = 0$ হলে, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
(ii) $\cos\theta = 1$ হলে, $\theta = 2n\pi$
(iii) $\cos\theta = -1$ হলে, $\theta = (2n+1)\pi$
(iv) $\cos\theta = \cos\alpha$ হলে, $\theta = 2n\pi \pm \alpha$

❑ (i) $\tan\theta = 0$ হলে, $\theta = n\pi$
(ii) $\tan\theta = \tan\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + \alpha$
(iii) $\tan\theta = \tan(-\alpha)$ হলে, $\theta = n\pi - \alpha$
যেখানে, $n \in \mathbb{Z}$

HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন ▸ ১ উদ্দীপক-১: $\cos x = \frac{p}{a}$, $\cos y = \frac{q}{b}$

উদ্দীপক-২: $f(\theta) = \sin\theta$

(ক) প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\frac{2}{5} = \frac{\pi}{2} - \text{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{29}}{5}$

[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ১৯]

(খ) উদ্দীপক-১ এর সাহায্যে, $x + y = \alpha$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{p^2}{a^2} - 2\frac{pq}{ab}\cos\alpha + \frac{q^2}{b^2} = 1 - \cos^2\alpha$ অথবা $p^2b^2 - 2abpq\cos\alpha + a^2q^2 = a^2b^2\sin^2\alpha$

[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩; য. বো: ২৩; ব. বো. ২১; সি. বো. ২১, ১৭]

(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে সমাধান কর:

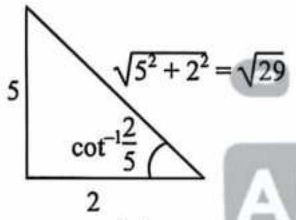
$f(x) - \sqrt{1 - \{f(x)\}^2} = 1, -2\pi < x < 2\pi$

[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২৩, ২২, ২১; ম. বো. ২১; রা. বো. ২১, ১৯; কু. বো. ২২, ১৭; সি. বো. ২২, দি. বো. ২২, ১৭; ঢা. বো. ২১, ১৭; য. বো. ২১, ১৯; চ. বো. ২১]

সমাধান:

ক আমরা জানি,

$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$



চিত্র হতে, $\cot^{-1}\frac{2}{5} = \text{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{29}}{5}$

ধরি, $x = \frac{2}{5}$

$\therefore \tan^{-1}\frac{2}{5} + \cot^{-1}\frac{2}{5} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{2}{5} = \frac{\pi}{2} - \cot^{-1}\frac{2}{5}$

$\therefore \tan^{-1}\frac{2}{5} = \frac{\pi}{2} - \text{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{29}}{5}$ **(Proved)**

খ দেওয়া আছে, $\cos x = \frac{p}{a}$ এবং $\cos y = \frac{q}{b}$

$\therefore x = \cos^{-1}\frac{p}{a}$ $\quad \therefore y = \cos^{-1}\frac{q}{b}$

এখন, $x + y = \alpha$ হলে,

$\cos^{-1}\frac{p}{a} + \cos^{-1}\frac{q}{b} = \alpha$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{p}{a}\cdot\frac{q}{b} - \sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}\sqrt{1-\frac{q^2}{b^2}}\right) = \alpha$

$\Rightarrow \frac{pq}{ab} - \sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}\sqrt{1-\frac{q^2}{b^2}} = \cos\alpha$

$\Rightarrow \left(\frac{pq}{ab} - \cos\alpha\right) = \sqrt{\left(1-\frac{p^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{q^2}{b^2}\right)}$

$\Rightarrow \left(\frac{pq}{ab} - \cos\alpha\right)^2 = \left(1-\frac{p^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{q^2}{b^2}\right)$

$\Rightarrow \frac{p^2q^2}{a^2b^2} - 2\frac{pq}{ab}\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 - \frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} + \frac{p^2q^2}{a^2b^2}$

$\Rightarrow \frac{p^2}{a^2} - 2\frac{pq}{ab}\cos\alpha + \frac{q^2}{b^2} = 1 - \cos^2\alpha$ **(Proved)**

$\Rightarrow \frac{p^2b^2 - 2abpq\cos\alpha + a^2q^2}{a^2b^2} = \sin^2\alpha$

$\therefore p^2b^2 - 2abpq\cos\alpha + a^2q^2 = a^2b^2\sin^2\alpha$ **(Proved)**

গ দেওয়া আছে,

$f(\theta) = \sin\theta$

$\therefore f(x) = \sin x$

এখানে, $f(x) - \sqrt{1 - \{f(x)\}^2} = 1$

$\Rightarrow \sin x - \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1$

$\Rightarrow \sin x - \cos x = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ [$\because$ উভয় পক্ষকে $\sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{4}\sin x - \cos\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x = 2n\pi + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}; 2n\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$

$= 2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi - \pi$

$= (4n+1)\frac{\pi}{2}, 2n\pi - \pi$

$n = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{2}, -\pi$

$n = 1$ হলে, $x = \frac{5\pi}{2}, \pi$

$n = -1$ হলে, $x = -\frac{3\pi}{2}, -3\pi$

$-2\pi < x < 2\pi$ ব্যবধিতে, $x = \frac{-3\pi}{2}, -\pi, \frac{\pi}{2}, \pi$

নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{-3\pi}{2}, -\pi, \frac{\pi}{2}, \pi$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ২ $A = \sin^{-1}\frac{2}{3}$, $B = \cos^{-1}\frac{3}{4}$, $C = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$

এবং $g(\theta) = \cos\theta - \cos 7\theta$

(ক) $\sin\tan^{-1}\cos \sec^{-1}y$ এর মান নির্ণয় কর।

[রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩; চ. বো. ২৩, ২২, ১৯; ম. বো. ২৩, ২১; কু. বো. ২২; ব. বো. ২১; রা. বো. ১৭; দি. বো. ১৭]

(খ) প্রমাণ কর যে, $A - \frac{1}{2}B + C = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{35}-1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\right)$

[সি. বো. ২৩ ; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩, ২২, ২১; রা. বো. ২২, ১৯; চ. বো. ২১; ঢা. বো. ২২, ১৭; কু. বো. ১৭; ব. বো. ১৯, ১৭; সি. বো. ২১; সকল বো. ১৮]

(গ) যদি $g(\theta) = \sin 4\theta$ হয়, তাহলে θ এর মান নির্ণয় কর।

[য. বো. ২৩; কু. বো. ২৩; চ. বো. ১৭]

সমাধান:

ক প্রদত্ত রাশি $= \sin\tan^{-1}\cos\sec^{-1}y$

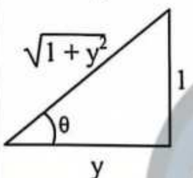
$$= \sin\tan^{-1}\cos\cos^{-1}\frac{1}{y}$$

$$= \sin\tan^{-1}\frac{1}{y}$$

$$= \sin\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \text{ (Ans.)}$$

$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{y}$ এর ক্ষেত্রে,



$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{y} = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

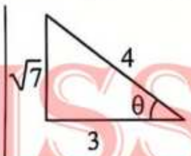
খ দেওয়া আছে,

$A = \sin^{-1}\frac{2}{3}$, $B = \cos^{-1}\frac{3}{4}$, $C = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$

ধরি, $B = \cos^{-1}\frac{3}{4} = \theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$



$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{7}{4}}$$

$$\therefore \tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{2} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\text{L.H.S} = A - \frac{1}{2}B + C$$

$$= \sin^{-1}\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \sin^{-1}\frac{2}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{7}} + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{\sqrt{5}}}{\frac{5-2}{5}} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$= \tan^{-1}\sqrt{5} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{7}}$$

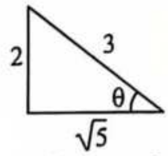
$$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{7}}}{1+\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{7}}} \quad \left[\because \sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{7}} < 1\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{\sqrt{35}-1}{\sqrt{7}}}{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}}}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{35}-1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\right)$$

$= \text{R.H.S}$ **(Proved)**

$\sin^{-1}\frac{2}{3}$ এর ক্ষেত্রে:



$\sin^{-1}\frac{2}{3} = \tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

গ দেওয়া আছে, $g(\theta) = \cos\theta - \cos 7\theta$

এখানে, $g(\theta) = \sin 4\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta - \cos 7\theta = \sin 4\theta$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{7\theta+\theta}{2}\sin\frac{7\theta-\theta}{2} = \sin 4\theta$$

$$\Rightarrow 2\sin 4\theta\sin 3\theta - \sin 4\theta = 0$$

$$\Rightarrow \sin 4\theta(2\sin 3\theta - 1) = 0$$

হয়, $\sin 4\theta = 0$

$\Rightarrow 4\theta = n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \theta = \frac{n\pi}{4}$

অথবা, $2\sin 3\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin 3\theta = \frac{1}{2}$

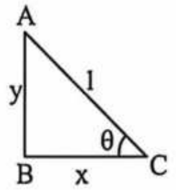
$\Rightarrow \sin 3\theta = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow 3\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{n\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{18}$

নির্ণেয় মান: $\theta = \frac{n\pi}{4}, \frac{n\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{18}$; যেখানে $n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ৩ উদ্দীপক-১:



উদ্দীপক-২: $g(z) = \tan z.\tan 3z$ এবং $f(a) = \sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b}$

(ক) উদ্দীপকে $\angle BAC = \alpha$ হলে, $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ থেকে দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 1$

[চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩; ঢা. বো. ২২, ১৯; কু. বো. ২১]

(খ) $f(a) = \alpha$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$ [চ. বো. ১৯]

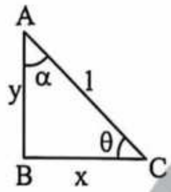
(গ) যদি $g(z) = 1$ হয় তবে z এর মান নির্ণয় কর যখন $-\frac{\pi}{2} \le z \le \frac{\pi}{2}$

[য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২৩; দি. বো. ১৯]

সমাধান:

ক চিত্র হতে, $\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{y}{1} = y$

$\therefore \theta = \sin^{-1}y$



এবং $\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{1} = x$

$\therefore \alpha = \sin^{-1}x$

এখানে, $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}y$

$\Rightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}y\right)$

$\Rightarrow x = \cos(\sin^{-1}y)$

$\Rightarrow x = \cos\left(\cos^{-1}\sqrt{1-y^2}\right)$

$\Rightarrow x = \sqrt{1-y^2}$

$\Rightarrow x^2 = 1 - y^2$

$\therefore x^2 + y^2 = 1$ **(Showed)**

$\sin^{-1}y$ এর ক্ষেত্রে:

$\sin^{-1}y = \cos^{-1}\frac{\sqrt{1-y^2}}{1}$

খ দেওয়া আছে, $f(a) = \sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b}$

$\therefore f(a) = \alpha$

$\Rightarrow \sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b} = \alpha$

$\Rightarrow \cos^{-1}a + \cos^{-1}b = \alpha$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left\{ab - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right\} = \alpha$

$\left[\because \cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}\right]$

$\Rightarrow ab - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} = \cos\alpha$

$\Rightarrow ab - \cos\alpha = \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$

$\Rightarrow a^2b^2 - 2ab\cos\alpha + \cos^2\alpha = (1-a^2)(1-b^2)$ [$\because$ বর্গ করে]

$\Rightarrow a^2b^2 - 2ab\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 - a^2 - b^2 + a^2b^2$

$\Rightarrow 1 - \cos^2\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

$\therefore \sin\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$

$\therefore \sin\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$ **(Proved)**

গ দেওয়া আছে, $g(z) = \tan z.\tan 3z$

এখন, $g(z) = 1$ হলে,

$\tan z.\tan 3z = 1$

$\Rightarrow \frac{\sin z \sin 3z}{\cos z \cos 3z} = 1$

$\Rightarrow \cos 3z \cos z = \sin 3z \sin z$

$\Rightarrow \cos 3z \cos z - \sin 3z \sin z = 0$

$\Rightarrow \cos(3z + z) = 0$

$\Rightarrow \cos 4z = 0$

$\Rightarrow 4z = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$\therefore z = (2n+1)\frac{\pi}{8}$

$n = 0$ হলে, $z = \frac{\pi}{8}$

$n = -1$ হলে, $z = -\frac{\pi}{8}$

$n = 1$ হলে, $z = \frac{3\pi}{8}$

$n = -2$ হলে, $z = -\frac{3\pi}{8}$

$n = 2$ হলে, $z = \frac{5\pi}{8}$

$\therefore -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে, $z = -\frac{3\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ৪ (i) $q = \tan^{-1}p, -\infty < p < \infty$

(ii) $g(x) = \cos x$; $h(x) = \sin x$

(ক) প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

[কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৭]

(খ) (i) নং সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। [ম. বো. ২৩]

(গ) $g\{\pi h(\theta)\} = h\{\pi g(\theta)\}$ হলে দেখাও যে, $\theta = \pm\frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$

অথবা, $\theta = \pm\frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\sqrt{7}$ [ঢা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২৩]

সমাধান:

ক ধরি, $x = \tan\theta$

$\therefore \theta = \tan^{-1}x$

$L.H.S = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

$= \sin^{-1}\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$= \sin^{-1}(\sin 2\theta)$

$= 2\theta = 2\tan^{-1}x$

$R.H.S = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$= \cos^{-1}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$= \cos^{-1}(\cos 2\theta)$

$= 2\theta$

$= 2\tan^{-1}x$

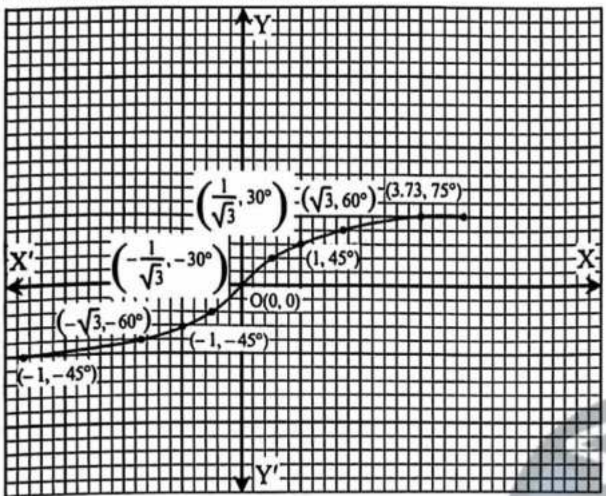
$\therefore L.H.S = R.H.S$ **(Proved)**

খ $q = \tan^{-1}p, -\infty < p < \infty$

p এর বিভিন্ন মানের জন্য q এর অনুরূপ মান নির্ণয় করি।

p	$-\infty$	-3.73	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0.27	0	0.27	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	3.73	∞
$q = \tan^{-1}p$	$-90°$	$-75°$	$-60°$	$-45°$	$-30°$	$-15°$	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$

ছক কাগজের XOX′ কে X অক্ষ এবং YOY′ কে Y অক্ষ ধরি এবং X অক্ষে প্রতি ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y অক্ষে ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 15° ধরে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো যোগ করে লেখচিত্র অঙ্কন করা হলো।



গ দেওয়া আছে, $g(x) = \cos x$ এবং $h(x) = \sin x$

$\therefore g\{\pi h(\theta)\} = \cos(\pi\sin\theta)$

$\therefore h\{\pi g(\theta)\} = \sin(\pi\cos\theta)$

এখানে, $g\{\pi h(\theta)\} = h\{\pi g(\theta)\}$

$\Rightarrow \cos(\pi\sin\theta) = \sin(\pi\cos\theta)$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta\right) = \sin(\pi\cos\theta) \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta\right) = \pi\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \pm \sin\theta = \cos\theta \Rightarrow \cos\theta \pm \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

[∵ উভয় পক্ষকে $\sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos\theta \pm \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \theta = \pm\frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **(Proved)**

আবার, $\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \cos^2\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow \sec^2\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = 8 \Rightarrow 1 + \tan^2\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = 8$

$\Rightarrow \tan^2\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = 7 \Rightarrow \tan\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{7}$

$\Rightarrow \theta \pm \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\sqrt{7}$

$\therefore \theta = \pm\frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\sqrt{7}$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▶ ৫ $f(x) = \sin^{-1}p + \sin^{-1}q + \sin^{-1}r$,

$A = \cos x - \cos 2x$,

$R = 1 - \cos x$

(ক) প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$ [রা. বো. ২৩]

(খ) $f(x) = \pi$ হলে দেখাও যে, $p\sqrt{1-p^2} + q\sqrt{1-q^2} + r\sqrt{1-r^2} = 2pqr$ [রা. বো. ২৩]

(গ) সমাধান কর: $\frac{A}{R} = 1$; যখন $0 < x < \pi$ [রা. বো. ২৩]

সমাধান:

ক $\text{L.H.S} = \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times 2\tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2}{3} \times \frac{9}{10}\right)$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} = \text{R.H.S}$ **(Proved)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin^{-1}p + \sin^{-1}q + \sin^{-1}r$

ধরি, $\sin^{-1}p = A \Rightarrow \sin A = p$

$\sin^{-1}q = B \Rightarrow \sin B = q$

এবং $\sin^{-1}r = C \Rightarrow \sin C = r$

এখন, $f(x) = \pi$ হলে,

$\sin^{-1}p + \sin^{-1}q + \sin^{-1}r = \pi \Rightarrow A + B + C = \pi$

$\text{L.H.S} = p\sqrt{1-p^2} + q\sqrt{1-q^2} + r\sqrt{1-r^2}$

$= \sin A\sqrt{1-\sin^2 A} + \sin B\sqrt{1-\sin^2 B} + \sin C\sqrt{1-\sin^2 C}$

$= \sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C$

$= \frac{1}{2}(2\sin A\cos A + 2\sin B\cos B + 2\sin C\cos C)$

$= \frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$

$= \frac{1}{2}\left[2\sin\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2} + 2\sin C\cos C\right]$

$= \frac{1}{2}[2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C]$

$= \sin(\pi - C)\cos(A-B) + \sin C\cos\{\pi - (A+B)\}$

[∵ $A + B + C = \pi$]

$= \sin C\cos(A-B) + \sin C\{-\cos(A+B)\}$

$= \sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$= \sin C . 2\sin A\sin B$

$= 2\sin A\sin B\sin C$

$= 2pqr = \text{R.H.S}$ **(Showed)**

গ দেওয়া আছে, $A = \cos x - \cos 2x$

$R = 1 - \cos x$

এখানে, $\frac{A}{R} = 1 \Rightarrow \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x} = 1$

$\Rightarrow \cos x - 2\cos^2 x + 1 = 1 - \cos x$

$\Rightarrow 2\cos^2 x - 2\cos x = 0$

$\Rightarrow 2\cos x(\cos x - 1) = 0$

$\Rightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0$

হয়, $\cos x = 0$

$\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

অথবা, $\cos x = 1$

$\therefore x = 2n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

$n = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{2}, 0$

$n = 1$ হলে, $x = \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

$\therefore 0 < x < \pi$ ব্যবধিতে $x = \frac{\pi}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ **(i)** $g(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2}$
(ii) $f(x) = \sin x$

(ক) প্রমাণ কর যে, $\cos^{-1}x = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ [সি. বো. ২৩]

(খ) সমাধান করঃ $g(\sin\theta) = 0$ [ব. বো. ১৯]

(গ) উদ্দীপকের আলোকে $f(x) + f(2x) + f(3x) = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর, যখন $0 \le x \le \pi$ [সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্নঃ দি. বো. ২১]

সমাধানঃ

ক ধরি, $\cos^{-1}x = \theta$

$\Rightarrow \cos\theta = x \Rightarrow 1 + \cos\theta = 1 + x$

$\Rightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + x \Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+x}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+x}{2}} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$

$\Rightarrow \theta = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$

$\therefore \cos^{-1}x = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ **(Proved)**

বিকল্প পদ্ধতিঃ ধরি, $x = \cos\theta$

$\therefore \theta = \cos^{-1}x$

$R.H.S = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}} = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$= 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2}}$

$= 2\cos^{-1}\cos\frac{\theta}{2} = 2 \times \frac{\theta}{2} = \theta$

$= \cos^{-1}x = L.H.S$ **(Proved)**

খ দেওয়া আছে, $g(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2}$

$\therefore g(\sin\theta) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin^2\theta - 3\sin\theta + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin^2\theta - 2\sin\theta - \sin\theta + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\theta(\sin\theta - \sqrt{2}) - 1(\sin\theta - \sqrt{2}) = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{2}\sin\theta - 1)(\sin\theta - \sqrt{2}) = 0$

হয়, $\sqrt{2}\sin\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{4}$

অথবা, $\sin\theta - \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{2}$ গ্রহণযোগ্য নয় কারণ $-1 \le \sin\theta \le 1$

$\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\therefore f(2x) = \sin 2x$

$\therefore f(3x) = \sin 3x$

এখানে, $f(x) + f(2x) + f(3x) = 0$

$\Rightarrow \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

$\Rightarrow \sin 3x + \sin x + \sin 2x = 0$

$\Rightarrow 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} + \sin 2x = 0$

$\Rightarrow 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 0$

$\Rightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = 0$

হয়, $\sin 2x = 0$

$\therefore 2x = n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{n\pi}{2}$

অথবা, $2\cos x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos x = -1$

$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$; $n \in \mathbb{Z}$

$n = 0$ হলে, $x = 0, \pm\frac{2\pi}{3}$

$n = 1$ হলে $x = \frac{\pi}{2}, 2\pi \pm \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \frac{8\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$n = 2$ হলে, $x = \pi, \frac{14\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$

$\therefore 0 \le x \le \pi$ ব্যবধিতে $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭ **(i)** $h(x) = \tan x$
(ii) $f(x) = \sin^{-1}x$ এবং $g(x) = \cos x$

(ক) (i) হতে প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\{(2+\sqrt{3})\,h(x)\} + \tan^{-1}\{(2-\sqrt{3})\,h(x)\} = \tan^{-1}\{2h(2x)\}$ [সি. বো. ২৩]

(খ) দেখাও যে, $f\left(\sqrt{2}g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) + f\left(\sqrt{g(2\theta)}\right) = \frac{\pi}{2}$ [ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্নঃ য. বো. ১৯; কু. বো. ২১; সি. বো. ২২]

(গ) সমাধান করঃ $h\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos x + \sin x$ [সি. বো. ১৯]

সমাধানঃ

ক দেওয়া আছে, $h(x) = \tan x$

$\therefore h(2x) = \tan 2x$

$L.H.S = \tan^{-1}\left\{(2+\sqrt{3})h(x)\right\} + \tan^{-1}\left\{(2-\sqrt{3})h(x)\right\}$

$= \tan^{-1}\left\{(2+\sqrt{3})\tan x\right\} + \tan^{-1}\left\{(2-\sqrt{3})\tan x\right\}$

$= \tan^{-1}\frac{(2+\sqrt{3})\tan x + (2-\sqrt{3})\tan x}{1-(4-3)\tan^2 x}$

$= \tan^{-1}\frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}$

$= \tan^{-1}\frac{2.2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$= \tan^{-1}\{2(\tan 2x)\}$

$= \tan^{-1}\{2h(2x)\} = R.H.S$ **(Proved)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin^{-1}x$ এবং $g(x) = \cos x$

এখন, $g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\therefore f\left(\sqrt{2}g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = f(\sqrt{2}\sin\theta)$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)$

এবং $f(\sqrt{g(2\theta)}) = f(\sqrt{\cos 2\theta})$

$= \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})$

$\text{L.H.S} = f\left(\sqrt{2}g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) + f(\sqrt{g(2\theta)})$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{1 - (\sqrt{\cos 2\theta})^2} + \sqrt{\cos 2\theta}\sqrt{1 - (\sqrt{2}\sin\theta)^2}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{1 - \cos 2\theta} + \sqrt{\cos 2\theta}\sqrt{1 - 2\sin^2\theta}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\sin\theta \, . \sqrt{2\sin^2\theta} + \sqrt{\cos 2\theta}\sqrt{\cos 2\theta}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\sin\theta. \sqrt{2}\sin\theta + \cos 2\theta\right\}$

$= \sin^{-1}(2\sin^2\theta + \cos 2\theta)$

$= \sin^{-1}(1 - \cos 2\theta + \cos 2\theta)$

$= \sin^{-1}(1)$

$= \sin^{-1}\sin\frac{\pi}{2}$

$= \frac{\pi}{2} = \text{R.H.S}$ **(Showed)**

গ দেওয়া আছে, $h(x) = \tan x$

$\because h\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cot 2x$

এখানে, $h\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos x + \sin x$

$\Rightarrow \cot 2x = \cos x + \sin x$

$\Rightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cos x + \sin x$

$\Rightarrow \cos 2x = \sin 2x(\cos x + \sin x)$

$\Rightarrow \cos^2x - \sin^2x = 2\sin x\cos x(\cos x + \sin x)$

$\Rightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) - 2\sin x\cos x(\cos x + \sin x) = 0$

$\Rightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 2\sin x\cos x) = 0$

$\therefore \cos x + \sin x = 0$

$\Rightarrow \sin x = -\cos x$

$\Rightarrow \tan x = -1$

$\Rightarrow \tan x = -\tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \tan x = \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

$\therefore x = n\pi - \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$

আবার, $\cos x - \sin x - 2\sin x\cos x = 0$

$\Rightarrow \cos x - \sin x = 2\sin x\cos x$

$\Rightarrow (\cos x - \sin x)^2 = (2\sin x\cos x)^2$

$\Rightarrow \cos^2x + \sin^2x - 2\sin x\cos x = (\sin 2x)^2$

$\Rightarrow 1 - \sin 2x = \sin^2 2x$

$\Rightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$

$\therefore \sin 2x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1(-1)}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\therefore \sin 2x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$\left[\sin 2x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right.$ গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ $\left. -1 \le \sin 2x \le 1\right]$

$\Rightarrow \sin 2x = \sin\alpha$ (ধরি) $\left[\text{যেখানে, } \alpha = \sin^{-1}\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]$

$\Rightarrow 2x = n\pi + (-1)^n\alpha$

$\therefore x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\alpha}{2}; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $n\pi - \frac{\pi}{4}, \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\alpha}{2}$

$\left[\text{যেখানে, } \alpha = \sin^{-1}\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]; n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮ দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \sin x$

(ক) $\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

[দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২; সি. বো. ২২; সকল বো. ১৮]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $2\{g(x)\}^2 - 11g(x) + 5 = 0$, সমীকরণটি সমাধান কর। যেখানে, $0 \le x \le 2\pi$ [চ. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ $(0, 2\pi)$ ব্যবধিতে $f(x) + f(2x) + f(3x) = 1 + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ সমীকরণটি সমাধান কর। [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২]

সমাধান:

ক $\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1 + \cos^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 1 - \left\{\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}^2 - 1 + \left\{\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}^2$

$= 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= \frac{1}{6}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $2\{g(x)\}^2 - 11\, g(x) + 5 = 0$

$\Rightarrow 2(\sin x)^2 - 11\sin x + 5 = 0$

$\Rightarrow 2\sin^2x - 11\sin x + 5 = 0$

$\Rightarrow 2\sin^2x - 10\sin x - \sin x + 5 = 0$

$\Rightarrow 2\sin x(\sin x - 5) - 1(\sin x - 5) = 0$

$\Rightarrow (\sin x - 5)(2\sin x - 1) = 0$

হয়, $2\sin x - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

অথবা, $\sin x - 5 = 0$

$\Rightarrow \sin x = 5$ যা গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ $-1 \le \sin x \le 1$

$\therefore x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$

$n = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{6}$

$n = 1$ হলে, $x = \pi + (-1)^1\frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$n = 2$ হলে, $x = 2\pi + (-1)^2\frac{\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$

$\therefore 0 \le x \le 2\pi$ ব্যবধিতে x এর গ্রহণযোগ্য মানসমূহ, $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$f(x) = \sin x$

$\therefore f(2x) = \sin 2x$

$\therefore f(3x) = \sin 3x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 2x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $f(x) + f(2x) + f(3x) = 1 + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Rightarrow \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

$\Rightarrow \sin 3x + \sin x + \sin 2x = 1 + \cos 2x + \cos x$

$\Rightarrow 2.\sin\frac{3x + x}{2}\cos\frac{3x - x}{2} + \sin 2x = 2\cos^2 x + \cos x$

$\Rightarrow 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = \cos x\,(2\cos x + 1)$

$\Rightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = \cos x(2\cos x + 1)$

$\Rightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) - \cos x(2\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos x) = 0$

হয়, $2\cos x + 1 = 0$

$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos x = -\cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

অথবা, $\sin 2x - \cos x = 0$

$\Rightarrow 2\sin x \cos x - \cos x = 0$

$\Rightarrow \cos x\,(2\sin x - 1) = 0$

হয়, $\cos x = 0$

$\therefore x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

অথবা, $2\sin x - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$

নির্ণেয় সমাধান: $(2n + 1)\frac{\pi}{2}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯ **(i) $j(x) = \sin x$ ও $k(x) = \cos x$**

(ii) $f(x) = \sin\alpha x, g(x) = \sin\beta x$

(ক) দেখাও যে, $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1 - x^2}$ [রা. বো. ২২]

(খ) $j(x) + k(x) = j(2x) + k(2x)$ সমীকরণটি সমাধান কর। [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১; সি. বো. ২১; দি. বো. ১৭]

(গ) $\alpha = 1, \beta = 3$ হলে, $-\pi$ হতে π ব্যবধির মধ্যে $2f(x).g(x) = 1$ সমীকরণের সমাধান নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২]

সমাধান:

ক ধরি, $\tan^{-1}x = \theta$

$\therefore \tan\theta = x$

এবং $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2x}{1 - x^2}$

$\Rightarrow 2\theta = \tan^{-1}\frac{2x}{1 - x^2}$

$\therefore 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1 - x^2}$ **(Showed)**

খ দেওয়া আছে,

$j(x) = \sin x, k(x) = \cos x$

$\therefore j(2x) = \sin 2x ; k(2x) = \cos 2x$

এখন, $j(x) + k(x) = k(2x) + j(2x)$

$\Rightarrow \sin x + \cos x = \cos 2x + \sin 2x$

$\Rightarrow \cos x - \cos 2x = \sin 2x - \sin x$

$\Rightarrow 2\sin\frac{2x + x}{2}\sin\frac{2x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + x}{2}\sin\frac{2x - x}{2}$

$\Rightarrow \sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = \cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}$

$\Rightarrow \sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$

$\Rightarrow \sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0$

হয়, $\sin\frac{x}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = n\pi ; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = 2n\pi$

অথবা, $\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 0$

$\Rightarrow \sin\frac{3x}{2} = \cos\frac{3x}{2}$

$\Rightarrow \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}} = 1$

$\Rightarrow \tan\frac{3x}{2} = \tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{3x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{2\pi}{12}$

$\Rightarrow x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = (4n + 1)\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 2n\pi, (4n + 1)\frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin\alpha x$, $g(x) = \sin\beta x$

$\alpha = 1, \beta = 3$ হলে,

$f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin 3x$ [যখন, $-\pi \le x \le \pi$]

এখানে, $2f(x).g(x) = 1$

$\Rightarrow 2\sin x.\sin 3x = 1$

$\Rightarrow 2\sin 3x.\sin x = 1$

$\Rightarrow \cos(3x - x) - \cos(3x + x) = 1$

$\Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = 1$

$\Rightarrow \cos 2x = 1 + \cos 4x$

$\Rightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \cos 2x(2\cos 2x - 1) = 0$

হয়, $\cos 2x = 0$

$\Rightarrow 2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

অথবা, $2\cos 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$; $n \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{4}, n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$n = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{-\pi}{6}$

$n = 1$ হলে, $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

$n = -1$ হলে, $x = -\frac{\pi}{4}, \frac{-5\pi}{6}, \frac{-7\pi}{6}$

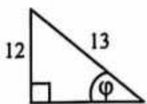
$n = 2$ হলে, $x = \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$n = -2$ হলে, $x = \frac{-3\pi}{4}, \frac{-11\pi}{6}, \frac{-13\pi}{6}$

$\therefore -\pi$ হতে π ব্যবধিতে,

$x = \frac{-3\pi}{4}, \frac{-5\pi}{6}, \frac{-\pi}{4}, \frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০ উদ্দীপক-১:



উদ্দীপক-২: $\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{1+y^2}{1-y^2}\right) + \frac{1}{2}\text{cosec}^{-1}\left(\frac{1+z^2}{2z}\right) = \pi$

(ক) $A = 3\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ হতে দেখাও যে, $A = \tan^{-1}3$ [চ. বো. ২২]

(খ) উদ্দীপক-১ এর আলোকে প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{2}\varphi + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \cot^{-1}2 + \cot^{-1}\frac{29}{28}$ [কু. বো. ২২]

(গ) উদ্দীপক-২ হতে প্রমাণ কর যে, $x + y + z = xyz$. [কু. বো. ২২]

সমাধান:

ক $A = 3\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

$= 3\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

$= \sin^{-1}\left\{3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right\} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

[$\because 3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$]

$= \sin^{-1}\left\{\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{4}{2\sqrt{2}}\right\} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

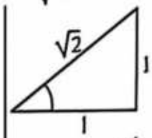
$= \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

$= \tan^{-1}1 + \tan^{-1}\frac{1}{2}$

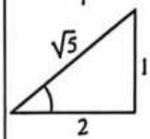
$= \tan^{-1}\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - 1 \times \frac{1}{2}}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \tan^{-1}3$

= R.H.S **(Showed)**



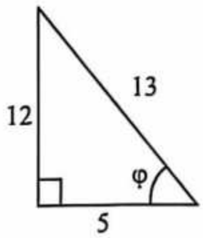
$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \tan^{-1}1$



$\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

খ উদ্দীপক-১ হতে পাই,

$\varphi = \sin^{-1}\frac{12}{13}$ ...... (i)



এখন $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}.\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}$

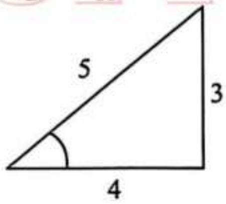
$= \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} = \frac{\frac{12}{13}}{1 + \frac{5}{13}} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\varphi}{2} = \tan^{-1}\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}\varphi = \tan^{-1}\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{12}{13}$ [(i) নং হতে]

L.H.S $= \frac{1}{2}\varphi + \sin^{-1}\frac{3}{5}$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{12}{13} + \sin^{-1}\frac{3}{5}$

$= \tan^{-1}\frac{2}{3} + \tan^{-1}\frac{3}{4}$



$= \tan^{-1}\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}} = \tan^{-1}\frac{17}{6}$

R.H.S $= \cot^{-1}2 + \cot^{-1}\frac{29}{28}$

$= \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{28}{29} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2} + \frac{28}{29}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{28}{29}} = \tan^{-1}\frac{17}{6}$

$\therefore \frac{1}{2}\varphi + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \cot^{-1}2 + \cot^{-1}\frac{29}{28}$ **(Proved)**

গ উদ্দীপক-২ হতে,

$$\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{1+y^2}{1-y^2}\right)+\frac{1}{2}\text{cosec}^{-1}\left(\frac{1+z^2}{2z}\right)=\pi$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x+\frac{1}{2}.\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2z}{1+z^2}=\pi$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x+\frac{1}{2}\times 2\tan^{-1}y+\frac{1}{2}\times 2\tan^{-1}z=\pi$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}+\tan^{-1}z=\pi$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{\frac{x+y}{1-xy}+z}{1-\frac{x+y}{1-xy}\cdot z}=\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x+y+z-xyz}{1-xy}}{\frac{1-xy-xz-yz}{1-xy}}=\tan\pi$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}=0$$

$$\Rightarrow x+y+z-xyz=0$$

$$\therefore x+y+z=xyz \text{ (Proved)}$$

প্রশ্ন ▸ ১১ (i) $\varphi(x)=\cos^{-1}x$

(ii) $4(\sin^2\theta+\cos\theta)=5, -2\pi<\theta<2\pi$

(ক) প্রমাণ কর যে, $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ [ঢা., য., সি., দি. বো. ১৮]

(খ) $\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)=\pi$ হলে দেখাও যে, $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ [ব. বো. ২২; দি. বো. ২১; ঢা. বো. ১৯]

(গ) (ii) এ বর্ণিত সমীকরণটি সমাধান কর। [সকল বো. ১৮]

সমাধান:

ক ধরি, $\sin^{-1}x=\theta$

$$\Rightarrow x=\sin\theta$$

আমরা জানি, $\sin2\theta=2\sin\theta.\cos\theta$

$$\Rightarrow \sin2\theta=2\sin\theta.\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \sin2\theta=2x\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow 2\theta=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\therefore 2\sin^{-1}x=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \text{ (Proved)}$$

খ দেওয়া আছে, $\varphi(x)=\cos^{-1}x$

$\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)=\pi$ হলে,

$$\Rightarrow \cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}\left\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}=\pi-\cos^{-1}z$$

$$\Rightarrow xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}=\cos(\pi-\cos^{-1}z)$$

$$\Rightarrow xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}=-\cos(\cos^{-1}z)$$

$$\Rightarrow xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}=-z$$

$$\Rightarrow \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}=z+xy$$

$$\Rightarrow (1-x^2)(1-y^2)=(z+xy)^2$$

$$\Rightarrow 1-y^2-x^2+x^2y^2=z^2+x^2y^2+2xyz$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2+2xyz=1 \text{ (Showed)}$$

গ $4(\sin^2\theta+\cos\theta)=5$

$$\Rightarrow 4(1-\cos^2\theta+\cos\theta)=5$$

$$\Rightarrow 4-4\cos^2\theta+4\cos\theta=5$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\theta-4\cos\theta+1=0$$

$$\Rightarrow (2\cos\theta)^2-2.2\cos\theta.1+1=0$$

$$\Rightarrow (2\cos\theta-1)^2=0$$

$$\Rightarrow 2\cos\theta-1=0$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

এখন, $n=0$ হলে, $\theta=\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}$

$n=1$ হলে, $\theta=\frac{7\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$

$n=-1$ হলে, $\theta=-\frac{5\pi}{3},-\frac{7\pi}{3}$

$\therefore -2\pi\le\theta\le2\pi$ ব্যবধিতে θ এর গ্রহণযোগ্য মানসমূহ:

$-\frac{\pi}{3},-\frac{5\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ১২ দৃশ্যকল্প-১: $2\sin^2\theta-2=\cos2\theta$

দৃশ্যকল্প-২: $f(y)=\tan^{-1}y$

(ক) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ এর মুখ্যমান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সমীকরণ সমাধান কর যেখানে $-2\pi\le\theta\le2\pi$ [দি. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\tan\{2f(x)\}=2\tan\{f(x)+f(x^3)\}$ [দি. বো. ২২]

সমাধান:

ক $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\cos^{-1}\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\cos^{-1}\left\{\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=\cos^{-1}\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$=\frac{2\pi}{3}$$

$\therefore \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ এর মুখ্যমান হলো: $\frac{2\pi}{3}$ **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ এ,

প্রদত্ত সমীকরণ, $2\sin^2\theta-2=\cos2\theta$

$$\Rightarrow 1-\cos2\theta-2=\cos2\theta$$

$$\Rightarrow 2\cos2\theta=-1$$

$$\Rightarrow \cos2\theta=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos2\theta=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2\theta=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \theta=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

এখন,

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

$n = -1$ হলে, $\theta = \frac{-2\pi}{3}, \frac{-4\pi}{3}$

$n = 2$ হলে, $\theta = \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$n = -2$ হলে, $\theta = \frac{-5\pi}{3}, \frac{-7\pi}{3}$

$\therefore -2\pi \le \theta \le 2\pi$ ব্যবধিতে θ এর গ্রহণযোগ্য মানসমূহ:

$-\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. **(Ans.)**

গ দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই,

$f(y) = \tan^{-1}y$

$\therefore f(x) = \tan^{-1}x,\ f(x^3) = \tan^{-1}x^3$

$L.H.S = \tan\{2f(x)\} = \tan\{2\tan^{-1}x\}$

$= \tan\left(\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{2x}{1-x^2}$

$R.H.S = 2\tan\{f(x) + f(x^3)\}$

$= 2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$

$= 2\tan\left\{\tan^{-1}\left(\frac{x+x^3}{1-x.x^3}\right)\right\}$

$= 2\left(\frac{x+x^3}{1-x^4}\right) = \frac{2x(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)}$

$= \frac{2x}{1-x^2}$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ১৩ **(i) $f(x) = \cos x$ একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন।**
(ii) $g(x) = \tan x$

(ক) **$\cot^{-1}x + \cot^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হলে, দেখাও যে, $xy = 1$**

[দি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২]

(খ) **যদি $f^{-1}(2x) + f^{-1}(2y) = \frac{3\pi}{2}$ হয়, দেখাও যে, $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$** [ম. বো. ২২]

(গ) **$\{g(x)\}^2 + g'(x) = 3g(x)$ হলে বিশেষ সমাধান নির্ণয় কর যখন $0 \le x \le 2\pi$** [রা. বো. ১৭]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে,

$\cot^{-1}x + \cot^{-1}y = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \cot^{-1}y$

$\Rightarrow x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \cot^{-1}y\right)$

$\Rightarrow x = \tan\cot^{-1}y$

$\Rightarrow x = \tan\tan^{-1}\frac{1}{y}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{y}$

$\therefore xy = 1$ **(Showed)**

খ দেওয়া আছে,

$f(x) = \cos x$

$\therefore f^{-1}(x) = \cos^{-1}x$

$\therefore f^{-1}(2x) = \cos^{-1}2x$

$\therefore f^{-1}(2y) = \cos^{-1}2y$

এখন, $f^{-1}(2x) + f^{-1}(2y) = \frac{3\pi}{2}$ হলে,

$\cos^{-1}(2x) + \cos^{-1}(2y) = \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left\{4xy - \sqrt{(1-4x^2)(1-4y^2)}\right\} = \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow 4xy - \sqrt{(1-4x^2)(1-4y^2)} = \cos\frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow 4xy - \sqrt{(1-4x^2)(1-4y^2)} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{(1-4x^2)(1-4y^2)} = 4xy$

$\Rightarrow 1 - 4x^2 - 4y^2 + 16x^2y^2 = 16x^2y^2$ [$\because$ বর্গ করে]

$\Rightarrow 4x^2 + 4y^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ **(Showed)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \tan x$

$g'(x) = \frac{d}{dx}\{g(x)\} = \sec^2 x$

এখানে, $\{g(x)\}^2 + g'(x) = 3g(x)$

$\Rightarrow \tan^2 x + \sec^2 x = 3\tan x$

$\Rightarrow \tan^2 x + 1 + \tan^2 x = 3\tan x$

$\Rightarrow 2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\tan^2 x - 2\tan x - \tan x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\tan x(\tan x - 1) - 1(\tan x - 1) = 0$

$\Rightarrow (\tan x - 1)(2\tan x - 1) = 0$

হয়, $\tan x - 1 = 0$

$\Rightarrow \tan x = 1$

$\Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore x = n\pi + \frac{\pi}{4}$

$= (4n+1)\frac{\pi}{4};\ n \in \mathbb{Z}$

অথবা, $2\tan x - 1 = 0$

$\therefore \tan x = \frac{1}{2} = \tan\alpha$

[যেখানে, $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$]

$\therefore x = n\pi + \alpha$

$= n\pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right);\ n \in \mathbb{Z}$

এখন, $n = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{4}, \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

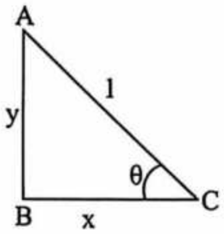
$n = 1$ হলে, $x = \frac{5\pi}{4}, \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$n = 2$ হলে, $x = \frac{9\pi}{4}, 2\pi + \tan^{-1}\frac{1}{2}$

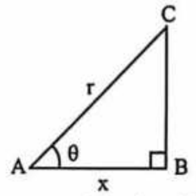
$\therefore 0 \le x \le 2\pi$ ব্যবধিতে θ এর গ্রহণযোগ্য মানসমূহ:

$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \pi + \tan^{-1}\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ১৪ (i)



(ii)



(ক) $\cos2\theta + \sin\theta = 1$ এর সাধারণ সমাধান বের কর। [ঢা. বো. ২১]

(খ) (i) অনুসারে $x + y = \sqrt{2}$ সমীকরণটি সমাধান কর; যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$. [চ. বো. ২৩; রা. বো. ২১; য. বো. ১৯]

(গ) (ii) অনুসারে $f(\theta) = \frac{r}{x}$ হলে $-\pi \le x \le \pi$ ব্যবধিতে $f(2\theta) - f(\theta) = 2$ সমীকরণটি সমাধান কর। [সি. বো. ১৭]

সমাধানঃ

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $\cos2\theta + \sin\theta = 1$

$\Rightarrow \sin\theta = 1 - \cos2\theta$

$\Rightarrow \sin\theta = 2\sin^2\theta$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

$\Rightarrow \sin\theta\,(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = n\pi$; যেখানে, $n \in \mathbb{Z}$

অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

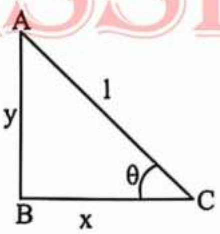
$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$, যেখানে, $n \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধানঃ $\theta = n\pi$ অথবা $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$; $n \in \mathbb{Z}$ (Ans.)

খ চিত্র হতে,



$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{y}{1} = y$

$\therefore \sin\theta = y$

$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{1} = x$

$\therefore \cos\theta = x$

এখানে, $x + y = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = 1$

[$\because$ উভয় পক্ষকে $\sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে পাই]

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = 1$

$\Rightarrow \cos\theta\cos\frac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{4} = 1$

$\Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Rightarrow \theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$n = -1$ হলে, $\theta = -2\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$

$n = 1$ হলে, $\theta = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$

$n = -2$ হলে, $\theta = -4\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{15\pi}{4}$

$\therefore -2\pi < \theta < 2\pi$ ব্যবধিতে, $\theta = -\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ (Ans.)

গ এখানে, $f(\theta) = \frac{r}{x}$

$\therefore \sec\theta = \frac{r}{x}$

$\therefore f(\theta) = \sec\theta$

$f(2\theta) = \sec2\theta$

এখন, $f(2\theta) - f(\theta) = 2$

$\Rightarrow \sec2\theta - \sec\theta = 2$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos2\theta} - \frac{1}{\cos\theta} = 2$

$\Rightarrow \frac{\cos\theta - \cos2\theta}{\cos2\theta.\cos\theta} = 2$

$\Rightarrow \cos\theta - \cos2\theta = 2\cos2\theta.\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta - \cos2\theta = \cos(2\theta + \theta) + \cos(2\theta - \theta)$

$\Rightarrow \cos\theta - \cos2\theta = \cos3\theta + \cos\theta$

$\Rightarrow \cos3\theta + \cos2\theta = 0$

$\Rightarrow 2\cos\frac{5\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} = 0$

$\Rightarrow \cos\frac{5\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} = 0$

হয়, $\cos\frac{5\theta}{2} = 0$

$\therefore \frac{5\theta}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{5}$

অথবা, $\cos\frac{\theta}{2} = 0$

$\therefore \frac{\theta}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta = (2n + 1)\pi$

এখন, $n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{5}, \pi$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{3\pi}{5}, 3\pi$

$n = -1$ হলে, $\theta = \frac{-\pi}{5}, -\pi$

$n = 2$ হলে, $\theta = \pi, 5\pi$

$n = -2$ হলে, $\theta = -\frac{3\pi}{5}, -3\pi$

$n = -3$ হলে, $\theta = -\pi, -5\pi$

$\therefore -\pi \le x \le \pi$ ব্যবধিতে θ এর গ্রহণযোগ্য মানসমূহঃ

$-\pi, -\frac{3\pi}{5}, -\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi$ (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ১৫ **(i) $f(x) = \cos x$; (ii) $g(x) = \sin x$ এবং $h(y) = \cos y$**

(ক) প্রমাণ কর: $\cot^{-1}(\tan 2\varphi) + \cot^{-1}(-\tan 3\varphi) = \varphi$ [ঢা. বো. ২১; য. বো. ১৭]

(খ) উদ্দীপকের আলোকে সমাধান কর:

$$(2+\sqrt{3})\, f(2\theta) = 1 - f\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$$ [ঢা. বো. ২১]

(গ) প্রমাণ কর যে, $2\tan^{-1}\dfrac{g\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{g\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$

$$= \tan^{-1}\frac{g(\alpha)h(\beta)}{h\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+g\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$ [য. বো. ২২]

সমাধান:

ক L.H.S $= \cot^{-1}(\tan 2\varphi) + \cot^{-1}(-\tan 3\varphi)$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\tan 2\varphi) - \cot^{-1}(\tan 3\varphi) \left[\because \cot^{-1}x + \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\varphi - \left\{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\tan 3\varphi)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\varphi - \frac{\pi}{2} + 3\varphi = \varphi = \text{R.H.S } \textbf{(Proved)}$$

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$

$\therefore f(2\theta) = \cos 2\theta$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \sin 2\theta$

এখানে, $(2+\sqrt{3})\, f(2\theta) = 1 - f\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$

$\Rightarrow (2+\sqrt{3})\cos 2\theta = 1 - \sin 2\theta$

$\Rightarrow (2+\sqrt{3})(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow (2+\sqrt{3})(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = (\cos\theta - \sin\theta)^2$

$\Rightarrow (\cos\theta - \sin\theta)\left\{(2+\sqrt{3})(\cos\theta + \sin\theta) - (\cos\theta - \sin\theta)\right\} = 0$

হয়, $\cos\theta - \sin\theta = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow \tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = n\pi + \frac{\pi}{4};\ n \in \mathbb{Z}$

অথবা, $(2+\sqrt{3})(\cos\theta + \sin\theta) - (\cos\theta - \sin\theta) = 0$

$\Rightarrow (\cos\theta + \sin\theta) = \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{2+\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \dfrac{\cos\theta + \sin\theta + \cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta - \cos\theta + \sin\theta} = \dfrac{1+2+\sqrt{3}}{1-2-\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{-1(\sqrt{3}+1)}$

$\Rightarrow \tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta = \tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = n\pi - \frac{\pi}{6};\ n \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4},\ n\pi - \frac{\pi}{6};\ n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

গ এখানে, $2\tan^{-1}\dfrac{g\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{g\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right) = 2\tan^{-1}\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$

$$= 2\tan^{-1}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$$

এবং, $\tan^{-1}\dfrac{g(\alpha).h(\beta)}{h\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+g\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \tan^{-1}\dfrac{\sin\alpha.\cos\beta}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$

$$= \tan^{-1}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \sin\beta}$$

এখন, L.H.S $= 2\tan^{-1}\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$

$$= 2\tan^{-1}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\beta}{2}}\right)$$

$$= 2\tan^{-1}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1-\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}}{1+\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}}\right)$$

$$= 2\tan^{-1}\left(\tan\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\tan\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}}\right)^2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right)^2 - \tan^2\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right)^2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\right)}{1 + \sin\beta - \tan^2\frac{\alpha}{2}(1 - \sin\beta)}$$

$$\left[\left(\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right)^2 = \cos^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 1 + \sin\beta\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cos\beta}{1+\sin\beta-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sin\beta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta-\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\sin\beta} = \text{R.H.S } \textbf{(Proved)}$$

প্রশ্ন ▶ ১৬ **(i)** $f(a) = \tan^{-1}a,\ g(a) = \sin a$

(ii) $A = \sec^{-1}\frac{2}{x},\ B = \sec^{-1}\frac{3}{y}$

(ক) $\tan^{-1}4$ ও $\tan^{-1}\frac{5}{3}$ এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

[দি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৯; য. বো. ২১, ১৯]

(খ) দেখাও যে, $2f\left(\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = \sec^{-1}\frac{x+yg\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{y+xg\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

[রা. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১]

(গ) (ii) হতে দেখাও যে, $A + B = \frac{\pi}{2}$ সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

[ম. বো. ২১]

সমাধান:

ক $\tan^{-1}4 + \tan^{-1}\frac{5}{3} = \pi + \tan^{-1}\frac{4+\frac{5}{3}}{1-4\times\frac{5}{3}}$ $\left[\because 4\times\frac{5}{3} > 1\right]$

$$= \pi + \tan^{-1}\frac{\frac{12+5}{3}}{\frac{3-20}{3}} = \pi + \tan^{-1}\frac{\frac{17}{3}}{-\frac{17}{3}}$$

$$= \pi + \tan^{-1}\left(\frac{17}{3}\times\frac{3}{-17}\right) = \pi + \tan^{-1}(-1)$$

$$= \pi - \tan^{-1}1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \textbf{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $f(a) = \tan^{-1}a$ এবং $g(a) = \sin a$

$$\therefore g\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$

$$\text{L.H.S} = 2f\left(\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \cos^{-1}\frac{1-\left(\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\tan\frac{\theta}{2}\right)^2}{1+\left(\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\tan\frac{\theta}{2}\right)^2} = \cos^{-1}\frac{1-\frac{x-y}{x+y}\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\frac{x-y}{x+y}\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \sec^{-1}\frac{1+\frac{x-y}{x+y}\tan^2\frac{\theta}{2}}{1-\frac{x-y}{x+y}\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \sec^{-1}\frac{(x+y)+(x-y)\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{(x+y)-(x-y)\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$= \sec^{-1}\frac{(x+y)\cos^2\frac{\theta}{2}+(x-y)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(x+y)\cos^2\frac{\theta}{2}-(x-y)\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \sec^{-1}\frac{x\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+y\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{x\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+y\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \sec^{-1}\frac{x.1+y\cos\theta}{x\cos\theta+y.1}$$

$$= \sec^{-1}\frac{x+y.g\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{y+x.g\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \text{R.H.S } \textbf{(Showed)}$$

গ দেওয়া আছে, $A = \sec^{-1}\frac{2}{x},\ B = \sec^{-1}\frac{3}{y}$

এখানে, $A + B = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \sec^{-1}\frac{2}{x} + \sec^{-1}\frac{3}{y} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}\frac{x}{2} + \cos^{-1}\frac{y}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}\left\{\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{3}-\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{3^2}\right)}\right\} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{6}-\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)} = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{6}-\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{6} = \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{xy}{6}\right)^2 = \left\{\sqrt{1-\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^2y^2}{36}}\right\}^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2y^2}{36} = 1-\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^2y^2}{36}$$

$\therefore \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1$; যা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

অতএব, $A + B = \frac{\pi}{2}$ সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে। **(Showed)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ $f(x) = \sin x$

(ক) $\cos\left(2\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২১]

(খ) $f\left(\pi f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = f\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi f(\theta)\right)$ হলে,

দেখাও যে, $\theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ [রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২১, ১৯]

(গ) সমাধান কর: $1 + f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) = 0$ [রা. বো. ২১]

সমাধান:

ক প্রদত্ত রাশি $= \cos\left(2\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

$$= \cos\left(2\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

$$= \cos\cos^{-1}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{5}{9}}{\frac{13}{9}}$$

$$= \frac{5}{13} \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\therefore f(\theta) = \sin\theta$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

এখন, $f\left(\pi f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = f\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi f(\theta)\right)$

$\Rightarrow f(\pi\cos\theta) = f\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta\right)$

$\Rightarrow \sin(\pi\cos\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta\right)$

$\Rightarrow \pi\cos\theta = \frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta$

$\Rightarrow \cos\theta \pm \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (\cos\theta \pm \sin\theta)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \cos^2\theta \pm 2\sin\theta.\cos\theta + \sin^2\theta = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 1 \pm 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \pm\sin 2\theta = 1 - \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sin(\pm 2\theta) = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \pm 2\theta = \sin^{-1}\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ **(Showed)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 2x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \cos 4x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) = \cos 6x$

এখানে, $1 + f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) = 0$

$\Rightarrow 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$

$\Rightarrow (1 + \cos 6x) + (\cos 4x + \cos 2x) = 0$

$\Rightarrow 1 + \cos(2 \times 3x) + 2.\cos\left(\frac{4x + 2x}{2}\right).\cos\left(\frac{4x - 2x}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2 3x + 2\cos 3x.\cos x = 0$

$\Rightarrow 2\cos 3x(\cos 3x + \cos x) = 0$

$\Rightarrow \cos 3x(\cos 3x + \cos x) = 0$

হয়, $\cos 3x = 0$

$\Rightarrow 3x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, যেখানে, $n \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = (2n + 1)\frac{\pi}{6}$

অথবা, $\cos 3x + \cos x = 0$

$\Rightarrow 2\cos\frac{3x + x}{2}.\cos\frac{3x - x}{2} = 0$

$\Rightarrow \cos 2x.\cos x = 0$

হয়, $\cos 2x = 0$

$\Rightarrow 2x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

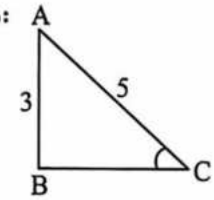
$\therefore x = (2n + 1)\frac{\pi}{4}$

অথবা, $\cos x = 0$

$\Rightarrow x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, (2n + 1)\frac{\pi}{4}, (2n + 1)\frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $4\cos x.\cos 2x.\cos 3x = 1$

(ক) সমাধান কর: $\tan^2\theta - 3\text{cosec}^2\theta + 1 = 0$ [চ. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $\angle ACB = 2x$ হলে $\cot^{-1}3 - x$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণটি $0 < x < \pi$ ব্যবধিতে সমাধান কর। [কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২১]

সমাধান:

ক এখানে, $\tan^2\theta - 3\operatorname{cosec}^2\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow \tan^2\theta - 3(1+\cot^2\theta) + 1 = 0$

$\Rightarrow \tan^2\theta - 3 - 3.\frac{1}{\tan^2\theta} + 1 = 0$

$\Rightarrow \tan^2\theta - 2 - \frac{3}{\tan^2\theta} = 0$

$\Rightarrow \tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow \tan^4\theta - 3\tan^2\theta + \tan^2\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow \tan^2\theta(\tan^2\theta - 3) + 1(\tan^2\theta - 3) = 0$

$\Rightarrow (\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$

হয়, $\tan^2\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow \tan^2\theta = 3$

$\Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

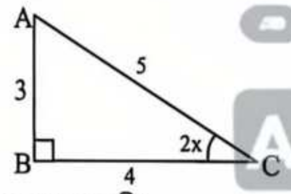
$\Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

অথবা, $\tan^2\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow \tan^2\theta = -1$ [গ্রহণযোগ্য নয়]

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

খ এখানে, $\angle ACB = 2x$



চিত্র হতে পাই, Δ ABC সমকোণী,

$\therefore$ পিথাগোরাসের সূত্রানুসারে,

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$\tan 2x = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 2x = \tan^{-1}\frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{4}$

প্রদত্ত রাশি $= \cot^{-1}3 - x$

$= \cot^{-1}3 - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{4}$

$= \tan^{-1}\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{4}$

$= \frac{1}{2}\times 2\tan^{-1}\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{4}$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{4}$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{4}$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{4}$

$= 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $4\cos x\cos 2x\cos 3x = 1$

$\Rightarrow (2\cos x\cos 3x)(2\cos 2x) = 1$

$\Rightarrow (\cos 4x + \cos 2x)(2\cos 2x) = 1$

$\Rightarrow 2\cos 4x\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos 4x\cos 2x + \cos 4x = 0$

$\Rightarrow \cos 4x(2\cos 2x + 1) = 0$

হয়, $\cos 4x = 0$

$\Rightarrow 4x = (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{8}$

অথবা, $2\cos 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$n = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}$

$n = 1$ হলে, $x = \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

$n = 2$ হলে, $x = \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$n = 3$ হলে, $x = \frac{7\pi}{8}, \frac{10\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$

$\therefore 0 < x < \pi$ ব্যবধিতে $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ দৃশ্যকল্প-১: $f(\theta) = \sin\theta$

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = \cos x$

(ক) প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) - 3\sec^2\left(\cot^{-1}\sqrt{3}\right) = 1$ [চ. বো. ২১, য. বো. ২১; ব. বো. ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $2f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).f\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right) + 1 = 0$ সমীকরণের সমাধান কর। [য. বো. ২১]

(গ) সমাধান কর: $\sin^3 x.g(3x) + \{g(x)\}^3\sin 3x = \frac{3}{4}$

সমাধান:

ক L.H.S $= \operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) - 3\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3})$

$= \operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}2) - 3\sec^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= 1 + \cot^2(\cot^{-1}2) - 3\left\{1 + \tan^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

$= 1 + (\cot\cot^{-1}2)^2 - 3\left\{1 + \left(\tan\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}$

$= 1 + 2^2 - 3\left\{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}$

$= 1 = $ R.H.S **(Proved)**

খ দেওয়া আছে, $f(\theta) = \sin\theta$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) = \cos3\theta$

এখন, $2f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) f\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta.\cos3\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow \cos(3\theta + \theta) + \cos(3\theta - \theta) + 1 = 0$

$\Rightarrow 1 + \cos4\theta + \cos2\theta = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2 2\theta + \cos2\theta = 0$

$\Rightarrow \cos2\theta(2\cos2\theta + 1) = 0$

হয়, $\cos2\theta = 0$

$\Rightarrow 2\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{4}$

অথবা, $2\cos2\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow \cos2\theta = \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \cos2\theta = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow 2\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{4}, n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \cos x$

এখন, $\sin^3x\, g(3x) + \{g(x)\}^3\sin3x = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin^3x.\cos3x + \cos^3x.\sin3x = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \cos^3x.\sin3x + \sin^3x.\cos3x = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 4\cos^3x.\sin3x + 4\sin^3x.\cos3x = 3$

$\Rightarrow (3\cos x + \cos3x)\sin3x + (3\sin x - \sin3x)\cos3x = 3$

$\Rightarrow 3\cos x.\sin3x + \cos3x.\sin3x + 3\sin x.\cos3x - \sin3x.\cos3x = 3$

$\Rightarrow 3(\sin3x.\cos x + \cos3x.\sin x) = 3$

$\Rightarrow 3\sin(3x + x) = 3$

$\Rightarrow \sin4x = 1$

$\Rightarrow 4x = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore x = (4n + 1)\frac{\pi}{8}$; যেখানে, $n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ২০ দৃশ্যকল্প-১: $q = \cos^{-1}p$
দৃশ্যকল্প-২: $h(x) = \cos x$

(ক) $\sec^2(\cot^{-1}1) + \sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। [ব. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $q = \cos^{-1}p$ এর $-1 \le p \le 1$ ব্যবধিতে লেখচিত্র অংকন কর। [য. বো. ২১]

(গ) $2\{h(x)\}^2 + \{h(2x)\}^2 = 2$ সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। [ব. বো. ১৭]

সমাধান:

ক প্রদত্ত রাশি $= \sec^2(\cot^{-1}1) + \sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$

$= \sec^2\left(\cot^{-1}\cot\frac{\pi}{4}\right) + 1 - \left(\cos\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)^2$

$= \sec^2\frac{\pi}{4} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

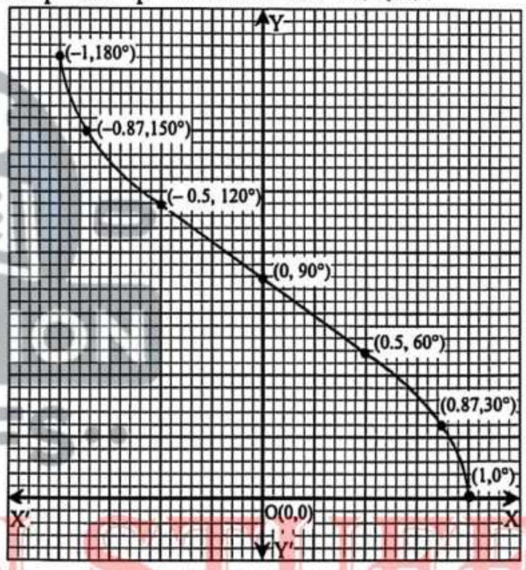
$= (\sqrt{2})^2 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $q = \cos^{-1}p$ যেখানে $-1 \le p \le 1$

এখন, $[-1, 1]$ ব্যবধিতে p এর বিভিন্ন মানের জন্য $q = \cos^{-1}p$ এর আনুষাঙ্গিক মান নির্ণয় করে তালিকায় সাজানো হলো।

p	−1	−0.87	−0.5	0	0.5	0.87	1
q	180°	150°	120°	90°	60°	30°	0°

ছক কাগজের X অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 20 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক এবং Y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 5° ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করা হলো। বিন্দুগুলি যোগ করে $q = \cos^{-1}p$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করা হলো।



গ দেওয়া আছে, $h(x) = \cos x$

এখন, $2\{h(x)\}^2 + \{h(2x)\}^2 = 2$

$\Rightarrow 2\cos^2x + \cos^2 2x = 2$

$\Rightarrow \cos^2 2x + 2\cos^2x - 2 = 0$

$\Rightarrow \cos^2 2x + 1 + \cos2x - 2 = 0$

$\Rightarrow \cos^2 2x + \cos2x - 1 = 0$

$\Rightarrow \cos2x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

হয়, $\cos2x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \cos2x = \cos\alpha$

$\left[\text{যেখানে, } \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right]$

$\Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \alpha$

অথবা, $\cos2x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$
[গ্রহণযোগ্য নয় কারণ, $-1 \le \cos\theta \le 1$]

$\therefore x = n\pi \pm \frac{\alpha}{2}$ যেখানে, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ২১ উদ্দীপক-১: $A = \cot^{-1}7$, $B = \cot^{-1}3$, $g(A) = \cos2A$, $h(B) = \sin4B$

উদ্দীপক-২: $g(x) = p\sin^{-1}x$

(ক) প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ [রা., কু., চ. বো. ১৮]

(খ) উদ্দীপক-১ হতে প্রমাণ কর যে, $A = g^{-1}\{h(B)\}$ [ব. বো. ২১]

(গ) উদ্দীপক-১ হতে g(x) এর লেখচিত্র অংকন কর, যখন $p = \frac{1}{2}, -1 \le x \le 1$

সমাধান:

ক ধরি, $\sin^{-1}x = \theta$

$$\Rightarrow x = \sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta = \cos^{-1}x$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \cos^{-1}x + \theta$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \cos^{-1}x + \sin^{-1}x$$

$$\therefore \cos^{-1}x + \sin^{-1}x = \frac{\pi}{2} \textbf{ (Proved)}$$

খ প্রমাণ করতে হবে যে, $A = g^{-1}\{h(B)\}$

$\Rightarrow g(A) = h(B)$ ইহা প্রমাণ করাই যথেষ্ট।

দেওয়া আছে, $A = \cot^{-1}7 \therefore A = \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$B = \cot^{-1}3 \therefore B = \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$$\text{L.H.S} = g(A) = \cos2A = \frac{1 - \tan^2A}{1 + \tan^2A}$$

$$= \frac{1 - \left\{\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)\right\}^2}{1 + \left\{\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)\right\}^2} \quad [\because A = \cot^{-1}7]$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{\frac{49-1}{49}}{\frac{49+1}{49}} = \frac{48}{50} = \frac{24}{25}$$

$$\text{R.H.S} = \sin4B = 2\sin2B.\cos2B$$

$$= 2 \times \frac{2\tan B}{(1 + \tan^2B)} \cdot \frac{(1 - \tan^2B)}{(1 + \tan^2B)}$$

$$= 4 \times \frac{\left\{\tan.\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)\right\}}{1 + \left\{\tan.\tan^{-1}\frac{1}{3}\right\}^2} \cdot \frac{1 - \left\{\tan.\tan^{-1}\frac{1}{3}\right\}^2}{1 + \left\{\tan.\tan^{-1}\frac{1}{3}\right\}^2}$$

$$= 4 \times \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{9}} \times \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}}$$

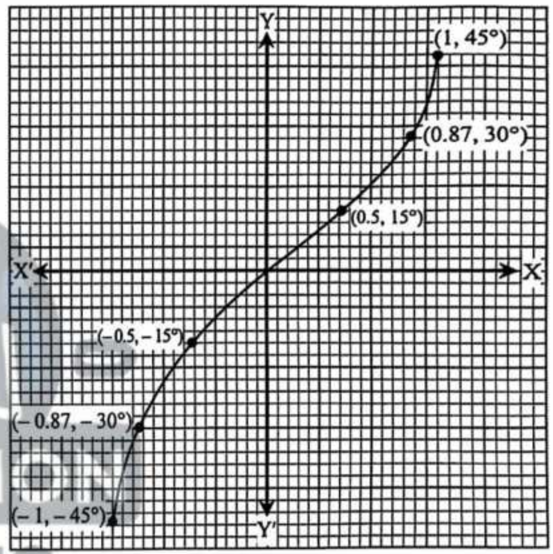
$$= \frac{24}{25} = \text{L.H.S} \textbf{ (Proved)}$$

গ দেওয়া আছে, $g(x) = p\sin^{-1}x, -1 \le x \le 1$ এবং $p = \frac{1}{2}$

এখন, [– 1, 1] ব্যবধিতে x এর বিভিন্ন মানের জন্য $g(x) = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$ এর আনুষাঙ্গিক মান নির্ণয় করে তালিকায় সাজানো হলো।

x	– 1	–0.87	– 0.5	0	0.5	0.87	1
g(x)	– 45°	– 30°	–15°	0°	15°	30°	45°

ছক কাগজের X অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 20 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক এবং Y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1° ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করা হলো। বিন্দুগুলি যোগ করে $g(x) = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করা হলো।



প্রশ্ন ▸ ২২ (i) $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$, $g(y) = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$

(ii) $2\sin2\theta + 2(\sin\theta + \cos\theta) + 1 = 0$

(ক) সমাধান কর: $2(\cos^2x - \sin^2x) = \sqrt{3}$ [সি. বো. ২১]

(খ) $\text{cosec}^{-1}\frac{1}{f(a)} - \sec^{-1}\frac{1}{g(b)} = 2\tan^{-1}x$ হলে, দেখাও যে, $x = \frac{a - b}{1 + ab}$ [ঢা. বো. ১৯]

(গ) (ii) এ বর্ণিত সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। [য. বো. ১৭]

সমাধান:

ক এখানে, $2(\cos^2x - \sin^2x) = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow 2.\cos2x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos2x = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{12} \textbf{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ এবং $g(y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$

$\therefore f(a) = \frac{2a}{1+a^2}$ এবং $g(b) = \frac{1-b^2}{1+b^2}$

এখন, $\text{cosec}^{-1}\frac{1}{f(a)} - \sec^{-1}\frac{1}{g(b)} = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow \sin^{-1}f(a) - \cos^{-1}g(b) = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{1-b^2}{1+b^2}\right) = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow 2\tan^{-1}a - 2\tan^{-1}b = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow \tan^{-1}a - \tan^{-1}b = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab} = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow x = \frac{a-b}{1+ab}$ **(Showed)**

গ দেওয়া আছে,

$2\sin 2\theta + 2(\sin\theta + \cos\theta) + 1 = 0$

$\Rightarrow 2.2\sin\theta.\cos\theta + 2\sin\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta(2\cos\theta + 1) + 1(2\cos\theta + 1) = 0$

$\Rightarrow (2\cos\theta + 1)(2\sin\theta + 1) = 0$

হয়, $2\cos\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

অথবা, $2\sin\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{7\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{7\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n\pi + (-1)^n\frac{7\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$

প্রশ্ন ▶ ২৩ $f(x) = \text{cosec}x - \cot x$, $g(x) = \sin x$

(ক) সমাধান কর: $\tan 2x - \tan x = 0$. [ম. বো. ২১]

(খ) $f(\theta) = \frac{3}{4}$ হলে, দেখাও যে, $\theta = \sin^{-1}\frac{24}{25}$ [ম. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ১৭]

(গ) $g(5\theta) - \sqrt{3}\,g(\theta) = g(3\theta)$ সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। [ম. বো. ২১]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $\tan 2x - \tan x = 0 \Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 0$

$\Rightarrow \frac{\sin 2x.\cos x - \cos 2x.\sin x}{\cos 2x.\cos x} = 0$

$\Rightarrow \sin(2x - x) = 0$

$\Rightarrow \sin x = 0$

$\therefore x = n\pi; n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \text{cosec}x - \cot x$

এবং $f(\theta) = \frac{3}{4}$

$\therefore \text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 3\sin\theta - 4 = -4\cos\theta$

$\Rightarrow (3\sin\theta - 4)^2 = (-4\cos\theta)^2$

$\Rightarrow 9\sin^2\theta - 24\sin\theta + 16 = 16\cos^2\theta$

$\Rightarrow 9\sin^2\theta - 24\sin\theta + 16 = 16 - 16\sin^2\theta$

$\Rightarrow 25\sin^2\theta - 24\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \sin\theta(25\sin\theta - 24) = 0$

হয়, $\sin\theta = \frac{24}{25}$ অথবা, $\sin\theta = 0$

$\therefore \theta = \sin^{-1}\frac{24}{25}$ **(Showed)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \sin x$

$\therefore g(5\theta) - \sqrt{3}\,g(\theta) = g(3\theta)$

$\Rightarrow \sin 5\theta - \sqrt{3}\sin\theta = \sin 3\theta$

$\Rightarrow \sin 5\theta - \sin 3\theta = \sqrt{3}\sin\theta$

$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{5\theta + 3\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{5\theta - 3\theta}{2}\right) = \sqrt{3}\sin\theta$

$\Rightarrow 2\cos 4\theta\sin\theta = \sqrt{3}\sin\theta$

$\Rightarrow 2\cos 4\theta\sin\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \sin\theta\,(2\cos 4\theta - \sqrt{3}) = 0$

হয়, $\sin\theta = 0$

$\therefore \theta = n\pi; n \in \mathbb{Z}$

অথবা, $2\cos 4\theta - \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \cos 4\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 4\theta = \cos\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow 4\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \theta = \frac{1}{4}\left(2n\pi \pm \frac{\pi}{6}\right); n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \theta = n\pi, \frac{1}{4}\left(2n\pi \pm \frac{\pi}{6}\right); n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৪ দুটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন হলো $\sqrt{2}x = \sin^{-1}A$, $\frac{-x}{2} = \cos^{-1}B$ এবং একটি সমীকরণ হলো $\cos^{-1}\frac{m}{a} + \cos^{-1}\frac{n}{b} = x$

(ক) সমাধান কর: $\tan 2\theta.\tan\theta = 1$ [ব. বো. ২৩]

(খ) $A - B = 0$ হলে x এর সমাধানের জন্য সাধারণ রাশিমালা বের কর। [কু. বো. ১৯]

(গ) উদ্দীপকের সমীকরণ হতে দেখাও যে, $\frac{m^2}{a^2} - \frac{2mn}{ab}\cos x + \frac{n^2}{b^2} = \sin^2 x$ [সি. বো. ১৯]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে,

$\tan 2\theta.\tan\theta = 1$

$\Rightarrow \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}.\tan\theta = 1$

$\Rightarrow 2\tan^2\theta = 1 - \tan^2\theta$

$\Rightarrow 3\tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\sqrt{2}x = \sin^{-1}A$

$\Rightarrow A = \sin\sqrt{2}x$

এবং $-\frac{x}{2} = \cos^{-1}B$

$\Rightarrow B = \cos\left(-\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}$ $[\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$

প্রশ্নমতে, $A - B = 0$

$\Rightarrow \sin(\sqrt{2}x) - \cos\frac{x}{2} = 0$

$\Rightarrow \sin(\sqrt{2}x) = \cos\frac{x}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}x\right)$

$\therefore \frac{x}{2} = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}x\right)$

হয়, $\frac{x}{2} = 2n\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}x\right)$

$\Rightarrow x = 4n\pi + \pi - 2\sqrt{2}x$

$\Rightarrow x(1 + 2\sqrt{2}) = \pi(4n + 1)$

$\Rightarrow x = \frac{(4n+1)\pi}{1 + 2\sqrt{2}}$

অথবা, $\frac{x}{2} = 2n\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}x\right)$

$\Rightarrow x = 4n\pi - \pi + 2\sqrt{2}x$

$\Rightarrow x(1 - 2\sqrt{2}) = \pi(4n - 1)$

$\Rightarrow x = \frac{(4n-1)\pi}{1 - 2\sqrt{2}}$

$\therefore x = \frac{(4n+1)\pi}{1+2\sqrt{2}}, \frac{(4n-1)\pi}{1-2\sqrt{2}}$; $n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\cos^{-1}\frac{m}{a} + \cos^{-1}\frac{n}{b} = x$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left\{\frac{m}{a}\cdot\frac{n}{b} - \sqrt{1 - \frac{m^2}{a^2}}\cdot\sqrt{1 - \frac{n^2}{b^2}}\right\} = x$

$\Rightarrow \frac{mn}{ab} - \sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{n^2}{b^2}\right)} = \cos x$

$\Rightarrow \frac{mn}{ab} - \cos x = \sqrt{1 - \frac{n^2}{b^2} - \frac{m^2}{a^2} + \frac{m^2n^2}{a^2b^2}}$

$\Rightarrow \frac{m^2n^2}{a^2b^2} - 2\times\frac{mn}{ab}.\cos x + \cos^2x = 1 - \frac{n^2}{b^2} - \frac{m^2}{a^2} + \frac{m^2n^2}{a^2b^2}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{m^2}{a^2} - \frac{2mn}{ab}\cos x + \frac{n^2}{b^2} = 1 - \cos^2x$

$\Rightarrow \frac{m^2}{a^2} - \frac{2mn}{ab}\cos x + \frac{n^2}{b^2} = \sin^2x$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▸ ২৫ $f(x) = \cot^{-1}y - \tan^{-1}x$ ...... (i)

$g(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ...... (ii)

(ক) দেখাও যে, $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ [সি. বো. ১৭]

(খ) $f(x) = \frac{\pi}{6}$ হলে প্রমাণ কর যে, $x + y + \sqrt{3}xy = \sqrt{3}$ [চ. বো. ১৭]

(গ) (ii) এর সাহায্যে $\{g(x)\}^2 + 4\{g(x)\} - 5 = 0$ সমীকরণটির সমাধান কর। [ম. বো. ২৩]

সমাধানঃ

ক $L.H.S = \cos\left(2\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$

$= \cos\cos^{-1}\left\{\frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right\}$ $\left[\because 2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]$

$= \frac{1 - \frac{y^2}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

$= R.H.S$ **(Showed)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \cot^{-1}y - \tan^{-1}x$ .... (i)

$f(x) = \frac{\pi}{6}$ .... (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$\frac{\pi}{6} = \cot^{-1}y - \tan^{-1}x$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{1}{y} - \tan^{-1}x = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{\frac{1}{y} - x}{1 + \frac{1}{y}.x} = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{1 - xy}{y + x} = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \frac{1 - xy}{x + y} = \tan\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \frac{1 - xy}{x + y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3}xy = x + y$

$\Rightarrow x + y + \sqrt{3}xy = \sqrt{3}$ **(Showed)**

গ $g(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $\{g(x)\}^2 + 4\{g(x)\} - 5 = 0$

$\Rightarrow \{\tan x\}^2 + 4\{\tan x\} - 5 = 0$

$\Rightarrow \tan^2x + 4\tan x - 5 = 0$

$\Rightarrow \tan^2x + 5\tan x - \tan x - 5 = 0$

$\Rightarrow \tan x(\tan x + 5) - 1(\tan x + 5) = 0$

$\Rightarrow (\tan x + 5)(\tan x - 1) = 0$

হয়, $\tan x + 5 = 0$

$\Rightarrow \tan x = -5$

$\Rightarrow \tan x = -\tan\alpha$

$\Rightarrow \tan x = \tan(-\alpha)$

$\therefore x = n\pi - \alpha$; $n \in \mathbb{Z}$

যেখানে, $\alpha = \tan^{-1}5$

অথবা, $\tan x - 1 = 0$

$\Rightarrow \tan x = 1$

$\Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x = n\pi + \frac{\pi}{4}$; $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = (4n + 1)\frac{\pi}{4}$

নির্ণেয় সমাধানঃ $x = n\pi - \alpha$ (যেখানে $\alpha = \tan^{-1}5$),

$(4n + 1)\frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক রাশির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়

১। $f(x) = \sin^{-1}x$ এর ডোমেন– [য. বো. ২১]

ক $[-1, 1]$ খ $(-1, 1]$
গ $(-1, 1)$ ঘ $[-1, 1)$

উত্তর: ক $[-1, 1]$

ব্যাখ্যা:

ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ / মুখ্যমান
$\sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}x$	$(-\infty, \infty)$ বা $\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

২। $f(x) = \sin x$ এর মূখ্য সমাধান নিচের কোনটি? [সি. বো. ১৭]

ক $[0, 1]$ খ $[1, 0]$
গ $[1, 1]$ ঘ $[-1, 1]$

উত্তর: ঘ $[-1, 1]$

ব্যাখ্যা: $\sin x$ এর মান -1 হতে শুরু করে $+1$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। তাই সমাধানের সীমা $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow [-1, 1] = \sin x$ এর মুখ্য সমাধান।

৩। $f(x) = \cos^{-1}x$ ফাংশনের রেঞ্জ কত? [কু. বো. ২৩]

ক $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ খ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
গ $(0, \pi)$ ঘ $[0, \pi]$

উত্তর: ঘ $[0, \pi]$

৪। $\tan^{-1}x$ এর ডোমেন– [দি. বো. ২৩]

ক $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ খ $[-1, 1]$
গ $[-2\pi, 2\pi]$ ঘ $\mathbb{R}$

উত্তর: ঘ $\mathbb{R}$

৫। বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে– [সি. বো. ২২]

(i) $\sin^{-1}x$ এর ডোমেন $[-1, 1]$
(ii) $\cos^{-1}x$ এর রেঞ্জ $[0, \pi]$
(iii) $\tan^{-1}x$ এর ডোমেন $(-\infty, \infty)$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $\sin^{-1}x$ এর ডোমেন $= [-1, 1]$
(ii) $\cos^{-1}x$ এর ডোমেন $= [1, 1]$ এবং রেঞ্জ $= [0, \pi]$
(iii) $\tan^{-1}x$ এর ডোমেন $= (-\alpha, \alpha)$ বা $\mathbb{R}$

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক রাশির মান নির্ণয়

৬। $f(x) = \text{cosec}(\cot^{-1}x)$ একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন হলে $f(2)$ এর মান কোনটি? [কু. বো. ১৭; চ. বো. ২১]

ক $\sqrt{5}$ খ $\frac{1}{\sqrt{5}}$
গ 2 ঘ $\frac{1}{2}$

উত্তর: ক $\sqrt{5}$

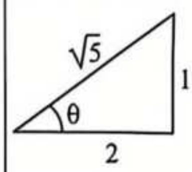
ব্যাখ্যা: $f(x) = \text{cosec}(\cot^{-1}x)$

$f(2) = \text{cosec}(\cot^{-1}2)$

$= \text{cosec}(\text{cosec}^{-1}\sqrt{5})$

$= \sqrt{5}$

$\cot^{-1}2$ এর ক্ষেত্রে,



$\theta = \cot^{-1}2 = \text{cosec}^{-1}\sqrt{5}$

৭। $\cos^{-1}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} =$ কত? [ব. বো. ২৩]

ক $-\frac{\pi}{3}$ খ $\frac{\pi}{3}$
গ $\frac{2\pi}{3}$ ঘ $-\frac{2\pi}{3}$

উত্তর: খ $\frac{\pi}{3}$

ব্যাখ্যা: $\cos^{-1}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

অথবা, Using Calculator in Radian Mode

৮। $\sin \cot^{-1} \tan \cos^{-1}\frac{3}{4} =$ কত? [ঢা. বো. ২২]

ক $\frac{3}{4}$ খ $\frac{5}{4}$
গ $\frac{4}{3}$ ঘ $\frac{3}{\sqrt{7}}$

উত্তর: ক $\frac{3}{4}$

ব্যাখ্যা: $\sin \tan^{-1}\frac{1}{\tan\cos^{-1}\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$ [Using Calculator]

৯। $\sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right) - \cos^2\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ এর মান– [চ. বো. ২২]

ক -1 খ $-\frac{1}{2}$
গ $\frac{1}{2}$ ঘ 1

উত্তর: গ $\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator

Rhombus Publications

১০। $\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত? [ব. বো. ২২]

ⓚ 2 ⓛ 1
ⓜ 3 ⓝ 5

উত্তর: ⓛ 1

ব্যাখ্যা: Using Calculator

১১। $4\left(\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}+\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$ = কত? [রা. বো. ২৩]

ⓚ $\frac{\pi}{4}$ ⓛ $\frac{\pi}{2}$
ⓜ π ⓝ 2π

উত্তর: ⓜ π

ব্যাখ্যা: $4\left(\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}+\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)=4\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$
$= 4\tan^{-1}1$ [Using Calculator]
$= \pi$

অথবা, Using Calculator in Radian Mode

১২। $\cos^{-1}\{-\sin(\tan^{-1}2+\cot^{-1}2)\}$ এর মান কত? [য. বো. ২৩]

ⓚ $-\frac{\pi}{2}$ ⓛ 0
ⓜ $\frac{\pi}{2}$ ⓝ π

উত্তর: ⓝ π

ব্যাখ্যা: $\cos^{-1}\{-\sin(\tan^{-1}2+\cot^{-1}2)\}$ $\left[\because \tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}\right]$
$=\cos^{-1}\left\{-\sin\frac{\pi}{2}\right\}$
$=\cos^{-1}(-1)$
$=\pi$

অথবা, Using Calculator in Radian Mode

১৩। $\text{arc}\tan\left\{\sin\left(\text{arc}\cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ এর মান কত? [ব. বো. ২২]

ⓚ $\frac{\pi}{2}$ ⓛ $\frac{\pi}{3}$
ⓜ $\frac{\pi}{4}$ ⓝ $\frac{\pi}{6}$

উত্তর: ⓝ $\frac{\pi}{6}$

ব্যাখ্যা: arc মানে Inverse
$\tan^{-1}\left\{\sin\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}=\frac{\pi}{6}$ [Using Calculator]

১৪। $\tan^2\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ এর মান কত? [রা. বো. ২১]

ⓚ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⓛ $\frac{2}{\sqrt{3}}$
ⓜ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⓝ $\frac{1}{3}$

উত্তর: ⓝ $\frac{1}{3}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator

১৫। $2\tan^{-1}\frac{1}{5}$ = কত? [দি. বো. ২৩]

ⓚ $\tan^{-1}\frac{5}{12}$ ⓛ $\tan^{-1}\frac{5}{13}$
ⓜ $\tan^{-1}\frac{5}{24}$ ⓝ $\tan^{-1}\frac{5}{26}$

উত্তর: ⓚ $\tan^{-1}\frac{5}{12}$

ব্যাখ্যা: $2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{2\times\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}$
$=\tan^{-1}\frac{5}{12}$

Note: $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

১৬। $\cos^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ এর মান কত? [কু. বো. ২৩]

ⓚ $\frac{2}{3}$ ⓛ $\frac{3}{4}$
ⓜ $\frac{4}{3}$ ⓝ $\frac{3}{2}$

উত্তর: ⓚ $\frac{2}{3}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator

১৭। $\tan^{-1}\frac{5}{4}+\cot^{-1}\frac{5}{4}$ এর মান– [চ. বো. ২২]

ⓚ 0 ⓛ π
ⓜ $\frac{\pi}{2}$ ⓝ $\tan^{-1}\frac{9}{10}$

উত্তর: ⓜ $\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator in Radian Mode

অথবা, $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

১৮। $\sin^{-1}\frac{2}{5}+\sin^{-1}\frac{\sqrt{21}}{5}$ এর মান কত? [য. বো. ২১]

ⓚ π ⓛ $\frac{\pi}{2}$
ⓜ 2π ⓝ $\frac{\pi}{4}$

উত্তর: ⓛ $\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator

১৯। $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{4}{5}$ **এর মান কত?** [কু. বো. ২২]

ক $-\pi$ খ π

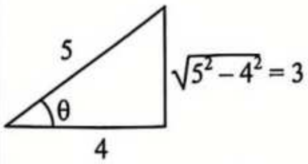
গ $\frac{\pi}{2}$ ঘ $-\frac{\pi}{2}$

উত্তর: সঠিক উত্তর নেই।

ব্যাখ্যা: Using Calculator in Radian Mode

অথবা,

$$\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{4}{5}$$
$$= \sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{3}{5}$$
$$= 2\sin^{-1}\frac{3}{5}$$
$$= 73.47^\circ \quad \text{[Using Calculator]}$$
$$= 1.284 \text{ radian}$$



$\therefore \cos\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\theta = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{3}{5}$

২০। $\operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) - \sec^2\left(\cot^{-1}\sqrt{3}\right)$ **এর মান নিচের কোনটি?** [সি. বো. ২৩]

ক $\frac{11}{3}$ খ $\frac{13}{3}$

গ $\frac{35}{9}$ ঘ $\frac{37}{9}$

উত্তর: ক $\frac{11}{3}$

ব্যাখ্যা: $\operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) - \sec^2\left(\cot^{-1}\sqrt{3}\right)$

$$= \frac{1}{\sin^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{\cos^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$= \frac{11}{3} \quad \text{[Using Calculator]}$$

২১। $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} = ?$ [ঢা. বো. ২৩]

ক $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ খ $\tan^{-1}(2)$

গ $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ ঘ $\sin^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$

উত্তর: ক $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

ব্যাখ্যা: Option Test: $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} = 0.4636$

অপশন ক $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.4636$ [Using Calculator]

২২। $\cot^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **এর মান কত?** [সি. বো. ১৯]

ক 3 খ 15

গ $\frac{1}{15}$ ঘ $\frac{1}{3}$

উত্তর: ক 3

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{\tan^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)} = 3$ [Using Calculator]

২৩। $\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{2}) - \sin^2(\cos^{-1}1)$ **এর মান কোনটি?** [সম্মিলিত. বো. ১৮]

ক $\frac{1}{2}$ খ 1

গ $\frac{3}{2}$ ঘ 3

উত্তর: গ $\frac{3}{2}$

ব্যাখ্যা: $\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{2}) - \sin^2(\cos^{-1}1)$

$$= \frac{1}{\cos^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} - \sin^2(\cos^{-1}1)$$

$$= \frac{3}{2} \quad \text{[Using Calculator]}$$

$a\cos x + b\sin x = c$ আকারের ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান

২৪। $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$ **হলে, θ এর মান–** [সি. বো. ২২]

ক $2n\pi$ খ $(2n+1)\pi$

গ $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ ঘ $(2n-1)\pi$

উত্তর: গ $2n\pi + \frac{\pi}{4}$

ব্যাখ্যা: $n = 0, 1, 2 \ldots$ ইত্যাদি মান বসিয়ে Option Test কর।

যেমন $n = 0$ হলে গ অপশনে $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

২৫। $\sin\theta + \cos\theta$ **এর বৃহত্তম মান কত?** [ব. বো. ২৩]

ক $\sqrt{2}+1$ খ $\sqrt{2}$

গ 1 ঘ 2

উত্তর: খ $\sqrt{2}$

ব্যাখ্যা: $a\sin\theta + b\cos\theta$ এর বৃহত্তম মান $= \sqrt{a^2+b^2}$

$$= \sqrt{1^2+1^2}$$
$$= \sqrt{2}$$

> **Note:** $a\sin\theta + b\cos\theta$ এর বৃহত্তম মান $= \sqrt{a^2+b^2}$
>
> $a\sin\theta + b\cos\theta$ এর ক্ষুদ্রতম মান $= -\sqrt{a^2+b^2}$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের নির্দিষ্ট মানের জন্য কোণের মান নির্ণয়

২৬। **$f(x) = \tan x$ এবং $f(x)\,f(2x) = 1$ হলে, x এর মান কত?** [ব. বো. ২২]

ক $n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$ খ $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}$

গ $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}$ ঘ $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$

উত্তর: ক $n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$

ব্যাখ্যা: $f(x).f(2x) = 1$

$\Rightarrow \tan x.\tan 2x = 1$

$\Rightarrow \tan x\cdot\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 1$

$\Rightarrow \frac{2\tan^2 x}{1-\tan^2 x} = 1$

$\Rightarrow 2\tan^2 x = 1 - \tan^2 x$

$\Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan x = \tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$ [$\because \tan\theta = \tan\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + \alpha$]

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ২৭ ও ২৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$p = \cos\theta,\ q = \sin\theta$

২৭। **$\sec\theta$ এর মান কোনটি?** [কু. বো. ২১]

ক $\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$ খ $\sqrt{1-q^2}$

গ $\frac{1}{\sqrt{q^2-1}}$ ঘ $\sqrt{q^2-1}$

উত্তর: ক $\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$

ব্যাখ্যা: $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$ [$\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$]

$= \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$

২৮। **$p - \sqrt{3}q = 0$ এর সাধারণ সমাধান কোনটি?** [চ. বো. ২১]

ক $n\pi - \frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$ খ $n\pi - \frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$

গ $n\pi + \frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$ ঘ $n\pi + \frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$

উত্তর: গ $n\pi + \frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$

ব্যাখ্যা: $p - \sqrt{3}q = 0$

$\Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$

$\theta = n\pi + \frac{\pi}{6}; n\in\mathbb{Z}$ [$\because \tan\theta = \tan\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + \alpha$]

২৯। **$\sin\theta = \sin\alpha$ হলে, θ এর মান কত? (যেখানে α একটি ধ্রুবক কোণ)** [ব. বো. ২০]

ক $n\pi + (-1)^n\alpha, n \in \mathbb{Z}$ খ $n\pi \pm (-1)^n\alpha, n \in \mathbb{Z}$

গ $n\pi + \alpha, n \in \mathbb{Z}$ ঘ $n\pi - (-1)^n\alpha, n \in \mathbb{Z}$

উত্তর: ক $n\pi + (-1)^n\alpha, n \in \mathbb{Z}$

ব্যাখ্যা: $\sin\theta = \sin\alpha$

$\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\alpha; n \in \mathbb{Z}$

৩০। **$\tan\theta = 0$ হলে, θ এর সাধারণ সমাধান–** [ঢা. বো. ২০]

ক $(2n+1)\pi$ খ $n\pi$

গ π ঘ 0

উত্তর: খ $n\pi$

ব্যাখ্যা: $\tan\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = n\pi\ ; n \in \mathbb{Z}$

৩১। **n একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান?** [সি. বো. ২২; ম. বো ২১; ব. বো. ১৯]

ক $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}$ খ $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

গ $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{12}$ ঘ $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

উত্তর: ক $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}$

ব্যাখ্যা: $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin 2\theta = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow 2\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ [$\because \sin\theta = \sin\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$]

$\therefore \theta = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}$

৩২। **n একটি পূর্ণসংখ্যা হলে, $\sin 2\theta = 1$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি?** [কু. বো. ২৩]

ক $(4n+1)\frac{\pi}{4}$ খ $(4n-1)\frac{\pi}{4}$

গ $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ঘ $(2n-1)\frac{\pi}{2}$

উত্তর: ক $(4n+1)\frac{\pi}{4}$

ব্যাখ্যা: $\sin 2\theta = 1$

$\Rightarrow 2\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (4n+1)\frac{\pi}{4}\ ; n \in \mathbb{Z}$

৩৩। n পূর্ণসংখ্যা হলে, $\cos3\theta = \frac{1}{2}$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? [সি. বো. ২৩]

ক $\frac{2}{3}n\pi - \frac{\pi}{9}$ খ $\frac{2}{3}n\pi + \frac{\pi}{9}$
গ $\frac{2}{3}n\pi \pm \frac{\pi}{9}$ ঘ $\frac{3}{2}n\pi \pm \frac{\pi}{9}$

উত্তর: গ $\frac{2}{3}n\pi \pm \frac{\pi}{9}$

ব্যাখ্যা: $\cos3\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos3\theta = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow 3\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{2}{3}n\pi \pm \frac{\pi}{9}; n \in \mathbb{Z}$

৩৪। $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে θ এর মান কত হবে? $180° < \theta < 360°$ [ঢা. বো. ১৯]

ক 210° খ 240°
গ 300° ঘ 330°

উত্তর: গ 300°

ব্যাখ্যা: $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\theta = -\sqrt{3}$

$\therefore \theta = 300°$

অথবা, Using Calculator and Option Test

৩৫। যদি $\sec\theta = -2$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হয়, তবে θ এর মান কত? [রা. বো. ২২]

ক $-\frac{2\pi}{3}$ খ $\frac{2\pi}{3}$
গ $-\pi$ ঘ π

উত্তর: খ $\frac{2\pi}{3}$

ব্যাখ্যা: শুধুমাত্র খ $\frac{2\pi}{3}$ এই অপশনটাই $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ এই রেঞ্জে আছে। সুতরাং এটিই সঠিক উত্তর।

অথবা, $\sec\theta = -2$

$\Rightarrow \sec\theta = -\sec\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \sec\theta = \sec\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$

৩৬। n একটি পূর্ণসংখ্যা হলে $2\cos2\theta - 1 = 0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি? [ম. বো. ২২]

ক $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ খ $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
গ $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ঘ $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

উত্তর: ঘ $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

ব্যাখ্যা: $2\cos2\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \cos2\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow 2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ($\because \cos\theta = \cos\alpha$ হলে, $\theta = 2n\pi \pm \alpha$)

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

❖ **উদ্দীপকটির আলোকে ৩৭ ও ৩৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**
$\cot\theta = k$ সমীকরণটির সমাধান $\theta = n\pi + \alpha$

৩৭। $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\alpha =$ কত? [সি. বো. ২২]

ক $\frac{\pi}{6}$ খ $\frac{\pi}{4}$
গ $\frac{\pi}{3}$ ঘ $\frac{\pi}{2}$

উত্তর: গ $\frac{\pi}{3}$

ব্যাখ্যা: $\cot\theta = k$

$\Rightarrow \cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

৩৮। $k = 1$ এবং $\frac{\pi}{4} < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান কত? [দি. বো. ২২]

ক $\frac{3\pi}{2}$ খ $\frac{5\pi}{4}$
গ $\frac{3\pi}{4}$ ঘ $\frac{\pi}{2}$

উত্তর: খ $\frac{5\pi}{4}$

ব্যাখ্যা: $\cot\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{4} < \theta < 2\pi$ এর জন্য $n = 1$ বসিয়ে, $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

৩৯। $f(\theta) = \cos\theta$, $f(\theta) = f(\alpha)$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ হলে, θ এর মান– [য. বো. ২১]

ⓚ $2n\pi \pm \alpha$ ⓛ $n\pi \pm \alpha$
ⓜ $n\pi + (-1)^n \alpha$ ⓝ $n\pi - (-1)^n \alpha$

উত্তর: ⓚ $2n\pi \pm \alpha$

ব্যাখ্যা: $f(\theta) = \cos\theta$ .... (i)
$f(\theta) = f(\alpha)$ ...... (ii)
(i) ও (ii) থেকে পাই,
$\cos\theta = \cos\alpha$
$\Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha$ [সূত্র]

৪০। $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$ এর সমাধান কোনটি? [চ. বো. ২৩]

ⓚ $2n\pi + \frac{3\pi}{2}$ ⓛ $2n\pi - \frac{3\pi}{2}$
ⓜ $n\pi - \frac{3\pi}{2}$ ⓝ $n\pi + \frac{3\pi}{2}$

উত্তর: ⓝ $n\pi + \frac{3\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin n\pi$
$\Rightarrow x - \frac{3\pi}{2} = n\pi$
$\therefore x = n\pi + \frac{3\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

৪১। $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ যদি– [কু. বো. ২১]

ⓚ $\cot\theta = 0$ ⓛ $\cos\theta + 1 = 1$
ⓜ $\sin\theta = 1$ ⓝ $\cos\theta = 1$

উত্তর: ⓛ $\cos\theta + 1 = 1$

ব্যাখ্যা: $\cos\theta = 0$ হলে, $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

৪২। $\sin x + \operatorname{cosec} x = -2$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ হলে, x এর মান কত? [য. বো. ২৩]

ⓚ $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ ⓛ $2n\pi - \frac{\pi}{2}$
ⓜ $2n\pi$ ⓝ $2n\pi - \pi$

উত্তর: ⓛ $2n\pi - \frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: Option Test: $\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \operatorname{cosec}\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1 - 1 = -2$

অথবা, $\sin x + \frac{1}{\sin x} = -2$
$\Rightarrow \sin^2 x + 1 + 2\sin x = 0$
$\Rightarrow (\sin x + 1)^2 = 0$
$\Rightarrow \sin x = -1$
$\Rightarrow x = (4n - 1)\frac{\pi}{2} = 2n\pi - \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

৪৩। $\sin 2\theta + 3\sin\theta = 0$ হলে, θ এর মান কোনটি? [কু. বো. ২২]

ⓚ $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$ ⓛ $(4n + 1)\frac{\pi}{2}$
ⓜ $(2n + 1)\pi$ ⓝ $n\pi$

উত্তর: ⓝ $n\pi$

ব্যাখ্যা: $\sin 2\theta + 3\sin\theta = 0$
$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta + 3\sin\theta = 0$
$\Rightarrow \sin\theta(2\cos\theta + 3) = 0$
হয়, $\sin\theta = 0$ অথবা, $\cos\theta = -\frac{3}{2}$ [গ্রহণযোগ্য নয়]
$\therefore \theta = n\pi; n \in \mathbb{Z}$

৪৪। $\sin 2\theta - \cos 2\theta = 0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান– [চ. বো. ২৩]

ⓚ $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ⓛ $\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$
ⓜ $\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ⓝ $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

উত্তর: ⓝ $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

ব্যাখ্যা: $\sin 2\theta = \cos 2\theta$
$\Rightarrow \tan 2\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$
$\Rightarrow 2\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$
$\therefore \theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}; n \in \mathbb{Z}$

৪৫। $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3}$ $(0 < \theta < \pi)$ হলে, θ এর মান কত? [কু. বো. ২৩]

ⓚ $\frac{\pi}{6}$ ⓛ $\frac{\pi}{4}$
ⓜ $\frac{\pi}{3}$ ⓝ $\frac{2\pi}{3}$

উত্তর: ⓜ $\frac{\pi}{3}$

ব্যাখ্যা: Option test: $\theta = \frac{\pi}{3}$ হলে,
$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

৪৬। $\cos x + 2 + \sec x = 0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কত? [দি. বো. ২৩]

ⓚ $2n\pi$ ⓛ $(2n + 1)\pi$
ⓜ $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$ ⓝ $(2n + 1)\frac{\pi}{4}$

উত্তর: ⓛ $(2n + 1)\pi$

ব্যাখ্যা: $\cos x + 2 + \frac{1}{\cos x} = 0$
$\Rightarrow \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$
$\Rightarrow (\cos x + 1)^2 = 0$
$\Rightarrow \cos x = -1$
$\therefore x = (2n + 1)\pi; n \in \mathbb{Z}$

৪৭। $\tan 5\theta \tan 4\theta = 1$ **সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি?** [কু. বো. ২২]

ⓚ $(2n+1)\frac{\pi}{9}$ ⓛ $(2n-1)\frac{\pi}{9}$

ⓜ $(2n+1)\frac{\pi}{18}$ ⓝ $(2n-1)\frac{\pi}{18}$

উত্তর: ⓜ $(2n+1)\frac{\pi}{18}$

ব্যাখ্যা: $\tan 5\theta \tan 4\theta = 1$

$\Rightarrow \frac{\sin 5\theta}{\cos 5\theta} \cdot \frac{\sin 4\theta}{\cos 4\theta} = 1$

$\Rightarrow \sin 5\theta \sin 4\theta = \cos 5\theta \cos 4\theta$

$\Rightarrow \cos 5\theta \cos 4\theta - \sin 5\theta \sin 4\theta = 0$

$\Rightarrow \cos 9\theta = 0$

$\Rightarrow 9\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{18}; n \in \mathbb{Z}$

৪৮। $\cot\theta.\cot 2\theta = 1$ **সমীকরণের সমাধান–** [ব. বো. ২১]

ⓚ $2n\pi$ ⓛ $(2n+1)\frac{\pi}{3}$

ⓜ $\frac{2n\pi}{3}$ ⓝ $(2n-1)\frac{\pi}{3}$

উত্তর: সঠিক উত্তর নেই

ব্যাখ্যা: $\cot\theta.\cot 2\theta = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\tan\theta}\frac{1}{\tan 2\theta} = 1$

$\Rightarrow \tan\theta \tan 2\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta \cdot \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\tan\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$

৪৯। $-\pi \le x \le \pi$ **ব্যবধিতে** $\sin x = -\frac{1}{2}$ **সমীকরণের সমাধান–** [চ. বো. ২২]

ⓚ $-\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$ ⓛ $-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

ⓜ $\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$ ⓝ $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

উত্তর: ⓚ $-\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator and Option test

অথবা, $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \left[\because \sin 30° = \frac{1}{2}\right]$

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ [$\because \sin\theta = \sin\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$]

$\Rightarrow x = n\pi - (-1)^n\frac{\pi}{6}$

n এর মান বসিয়ে পাই, $-\pi \le x \le \pi$ ব্যবধিতে x এর মান: $-\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$

৫০। $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ **হলে x এর মান কত?** [ব. বো. ১৯]

ⓚ $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}$ ⓛ $2n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{12}$

ⓜ $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ ⓝ $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

উত্তর: ⓚ $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}$

ব্যাখ্যা: $\sin x \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2\sin x \cos x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin 2x = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow 2x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$\therefore x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}; n \in \mathbb{Z}$

৫১। $2\tan^{-1}\sqrt{2} = \theta$ **হলে–** [ঢা. বো. ২১]

(i) $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$

(ii) $\cot\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(iii) $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ ii ও iii

ⓜ i ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓝ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: Using Calculator and Option Test

অথবা, (i) $2\tan^{-1}\sqrt{2} = \theta$

$\Rightarrow \tan^{-1}\sqrt{2} = \frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$ [(i) নং সঠিক]

(ii) $\theta = 2\tan^{-1}\sqrt{2}$

$\Rightarrow \theta = \pi + \tan^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2})^2}$

$\left[\because 2\tan^{-1}x = \pi + \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}; x > 1\right]$

$\Rightarrow \theta = \pi + \tan^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{-1}$

$\Rightarrow \theta = \pi - \tan^{-1}2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan(\pi - \tan^{-1}2\sqrt{2})$

$\Rightarrow \tan\theta = -\tan\tan^{-1}2\sqrt{2}$

$\therefore \cot\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ [(ii) নং সঠিক]

(iii) $\theta = 2\tan^{-1}\sqrt{2}$

$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2})^2}\left[2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}\right]$

$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{1+2}$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ [(iii) নং সঠিক]

একাধিক ঘাতবিশিষ্ট ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান

৫২। $\sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta = -1$ হলে, নিচের কোনটি সত্য? [সি. বো. ২১]

ক $\theta = n\pi$ খ $\theta = (2n+1)\pi$

গ $\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$ ঘ $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

উত্তর: গ $\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: $\sin^3\theta + \sin\theta(1-\sin^2\theta) = -1$

$\Rightarrow \sin\theta = -1$

$\therefore \theta = (4n-1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}$

৫৩। $-2(\cos^2x - \sin^2x) = 1$ এর সমাধান নিচের কোনটি? [সি. বো. ২১]

ক $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ খ $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

গ $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ঘ $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

উত্তর: ক $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

ব্যাখ্যা: $n = 1$ ধরে Option Test করো।

অথবা, $-2(\cos^2x - \sin^2x) = 1$

$\Rightarrow -2\cos2x = 1$

$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$\therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{3};\ n \in \mathbb{Z}$

৫৪। $\cos^2x + 2\sin x = 2$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি? (যখন $n \in \mathbb{Z}$) [ম. বো. ২৩]

ক $(4n-1)\frac{\pi}{2}$ খ $n\pi$

গ $(4n+1)\frac{\pi}{2}$ ঘ $(2n+1)\pi$

উত্তর: গ $(4n+1)\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: $1 - \sin^2x + 2\sin x = 2$

$\Rightarrow \sin^2x - 2\sin x + 1 = 0$

$\Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore x = (4n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}$

৫৫। $2(3\cos\theta - 4\cos^3\theta) = -1$ এর সমাধান নিচের কোনটি? [য. বো. ২৩]

ক $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ খ $\frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$

গ $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ঘ $\frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18}$

উত্তর: খ $\frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$

ব্যাখ্যা: $2(3\cos\theta - 4\cos^3\theta) = -1$

$\Rightarrow 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos3\theta = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow 3\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9};\ n \in \mathbb{Z}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৫৬ ও ৫৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$4(\cos^2x + \sin x) = 5$ একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ।

৫৬। x এর মান কত? [কু. বো. ২১]

ক $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}$ খ $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}$

গ $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$ ঘ $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$

উত্তর: গ $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$

ব্যাখ্যা: $4(\cos^2x + \sin x) = 5$

$\Rightarrow 4(1 - \sin^2x + \sin x) = 5$

$\Rightarrow -1 - 4\sin^2x + 4\sin x = 0$

$\Rightarrow 4\sin^2x - 4\sin x + 1 = 0$

$\Rightarrow (2\sin x)^2 - 2 \times 2\sin x.1 + (1)^2 = 0$

$\Rightarrow (2\sin x - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$ [$\because \sin\theta = \sin\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$]

৫৭। x এর মান কত, যখন $0 < x < 2\pi$ [কু. বো. ২১]

ক $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ খ $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

গ $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ ঘ $\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

উত্তর: খ $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

ব্যাখ্যা: ৫৬ থেকে পাই,

$x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ [$\because n = 0$]

$x = \pi + (-1)^1 \times \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ [$\because n = 1$]

$x = 2\pi + (-1)^2 \times \frac{\pi}{6}$

$= 2\pi + \frac{\pi}{6}$ [গ্রহণযোগ্য নয় কেননা $0 < x < 2\pi$ (দেওয়া আছে)]

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক সূত্রের সাহায্যে মান নির্ণয়

৫৮। $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y =$ কত? যখন $(xy > 1)$ [ব. বো. ২৩]

ক $\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ খ $\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} - \pi$

গ $\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} + \pi$ ঘ $\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} + \frac{\pi}{2}$

উত্তর: গ $\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} + \pi$

ব্যাখ্যা: $xy > 1$ হলে, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} + \pi$

অথবা, $xy < 1$ হলে, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

৫৯। $\sin^{-1}\frac{2}{5} + \sin^{-1}\frac{\sqrt{21}}{5}$ এর মান কত? [য. বো. ২১]

ক π খ $\frac{\pi}{2}$

গ 2π ঘ $\frac{\pi}{4}$

উত্তর: খ $\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator in Radian Mode

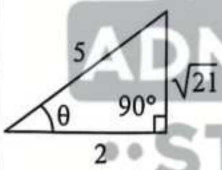
বিকল্প পদ্ধতি:

$\sin^{-1}\frac{2}{5} + \sin^{-1}\frac{\sqrt{21}}{5}$

$= \sin^{-1}\frac{2}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{5}$

$= \frac{\pi}{2}\left[\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$

$\sin^{-1}\frac{\sqrt{21}}{5}$ এর ক্ষেত্রে,



$\therefore \theta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{21}}{5}$

$= \cos^{-1}\frac{2}{5}$

৬০। $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ এর মান কোনটি? [ম. বো. ২৩]

ক $\frac{\pi}{4}$ খ $\frac{\pi}{2}$

গ $\frac{2\pi}{3}$ ঘ π

উত্তর: খ $\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

৬১। $\cos(\sin^{-1}x)$ এর মান কোনটি? [রা. বো. ২৩]

ক $\sqrt{x^2-1}$ খ $\sqrt{1-x^2}$

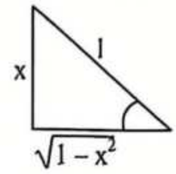
গ x^2+1 ঘ $1-x^2$

উত্তর: খ $\sqrt{1-x^2}$

ব্যাখ্যা: $\cos(\sin^{-1}x)$

$= \cos\cos^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$

$= \sqrt{1-x^2}$



৬২। $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}x\right) =$ কত? [সি. বো. ২২]

ক $\sin x$ খ x

গ $1-x$ ঘ $1+x$

উত্তর: খ x

ব্যাখ্যা: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}x\right) = \cos(\cos^{-1}x) = x$

> **Note:** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

৬৩। $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \tan^{-1}\frac{2}{3}$ হলে, $x =$ কত? [রা. বো. ২৩]

ক $\frac{2}{3}$ খ $\frac{3}{2}$

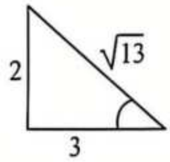
গ $\frac{\sqrt{13}}{3}$ ঘ $\frac{\sqrt{13}}{2}$

উত্তর: ঘ $\frac{\sqrt{13}}{2}$

ব্যাখ্যা: $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \tan^{-1}\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{x} = \sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{13}}$

$\therefore x = \frac{\sqrt{13}}{2}$



৬৪। $\tan(\cos^{-1}x) = \sin(\tan^{-1}2)$ হলে, x এর মান কত? [ব. বো. ২২]

ক $\frac{\sqrt{5}}{3}$ খ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

গ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ঘ $\frac{3}{\sqrt{5}}$

উত্তর: ক $\frac{\sqrt{5}}{3}$

ব্যাখ্যা: Calculator দিয়ে Option Test করো।

$\tan\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = 0.894$

$\sin(\tan^{-1}2) = 0.894$

৬৫। $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \tan^{-1}x = \frac{\pi}{4}$ হলে, x এর মান– [ঢা. বো. ২২]

ক $\frac{1}{3}$ খ $\frac{-1}{3}$

গ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ঘ $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

উত্তর: খ $\frac{-1}{3}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator in Radian Mode

৬৬। **$\tan\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x$ এর মান কোনটি?** [রা. বো. ২২]

ক $\sqrt{1-x^2}$　　খ $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

গ $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　　ঘ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

উত্তর: গ $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

ব্যাখ্যা: $\tan\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x$

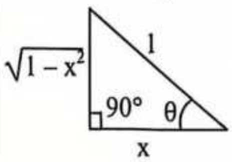
$= \tan\cot^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$= \tan\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$= \tan\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\cos^{-1}x$ এর ক্ষেত্রে,



$\cos^{-1}x = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

৬৭। **$\tan\left(\sec^{-1}\frac{a}{b}\right)$ এর মান–** [দি. বো. ২৩]

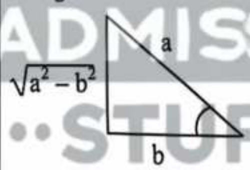
ক $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$　　খ $\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}$

গ $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$　　ঘ $\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$

উত্তর: গ $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

ব্যাখ্যা: $\tan\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

$\sec^{-1}\frac{a}{b}$ এর ক্ষেত্রে,



৬৮। **$\tan^{-1}p + \tan^{-1}q = \frac{\pi}{4}$ হলে–** [য. বো. ২৩]

ক $pq = 1$　　খ $p + q = 0$

গ $p + q - pq = 1$　　ঘ $p + q + pq = 1$

উত্তর: ঘ $p + q + pq = 1$

ব্যাখ্যা: $\tan^{-1}p + \tan^{-1}q = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{p+q}{1-pq} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\therefore p + q + pq = 1$

৬৯। **$x = \sin\cos^{-1}y$ হলে, $x^2 + y^2$ এর মান হবে–** [ঢা. বো. ২১]

ক π　　খ 1

গ -1　　ঘ 0

উত্তর: খ 1

ব্যাখ্যা: $x = \sin\cos^{-1}y$

$\Rightarrow \sin^{-1}x = \cos^{-1}y$

$\Rightarrow \sin^{-1}x = \sin^{-1}\sqrt{1-y^2}$

$\Rightarrow x^2 = 1 - y^2$

$\therefore x^2 + y^2 = 1$

❖ **উদ্দীপকটির আলোকে ৭০ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ**

$\tan^{-1}3 = A$, $\tan^{-1}2 = B$ এবং $A + B + C = \pi$

৭০। **$A + B$ এর মান নিচের কোনটি?** [য. বো. ২১]

ক $\frac{\pi}{4}$　　খ $\frac{\pi}{2}$

গ $\frac{3\pi}{4}$　　ঘ $\frac{3\pi}{2}$

উত্তর: গ $\frac{3\pi}{4}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator

বিকল্প পদ্ধতি:

$A + B = \tan^{-1}3 + \tan^{-1}2$

$= \pi + \tan^{-1}\frac{3+2}{1-3\times2}$　　$[\because 3\times2 > 1]$

$= \pi + \tan^{-1}\left(\frac{5}{-5}\right)$

$= \pi - \frac{\pi}{4}$

$= \frac{3\pi}{4}$

৭১। **$\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} + \cot^{-1}\frac{1-b^2}{2b} = 2\tan^{-1}x$ হলে, x এর মান–** [সি. বো. ২৩]

ক $a + b$　　খ $a - b$

গ $\frac{a-b}{1+ab}$　　ঘ $\frac{a+b}{1-ab}$

উত্তর: ঘ $\frac{a+b}{1-ab}$

ব্যাখ্যা: $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} + \cot^{-1}\frac{1-b^2}{2b} = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow 2\tan^{-1}a + 2\tan^{-1}b = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow 2\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab} = 2\tan^{-1}x$

$\therefore x = \frac{a+b}{1-ab}$

৭২। **কোন সম্পর্কটি সঠিক?** [কু. বো. ২১]

ক $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

খ $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{x^3-3x}{1-3x^2}$

গ $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(1-2x^2)$

ঘ $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$

উত্তর: ঘ $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$

ব্যাখ্যা: সূত্র: $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$

$2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

$3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$

$2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$

৭৩। নিচের কোনটি $\sin(2\sin^{-1}x)$ এর মান? [চ. বো. ২১]

ক $2x\sqrt{x^2-1}$ খ $2x\sqrt{1-x^2}$

গ $\frac{2x}{1-x^2}$ ঘ $\frac{2x}{1+x^2}$

উত্তর: খ $2x\sqrt{1-x^2}$

ব্যাখ্যা: $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

$\Rightarrow \sin(2\sin^{-1}x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

অথবা, $x = \frac{1}{2}$ ধরে ক্যালকুলেটর দিয়ে Option Test করো।

৭৪। $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \theta$ হলে, $\sin\theta$ এর মান কত? [দি. বো. ২১]

ক 0 খ 1

গ 2x ঘ $2x\sqrt{1-x^2}$

উত্তর: খ 1

ব্যাখ্যা: $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin\theta = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

৭৫। $\cos\left\{2\left(\sin^{-1}\frac{3x}{2} + \cos^{-1}\frac{3x}{2}\right)\right\} = p$ হলে, p এর মান কত? [সি. বো. ১৯]

ক 0 খ 1

গ −1 ঘ $\frac{\pi}{2}$

উত্তর: গ −1

ব্যাখ্যা: $\cos\left\{2\times\frac{\pi}{2}\right\} = \cos\pi = -1 \quad \left[\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$

❖ **উদ্দীপকটির আলোকে ৭৬ ও ৭৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**

$y = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos^{-1}x$ সমীকরণ–

৭৬। $y = 90°$ হলে, x এর মান কোনটি? [দি. বো. ১৭]

ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

গ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ $\frac{2}{\sqrt{3}}$

উত্তর: গ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ব্যাখ্যা: $90° = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos^{-1}x$

$\Rightarrow \cos^{-1}x = 90° - 60°$

$= 30°$

$\therefore x = \cos 30°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

৭৭। $x = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$ হলে, y-এর মান কোনটি? [দি. বো. ১৭]

ক $\tan^{-1}\frac{5\sqrt{3}}{-7}$ খ $\tan^{-1}\frac{11}{\sqrt{3}}$

গ $\tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{11}$ ঘ $\tan^{-1}\frac{7}{5\sqrt{3}}$

উত্তর: খ $\tan^{-1}\frac{11}{\sqrt{3}}$

ব্যাখ্যা: $y = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos^{-1}\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}} = 1.414$

অপশন খ $\tan^{-1}\frac{11}{\sqrt{3}} = 1.414$ [Using Calculator]

৭৮। $g(x) = \sin^{-1}x$ হলে, $g(y) + g\left(\sqrt{1-y^2}\right)$ এর মান নিচের কোনটি? [ব. বো. ২২]

ক π খ 2π

গ $\frac{\pi}{2}$ ঘ $\frac{\pi}{3}$

উত্তর: গ $\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: $g(x) = \sin^{-1}x$

$g(y) = \sin^{-1}y$

$g(y) + g\left(\sqrt{1-y^2}\right)$

$= \sin^{-1}y + \sin^{-1}\sqrt{1-y^2}$

$= \cos^{-1}\sqrt{1-y^2} + \sin^{-1}\sqrt{1-y^2} \quad \left[\because \sin^{-1}a = \cos^{-1}\sqrt{1-a^2}\right]$

$= \frac{\pi}{2} \quad \left[\because \cos^{-1}a + \sin^{-1}a = \frac{\pi}{2}\right]$

৭৯। ΔABC এর $A = \sin^{-1}\frac{1}{2}$, $B = \cos^{-1}\frac{1}{2}$ এবং C কোণের বহিঃস্থ কোণ θ হলে, $2\sin\theta - \sin C$ এর মান কোনটি? [সম্মিলিত. বো. ১৮]

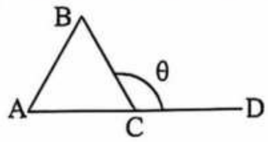
ক θ খ 1

গ 2 ঘ 3

উত্তর: খ 1

ব্যাখ্যা: C এর বহিঃস্থ কোণ = ∠DCB

ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।



$\angle DCB = \angle CBA + \angle BAC$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

আবার,

$\angle A + \angle B + \angle C = \pi$

$\therefore C = \frac{\pi}{2}$

এখানে,

$2\sin\theta - \sin C$

$= 2\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}$

$= 2 - 1 = 1$

৮০। যদি $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে– [সি. বো. ২১]

(i) $x \le -1$
(ii) $x = 0$
(iii) $x > 0$
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii　　খ i ও iii
গ ii ও iii　　ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ ii ও iii

ব্যাখ্যা: $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ [যখন $x \ge 0$]

৮১। বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে– [সি. বো. ২২]

(i) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\}$
যেখানে $-1 \le x, y \le 1$ এবং $x^2 + y^2 \le 1$
(ii) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$
যেখানে $-1 \le x, y \le 1$ এবং $x + y \ge 0$
(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ যেখানে $x > 0, y > 0$ এবং $0 \le xy \le 1$
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii　　খ i ও iii
গ ii ও iii　　ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

৮২। বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে– [চ. বো. ১৭]

(i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
(ii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$
(iii) $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii　　খ ii ও iii
গ i ও iii　　ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) ও (iii) সূত্র।
(ii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

৮৩। নিচের কোনটি সঠিক? [ঢা. বো. ২৩]

(i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
(ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi$
(iii) $\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i　　খ ii
গ i ও ii　　ঘ i ও iii

উত্তর: ঘ i ও iii

ব্যাখ্যা: (ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

৮৪। $2\cos\theta = 1$ সমীকরণের সমাধান– [কু. বো. ১৯]

(i) $\theta = \frac{\pi}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
(ii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$
(iii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii　　খ i ও iii
গ ii ও iii　　ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: $2\cos\theta = 1$
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$
$\Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ [$\because \cos\theta = \cos\alpha$ হলে, $\theta = 2n\pi \pm \alpha$]

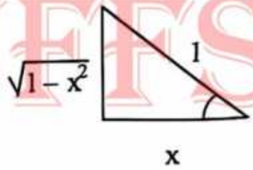
৮৫। (i) $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ [ঢা. বো. ১৯]

(ii) $2\cot^{-1}x = \cot^{-1}\frac{x^2-1}{2x}$
(iii) $\cos^{-1}x = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii　　খ i ও iii
গ ii ও iii　　ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) সূত্র (ii) সূত্র
(iii) $\cos^{-1}x = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$



৮৬। বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে– [ব. বো. ২৩]

(i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x \ (-1 \le x \le 1)$
(ii) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$
(iii) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x \ (|x| \ge 1)$
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii　　খ i ও iii
গ ii ও iii　　ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$
(ii) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$
(iii) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x \ (|x| \ge 1)$

৮৭। (i) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi$ [ঢা. বো. ২২]

(ii) $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\{xy - \sqrt{(1-y^2)(1-x^2)}\}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

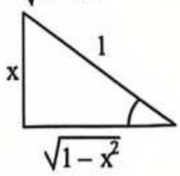
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ এর ক্ষেত্রে,



(iii) এটা সূত্র।

৮৮। বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে– [য. বো. ২১]

(i) $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর পূরক কোণ $\cos^{-1}\frac{1}{2}$

(ii) $\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ যখন $xy > 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

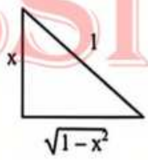
উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) দুইটি কোণের যোগফল যদি $\frac{\pi}{2}$ হয় তাহলে এদেরকে পরস্পরের পূরক কোণ বলে।

$\sin^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$ এর ক্ষেত্রে,



(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ [শর্ত $xy \le 1$]

৮৯। যদি $f(x) = \tan^{-1}x$ হলে– [দি. বো. ২১]

(i) $2f(x) = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

(ii) $2f(x) = \sin^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

(iii) $2f(x) = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

$2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

$2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

৯০। $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে– [কু. বো. ১৭]

(i) θ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{4}$

(ii) $\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}, \forall n \in Z$

(iii) $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$, যখন $n \in Z$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

[বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে ক্ষুদ্রতম সংখ্যাসূচক মান (ধনাত্মক/ঋণাত্মক) হলো মুখ্যমান]

(ii) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n.\frac{\pi}{4}$ [$\because \sin\theta = \sin\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$]

(i) ও (ii) সঠিক

(iii) সঠিক নয়। কেননা $\sin\theta = 1$ হলে, $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

৯১। অবান্তর মূল ত্রিকোণমিতিক সমীকরণকে– [ম. বো. ২২]

(i) সিদ্ধ করে না

(ii) বর্গ করলে পাওয়া যায়

(iii) বর্গমূল করলে পাওয়া যায়

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) একটা সমীকরণ এর উভয়পক্ষকে বর্গ করলে এক বা একাধিক মূল পাওয়া যায়, কিন্তু সব মূল দ্বারা সমীকরণ সিদ্ধ হয় না, ঐ সকল মূলকে অবান্তর মূল বলে।

(ii) বর্গমূল করলে পাওয়া যায় না, বর্গ করলে পাওয়া যায়।

নিজেকে যাচাই করো

১। $\sin\theta + \cos\theta$ এর বৃহত্তম মান কত?

(ক) $\sqrt{2}+1$ (খ) $\sqrt{2}$ (গ) 1 (ঘ) 2

২। $\sin x + \operatorname{cosec} x = -2$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ হলে, x এর মান কত?

(ক) $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (খ) $2n\pi - \frac{\pi}{2}$ (গ) $2n\pi$ (ঘ) $2n\pi - \pi$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$4(\cos^2 x + \sin x) = 5$ একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ।

৩। x এর মান কত?

(ক) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}$ (খ) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}$

(গ) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$ (ঘ) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$

৪। x এর মান কত, যখন $0 < x < 2\pi$

(ক) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ (খ) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ (গ) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ (ঘ) $\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

৫। (i) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi$ (ii) $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(iii) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\{xy - \sqrt{(1-y^2)(1-x^2)}\}$
নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৬। $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ হলে x এর মান কত?

(ক) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}$ (খ) $2n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{12}$

(গ) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ (ঘ) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

৭। ΔABC এর $A = \sin^{-1}\frac{1}{2}$, $B = \cos^{-1}\frac{1}{2}$ এবং C কোণের বহিঃস্থ কোণ θ হলে, $2\sin\theta - \sin C$ এর মান কোনটি?

(ক) θ (খ) 1 (গ) 2 (ঘ) 3

৮। (i) $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ (ii) $2\cot^{-1}x = \cot^{-1}\frac{x^2-1}{2x}$
(iii) $\cos^{-1}x = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৯। $\operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) - \sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3})$ এর মান নিচের কোনটি?

(ক) $\frac{11}{3}$ (খ) $\frac{13}{3}$ (গ) $\frac{35}{9}$ (ঘ) $\frac{37}{9}$

১০। $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \tan^{-1}x = \frac{\pi}{4}$ হলে, x এর মান–

(ক) $\frac{1}{3}$ (খ) $\frac{-1}{3}$ (গ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ঘ) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

১১। $f(x) = \tan x$ এবং $f(x)\,f(2x) = 1$ হলে, x এর মান কত?

(ক) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$ (খ) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}$ (গ) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}$ (ঘ) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$

১২। বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে–
(i) $\sin^{-1}x$ এর ডোমেন $[-1, 1]$
(ii) $\cos^{-1}x$ এর রেঞ্জ $[0, \pi]$
(iii) $\tan^{-1}x$ এর ডোমেন $(-\infty, \infty)$
নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১৩। $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$ হলে, θ এর মান–

(ক) $2n\pi$ (খ) $(2n+1)\pi$ (গ) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ (ঘ) $(2n-1)\pi$

১৪। অবান্তর মূল ত্রিকোণমিতিক সমীকরণকে–
(i) সিদ্ধ করে না
(ii) বর্গ করলে পাওয়া যায়
(iii) বর্গমূল করলে পাওয়া যায়
নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১৫। $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}\frac{3}{4} =$ কত?

(ক) $\frac{3}{4}$ (খ) $\frac{5}{4}$ (গ) $\frac{4}{3}$ (ঘ) $\frac{3}{\sqrt{7}}$

১৬। $\tan 5\theta \tan 4\theta = 1$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি?

(ক) $(2n+1)\frac{\pi}{9}$ (খ) $(2n-1)\frac{\pi}{9}$ (গ) $(2n+1)\frac{\pi}{18}$ (ঘ) $(2n-1)\frac{\pi}{18}$

১৭। $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} + \cot^{-1}\frac{1-b^2}{2b} = 2\tan^{-1}x$ হলে, x এর মান–

(ক) $a+b$ (খ) $a-b$ (গ) $\frac{a-b}{1+ab}$ (ঘ) $\frac{a+b}{1-ab}$

১৮। $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} = ?$

(ক) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (খ) $\tan^{-1}(2)$ (গ) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (ঘ) $\sin^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$

১৯। $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ যদি–

(ক) $\cot\theta = 0$ (খ) $\cos\theta + 1 = 1$
(গ) $\sin\theta = 1$ (ঘ) $\cos\theta = 1$

২০। $2\tan^{-1}\sqrt{2} = \theta$ হলে–
(i) $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$ (ii) $\cot\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (iii) $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ২১ ও ২২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$p = \cos\theta, q = \sin\theta$

২১। $\sec\theta$ এর মান কোনটি?

(ক) $\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$ (খ) $\sqrt{1-q^2}$ (গ) $\frac{1}{\sqrt{q^2-1}}$ (ঘ) $\sqrt{q^2-1}$

২২। $p - \sqrt{3}q = 0$ এর সাধারণ সমাধান কোনটি?

(ক) $n\pi - \frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$ (খ) $n\pi - \frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$ (গ) $n\pi + \frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}$ (ঘ) $n\pi + \frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$

২৩। $\sin 2\theta + 3\sin\theta = 0$ হলে, θ এর মান কোনটি?

(ক) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (খ) $(4n+1)\frac{\pi}{2}$ (গ) $(2n+1)\pi$ (ঘ) $n\pi$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ২৪ ও ২৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$\cot\theta = k$ সমীকরণটির সমাধান $\theta = n\pi + \alpha$

২৪। $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\alpha =$ কত?

(ক) $\frac{\pi}{6}$ (খ) $\frac{\pi}{4}$ (গ) $\frac{\pi}{3}$ (ঘ) $\frac{\pi}{2}$

২৫। $k = 1$ এবং $\frac{\pi}{4} < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান কত?

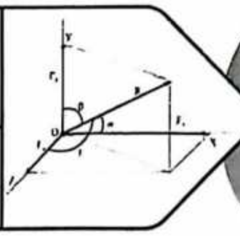
(ক) $\frac{3\pi}{2}$ (খ) $\frac{5\pi}{4}$ (গ) $\frac{3\pi}{4}$ (ঘ) $\frac{\pi}{2}$

উত্তরপত্র																								
	১	খ	২	খ	৩	গ	৪	খ	৫	গ	৬	ক	৭	খ	৮	ক	৯	ক	১০	খ	১১	ক	১২	ঘ
১৩	গ	১৪	ক	১৫	ক	১৬	গ	১৭	ঘ	১৮	ক	১৯	খ	২০	ঘ	২১	ক	২২	গ	২৩	ঘ	২৪	গ	২৫	খ

০৮

স্থিতিবিদ্যা

Statics



Board Questions Analysis

সৃজনশীল প্রশ্ন

বোর্ড / সাল	ঢাকা	ময়মনসিংহ	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০২৩	১	১	১	১	১	১	১	১	১
২০২২	১	১	১	১	২	১	১	১	১

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

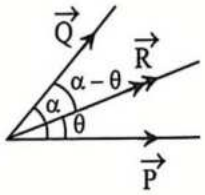
বোর্ড / সাল	ঢাকা	ময়মনসিংহ	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০২৩	৪	১	৩	৪	৪	৩	৩	৩	২
২০২২	২	৪	২	৪	৪	২	৩	৩	৩

এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

- পরস্পর α কোণে ক্রিয়াশীল $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুইটি সমবিন্দু বলের লব্ধি $\vec{R}$, যা $\vec{P}$ এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে,

(i) লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

(ii) লব্ধির দিক, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$



(iii) $\vec{P}$ বরাবর লম্বাংশ, $R\cos\theta = P\cos0^\circ + Q\cos\alpha$

(iv) $\vec{P}$ এর লম্ব বরাবর লম্বাংশ, $R\sin\theta = P\sin0^\circ + Q\sin\alpha$

(v) বলের সাইন সূত্র: $\dfrac{P}{\sin(\alpha-\theta)} = \dfrac{Q}{\sin\theta} = \dfrac{R}{\sin\alpha}$

(vi) $\alpha = 90^\circ$ হলে, $R_{perp} = \sqrt{P^2 + Q^2}$, $\tan\theta = \dfrac{Q}{P}$

(vii) $\theta = 90^\circ$ হলে, $R = \sqrt{Q^2 - P^2}$; $\cos\alpha = -\dfrac{P}{Q}$

(viii) $P = Q$ হলে, $R = 2P\cos\dfrac{\alpha}{2}$ এবং $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$;

(ix) $\alpha = 0^\circ$ হলে, $R_{max} = P + Q$

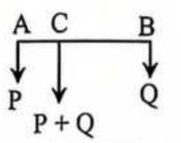
(x) $\alpha = 180^\circ$ হলে, $R_{min} = P \sim Q$

- লামির উপপাদ্য: P, Q ও R তিনটি ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়াশীল বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, $\dfrac{P}{\sin(Q\wedge R)} = \dfrac{Q}{\sin(P\wedge R)} = \dfrac{R}{\sin(P\wedge Q)}$

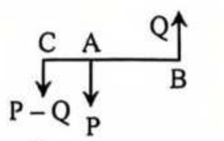
- P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে যেকোনো দুটি বলের লব্ধি তৃতীয়টির মানের সমান হবে।

- P ও Q দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি $R = P + Q$

  P ও Q দুটি অসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি, $R = P - Q$; $(P > Q)$



সদৃশ সমান্তরাল বল



বিসদৃশ সমান্তরাল বল

উভয়ক্ষেত্রে, $P \times AC = Q \times BC$ এবং $\dfrac{P}{BC} = \dfrac{Q}{AC} = \dfrac{R}{AB}$

HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন ▶ ১ দৃশ্যকল্প-১: একটি বিন্দুতে $M = N$ মানের দুইটি বল 2θ কোণে ক্রিয়ারত হলে লব্ধি $2R$ এবং 2φ কোণে ক্রিয়ারত হলে লব্ধি R।

দৃশ্যকল্প-২: P ও Q $(P > Q)$ মানের দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

(ক) 4 N ও 3 N মানের দুইটি বল পরস্পর $120°$ কোণে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি নির্ণয় কর। [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২, ২১; রা. বো. ২১; ঢা. বো. ১৯, ১৭; চ. বো. ১৭; দি. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\theta = \cos^{-1}(2\cos\varphi)$ [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর প্রত্যেক বলের সাথে a পরিমাণ বল বৃদ্ধি করলে দেখাও যে, বলদ্বয়ের লব্ধি $\frac{a}{P-Q}AB$ দূরত্বে সরে যাবে।
[কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩; দি. বো. ২২; কু. বো. ২১; চ. বো. ২১; রা. বো. ১৯; য. বো. ১৭; ব. বো. ১৭]

সমাধান:

ক ধরি, বলদ্বয় $P = 4$ N, $Q = 3$N

বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\alpha = 120°$ এবং লব্ধি $= R$

$\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow R^2 = 4^2 + 3^2 + 2 \times 4 \times 3\cos120°$

$\therefore R = \sqrt{13}$ N **(Ans.)**

খ ধরি, প্রত্যেকটি বল P [দেওয়া আছে, $M = N \therefore M = N = P$]

2θ কোণে ক্রিয়াশীল বলের লব্ধি $2R$ হলে,

$(2R)^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos2\theta$

$\Rightarrow 4R^2 = 2P^2 + 2P^2\cos2\theta$

$\Rightarrow 2R^2 = P^2(1 + \cos2\theta)$

$\Rightarrow R^2 = \frac{P^2}{2}(1 + \cos2\theta)$ ...... (i)

আবার, 2φ কোণে ক্রিয়াশীল বলের লব্ধি R হলে,

$R^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos2\varphi$

$\Rightarrow R^2 = 2P^2 + 2P^2\cos2\varphi$

$\Rightarrow R^2 = 2P^2(1 + \cos2\varphi)$ ..... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$\frac{P^2}{2}(1 + \cos2\theta) = 2P^2(1 + \cos2\varphi)$

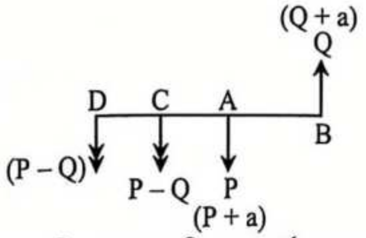
$\Rightarrow 2\cos^2\theta = 4 \times 2\cos^2\varphi$

$\Rightarrow \cos^2\theta = 4 \times \cos^2\varphi$

$\Rightarrow \cos\theta = 2\cos\varphi$

$\therefore \theta = \cos^{-1}(2\cos\varphi)$ **(Proved)**

গ



মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত P ও Q বিসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটির লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং P ও Q কে a পরিমাণে বৃদ্ধি করা হলে $(P + a)$ ও $(Q + a)$ এর লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore$ লব্ধির সরণ CD।

$\therefore P.AC = Q.BC$

$\Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P-Q}{AB}$

$\Rightarrow \frac{Q}{AC} = \frac{P-Q}{AB}$

$\Rightarrow AC = \frac{Q}{P-Q}AB$ .....(i)

আবার,

$(P + a).AD = (Q + a).BD$

$\Rightarrow \frac{P+a}{BD} = \frac{Q+a}{AD} = \frac{P+a-(Q+a)}{AB}$

$\Rightarrow \frac{Q+a}{AD} = \frac{P-Q}{AB}$

$\Rightarrow AD = \frac{Q+a}{P-Q}AB$.....(ii)

(ii) – (i) করে পাই,

$\Rightarrow AD - AC = \frac{Q+a-Q}{P-Q}.AB$

$\therefore CD = \frac{a}{P-Q}AB$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▶ ২ দৃশ্যকল্প-১: XYZ সমবাহু ত্রিভুজের YZ, ZX এবং XY বাহুর সমান্তরাল যথাক্রমে 5, 7 এবং 9 একক মানের তিনটি বল ক্রিয়ারত।

দৃশ্যকল্প-২: M মানের তিনটি বল একটি বিন্দুতে এরূপভাবে কার্যরত যেন এদের দিক ΔABC এর BC, CA এবং AB বাহুর সমান্তরাল।

(ক) 8 N ও 5 N মানের দুইটি বলের লব্ধি বৃহত্তর বলের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করলে বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণের মান নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে বলত্রয়ের লব্ধি নির্ণয় কর।
[য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩, ১৭; রা. বো. ২২; ম. বো. ২১; য. বো. ২১;]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে, প্রমাণ কর যে, বলত্রয়ের লব্ধির পরিমাণ $M\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$ [য. বো. ২২]

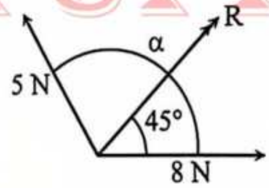
সমাধান:

ক ধরি, বৃহত্তর বল, $P = 8$ N

ক্ষুদ্রতর বল, $Q = 5$ N

লব্ধি বল $= R$

লব্ধি R বৃহত্তর বলের সাথে $\theta = 45°$ কোণ উৎপন্ন করে।



P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

$\Rightarrow \tan45° = \frac{5\sin\alpha}{8 + 5\cos\alpha}$

$\Rightarrow 1 = \frac{5\sin\alpha}{8 + 5\cos\alpha}$

$\Rightarrow 8 + 5\cos\alpha = 5\sin\alpha$

$\Rightarrow 5(\sin\alpha - \cos\alpha) = 8$

$\Rightarrow (\sin\alpha - \cos\alpha) = \frac{8}{5}$

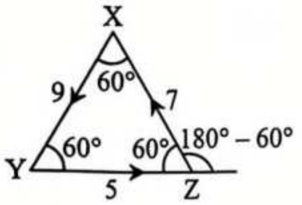
$\Rightarrow \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{64}{25}$ [বর্গ করে]

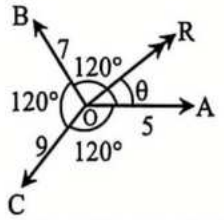
$\Rightarrow -2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{64}{25} - 1$ [$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$]

$\Rightarrow \sin2\alpha = \frac{-39}{25}$ [$\because \sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$]

এখানে, $\sin2\alpha$ এর মান -1 অপেক্ষা কম, যা সম্ভব নয়। অর্থাৎ, 8 N ও 5 N মানের দুটি বলের লব্ধি বৃহত্তর বলের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করা সম্ভব নয়। তাই এক্ষেত্রে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করাও সম্ভব নয়। **(Ans.)**

খ





মনে করি, XYZ সমবাহু ত্রিভুজের YZ, ZX এবং XY বাহুর সমান্তরালে 5, 7 এবং 9 একক মানের বল তিনটি O বিন্দুতে OA, OB এবং OC বরাবর কার্যরত। ধরি বলগুলোর লব্ধি R যা OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

এখন, OA এর আনুভূমিক বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = 5\cos0° + 7\cos120° + 9\cos240°$

$\Rightarrow R\cos\theta = 5 + 7 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 9\left(\frac{-1}{2}\right)$

$\Rightarrow R\cos\theta = 5 - \frac{7}{2} - \frac{9}{2}$

$\therefore R\cos\theta = -3$ ......(i)

এবং OA এর লম্ব বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$R\sin\theta = 5\sin0° + 7\sin120° + 9\sin240°$

$\Rightarrow R\sin\theta = 5 \times 0 + 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 9 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow R\sin\theta = 0 + \frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$\therefore R\sin\theta = -\sqrt{3}$ .....(ii)

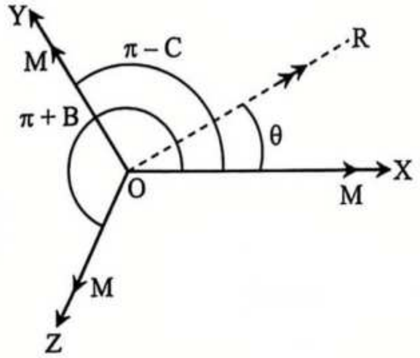
এখন, $(i)^2 + (ii)^2$ করে পাই,

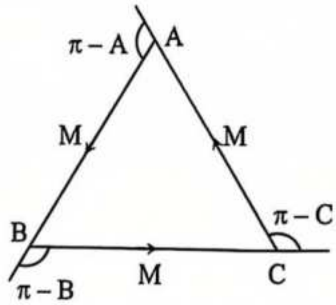
$R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (-3)^2 + (\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow R^2 = 9 + 3 = 12$

$\therefore R = 2\sqrt{3}$ একক **(Ans.)**

গ মনে করি, BC, CA ও AB বাহুর সমান্তরাল যথাক্রমে OX, OY ও OZ বরাবর সমান মানের M বল ক্রিয়ারত আছে এবং তাদের লব্ধি R বল OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।





এখন, OX এর আনুভূমিক বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = M\cos0° + M\cos(\pi - C) + M\cos(\pi + B)$

$\Rightarrow R\cos\theta = M(1 - \cos C - \cos B)$ ...... (i)

এবং OX এর লম্ব বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$R\sin\theta = M\sin0° + M\sin(\pi - C) + M\sin(\pi + B)$

$\Rightarrow R\sin\theta = M(\sin C - \sin B)$....... (ii)

এখন, $(i)^2 + (ii)^2$ করে পাই,

$R^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = M^2[(1 - \cos C - \cos B)^2 + (\sin C - \sin B)^2]$

$\Rightarrow R^2 = M^2[1 + \cos^2C + \cos^2B - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos B\cos C + \sin^2C + \sin^2B - 2\sin B\sin C]$

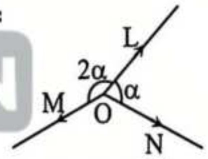
$\Rightarrow R^2 = M^2[1 + \cos^2C + \cos^2B + \sin^2B + \sin^2C - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos B\cos C - 2\sin B\sin C]$

$\Rightarrow R^2 = M^2[1 + 1 + 1 - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos(B + C)]$

$\Rightarrow R^2 = M^2[3 - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos(\pi - A)]$

$\Rightarrow R = M\sqrt{3 - 2\cos C - 2\cos B - 2\cos A}$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▸৩ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $2l$ দীর্ঘ এবং P ওজনবিশিষ্ট একটি সুষম তক্তা d দূরত্বে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে অবস্থিত। একে না উল্টিয়ে এর দুই প্রান্তে পর্যায়ক্রমে Q এবং R ওজন ঝুলানো যায়।

(ক) 7 ও 8 কিলোগ্রাম ওজনের দুইটি বলের লব্ধি 13 কিলোগ্রাম হলে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে L, M, N বল তিনটি O বিন্দুতে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে। প্রমাণ কর যে, $N^2 = M(M - L)$ [রা. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে প্রমাণ কর যে, $\frac{Q}{P + Q} + \frac{R}{P + R} = \frac{d}{l}$ [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩]

সমাধান:

ক ধরি, বলদ্বয় $P = 7$ kg-wt ; $Q = 8$ kg-wt

এবং লব্ধি $R = 13$ kg-wt

বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$

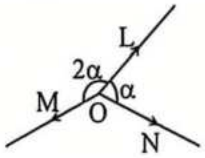
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{R^2 - P^2 - Q^2}{2PQ}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{13^2 - 7^2 - 8^2}{2 \times 7 \times 8}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos60°$

$\therefore \theta = 60°$ **(Ans.)**

খ এখানে, L, M, N বল তিনটি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে। L ও N এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $= \alpha$, L ও M এর অন্তর্ভুক্ত কোণ 2α এবং M ও N এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $= 360° - 3\alpha$



এখন, O বিন্দুতে লামির উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{L}{\sin(360° - 3\alpha)} = \frac{M}{\sin\alpha} = \frac{N}{\sin2\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{-\sin3\alpha} = \frac{M}{\sin\alpha} = \frac{N}{\sin2\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{-(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)} = \frac{M}{\sin\alpha} = \frac{N}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{4\sin^2\alpha - 3} = \frac{M}{1} = \frac{N}{2\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{1 - 4\cos^2\alpha} = \frac{M}{1} = \frac{N}{2\cos\alpha} \quad [\because \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1]$$

$\therefore N = 2M\cos\alpha$ ...... (i)

আবার, $N = \frac{2L\cos\alpha}{1 - 4\cos^2\alpha}$ ..... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ গুণ করে পাই,

$$N^2 = \frac{4LM\cos^2\alpha}{1 - 4\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow 4\,LM\cos^2\alpha = N^2 - 4N^2\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow N^2 = 4LM\cos^2\alpha + 4N^2\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow N^2 = 4\cos^2\alpha\,(LM + N^2)$$

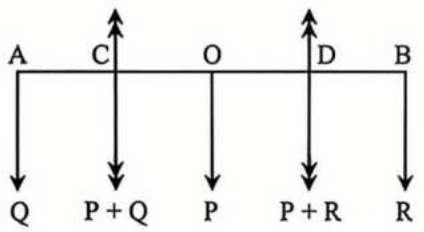
$$\Rightarrow N^2 = \frac{N^2}{M^2}(LM + N^2) \text{ ..... } [\because N = 2M\cos\alpha]$$

$$\Rightarrow M^2 = LM + N^2$$

$$\Rightarrow N^2 = M^2 - LM$$

$\therefore N^2 = M(M - L)$ **(Proved)**

গ



মনে করি, $AB = 2l$, তক্তার ওজন P এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়ারত এবং খুঁটি দুটি C ও D বিন্দুতে অবস্থিত। যেখানে $CD = d$। তাহলে $AO = BO = l$। তক্তাটি না উল্টিয়ে A প্রান্তে সর্বাধিক Q ওজন স্থাপন করলে D বিন্দুতে অবস্থিত খুঁটির উপর চাপ শূন্য হবে এবং C বিন্দুতে অবস্থিত খুঁটির উপর চাপ $(P + Q)$ হবে। এক্ষেত্রে A ও O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি $(P + Q)$ এবং C বিন্দুতে অবস্থিত খুঁটির উপর চাপ পরস্পর সমান ও একই রেখা বরাবর পরস্পর বিপরীতমুখী হবে।

$\therefore P.CO = Q.AC$

$$\Rightarrow \frac{P}{AC} = \frac{Q}{CO} = \frac{P+Q}{AO}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{CO} = \frac{P+Q}{AO}$$

$$\Rightarrow CO = \frac{Q}{P+Q}.OA = \frac{Ql}{P+Q}$$

অনুরূপভাবে, B প্রান্তে সর্বাধিক R ওজন স্থাপন করলে C বিন্দুতে অবস্থিত খুঁটির উপর চাপ শূন্য হবে এবং D বিন্দুতে অবস্থিত খুঁটির উপর চাপ $(P + R)$ হবে। এক্ষেত্রে B ও O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি $(P + R)$ এবং D বিন্দুতে অবস্থিত খুঁটির উপর চাপ পরস্পর সমান ও একই রেখা বরাবর পরস্পর বিপরীতমুখী হবে।

$\therefore P.DO = R.BD$

$$\Rightarrow \frac{P}{BD} = \frac{R}{DO} = \frac{P+R}{BO}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{DO} = \frac{P+R}{BO}$$

$$\Rightarrow DO = \frac{R}{P+R}.BO = \frac{Rl}{P+R}$$

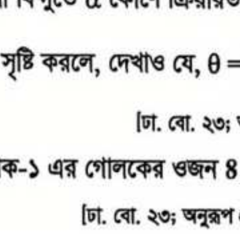
এখন, $d = CD = CO + DO$

$$= \frac{Ql}{P+Q} + \frac{Rl}{P+R}$$

$\therefore \frac{Q}{P+Q} + \frac{R}{P+R} = \frac{d}{l}$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ৪ উদ্দীপক-১: x cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সুতার একপ্রান্ত একটি উল্লম্ব দেওয়ালে আটকানো এবং অন্য প্রান্ত x cm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের সাথে যুক্ত আছে।

উদ্দীপক-২:



(ক) কোনো বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত P মানের দুইটি সমান বলের লব্ধি θ কোণ সৃষ্টি করলে, দেখাও যে, $\theta = \frac{\alpha}{2}$।

[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২, ১৯; কু. বো. ১৭]

(খ) উদ্দীপক-১ এর গোলকের ওজন 8 kg হলে সুতার টান নির্ণয় কর।

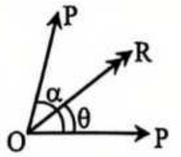
[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দ. বো. ২৩; ম. বো. ২১; রা. বো. ২১]

(গ) উদ্দীপক-২ এর বলত্রয় সদৃশ সমান্তরাল এবং I বিন্দুটি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র হলে, প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = a : b : c$।

[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২; রা. বো. ২১; কু. বো. ১৭]

সমাধানঃ

ক ধরি, P মানের দুটি সমান বল পরস্পর α কোণে O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং এদের লব্ধি R, P এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

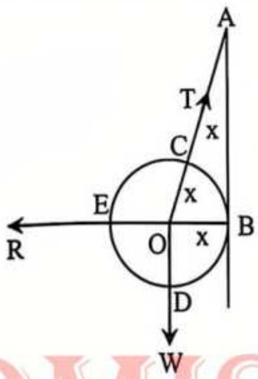


$$\therefore \tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P + P\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$\therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$ **(Showed)**

খ চিত্রে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট গোলকের ওজন $W = 8\text{ kg} = (8 \times 9.8)\text{ N}$
$= 78.4\text{ N}$

W ওজনটি OD বরাবর ক্রিয়ারত। গোলকটি একটি উলম্ব দেওয়ালের B বিন্দুতে স্পর্শ করে। AC = x cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সুতার C প্রান্ত গোলকের ওপর এবং A প্রান্ত দেওয়ালে আটকানো আছে। গোলকের উপর দেয়ালের প্রতিক্রিয়া বল R, BE বরাবর ক্রিয়াশীল।



গোলকের ওজন W = 78.4 N, যা OD বরাবর ক্রিয়াশীল।

এখানে, $OB = x$; $OA = OC + AC = x + x = 2x$

$\therefore AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3}x$

ধরি, সুতার টান T, CA বরাবর ক্রিয়াশীল। O বিন্দুতে T, R, W বলত্রয় ভারসাম্য সৃষ্টি করে।

$\therefore$ লামির উপপাদ্য অনুসারে,

$$\frac{W}{\sin(R \wedge T)} = \frac{R}{\sin(T \wedge W)} = \frac{T}{\sin(W \wedge R)}$$

$$\Rightarrow \frac{W}{\sin\angle AOE} = \frac{R}{\sin\angle AOD} = \frac{T}{\sin\angle EOD}$$

$$\therefore \frac{W}{\sin(180^\circ - \angle AOB)} = \frac{T}{\sin 90^\circ}$$

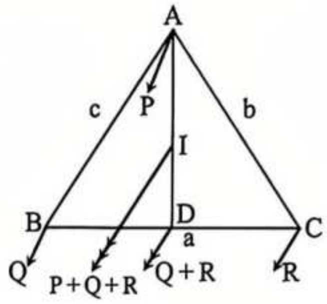
$$\Rightarrow T = \frac{78.4\text{ N}}{\sin\angle AOB}$$

$$\Rightarrow T = \frac{78.4\text{ N}}{\frac{AB}{OA}} = \frac{78.4\text{ N} \times OA}{AB} = \frac{78.4 \times 2x}{\sqrt{3}x} = 90.53\text{ N}$$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I। আবার, ABC ত্রিভুজের A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। এখন B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R সদৃশ সমান্তরাল বল দুইটির লব্ধি (Q + R), BC রেখাস্থ কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।

আবার বলত্রয়ের লব্ধি (P + Q + R), I বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

সুতরাং (Q + R) বলটি AI তথা AID রেখাস্থ কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। অতএব, (Q + R) বলটি BC ও AD এর ছেদ বিন্দু D তে ক্রিয়া করবে।



এখানে, $Q \times BD = R \times CD$

$\Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD}$ ..... (i)

প্রশ্নমতে, AD রেখা $\angle A$ কোণের সমদ্বিখন্ডক

$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$

[ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তর্দ্বিখন্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অর্ন্তবিভক্ত করে]

$\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$ ...... (ii)

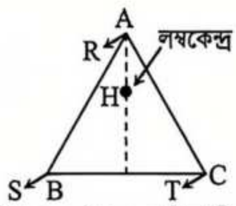
(i) ও (ii) হতে পাই, $\frac{Q}{R} = \frac{b}{c}$ অর্থাৎ $\frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{P}{a} = \frac{R}{c}$

অতএব, $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$

$\therefore P : Q : R = a : b : c$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▸ ৫ উদ্দীপক-১:



উদ্দীপক-২: কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল **P** এবং **Q(P > Q)** দুটি বলের লব্ধি **P** বলের সাথে **60°** কোণ উৎপন্ন করে। **P** বলকে দ্বিগুণ করলে উক্ত কোণটি পূর্বের কোণের অর্ধেক হয়।

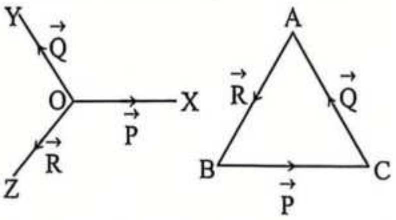
(ক) তিনটি বলের মান ও দিক **ABC** ত্রিভুজের বাহু বরাবর একইক্রমে গৃহীত হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে বলত্রয়ের লব্ধি নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩]

(খ) ১নং চিত্রে **R, S, T** বলত্রয়ের লব্ধি **H** বিন্দুগামী হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{tanA}} = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{tanB}} = \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{tanC}}$ [চ. বো. ২৩]

(গ) **P** এবং **Q** বলের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২২]

সমাধান:

ক মনে করি, O বিন্দুতে OX, OY ও OZ বরাবর কার্যরত যথাক্রমে $\vec{P}, \vec{Q}$ ও $\vec{R}$ বল তিনটিকে ABC ত্রিভুজের যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহু দ্বারা মানে ও দিকে একই ক্রমে সূচিত করা যায়।



এখন, $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$

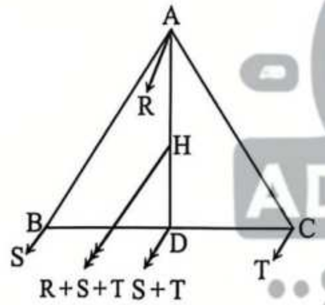
$= (\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$ [বল সংযোজনের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী]

$= -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB} = 0$

$\therefore \vec{P}+\vec{Q}+\vec{R} = 0$, অর্থাৎ বলত্রয়ের লব্ধি শূন্য। **(Ans.)**

খ ABC ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র H, বর্ধিত AH রেখা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।



এখন, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত S ও T বলদ্বয়ের লব্ধি BC রেখার উপরস্থ কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

আবার, বল তিনটির লব্ধি (R + S + T), H বিন্দুতে এবং R বলটি A বিন্দুতে ক্রিয়া করে। কাজেই S এবং T এর লব্ধি (S + T) বলটি BC এবং AHD রেখার ছেদবিন্দু D তে ক্রিয়া করবে।

$S.BD = T.CD$

$\Rightarrow \frac{S}{T} = \frac{CD}{BD} = \frac{\frac{CD}{AD}}{\frac{BD}{AD}} = \frac{\cot C}{\cot B} = \frac{\tan B}{\tan C}$

$\Rightarrow \frac{S}{T} = \frac{\tan B}{\tan C}$

$\Rightarrow \frac{S}{\tan B} = \frac{T}{\tan C}$ ......(i)

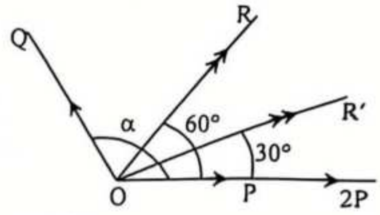
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$\frac{R}{\tan A} = \frac{S}{\tan B}$ ......(ii)

তাহলে (i) ও (ii) নং হতে পাই,

$\frac{R}{\tan A} = \frac{S}{\tan B} = \frac{T}{\tan C}$ **(Proved)**

গ ধরি, P ও Q বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α এবং এদের লব্ধি R বা P বলের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore \tan 60° = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ ......(i)

আবার, P বলকে দ্বিগুণ করলে অর্থাৎ 2P হলে লব্ধি R′ যা 2P বলের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan 30° = \frac{Q\sin\alpha}{2P+Q\cos\alpha}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{Q\sin\alpha}{2P+Q\cos\alpha}$ ....(ii)

(i) ÷ (ii) করে পাই,

$\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} \div \frac{Q\sin\alpha}{2P+Q\cos\alpha}$

$= \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} \times \frac{2P+Q\cos\alpha}{Q\sin\alpha}$

$\Rightarrow 3 = \frac{2P+Q\cos\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

$\Rightarrow 3P+3Q\cos\alpha = 2P+Q\cos\alpha$

$\Rightarrow P = -2Q\cos\alpha$ .....(iii)

(i) নং সমীকরণে $P = -2Q\cos\alpha$ বসিয়ে পাই,

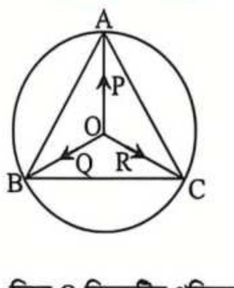
$\sqrt{3} = \frac{Q\sin\alpha}{-2Q\cos\alpha+Q\cos\alpha} = \frac{Q\sin\alpha}{-Q\cos\alpha}$

$\Rightarrow \tan\alpha = -\sqrt{3} = -\tan 60°$

$\Rightarrow \tan\alpha = \tan(180° - 60°) = \tan 120°$

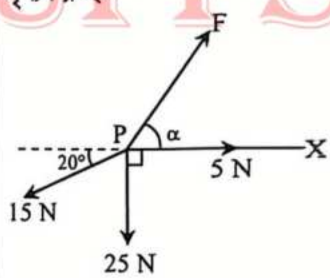
$\therefore \alpha = 120°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ দৃশ্যকল্প-১:



চিত্রে O ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র

দৃশ্যকল্প-২:



চিত্র-১

(ক) দুইটি সমান বলের লব্ধির বর্গ, বল দুইটির গুণফলের তিন গুণের সমান হলে, বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ P, Q ও R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ কর যে, $\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(a^2+c^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$ [সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বলগুলো P বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় থাকলে F এবং α এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২২]

সমাধান:

ক ধরি, সমান বলদ্বয় $= P$

লব্ধি $= R$

বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ α

শর্তমতে, $R^2 = 3P \times P$

$\Rightarrow P^2 + P^2 + 2P \times P\cos\alpha = 3P^2$

$\Rightarrow 2P^2 \cos\alpha = 3P^2 - 2P^2$

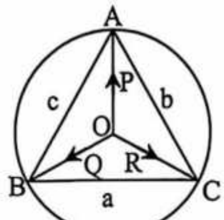
$\Rightarrow 2P^2 \cos\alpha = P^2$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \alpha = 60°$ **(Ans.)**

খ এখানে, ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র O।
OA, OB, OC বরাবর P, Q, R বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা তৈরি করেছে।
সাম্যাবস্থায় লামির সূত্র হতে পাই,



$$\frac{P}{\sin\angle BOC} = \frac{Q}{\sin\angle AOC} = \frac{R}{\sin\angle AOB}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin 2\angle BAC} = \frac{Q}{\sin 2\angle ABC} = \frac{R}{\sin 2\angle ACB}$$

[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2\sin A\cos A} = \frac{Q}{2\sin B\cos B} = \frac{R}{2\sin C\cos C}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\frac{a}{R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \frac{Q}{\frac{b}{R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}} = \frac{R}{\frac{c}{R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

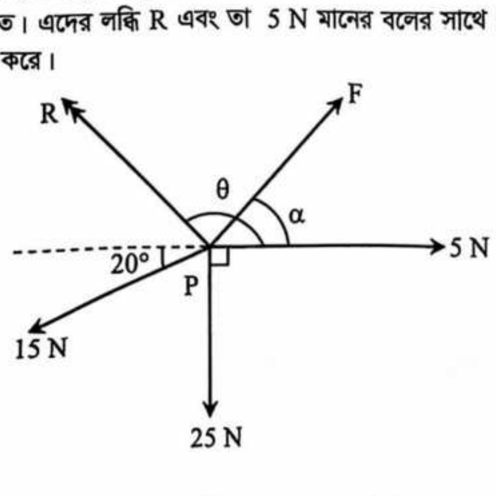
$$\left[\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ এবং } \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{abc}} = \frac{Q}{\frac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{abc}} = \frac{R}{\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{abc}}$$

$$\therefore \frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(a^2+c^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

(Proved)

গ মনে করি, 5 N, F N, 15 N ও 25 N মানের বলগুলো P বিন্দুতে ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি R এবং তা 5 N মানের বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



এখন, 5 N বলের অনুভূমিক বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = 5\cos0° + F\cos\alpha + 15\cos(180° + 20°) + 25\cos270°$

$= 5 + F\cos\alpha - 14.095 + 0$

$\therefore R\cos\theta = F\cos\alpha - 9.095$ ..... (i)

এবং 5 N বলের উল্লম্ব বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$R\sin\theta = 5\sin0° + F\sin\alpha + 15\sin(180° + 20°) + 25\sin270°$

$= 0 + F\sin\alpha - 5.13 + 25(-1)$

$= 0 + F\sin\alpha - 5.13 - 25$

$\therefore R\sin\theta = F\sin\alpha - 30.13$ ..... (ii)

যেহেতু বলগুলো P বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় আছে,

$\therefore$ লব্ধি, $R = 0$

$\therefore$ (i) নং ও (ii) নং হতে পাই, $0 = F\cos\alpha - 9.095$

$\Rightarrow F\cos\alpha = 9.095$ .... (iii)

এবং $0 = F\sin\alpha - 30.13$

$\Rightarrow F\sin\alpha = 30.13$....(iv)

(iv) ÷ (iii) করে পাই,

$\tan\alpha = \frac{30.13}{9.095} = 3.313$

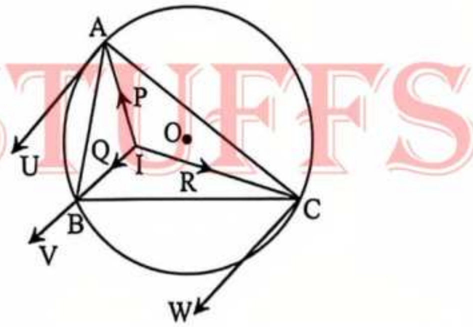
$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(3.313)$

$\therefore \alpha = 73.20°$(প্রায়) **(Ans.)**

α এর মান (iii) এ বসিয়ে পাই,

$F = \frac{9.095}{\cos73.20°} = 31.47$ N (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭



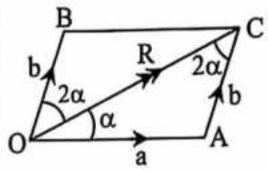
(ক) যদি কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত a ও b (a > b) বলের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে, তবে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২৩]

(খ) উদ্দীপকে অন্তঃকেন্দ্র **I** গামী **P, Q, R** বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $P : Q : R = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) : \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) : \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$ [ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২]

(গ) উদ্দীপকের **P, Q, R** বলগুলো ক্রিয়া না করলে, শুধুমাত্র **A, B, C** বিন্দুতে ক্রিয়ারত **U, V, W** মানের সদৃশ, সমান্তরাল বলের লব্ধি পরিকেন্দ্র **O** গামী হলে প্রমাণ কর যে, **U : V : W = acosA : bcosB : ccosC** [ব. বো. ২৩]

সমাধানঃ

ক মনে করি, a ও b বলদ্বয় যথাক্রমে OA ও OB বরাবর 3α কোণে ক্রিয়ারত এবং এদের লব্ধি R, OA রেখার সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore \angle AOC = \alpha$ হলে $\angle BOC = 2\alpha = \angle OCA$

এখন, AOC ত্রিভুজ হতে সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\pi - 3\alpha)} \text{ .... (i)}$$

১ম ও ২য় অনুপাত হতে পাই,

$$\frac{a}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2\cos\alpha} = b$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{a}{2b}$$

$$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a}{2b}\right)$$

$\therefore$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $= 3\alpha = 3\cos^{-1}\left(\frac{a}{2b}\right)$ **(Ans.)**

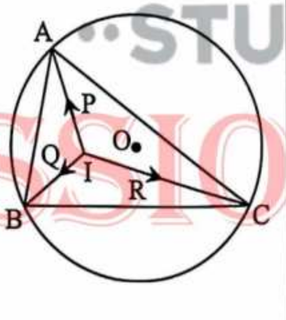
খ ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দুতে IA, IB, IC বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P, Q, R বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে। কাজেই লামির সূত্র অনুযায়ী,

$$\frac{P}{\sin\angle BIC} = \frac{Q}{\sin\angle AIC} = \frac{R}{\sin\angle AIB} \text{ ...... (i)}$$

এখানে, $\angle ABI = \angle CBI = \frac{B}{2}$ [যেহেতু, I অন্তঃকেন্দ্র]

$\angle BCI = \angle ACI = \frac{C}{2}$

$\angle CAI = \angle BAI = \frac{A}{2}$



$$\therefore \angle BIC = \pi - \frac{B}{2} - \frac{C}{2}$$

$$= \pi - \frac{1}{2}(B + C)$$

$$= \pi - \frac{1}{2}(\pi - A)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$$

অনুরূপভাবে, $\angle AIB = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}$ এবং $\angle AIC = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}$

$\therefore$ (i) নং হতে, $\dfrac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right)} = \dfrac{Q}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} = \dfrac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}\right)}$

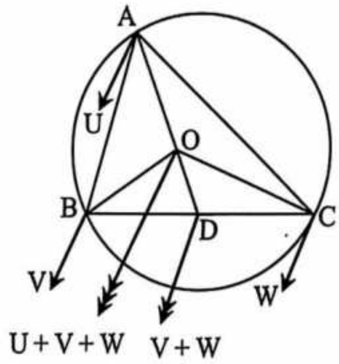
$$\Rightarrow \frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$$

$$\therefore P : Q : R = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) : \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) : \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

(Showed)

গ



মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং বর্ধিত AO রেখা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত V এবং W এর লব্ধি BC রেখাস্থ কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।

আবার, তিনটি বলের লব্ধি O বিন্দুতে এবং U বলটি A বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে, V এবং W এর লব্ধি BC এবং AOD রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু D তে ক্রিয়ারত হবে।

$$\therefore V.BD = W.CD$$

$$\Rightarrow \frac{V}{W} = \frac{CD}{BD} \text{ .... (i)}$$

এখন, BOD ত্রিভুজে $\dfrac{BD}{\sin BOD} = \dfrac{BO}{\sin BDO}$

এবং COD ত্রিভুজে $\dfrac{CD}{\sin COD} = \dfrac{CO}{\sin CDO}$

কিন্তু $BO = CO$ এবং $\sin BDO = \sin CDO$

[$\because BDO = \pi - CDO$ এবং $BO = CO = r$]

$$\therefore \frac{BD}{\sin BOD} = \frac{CD}{\sin COD}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{\sin COD}{\sin BOD}$$

$\Rightarrow \dfrac{V}{W} = \dfrac{\sin COD}{\sin BOD}$ [(i) নং হতে]

$$\Rightarrow \frac{V}{W} = \frac{\sin(180° - COA)}{\sin(180° - AOB)} = \frac{\sin COA}{\sin AOB}$$

বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ বলে $\angle COA = 2B$ এবং $\angle AOB = 2C$

$$\therefore \frac{V}{W} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C} = \frac{2\sin B.\cos B}{2\sin C.\cos C}$$

$\Rightarrow \dfrac{V}{W} = \dfrac{b\cos B}{c\cos C}$ .... (ii) $\left[\because \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R\right]$

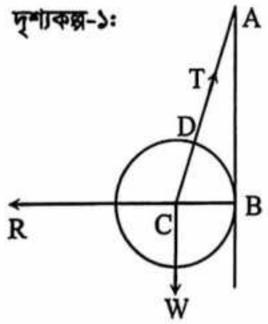
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{U}{V} = \frac{a\cos A}{b\cos B} \text{ .... (iii)}$$

সুতরাং (ii) ও (iii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$U : V : W = a\cos A : b\cos B : c\cos C$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ৮ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: 16 মিটার দীর্ঘ 18 কেজি ওজনের একটি সুষম তক্তা দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে স্থির আছে। একটি খুঁটি A প্রান্ত এবং অপরটি B প্রান্ত হতে 2 মিটার ভিতরে অবস্থিত।

(ক) একজন ফেরিওয়ালা একটি লাঠি কাঁধের উপর অনুভূমিকভাবে রেখে এর এক প্রান্তে হাত রেখে অপর প্রান্তে 12 কেজি ওজনের একটি বস্তু বহন করছে। যদি তার কাঁধ হতে বস্তু ও হাতের দূরত্ব যথাক্রমে 2 মিটার ও 3 মিটার হয়, তবে কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২৩]

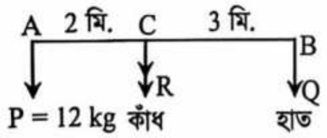
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ CD = r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের এক প্রান্ত AD = l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি অপ্রসারণশীল সুতার সাহায্যে কোনো খাড়া দেওয়ালে আটকানো। এটি দেওয়ালকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে। প্রমাণ কর যে, দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া বল, $R = \frac{Wr}{\sqrt{2rl + l^2}}$

[দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩; ম. বো. ২১; রা. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে একজন বালক তক্তাটিকে না উল্টিয়ে এর উপর দিয়ে B প্রান্তে পৌছালে বালকের ওজন কত? [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ১৭]

সমাধান:

ক



চিত্র হতে, ফেরিওয়ালা হাত দ্বারা Q ওজনের চাপ প্রয়োগ করলে,

$P \times AC = Q \times BC$

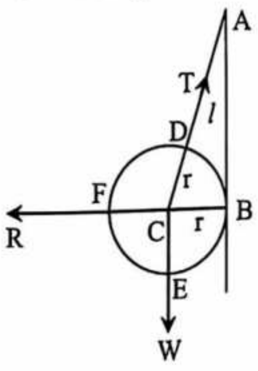
$\Rightarrow Q = \frac{P \times AC}{BC} = \frac{12 \times 2}{3}$

$\therefore Q = 8$ kg

$\therefore$ C বিন্দুতে কাঁধের উপর লব্ধি ওজন,

$R = P + Q = 12$ kg + 8 kg = 20 kg **(Ans.)**

খ চিত্রে, CD = r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের এক প্রান্ত AD = l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি অপ্রসারণশীল সুতার সাহায্যে কোনো খাড়া দেওয়ালে আটকানো। এটি দেওয়ালকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে।



গোলকের ওজন W যা CE বরাবর ক্রিয়াশীল। দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া বল R, BC বরাবর ক্রিয়াশীল।

C বিন্দুতে T, R, W বলত্রয় ভারসাম্য সৃষ্টি করে।

$\therefore$ লামির উপপাদ্য অনুসারে,

$$\frac{W}{\sin(R \wedge T)} = \frac{R}{\sin(T \wedge W)} = \frac{T}{\sin(W \wedge R)}$$

$$\Rightarrow \frac{W}{\sin\angle ACF} = \frac{R}{\sin\angle ACE} = \frac{T}{\sin\angle FCE}$$

$$\therefore \frac{W}{\sin(\angle 180° - \angle ACB)} = \frac{R}{\sin(90° + \angle ACB)}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{\cos\angle ACB} = \frac{W}{\sin\angle ACB}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{\frac{CB}{AC}} = \frac{W}{\frac{AB}{AC}}$$

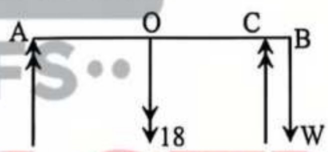
$$\Rightarrow \frac{R}{CB} = \frac{W}{AB}$$

$$\Rightarrow R = \frac{W \times CB}{AB} = \frac{W \times r}{\sqrt{AC^2 - CB^2}} \quad [\because CB = r]$$

$$\Rightarrow R = \frac{Wr}{\sqrt{(l+r)^2 - r^2}} = \frac{Wr}{\sqrt{l^2 + 2rl + r^2 - r^2}}$$

$$\therefore R = \frac{Wr}{\sqrt{2rl + l^2}}$$ **(Proved)**

গ



মনে করি, AB সুষম তক্তার ওজন এর মধ্যবিন্দু O হতে নিম্নদিকে ক্রিয়াশীল। খুঁটি দুইটি A ও C বিন্দুতে অবস্থিত।

যেখানে, AB = 16 মিটার

BC = 2 মিটার

$\therefore OA = OB = \frac{16}{2}$ মিটার = 8 মিটার

OC = (8 – 2) মি. = 6 মি.

বালকটি তক্তা না উল্টিয়ে B প্রান্তে পৌছালে A বিন্দুর খুঁটিতে বলের পরিমাণ শূন্য।

ধরি, বালকটির ওজন W, যা B বিন্দুতে নিচের দিকে কার্যরত। সাম্যাবস্থার জন্য O এবং B তে কার্যরত ওজনদ্বয়ের লব্ধি (18 + W), C বিন্দুতে ক্রিয়া করবে,

$\therefore 18.OC = W.BC$

$\Rightarrow 18 \times 6 = W \times 2$

$\Rightarrow W = 54$ কেজি **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯ দৃশ্যকল্প-১: একটি সুষম রডের একপ্রান্তে 10 কেজি ওজনের একটি বস্তু ঝুলানো হলে ঐ প্রান্ত হতে 2 মিটার দূরে একটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে স্থির থাকে।

দৃশ্যকল্প-২: একটি হেলানো মসৃণ সমতলের দৈর্ঘ্য ও ভূমির সমান্তরাল বরাবর যথাক্রমে F_1 ও F_2 বলদ্বয় ক্রিয়ারত থেকে প্রত্যেকে এককভাবে তলের উপরস্থ W ওজনের একটি বস্তুকে স্থিরভাবে ধরে রাখতে পারে।

(ক) α কোণে ক্রিয়ারত 3 ও 2 একক মানের বলদ্বয়ের লব্ধি R এবং একই কোণে ক্রিয়ারত 6 ও 2 একক মানের বলদ্বয়ের লব্ধি 2R. α এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে, খুঁটির উপর চাপের পরিমাণ 40 কেজি ওজন হলে রডের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ম. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে, প্রমাণ কর যে, $W = \dfrac{F_1F_2}{\sqrt{F_2^2 - F_1^2}}$

[ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. কু. বো. চ. বো. ব. বো-১৮]

সমাধান:

ক এখানে, α কোণে ক্রিয়ারত 3 ও 2 একক মানের বলদ্বয়ের লব্ধি R

$\therefore R^2 = 3^2 + 2^2 + 2 \times 3 \times 2\cos\alpha$

$\therefore R^2 = 13 + 12\cos\alpha$ ..... (i)

আবার, α কোণে ক্রিয়ারত 6 ও 2 একক মানের বলদ্বয়ের লব্ধি 2R

$\therefore (2R)^2 = 6^2 + 2^2 + 2 \times 6 \times 2\cos\alpha$

$\Rightarrow 4R^2 = 36 + 4 + 24\cos\alpha$

$\Rightarrow 4(13 + 12\cos\alpha) = 40 + 24\cos\alpha$ [(i) নং ব্যবহার করে]

$\Rightarrow 13 + 12\cos\alpha - 6\cos\alpha = 10$

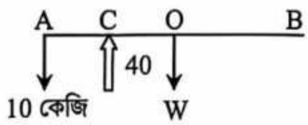
$\Rightarrow 6\cos\alpha = -3$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{3}{6}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{2} = \cos 120°$

$\therefore \alpha = 120°$ **(Ans.)**

খ মনে করি, AB সুষম রডের মধ্যবিন্দু O এবং ওজন W কেজি যা O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। A প্রান্তে 10 কেজি ওজন ঝুলানো হলে A হতে 2 মিটার দূরে C বিন্দুতে একটি খুঁটির উপর রডটি অনুভূমিকভাবে স্থির থাকে এবং ঐ খুঁটির উপর চাপের পরিমাণ 40 কেজি ওজন হয়।



$\therefore AC = 2$ মিটার।

এবং $10 + W = 40$

$\Rightarrow W = 30$ কেজি।

আবার,

W ও 10 মানের সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

তাই $10.AC = W.CO = 30(AO - AC)$

$\Rightarrow 10 \times 2 = 30.(AO - 2)$

$\Rightarrow 20 + 60 = 30.AO$

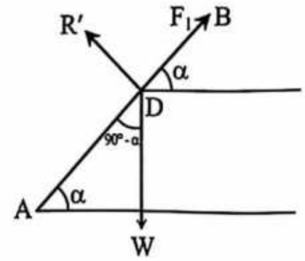
$\Rightarrow AO = \dfrac{80}{30} = \dfrac{8}{3}$ মিটার

$\Rightarrow AB = 2AO = \dfrac{8}{3} \times 2 = \dfrac{16}{3}$ মিটার **(Ans.)**

গ ধরি, α কোণে আনত AB তলের উপর F_1 ও F_2 বলদ্বয় যথাক্রমে হেলানো মসৃণ সমতলের দৈর্ঘ্য ও ভূমির সমান্তরাল বরাবর ক্রিয়া করে। তলের উপরস্থ W ওজনের একটি বস্তুকে পৃথকভাবে, F_1 ও F_2 সুস্থিত রাখে। ধরি তলের প্রতিক্রিয়া R ও R′; যা তলের উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়াকরে, যেহেতু তল মসৃণ।

$\therefore$ লামির উপপাদ্য অনুসারে পাই,

প্রথম ক্ষেত্রে:



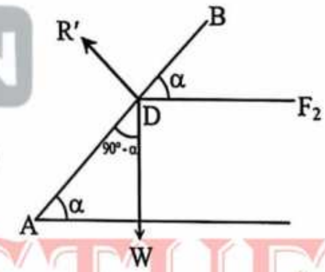
$$\frac{F_1}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{W}{\sin 90°} = \frac{R}{\sin(90° + \alpha)}$$

$\Rightarrow \dfrac{F_1}{\sin\alpha} = \dfrac{W}{1} = \dfrac{R}{\cos\alpha}$

$\therefore \dfrac{F_1}{\sin\alpha} = W$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{W}{F_1}$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে:



$$\frac{F_2}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{W}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{R'}{\sin 90°}$$

$\Rightarrow \dfrac{F_2}{\sin\alpha} = \dfrac{W}{\cos\alpha} = \dfrac{R'}{1}$

$\therefore \dfrac{F_2}{\sin\alpha} = \dfrac{W}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{W}{F_2}$

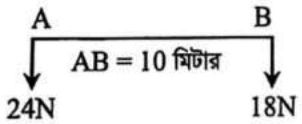
$\therefore \operatorname{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha = \dfrac{W^2}{F_1^2} - \dfrac{W^2}{F_2^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{W^2}(\operatorname{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha) = \dfrac{1}{F_1^2} - \dfrac{1}{F_2^2}$

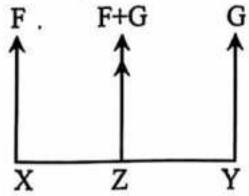
$\Rightarrow \dfrac{1}{W^2} = \dfrac{F_2^2 - F_1^2}{F_2^2F_1^2}$

$\therefore W = \dfrac{F_1F_2}{\sqrt{F_2^2 - F_1^2}}$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ১০ **দৃশ্যকল্প-১:**



দৃশ্যকল্প-২:



(ক) কোনো বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত P মানের দুইটি সমান বলের লব্ধির মান নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ১৯; ঢা. বো. য. বো. সি. বো. দি. বো.-১৮]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ নির্দেশিত সদৃশ, সমান্তরাল বলদ্বয় পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর d দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ কর যে, $d = \frac{10}{7}$ মিটার। [রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২; চ. বো. ২২, ১৯; য. বো. ২১; ম. বো. ১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত সমান্তরাল বলদ্বয়ের ক্রিয়াবিন্দুর অবস্থান বিনিময় করলেও যদি তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দুর অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে তবে দেখাও যে, F = G [কু. বো. ২২]

সমাধান:

ক ধরি, কোনো বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত P মানের সমান বলদ্বয়ের লব্ধি R।

$\therefore R^2 = P^2 + P^2 + 2.P.P\cos\alpha$

$= 2P^2 + 2P^2\cos\alpha$

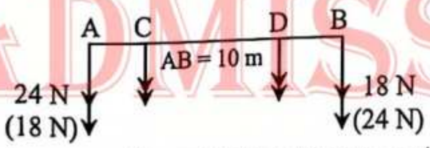
$= 2P^2(1 + \cos\alpha)$

$= 2P^2.2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow R^2 = 4P^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\therefore R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$ **(Ans.)**

খ



এখানে, A ও B বিন্দুতে 24 N ও 18 N মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়াশীল এবং AB = 10 মিটার।

A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করলে,

$24.AC = 18.BC$

$\Rightarrow \frac{24}{BC} = \frac{18}{AC} = \frac{24+18}{BC+AC} = \frac{42}{AB}$

$\Rightarrow \frac{18}{AC} = \frac{42}{10}$

$\therefore AC = \frac{30}{7}$

আবার, A বিন্দুতে 18 N, B বিন্দুতে 24 N বলের লব্ধি CD = d দূরত্বে D বিন্দুতে ক্রিয়া করলে,

$18.AD = 24.BD$

$\Rightarrow \frac{18}{BD} = \frac{24}{AD} = \frac{42}{BD+AD}$

$\Rightarrow \frac{24}{AD} = \frac{42}{10}$

$\therefore AD = \frac{40}{7}$

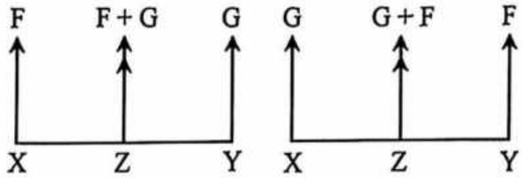
লব্ধির সরণ, $d = CD = AD - AC$

$= \frac{40}{7} - \frac{30}{7} = \frac{10}{7}$ মিটার। **(Proved)**

গ এখানে, X ও Y বিন্দুতে ক্রিয়ারত যথাক্রমে F ও G মানের সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু Z।

$\therefore F.XZ = G.YZ$

$\Rightarrow \frac{F}{G} = \frac{YZ}{XZ}$ ..... (i)



এখন, F ও G অবস্থান বিনিময় করলে অর্থাৎ, X বিন্দুতে G এবং Y বিন্দুতে F অবস্থান করলে লব্ধি Z বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

$\therefore G.XZ = F.YZ$

$\Rightarrow \frac{G}{F} = \frac{YZ}{XZ}$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$\frac{F}{G} = \frac{G}{F}$

$\Rightarrow F^2 = G^2$

$\therefore F = G$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▶ ১১ উদ্দীপক-১: **P, Q, R** বলত্রয় একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে। **P ও Q** এর মধ্যবর্তী কোণ **60°** এবং **P ও R** এর মধ্যবর্তী কোণ **150°**।

উদ্দীপক-২: **20** সে.মি. দীর্ঘ **AB** হাল্কা দণ্ডটি **10** সে.মি. ব্যবধানে দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে অবস্থিত। **A ও B** বিন্দুতে যথাক্রমে **2W** এবং **3W** ওজন ঝুলানো হলো।

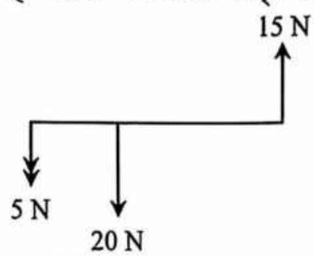
(ক) 15 N এবং 20 N ওজনের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত থাকলে, তাদের লব্ধি কত? [য. বো. ২২]

(খ) উদ্দীপক-১ হতে প্রমাণ কর যে, $P = Q = \frac{R}{\sqrt{3}}$ [য. বো. ২২]

(গ) উদ্দীপক-২ হতে খুঁটি দুইটির অবস্থান নির্ণয় কর। [য. বো. ২২]

সমাধান:

ক ধরি, P = 20 N, Q = 15 N এবং বলদ্বয় অসদৃশ সমান্তরাল।

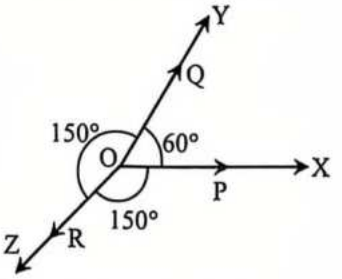


আমরা জানি, P ও Q দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি,

$R = P - Q$; $(P > Q)$

$\therefore R = (20 - 15)N = 5$ N **(Ans.)**

খ ধরি, P, Q, R বলত্রয় O বিন্দুতে OX, OY, OZ বরাবর ক্রিয়াশীল।



এখানে, $\angle XOY = 60°$, $\angle XOZ = 150°$

$\therefore \angle YOZ = 360° - (\angle XOZ + \angle XOY)$

$= 360° - (150° + 60°) = 150°$

$\therefore$ সাম্যাবস্থায় লামির উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{P}{\sin\angle YOZ} = \frac{Q}{\sin\angle XOZ} = \frac{R}{\sin\angle XOY}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin150°} = \frac{Q}{\sin150°} = \frac{R}{\sin60°}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin(180° - 30°)} = \frac{Q}{\sin(180° - 30°)} = \frac{R}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin30°} = \frac{Q}{\sin30°} = \frac{R}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\frac{1}{2}} = \frac{Q}{\frac{1}{2}} = \frac{R}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$\therefore P = Q = \frac{R}{\sqrt{3}}$ **(Proved)**

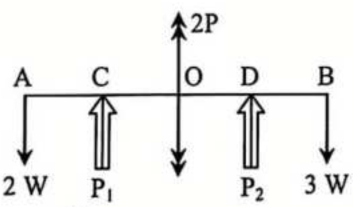
গ খুঁটিদ্বয়ের উপর চাপ সমান ধরে খুঁটি দুইটির অবস্থান নির্ণয় করা হয়েছে।

মনে করি, খুঁটি দুটি সমান চাপ প্রয়োগ করে।

P_1 ও P_2 এর লব্ধি $= P_1 + P_2$

$= P + P$

$= 2P$ [$\because P_1 = P_2 = P$] খাড়া উপরের দিকে ক্রিয়া করে (O বিন্দুতে)



এখানে, AB = 20 সে.মি.

$\therefore$ CD = 10 সে.মি. এবং CO = OD = 5 সে.মি.

আবার, যেহেতু 2W ও 3W বলদ্বয়ের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore 2.OA = 3.BO$

$\Rightarrow 2(AC + CO) = 3(OD + BD)$

$\Rightarrow 2AC + 2CO = 3OD + 3BD$

$\Rightarrow 2AC - 3BD = 3OD - 2CO = 15 - 10 = 5$ ..... (i)

এবং AB = 20

$\Rightarrow AC + CD + BD = 20$

$\Rightarrow AC + BD = 20 - CD$

$\Rightarrow AC + BD = 20 - 10 = 10$ .... (ii)

এখন, (ii) × 3 + (i) হতে পাই,

$$\begin{array}{rl} 3AC + 3BD &= 30 \\ 2AC - 3BD &= 5 \\ \hline 5AC \qquad &= 35 \end{array}$$

$\Rightarrow AC = \frac{35}{5} = 7$ সে. মি.

AC এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

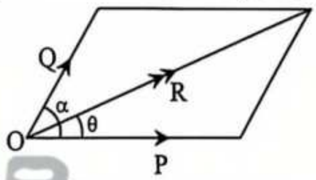
$7 + BD = 10$

$\Rightarrow BD = 10 - 7 = 3$ সে. মি.

খুঁটি দুটি যথাক্রমে 2W ওজনের ঝুলন বিন্দু A হতে 7 সে. মি. দূরত্বে এবং 3W ওজনের ঝুলন বিন্দু B হতে 3 সে. মি. দূরত্বে অবস্থিত। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১২ দৃশ্যকল্প-১: F_1 ও F_2 বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α; বলদ্বয় পরস্পর অবস্থান বিনিময় করলে তাদের লব্ধি θ কোণে সরে যায়।

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত 4N ও 8N মানের দুইটি বলের লব্ধি 4N বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হলে, তাদের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২২]

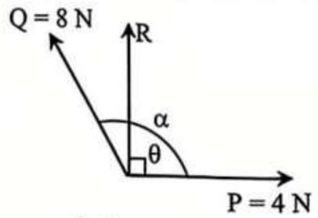
(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}\tan\frac{\alpha}{2}$ [চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ $\alpha = 3\theta$ হলে প্রমাণ কর যে, $R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$; $(P > Q)$ [ম. বো. ২২]

সমাধান:

ক ধরি, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α

এখানে, $\theta = 90°$



আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

$\tan90° = \frac{8\sin\alpha}{4 + 8\cos\alpha}$

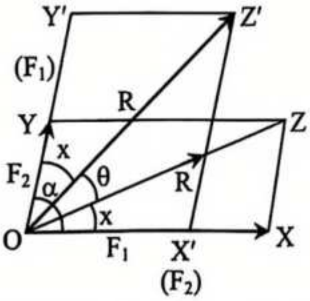
$\Rightarrow \frac{1}{0} = \frac{8\sin\alpha}{4 + 8\cos\alpha}$

$\Rightarrow 0 = 4 + 8\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} = \cos120°$

$\therefore \alpha = 120°$ **(Ans.)**

খ



ধরি, O বিন্দুতে OX বরাবর F_1, OY বরাবর F_2 বল ক্রিয়া করলে এদের লব্ধি R, OZ বরাবর ক্রিয়া করে। আবার বলদ্বয় অবস্থান পরিবর্তন করলে অর্থাৎ OX′ বরাবর F_2, OY′ বরাবর F_1 ক্রিয়া করলে লব্ধি R, OZ′ বরাবর ক্রিয়া করবে।

ধরি, প্রথম ক্ষেত্রে R লব্ধিটি F_1 এর সাথে x কোণ তৈরি করে। বলদ্বয় স্থান পরিবর্তন করার ফলে লব্ধিটি θ কোণে ঘুরে যায়।

$\therefore \angle ZOZ' = \theta$

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, লব্ধিটি F_1 এর সাথে x কোণ তৈরি করে।

$\therefore \angle XOZ = \angle Y'OZ' = x$

আবার, বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়া করে।

$\therefore x + \theta + x = \alpha$

$\Rightarrow 2x = \alpha - \theta \Rightarrow x = \dfrac{\alpha - \theta}{2}$

ত্রিভুজের sin বিধি অনুসারে,

$$\frac{F_1}{\sin\angle YOZ} = \frac{F_2}{\sin\angle XOZ} = \frac{R}{\sin\angle XOY}$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{\sin(\alpha - x)} = \frac{F_2}{\sin x} = \frac{R}{\sin\alpha}$$

এখন,

$$\frac{F_1}{\sin(\alpha - x)} = \frac{F_2}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\alpha - \theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha - \theta}{2}\right)} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + \theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha - \theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + \theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha - \theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha + \theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha - \theta}{2}\right)}$$ [বিয়োজন-যোজন করে]

$$\Rightarrow \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

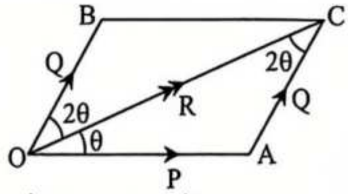
$$\Rightarrow \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} = \cot\frac{\alpha}{2} \cdot \tan\frac{\theta}{2}$$

$\therefore \tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} \tan\dfrac{\alpha}{2}$ **(Proved)**

গ দৃশ্যকল্প-২ এ দেওয়া আছে, $\alpha = 3\theta$

মনে করি, OA, OB বরাবর যথাক্রমে P, Q বলদ্বয় 3θ কোণে ক্রিয়ারত এবং লব্ধি R বল OA রেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



এখন, ত্রিভুজের সাইন সূত্রানুসারে পাই,

$$\frac{P}{\sin\angle BOC} = \frac{Q}{\sin\angle AOC} = \frac{R}{\sin\angle AOB}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin 2\theta} = \frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin 3\theta}$$

$\therefore$ ১ম ও ২য় অনুপাত হতে পাই, $\dfrac{P}{\sin 2\theta} = \dfrac{Q}{\sin\theta}$

$$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2Q} = \cos\theta$$

আবার, ২য় ও ৩য় অনুপাত হতে পাই,

$$\frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin 3\theta}$$

$$\Rightarrow R = \frac{Q\sin 3\theta}{\sin\theta} = \frac{Q(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)}{\sin\theta}$$

$= Q(3 - 4\sin^2\theta)$

$= Q\{3 - 4(1 - \cos^2\theta)\}$

$= Q(3 - 4 + 4\cos^2\theta)$

$= Q\left(-1 + 4.\dfrac{P^2}{4Q^2}\right)$

$= Q\left(-1 + \dfrac{P^2}{Q^2}\right)$

$= Q\left(\dfrac{P^2 - Q^2}{Q^2}\right)$

$\therefore R = \dfrac{P^2 - Q^2}{Q}$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ১৩ উদ্দীপক-১: দুইটি বল ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহু বরাবর ক্রিয়া করে এবং এদের মান যথাক্রমে cosB ও cosC এর সমানুপাতিক।

উদ্দীপক-২: F_1 ও F_2 মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল একটি অনড় বস্তুর উপর দুইটি ভিন্ন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। F_1 এর ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুকে 'd' দূরত্বে সরানো হলো।

(ক) F মানের দুইটি সমান বল কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়া করে $3\sqrt{3}$N বলের সাহায্যে ভারসাম্য সৃষ্টি করে, F এর মান নির্ণয় কর। [সি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২; ম. বো. ২২; ব. বো. ২১; দি. বো. ২১; রা. বো. ১৯]

(খ) উদ্দীপক-১ ব্যবহার করে দেখাও যে, বলদ্বয়ের লব্ধি A কোণকে $\frac{1}{2}(A + B - C)$ ও $\frac{1}{2}(C + A - B)$ এই দুই অংশে বিভক্ত করে। [ব. বো. ২২]

(গ) উদ্দীপক-২ ব্যবহার করে দেখাও যে, বলদ্বয়ের লব্ধি $\dfrac{F_1 d}{F_1 + F_2}$ দূরত্বে সরে যায়। [ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২, ২১; ঢা. বো: ১৯]

সমাধানঃ

ক এখানে F মানের দুইটি সমান বল 60° কোণে ক্রিয়া করে $3\sqrt{3}$N বলের সাহায্যে ভারসাম্য সৃষ্টি করে।

$\therefore$ লব্ধি, $R = 3\sqrt{3}N$

$\therefore R^2 = F^2 + F^2 + 2.F.F.\cos\alpha$

$\Rightarrow (3\sqrt{3})^2 = 2F^2 + 2F^2.\cos 60°$

$\Rightarrow 27 = 2F^2 + 2F^2.\frac{1}{2}$

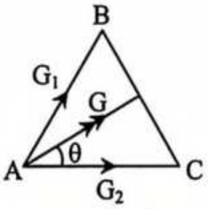
$\Rightarrow 3F^2 = 27$

$\Rightarrow F^2 = 9$

$\therefore F = 3N$ **(Ans.)**

খ উদ্দীপক-১ হতে পাই,

ধরি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহু বরাবর ক্রিয়ারত G_1 ও G_2 বলদ্বয়ের মান যথাক্রমে cosB ও cosC এর সমানুপাতিক।



অর্থাৎ, $G_1 \propto \cos B$ এবং $G_2 \propto \cos C$

$\Rightarrow G_1 = K\cos B$ $\Rightarrow G_2 = K\cos C$

G_1 ও G_2 এর লব্ধি G হলে,

$G^2 = G_1^2 + G_2^2 + 2G_1G_2\cos A$

$= K^2\cos^2B + K^2\cos^2C + 2.K\cos B.K\cos C.\cos A$

$= K^2(\cos^2B + \cos^2C + 2\cos A\cos B\cos C)$

$= K^2(1 - \cos^2A)$

$[\because \cos^2A + \cos^2B + \cos^2C + 2\cos A\cos B\cos C = 1]$

$\Rightarrow G^2 = K^2\sin^2A$

$\Rightarrow G = K\sin A$

ধরি, G ও G_2 এর মধ্যবর্তী কোণ θ

$\therefore$ G_1 ও G এর মধ্যবর্তী কোণ $(A - \theta)$

এখন, ত্রিভুজের সাইন সূত্রানুসারে,

$\frac{G_1}{\sin\theta} = \frac{G}{\sin A}$

$\Rightarrow \frac{K\cos B}{\sin\theta} = \frac{K\sin A}{\sin A}$

$\Rightarrow \frac{\cos B}{\sin\theta} = 1$

$\Rightarrow \sin\theta = \cos B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - B$

$\Rightarrow \theta = \frac{A+B+C}{2} - B$ $[\because A + B + C = \pi]$

$\Rightarrow \theta = \frac{A+B+C-2B}{2}$

$\therefore \theta = \frac{C+A-B}{2} = \frac{1}{2}(C+A-B)$

$\therefore A - \theta = A - \frac{C+A-B}{2}$

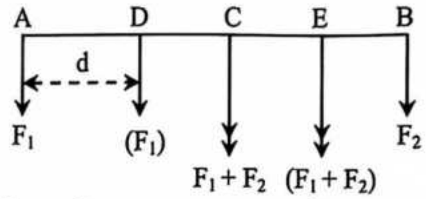
$= \frac{2A-C-A+B}{2}$

$= \frac{A+B-C}{2}$

$= \frac{1}{2}(A+B-C)$

অর্থাৎ, G_1 ও G_2 বলদ্বয়ের লব্ধি A কোণকে $\frac{1}{2}(C+A-B)$ এবং $\frac{1}{2}(A+B-C)$ এই দুই অংশে বিভক্ত করে। **(Showed)**

গ



মনে করি, A বিন্দুতে F_1 বল এবং B বিন্দুতে F_2 বলের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore F_1.AC = F_2.BC$

$\Rightarrow \frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{F_1+F_2}{AC+BC}$

$\Rightarrow \frac{F_2}{AC} = \frac{F_1+F_2}{AB}$

$\therefore AC = \frac{F_2.AB}{F_1+F_2}$

F_1 বলকে d দূরত্বে সরিয়ে D বিন্দুতে আনলে লব্ধি E বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore F_1.DE = F_2.BE$

$\Rightarrow \frac{F_1}{BE} = \frac{F_2}{DE} = \frac{F_1+F_2}{BE+DE} = \frac{F_1+F_2}{BD}$

$\therefore DE = \frac{F_2.BD}{F_1+F_2}$

$\therefore$ লব্ধির সরণ,

$CE = AE - AC = AD + DE - AC$

$= d + \frac{F_2.BD}{F_1+F_2} - \frac{F_2.AB}{F_1+F_2}$

$= \frac{d(F_1+F_2) + F_2.BD - F_2.AB}{F_1+F_2}$

$= \frac{F_1d + F_2d + F_2(AB - AD) - F_2.AB}{F_1+F_2}$

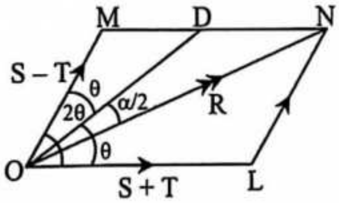
$= \frac{F_1d + F_2d + F_2(AB - d) - F_2.AB}{F_1+F_2}$

$= \frac{F_1d + F_2d + F_2.AB - F_2d - F_2.AB}{F_1+F_2}$

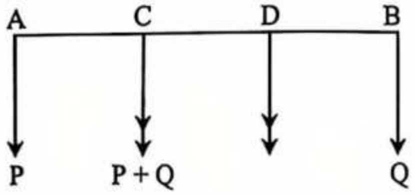
$\therefore CE = \frac{F_1d}{F_1+F_2}$

$\because$ বলদ্বয়ের লব্ধি $\frac{F_1d}{F_1+F_2}$ দূরত্বে সরে যায়। **(Showed)**

প্রশ্ন ▶ ১৪ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



$P > Q$ এবং $AC = CD = BD$

(ক) P ও Q দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধির মান ক্ষুদ্রতম লব্ধির মানের দ্বিগুণ হলে বল দুইটির অনুপাত নির্ণয় কর। [য. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $T\tan\theta = S\tan\frac{\alpha}{2}$ [ঢা. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে এবং বলদ্বয় পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হলে প্রমাণ কর যে, $P : Q = 2 : 1$ [ঢা. বো. ২১]

সমাধান:

ক বলদ্বয় P ও Q ; $P > Q$

$\therefore$ বৃহত্তম লব্ধি $= P + Q$ এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি $= P - Q$

শর্তমতে, বৃহত্তম লব্ধি $= 2 \times$ ক্ষুদ্রতম লব্ধি

$\Rightarrow P + Q = 2(P - Q) = 2P - 2Q$

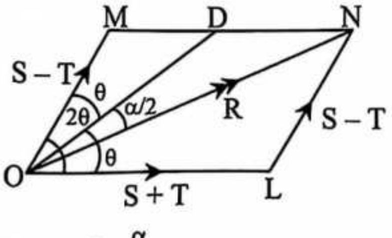
$\Rightarrow 3Q = P$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{3}{1}$

$\therefore P : Q = 3 : 1$ **(Ans.)**

খ চিত্রে, $S + T$ ও R এর মধ্যবর্তী কোণ $= \theta - \frac{\alpha}{2}$

এবং $S - T$ ও R এর মধ্যবর্তী কোণ $= \theta + \frac{\alpha}{2}$



ΔOLN এ $\angle LON = \theta - \frac{\alpha}{2}$

$\angle ONL = \angle MON = \theta + \frac{\alpha}{2}$

এখন, ΔOLN এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{OL}{\sin\angle ONL} = \frac{LN}{\sin\angle LON}$$

$$\Rightarrow \frac{S+T}{\sin\angle ONL} = \frac{S-T}{\sin\angle LON}$$

$$\Rightarrow \frac{S+T}{S-T} = \frac{\sin\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{S+T+S-T}{S+T-S+T} = \frac{\sin\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

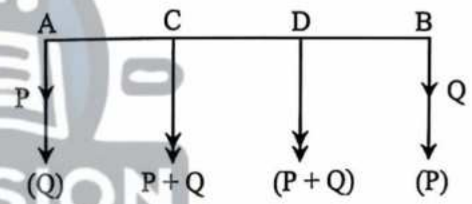
[যোজন-বিয়োজন করে]

$$\Rightarrow \frac{2S}{2T} = \frac{2\sin\theta.\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\theta.\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{S}{T} = \tan\theta.\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\tan\theta}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

$\therefore T\tan\theta = S\tan\frac{\alpha}{2}$ **(Proved)**

গ



এখানে, A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P ও $Q(P > Q)$ বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$\therefore P.AC = Q.BC$

$\Rightarrow P.AC = Q.2AC$

[$\because AC = CD = BD$ এবং $BC = BD + CD = AC + AC = 2AC$]

$\Rightarrow P = 2Q$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = 2$

$\therefore P : Q = 2 : 1$

আবার, P ও Q বলদ্বয় পরস্পর স্থান বিনিময় করলে A বিন্দুতে Q বল ও B বিন্দুতে P বলের লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore Q.AD = P.BD$

$\Rightarrow Q.2BD = P.BD$

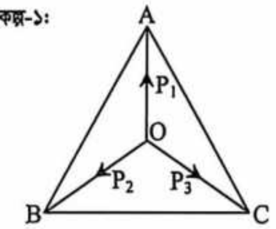
[$\because AC = CD = BD$ এবং $AD = AC + CD = BD + BD = 2BD$]

$\Rightarrow 2Q = P$

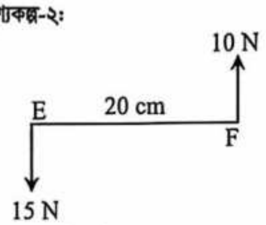
$\Rightarrow \frac{P}{Q} = 2$

$\therefore P : Q = 2 : 1$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▸ ১৫ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



(ক) বলের লম্বাংশ এর সংজ্ঞা দাও। [ঢা. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে O, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং বলত্রয় সাম্যবস্থায় থাকলে দেখাও যে,
$P_1^2 : P_2^2 : P_3^2 = (1 + \cos A) : (1 + \cos B) : (1 + \cos C)$ [ঢা. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে বলদ্বয়ের প্রত্যেকের সাথে সমপরিমাণ কত বল যোগ করলে নতুন লব্ধি পূর্বের থেকে 8 cm দূরে সরে যাবে? [ঢা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২১]

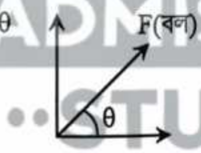
সমাধানঃ

ক কোনো নির্দিষ্ট বলকে যদি পরস্পর লম্ব দুটি রেখা বরাবর ক্রিয়াশীল দুটি বলের অংশে বিভক্ত করা হয়, তবে অংশ দুটির প্রতিটি ঐ নির্দিষ্ট বলের লম্বাংশ।

$\therefore$ কোনো নির্দিষ্ট দিকে কোনো বলের লম্বাংশ = বল × (বল ও নির্দিষ্ট দিকের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইন)

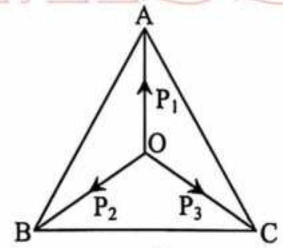
অর্থাৎ ভূমি (OX) বরাবর লম্বাংশ = বল × $\cos\theta$

এবং লম্ব (OY) বরাবর লম্বাংশ = বল × $\sin\theta$



খ ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র O হতে OA, OB এবং OC বরাবর P_1, P_2 এবং P_3 বলত্রয় ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে।

$\therefore$ লামির উপপাদ্য অনুসারে,



$$\frac{P_1}{\sin\angle BOC} = \frac{P_2}{\sin\angle AOC} = \frac{P_3}{\sin\angle AOB} \quad \cdots\text{(i)}$$

ΔBOC এ, $\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180°$

$\Rightarrow \angle BOC + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 180°$

[$\because$ O, ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র]

$\Rightarrow \angle BOC = 180° - \frac{1}{2}(B + C) = 180° - \frac{1}{2}(180° - A)$

$\Rightarrow \angle BOC = 90° + \frac{A}{2}$

অনুরূপভাবে, $\angle AOC = 90° + \frac{B}{2}$ এবং $\angle AOB = 90° + \frac{C}{2}$

$\therefore$ (i) নং হতে পাই,

$$\frac{P_1}{\sin\left(90° + \frac{A}{2}\right)} = \frac{P_2}{\sin\left(90° + \frac{B}{2}\right)} = \frac{P_3}{\sin\left(90° + \frac{C}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{P_2}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{P_3}{\cos\frac{C}{2}}$$

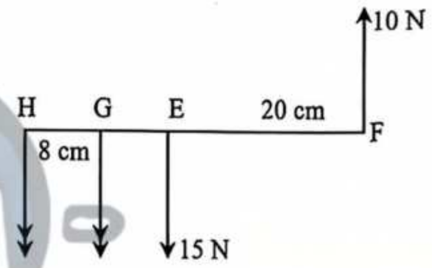
$$\Rightarrow \frac{P_1^2}{2\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{P_2^2}{2\cos^2\frac{B}{2}} = \frac{P_3^2}{2\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1^2}{1 + \cos A} = \frac{P_2^2}{1 + \cos B} = \frac{P_3^2}{1 + \cos C}$$

$\therefore P_1^2 : P_2^2 : P_3^2 = (1 + \cos A) : (1 + \cos B) : (1 + \cos C)$

(Showed)

গ



এখানে, E বিন্দুতে 15 N এবং F বিন্দুতে 10 N বলের লব্ধি G বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$\therefore 15.EG = 10.FG$

$\Rightarrow \frac{15}{FG} = \frac{10}{EG} = \frac{5}{FG - EG} = \frac{5}{EF}$

$\Rightarrow EG = \frac{EF}{5} \times 10 = \frac{20}{5} \times 10 = 40$ cm

ধরি, বলদ্বয়ের প্রত্যেকের সাথে x N বল যোগ করা হলো।

তাহলে E বিন্দুতে $(15 + x)$N ও F বিন্দুতে $(10 + x)$N বলের লব্ধি H বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$\therefore (15 + x).EH = (10 + x).FH$

$\Rightarrow \frac{15 + x}{FH} = \frac{10 + x}{EH} = \frac{15 + x - 10 - x}{FH - EH} = \frac{5}{EF}$

$\Rightarrow EH = \frac{EF}{5} \times (10 + x) = 4(10 + x)$ cm

$\therefore$ লব্ধির সরণ, $GH = EH - EG$

$\Rightarrow EH - EG = 8$ [দেওয়া আছে, লব্ধির সরণ = 8 cm]

$\Rightarrow 4(10 + x) - 40 = 8$

$\Rightarrow 40 + 4x - 40 = 8$

$\Rightarrow 4x = 8$

$\therefore x = 2$

অতএব, বলদ্বয়ের প্রত্যেকের সাথে 2N বল যোগ করলে নতুন লব্ধি পূর্বের লব্ধি থেকে 8 cm দূরে সরে যাবে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৬ একটি বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত P ও $Q(P > Q)$ মানের বলদ্বয়ের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে L ও M।

(ক) P এর দিক বরাবর লব্ধির লম্বাংশের পরিমাণ Q হলে, প্রমাণ কর যে, $\alpha = \cos^{-1}\dfrac{Q-P}{Q}$ [রা. বো. ২১]

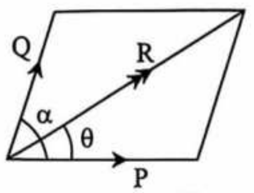
(খ) একটি বস্তুর উপর A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল U ও $V(U > V)$ পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর x দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ কর যে, $x = \dfrac{U-V}{U+V}AB$।

(গ) দেখাও যে, বলদ্বয়ের লব্ধির মান $\sqrt{L^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + M^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$

[সংশোধিত] [রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ১৯]

সমাধান:

ক



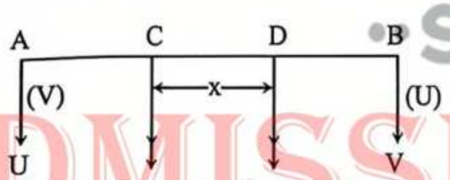
এখানে, P ও $Q(P > Q)$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α
ধরি, P ও Q বলের লব্ধি R এবং R ও P এর মধ্যবর্তী কোণ θ
এখন, P এর দিক বরাবর R এর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$R\cos\theta = P\cos 0° + Q\cos\alpha$$
$$= P + Q\cos\alpha$$

প্রশ্নমতে, $P + Q\cos\alpha = Q$

$$\Rightarrow Q\cos\alpha = Q - P$$
$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{Q-P}{Q}$$
$$\therefore \alpha = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q} \text{ (Proved)}$$

খ



A বিন্দুতে ক্রিয়ারত U বল এবং B বিন্দুতে ক্রিয়ারত V বলের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$$\therefore U.AC = V.BC$$
$$\Rightarrow \frac{AC}{V} = \frac{BC}{U} = \frac{AC+BC}{V+U} = \frac{AB}{V+U}$$
$$\Rightarrow AC = \frac{V.AB}{U+V}$$

আবার, বলদ্বয় স্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর $CD = x$ দূরত্বে D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$$\therefore V.AD = U.BD$$
$$\Rightarrow \frac{AD}{U} = \frac{BD}{V} = \frac{AD+BD}{U+V} = \frac{AB}{U+V}$$
$$\Rightarrow AD = \frac{U.AB}{U+V}$$

$\therefore$ লব্ধির সরণ, $x = CD = AD - AC$

$$= \frac{U.AB}{U+V} - \frac{V.AB}{U+V} = \frac{(U-V).AB}{U+V}$$
$$\therefore x = \frac{U-V}{U+V}AB \text{ (Proved)}$$

গ এখানে, P ও Q $(P > Q)$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α, বৃহত্তম লব্ধির মান $= L$, ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান $= M$

$$\therefore P + Q = L \text{ ...... (i)}$$

এবং $P - Q = M$ ...... (ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$2P = L + M$$
$$\Rightarrow P = \frac{1}{2}(L+M)$$

আবার, (i) নং সমীকরণ হতে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

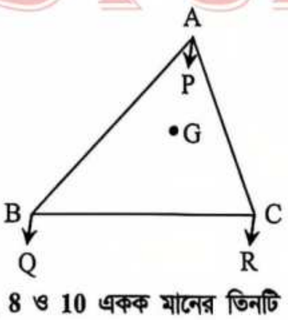
$$2Q = L - M$$
$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}(L-M)$$

বলদ্বয়ের লব্ধি R হলে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ.\cos\alpha$

$$= \frac{1}{4}(L+M)^2 + \frac{1}{4}(L-M)^2 + 2\times\frac{1}{2}(L+M)\times\frac{1}{2}(L-M).\cos\alpha$$
$$= \frac{1}{4}\{(L+M)^2 + (L-M)^2 + 2(L^2-M^2).\cos\alpha\}$$
$$= \frac{1}{4}\{2L^2 + 2M^2 + 2(L^2-M^2)\cos\alpha\}$$
$$= \frac{1}{2}\{L^2 + M^2 + L^2\cos\alpha - M^2\cos\alpha\}$$
$$= \frac{1}{2}\{L^2(1+\cos\alpha) + M^2(1-\cos\alpha)\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{L^2.2\cos^2\frac{\alpha}{2} + M^2.2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right\}$$
$$= L^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + M^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\therefore R = \sqrt{L^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + M^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} \text{ (Showed)}$$

প্রশ্ন ▶ ১৭ দৃশ্যকল্প-১: l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সুতার এক প্রান্ত একটি উল্লম্ব দেয়ালে আটকানো। অন্য প্রান্ত 'a' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট ও W ওজনের একটি সুষম গোলকের সাথে যুক্ত আছে।

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) মূল বিন্দুতে 5, 8 ও 10 একক মানের তিনটি বল X অক্ষের সাথে যথাক্রমে $0°$, $60°$ ও $120°$ কোণে ক্রিয়া করছে। OX বরাবর বলগুলোর লম্বাংশের সমষ্টি নির্ণয় কর। [কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে দেখাও যে, সুতার টান $\dfrac{W(a+l)}{\sqrt{l^2+2al}}$

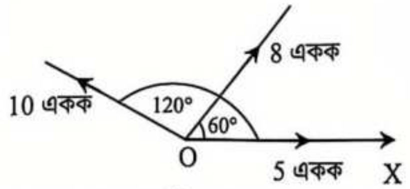
[রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩; দি. বো. ২৩; ম. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R এর লব্ধি যদি ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G-তে ক্রিয়া করে তবে প্রমাণ কর যে, $P = Q = R$

[কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. য. বো. সি. বো. দি. বো. ১৮]

সমাধানঃ

ক



দেওয়া আছে, মূলবিন্দু O তে 5, 8 ও 10 একক মানের তিনটি বল X অক্ষের সাথে যথাক্রমে 0°, 60° ও 120° কোণে ক্রিয়ারত আছে।
OX বরাবর বলগুলোর লম্বাংশের সমষ্টি,

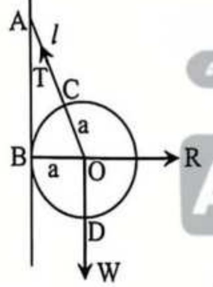
$= 5\cos 0° + 8\cos 60° + 10\cos 120°$

$= 5 \times 1 + 8 \times \frac{1}{2} + 10\left(\frac{-1}{2}\right)$

$= 5 + 4 - 5$

$= 4$ **(Ans.)**

খ O কেন্দ্রবিশিষ্ট W ওজনের গোলকটি একটি উল্লম্ব দেওয়ালের B বিন্দুতে স্পর্শ করে। $AC = l$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সুতার C প্রান্ত গোলকের ওপর এবং A প্রান্ত দেওয়ালে আটকানো আছে। গোলকের ওজন W যা OD বরাবর ক্রিয়াশীল। দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া বল R, BO বরাবর ক্রিয়াশীল।
ধরি, সুতার টান T, CA বরাবর ক্রিয়াশীল। O বিন্দুতে T, R, W বলত্রয় ভারসাম্য সৃষ্টি করে।



$\therefore$ লামির উপপাদ্য অনুসারে,

$$\frac{W}{\sin(R \wedge T)} = \frac{R}{\sin(T \wedge W)} = \frac{T}{\sin(W \wedge R)}$$

$$\therefore \frac{W}{\sin(180° - \angle AOB)} = \frac{T}{\sin 90°}$$

$$\Rightarrow \frac{W}{\sin\angle AOB} = T$$

$$\Rightarrow T = \frac{W}{\frac{AB}{OA}} = \frac{W.OA}{AB} = \frac{W(a+l)}{\sqrt{OA^2 - OB^2}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{W(a+l)}{\sqrt{(a+l)^2 - a^2}} = \frac{W(a+l)}{\sqrt{a^2 + 2al + l^2 - a^2}}$$

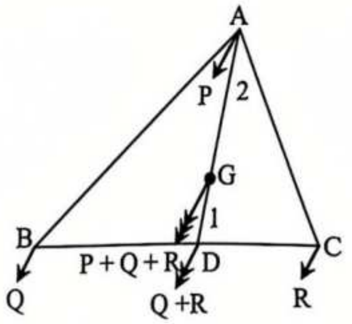
$$= \frac{W(a+l)}{\sqrt{l^2 + 2al}} \text{ (Showed)}$$

গ মনে করি, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G। P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের A, B, C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যেহেতু বলত্রয়ের লব্ধি G বিন্দুগামী এবং P বল A বিন্দুতে ক্রিয়া করে, অতএব B ও C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বলদ্বয় Q ও R এর লব্ধি BC ও AGD রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু D তে ক্রিয়াশীল।

$\therefore Q.BD = R.CD$

$\Rightarrow Q = R$; কারণ $BD = CD$ .... (i)

আবার, D বিন্দুতে Q + R এবং A বিন্দুতে ক্রিয়ারত P বলের লব্ধি G বিন্দু দিয়ে যায়।



$\therefore (Q + R).GD = P.AG$

$\Rightarrow 2Q.GD = P.AG$

$\Rightarrow \frac{2Q}{P} = \frac{AG}{GD}$

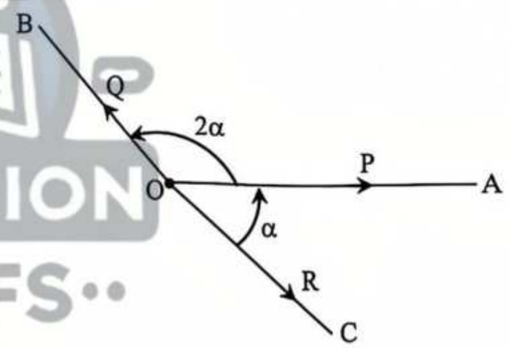
$\Rightarrow \frac{2Q}{P} = \frac{2}{1}$ [কারণ G ভরকেন্দ্র]

$\Rightarrow P = Q$ .... (ii)

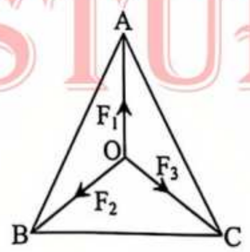
(i) ও (ii) থেকে পাই,

$\therefore P = Q = R$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▸ ১৮ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



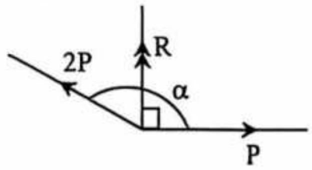
(ক) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত **P** ও **2P** মানের বলদ্বয়ের লব্ধি যদি **P** এর ক্রিয়ারেখার ওপর লম্ব হয় তবে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল **P, Q, R** বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ কর যে, $\mathbf{R^2 = Q(Q - P)}$. [কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২১; সি. বো. ১৭]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ **O** ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ ও $\mathbf{F_3}$ বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ কর যে, $\frac{F_1^2}{a(b+c-a)} = \frac{F_2^2}{b(c+a-b)} = \frac{F_3^2}{c(a+b-c)}$। [চ. বো. ২১]

সমাধান:

ক ধরি, P, 2P বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α, লব্ধি R আনুভূমিক বল P এর সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore \tan 90° = \dfrac{2P\sin\alpha}{P + 2P\cos\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{0} = \dfrac{2P\sin\alpha}{P+2P\cos\alpha} \quad \left[\because \tan 90° = \infty = \dfrac{1}{0}\right]$

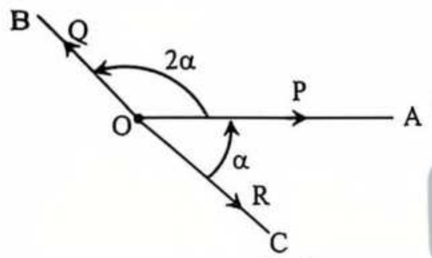
$\Rightarrow P + 2P\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow 1 + 2\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-1}{2} = \cos 120°$

$\therefore \alpha = 120°$ **(Ans.)**

খ ধরি, P, Q, R বল তিনটি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করছে। P ও R এর অন্তর্গত কোণ $= \alpha$ এবং P ও Q এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $= 2\alpha$, $\therefore$ Q ও R এর অন্তর্গত কোণ $= 360° - 3\alpha$.



P, Q, R বলত্রয়ের জন্য লামির উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই,

$\Rightarrow \dfrac{P}{\sin(360° - 3\alpha)} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin 2\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{P}{-\sin 3\alpha} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin 2\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{P}{-(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{P}{4\sin^2\alpha - 3} = \dfrac{Q}{1} = \dfrac{R}{2\cos\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{P}{1 - 4\cos^2\alpha} = \dfrac{Q}{1} = \dfrac{R}{2\cos\alpha}$

$\Rightarrow R = 2Q\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{R}{2Q}$ ...... (i)

আবার,

$\dfrac{P}{1 - 4\cos^2\alpha} = Q$

$\Rightarrow P = Q\left(1 - 4 \times \dfrac{R^2}{4Q^2}\right)$ [(i) নং হতে মান বসিয়ে]

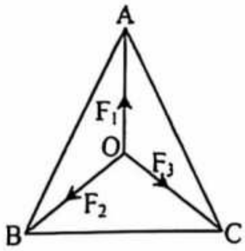
$\Rightarrow P = Q\left(\dfrac{Q^2 - R^2}{Q^2}\right)$

$\Rightarrow QP = Q^2 - R^2$

$\Rightarrow R^2 = Q^2 - PQ$

$\therefore R^2 = Q(Q-P)$ **(Proved)**

গ



ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র O হতে F_1, F_2, F_3 বলত্রয় ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে।

$\therefore$ লামির উপপাদ্য অনুসারে,

$\dfrac{F_1}{\sin\angle BOC} = \dfrac{F_2}{\sin\angle AOC} = \dfrac{F_3}{\sin\angle AOB}$ ....(i)

ΔBOC এ, $\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180°$

$\Rightarrow \angle BOC + \dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2} = 180°$ [$\because \Delta ABC$ এর অন্তঃকেন্দ্র O]

$\Rightarrow \angle BOC = 180° - \dfrac{1}{2}(B + C)$

$\Rightarrow \angle BOC = 180° - \dfrac{1}{2}(180° - A) = 90° + \dfrac{A}{2}$

অনুরূপভাবে, $\angle AOC = 90° + \dfrac{B}{2}$ এবং $\angle AOB = 90° + \dfrac{C}{2}$

$\therefore$ (i) নং হতে পাই,

$\dfrac{F_1}{\sin\left(90° + \dfrac{A}{2}\right)} = \dfrac{F_2}{\sin\left(90° + \dfrac{B}{2}\right)} = \dfrac{F_3}{\sin\left(90° + \dfrac{C}{2}\right)}$

$\Rightarrow \dfrac{F_1}{\cos\dfrac{A}{2}} = \dfrac{F_2}{\cos\dfrac{B}{2}} = \dfrac{F_3}{\cos\dfrac{C}{2}}$

$\Rightarrow \dfrac{F_1^2}{\cos^2\dfrac{A}{2}} = \dfrac{F_2^2}{\cos^2\dfrac{B}{2}} = \dfrac{F_3^2}{\cos^2\dfrac{C}{2}}$

$\Rightarrow \dfrac{F_1^2}{2\cos^2\dfrac{A}{2}} = \dfrac{F_2^2}{2\cos^2\dfrac{B}{2}} = \dfrac{F_3^2}{2\cos^2\dfrac{C}{2}}$

$\Rightarrow \dfrac{F_1^2}{1+\cos A} = \dfrac{F_2^2}{1+\cos B} = \dfrac{F_3^2}{1+\cos C}$

$\Rightarrow \dfrac{F_1^2}{1 + \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \dfrac{F_2^2}{1 + \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}} = \dfrac{F_3^2}{1 + \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$

$\Rightarrow \dfrac{F_1^2}{\dfrac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \dfrac{F_2^2}{\dfrac{2ca+c^2+a^2-b^2}{2ca}} = \dfrac{F_3^2}{\dfrac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}}$

$\Rightarrow \dfrac{F_1^2}{a\{(b+c)^2-a^2\}} = \dfrac{F_2^2}{b\{(c+a)^2-b^2\}} = \dfrac{F_3^2}{c\{(a+b)^2-c^2\}}$

$\Rightarrow \dfrac{F_1^2}{a(a+b+c)(b+c-a)} = \dfrac{F_2^2}{b(a+b+c)(c+a-b)}$

$= \dfrac{F_3^2}{c(a+b+c)(a+b-c)}$

$\therefore \dfrac{F_1^2}{a(b+c-a)} = \dfrac{F_2^2}{b(c+a-b)} = \dfrac{F_3^2}{c(a+b-c)}$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ দৃশ্যকল্প-১: একটি হালকা লাঠির এক প্রান্ত হতে 2, 8, 6 ফুট দূরে অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে যথাক্রমে P_1, P_2, P_3 মানের তিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে।

দৃশ্যকল্প-২: কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত F_1 ও F_2 মানের দুইটি বলের লব্ধি F তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে।

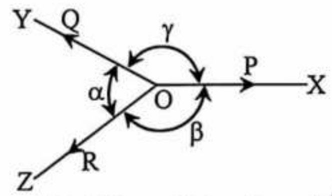
(ক) সাম্যাবস্থায় লামির সূত্রটি লিখ। [চ. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ অনুসারে লাঠিটি ভারসাম্যে থাকলে দেখাও যে, $P_1 : P_2 : P_3 = 1 : 2 : 3$ [য. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, বল দুইটির লব্ধি $F = \frac{F_1^2 - F_2^2}{F_2}$ $(F_1 > F_2)$ [য. বো. ২১]

সমাধান:

ক লামির উপপাদ্যটি হলো– তিনটি সমবিন্দু সমতলীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, এদের প্রতিটির মান অপর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইনের সমানুপাতিক হবে।

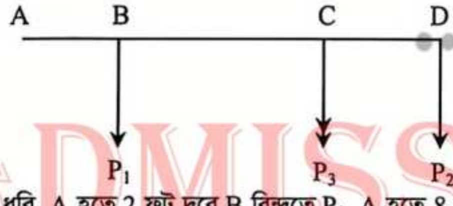


ধরি, O বিন্দুতে OX, OY ও OZ বরাবর কার্যরত তিনটি বল যথাক্রমে $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ও $\vec{R}$ সাম্যাবস্থায় আছে।

অতএব, $\frac{P}{\sin(Q \wedge R)} = \frac{Q}{\sin(R \wedge P)} = \frac{R}{\sin(P \wedge Q)}$

$\Rightarrow \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin\gamma}$

খ



ধরি, A হতে 2 ফুট দূরে B বিন্দুতে P_1, A হতে 8 ফুট দূরে D বিন্দুতে P_2 এবং A হতে 6 ফুট দূরে C বিন্দুতে P_3 বলত্রয় ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে।

$\therefore P_3 = P_1 + P_2$ ....(i)

AB = 2 ফুট, AC = 6 ফুট, AD = 8 ফুট

B ও D বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C।

$\therefore P_1.BC = P_2.CD$

$\Rightarrow \frac{P_1}{CD} = \frac{P_2}{BC} = \frac{P_1 + P_2}{CD + BC} = \frac{P_3}{BD}$

$\therefore \frac{P_1}{CD} = \frac{P_2}{BC} = \frac{P_3}{BD}$

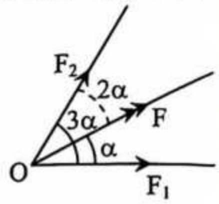
$\Rightarrow \frac{P_1}{AD - AC} = \frac{P_2}{AC - AB} = \frac{P_3}{AD - AB}$

$\Rightarrow \frac{P_1}{8-6} = \frac{P_2}{6-2} = \frac{P_3}{8-2}$

$\Rightarrow \frac{P_1}{2} = \frac{P_2}{4} = \frac{P_3}{6}$

$\therefore P_1 : P_2 : P_3 = 1 : 2 : 3$ **(Showed)**

গ মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত F_1 ও F_2 $(F_1 > F_2)$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ 3α এবং তাদের লব্ধি F, বল F_1 এর সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।



F বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$F\cos0° = F_2\cos2\alpha + F_1\cos(-\alpha)$

$\therefore F = F_2(2\cos^2\alpha - 1) + F_1\cos\alpha$ ....(i)

এবং $F\sin0° = F_2\sin2\alpha + F_1\sin(-\alpha)$

$\Rightarrow 0 = F_2(2\sin\alpha\cos\alpha) - F_1\sin\alpha$

$\Rightarrow 2F_2\cos\alpha - F_1 = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{F_1}{2F_2}$

সমীকরণ (i) হতে পাই,

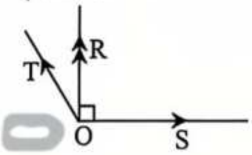
$F = 2F_2\left(\frac{F_1^2}{4F_2^2}\right) - F_2 + F_1\left(\frac{F_1}{2F_2}\right)$

$= \frac{F_1^2}{2F_2} - F_2 + \frac{F_1^2}{2F_2} = \frac{F_1^2}{F_2} - F_2$

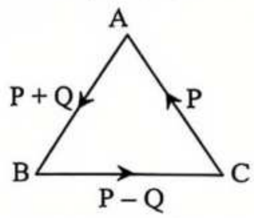
$\therefore F = \frac{F_1^2 - F_2^2}{F_2}$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▶ ২০

দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



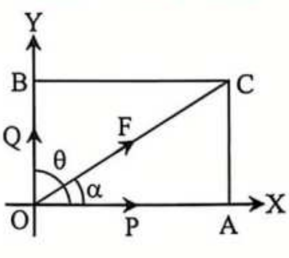
(ক) বলের লম্বাংশের উপপাদ্যটি লিখ। [চ. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ T = 13 N এবং S ও T এর লব্ধি R = 12 N হলে, S এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ ΔABC সমবাহু হলে বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। [চ. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১]

সমাধান:

ক কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুই বা ততোধিক বলের কোনো নির্দিষ্ট দিকে লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি ঐ একই দিকে বলদ্বয়ের লব্ধির লম্বাংশের সমান।



চিত্রে,

OX বরাবর F বলের লম্বাংশ, $OA = F\cos\alpha$

OY বরাবর F বলের লম্বাংশ, $OB = F\sin\alpha$

OX বরাবর P ও Q বলের লম্বাংশের যোগফল,

$P\cos0° + Q\cos\theta = P + Q\cos\theta$

OY বরাবর P ও Q বলের লম্বাংশের যোগফল,

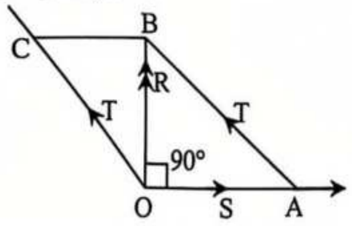
$P\sin0° + Q\sin\theta = Q\sin\theta$

$\therefore$ লম্বাংশ উপপাদ্য অনুসারে, $F\cos\alpha = P + Q\cos\theta$

এবং $F\sin\alpha = Q\sin\theta$

খ দেওয়া আছে, $R = 12$ N

$T = 13$ N, $S = ?$



ধরি, OA এবং OC বরাবর S ও T বলদ্বয় ক্রিয়াশীল।

লব্ধি R, OA এর সাথে লম্ব।

ΔOAB এ, $OA^2 + OB^2 = AB^2$

$\Rightarrow S^2 + R^2 = T^2$

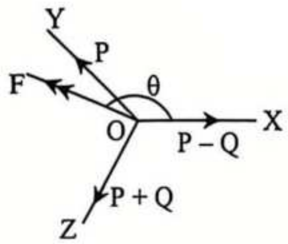
$\Rightarrow S^2 + 12^2 = 13^2$

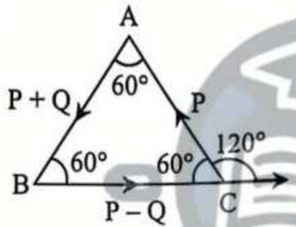
$\Rightarrow S^2 = 169 - 144$

$\Rightarrow S^2 = 25$

$\therefore S = 5$ N **(Ans.)**

গ





মনে করি, O বিন্দুতে OX, OY, OZ বরাবর কার্যরত যথাক্রমে $P - Q$, P, $P + Q$ বলগুলোর দিক ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল।

এক্ষেত্রে $\angle XOY = \angle YOZ = \angle ZOX = 120°$

ধরি, বলগুলোর লব্ধি = F, যা O বিন্দুতে OX এর সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল।

এখন, OX বরাবর এবং এর উপর লম্ব দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$F\cos\theta = (P - Q)\cos 0° + P\cos 120° + (P + Q)\cos 240°$

$= (P - Q) - \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}(P + Q)$

$\therefore F\cos\theta = -\frac{3}{2}Q$ ..... (iii)

আবার, $F\sin\theta = (P - Q)\sin 0° + P\sin 120° + (P + Q)\sin 240°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}P - \frac{\sqrt{3}}{2}(P + Q)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}Q$

$\therefore F\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}Q$ ..... (iv)

$(iii)^2 + (iv)^2$ করে পাই,

$F^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{9}{4}Q^2 + \frac{3}{4}Q^2$

$\Rightarrow F^2 = 3Q^2$

$\therefore F = \sqrt{3}Q$ একক **(Ans.)**

(iv) ÷ (iii) করে পাই,

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 30° = \tan(180° + 30°) = 210°$

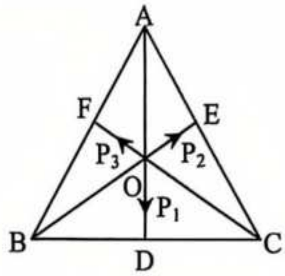
$\therefore \tan\theta = \tan 30°$ অথবা, $\tan\theta = \tan 210°$

$\Rightarrow \theta = 30°$ $\Rightarrow \theta = 210°$

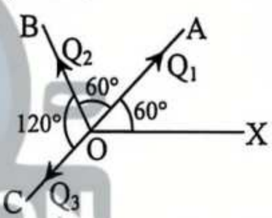
কিন্তু $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ উভয়ই ঋণাত্মক যেহেতু $F\cos\theta$ ও $F\sin\theta$ উভয়েই ঋণাত্মক।

$\therefore \theta = 210°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২১ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



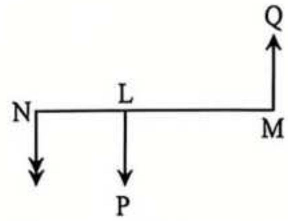
(ক) P ও Q (যখন $P > Q$) অসদৃশ সমান্তরাল বল দুটি যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে কার্যরত হলে, প্রমাণ কর যে, তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু $\frac{Q}{P - Q}$ LM দূরত্বে কার্যরত হবে। [সি. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ O, ABC ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র এবং P_1, P_2, P_3 সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে, $P_1 : P_2 : P_3 = BC : CA : AB$ [ব. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বলত্রয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। [ব. বো. ২১]

সমাধান:

ক



এখানে, P ও Q (যেখানে $P > Q$) অসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে কার্যরত।

মনে করি, P ও Q এর লব্ধি N বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$\therefore P.LN = Q.MN$

$\Rightarrow \frac{LN}{Q} = \frac{MN}{P} = \frac{MN - LN}{P - Q} = \frac{LM}{P - Q}$

$\therefore LN = \frac{Q}{P - Q}LM$

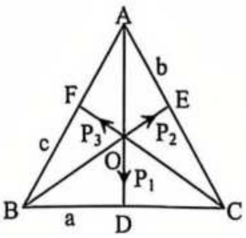
$\therefore$ লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু $\frac{Q}{P - Q}$ LM দূরত্বে কার্যরত। **(Proved)**

খ ΔABC এর BC, CA, AB এর উপর অঙ্কিত লম্ব AD, BE, CF বরাবর তিনটি বল যথাক্রমে P_1, P_2, P_3 ক্রিয়াশীল। যেহেতু বল তিনটি ভারসাম্য অবস্থায় আছে সেহেতু বল তিনটির লব্ধি শূন্য হবে।

এখন, লম্ব তিনটি O বিন্দুতে মিলিত হয়।

লামির সূত্রানুসারে পাই,

$$\frac{P_1}{\sin\angle EOF} = \frac{P_2}{\sin\angle DOF} = \frac{P_3}{\sin\angle DOE} \cdots (i)$$



চতুর্ভুজ AEOF হতে,

$\angle AEO = 90°$, $\angle AFO = 90°$

$\therefore \angle EOF + A = 180°$

[$\because$ AEOF চতুর্ভুজের চারটি কোণের যোগফল = 360°]

এখানে, $A = \angle BAC$

$\therefore \angle EOF = 180° - A$ হবে।

অনুরূপভাবে, $\angle FOD = 180° - B$ এবং $\angle DOE = 180° - C$ হবে।

সমীকরণ (i) নং হতে পাই,

$$\frac{P_1}{\sin(180° - A)} = \frac{P_2}{\sin(180° - B)} = \frac{P_3}{\sin(180° - C)}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\sin A} = \frac{P_2}{\sin B} = \frac{P_3}{\sin C} \cdots\cdots (ii)$$

ΔABC হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

ধরি, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = K$

$\therefore \sin A = \frac{a}{K}$, $\sin B = \frac{b}{K}$, $\sin C = \frac{c}{K} \cdots\cdots (iii)$

এখানে, a, b, c হলো ΔABC এর তিনটি বাহু

যেখানে, BC = a, CA = b এবং AB = c

এখন, সমীকরণ (ii) ও (iii) হতে পাই,

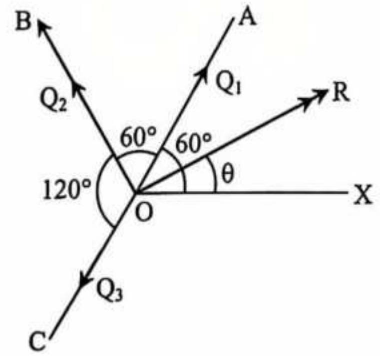
$$\frac{P_1}{\frac{a}{K}} = \frac{P_2}{\frac{b}{K}} = \frac{P_3}{\frac{c}{K}}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{a} = \frac{P_2}{b} = \frac{P_3}{c}$$

$\Rightarrow P_1 : P_2 : P_3 = a : b : c$

$\therefore P_1 : P_2 : P_3 = BC : CA : AB$ **(Proved)**

গ দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই,



এখানে, O বিন্দুতে OA, OB, OC বরাবর যথাক্রমে Q_1, Q_2, Q_3 বলগুলো ক্রিয়ারত এবং এদের লব্ধি R, OX এর সাথে θ কোণে কার্যরত।

$$R\cos\theta = Q_1\cos60° + Q_2\cos120° + Q_3\cos240°$$

$$\Rightarrow R\cos\theta = Q_1.\frac{1}{2} + Q_2\left(-\frac{1}{2}\right) + Q_3\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow R\cos\theta = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2 - Q_3) \ldots\ldots (i)$$

আবার,

$$R\sin\theta = Q_1\sin60° + Q_2\sin120° + Q_3\sin240°$$

$$\Rightarrow R\sin\theta = Q_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow R\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}(Q_1 + Q_2 - Q_3) \ldots\ldots (ii)$$

$(i)^2 + (ii)^2$ করে পাই,

$$\Rightarrow R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{1}{4}(Q_1 - Q_2 - Q_3)^2 + \frac{3}{4}(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{1}{4}\left(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 - 2Q_1Q_2 + 2Q_2Q_3 - 2Q_3Q_1\right) + \frac{3}{4}\left(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 + 2Q_1Q_2 - 2Q_2Q_3 - 2Q_3Q_1\right)$$

$$\Rightarrow R^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 + Q_1Q_2 - Q_2Q_3 - 2Q_1Q_3$$

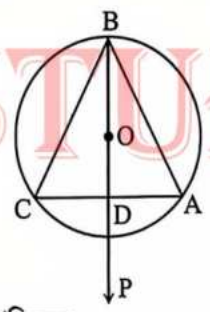
$$\therefore R = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 + Q_1Q_2 - Q_2Q_3 - 2Q_3Q_1}$$ **(Ans.)**

আবার, (ii) ÷ (i) ⇒

$$\tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(Q_1 + Q_2 - Q_3)}{\frac{1}{2}(Q_1 - Q_2 - Q_3)} = \frac{\sqrt{3}(Q_1 + Q_2 - Q_3)}{(Q_1 - Q_2 - Q_3)}$$

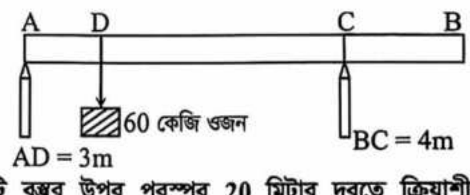
$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}(Q_1 + Q_2 - Q_3)}{(Q_1 - Q_2 - Q_3)}\right\}$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২২ দৃশ্যকল্প-১:



O বিন্দুটি পরিকেন্দ্র

দৃশ্যকল্প-২:



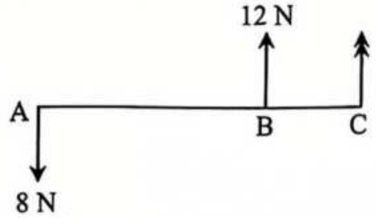
(ক) একটি বস্তুর উপর পরস্পর 20 মিটার দূরত্বে ক্রিয়াশীল বিসদৃশ, সমান্তরাল বল 8N ও 12N এর লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু নির্ণয় কর।[ব. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, C ও A বিন্দুতে P বলের সমান্তরাল অংশদ্বয়ের অনুপাত **sin2C : sin2A.** [ব. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ 50 কেজি ওজনের AB সমরূপ তক্তাটির দৈর্ঘ্য 20 মিটার হলে খুঁটিদ্বয়ের উপর চাপের পরিমাণ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২১]

সমাধান:

ক মনে করি, একটি অনড় বস্তুর ওপর পরস্পর AB = 20 মিটার দূরত্বে A বিন্দুতে 8 N ও B বিন্দুতে 12 N বল ক্রিয়াশীল।



বলের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C.

$\therefore 8.AC = 12.BC$

$\Rightarrow 8.(AB + BC) = 12.BC$ [$\because AC = AB + BC$]

$\Rightarrow 8(20 + BC) = 12.BC$

$\Rightarrow 160 + 8.BC = 12.BC$

$\Rightarrow 160 = 4.BC$

$\Rightarrow BC = \frac{160}{4}$

$\therefore BC = 40$ মিটার

$\therefore$ লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু 12 N বল থেকে 40 m দূরে ক্রিয়া করে। **(Ans.)**

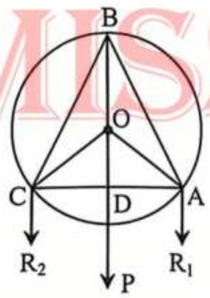
খ মনে করি, BCA ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O. P বলটি BO বরাবর ক্রিয়ারত। ধরি, বর্ধিত BO রেখা CA কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করি, C ও A বিন্দুতে বলটির সমান্তরাল অংশকদ্বয় যথাক্রমে R_2 ও R_1 ক্রিয়াশীল।

$\therefore R_2.CD = R_1.AD$

$$\Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{AD}{CD} = \frac{\frac{AD}{OD}}{\frac{CD}{OD}} \text{ ...... (i)}$$

যেহেতু OC = OA = পরিব্যাসার্ধ, সেহেতু $\angle OAD = \angle OCD$



এখন, ΔAOD হতে পাই,

$$\frac{AD}{\sin\angle AOD} = \frac{OD}{\sin\angle OAD}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{OD} = \frac{\sin\angle AOD}{\sin\angle OAD}$$

অনুরূপভাবে, $\frac{CD}{OD} = \frac{\sin\angle COD}{\sin\angle OCD}$

(i) নং হতে পাই, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{\sin\angle AOD}{\sin\angle OAD}}{\frac{\sin\angle COD}{\sin\angle OCD}}$

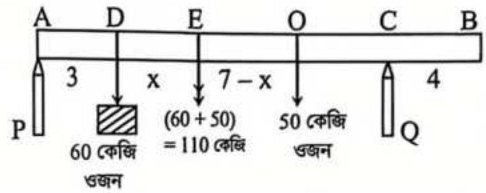
$$\Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{\sin\angle AOD}{\sin\angle OCD}}{\frac{\sin\angle COD}{\sin\angle OCD}} \quad [\because \angle OAD = \angle OCD]$$

$$\Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin\angle AOD}{\sin\angle COD} = \frac{\sin(\pi - \angle AOB)}{\sin(\pi - \angle BOC)} = \frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle BOC}$$

$\therefore \frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}$ [$\because$ 2 × বৃত্তস্থ কোণ = কেন্দ্রস্থ কোণ]

$\therefore R_2 : R_1 = \sin 2C : \sin 2A$ **(Proved)**

গ এখানে, AB সমরূপ তক্তাটির দৈর্ঘ্য 20 মিটার। তক্তাটিকে A ও C বিন্দুতে দুটি খুঁটির ওপর রেখে D বিন্দুতে 60 কেজি ওজন ঝুলিয়ে একে সুস্থিত রাখা হয়েছে।



তক্তাটির ওজন 50 কেজি যা AB এর মধ্যবিন্দু O বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়া করবে।

তাহলে, $AO = BO = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10$ মিটার

এখানে, AD = 3 মিটার, BC = 4 মিটার

ধরি, DE = x মিটার

এখানে, AO = 10 মিটার

$\Rightarrow AD + DE + OE = 10$

$\Rightarrow 3 + x + OE = 10$

$\Rightarrow OE = 10 - 3 - x = (7 - x)$ মিটার

এখন, D ও O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বলের লব্ধি E.

$\therefore 60.DE = 50.OE$

$\Rightarrow 60.x = 50(7 - x)$

$\Rightarrow 6x = 5(7 - x)$

$\Rightarrow 6x + 5x = 35$

$\Rightarrow 11x = 35$

$\therefore x = \frac{35}{11}$ মিটার

ধরি, খুঁটির A বিন্দুতে চাপের পরিমাণ P ও C বিন্দুতে চাপের পরিমাণ Q এবং চাপদ্বয়ের লব্ধি E বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore P.AE = Q.CE$

$\Rightarrow P(AD + DE) = Q(OE + OC)$

$$\Rightarrow P\left(3 + \frac{35}{11}\right) = Q\left(7 - \frac{35}{11} + 6\right)$$

[$\because OC = OB - BC = 10 - 4 = 6$ মিটার]

$$\Rightarrow P\left(\frac{33 + 35}{11}\right) = Q\left(\frac{143 - 35}{11}\right)$$

$$\Rightarrow P = \frac{108}{68} Q$$

$$\therefore P = \frac{27}{17} Q$$

আবার, $P + Q - 50 - 60 = 0$

[∵ খুঁটি দুটির চাপ খাঁড়া উপরের দিকে এবং 60 kg ওজন ও 50 kg ওজন খাঁড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করছে।]

$\Rightarrow P + Q = 110$

$\Rightarrow \frac{27}{17}Q + Q = 110$

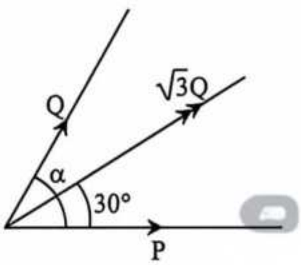
$\Rightarrow \frac{44Q}{17} = 110$

$\Rightarrow 44Q = 110 \times 17$

$\Rightarrow Q = \frac{110 \times 17}{44} = \frac{85}{2} = 42.5$ কেজি **(Ans.)**

$\therefore P = \frac{27}{17} \times \frac{85}{2} = 67.5$ কেজি **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ২৩ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: **ΔABC-এর A, B ও C** বিন্দুতে যথাক্রমে **P, Q, R** সদৃশ সমান্তরাল বলত্রয় কার্যরত এবং ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O

(ক) দুটি বলের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন লব্ধির মান যথাক্রমে **9 N** ও **4 N** হলে, বলদ্বয় নির্ণয় কর। [সংশোধিত] [সি. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমান কর যে, **P = Q** ও **P = 2Q.** [সি. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে এদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা O বিন্দুগামী হলে, প্রমাণ কর যে, **P : Q : R = sin2A : sin2B : sin2C** [সি. বো. ২১]

সমাধান:

ক ধরি, বলদ্বয় P ও Q যেখানে $P > Q$

$\therefore P + Q = 9$ N..... (i)

এবং $P - Q = 4$ N ...... (ii)

(i) + (ii) করে পাই,

$2P = 13$ N

$\Rightarrow P = \frac{13}{2}$ N

$\therefore P = 6.5$ N **(Ans.)**

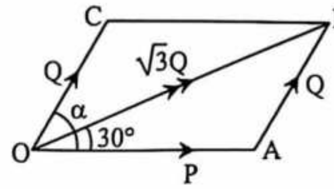
(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$2Q = 5$ N

$\Rightarrow Q = \frac{5}{2}$ N

$\therefore Q = 2.5$ N **(Ans.)**

খ



এখানে, P ও Q বল দুটির লব্ধি $\sqrt{3}Q$, যা P এর ক্রিয়া রেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে।

∴ ΔAOB থেকে,

$$\cos30° = \frac{P^2 + (\sqrt{3}Q)^2 - Q^2}{2.P\sqrt{3}Q}$$ [ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র]

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3}PQ = P^2 + 3Q^2 - Q^2$

$\Rightarrow P^2 + 2Q^2 - 3PQ = 0$

$\Rightarrow P^2 - 2PQ - PQ + 2Q^2 = 0$

$\Rightarrow P(P - 2Q) - Q(P - 2Q) = 0$

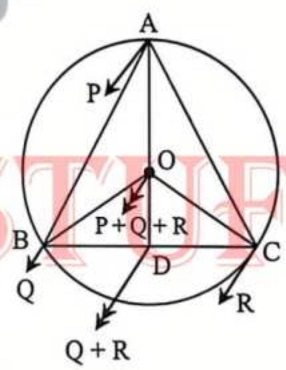
$\Rightarrow (P - 2Q)(P - Q) = 0$

হয়, $P - 2Q = 0$ | অথবা, $P - Q = 0$

$\therefore P = 2Q$ | $\therefore P = Q$

$\therefore P = Q$ এবং $P = 2Q$ **(Proved)**

গ এখানে, ΔABC এর A, B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q ও R সদৃশ সমান্তরাল বলত্রয় কার্যরত এবং ΔABC এর পরিকেন্দ্র O। A, O যোগ করে বর্ধিত করি যা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। Q ও R এর লব্ধি D বিন্দুতে কার্যরত।



$\therefore Q.BD = R.CD$

$\Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD}$

$\Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{\frac{CD}{OD}}{\frac{BD}{OD}}$ ......(i)

যেহেতু OB = OC = পরিব্যাসার্ধ, সেহেতু ∠OCD = ∠OBD

এখন, ΔCOD হতে পাই,

$\frac{CD}{\sin\angle COD} = \frac{OD}{\sin\angle OCD}$

$\Rightarrow \frac{CD}{OD} = \frac{\sin\angle COD}{\sin\angle OCD}$

অনুরূপভাবে, $\frac{BD}{OD} = \frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle OBD}$

(i) নং হতে পাই, $\frac{Q}{R} = \dfrac{\frac{\sin\angle COD}{\sin\angle OCD}}{\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle OBD}} = \dfrac{\frac{\sin\angle COD}{\sin\angle OBD}}{\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle OBD}}$

$[\because \angle OCD = \angle OBD]$

$= \frac{\sin\angle COD}{\sin\angle BOD} = \frac{\sin(\pi - \angle AOC)}{\sin(\pi - \angle AOB)}$

$[\because \angle COD = \pi - \angle AOC$ এবং $\angle BOD = \pi - \angle AOB]$

$= \frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle AOB}$

$\therefore \frac{Q}{R} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C}$ $[\because 2 \times$ বৃত্তস্থ কোণ = কেন্দ্রস্থ কোণ$]$

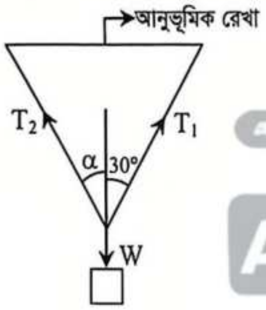
$\therefore Q : R = \sin 2B : \sin 2C$

অনুরূপভাবে, $\frac{P}{Q} = \frac{\sin 2A}{\sin 2B}$

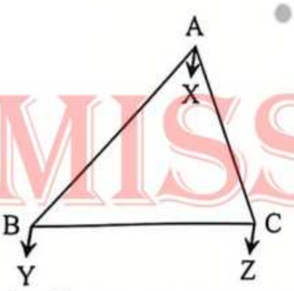
$\Rightarrow P : Q = \sin 2A : \sin 2B$

$\therefore P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▸ ২৪ দৃশ্যকল্প-১: W ওজনের বস্তুটি দুইটি সুতার সাহায্যে বেঁধে ঝুলিয়ে সাম্যাবস্থায় রাখা হল।



দৃশ্যকল্প-২:



(ক) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়াশীল 3P, 4P ও 5P মানের বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ কর যে, প্রথম বল দুইটি পরস্পর লম্ব। [দি. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে, α এর মান কতো হলে T_2 টানের মান সর্বনিম্ন হবে? [দি. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বলত্রয়ের লব্ধি ত্রিভুজটির লম্ব বিন্দুগামী হলে, প্রমাণ কর যে, **X : Y : Z = tanA : tanB : tanC** [সি. বো. ২১]

সমাধান:

ক ধরি, 3P ও 4P বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ α

$\therefore (5P)^2 = (3P)^2 + (4P)^2 + 2.3P.4P.\cos\alpha$

$\Rightarrow 25P^2 = 9P^2 + 16P^2 + 24P^2\cos\alpha$

$\Rightarrow 24P^2\cos\alpha = 0$

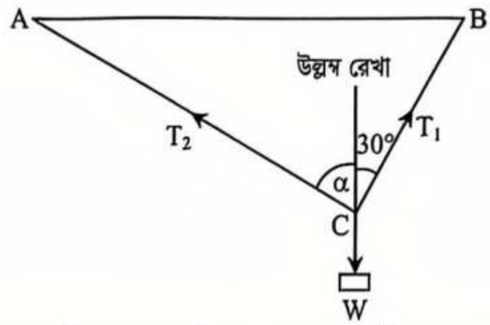
$\Rightarrow \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = \cos 90°$

$\Rightarrow \alpha = 90°$

$\therefore$ প্রথম বল দুটি পরস্পরের উপর লম্ব। **(Proved)**

খ



মনে করি, CB বরাবর টান T_1, CA বরাবর টান T_2 ও W ওজন খাঁড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে। বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকে বলে লামির উপপাদ্য থেকে পাই,

$\frac{T_1}{\sin(T_2 \wedge W)} = \frac{T_2}{\sin(T_1 \wedge W)} = \frac{W}{\sin(T_1 \wedge T_2)}$

$\Rightarrow \frac{T_2}{\sin(180° - 30°)} = \frac{W}{\sin(\alpha + 30°)}$

$\Rightarrow \frac{T_2}{\sin 30°} = \frac{W}{\sin(\alpha + 30°)}$

$\Rightarrow T_2 = \frac{W\sin 30°}{\sin(\alpha + 30°)}$

$\therefore T_2 = \frac{W}{2\sin(\alpha + 30°)}$ $\left[\because \sin 30° = \frac{1}{2}\right]$

T_2 এর মান সর্বনিম্ন হবে যদি $\sin(\alpha + 30°) = 1$ হয়।

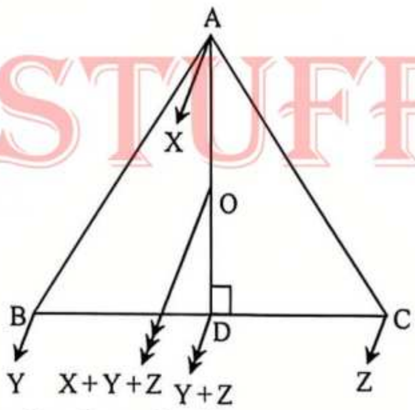
$\therefore \sin(\alpha + 30°) = 1$

$\Rightarrow \sin(\alpha + 30°) = \sin 90°$

$\Rightarrow \alpha + 30° = 90°$

$\therefore \alpha = 60°$ **(Ans.)**

গ ΔABC এর লম্ববিন্দু O, AO যোগ করে বর্ধিত করি যা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।



Y ও Z এর লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$Y.BD = Z.CD$ .....(i)

ΔABD এ, $\tan B = \frac{AD}{BD}$

$\Rightarrow BD = \frac{AD}{\tan B}$

ΔACD এ, $\tan C = \frac{AD}{CD}$

$\Rightarrow CD = \frac{AD}{\tan C}$

(i) নং হতে পাই,

$$Y.\frac{AD}{\tan B} = Z.\frac{AD}{\tan C}$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{\tan B} = \frac{Z}{\tan C}$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{Z} = \frac{\tan B}{\tan C}$$

$$\Rightarrow Y:Z = \tan B : \tan C$$

অনুরূপভাবে, $\frac{X}{Y} = \frac{\tan A}{\tan B}$

$\therefore X : Y : Z = \tan A : \tan B : \tan C$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ২৫ দৃশ্যকল্প-১: একটি কাঁঠাল গাছের তিনটি ডালের **A, B, C** বিন্দুতে যথাক্রমে 8kg, 7kg ও 5kg ওজনের তিনটি কাঁঠাল ঝুলছে।
দৃশ্যকল্প-২: **AB = 15** মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি হালকা তক্তা দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে অবস্থিত। **A** ও **B** প্রান্তে যথাক্রমে **24kg** ও **32kg** ওজনের দুইজন বালক ঝুলছে।

(ক) একটি বিন্দুর উপর ক্রিয়ারত বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে এবং শেষ বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ 45° হলে, বল তিনটির মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ কাঁঠালগুলোর ওজনের লব্ধি ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দুগামী হলে দেখাও যে, **cosA : cosB : cosC = 35 : 50 : 28** যেখানে **a = 4, b = 5, c = 2** [ম. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ খুঁটি দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব **AB** এর এক-তৃতীয়াংশ হলে খুঁটি দুইটির অবস্থান নির্ণয় কর। [ম. বো. ২১]

সমাধান:

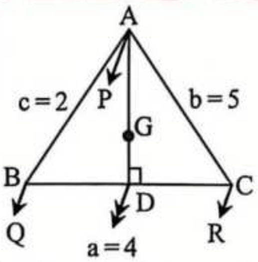
ক ধরি,বলত্রয়, Q, R, S এবং R ও S এর মধ্যবর্তী কোণ = 45° বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে বলে R ও S এর লব্ধি Q এর সমান হবে।

$$\therefore Q^2 = R^2 + S^2 + 2RS\cos 45^\circ$$

$$= R^2 + S^2 + 2\frac{RS}{\sqrt{2}}$$

$\therefore Q^2 = R^2 + S^2 + \sqrt{2}\,RS$, যা নির্ণেয় সম্পর্ক। **(Ans.)**

খ ΔABC এর A, B, C বিন্দুতে P, Q, R বলত্রয় ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে।



P = 8 kg, Q = 7 kg, R = 5 kg, BC = a = 4
AC = b = 5 এবং AB = c = 2

কাঁঠালগুলোর ওজনের লব্ধি ত্রিভুজের লম্ববিন্দু G তে ক্রিয়াশীল। $AD \perp BC$, Q ও R বলের লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$\therefore Q.BD = R.CD$ .... (i)

ΔABD এ $\tan B = \frac{AD}{BD}$

$\Rightarrow BD = \frac{AD}{\tan B}$

ΔACD এ $\tan C = \frac{AD}{CD}$

$\Rightarrow CD = \frac{AD}{\tan C}$

(i) নং হতে পাই,

$$Q.\frac{AD}{\tan B} = R.\frac{AD}{\tan C}$$

$$\Rightarrow Q\frac{\cos B}{\sin B} = R.\frac{\cos C}{\sin C}$$

$$\Rightarrow Q.\frac{\cos B}{\frac{b}{2r}} = R.\frac{\cos C}{\frac{c}{2r}}$$

$\left[\because \Delta ABC \text{ এর পরিব্যাসার্ধ } r \text{ হলে, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r\right]$

$$\Rightarrow \frac{\cos B}{\frac{b}{Q}} = \frac{\cos C}{\frac{c}{R}}$$

অনুরূপভাবে, $\frac{\cos A}{\frac{a}{P}} = \frac{\cos B}{\frac{b}{Q}}$

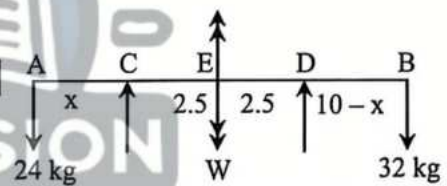
$$\therefore \frac{\cos A}{\frac{a}{P}} = \frac{\cos B}{\frac{b}{Q}} = \frac{\cos C}{\frac{c}{R}}$$

$$\Rightarrow \cos A : \cos B : \cos C = \frac{a}{P} : \frac{b}{Q} : \frac{c}{R} = \frac{4}{8} : \frac{5}{7} : \frac{2}{5}$$

$[\because P = 8kg, Q = 7kg, R = 5\text{ kg}, a = 4, b = 5, c = 2]$

$= \frac{1}{2} : \frac{5}{7} : \frac{2}{5} = 35 : 50 : 28$ **(Showed)**

গ



চিত্রে, AB = 15 মিটার। C ও D বিন্দুতে দুইটি খুঁটির মধ্যবর্তী দূরত্ব

$CD = \frac{1}{3}$ AB মিটার $= \frac{1}{3} \times 15 = 5$ মিটার

ধরি, AC = x মিটার

$\therefore BD = (15 - x - 5) = (10 - x)$ মিটার

ধরি, AB এর C ও D বিন্দুতে অবস্থিত খুঁটি দুইটির উপর সমান চাপ ক্রিয়া করে।

তাহলে এদের লব্ধি CD এর মধ্যবিন্দু E তে ক্রিয়াশীল উপরের দিকে।

$CE = ED = \frac{CD}{2} = \frac{5}{2}$ মিটার = 2.5 মিটার

A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল 24 kg ওজন এবং 32 kg ওজনের লব্ধি E বিন্দুতে W বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়াশীল।

$$\therefore 24.AE = 32.BE$$

$$\Rightarrow 3(AC + CE) = 4(BD + ED)$$

$$\Rightarrow 3(x + 2.5) = 4(10 - x + 2.5)$$

$$\Rightarrow 3x + 7.5 = 40 - 4x + 10$$

$$\Rightarrow 7x = 42.5$$

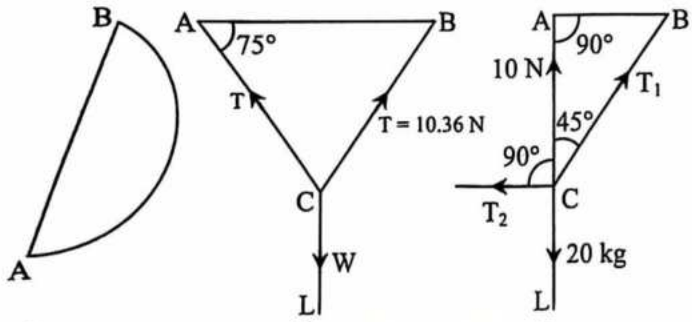
$\Rightarrow x = \frac{42.5}{7} = 6.07$ মিটার

$\therefore AC = x = 6.07$ মিটার

এবং BD = (10 – x) মিটার = (10 – 6.07) মিটার = 3.93 মিটার।

১ম খুঁটিটি A প্রান্ত হতে 6.07 মিটার দূরে অবস্থিত এবং ২য় খুঁটিটি B প্রান্ত হতে 3.93 মিটার দূরে অবস্থিত। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৬



চিত্র-১ চিত্র-২ চিত্র-৩

প্রতিটি চিত্রে A ও B বিন্দুতে হাল্কা মসৃণ দড়ির দুই প্রান্ত বাঁধা যার ভেতর দিয়ে বিভিন্ন ওজন অবাধে গড়িয়ে চলতে পারে।

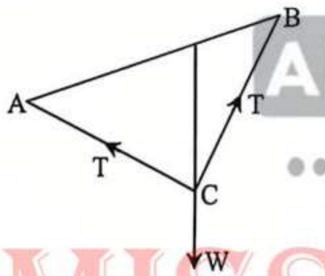
(ক) ১নং চিত্রের ক্ষেত্রে দড়ির ভেতর দিয়ে একটি ওজন অবাধে ছেড়ে দিলে সেটি কোথায় কীভাবে ঝুলবে চিত্র অঙ্কনপূর্বক দেখাও। [কু. বো. ১৯]

(খ) ২নং চিত্রের ক্ষেত্রে W ওজন সাম্যাবস্থায় থাকলে W এর মান কত নিউটন নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৯]

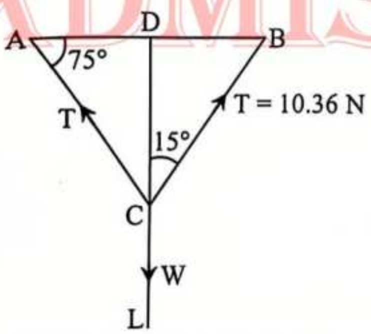
(গ) ৩নং চিত্রে C বিন্দুতে 20 kg ভরকে সাম্যাবস্থায় ঝুলানোর জন্য T_1 এবং T_2 এর মান কত হওয়া প্রয়োজন তা নিউটন এককে নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৯]

সমাধানঃ

ক ১নং চিত্রের ক্ষেত্রে দড়ির ভেতর দিয়ে একটি ওজন অবাধে ছেড়ে দিলে সেটি সুতার নির্দিষ্ট বিন্দু C তে ঝুলবে, যেখানে CA এবং CB অংশের টান সমান (T) হবে।



খ



যেহেতু W ওজন সাম্যাবস্থায় থাকে, সেহেতু C, ACB দড়ির মধ্যবিন্দু হবে।

$\therefore$ CA = CB

$\therefore \angle A = \angle B = 75°$

$\therefore \angle C = 180° - 2 \times 75 = 30°$

$CD \perp AB$ হলে, $\angle ACD = \angle BCD = 15°$

$\therefore$ CA বরাবর টান T, CB বরাবর টান T এবং W বলটি সাম্যাবস্থায় আছে।

$\therefore$ লামির উপপাদ্য হতে পাই,

$$\frac{T}{\sin BCL} = \frac{T}{\sin ACL} = \frac{W}{\sin ACB}$$

$$\Rightarrow \frac{10.36}{\sin\angle BCL} = \frac{W}{\sin 30°}$$

$$\Rightarrow \frac{10.36}{\sin(180° - 15°)} = \frac{W}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{10.36}{\sin 15°} = \frac{2W}{1}$$

$$\Rightarrow 2W \sin 15° = 10.36$$

$$\Rightarrow W = \frac{10.36}{2 \times \sin 15°}$$

$\therefore$ W = 20.014 N **(Ans.)**

গ 20 kg ভরের বস্তুর ওজন = 20 × 9.8 N = 196 N

T_1, T_2 ও 10 N বল তিনটি, 196 N ওজনের বস্তুকে C বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় ধরে রেখেছে। 10 N বস্তুর ওজনের বিপরীত দিকে ক্রিয়া করায় T_1 ও T_2 বলদ্বয়ের সম্মিলিত টান = (196 – 10) N = 186 N

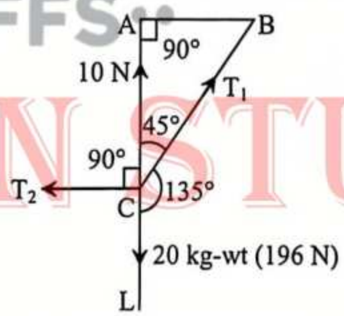
ধরি, W = 186 N

তাহলে, T_1 ও T_2 বলদ্বয় C বিন্দুতে W ওজনের বস্তুকে সাম্যাবস্থায় রেখেছে।

T_1 ও T_2 টানদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ = 90° + 45° = 135°

T_2 ও W টানদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ = 90°

T_1 ও W টানদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ = 180° – 45° = 135°



তাহলে, লামির উপপাদ্য অনুসারে,

$$\frac{T_1}{\sin 90°} = \frac{T_2}{\sin 135°} = \frac{W}{\sin 135°}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{186}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad [\because W = 186 N]$$

$$\Rightarrow T_1 = \sqrt{2}\, T_2 = 186\sqrt{2}$$

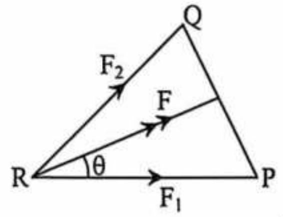
$\therefore T_1 = 186\sqrt{2}$ N

এবং T_2 = 186 N

$\therefore$ বস্তুকে ঝুলানোর জন্য $T_1 = 186\sqrt{2}$ N এবং T_2 = 186 N বল প্রয়োজন। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ২৭ দৃশ্যকল্প-১: S ও T দুইটি বল যেখানে S > T

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) যদি P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকে এবং $\sqrt{2}P = \sqrt{2}Q = R$ হয় তবে P, Q এবং R, P এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [য. বো. ১৯]

(খ) যদি দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লিখিত বলগুলো সমবিন্দুগামী হয় এবং উহাদের লব্ধি অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমত্রিখণ্ডিত করে তবে বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ ও লব্ধি নির্ণয় কর। [য. বো. ১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ $F_1 \propto \cos P$, $F_2 \propto \cos Q$ এবং F_1, F_2 এর লব্ধি F হলে, দেখাও যে, $R - \theta = \frac{1}{2}(R + Q - P)$ [চ. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ১৭]

সমাধান:

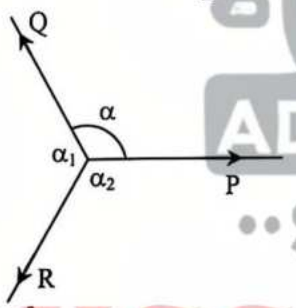
ক P, Q, R বলত্রয় সাম্যবস্থায় আছে।

ধরি, P, Q এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে এদের লব্ধি R হবে।

$\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow (\sqrt{2}P)^2 = P^2 + P^2 + 2P.P.\cos\alpha$

$[\because R = \sqrt{2}P$ এবং $P = Q]$



$\Rightarrow 2P^2 = 2P^2 + 2P^2\cos\alpha$

$\Rightarrow 2P^2 - 2P^2 = 2P^2\cos\alpha$

$\Rightarrow 0 = 2P^2\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = \cos 90°$

$\therefore \alpha = 90°$

P, Q এর মধ্যবর্তী কোণ 90° **(Ans.)**

আবার ধরি, R, P এর মধ্যবর্তী কোণ α_2 হলে এদের লব্ধি Q হবে।

$Q^2 = R^2 + P^2 + 2R.P\cos\alpha_2$

$\Rightarrow Q^2 = (\sqrt{2}Q)^2 + Q^2 + 2\sqrt{2}Q.Q\cos\alpha_2$

$[\because R = \sqrt{2}Q$ এবং $P = Q]$

$\Rightarrow Q^2 = 2Q^2 + Q^2 + 2\sqrt{2}Q^2\cos\alpha_2$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}Q^2\cos\alpha_2 = -2Q^2$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos\alpha_2 = -1$

$\Rightarrow \cos\alpha_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \alpha_2 = 135°$

$\therefore$ R, P এর মধ্যবর্তী কোণ 135° **(Ans.)**

খ ধরি, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ 3α

তাহলে, লব্ধি R, S বলের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

লব্ধি R বলের দিকে বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে,

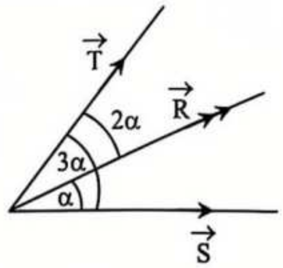
$R\cos 0° = T\cos 2\alpha + S\cos(-\alpha)$

$\Rightarrow R = T(2\cos^2\alpha - 1) + S\cos\alpha$ .... (i)

আবার, লব্ধি R এর লম্ব দিকে বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে,

$R\sin 0° = T\sin 2\alpha + S\sin(-\alpha)$

$\Rightarrow 0 = T2\sin\alpha.\cos\alpha - S\sin\alpha$



$\Rightarrow 0 = \sin\alpha(2T\cos\alpha - S)$

$\Rightarrow 2T\cos\alpha = S$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{S}{2T}\right)$

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$R = 2T\cos^2\alpha - T + S\cos\alpha$

$\Rightarrow R = 2T\frac{S^2}{4T^2} - T + S.\frac{S}{2T} = \frac{S^2}{2T} - T + \frac{S^2}{2T}$

$= \frac{S^2}{T} - T$

$= \frac{S^2 - T^2}{T}$

$\therefore$ বল দুইটির অন্তর্গত কোণ $3\alpha = 3\cos^{-1}\left(\frac{S}{2T}\right)$ এবং লব্ধি $\frac{S^2 - T^2}{T}$ **(Ans.)**

গ $F_1 \propto \cos P$

$\Rightarrow F_1 = k\cos P$

এবং $F_2 \propto \cos Q$

$\Rightarrow F_2 = k\cos Q$

F_1 ও F_2 এর লব্ধি F হলে,

$\therefore F^2 = F_1{}^2 + F_2{}^2 + 2F_1.F_2.\cos R$

$= k^2\cos^2P + k^2\cos^2Q + 2k\cos P.k\cos Q.\cos R$

$= k^2(\cos^2P + \cos^2Q + 2\cos P.\cos Q.\cos R)$

$= k^2(1 - \cos^2R)$

$[\therefore \cos^2p + \cos^2Q + \cos^2R + 2\cos P.\cos Q\cos R = 1]$

$= k^2\sin^2R$

$\therefore F = k\sin R$

F_1 ও F এর মধ্যবর্তী কোণ θ

$\therefore F_2$ ও F এর মধ্যবর্তী কোণ $R - \theta$

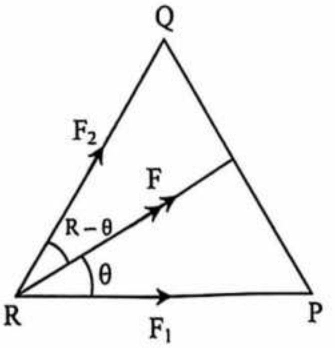
ত্রিভুজের সাইন সূত্রানুসারে,

$$\frac{F_1}{\sin(R-\theta)} = \frac{F}{\sin R}$$

$$\Rightarrow \frac{k\cos P}{\sin(R-\theta)} = \frac{k\sin R}{\sin R}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos P}{\sin(R-\theta)} = 1$$

$$\Rightarrow \sin(R-\theta) = \cos P$$



$$\Rightarrow \sin(R-\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - P\right)$$

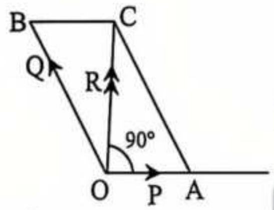
$$\Rightarrow R - \theta = \frac{\pi}{2} - P$$

$$\Rightarrow R - \theta = \frac{P+Q+R-2P}{2} \qquad [\because P+Q+R=\pi]$$

$$\Rightarrow R - \theta = \frac{Q+R-P}{2}$$

$$\therefore R - \theta = \frac{1}{2}(R+Q-P) \text{ (Showed)}$$

প্রশ্ন ▸ ২৮ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: P ও Q দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের সাথে একই সমতলে r দূরত্বে X মানের দুটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত।

(ক) কোন বিন্দুতে 1, 2 এবং $\sqrt{3}$ একক বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২; ম. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে যদি $R = \frac{2}{3}Q$ হয়, তবে P ও Q বলের অনুপাত নির্ণয় কর। [ব. বো. ১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, এদের লব্ধি $\frac{rX}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। [ব. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৭; দি. বো. ১৭]

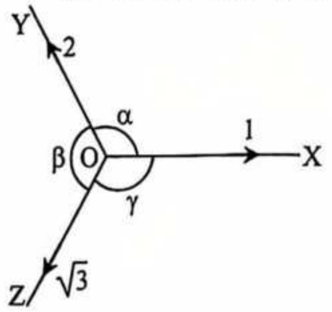
সমাধানঃ

ক মনে করি,

1 একক ও 2 একক বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার অন্তবর্তী কোণ α

2 একক ও $\sqrt{3}$ একক বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার অন্তবর্তী কোণ β

এবং $\sqrt{3}$ একক ও 1 একক বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার অন্তবর্তী কোণ γ



বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে পাই,

1 ও 2 বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

$$(\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2^2 + 2\times 1\times 2\times\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 3 = 1 + 4 + 4\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 3 - 5 = 4\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 4\cos\alpha = -2$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = 120°$$

আবার, 2 ও $\sqrt{3}$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ β হলে,

$$1^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2\times 2\times\sqrt{3}\cos\beta$$

$$\Rightarrow 1 = 4 + 3 + 4\sqrt{3}\cos\beta$$

$$\Rightarrow 1 - 7 = 4\sqrt{3}\cos\beta$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{3}\cos\beta = -6$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{-6}{4\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \beta = 150°$$

এখন,

$\sqrt{3}$ ও 1 এর মধ্যকার কোণ γ হলে, $\alpha + \beta + \gamma = 360$

$$\Rightarrow \gamma = 360° - \alpha - \beta$$

$$\Rightarrow \gamma = 360° - 120° - 150°$$

$$\therefore \gamma = 90°$$

∴ বলগুলির মধ্যবর্তী কোণ 120°, 150° ও 90° **(Ans.)**

খ মনে করি, O বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি $R = \frac{2}{3}Q$ P বলের সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে।

$$\tan 90° = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0} = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow P + Q\cos\alpha = 0$$

$$\therefore \cos\alpha = -\frac{P}{Q} \text{ .... (i)}$$

বলদ্বয়ের লব্ধি R হলে $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ হতে পাই,

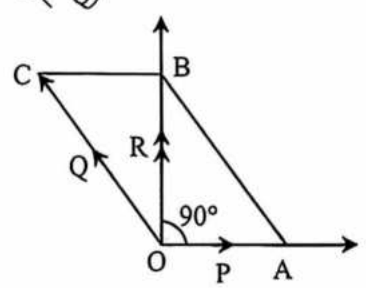
$$\left(\frac{2}{3}Q\right)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\left(-\frac{P}{Q}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{4Q^2}{9} = P^2 + Q^2 - 2P^2$$

$$\Rightarrow \frac{4Q^2}{9} = Q^2 - P^2$$

$$\Rightarrow P^2 = Q^2 - \frac{4Q^2}{9}$$

$$\Rightarrow P^2 = \frac{9Q^2 - 4Q^2}{9}$$

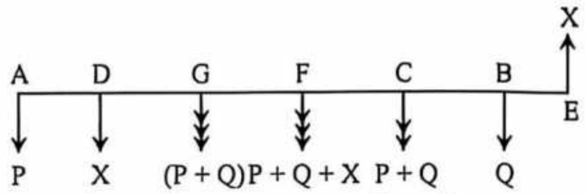


$$\Rightarrow P^2 = \frac{5Q^2}{9} \Rightarrow 9P^2 = 5Q^2 \Rightarrow \frac{P^2}{Q^2} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore P : Q = \sqrt{5} : 3 \text{ (Ans.)}$$

গ মনে করি, AB রেখার A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে P ও Q মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়াশীল হলে এদের লব্ধি (P + Q), C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

আবার, r ব্যবধানে D ও E বিন্দুতে X মানের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে।



তাহলে, C বিন্দুতে ক্রিয়ারত P + Q ও D বিন্দুতে ক্রিয়ারত X মানের সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি (P + Q + X), F বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore (P+Q).CF = X.DF$ ...... (i)

আবার ধরি, F বিন্দুতে ক্রিয়ারত (P + Q + X) ও E বিন্দুতে ক্রিয়ারত X মানের বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি G বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore (P+Q+X).FG = X.EG$

$\Rightarrow (P+Q).FG + X.FG = X.EG$

$\Rightarrow (P+Q).FG = X.EG - X.FG$

$\Rightarrow (P+Q).FG = X(EG - FG)$

$\therefore (P+Q).FG = X.EF$ ...... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$(P+Q).CF + (P+Q)FG = X.DF + X.EF$

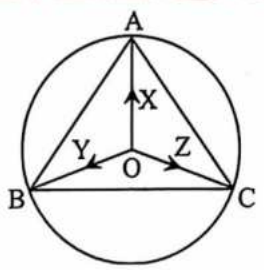
$\Rightarrow (P+Q)(CF+FG) = X(DF+EF)$

$\Rightarrow (P+Q).CG = X.DE = X.r$

$\therefore CG = \frac{rX}{P+Q}$

$\therefore$ লব্ধি $\frac{rX}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। **(Showed)**

প্রশ্ন ▸ ২৯



O হলো বৃত্তটির কেন্দ্র।

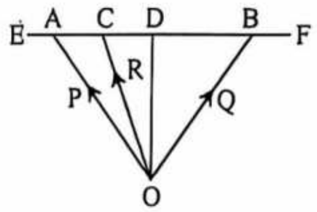
(ক) যদি P, Q, R বলগুলো O বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং কোন ছেদক P, Q, R এর ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে দেখাও যে, $\frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB} = \frac{R}{OC}$

(খ) X, Y, Z বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, X : Y : Z = acosA : bcosB : ccosC. [সি. বো. ১৯]

(গ) বলের লম্বাংশ উপপাদ্যটি প্রমাণ কর। [সি. বো. ১৯]

সমাধানঃ

ক মনে করি, O বিন্দুতে P ও Q মানের বল দুইটি ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি = R। EF ছেদক এদেরকে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। EF এর উপর OD লম্ব টানি।



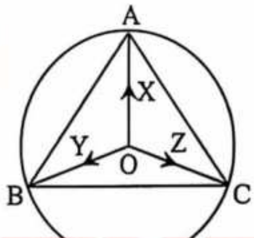
এখন OD বরাবর P ও Q এর লম্বাংশের যোগফল একই দিকে R এর লম্বাংশের সমান।

$\therefore P\cos AOD + Q\cos BOD = R\cos COD$

$\Rightarrow P\frac{OD}{OA} + Q\frac{OD}{OB} = R\frac{OD}{OC}$

$\therefore \frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB} = \frac{R}{OC}$ **(Showed)**

খ মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত OA, OB ও OC বরাবর X, Y, Z ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় থাকে।



লামির সূত্র থেকে পাই,

$\frac{X}{\sin BOC} = \frac{Y}{\sin COA} = \frac{Z}{\sin AOB}$

$\Rightarrow \frac{X}{\sin 2\angle BAC} = \frac{Y}{\sin 2\angle ABC} = \frac{Z}{\sin 2\angle ACB}$

$\Rightarrow \frac{X}{\sin 2A} = \frac{Y}{\sin 2B} = \frac{Z}{\sin 2C}$

[∵ একই চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ]

$\Rightarrow \frac{X}{2\sin A\cos A} = \frac{Y}{2\sin B\cos B} = \frac{Z}{2\sin C\cos C}$

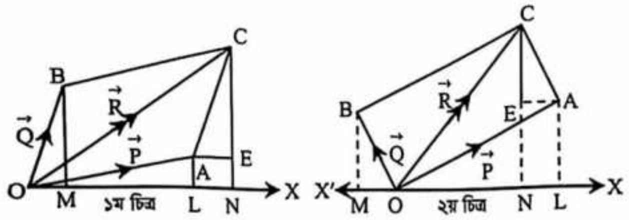
$\Rightarrow \frac{X}{a\cos A} = \frac{Y}{b\cos B} = \frac{Z}{c\cos C}$

$\left[ABC \text{ ত্রিভুজে } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{k} \text{ (ধরি) } \sin A = ak, \sin B = bk, \sin C = ck\right]$

$\therefore X : Y : Z = a\cos A : b\cos B : c\cos C$ **(Showed)**

গ কোনো সমতলে একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুইটি বলের নির্দিষ্ট দিকে লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি, ঐ একই দিকে বলদ্বয়ের লব্ধির লম্বাংশের সমান।

প্রমাণ: মনে করি, O বিন্দুতে একই সময়ে OA ও OB রেখা বরাবর যথাক্রমে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ বলদ্বয় ক্রিয়াশীল এবং তাদের লব্ধি $\vec{R}$, OACB সামন্তরিকের কর্ণ OC বরাবর ক্রিয়াশীল। কোন নির্দিষ্ট দিক OX এর উপর A, B, C বিন্দু থেকে যথাক্রমে AL, BM ও CN লম্ব আঁকি। ২য় চিত্রে BM, OX এর বর্ধিতাংশের উপর মিলিত হবে।



এখন,

OX বরাবর P বলের লম্বাংশ = OX এর উপর $\vec{P}$ বলের লম্ব অভিক্ষেপ = OL

OX বরাবর $\vec{Q}$ বলের লম্বাংশ = OX এর উপর $\vec{Q}$ বলের লম্ব অভিক্ষেপ = OM [১ম চিত্রে]

OX বরাবর R বলের লম্বাংশ OX এর উপর R বলের লম্ব অভিক্ষেপ = ON [১ম চিত্রে]

এখন, ১ম চিত্রে

এখন, OX বরাবর $\vec{P}$ বলের লম্বাংশ + $\vec{Q}$ বলের লম্বাংশ

= OX এর উপর $\vec{P}$ বলের লম্ব অভিক্ষেপ + $\vec{Q}$ বলের লম্ব অভিক্ষেপ

= OL + OM

= OL + LN [∵ OB = AC এবং OB ∥ AC ∴ $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ এর লম্ব অভিক্ষেপদ্বয় পরস্পর সমান। অর্থাৎ, OM = LN]

= ON

= OX এর উপর $\vec{R}$ বলের লম্ব অভিক্ষেপ

= OX বরাবর $\vec{R}$ বলের লম্বাংশ

আবার ২য় চিত্রে,

এখন, OX বরাবর $\vec{P}$ বলের লম্ব অভিক্ষেপ + $\vec{Q}$ বলের লম্ব অভিক্ষেপ

= OL + (– OM)

= OL – LN [∵ OB = AC এবং OB ∥AC ∴ $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{AC}$এর লম্ব অভিক্ষেপদ্বয় পরস্পর সমান। অর্থাৎ, OM = LN]

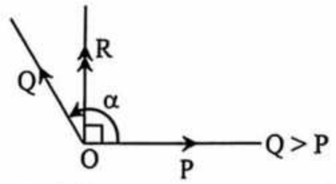
= ON

= OX এর উপর $\vec{R}$ বলের লম্ব অভিক্ষেপ

= OX বরাবর $\vec{R}$ বলের লম্বাংশ

অতএব, কোনো সমতলে একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুইটি বলের নির্দিষ্ট দিকে লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি, ঐ একই দিকে বলদ্বয়ের লব্ধির লম্বাংশের সমান। **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ৩০ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: 17 সে.মি. দীর্ঘ একটি সুতার প্রান্তদ্বয় একই অনুভূমিক রেখায় 13 সে.মি. দূরে অবস্থিত দুটি বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। সুতাটির এক প্রান্ত হতে 5 সে.মি. দূরে তার সাথে 3 কেজি ওজনের বস্তু সংযুক্ত করা হলো।

(ক) পরস্পর 60° কোণে S ও T মানের বলদ্বয়ের লব্ধির মান $\sqrt{3}$T এবং S বলের ক্রিয়ারেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, S = T

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে R = 15N এবং P ও Q বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি 25N হলে, বলদ্বয় নির্ণয় কর। [দি. বো. ১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুযায়ী সুতাটির প্রত্যেক অংশের টান নির্ণয় কর। [দি. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২১]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে,

S ও T বলের অন্তর্গত কোণ α = 60° এবং লব্ধি $\sqrt{3}$T হলে,

$(\sqrt{3}T)^2 = S^2 + T^2 + 2ST\cos60°$

$\Rightarrow 3T^2 = S^2 + T^2 + 2ST\cos60°$

$\Rightarrow 2T^2 = S^2 + ST$

$\Rightarrow S^2 + ST - 2T^2 = 0$

$\Rightarrow S^2 + 2ST - ST - 2T^2 = 0$

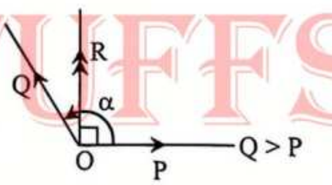
$\Rightarrow S(S + 2T) - T(S + 2T) = 0$

$\Rightarrow (S - T)(S + 2T) = 0$

হয়, $S - T = 0$ অথবা, $S + 2T = 0$

$\therefore S = T$ **(Showed)** $S = -2T$ (গ্রহণযোগ্য নয়)

খ দেওয়া আছে,



R = 15 N

প্রশ্নমতে, P + Q = 25

$\Rightarrow P = 25 - Q$ .... (i)

আমরা জানি,

লব্ধি $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow 15^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha = 225$ ...... (ii)

আবার, $\tan90° = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\tan90°} = \dfrac{P + Q\cos\alpha}{Q\sin\alpha}$ [ব্যস্তকরণ করে]

$\Rightarrow \cot90° = \dfrac{P + Q\cos\alpha}{Q\sin\alpha}$

$\Rightarrow P + Q\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow Q\cos\alpha = -P$

$\therefore \cos\alpha = -\dfrac{P}{Q}$

$\cos\alpha$ এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$P^2 + Q^2 + 2PQ\left(-\frac{P}{Q}\right) = 225$$
$$\Rightarrow P^2 + Q^2 - 2P^2 = 225$$
$$\Rightarrow Q^2 - P^2 = 225$$
$$\Rightarrow (Q + P)(Q - P) = 225$$
$$\Rightarrow 25(Q - P) = 225$$
$$\Rightarrow Q - P = 9$$
$$\Rightarrow Q - (25 - Q) = 9 \quad \text{[i নং হতে]}$$
$$\Rightarrow Q - 25 + Q = 9$$
$$\Rightarrow 2Q = 9 + 25$$
$$\Rightarrow 2Q = 34$$
$$\therefore Q = 17$$

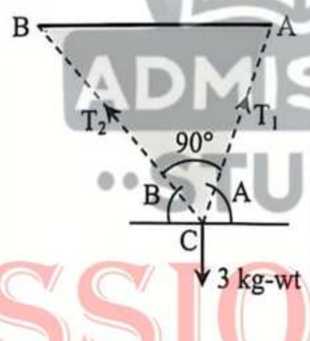
Q এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$P = 25 - 17$$
$$\therefore P = 8$$

$\therefore$ বলদ্বয় $P = 8$ N এবং $Q = 17$ N **(Ans.)**

গ 17 সে. মি. দীর্ঘ ACB সুতার A প্রান্ত হতে 5 সে. মি. দূরে C বিন্দুতে 3 কেজি ওজনের বস্তু ঝুলানো আছে। সুতার প্রান্তদ্বয় 13 সে. মি. ব্যবধানে A ও B বিন্দুতে বাধা আছে।

$$AC = 5$$
$$\therefore BC = 17 - 5 = 12$$
$$AC^2 + CB^2 = 5^2 + (12)^2$$
$$= 25 + 144$$
$$= 169$$
$$= (13)^2$$
$$= AB^2$$
$$\therefore \angle ACB = 90°$$



মনে করি, CA অংশের টান T_1 এবং CB অংশের টান T_2 তাহলে T_1, T_2 এবং 3 kg-wt বলত্রয় ভারসাম্যে আছে।

লামির সূত্রানুসারে,

$$\frac{T_1}{\sin(90° + B)} = \frac{T_2}{\sin(90° + A)} = \frac{3}{\sin 90°}$$
$$\Rightarrow \frac{T_1}{\cos B} = \frac{T_2}{\cos A} = 3$$
$$\Rightarrow \frac{T_1}{\frac{12}{13}} = \frac{T_2}{\frac{5}{13}} = 3$$
$$\therefore T_1 = 3 \times \frac{12}{13} \text{ kg-wt} = \frac{36}{13} \text{ kg-wt}$$

এবং $T_2 = 3 \times \frac{5}{13}$ kg-wt $= \frac{15}{13}$ kg-wt

$\therefore$ নির্ণেয় টানদ্বয় $\frac{36}{13}$ kg-wt এবং $\frac{15}{13}$ kg-wt **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩১ দৃশ্যকল্প-১: কোনো বিন্দুতে **2P** এবং **Q** মানের দুইটি বল ক্রিয়ারত আছে।

দৃশ্যকল্প-২: 8 মিটার দীর্ঘ ও 42 কেজি ওজনের **AB** একটি তক্তা দুইটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে স্থাপিত। একটি খুঁটি **A** প্রান্তে, অপরটি **B** প্রান্ত হতে 2 মিটার ভিতরে অবস্থিত।

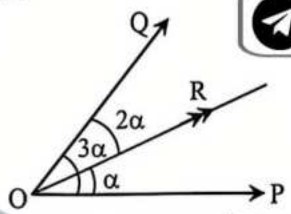
(ক) **P** ও **Q** বলদ্বয়ের লব্ধি **R** এবং মধ্যবর্তী কোণ 3α। **R** ও **P** এর মধ্যবর্তী কোণ α। লব্ধি **R** বরাবর **P** ও **Q** বলের উপাংশ সমান হলে দেখাও যে, $\frac{P}{Q} = 2\cos\alpha - \sec\alpha$

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ যদি $Q = 3P$ হয় এবং ১ম বলটিকে দ্বিগুণ ও ২য় বলটির মান 6 একক করে বৃদ্ধিপায় তবে লব্ধির দিক অপরিবর্তীত থাকে। **Q** এর মান নির্ণয় কর। [রা. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ১৭]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে 55 কেজি ওজনের একটি বালক তক্তাটিকে না উল্টিয়ে **B** প্রান্তের দিকে কত দূর যেতে পারবে। [রা. বো.; কু. বো.; চ. বো.; ব. বো. ১৮]

সমাধান:

ক

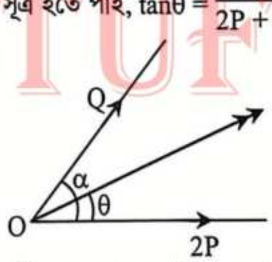


R বরাবর P ও Q বলের উপাংশ যথাক্রমে $P\cos(-\alpha) = P\cos\alpha$ এবং $Q\cos 2\alpha$

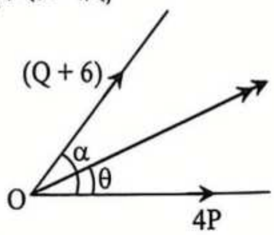
$$\therefore P\cos\alpha = Q\cos 2\alpha$$
$$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{2\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha}$$
$$\Rightarrow \frac{P}{Q} = 2\cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}$$
$$\therefore \frac{P}{Q} = 2\cos\alpha - \sec\alpha \text{ (Showed)}$$

খ মনে করি, O বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত 2P ও Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি, 2P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে θ কোণে উৎপন্ন করে।

বলের সামান্তরিকের সূত্র হতে পাই, $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{2P + Q\cos\alpha}$ ...... (i)



আবার ১ম বলটিকে দ্বিগুণ ও ২য় বলটির মান 6 একক বৃদ্ধি করলে অর্থাৎ O বিন্দুতে α কোণে 4P ও (Q + 6) মানের বলদ্বয় ক্রিয়াশীল হলে, তাদের লব্ধি 4P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই,



$$\tan\theta = \frac{(Q + 6)\sin\alpha}{4P + (Q + 6)\cos\alpha} \text{ .... (ii)}$$

প্রশ্নমতে, সমীকরণ (i) ও (ii) নং হতে পাই,

$$\frac{Q\sin\alpha}{2P + Q\cos\alpha} = \frac{(Q+6)\sin\alpha}{4P + (Q+6)\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{2P + Q\cos\alpha} = \frac{Q+6}{4P + (Q+6)\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow (2P + Q\cos\alpha)(Q+6) = Q\{4P + (Q+6)\cos\alpha\}$$

$$\Rightarrow 2PQ + 12P + Q(Q+6)\cos\alpha = 4PQ + Q(Q+6)\cos\alpha$$

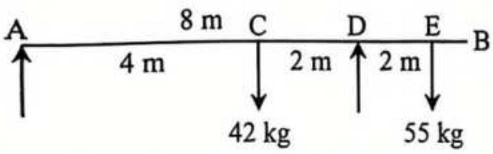
$$\Rightarrow 12P = 4PQ - 2PQ$$

$$\Rightarrow 12P = 2PQ$$

$$\Rightarrow Q = \frac{12P}{2P}$$

$\therefore Q = 6$ একক **(Ans.)**

গ



মনে করি, 8 মিটার দীর্ঘ AB তক্তার ওজন 42 কেজি যা তক্তার মধ্যবিন্দু C তে ক্রিয়া করে। AB তক্তাটি দুইটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে স্থাপিত। একটি খুঁটি A প্রান্তে ও অপর খুঁটি B প্রান্ত হতে 2 মিটার ভিতরে D বিন্দুতে অবস্থিত।

ধরি, 55 কেজি ওজনের একটি বালক তক্তাটিকে না উল্টিয়ে A প্রান্ত হতে B প্রান্তের দিকে E পর্যন্ত যেতে পারবে।

এখন, C তে 42 কেজি ওজন ও E তে 55 কেজি ওজন দ্বয়ের লব্ধি ওজন D তে খুঁটির উপর ক্রিয়া করবে তখন A খুঁটির উপর কোন চাপ পড়বে না।

$$\therefore 42.CD = 55.DE$$

$$\Rightarrow 42 \times 2 = 55.DE$$

$$\therefore DE = \frac{84}{55}$$

এখানে, $AB = 8$ মিটার

$\therefore AC = BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ মিটার

এবং $BD = 2$ মিটার

$\therefore CD = BC - BD = 4 - 2 = 2$ মিটার

$$\therefore AE = AC + CD + DE$$

$$= 4 + 2 + \frac{84}{55}$$

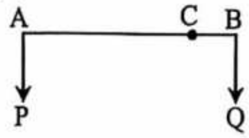
$$= 6 + \frac{84}{55}$$

$$= \frac{330 + 84}{55}$$

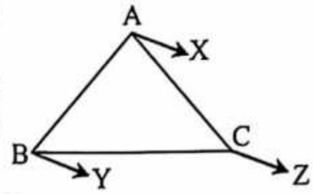
$= \frac{414}{55}$ মিটার

$\therefore$ বালকটি A প্রান্ত হতে $\frac{414}{55}$ মিটার পর্যন্ত যেতে পারবে।

প্রশ্ন ▶ ৩২ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



P, Q, R বলত্রয় সমমুখী সমান্তরালভাবে ক্রিয়ারত।

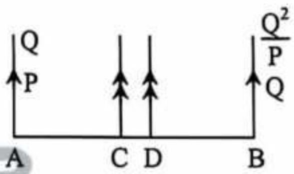
(ক) দেখাও যে, P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের P কে $\frac{Q^2}{P}$ তে পরিবর্তন করে Q এর সাথে স্থান পরিবর্তন করলে লব্ধির অবস্থান একই থাকে।

(খ) P কে (R + 3) পরিমাণে এবং Q কে (S + 2) পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার, P, Q এর পরিবর্তে যথাক্রমে Q, (R + 3) ক্রিয়া করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, $R = S + \frac{(Q - R - 3)^2}{P - Q} - 1$ [ঢা. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ১৭]

(গ) বলত্রয়ের লব্ধি ΔABC এর অন্তকেন্দ্রগামী হলে, দেখাও যে **X : Y : Z = sinA : sinB : sinC** [ঢা. বো.; য. বো.; সি. বো.; দি. বো. ১৮]

সমাধান:

ক



A বিন্দুতে P বল ও B বিন্দুতে Q বলের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$$\therefore P.AC = Q.BC$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{P}{Q}$$

$\Rightarrow \frac{BC + AC}{AC} = \frac{P + Q}{Q}$ [যোজন করে]

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{P + Q}{Q}$$

$\Rightarrow AC = \frac{Q.AB}{P + Q}$ ...... (i)

ধরি, স্থানবিনিময় করার পর, A বিন্দুতে Q বল এবং B বিন্দুতে $\frac{Q^2}{P}$ বলের লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$$\therefore Q.AD = \frac{Q^2}{P}BD$$

$$\Rightarrow AD = \frac{Q}{P}.BD$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{P}{Q}$$

$\Rightarrow \frac{BD + AD}{AD} = \frac{P + Q}{Q}$ [যোজন করে]

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{P + Q}{Q}$$

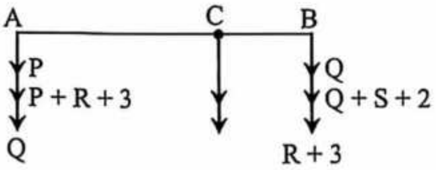
$\Rightarrow AD = \frac{Q.AB}{P + Q}$ ..... (ii)

(i) ও (ii) হতে, $AC = AD$

$\therefore$ C ও D একই বিন্দু।

অর্থাৎ লব্ধির অবস্থান একই থাকে। **(Showed)**

খ মনে করি, A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q মানের সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।



১ম ক্ষেত্রে, $P.AC = Q.BC$

$\therefore \frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC}$ .... (i)

আবার, P কে (R + 3) ও Q কে (S + 2) পরিমাণে বৃদ্ধি করতে অর্থাৎ A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে (P + R + 3) ও (Q + S + 2) মানের সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় ক্রিয়াশীল হলে তাদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

২য় ক্ষেত্রে, $(P + R + 3)AC = (Q + S + 2)CB$

$\Rightarrow P.AC + (R + 3)AC = Q.CB + (S + 2)CB$

$\Rightarrow (R + 3)AC = (S + 2)CB$

$\therefore \frac{R+3}{S+2} = \frac{CB}{CA}$ .... (ii)

আবার, P, Q এর পরিবর্তে যথাক্রমে Q, R + 3 ক্রিয়া করলে ও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $Q.AC = (R + 3)BC$

$\therefore \frac{Q}{R+3} = \frac{BC}{AC}$ ...... (iii)

সমীকরণ (i) নং (ii) নং ও (iii) নং থেকে পাই,

$\frac{P}{Q} = \frac{Q}{R+3} = \frac{R+3}{S+2}$

$\Rightarrow \frac{P-Q}{Q-R-3} = \frac{Q-R-3}{R-S+1}$

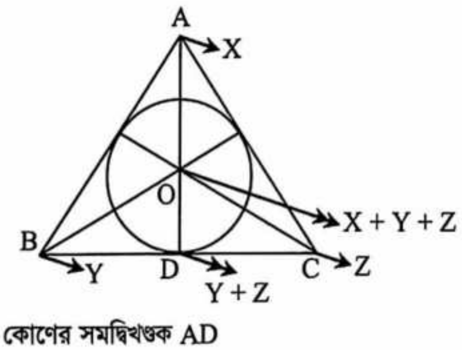
$\Rightarrow (R - S + 1)(P - Q) = (Q - R - 3)^2$

$\Rightarrow R - S + 1 = \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q}$

$\Rightarrow R = \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q} + S - 1$

$\therefore R = S + \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q} - 1$ **(Proved)**

গ মনে করি, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O এবং AO যোগ করে বর্ধিত করলে BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।



$\therefore \angle A$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক AD

অর্থাৎ $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle A$

এখন, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Y ও Z এর লব্ধি (Y + Z) BC রেখাস্থ কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার বলত্রয়ের লব্ধি O বিন্দুতে এবং X বলটি A তে ক্রিয়া করবে। কাজেই (Y + Z) বলটি AD রেখার কোন একটি বিন্দুতে কার্যরত হবে। সুতরাং Y ও Z এর লব্ধি BC এবং AD এর ছেদবিন্দু D তে অবশ্যই কার্যরত হবে।

$\therefore Y \times BD = Z \times CD$

$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{Z}{Y}$ .... (i)

আবার, ΔABD থেকে পাই, $\frac{BD}{\sin BAD} = \frac{AD}{\sin ABD}$

$\therefore \frac{BD}{\sin\frac{1}{2}\angle A} = \frac{AD}{\sin B}$ ...... (ii)

অনুরূপভাবে, ΔACD থেকে, $\frac{CD}{\sin CAD} = \frac{AD}{\sin ACD}$

$\therefore \frac{CD}{\sin\frac{1}{2}\angle A} = \frac{AD}{\sin C}$ ...... (iii)

(ii) ÷ (iii) $\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{\sin C}{\sin B}$ ...... (iv)

(i) ও (iv) নং থেকে $\frac{Z}{Y} = \frac{\sin C}{\sin B}$

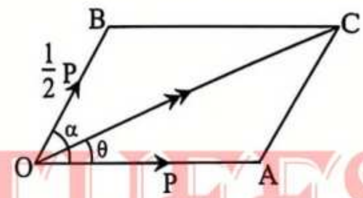
$\Rightarrow \frac{Y}{\sin B} = \frac{Z}{\sin C}$ ...... (v)

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $\frac{X}{\sin A} = \frac{Z}{\sin C}$ ...... (vi)

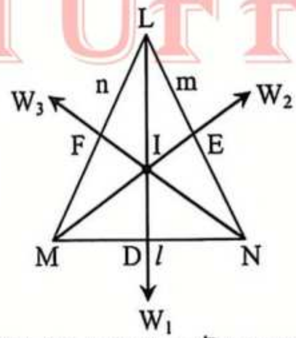
(v) ও (vi) নং হতে, $\frac{X}{\sin A} = \frac{Y}{\sin B} = \frac{Z}{\sin C}$

অর্থাৎ $X : Y : Z = \sin A : \sin B : \sin C$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▶ ৩৩ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



LD, ME ও NF যথাক্রমে MN, NL ও LM এর উপর লম্ব।

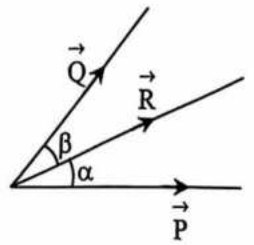
(ক) বলের অংশক ও লব্ধি ব্যাখ্যা কর। [রা. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $\frac{1}{2}\vec{P}$ বলকে কোন বাহু বরাবর স্থানান্তর করা যাবে? যদি বলদ্বয়ের লব্ধি P বলের $\frac{\sqrt{5}}{2}$ গুণ হয় তবে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ ও লব্ধির দিক নির্ণয় কর। [রা. বো. ১৭]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত বলগুলির লব্ধি শূন্য হলে প্রমাণ কর যে, $W_1 = W_2 = W_3$ যখন $l = m = n$ [রা. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ১৭]

সমাধানঃ

ক একটি বলকে দুই বা ততোধিক বলে বিভক্ত করাকে বল বিভাজন বলে। বিভাজিত বলগুলোকে মূল বলের অংশক বা উপাংশ বলে। এ অংশক সমূহের লব্ধি অবশ্যই মূল বলের সমান।

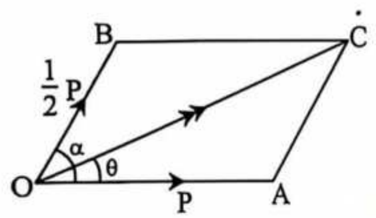


চিত্রে, $\vec{R}$ বলকে α ও β কোণে যথাক্রমে দুইটি দিকে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ অংশে বিভক্ত করা হয়েছে।

অতএব, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ বল হলো $\vec{R}$ এর অংশক।

আবার, $\vec{R}$ বল হলো $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ অংশকের লব্ধি।

খ



দৃশ্যকল্প-১ এ $\frac{1}{2}\vec{P}$ বলকে AC বরাবর স্থানান্তর করা যাবে যেহেতু OACB একটি সামান্তরিক।

প্রশ্নমতে, P ও $\frac{1}{2}$P বলদ্বয়ের লব্ধি = P এর $\frac{\sqrt{5}}{2}$ অংশ = $\frac{\sqrt{5}}{2}$P

ধরি, P এবং $\frac{1}{2}$P মধ্যবর্তী কোণ α

∴ বলের সামান্তরিক সূত্র হতে,

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}P\right)^2 = P^2 + \left(\frac{1}{2}P\right)^2 + 2.P.\frac{1}{2}P\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}P^2 = P^2 + \frac{1}{4}P^2 + P^2\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}P^2 = \frac{5}{4}P^2 + P^2\cos\alpha$$

$$\Rightarrow P^2\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \cos 90°$$

$$\therefore \alpha = 90°$$

অতএব, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\alpha = 90°$

∴ $\frac{1}{2}$P বলকে P বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব দিক বরাবর স্থাপন করা যাবে। **(Ans.)**

এখন, লব্ধির দিক, $\tan\theta = \dfrac{\frac{1}{2}P\sin\alpha}{P + \frac{1}{2}P\cos\alpha}$

$$= \frac{\frac{1}{2}P\sin\alpha}{P\left(1 + \frac{1}{2}\cos\alpha\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 90°}{1 + \frac{1}{2}.\cos 90°}$$

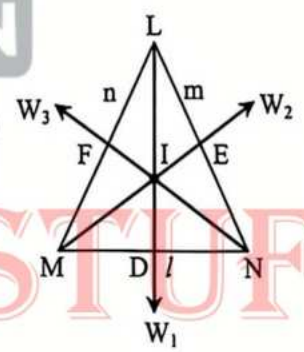
$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\times 0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.6°$$

অতএব, লব্ধির দিক, $\theta = 26.6°$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, LD ⊥ MN, ME ⊥ LN এবং NF ⊥ LM



যেহেতু W_1, W_2 এবং W_3 বল তিনটি I বিন্দুতে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

এখানে, LEIF চতুর্ভুজে, ∠EIF + ∠FLE = 180°

∴ ∠EIF = 180° − ∠FLE = 180° − ∠L

অনুরূপভাবে, ∠DIE = 180° − ∠N

∠DIF = 180° − ∠M

∴ লামির উপপাদ্য অনুযায়ী পাই,

$$\frac{W_1}{\sin\angle EIF} = \frac{W_2}{\sin\angle DIF} = \frac{W_3}{\sin\angle DIE}$$

$$\Rightarrow \frac{W_1}{\sin(180° - \angle L)} = \frac{W_2}{\sin(180° - \angle M)} = \frac{W_3}{\sin(180° - \angle N)}$$

$\Rightarrow \frac{W_1}{\sin\angle L} = \frac{W_2}{\sin\angle M} = \frac{W_3}{\sin\angle N}$

$\Rightarrow \frac{W_1}{MN} = \frac{W_2}{LN} = \frac{W_3}{ML}$ [ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে]

$\Rightarrow \frac{W_1}{l} = \frac{W_2}{m} = \frac{W_3}{n}$

$\therefore W_1 = W_2 = W_3$ [$\because l = m = n$] **(Proved)**

প্রশ্ন ▸ ৩৪ দৃশ্যকল্প-১: **L, M, N** মানের সুস্থিত তিনটি বলের ক্রিয়ারেখা **ABC** ত্রিভুজের **BC, CA, AB** বাহুর সমান্তরাল। বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 25, 60, 65 সে.মি.। L ও M মানের বলদ্বয়ের সমষ্টি 51 গ্রাম ওজন।

দৃশ্যকল্প-২: **ABC** রাশিটির দুই প্রান্ত একই অনুভূমিক রেখায় **A** ও **B** বিন্দুতে এবং **C** বিন্দুতে **W** ওজনের একটি বস্তু গিট দিয়ে বাঁধা।

(ক) কী শর্তে দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি তাদের ক্রিয়া রেখার মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়া করে?

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে বলগুলির মান নির্ণয় কর। [য. বো. ১৭]

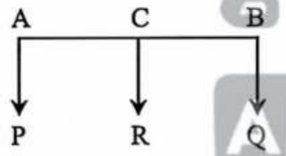
(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে, দেখাও যে, **CA** অংশে টানের পরিমাণ $\frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$, যেখানে a, b, c এবং Δ প্রচলিত অর্থ বহন করে।

সমাধান:

ক মনে করি, P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং তাদের লব্ধি বল R, C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore P \times AC = Q \times BC$ .... (i)

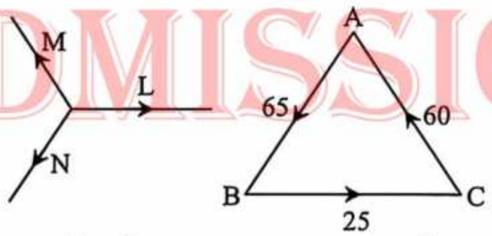
বলদ্বয়ের লব্ধি মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়া করলে, AC = BC



(i) হতে পাই, P = Q

∴ বলদ্বয় সমান হলে তাদের লব্ধি ক্রিয়ারেখার মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়া করে।

খ L এবং M মানের বলদ্বয়ের সমষ্টি = 51 gm-wt



প্রশ্নমতে, বলগুলি সুস্থিত এবং ΔABC এর বাহুগুলির সমান্তরাল। বলত্রয়কে অনুসঙ্গী বাহুত্রয় দ্বারা সূচিত করা যায়।

$\therefore \frac{L}{25} = \frac{M}{60} = \frac{N}{65}$

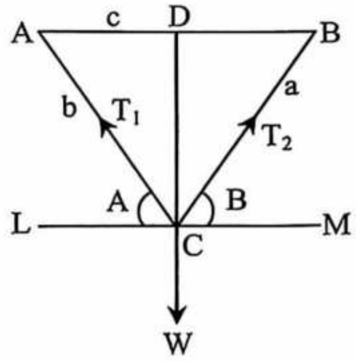
$\Rightarrow \frac{L}{25} = \frac{M}{60} = \frac{N}{65} = \frac{L+M}{25+60} = \frac{51}{85} = \frac{3}{5}$

$\therefore L = \frac{3}{5} \times 25 = 15$ gm-wt

$M = \frac{3}{5} \times 60 = 36$ gm-wt

$N = \frac{3}{5} \times 65 = 39$ gm-wt **(Ans.)**

গ ধরি, ACB দড়ির দুই প্রান্ত একই অনুভূমিক রেখার A ও B বিন্দুতে বাধা আছে।



C বিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল LCM রেখা টানি।

মনে করি, দড়ির CA অংশের টান T_1 যেহেতু C বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলত্রয় স্থিতিশীল। অতএব, লামির উপপাদ্য অনুসারে,

$$\frac{T_1}{\sin(90° + B)} = \frac{W}{\sin C} = \frac{T_2}{\sin(90° + A)}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{\cos B} = \frac{W}{\sin C}$$

$$\therefore T_1 = \frac{W\cos B}{\sin C} \text{ .... (i)}$$

কোসাইন সূত্রানুসারে, $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

এবং $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$

এক্ষেত্রে, Δ = ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$\therefore \sin C = \frac{2\Delta}{ab}$

সমীকরণ (i) নং হতে পাই,

$$T_1 = \frac{W\cos B}{\sin C}$$

$$= W \frac{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}}{\frac{2\Delta}{ab}}$$

$$= W \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \times \frac{ab}{2\Delta}$$

∴ দড়ির CA অংশের টান $T_1 = \frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$ **(Showed)**

HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

বলের সামান্তরিক সূত্র সংক্রান্ত

১। 7 N ও 11 N বল দুইটির লব্ধি বল নিচের কোনটি হতে পারে না? [য. বো. ২৩]

ক 4 N খ 7 N
গ 18 N ঘ 20 N

উত্তর: ঘ 20 N

ব্যাখ্যা: $11 - 7 \leq R \leq 11 + 7$

$\Rightarrow 4 \leq R \leq 18$

২। পরস্পর 60° কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 10 N এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 4 N হলে, তাদের লব্ধির মান কত? [কু. বো. ২৩]

ক $\sqrt{37}$ N খ $2\sqrt{19}$ N
গ $\sqrt{79}$ N ঘ $2\sqrt{39}$ N

উত্তর: গ $\sqrt{79}$ N

ব্যাখ্যা: ধরি, বলদ্বয় P, Q

প্রশ্নমতে, $P + Q = 10$ .....(i)

$P - Q = 4$ ...... (ii)

$\therefore P = 7$

$\therefore Q = 3$

$\therefore$ লব্ধি $= \sqrt{7^2 + 3^2 + 2 \times 7 \times 3\cos 60^\circ} = \sqrt{58 + 21} = \sqrt{79}$ N

৩। কোনো বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P এবং Q বলের লব্ধি R। P = Q = R হলে P, Q বলের অন্তর্গত কোণ কত?

[চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২; চ. বো. ২১; কু. বো. ১৯]

ক 120° খ 90°
গ 60° ঘ 45°

উত্তর: ক 120°

ব্যাখ্যা: $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$P^2 = P^2 + P^2 + 2.P.P\cos\alpha$

$\Rightarrow 2P^2(1 + \cos\alpha) = P^2$

$\Rightarrow 1 + \cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = 120^\circ$

অথবা, দুটি সমান বলের লব্ধি বলদ্বয়ের সমান হলে মধ্যবর্তী কোণ হবে 120°।

৪। কোনো বিন্দুতে 4 N ও $\sqrt{3}$ N দুইটি বল পরস্পর 30° কোণে কার্যরত। এদের লব্ধি– [দি. বো. ২৩]

ক 31 N খ 7 N
গ $\sqrt{31}$ N ঘ $\sqrt{7}$ N

উত্তর: গ $\sqrt{31}$ N

ব্যাখ্যা: $R^2 = 4^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \times 4\sqrt{3}\cos 30^\circ$

$\Rightarrow R^2 = 16 + 3 + 8 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow R^2 = 19 + 12$

$\therefore R = \sqrt{31}$ N

৫। এক বিন্দুতে 45° কোণে ক্রিয়াশীল P ও $\sqrt{2}$ N বলের লব্ধি $\sqrt{10}$ N হলে, P এর মান হবে–

ক 2 N খ 3 N
গ 5 N ঘ 7 N

উত্তর: ক 2 N

ব্যাখ্যা: $(\sqrt{10})^2 = P^2 + (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2}P\cos 45^\circ$

$\Rightarrow 10 = P^2 + 2 + 2P$

$\Rightarrow P^2 + 2P - 8 = 0$

$\Rightarrow P^2 + 4P - 2P - 8 = 0$

$\Rightarrow P(P + 4) - 2(P + 4) = 0$

$\Rightarrow (P - 2)(P + 4) = 0$

$\therefore P = 2 \quad [\because P \neq -4]$

৬। P ও Q (P > Q) বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α এবং এদের লব্ধি R হলে– [ব. বো. ২৩]

(i) $P = Q$ হলে $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

(ii) $\alpha = 90^\circ$ হলে $\tan\theta = \frac{Q}{P}$

(iii) লব্ধি R, Q বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করলে $\cos\alpha = -\frac{Q}{P}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

(i) P = Q হলে,

$R^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha$

$= 2P^2(1 + \cos\alpha)$

$= 2P^2.2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow R^2 = 4P^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\therefore R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

(ii) $\alpha = 90^\circ$ হলে, $\tan\theta = \frac{Q\sin 90^\circ}{P + Q\cos 90^\circ}$

$\therefore \tan\theta = \frac{Q}{P}$

(iii) লব্ধি R, Q বলের সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan 90^\circ = \frac{P\sin\alpha}{Q + P\cos\alpha}$

$\Rightarrow \frac{1}{0} = \frac{P\sin\alpha}{Q + P\cos\alpha}$

$\Rightarrow Q + P\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{Q}{P}$

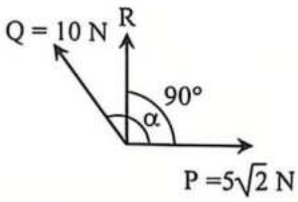
❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ৭ ও ৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$P = 5\sqrt{2}N$ এবং $Q = 10$ N দুইটি অসমান্তরাল বল।

৭। লব্ধি বল P বলের উপর লম্ব হলে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ কত? [য. বো. ২৩]

ⓐ 45° ⓑ 60°
ⓒ 120° ⓓ 135°

উত্তর: ⓓ 135°

ব্যাখ্যা: $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$



$\Rightarrow \tan 90° = \dfrac{10\sin\alpha}{5\sqrt{2} + 10\cos\alpha}$

$\Rightarrow 5\sqrt{2} + 10\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{5\sqrt{2}}{10} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\cos 45° = \cos(180° - 45°) = \cos 135°$

$\therefore \alpha = 135°$

৮। R বল P ও Q বলের সাথে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে এবং P ও Q বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 45° হলে R এর মান কত? [য. বো. ২৩]

ⓐ $5\sqrt{10}$ N ⓑ 250 N
ⓒ $5\sqrt{2}$ N ⓓ 50 N

উত্তর: ⓐ $5\sqrt{10}$ N

ব্যাখ্যা: $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 45°$

$= (5\sqrt{2})^2 + 10^2 + 2 \times 5\sqrt{2} \times 10\cos 45°$

$R = 5\sqrt{10}$ N

৯। দুটি বলের লব্ধি বৃহত্তম হলে, তাদের মধ্যবর্তী কোণ কত? [রা. বো. ২২]

ⓐ 180° ⓑ 90°
ⓒ – 180° ⓓ 0°

উত্তর: ⓓ 0°

ব্যাখ্যা: বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 0° হলে লব্ধি বৃহত্তম হবে।

Note: $\alpha = 0°$ হলে লব্ধি বৃহত্তম হয়। $R_{max} = P + Q$
$\alpha = 180°$ হলে লব্ধি ক্ষুদ্রতম হয়। $R_{min} = P \sim Q$

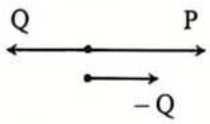
১০। P ও Q মানের বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ = 180° হলে, লব্ধির মান ও দিক কত হবে?

ⓐ $P + Q; 0°$ ⓑ $\sqrt{P^2 + Q^2}; \tan^{-1}\dfrac{Q}{P}$

ⓒ $P - Q; 0°$ ⓓ $PQ; \tan^{-1}\dfrac{Q}{P}$

উত্তর: ⓒ $P - Q; 0°$

ব্যাখ্যা:



$\therefore$ লব্ধি $= P - Q$
এবং লব্ধির দিক 0°

১১। 6 N ও 8 N বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ কত হলে লব্ধি $2\sqrt{13}$ N হবে? [ম. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১; ঢা. বো. ১৭]

ⓐ 30° ⓑ 60°
ⓒ 90° ⓓ 120°

উত্তর: ⓓ 120°

ব্যাখ্যা: $(2\sqrt{13})^2 = 6^2 + 8^2 + 2 \times 6 \times 8\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = 120°$

Note: P ও Q বলদ্বয় পরস্পর α কোণে ক্রিয়া করলে এদের লব্ধি
$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ এবং লব্ধির দিক
$\theta = \tan^{-1}\dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

P ও Q বলদ্বয় পরস্পর সমান হলে লব্ধি $R = 2P\cos\dfrac{\alpha}{2}$ এবং লব্ধির দিক $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১২ ও ১৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
2N ও 3N মানের বলদ্বয় 60° কোণে একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

১২। বলদ্বয়ের লব্ধির মান কত? [য. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩; চ. বো. ২১; ব. বো. ২১; য. বো. ১৯]

ⓐ $\sqrt{7}$ N ⓑ $\sqrt{19}$ N
ⓒ 7 N ⓓ 19 N

উত্তর: ⓑ $\sqrt{19}$ N

ব্যাখ্যা: $R = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2 \times 2 \times 3\cos 60°} = \sqrt{19}$ N

১৩। লব্ধির বলের ক্রিয়ারেখা ক্ষুদ্রতর বলটির সাথে কত কোণ তৈরি করবে? [য. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২১; ব. বো. ২১]

ⓐ $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ⓑ $\tan^{-1}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{7}\right)$

ⓒ $\tan^{-1}\left(\dfrac{3}{4 + 3\sqrt{3}}\right)$ ⓓ $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3 + \sqrt{3}}\right)$

উত্তর: ⓑ $\tan^{-1}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{7}\right)$

ব্যাখ্যা: $\tan\theta = \dfrac{3\sin 60°}{2 + 3\cos 60°}$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{7}\right)$

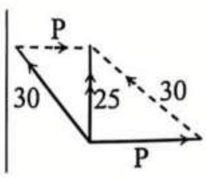
১৪। একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও 30 N বলদ্বয়ের লব্ধি 25 N, P বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব। P এর মান কত? [কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩; সি. বো. ১৭]

ⓐ $10\sqrt{5}$ N ⓑ $10\sqrt{3}$ N
ⓒ $5\sqrt{11}$ N ⓓ $5\sqrt{15}$ N

উত্তর: ⓒ $5\sqrt{11}$ N

ব্যাখ্যা: $30^2 = 25^2 + P^2$

$\Rightarrow P = 5\sqrt{11}$ N



১৫। যদি 12 একক বিশিষ্ট একটি বল ও অজানা একটি বল একই বিন্দুতে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে, তাদের লব্ধি অজানা বলের অর্ধেক এবং জানা বলের উপর লম্ব হয়, তবে অজানা বলটির মান কোনটি?

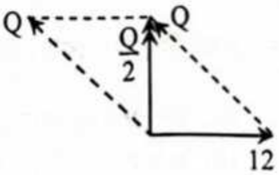
ⓚ $9\sqrt{2}$ ⓛ $8\sqrt{3}$
ⓜ $16\sqrt{3}$ ⓝ $4\sqrt{6}$

উত্তর: ⓛ $8\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: $Q^2 = \left(\frac{Q}{2}\right)^2 + 12^2$

$\Rightarrow \frac{3Q^2}{4} = 144 \Rightarrow Q^2 = 192$

$\therefore Q = 8\sqrt{3}$ একক



১৬। একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি বলের ক্ষুদ্রতম লব্ধি 1 N এবং বল দুটি লম্বভাবে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধির মান 5 N, বলদ্বয় দ্বারা বৃহত্তম লব্ধির মান– [য. বো. ২১]

ⓚ 5 N ⓛ 2 N
ⓜ 7 N ⓝ 3 N

উত্তর: ⓜ 7 N

ব্যাখ্যা: $P - Q = 1$

$\sqrt{P^2 + Q^2} = 5$

$\Rightarrow P^2 + Q^2 = 25 \Rightarrow (P - Q)^2 + 2PQ = 25$

$\Rightarrow 1^2 + 2 \times PQ = 25 \Rightarrow PQ = 12$

আবার,

$P^2 + Q^2 = 25$

$\Rightarrow (P + Q)^2 - 2PQ = 25 \Rightarrow (P + Q)^2 = 25 + 2 \times 12$

$\Rightarrow (P + Q)^2 = 49 \Rightarrow P + Q = 7$

$\therefore P + Q = 7$

অথবা, $R^2_{min} + R^2_{max} = 2R^2$

$\Rightarrow 1^2 + R^2_{max} = 2 \times 5^2 \Rightarrow R^2_{max} = 49$

$\therefore R_{max} = 7 N$

১৭। কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও $\sqrt{2}$P বলদ্বয়ের লব্ধি R, P বলের উপর লম্ব হলে তাদের অন্তর্গত কোণ কত? [সি. বো. ২১]

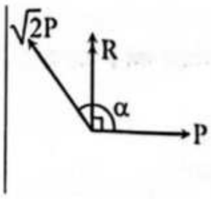
ⓚ 45° ⓛ 60°
ⓜ 120° ⓝ 135°

উত্তর: ⓝ 135°

ব্যাখ্যা: $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{P}{\sqrt{2}P}\right)$

$= \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 135°$



Note: P, Q বলদ্বয়ের (P < Q) লব্ধি P বলের সাথে লম্ব বরাবর ক্রিয়াশীল হলে লব্ধি $R = \sqrt{Q^2 - P^2}$ এবং বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{P}{Q}\right)$

এভাবে সহজে মনে রাখতে পারো,

লব্ধি $R = \sqrt{(\text{বড় বল})^2 - (\text{ছোট বল})^2}$

মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{\text{ছোট বল}}{\text{বড় বল}}\right)$

১৮। 8 N ও 6 N মানের দুইটি বল কোনো বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত থাকলে– [সি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২১]

(i) লব্ধির বৃহত্তম মান = 14 N

(ii) লব্ধির ক্ষুদ্রতম মান = 2 N

(iii) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ হলে লব্ধির মান 10 N

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓝ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $R_{max} = 8 + 6 = 14 N$

$R_{min} = 8 - 6 = 2 N$

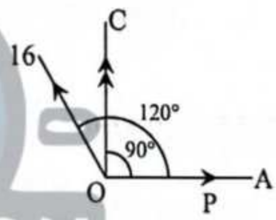
$\alpha = 90°; R = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 N$

১৯। কোনো বিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়াশীল দুটি বলের বৃহত্তম বলটি 16 N এবং ক্ষুদ্রতম বলটি লব্ধির সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে। ক্ষুদ্রতম বলটি কত? [দি. বো. ১৯]

ⓚ $\sqrt{3}$ N ⓛ 3 N
ⓜ 8 N ⓝ $3\sqrt{3}$ N

উত্তর: ⓜ 8 N

ব্যাখ্যা:



$\tan 90° = \frac{16\sin 120°}{P + 16\cos 120°}$

$\Rightarrow P + 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow P - 8 = 0 \Rightarrow P = 8 N$

২০। P এবং Q বল দুটি পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি হয় 5 N এবং একই দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি হয় 7 N [দি. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩, ১৭; রা. বো. ২১]

(i) P বলের মান 6 N

(ii) Q বলের মান 1 N

(iii) বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ যথাক্রমে 180° এবং 0°

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓝ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $P - Q = 5\ [\alpha = 180°]$

$P + Q = 7\ [\alpha = 0°]$

সমাধান করে, $P = 6 N; Q = 1 N$

২১। 4 N ও 6 N মানের দুইটি বল এক বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে এদের লব্ধি কোনটি? [সি. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ১৯]

ⓚ 2 N ⓛ 5.21 N
ⓜ 7.21 N ⓝ 10 N

উত্তর: ⓚ 2 N

ব্যাখ্যা: $R = 6 - 4 = 2 N$

২২। **5 N ও 7 N মানের দুটি বল পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি কোন দিকে ক্রিয়া করবে?** [ঢা. বো. ২১]

ⓚ 7 N বলের ক্রিয়ারেখার সাথে লম্ব বরাবর
ⓛ 7 N বলের ক্রিয়ার সাথে সমান্তরাল বরাবর
ⓜ 5 N বলের ক্রিয়ারেখার সাথে লম্ব বরাবর
ⓝ 5 N বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর

উত্তর: ⓛ 7 N বলের ক্রিয়ার সাথে সমান্তরাল বরাবর

ব্যাখ্যা: $R = 7 - 5 = 2\text{ N}\ (\because \alpha = 180°)$

এর দিক 7 N এর দিকের সাথে সমান্তরালে

২৩। **পরস্পর বিপরীতমুখী ক্রিয়াশীল 5 N ও 10 N মানের বলদ্বয়ের লব্ধি কোনটি?** [কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩, ১৭; ব. বো. ১৭]

ⓚ 0 ⓛ 5 N
ⓜ $5\sqrt{5}$ N ⓝ 15 N

উত্তর: ⓛ 5 N

ব্যাখ্যা: $R = 10 - 5 = 5\text{ N}$

২৪। **কোনো বিন্দুতে একই সময়ে P ও $\sqrt{3}$P এককের বলদ্বয় 90° কোণে ক্রিয়ারত হলে, লব্ধির দিক নির্ণয় কর।**

ⓚ 20° ⓛ 60°
ⓜ 15° ⓝ 90°

উত্তর: ⓛ 60°

ব্যাখ্যা: P এর লব্ধি θ কোণ উৎপন্ন করলে, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}P\sin 90°}{P + \sqrt{3}P\cos 90°}$

$= \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}P}{P}$

$= 60°$

সমমানের বলসমূহের লব্ধি নির্ণয় সংক্রান্ত

২৫। **$\sqrt{6}$ N মানের দুইটি সমান বল 60° কোণে একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হলে তাদের লব্ধির মান কত?** [কু. বো. ২২]

ⓚ $2\sqrt{6}$ N ⓛ $2\sqrt{3}$ N
ⓜ 18 N ⓝ $3\sqrt{2}$ N

উত্তর: ⓝ $3\sqrt{2}$ N

ব্যাখ্যা: বলদ্বয় সমান হলে লব্ধি,

$R = 2P\cos\frac{\alpha}{2} = 2 \times \sqrt{6} \times \cos 30°$

$= 3\sqrt{2}$ N [Using Calculator]

২৬। **যদি $\sqrt{5}$ এককের দুইটি সমান বল 120° কোণে এক বিন্দুতে কাজ করে, তাহলে–** [ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২]

(i) তাদের লব্ধি $\sqrt{5}$ একক
(ii) $\sqrt{5}$ একক বলের সাথে লব্ধি 60° কোণ উৎপন্ন করে
(iii) লব্ধি বলদ্বয়ের যোগফল অপেক্ষা ছোট

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓝ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) সমান বলদ্বয়ের লব্ধি, $R = 2 \times \sqrt{5} \times \cos\frac{120°}{2} = \sqrt{5}$

(ii) সমান বলদ্বয়ের লব্ধি অন্তর্গত কোণকে সমানভাগে বিভক্ত করে।

(iii) লব্ধি $= \sqrt{5}$

বলদ্বয়ের যোগফল $= \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\therefore \sqrt{5} < 2\sqrt{5}$

২৭। **একই বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলের লব্ধি R হলে–** [কু. বো. ২২]

(i) $R = P + Q$, যখন $\alpha = 90°$
(ii) $R = P \sim Q$, যখন $\alpha = 180°$
(iii) $Q = P$ হলে $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓜ ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $\alpha = 90°$ হলে $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$

(ii) $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180°} = P \sim Q$

(iii) বলদ্বয় সমান হলে লব্ধি, $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

২৮। **সমমানের দুটি বলদ্বয়ের লব্ধির বর্গ বলদ্বয়ের গুণফলের সমান হলে উহাদের মধ্যবর্তী কোণ কত?** [ঢা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ১৯]

ⓚ $\frac{\pi}{3}$ ⓛ $\frac{2\pi}{3}$
ⓜ $\frac{-2\pi}{3}$ ⓝ $\frac{-\pi}{3}$

উত্তর: ⓛ $\frac{2\pi}{3}$

ব্যাখ্যা: শর্তমতে, $R^2 = P^2$

$\Rightarrow P^2 + P^2 + 2P.P.\cos\alpha = P^2$

$\Rightarrow 2P^2 + 2P^2\cos\alpha = P^2$

$\Rightarrow 1 + \cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{2\pi}{3}$

২৯। **দুটি সমান বল P এর লব্ধি $\sqrt{2}$P। বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ কত?** [দি. বো. ২১]

ⓚ 0° ⓛ 45°
ⓜ 90° ⓝ 180°

উত্তর: ⓜ 90°

ব্যাখ্যা: দুটি সমান বলের লব্ধি R হলে,

$R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2}P = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45°$

$\therefore \alpha = 90°$

৩০। দুটি সমান বল P পরস্পর 60° কোণে কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করলে এদের লব্ধি কত হবে?

[দি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১; ঢা. বো. ১৯; সি. বো. ১৭]

ⓚ 3P ⓚ 2P

ⓖ $\sqrt{3}$P ⓖ $\sqrt{2}$P

উত্তর: ⓖ $\sqrt{3}$P

ব্যাখ্যা: $R = \sqrt{P^2 + P^2 + 2P^2 \cos 60°} = \sqrt{3}P$

৩১। 60° কোণে ক্রিয়ারত $\sqrt{5}$ একক মানের দুইটি সমান বলের লব্ধি কত?

[ঢা. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ১৯]

ⓚ $2\sqrt{5}$ ⓚ $\sqrt{15}$

ⓖ $\sqrt{10 + 5\sqrt{3}}$ ⓖ $10 + 5\sqrt{3}$

উত্তর: ⓚ $\sqrt{15}$

ব্যাখ্যা: বলদ্বয় সমান হলে, $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2} = 2 \times \sqrt{5} \times \cos 30° = \sqrt{15}$

৩২। কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত $(2 + 2\sqrt{2})$ N মানের দুইটি সমান বলের লব্ধি বল $(4 + 4\sqrt{2})$ N হলে, তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ কত?

[দি. বো. ১৭]

ⓚ 0° ⓚ 45°

ⓖ 90° ⓖ 180°

উত্তর: ⓚ 0°

ব্যাখ্যা: বলদ্বয় সমান হলে লব্ধি,

$$R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$$

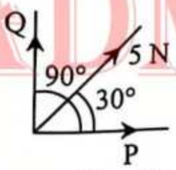
$$\Rightarrow 4 + 4\sqrt{2} = 2(2 + 2\sqrt{2})\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = 1 = \cos 0°$$

$$\therefore \alpha = 0°$$

লম্বাংশ উপপাদ্য এবং লব্ধির উপাংশ সম্পর্কিত

৩৩।



উপরের চিত্রে দুটি বল P এবং Q ক্রিয়া করছে। P এবং Q এর মান কত?

[ঢা. বো. ২৩]

ⓚ $\frac{25}{2}$N, $\frac{5\sqrt{3}}{2}$N ⓚ $\frac{5}{2}$N, 5 N

ⓖ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$N, $\frac{5}{2}$N ⓖ $\frac{25\sqrt{3}}{2}$N, $\frac{25}{2}$N

উত্তর: ⓖ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$N, $\frac{5}{2}$N

ব্যাখ্যা: $P = 5\cos 30° = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ N

$Q = 5\cos(90° - 30°) = \frac{5}{2}$ N

অথবা, $5\sin 30° = \frac{5}{2}$ N

৩৪। 3 N এবং 4 N মানের বল দুইটি পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধির মান কত?

[চ. বো. ২৩ অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২; সি. বো. ১৯; য. বো. ১৭]

ⓚ 3 N ⓚ 4 N

ⓖ 5 N ⓖ 6 N

উত্তর: ⓖ 5 N

ব্যাখ্যা: $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ N

৩৫। 2 N ও $2\sqrt{3}$ N মানের বলদ্বয় 30° কোণে ক্রিয়ারত। 2 N মানের বল বরাবর বলদ্বয়ের লম্বাংশের সমষ্টি কত?

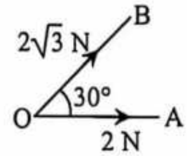
[ব. বো. ২৩]

ⓚ $4\sqrt{3}$ N ⓚ 5 N

ⓖ 7 N ⓖ $\sqrt{3} + 2$ N

উত্তর: ⓚ 5 N

ব্যাখ্যা:



2 N মানের বল বরাবর বলদ্বয়ের লম্বাংশের সমষ্টি,

$= 2\cos 0° + 2\sqrt{3}\cos 30°$

$= 2 + 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 2 + 3 = 5$ N

৩৬। P ও Q (P > Q) বলদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়াশীল–

[চ. বো. ২২]

(i) $\alpha = 0°$ হলে লব্ধি বৃহত্তম হবে

(ii) $\alpha = 180°$ হলে লব্ধি ক্ষুদ্রতম হবে

(iii) P বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর তাদের উপাংশের যোগফল $P + Q\cos\alpha$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii

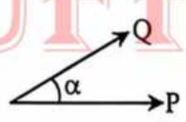
ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

উত্তর: ⓖ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) ও (ii) নং হলো শর্ত।

(iii) $P\cos 0° + Q\cos\alpha$

$= P + Q\cos\alpha$



৩৭। এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R এর উভয় দিকে যথাক্রমে 30° ও 60° কোণে আনত হলে P : Q কত? [ঢা. বো. ২১]

ⓚ $2 : \sqrt{3}$ ⓚ $\sqrt{3} : 1$

ⓖ $1 : \sqrt{2}$ ⓖ $1 : \sqrt{3}$

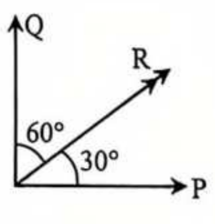
উত্তর: ⓚ $\sqrt{3} : 1$

ব্যাখ্যা: $\frac{P}{\sin 60°} = \frac{Q}{\sin 30°}$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin 60°}{\sin 30°}$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow P : Q = \sqrt{3} : 1$



৩৮। একটি বলের আনুভূমিক ও উল্লম্ব অংশের মান 4 N ও 3 N হলে বলটির মান– [য. বো. ২১]

ক 5 N খ 10 N

গ $2\sqrt{3}$ N ঘ 7 N

উত্তর: ক 5 N

ব্যাখ্যা: $R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ N

৩৯। কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও 2Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি Q বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হলে– [য. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ১৯]

(i) বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 120°

(ii) লব্ধির মান $\sqrt{3}Q$ একক

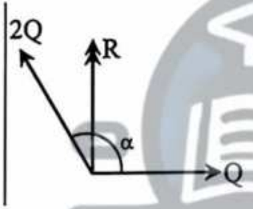
(iii) Q বলের দিক বরাবর 2Q বলের ধনাত্মক উপাংশ 3Q

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii



ব্যাখ্যা: (i) $\cos\alpha = -\frac{Q}{2Q}$

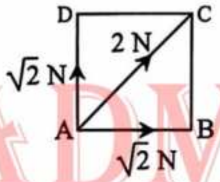
$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = 120°$

(ii) $R = \sqrt{Q^2 + (2Q)^2 + 2.Q.2Q\cos 120°} = \sqrt{3}\,Q$

(iii) Q এর দিকে 2Q এর উপাংশ $= 2Q\cos 120° = -Q$

৪০।



চিত্রে ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। A বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলত্রয়ের লব্ধি কত? [রা. বো. ১৯]

ক $2\sqrt{2}$ খ 4

গ 8 ঘ 16

উত্তর: খ 4

ব্যাখ্যা: $R\cos\theta = \sqrt{2}\cos 0° + 2\cos 45° + \sqrt{2}\cos 90°$

$\Rightarrow R\cos\theta = \sqrt{2} + \sqrt{2}$

$\Rightarrow R\cos\theta = 2\sqrt{2}$ ....(i)

$R\sin\theta = \sqrt{2}\sin 0° + 2\sin 45° + \sqrt{2}\sin 90°$

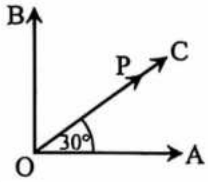
$\Rightarrow R\sin\theta = \sqrt{2} + \sqrt{2}$

$\Rightarrow R\sin\theta = 2\sqrt{2}$ ....(ii)

$(i)^2 + (ii)^2$,

$R^2 = 16 \Rightarrow R = 4$ N

৪১।



উদ্দীপকে– [সকল বো. ১৮]

(i) OA বরাবর P বলের লম্বাংশ $= \frac{\sqrt{3}P}{2}$

(ii) OB বরাবর P বলের লম্বাংশ $= \frac{P}{2}$

(iii) OC বরাবর P বলের লম্বাংশ = P

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

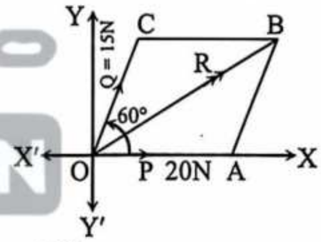
উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: OA বরাবর P এর লম্বাংশ $= P\cos 30° = \frac{\sqrt{3}P}{2}$

OB বরাবর P এর লম্বাংশ $= P\sin 30° = \frac{P}{2}$

OC বরাবর P এর লম্বাংশ $= P\cos 0° = P$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৪২ ও ৪৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৪২। R এর মান কত নিউটন? [রা. বো. ১৭]

ক 775 খ 35

গ $5\sqrt{37}$ ঘ 25

উত্তর: গ $5\sqrt{37}$

ব্যাখ্যা: এখানে, $R^2 = 15^2 + 20^2 + 2 \times 20 \times 15 \times \cos 60°$

$\Rightarrow R^2 = 925$

$\therefore R = 5\sqrt{37}$

৪৩। OY বরাবর Q এর লম্বাংশ কত নিউটন? [রা. বো. ১৭]

ক 0 খ $\frac{15}{2}$

গ $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ ঘ 15

উত্তর: গ $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

ব্যাখ্যা: OY বরাবর Q এর লম্বাংশ

$= 15\cos 30°$

$= 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{15\sqrt{3}}{2}$

৪৪। P বলের উপাংশদ্বয় P এর সাথে $15°$ ও $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। P বলের একটি উপাংশ কোনটি? [কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২]

(ক) $\frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{3}}$ (খ) $\frac{2P}{\sqrt{3}}$

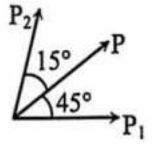
(গ) $\frac{\sqrt{3}P}{\sqrt{2}}$ (ঘ) $\frac{\sqrt{3}P}{2}$

উত্তর: (ক) $\frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{3}}$

ব্যাখ্যা: $\frac{P_1}{\sin 15°} = \frac{P_2}{\sin 45°} = \frac{P}{\sin 60°}$

$\Rightarrow P_1 = \frac{P\sin 15°}{\sin 60°} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}P$

$\Rightarrow P_2 = \frac{P\sin 45°}{\sin 60°} = \frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{3}}$



৪৫। কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বল দুইটি তাদের লব্ধি R বলের উভয় দিকে যথাক্রমে $30°$ ও $60°$ কোণে আনত। বলদ্বয়ের অনুপাত কত? [ব. বো. ২৩]

(ক) $1 : \sqrt{3}$ (খ) $\sqrt{3} : 1$

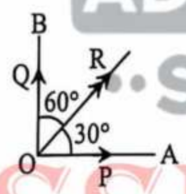
(গ) $\frac{\sqrt{3}}{2} : 1$ (ঘ) $\frac{1}{2} : \sqrt{3}$

উত্তর: (খ) $\sqrt{3} : 1$

ব্যাখ্যা: $P = R\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}R$

$Q = R\sin 30° = \frac{1}{2}R$

$\therefore P : Q = \frac{\sqrt{3}}{2}R : \frac{1}{2}R = \sqrt{3} : 1$



৪৬। একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমান্তরালে একইক্রমে সমবিন্দুতে কার্যরত 6, 10, 14 একক মানের তিনটি বেগের লব্ধির মান হবে–

(ক) $4\sqrt{3}$ units (খ) $7\sqrt{3}$ units

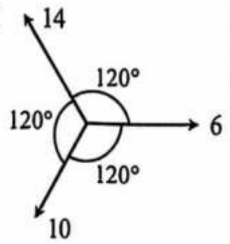
(গ) $10\sqrt{3}$ units (ঘ) $15\sqrt{3}$ units

উত্তর: (ক) $4\sqrt{3}$ units

ব্যাখ্যা: এখানে, ক্রিয়ারত বলত্রয়ের মধ্যে সাধারণ অন্তর হলো 4

$\therefore$ নির্ণেয় লব্ধি $= \sqrt{3} \times$ সাধারণ অন্তর

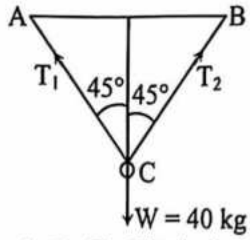
$= 4\sqrt{3}$ একক



Shortcut: একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বলের মধ্যে সাধারণ অন্তর d হলে, লব্ধি $= \sqrt{3} \times d$

লামির উপপাদ্য

৪৭।



যখন T_1, T_2, W ভারসাম্য অবস্থায় থাকে, উদ্দীপকের আলোকে T_1 এর মান কত? [দি. বো. ২৩]

(ক) $40\sqrt{2}$ kg-wt (খ) 40 kg-wt

(গ) $20\sqrt{2}$ kg-wt (ঘ) 20 kg-wt

উত্তর: (গ) $20\sqrt{2}$ kg-wt

ব্যাখ্যা: যেহেতু বলত্রয় সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে।

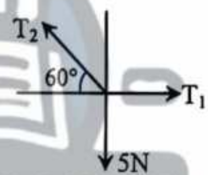
$\therefore$ লামির উপপাদ্য অনুসারে,

$\frac{T_1}{\sin(180° - 45°)} = \frac{W}{\sin 90°}$

$\Rightarrow \frac{T_1}{\sin 45°} = \frac{40}{1} \Rightarrow T_1 = 40 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore T_1 = 20\sqrt{2}$ kg-wt

৪৮।



T_1, T_2 ও 5 N বলত্রয় ভারসাম্যে রাখা হলে, T_1 এর মান কত? [ম. বো. ২২]

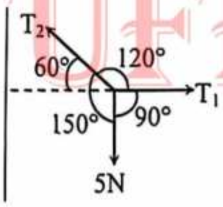
(ক) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ (খ) $\frac{20}{\sqrt{3}}$

(গ) $5\sqrt{3}$ (ঘ) $20\sqrt{3}$

উত্তর: (ক) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

ব্যাখ্যা: $\frac{T_1}{\sin 150°} = \frac{5}{\sin 120°}$

$\Rightarrow T_1 = \frac{5\sin 150°}{\sin 120°} = \frac{5}{\sqrt{3}}$



৪৯। $\sqrt{3}$ kg ওজনের একটি বস্তুকে দুটি বল দ্বারা টেনে রাখা হয়েছে। একটি আনুভূমিক এবং অপরটি আনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণে ক্রিয়ারত হলে বলদ্বয় কত কেজি ওজন? [য. বো. ২১]

(ক) $3\sqrt{5}, 10$ (খ) $2\sqrt{3}, \sqrt{3}$

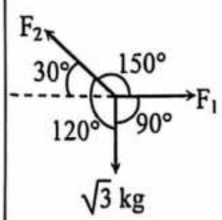
(গ) $5\sqrt{3}, 10$ (ঘ) $3, 2\sqrt{3}$

উত্তর: (ঘ) $3, 2\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: $\frac{F_1}{\sin 120°} = \frac{F_2}{\sin 90°} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 150°}$

$\Rightarrow F_1 = \frac{\sqrt{3}\sin 120°}{\sin 150°} = 3$

$\Rightarrow F_2 = \frac{\sqrt{3}\sin 90°}{\sin 150°} = 2\sqrt{3}$



৫০। P ও Q মানের দুটি বল পরস্পর 45° কোণে কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি 16 N, P বলের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। Q বলের মান কত?

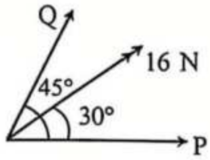
ⓚ $8\sqrt{2}$ N ⓛ $4\sqrt{2}$ N
ⓜ $32\sqrt{2}$ N ⓝ 8 N

উত্তর: ⓚ $8\sqrt{2}$ N

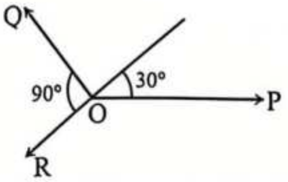
ব্যাখ্যা: $\frac{Q}{\sin30°} = \frac{16}{\sin45°}$

$\Rightarrow Q = \frac{1}{2} \times 16\sqrt{2}$

$\therefore Q = 8\sqrt{2}$ N



৫১।



O বিন্দুতে ক্রিয়ারত সমতলীয় তিনটি বল P, Q ও R সাম্যাবস্থায় আছে। P এর মান 12N হলে, Q ও R এর মান যথাক্রমে নিচের কোনটি? [রা বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ১৭]

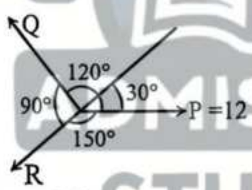
ⓚ $24\sqrt{3}$ N, 24 N ⓛ 24 N, $24\sqrt{3}$ N
ⓜ $6\sqrt{3}$ N, 6 N ⓝ 6 N, $6\sqrt{3}$ N

উত্তর: ⓝ 6 N, $6\sqrt{3}$ N

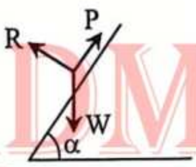
ব্যাখ্যা: $\frac{12}{\sin90°} = \frac{Q}{\sin150°} = \frac{R}{\sin120°}$

$\therefore Q = 12\sin150° = 6$ N

$\therefore R = 12\sin120° = 6\sqrt{3}$ N



৫২।

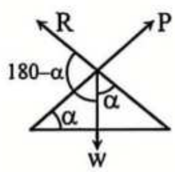


উদ্দীপকের আলোকে R ও W এর মধ্যবর্তী কোণ কত? [ব. বো. ২১]

ⓚ 90° – α ⓛ 90° + α
ⓜ 180° – α ⓝ 180° + α

উত্তর: ⓜ 180° – α

ব্যাখ্যা: R ও W এর মধ্যবর্তী কোণ
$= 180° - \alpha$



৫৩। এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R এর উভয় দিকে যথাক্রমে 30° ও 60° কোণে আনত হলে, P : Q =?

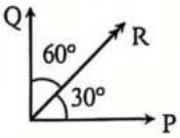
ⓚ $2 : \sqrt{3}$ ⓛ $\sqrt{3} : 1$
ⓜ $1 : \sqrt{2}$ ⓝ $1 : \sqrt{3}$

উত্তর: ⓛ $\sqrt{3} : 1$

ব্যাখ্যা: $\frac{Q}{\sin30°} = \frac{P}{\sin60°}$

$\Rightarrow \frac{Q}{\frac{1}{2}} = \frac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$\therefore P : Q = \sqrt{3} : 1$



৫৪। P বলের উপাংশদ্বয় P এর সাথে 15° ও 45° কোণ উৎপন্ন করে। P বলের একটি উপাংশ কোনটি?

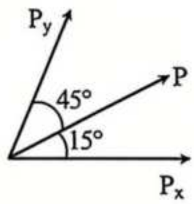
ⓚ $\frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{3}}$ ⓛ $\frac{2P}{\sqrt{3}}$
ⓜ $\frac{\sqrt{3}P}{\sqrt{2}}$ ⓝ $\frac{\sqrt{3}P}{2}$

উত্তর: ⓚ $\frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{3}}$

ব্যাখ্যা: $P_x = \frac{P\sin45°}{\sin(45° + 15°)}$

$= \frac{2P}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{3}}$



বলসমূহের সাম্যাবস্থা

৫৫। $\sqrt{3}$, 1, 2 মানের তিনটি বল এক বিন্দুতে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় রয়েছে। প্রথম দুটি বলের মধ্যবর্তী কোণ কত? [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩; কু. বো. ২৩, ২২; ব. বো. ২১]

ⓚ 90° ⓛ 120°
ⓜ 150° ⓝ 180°

উত্তর: ⓚ 90°

ব্যাখ্যা: $2 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + 2 \times \sqrt{3} \times 1.\cos\alpha}$

$\Rightarrow 4 = 3 + 1 + 2\sqrt{3}\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0 = \cos90°$

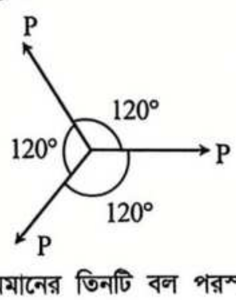
$\therefore \alpha = 90°$

৫৬। সমমানের তিনটি বল P পরস্পর 120° কোণে কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করলে লব্ধি বল হবে–

ⓚ 3P ⓛ ∞
ⓜ 0 ⓝ কোনোটিই নয়

উত্তর: ⓜ 0

ব্যাখ্যা:



সমমানের তিনটি বল পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়া করলে, তাদের লব্ধির মান 0 হয়।

৫৭। একটি বস্তুকণার উপরস্থ কোনো বিন্দুতে $\sqrt{3}P$, $\sqrt{2}P$ ও P মানের তিনটি বল ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে। $\sqrt{2}P$ ও P মানের বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?
[ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২; সি. বো. ২২; ঢা. বো. ২১, ১৯; চ. বো. ২১]

ক) 150° খ) 135°
গ) 120° ঘ) 90°

উত্তর: ঘ) 90°

ব্যাখ্যা: $(\sqrt{3}P)^2 = (\sqrt{2}P)^2 + P^2 + 2.\sqrt{2}P.P\cos\alpha$

$\Rightarrow 3P^2 = 2P^2 + P^2 + 2\sqrt{2}\,P^2\cos\alpha$

$\Rightarrow 3 = 3 + 2\sqrt{2}\cos\alpha$

$\cos\alpha = 0 = \cos 90°$

$\therefore \alpha = 90°$

৫৮। তিনটি বল P, $\sqrt{3}P$, P সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রথম দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণ−

ক) 60° খ) 90°
গ) 120° ঘ) 150°

উত্তর: ঘ) 150°

ব্যাখ্যা: $P^2 = P^2 + 3P^2 + 2 \times P \times \sqrt{3}P\cos\alpha$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}\cos\alpha = -3 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \alpha = 150°$

৫৯। কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে সাম্যাবস্থায় রাখলে সমান বল কত?
[ঢা. বো. ২১]

ক) $\sqrt{3}$ N খ) $3\sqrt{3}$ N
গ) 3 N ঘ) 9 N

উত্তর: খ) $3\sqrt{3}$ N

ব্যাখ্যা: $9^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos 60°$

$\Rightarrow 3P^2 = 81 \Rightarrow P = 3\sqrt{3}$ N

৬০। একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি সমান বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে, এদের মধ্যবর্তী কোণ কোনটি?
[রা. বো. ২১]

ক) 180° খ) 120°
গ) 90° ঘ) 60°

উত্তর: খ) 120°

ব্যাখ্যা: একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি সমান বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে, এদের মধ্যবর্তী কোণ $= \frac{360°}{3} = 120°$

Note: একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত n সংখ্যক সমান বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে, এদের মধ্যবর্তী কোণ $= \frac{360°}{n}$

৬১। $\sqrt{37}$N, 3N এবং 4N মানের তিনটি বল একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে। 3N ও 4N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?
[দি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১; সি. বো. ১৯; সকল বো. ১৮; য. বো. ১৭]

ক) 30° খ) 45°
গ) 60° ঘ) 90°

উত্তর: গ) 60°

ব্যাখ্যা: এখানে, 3N ও 4N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

$(\sqrt{37})^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \times 3 \times 4 \times \cos\alpha$

$\Rightarrow 37 = 25 + 24\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 60°$

৬২। কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে যে কোনো দুটি বলের লব্ধি তৃতীয় বলের−
[ম. বো. ২২]

(i) সমান
(ii) সমান্তরাল
(iii) বিপরীতমুখী

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii
গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: ঘ) i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: শর্ত অনুযায়ী (i), (ii) ও (iii) সঠিক।

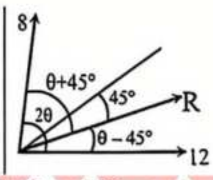
ত্রিভুজ সংক্রান্ত

৬৩। যদি 12 এবং 8 একক মানের বলদ্বয় একটি বিন্দুতে এমন কোণে ক্রিয়াশীল যেন তাদের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে, তবে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান কত?
[ঢা. বো. ২২]

ক) $2\tan^{-1}10$ খ) $2\tan^{-1}5$
গ) $\tan^{-1}5$ ঘ) $2\tan^{-1}2$

উত্তর: খ) $2\tan^{-1}5$

ব্যাখ্যা: $\frac{12}{\sin(\theta + 45°)} = \frac{8}{\sin(\theta - 45°)}$



$\Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{\sin(\theta + 45°)}{\sin(\theta - 45°)}$

$\Rightarrow \frac{12+8}{12-8} = \frac{\sin(\theta + 45°) + \sin(\theta - 45°)}{\sin(\theta + 45°) - \sin(\theta - 45°)}$

$\Rightarrow \frac{20}{4} = \frac{2\sin\theta\cos 45°}{2\cos\theta\sin 45°}$

$\Rightarrow \tan\theta = 5$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}5$

$\therefore$ অর্ন্তভুক্ত কোণ, $2\theta = 2\tan^{-1}5$

৬৪। একটি বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত নিচের কোন বলত্রয়কে তাদের সাম্যাবস্থার জন্য একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে মানে ও দিকে প্রকাশ করা সম্ভব নয়?
[য. বো. ২২]

ক) 1 N; 2 N ও 3 N খ) 2 N; 3 N ও 4 N
গ) 3 N; 4 N ও 5 N ঘ) 3 N; 5 N ও 7 N

উত্তর: ক) 1 N; 2 N ও 3 N

ব্যাখ্যা: $1 + 2 \not> 3$

$\therefore$ ত্রিভুজ গঠন সম্ভব নয়।

Note: ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতর বাহু দুটির যোগফল অবশ্যই বৃহত্তম বাহু অপেক্ষা বড় হতে হবে।

৬৫। P ও Q মানের দুটি বল পরস্পর 45° কোণে কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি 16 N, P বলের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। Q বলের মান কত? [দি. বো. ২১]

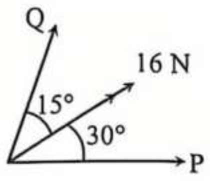
ক $8\sqrt{2}$ N খ $4\sqrt{2}$ N
গ $32\sqrt{2}$ N ঘ 8 N

উত্তর: ক $8\sqrt{2}$ N

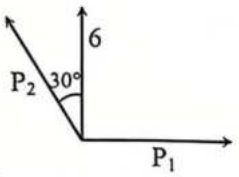
ব্যাখ্যা: $\frac{P}{\sin 15^\circ} = \frac{Q}{\sin 30^\circ} = \frac{16}{\sin 45^\circ}$

$\Rightarrow Q = \frac{16 \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}$

$\Rightarrow Q = 8\sqrt{2}$ N



৬৬।



চিত্র অনুসারে 6 একক বলের অংশকদ্বয় P_1 ও P_2 হলে, P_1 এর মান কোনটি? [কু. বো. ২২]

ক $\sqrt{2}$ খ $\sqrt{3}$
গ $2\sqrt{3}$ ঘ $3\sqrt{2}$

উত্তর: গ $2\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: $\frac{P_1}{\sin 30^\circ} = \frac{P_2}{\sin 90^\circ} = \frac{6}{\sin 120^\circ}$

$\Rightarrow P_1 = \frac{6 \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} \Rightarrow P_1 = 2\sqrt{3}$ N

৬৭। নিচের কোন বলত্রয় ত্রিভুজের বাহু দ্বারা দিকে মানে ও একই ক্রমে প্রকাশ করলে স্থিতাবস্থায় থাকবে? [ঢা. বো. ২১]

ক 1 N, 2 N, 3 N খ 3 N, 4 N, 5N
গ 10 N, 20 N, 50 N ঘ 5 N, 20 N, 40 N

উত্তর: খ 3 N, 4 N, 5 N

ব্যাখ্যা: $3 + 4 > 5$

$\therefore$ শুধু এটি দ্বারা ত্রিভুজ গঠন সম্ভব।

Note: ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতর বাহু দুটির যোগফল বৃহত্তম বাহু অপেক্ষা বড় হবে।

৬৮। F এবং 2F মানের সমবিন্দু বলের ক্রিয়াদিক এবং একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 2F এবং 2F + 2 মানের বলদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়াদিক একই হলে F এর মান কত একক?

ক $\frac{1}{2}$ খ 1
গ 2 ঘ 4

উত্তর: খ 1

ব্যাখ্যা: সদৃশকোণী ত্রিভুজের ধারণা অনুযায়ী-

$\frac{F}{2F} = \frac{2F}{2F+2}$

$\Rightarrow 2F + 2 = 4F \Rightarrow F = 1$

Shortcut: লব্ধির ক্রিয়াদিক একই হলে ১ম ক্ষেত্রে ও ২য় ক্ষেত্রে বলদ্বয়ের অনুপাতের মান সমান হবে।

সদৃশ-বিসদৃশ সমান্তরাল বল

৬৯। ΔABC এর কৌণিক বিন্দু A, B ও C তে যথাক্রমে P, Q এবং R মানের তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়াশীল। লব্ধি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী হলে– [ব. বো. ২১]

ক $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$

খ $P : Q : R = \tan A : \tan B : \tan C$

গ $P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

ঘ $P : Q : R = 1 : 1 : 1$

উত্তর: ঘ $P : Q : R = 1 : 1 : 1$

ব্যাখ্যা: সদৃশ সমান্তরাল বল ভরকেন্দ্রগামী হলে,

$P : Q : R = 1 : 1 : 1$

শর্ত মনে রাখতে হবে।

Note: ΔABC এর A, B, C তে তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ ক্রিয়া করলে এবং লব্ধি,

(i) ভরকেন্দ্রগামী হলে, $P = Q = R$

(ii) অন্তঃকেন্দ্রগামী হলে, $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$

(iii) পরিকেন্দ্রগামী হলে, $P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

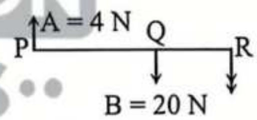
৭০।

A ও B বলদ্বয়ের লব্ধি R বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে PQ : QR এর মান কত? [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২১; দি. বো. ১৭]

ক 4 : 1 খ 1 : 4
গ 5 : 1 ঘ 1 : 5

উত্তর: ক 4 : 1

ব্যাখ্যা:



এখানে, $4.PR = 20.QR$

$\Rightarrow 4.PQ + 4.QR = 20.QR \Rightarrow 4.PQ = 16.QR$

$PQ : QR = 4 : 1$

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ৭১ ও ৭২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

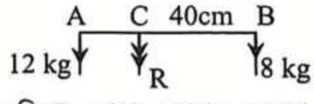
একটি জড়বস্তুর উপর পরস্পর 40 সে.মি. ব্যবধানে 12 কেজি ও 8 কেজি ওজনের দুইটি বল সদৃশ সমান্তরালে ক্রিয়া করে।

৭১। বলদ্বয়ের লব্ধির মান কত কেজি? [কু. বো. ২৩]

ক 4 খ 8
গ 12 ঘ 20

উত্তর: ঘ 20

ব্যাখ্যা:



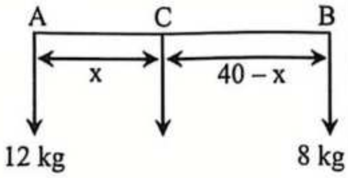
বলদ্বয়ের লব্ধি, $R = (12 + 8)$ kg $= 20$ kg

৭২। লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু 12 কেজি ওজনের বলের ক্রিয়া বিন্দু হতে কত সে. মি. দূরে অবস্থিত? [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২৩; সি. বো. ২৩; চ. বো. ২২]

ক 16 খ 24
গ 32 ঘ 80

উত্তর: ক 16

ব্যাখ্যা: ধরি, লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল,



$\Rightarrow 12x = (40 - x) \times 8$

$\Rightarrow 3x = (40 - x) \times 2$

$\Rightarrow x = 16$ cm

৭৩। **P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল পরস্পর অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধি কত দূরত্বে সরে যাবে? [P, Q বল d একক দূরত্বে আছে]**

ⓚ $\frac{P-Q}{P+Q}d$ ⓦ $\frac{Pd}{P+Q}$

ⓖ $\frac{P+Q}{P-Q}$ ⓖ None

উত্তর: ⓚ $\frac{P-Q}{P+Q}d$

ব্যাখ্যা: P, Q পরস্পর অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধি x পরিমাণ সরলে,

$x = \frac{P-Q}{P+Q}d$ [যখন P > Q]

Shortcut:

➤ P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল পরস্পর অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধি $\left(\frac{P-Q}{P+Q} . d\right)$ দূরত্বে সরে যাবে। d = P ও Q এর মধ্যবর্তী দূরত্ব।

➤ P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল হলে, P এর ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুকে x দূরত্বে সরালে লব্ধি $\frac{Px}{P+Q}$ দূরে সরে যাবে।

➤ P ও Q দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল A ও B তে ক্রিয়ারত এবং এদের পরিমাণ x একক করে বাড়ালে লব্ধি $\frac{x . AB}{P-Q}$ দূরত্বে সরে যাবে।

❖ **নিচের তথ্যের আলোকে ৭৪ ও ৭৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**

15 kg ও 9 kg ওজনের দুটি সমান্তরাল বল 32 cm ব্যবধানে ক্রিয়া করে। বৃহত্তর বল হতে এদের লব্ধির প্রয়োগ বিন্দু–

৭৪। **যখন বল দুটি সদৃশ–**

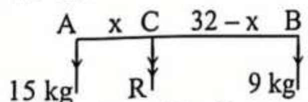
[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২২, ২১; য. বো. ২২; সি. বো. ২১]

ⓚ 12 cm ⓦ 16 cm

ⓖ 20 cm ⓖ কোনোটিই নয়

উত্তর: ⓚ 12 cm

ব্যাখ্যা:



ধরি, লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, $R = 15 + 9 = 24$

$15.AC = 9.BC$

$\Rightarrow 15x = 9 \times (32 - x)$

$\Rightarrow 15x = 288 - 9x$

$\therefore x = 12$ cm

৭৫। **যখন বল দুটি অসদৃশ–**

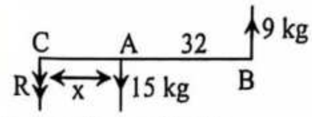
[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২; রা. বো. ২১; সি. বো. ২১; য. বো. ১৯]

ⓚ 16 cm ⓦ 20 cm

ⓖ 47 cm ⓖ কোনোটিই নয়

উত্তর: ⓖ কোনোটিই নয়

ব্যাখ্যা:



ধরি, লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

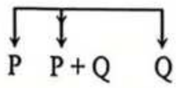
$R = 15 - 9 = 6$kg

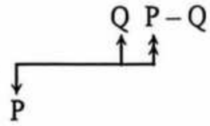
এখানে, $15.AC = 9.BC$

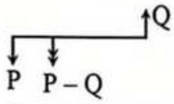
$\Rightarrow 15.x = 9(32 + x) \Rightarrow 15 = 288 + 9x \Rightarrow 6x = 288$

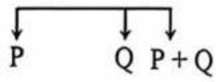
$\therefore x = 48$ cm

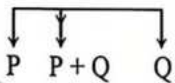
৭৬। **P ও Q দুটি সমান্তরাল বল এবং P > Q হলে নিচের কোনটি সত্য/সঠিক?** [সি. বো. ২২]

ⓚ 

ⓦ 

ⓖ 

ⓖ 

উত্তর: ⓚ 

ব্যাখ্যা: লব্ধি P এর কাছে হবে যেহেতু P > Q

৭৭। **একজন লোক তার কাঁধে আনুভূমিকভাবে স্থাপিত 6 ft দীর্ঘ একটি লাঠির একপ্রান্তে হাত রেখে অপর প্রান্তে W ওজনের একটি বস্তু বহন করে। কাঁধের ওপর চাপের পরিমাণ বস্তুর ওজনের তিনগুণ হলে, কাঁধ হতে হাতের দূরত্ব কত?**

ⓚ 3 feet ⓦ 4 feet

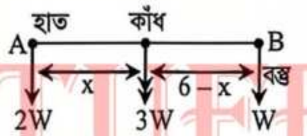
ⓖ 2 feet ⓖ 5 feet

উত্তর: ⓖ 2 feet

ব্যাখ্যা: $2Wx = W(6 - x)$

$\Rightarrow 2x = 6 - x$

$\therefore x = 2$ feet



৭৮। **8 ও 6 একক মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল 21 একক দূরত্বে একটি অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত। বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কত একক দূরত্বে সরে যাবে?** [দি. বো. ২২]

ⓚ 1 একক ⓦ 2 একক

ⓖ 3 একক ⓖ 4 একক

উত্তর: ⓖ 3 একক

ব্যাখ্যা: $8x_1 = 6(21 - x_1) \Rightarrow x_1 = 9$ m

$6x_2 = 8(21 - x_2) \Rightarrow x_2 = 12$ m

$\therefore \Delta x = x_2 - x_1 = 3$ m

বিকল্প ব্যাখ্যা:

AB দণ্ডের দুই প্রান্তে ক্রিয়ারত P ও Q (P > Q) সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে, লব্ধি $\frac{P-Q}{P+Q}$AB পরিমাণ সরে যাবে।

$\therefore \frac{P-Q}{P+Q}AB = \frac{8-6}{8+6} \cdot 21 = 3$

৭৯। A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত 45 N ও 15 N বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। AC = 5 m হলে AB = কত? [ম. বো. ২২]

ক 5 m খ 10 m
গ 15 m ঘ 20 m

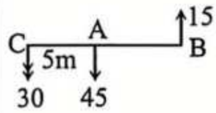
উত্তর: খ 10 m

ব্যাখ্যা: $45AC = 15\ BC$

$\Rightarrow 45\ AC = 15(AB + AC)$

$\Rightarrow 45 \times 5 = 15(AB + 5)$

$\Rightarrow AB = 10$ m



৮০। 30 মিটার লম্বা AB রডের A প্রান্তে 20 kg ওজন এবং B প্রান্তে P kg ওজন ঝুলানো আছে। তাদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। AC এর দৈর্ঘ্য 20 মিটার হলে P এর মান কত? [কু. বো. ২১]

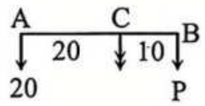
ক 15 kg খ 20 kg
গ 30 kg ঘ 40 kg

উত্তর: ঘ 40 kg

ব্যাখ্যা: $20.AC = P.BC$

$\Rightarrow 20.20 = P.10$

$\Rightarrow P = 40$ kg



৮১। দুইটি সমান্তরাল বল 18 N এবং 12 N যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। AB = 15 মি.
[কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২১; ব. বো. ২১; ম. বো. ২১]

(i) যদি বলদ্বয় অসদৃশ হয় তাহলে লব্ধির মান 6 N

(ii) বলদ্বয় সদৃশ হলে BC = 9 মিটার

(iii) বলদ্বয় অসদৃশ হলে AC = 30 মিটার

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) অসদৃশ হলে লব্ধি $= 18 - 12 = 6$ N

(ii) $18.AC = 12.BC$

$\Rightarrow 18(15 - BC) = 12\ BC$

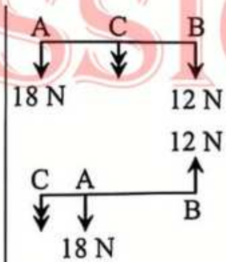
$\Rightarrow BC = 9$ m

(iii) $18.AC = 12.BC$

$\Rightarrow 18.AC = 12.(AB + AC)$

$\Rightarrow 18.AC = 12(15 + AC)$

$\Rightarrow AC = 30$ m



৮২। 4 একক দূরত্বে P ও Q বিন্দুতে ক্রিয়ারত 3 ও 6 একক সমান্তরাল বলদ্বয়– [চ. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ১৯]

(i) সদৃশ হলে লব্ধি 9 একক

(ii) অসদৃশ হলে লব্ধি 3 একক

(iii) অসদৃশ এবং লব্ধি R বিন্দুগামী হলে QR = 4

নিচের কোনটি সঠিক?

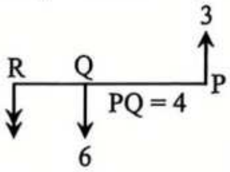
ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) সদৃশ হলে লব্ধি $= P + Q = 9$

(ii) বিসদৃশ হলে লব্ধি $= Q - P = 3$

(iii)



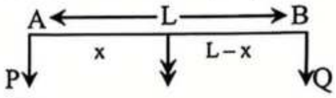
$\therefore 6.QR = 3.PR$

$\Rightarrow 6QR = 3(PQ + QR)$

$\Rightarrow 3QR = 3PQ$

$\Rightarrow QR = PQ = 4$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৮৩ ও ৮৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ



৮৩। x এর মান হলো– [য. বো. ২১]

ক $\frac{QL}{P+Q}$ খ $\frac{Q+L}{P+Q}$

গ $\frac{QL}{P-Q}$ ঘ $\frac{Q-L}{P+Q}$

উত্তর: ক $\frac{QL}{P+Q}$

ব্যাখ্যা: এখানে, $P.x = Q.(L - x)$

$\Rightarrow \frac{x}{Q} = \frac{L-x}{P} = \frac{L}{P+Q}$

$\therefore x = \frac{QL}{P+Q}$

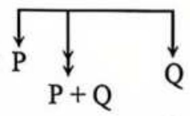
৮৪। L = 8, Q = 30, x = 6 হলে P এর মান কত?
[য. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৯; চ. বো. ১৯]

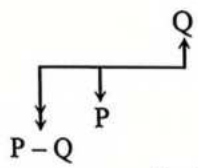
ক 100 খ 7
গ 70 ঘ 10

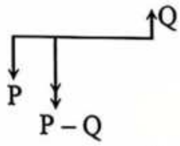
উত্তর: ঘ 10

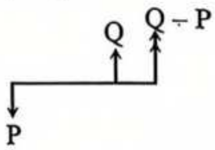
ব্যাখ্যা: $Px = Q(L - x) \Rightarrow P \times 6 = 30(8 - 6) \Rightarrow P = 10$

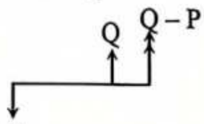
৮৫। P ও Q দুইটি সমান্তরাল বল এবং P < Q হলে নিচের কোনটি সঠিক? [রা. বো. ১৭]

ক


খ


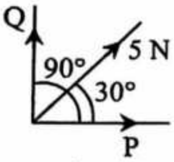
গ


ঘ


উত্তর: ঘ


ব্যাখ্যা: লব্ধি Q এর কাছে হবে যেহেতু Q > P এবং লব্ধির দিক হবে Q এর দিক বরাবর।

নিজেকে যাচাই করো

১। 

উপরের চিত্রে দুটি বল P এবং Q ক্রিয়া করছে। P এবং Q এর মান কত?

ⓚ $\frac{25}{2}$ N, $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ N ⓛ $\frac{5}{2}$ N, 5 N
ⓖ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ N, $\frac{5}{2}$ N ⓘ $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ N, $\frac{25}{2}$ N

২। P ও Q (P > Q) বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α এবং এদের লব্ধি R হলে–

(i) $P = Q$ হলে $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

(ii) $\alpha = 90°$ হলে $\tan\theta = \frac{Q}{P}$

(iii) লব্ধি R, Q বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করলে $\cos\alpha = -\frac{Q}{P}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৩। একটি বস্তুকণার উপরস্থ কোনো বিন্দুতে $\sqrt{3}$P, $\sqrt{2}$P ও P মানের তিনটি বল ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে। $\sqrt{2}$P ও P মানের বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?

ⓚ 150° ⓛ 135°
ⓖ 120° ⓘ 90°

৪। 12 এবং 8 একক মানের বলদ্বয় একটি বিন্দুতে এমন কোণে ক্রিয়াশীল যেন তাদের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে, তবে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান কত?

ⓚ $2\tan^{-1}10$ ⓛ $2\tan^{-1}5$
ⓖ $\tan^{-1}5$ ⓘ $2\tan^{-1}2$

৫। একটি বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত নিচের কোন বলত্রয়কে তাদের সাম্যাবস্থার জন্য একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে মানে ও দিকে প্রকাশ করা সম্ভব নয়?

ⓚ 1 N; 2 N ও 3 N ⓛ 2 N; 3 N ও 4 N
ⓖ 3 N; 4 N ও 5 N ⓘ 3 N; 5 N ও 7 N

৬। যদি $\sqrt{5}$ এককের দুইটি সমান বল 120° কোণে এক বিন্দুতে কাজ করে, তাহলে–

(i) তাদের লব্ধি $\sqrt{5}$ একক

(ii) $\sqrt{5}$ একক বলের সাথে লব্ধি 60° কোণ উৎপন্ন করে

(iii) লব্ধি বলদ্বয়ের যোগফল অপেক্ষা ছোট

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৭। কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে সাম্যাবস্থায় রাখলে সমান বল কত?

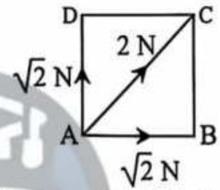
ⓚ $\sqrt{3}$ N ⓛ $3\sqrt{3}$ N
ⓖ 3 N ⓘ 9 N

৮। একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও 30 N বলদ্বয়ের লব্ধি 25 N, P বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব। P এর মান কত?

ⓚ $10\sqrt{5}$ N ⓛ $10\sqrt{3}$ N
ⓖ $5\sqrt{11}$ N ⓘ $5\sqrt{15}$ N

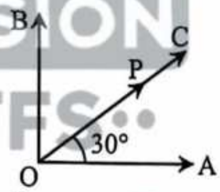
৯। P ও Q মানের দুটি বল পরস্পর 45° কোণে কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি 16 N, P বলের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। Q বলের মান কত?

ⓚ $8\sqrt{2}$ N ⓛ $4\sqrt{2}$ N
ⓖ $32\sqrt{2}$ N ⓘ 8 N

১০। 

চিত্রে ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। A বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলত্রয়ের লব্ধি কত?

ⓚ $2\sqrt{2}$ ⓛ 4
ⓖ 8 ⓘ 16

১১। 

উদ্দীপকে–

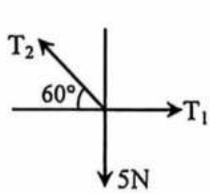
(i) OA বরাবর P বলের লম্বাংশ $= \frac{\sqrt{3}P}{2}$

(ii) OB বরাবর P বলের লম্বাংশ $= \frac{P}{2}$

(iii) OC বরাবর P বলের লম্বাংশ = P

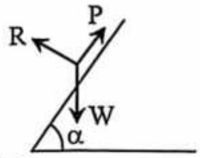
নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

১২। 

T_1, T_2 ও 5 N বলত্রয় ভারসাম্যে রাখা হলে T_1 এর মান কত?

ⓚ $\frac{5}{\sqrt{3}}$ ⓛ $\frac{20}{\sqrt{3}}$
ⓖ $5\sqrt{3}$ ⓘ $20\sqrt{3}$

১৩। 

উদ্দীপকের আলোকে R ও W এর মধ্যবর্তী কোণ কত?

(ক) $90° - \alpha$ (খ) $90° + \alpha$
(গ) $180° - \alpha$ (ঘ) $180° + \alpha$

১৪। 8 ও 6 একক মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল 21 একক দূরত্বে একটি অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত। বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কত একক দূরত্বে সরে যাবে?

(ক) 1 একক (খ) 2 একক
(গ) 3 একক (ঘ) 4 একক

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ১৫ ও ১৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
15 kg ও 9 kg ওজনের দুটি সমান্তরাল বল 32 cm ব্যবধানে ক্রিয়া করে। বৃহত্তর বল হতে এদের লব্ধির প্রয়োগ বিন্দু–

১৫। যখন বল দুটি সদৃশ–

(ক) 12 cm (খ) 16 cm
(গ) 20 cm (ঘ) কোনোটিই নয়

১৬। যখন বল দুটি অসদৃশ–

(ক) 16 cm (খ) 20 cm
(গ) 47 cm (ঘ) কোনোটিই নয়

১৭। ΔABC এর কৌণিক বিন্দু A, B ও C তে যথাক্রমে P, Q এবং R মানের তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়াশীল। লব্ধি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী হলে–

(ক) $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$
(খ) $P : Q : R = \tan A : \tan B : \tan C$
(গ) $P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$
(ঘ) $P : Q : R = 1 : 1 : 1$

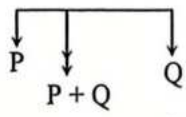
১৮। দুইটি সমান্তরাল বল 18 N এবং 12 N যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। AB = 15 মি.

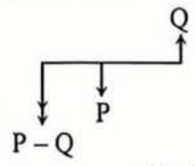
(i) যদি বলদ্বয় অসদৃশ হয় তাহলে লব্ধির মান 6 N
(ii) বলদ্বয় সদৃশ হলে BC = 9 মিটার
(iii) বলদ্বয় অসদৃশ হলে AC = 30 মিটার

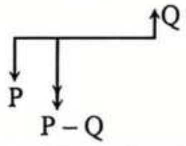
নিচের কোনটি সঠিক?

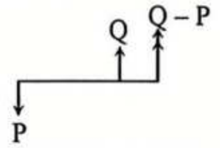
(ক) i ও ii (খ) ii ও iii
(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১৯। P ও Q দুইটি সমান্তরাল বল এবং P < Q হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) 

(খ) 

(গ) 

(ঘ) 

২০। কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে যে কোনো দুটি বলের লব্ধি তৃতীয় বলের–

(i) সমান
(ii) সমান্তরাল
(iii) বিপরীতমুখী

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii
(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

২১। সমমানের দুটি বলদ্বয়ের লব্ধির বর্গ বলদ্বয়ের গুণফলের সমান হলে উহাদের মধ্যবর্তী কোণ কত?

(ক) $\frac{\pi}{3}$ (খ) $\frac{2\pi}{3}$
(গ) $\frac{-2\pi}{3}$ (ঘ) $\frac{-\pi}{3}$

২২। P বলের উপাংশদ্বয় P এর সাথে 15° ও 45° কোণ উৎপন্ন করে। P বলের একটি উপাংশ কোনটি?

(ক) $\frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{3}}$ (খ) $\frac{2P}{\sqrt{3}}$
(গ) $\frac{\sqrt{3}P}{\sqrt{2}}$ (ঘ) $\frac{\sqrt{3}P}{2}$

২৩। একই বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলের লব্ধি R হলে–

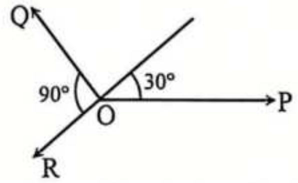
(i) $R = P + Q$, যখন $\alpha = 90°$
(ii) $R = P \sim Q$, যখন $\alpha = 180°$
(iii) $Q = P$ হলে $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii
(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

২৪। 2 N ও $2\sqrt{3}$ N মানের বলদ্বয় 30° কোণে ক্রিয়ারত। 2 N মানের বল বরাবর বলদ্বয়ের লম্বাংশের সমষ্টি কত?

(ক) $4\sqrt{3}$ N (খ) 5 N
(গ) 7 N (ঘ) $\sqrt{3} + 2$ N

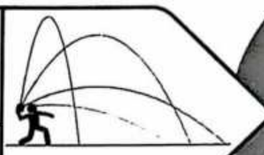
২৫। 

O বিন্দুতে ক্রিয়ারত সমতলীয় তিনটি বল P, Q ও R সাম্যাবস্থায় আছে। P এর মান 12N হলে, Q ও R এর মান যথাক্রমে নিচের কোনটি?

(ক) $24\sqrt{3}$ N, 24 N (খ) 24 N, $24\sqrt{3}$ N
(গ) $6\sqrt{3}$ N, 6 N (ঘ) 6 N, $6\sqrt{3}$ N

উত্তরপত্র		১	গ	২	ঘ	৩	ঘ	৪	খ	৫	ক	৬	ঘ	৭	খ	৮	গ	৯	ক	১০	খ	১১	ঘ	১২	ক
১৩	গ	১৪	গ	১৫	ক	১৬	ঘ	১৭	ঘ	১৮	ঘ	১৯	ঘ	২০	ঘ	২১	খ	২২	ক	২৩	গ	২৪	খ	২৫	ঘ

০৯ সমতলে বস্তুকণার গতি
Motion of Particles in a Plane



ACS

Board Questions Analysis

সৃজনশীল প্রশ্ন

বোর্ড / সাল	ঢাকা	ময়মনসিংহ	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০২৩	১	২	১	১	১	১	১	১	২
২০২২	১	১	১	১	১	১	১	১	১

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

বোর্ড / সাল	ঢাকা	ময়মনসিংহ	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০২৩	৫	৩	৩	৪	৪	৪	৩	৪	৪
২০২২	৪	৪	৪	৪	৫	৪	৩	৩	৪

এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

- স্রোতের বেগ u, সাঁতারু বা নৌকার বেগ v, নদীর প্রস্থ d, u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

(i) লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$

$\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$ [যেখানে θ, u ও w এর মধ্যবর্তী কোণ]

(ii) সর্বনিম্ন দূরত্বে নদী পার হওয়ার সময়, $t = \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}}$ এবং v ও u এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)$

(iii) সর্বনিম্ন সময়ে নদী পার হওয়ার সময়, $t_{min} = \frac{d}{v}$

(iv) যাত্রাবিন্দু হতে পার্শ্ব-সরণ, $x = (u + v\cos\alpha)\frac{d}{v\sin\alpha}$

- সমতলে বস্তুকণার গতির ক্ষেত্রে:

(i) $v = u + ft$

(ii) $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

(iii) $v^2 = u^2 + 2fs$

(iv) t তম সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $S_{th} = u + \frac{1}{2}f(2t - 1)$

(v) $s = \left(\frac{u + v}{2}\right)t$

- ভূমি থেকে খাড়া উপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে:

(i) $v = u - gt$

(ii) $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$

(iii) $v^2 = u^2 - 2gh$

(iv) t তম সময়ে অতিক্রান্ত উচ্চতা $h_{th} = u - \frac{1}{2}g(2t - 1)$

(v) $h = \left(\frac{u + v}{2}\right)t$

(vi) সর্বোচ্চ উচ্চতা H বা $h_{max} = \frac{u^2}{2g}$

(vii) বিচরণকাল, $T = \frac{2u}{g}$ [উঠতে + নামতে]

(viii) সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠতে সময়, $t = \frac{u}{g}$

- নির্দিষ্ট উচ্চতা h থেকে উপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে:

(i) $v = -u + gt$

(ii) $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$

(iii) $v^2 = u^2 + 2gh$

(iv) $h_{th} = -u + \frac{1}{2}g(2t - 1)$

- প্রাস:

(i) $x = u\cos\alpha t$

(ii) $y = u\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$

(iii) সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{(u\sin\alpha)^2}{2g}$

(iv) বিচরণ/ উড্ডয়নকাল, $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

(v) আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g}$

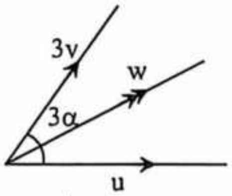
(vi) প্রাসের সমীকরণ, $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

(vii) $\tan\alpha = \frac{4H}{R}$

(viii) $T^2 = \frac{8H}{g}$

HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন ▶ ১ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: একটি রেলগাড়ি এক স্টেশন হতে ছেড়ে 10 মিনিটে 12 কি.মি. দূরের পরবর্তী স্টেশনে থামে। গাড়িটি তার গতিপথের প্রথম দুই-তৃতীয়াংশ সমত্বরণে এবং অবশিষ্টাংশ সমমন্দনে চলে।

(ক) একটি বস্তুর উপর 2 মিটার/সেকেন্ড, 3 মিটার/সেকেন্ড এবং $2\sqrt{5}$ মিটার/সেকেন্ড বেগত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা রক্ষা করে। ক্ষুদ্রতম বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ **u** এর দিক বরাবর **w** এর লম্বাংশ **3v** হলে দেখাও যে, $\alpha = \frac{2}{3}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{u}{6v}}\right)$ এবং $w = \sqrt{9v^2 - u^2 + 6uv}$ [দি. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে রেলগাড়ির সর্বোচ্চ বেগ, সমত্বরণ ও সমমন্দন নির্ণয় কর। [দি. বো. ২৩]

সমাধান:

ক ধরি, $u_1 = 2\ ms^{-1}$, $u_2 = 3\ ms^{-1}$, $u_3 = 2\sqrt{5}\ ms^{-1}$

এখানে, u_1, u_2, u_3 সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করেছে।

যেকোনো দুইটি বেগের লব্ধি তৃতীয় বেগের সমান ও বিপরীতমুখী হবে।

$\therefore u_3^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\cos\alpha$

$\Rightarrow (2\sqrt{5})^2 = 2^2 + 3^2 + 2 \times 2 \times 3\cos\alpha$

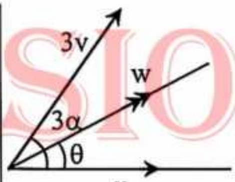
$\Rightarrow 20 = 4 + 9 + 12\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{7}{12}$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{7}{12}\right)$

$\therefore \alpha = 54.31°$ **(Ans.)**

খ ধরি, u ও w এর মধ্যবর্তী কোণ θ



u এর দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$w\cos\theta = u\cos0° + 3v\cos3\alpha$ ......(i)

প্রশ্নমতে, $w\cos\theta = 3v$

সুতরাং (i) নং হতে,

$3v = u + 3v\cos3\alpha$ .... (ii)

$\Rightarrow u = 3v(1 - \cos3\alpha)$

$\Rightarrow u = 3v.2\sin^2\frac{3\alpha}{2}$

$\Rightarrow \sin^2\frac{3\alpha}{2} = \frac{u}{6v}$

$\Rightarrow \sin\frac{3\alpha}{2} = \sqrt{\frac{u}{6v}}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}\sin^{-1}\sqrt{\frac{u}{6v}}$ **(Showed)**

আবার, $w^2 = (3v)^2 + u^2 + 2.3v.u\cos3\alpha$

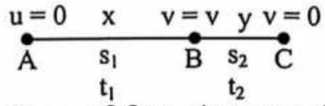
$\Rightarrow w^2 = 9v^2 + u^2 + 2u.(3v - u)$ [(ii) নং হতে]

$\Rightarrow w^2 = 9v^2 + u^2 + 6uv - 2u^2$

$\Rightarrow w^2 = 9v^2 - u^2 + 6uv$

$\therefore w = \sqrt{9v^2 - u^2 + 6uv}$ **(Showed)**

গ



ধরি, রেলগাড়িটি A স্টেশন থেকে স্থিরাবস্থা হতে যাত্রা করে s_1 দূরত্বে B বিন্দু পর্যন্ত x সমত্বরণে t_1 সময়ে চলে সর্বোচ্চ v বেগ প্রাপ্ত হয়। এরপর y সমমন্দনে t_2 সময় চলে s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে C স্টেশনে থামে। যেখানে দূরত্ব s_2

মোট সময়, $t_1 + t_2 = 10$ মিনিট $= 600$ সেকেন্ড এবং

মোট দূরত্ব $s = s_1 + s_2 = 12$ কি.মি. $= 12000$ মিটার।

এখন, $s_1 = \frac{2}{3} \times s = \frac{2}{3} \times 12000 = 8000$ মিটার

$\therefore s_2 = (12000 - 8000)$ মিটার $= 4000$ মিটার

১ম ক্ষেত্রে, $v = 0 + xt_1$

$\therefore t_1 = \frac{v}{x}$ .....(i)

এবং $s_1 = \frac{0 + v}{2}t_1 \Rightarrow 8000 = \frac{v}{2}t_1$...... (ii)

২য় ক্ষেত্রে, $0 = v - yt_2$

$\Rightarrow t_2 = \frac{v}{y}$ ...... (iii)

এবং $s_2 = \frac{v + 0}{2}.t_2$

$\therefore 4000 = \frac{v}{2}.t_2$ ...... (iv)

(ii) + (iv) করে পাই,

$8000 + 4000 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2)$

$\Rightarrow 12000 = \frac{v}{2}.600$

$\therefore v = 40\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

(ii) নং হতে, $8000 = \frac{40}{2}.t_1$

$\therefore t_1 = 400$ সেকেন্ড

$\therefore t_2 = 600 - 400 = 200$ সেকেন্ড

(i) নং হতে, $400 = \frac{40}{x} \Rightarrow x = \frac{40}{400} = 0.1\ ms^{-2}$ **(Ans.)**

(iii) নং হতে, $200 = \frac{40}{y} \Rightarrow y = \frac{40}{200} = 0.2\ ms^{-2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২ দৃশ্যকল্প-১: একটি বাস স্থিরাবস্থা থেকে 10 সেকেন্ডে 300 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। বাসটি যাত্রা পথের প্রথম অংশ p_1 সমত্বরণে এবং দ্বিতীয় অংশ p_2 সমমন্দনে চলে।

দৃশ্যকল্প-২: কোনো বস্তুকণা কোনো সরলরেখা বরাবর সমত্বরণে চলে t_1, t_2 ও t_3 সময়ে ধারাবাহিক গড়বেগ যথাক্রমে v_1, v_2 এবং v_3 বেগ প্রাপ্ত হয়।

(ক) স্থিরাবস্থা হতে $4\ ms^{-2}$ সমত্বরণে চলমান বস্তুর 30 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [ম. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{6}$

[ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো.; য. বো.; সি. বো.; দি. বো. ১৮; কু. বো. ১৭]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{t_1 + t_2}{v_1 - v_2} = \frac{t_2 + t_3}{v_2 - v_3}$

[ঢা., য., সি. ও দি. বো. ১৮]

সমাধান:

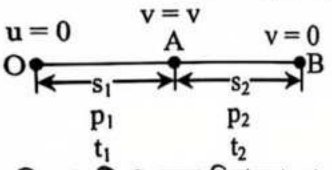
ক দেওয়া আছে,
আদিবেগ, $u = 0$
সমত্বরণ, $f = 4\ ms^{-2}$
সময়, $t = 30\ s$
অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = ?$

আমরা জানি, $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

$= 0 \times t + \frac{1}{2} \times 4 \times (30)^2$

$= 1800\ m$ **(Ans.)**

খ



ধরি, বাসটি O হতে স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা করে p_1 সমত্বরণে t_1 সময়ে OA বরাবর চলে A বিন্দুতে v বেগ প্রাপ্ত হয়। আবার A থেকে p_2 সমমন্দনে t_2 সময়ে AB বরাবর B বিন্দুতে যায়।
সুতরাং মোট সময়,
$t = t_1 + t_2 = 10$ সে.
অতিক্রান্ত দূরত্ব,
$s = s_1 + s_2 = 300$ মি.
১ম ক্ষেত্রে, OA বরাবর,
$v = 0 + p_1t_1$

$\Rightarrow \frac{1}{p_1} = \frac{t_1}{v}$ ......(i)

এবং, $s_1 = \frac{0+v}{2}t_1$

$\Rightarrow s_1 = \frac{v}{2}.t_1$ ....(ii)

আবার, ২য় ক্ষেত্রে AB বরাবর,
$0 = v - p_2t_2$

$\Rightarrow \frac{1}{p_2} = \frac{t_2}{v}$ ......(iii)

এবং, $s_2 = \frac{v+0}{2}.t_2$

$\Rightarrow s_2 = \frac{v}{2}.t_2$......(iv)

(ii) + (iv) করে পাই,

$\therefore s_1 + s_2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2)$

$\Rightarrow 300 = \frac{v}{2} \times 10$

$\Rightarrow v = 60$ মি./সে.

আবার, (i) + (iii) করে পাই,

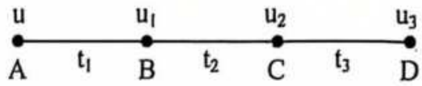
$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{t_1}{v} + \frac{t_2}{v}$

$\Rightarrow \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{v}(t_1 + t_2)$

$\Rightarrow \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{10}{60}$

$\therefore \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{6}$ **(Proved)**

গ



মনে করি, f সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা A বিন্দু থেকে u আদিবেগে যাত্রা করে t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে B, C, D বিন্দুতে u_1, u_2, u_3 বেগ প্রাপ্ত হয়।

$u_1 = u + ft_1$
$u_2 = u_1 + ft_2 = u + ft_1 + ft_2$
$u_3 = u_2 + ft_3 = u + ft_1 + ft_2 + ft_3$

$\therefore v_1 = \frac{u + u_1}{2}$

$v_2 = \frac{u_1 + u_2}{2}$

$v_3 = \frac{u_2 + u_3}{2}$

$\therefore v_1 - v_2 = \frac{u+u_1}{2} - \frac{u_1+u_2}{2} = \frac{u + u_1 - u_1 - u_2}{2} = \frac{u - u_2}{2}$

$v_2 - v_3 = \frac{u_1+u_2}{2} - \frac{u_2+u_3}{2} = \frac{u_1 + u_2 - u_2 - u_3}{2} = \frac{u_1 - u_3}{2}$

$\therefore \frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3} = \frac{u - u_2}{u_1 - u_3} = \frac{u - u - ft_1 - ft_2}{u + ft_1 - u - ft_1 - ft_2 - ft_3}$

$= \frac{-f(t_1 + t_2)}{-f(t_2 + t_3)} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}$

$\Rightarrow \frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}$

$\therefore \frac{t_1 + t_2}{v_1 - v_2} = \frac{t_2 + t_3}{v_2 - v_3}$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶৩ দৃশ্যকল্প-১: একজন সাঁতারুর S মিটার প্রশস্ত নদী স্রোত না থাকলে সোজাসুজি পাড়ি দিতে t মিনিট সময় লাগে। কিন্তু স্রোত থাকলে তা পার হতে t′ মিনিট সময় লাগে।
দৃশ্যকল্প-২: একটি বুলেট কোনো দেওয়ালের ভিতর 1 সে.মি. ঢুকবার পর এর বেগ এক-তৃতীয়াংশ হারায়।

(ক) একটি ট্রেন 20 m/s আদিবেগ এবং $4m/s^2$ সমত্বরণে চলমান হলে ৪র্থ সেকেন্ডে ট্রেনটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? [ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২৩; চ. বো. ১৯; য. বো. ১৭]

(খ) প্রমাণ কর যে, স্রোতের বেগ $= S\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t'^2}}$ m/s [ম. বো. ২৩]

(গ) বুলেটটির বেগ শূন্য হওয়ার পূর্বে দেওয়ালের ভিতর আরও কতদূর ঢুকবে? [ম. বো. ২৩; রা. বো. ১৯]

সমাধান:

ক এখানে আদিবেগ, $u = 20\ ms^{-1}$
ত্বরণ, $f = 4\ ms^{-2}$
সময়, $t = 4$ তম সেকেন্ড
৪র্থ সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s_4 = ?$
আমরা জানি,

t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $S_t = u + \frac{1}{2}f(2t - 1)$

$\therefore$ ৪র্থ সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$s_4 = 20 + \frac{1}{2} \times 4 \times (2 \times 4 - 1) = 34\ m$ **(Ans.)**

খ ধরি, সাঁতারুর বেগ u ও স্রোতের বেগ v
স্রোত না থাকলে নদী পার হতে সময় লাগে t

$\therefore S = ut$

$\Rightarrow u = \dfrac{S}{t}$

মনে করি, স্রোত থাকলে u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ α এবং সাঁতারু w বেগে t′ সময়ে সোজাসুজি নদী পার হতে পারে।

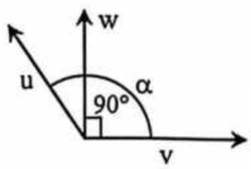
$\therefore S = wt' \text{ .... (i)}$

$\therefore$ লব্ধি বেগ w হলে,

$w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha \text{ .... (ii)}$

আবার, $\tan 90° = \dfrac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{0} = \dfrac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$



$\Rightarrow 0 = \dfrac{v + u\cos\alpha}{u\sin\alpha}$

$\Rightarrow v + u\cos\alpha = 0$

$\therefore u\cos\alpha = -v$

(ii) নং হতে,

$w^2 = u^2 + v^2 - 2v^2$

$\Rightarrow w = \sqrt{u^2 - v^2}$

এখন, $S = wt'$ [(i) হতে পাই]

$\Rightarrow S = \sqrt{u^2 - v^2}\, t'$

$\Rightarrow \dfrac{S}{t'} = \sqrt{\dfrac{S^2}{t^2} - v^2}$

$\Rightarrow \dfrac{S^2}{t'^2} = \dfrac{S^2}{t^2} - v^2$

$\Rightarrow v^2 = \dfrac{S^2}{t^2} - \dfrac{S^2}{t'^2}$

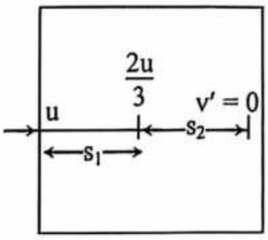
$\Rightarrow v^2 = S^2\left(\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{t'^2}\right)$

$\therefore v = S\sqrt{\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{t'^2}}$ m/min **(Proved)**

বিঃ দ্রঃ উদ্দীপকে t এর একক মিনিট থাকায় $\sqrt{\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{t'^2}}$ m/s এর পরিবর্তে $S\sqrt{\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{t'^2}}$ m/min প্রমাণ করা হয়েছে।

গ ১ম ক্ষেত্রে,
ধরি, বুলেটের আদিবেগ = u
সরণ, $s_1 = 1$ সে. মি.

শেষ বেগ, $v = u - \dfrac{u}{3} = \dfrac{2u}{3}$



মন্দন = a

আমরা জানি, $v^2 = u^2 - 2as_1$

$\Rightarrow \left(\dfrac{2u}{3}\right)^2 = u^2 - 2a \times 1$

$\Rightarrow 2a = u^2 - \dfrac{4u^2}{9}$

$\therefore 2a = \dfrac{5u^2}{9} \text{ ....(i)}$

২য় ক্ষেত্রে, বুলেটের আদিবেগ, $u' = v = \dfrac{2u}{3}$

বুলেটের শেষবেগ, $v' = 0$

সরণ, $s_2 = ?$

আমরা জানি, $v'^2 = u'^2 - 2as_2$

$\Rightarrow 0^2 = \left(\dfrac{2u}{3}\right)^2 - \dfrac{5u^2}{9} \times s_2$ [(i) হতে 2a এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow \dfrac{5u^2}{9} s_2 = \dfrac{4u^2}{9} \Rightarrow s_2 = \dfrac{4u^2 \times 9}{9 \times 5u^2} = \dfrac{4}{5}$

$\therefore s_2 = 0.8$ সে.মি **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪ উদ্দীপক-১: দুইটি বেগের বৃহত্তম লব্ধি এদের ক্ষুদ্রতম লব্ধির দ্বিগুণ। বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে লব্ধি বেগের মান এদের সমষ্টির অর্ধেক হয়।

উদ্দীপক-২:

A — B — C — D

$AB = \dfrac{1}{m} AD$ $\qquad CD = \dfrac{1}{n} AD$

(ক) u আদিবেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বিচরণকাল নির্ণয় কর। [ম. বো. ২২]

(খ) উদ্দীপক-১ হতে α এর মান নির্ণয় কর। [ম. বো. ২২]

(গ) একখানা রেলগাড়ি A স্টেশন হতে ছেড়ে D স্টেশনে গিয়ে থামে। গাড়িখানা AB অংশে সমত্বরণে, CD অংশে সমমন্দনে এবং BC অংশে সমবেগে চলে। প্রমাণ কর যে, উহার গড়বেগ ও সর্বোচ্চ বেগের অনুপাত $= 1 : \left(1 + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)$ [সি. বো. ১৯]

সমাধান:

ক গতির সূত্রানুযায়ী আমরা জানি, $s = ut + \dfrac{1}{2} ft^2$

বস্তুটি খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত হওয়ার পর আবার ভূমিতে ফিরে আসলে বিচরণকাল = T এবং h = 0 হবে।

$\therefore 0 = uT + \dfrac{1}{2}(-g)T^2$ [উল্লম্ব দিকে অভিকর্ষজ ত্বরণ – g]

$\Rightarrow 0 = 2uT - gT^2$

$\Rightarrow gT^2 = 2uT$

$\Rightarrow gT = 2u$

$\therefore T = \dfrac{2u}{g}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, বেগ দুইটির মান u ও v ; u > v
বৃহত্তম লব্ধি = u + v এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি = u – v
শর্তমতে, u + v = 2(u – v) = 2m; যেখানে u – v = m
আবার, u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে,
প্রশ্নমতে,

$\therefore$ লব্ধির মান, $w = \dfrac{u + v}{2}$

$\Rightarrow w^2 = \dfrac{(u + v)^2}{4}$

$\Rightarrow u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha = \dfrac{(u + v)^2}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{(u + v)^2}{2} = 2(u^2 + v^2) + 4uv\cos\alpha$

$\Rightarrow \frac{(2m)^2}{2} = (u+v)^2 + (u-v)^2 + \{(u+v)^2 - (u-v)^2\}\cos\alpha$

$\Rightarrow \frac{4m^2}{2} = 4m^2 + m^2 + (4m^2 - m^2)\cos\alpha$

$\Rightarrow 2m^2 = 5m^2 + 3m^2\cos\alpha$

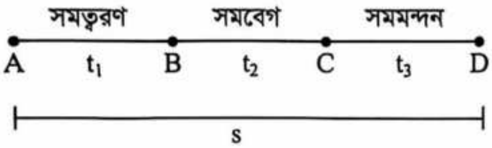
$\Rightarrow -3m^2 = 3m^2\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-3m^2}{3m^2}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -1 = \cos 180°$

$\therefore \alpha = 180°$ **(Ans.)**

গ ধরি, গাড়িটি t_1 সময়ে AB অংশ, t_2 সময়ে BC অংশ এবং t_3 সময়ে CD অংশ অতিক্রম করে।



ধরি, AD = s

$\therefore t_1 + t_2 + t_3 = t$

গড়বেগ, $\overline{v} = \frac{s}{t}$

প্রশ্নমতে, $AB = \frac{s}{m}$, $CD = \frac{s}{n}$

$\therefore BC = s - \frac{s}{m} - \frac{s}{n} = s\left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$

A ও D বিন্দুতে গাড়ীর বেগ শূন্য।

মনে করি, B বিন্দুতে সর্বোচ্চ বেগ v।

$\therefore AB = \frac{s}{m} = \frac{0+v}{2} \times t_1$

$\Rightarrow \frac{2s}{m} = vt_1$ ..... (i)

$CD = \frac{s}{n} = \frac{v+0}{2} \times t_3$

$\Rightarrow \frac{2s}{n} = vt_3$ ..... (ii)

$BC = s\left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) = vt_2$

$\Rightarrow s\left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) = vt_2$ ...... (iii)

(i) + (ii) + (iii) $\Rightarrow$

$s\left(\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) = v(t_1 + t_2 + t_3)$

$\Rightarrow s\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = vt$

$\Rightarrow \frac{s}{t}\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = v$

$\Rightarrow \overline{v}\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = v \quad \left[\because \overline{v} = \frac{s}{t}\right]$

$\therefore \overline{v} : v = 1 : \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ৫ উদ্দীপক-১: সমত্বরণে চলমান একটি কণা পর পর t_1, t_2 ও t_3 সময়ে যথাক্রমে **d, 4d** এবং **7d** দূরত্ব অতিক্রম করে।

উদ্দীপক-২: একটি সরলরেখায় দুইটি কণা **a** ও **b** সমত্বরণে চলছে। কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু হতে এরা যখন 15 একক ও 20 একক দূরত্বে অবস্থান করে, তখন তাদের বেগ যথাক্রমে **u** ও **v** হয়।

(ক) সমতলে একটি বস্তুকণা যদি u আদিবেগে a সমত্বরণে t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে তাহলে t তম সময়ে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? [য. বো. ১৯]

(খ) উদ্দীপক-১ এর আলোকে দেখাও যে, $\frac{1}{t_1} - \frac{4}{t_2} + \frac{7}{t_3} = \frac{12}{t_1 + t_2 + t_3}$ [ব. বো. ১৯]

(গ) উদ্দীপক-২ হতে দেখাও যে, কণা দুইটি দুইবারের বেশি মিলিত হতে পারে না এবং এদের মিলিত হওয়ার সময়ের পার্থক্য $\frac{2}{a-b}\sqrt{(u-v)^2 + 10(a-b)}$

সমাধান:

ক ধরি, t তম সে. অতিক্রান্ত দূরত্ব s_t

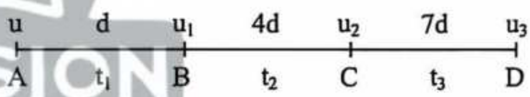
তাহলে, s_t = t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব – (t – 1) সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব।

$= \left(ut + \frac{1}{2}at^2\right) - \left\{u(t-1) + \frac{1}{2}a(t-1)^2\right\}$

$= ut + \frac{1}{2}at^2 - \left(ut - u + \frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}a.2t + \frac{1}{2}a\right)$

$= u + \frac{1}{2}a(2t-1)$ **(Ans.)**

খ



কণাটি A হতে u বেগে t_1 সময়ে d দূরত্বে B বিন্দুতে u_1 বেগ প্রাপ্ত হয়, কণাটি B হতে u_1 বেগে t_2 সময়ে 4d দূরত্বে C বিন্দুতে u_2 বেগ প্রাপ্ত হয়, এবং কণাটি C হতে u_2 বেগে t_3 সময়ে 7d দূরত্বে D বিন্দুতে u_3 বেগ প্রাপ্ত হয়।

AB অংশে: $d = \frac{u + u_1}{2}.t_1 \Rightarrow \frac{d}{t_1} = \frac{u + u_1}{2}$ .....(i)

BC অংশে: $4d = \frac{u_1 + u_2}{2}.t_2 \Rightarrow \frac{4d}{t_2} = \frac{u_1 + u_2}{2}$ ....(ii)

CD অংশে: $7d = \frac{u_2 + u_3}{2}.t_3 \Rightarrow \frac{7d}{t_3} = \frac{u_2 + u_3}{2}$ .....(iii)

AD অংশে: $12d = \frac{u + u_3}{2}.(t_1 + t_2 + t_3)$

$\Rightarrow \frac{12d}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{u + u_3}{2}$ .....(iv)

(i) – (ii) + (iii) করে পাই,

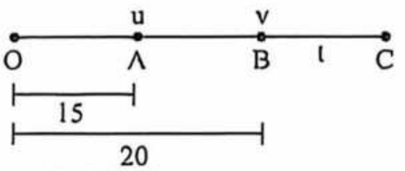
$\frac{d}{t_1} - \frac{4d}{t_2} + \frac{7d}{t_3} = \frac{u + u_1}{2} - \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 + u_3}{2}$

$\Rightarrow d\left(\frac{1}{t_1} - \frac{4}{t_2} + \frac{7}{t_3}\right) = \frac{u + u_3}{2}$

$\Rightarrow d\left(\frac{1}{t_1} - \frac{4}{t_2} + \frac{7}{t_3}\right) = \frac{12d}{t_1 + t_2 + t_3}$ [সমীকরণ (iv) হতে]

$\therefore \frac{1}{t_1} - \frac{4}{t_2} + \frac{7}{t_3} = \frac{12}{t_1 + t_2 + t_3}$ **(Showed)**

গ



মনে করি, নির্দিষ্ট বিন্দু O। দেওয়া আছে, OA = 15 একক, OB = 20 একক।

a ও b সমত্বরণে চলমান দুইটি কণা A ও B বিন্দুতে অবস্থানকালে যথাক্রমে u ও v বেগ প্রাপ্ত হয়। ধরি, t সময় পরে কণা দুইটি C বিন্দুতে মিলিত হয়।

এখন, $BC = vt + \frac{1}{2}bt^2$

$AC = ut + \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow AB + BC = ut + \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow (OB - OA) + vt + \frac{1}{2}bt^2 = ut + \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow (20 - 15) + t(v - u) + \frac{1}{2}t^2(b - a) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(b - a)t^2 + (v - u)t + 5 = 0$

$\Rightarrow (a - b)t^2 + 2t(u - v) - 10 = 0$ ...... (iii)

(iii) নং সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং, t এর সর্বোচ্চ দুটি মান থাকতে পারে এবং কণা দুইটি দুইবারের বেশি মিলিত হতে পারে না।

$$t = \frac{-2(u - v) \pm \sqrt{\{2(u - v)\}^2 - 4.(a - b).(-10)}}{2.(a - b)}$$

$$= \frac{-2(u - v) \pm 2\sqrt{(u - v)^2 + 10(a - b)}}{2(a - b)}$$

$$= \frac{-(u - v) \pm \sqrt{(u - v)^2 + 10(a - b)}}{(a - b)}$$

মনে করি, কণা দুইটি t_1 ও t_2 সময়ে মিলিত হয়।

$$t_1 = \frac{-(u - v) + \sqrt{(u - v)^2 + 10(a - b)}}{(a - b)}$$

$$t_2 = \frac{-(u - v) - \sqrt{(u - v)^2 + 10(a - b)}}{(a - b)}$$

কণা দুইটির মিলিত হওয়ার সময়ের পার্থক্য:

$$t_1 - t_2 = \frac{2\sqrt{(u - v)^2 + 10(a - b)}}{(a - b)}$$

$$= \frac{2}{a - b}\sqrt{(u - v)^2 + 10(a - b)}$$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ৬ দৃশ্যকল্প-১: একটি প্রক্ষিপ্ত বস্তুর দুটি গতিপথের বৃহত্তম উচ্চতা যথাক্রমে **4m** ও **6m**

দৃশ্যকল্প-২: সুষম ত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলন্ত একটি বিন্দুকণা পরপর **p, q, r** সময়ে যথাক্রমে সমান তিনটি ক্রমিক দূরত্ব অতিক্রম করে।

(ক) স্রোতহীন নদী একজন সাঁতারু **4** মিনিটে এবং স্রোত থাকলে **10** মিনিটে একটি নদী সোজাসুজি পার হয়। নদীর প্রস্থ **180** মিটার হলে, স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। [চ. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে নিক্ষিপ্ত বস্তুটির পাল্লা নির্ণয় কর। [চ. বো. ১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{p + q + r}$ [চ. বো. ১৯]

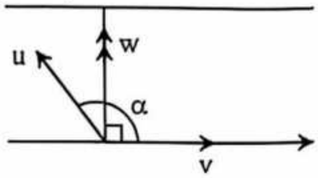
সমাধান:

ক দেওয়া আছে, নদীর প্রস্থ, d = 180 মিটার

মনে করি, সাঁতারুর বেগ, $u = \frac{180}{4} = 45$ মি./মিনিট

লব্ধি বেগ, $w = \frac{180}{10} = 18$ মি./মিনিট

ধরি, স্রোতের বেগ, v মি./মিনিট



সোজাসুজি পার হলে, $\theta = 90°$

$\tan 90° = \frac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$

$\Rightarrow v + u\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow u\cos\alpha = -v$ ..... (i)

আমরা জানি, $w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$

$\Rightarrow w^2 = u^2 + v^2 - 2v^2$ [(i) থেকে পাই]

$\Rightarrow w^2 = u^2 - v^2$

$\Rightarrow v^2 = u^2 - w^2$

$\Rightarrow v^2 = (45)^2 - (18)^2$

$\therefore v = 41.24$ মিটার/মিনিট **(Ans.)**

খ ধরি, আদিবেগ u এবং নিক্ষেপণ কোণদ্বয়, α ও $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

বৃহত্তম উচ্চতা দুটি, $h_1 = 4m$ এবং $h_2 = 6m$

পাল্লা, $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$

$\Rightarrow R = \frac{2u^2\sin\alpha.\cos\alpha}{g}$

$\Rightarrow R = \frac{2u\sin\alpha.u\cos\alpha}{g}$ ..... (i)

α কোণে নিক্ষেপ করা হলে বৃহত্তম উচ্চতা,

$h_1 = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

$\Rightarrow 4 = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

$\Rightarrow u^2\sin^2\alpha = 2g \times 4 = 8 \times 9.8 = 78.4$

$\therefore u\sin\alpha = 8.85$ [বর্গমূল করে]

$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ কোণে নিক্ষেপ করা হলে বৃহত্তম উচ্চতা,

$h_2 = \frac{u^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2g}$

$\Rightarrow 6 = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}$

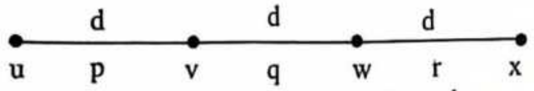
$\Rightarrow u^2\cos^2\alpha = 12g = 12 \times 9.8 = 117.6$

$\therefore u\cos\alpha = 10.84$

(i) নং এ $u\sin\alpha$ ও $u\cos\alpha$ এর মান বসিয়ে পাই,

$R = \frac{2 \times 8.85 \times 10.84}{9.8} = 19.6$ মিটার **(Ans.)**

গ মনে করি, p, q, r সময়ে অতিক্রান্ত ক্রমিক দূরত্ব d,
p সময়ের আদিবেগ ও শেষবেগ যথাক্রমে u ও v,
q সময়ের আদিবেগ ও শেষবেগ যথাক্রমে v ও w,
এবং r সময়ের আদিবেগ ও শেষবেগ যথাক্রমে w ও x,



p সময়ের ক্ষেত্রে গড়বেগের সংজ্ঞানুসারে, $\frac{u+v}{2}=\frac{d}{p}$ ..... (i)

q সময়ের ক্ষেত্রে গড়বেগের সংজ্ঞানুসারে, $\frac{v+w}{2}=\frac{d}{q}$ ..... (ii)

r সময়ের ক্ষেত্রে গড়বেগের সংজ্ঞানুসারে, $\frac{w+x}{2}=\frac{d}{r}$ ..... (iii)

p, q, r সময়ের ক্ষেত্রে গড়বেগের সংজ্ঞানুসারে, $\frac{u+x}{2}=\frac{3d}{p+q+r}$ ..... (iv)

এখন, (i) – (ii) + (iii) করে পাই,

$$\frac{u+v}{2}-\frac{v+w}{2}+\frac{w+x}{2}=d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{u+x}{2}=d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right) \text{ ..... (v)}$$

সমীকরণ (iv) ও (v) হতে পাই,

$$d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)=\frac{3d}{p+q+r}$$

$$\therefore \frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{3}{p+q+r}$$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ৭ একটি বাঘ 80 m দূরের একটি হরিণকে 2 m/sec আদিবেগে এবং 1.5 m/sec^2 সমত্বরণে ধাওয়া করল, হরিণটি 4 m/sec আদিবেগে এবং 1 m/sec^2 সমত্বরণে 212.5 m দূরে অবস্থিত নিরাপদ আশ্রয়ের দিকে সোজা দৌড়াতে লাগল।

(ক) একটি নৌকা 10 কি. মি. বেগে চলে ঘণ্টায় 6 কি. মি. বেগে প্রবাহিত 500 মিটার চওড়া একটি নদী পাড়ি দিতে চায়। নৌকাটির ন্যূনতম পথে নদীটি পাড়ি দিতে কত সময় লাগবে? [কু. বো. ১৭]

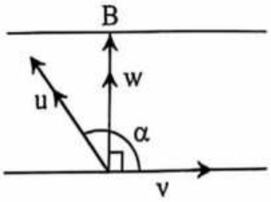
(খ) কত সময়ে বাঘ ও হরিণের বেগ সমান হবে? বেগ সমান হওয়ার মুহূর্তে উভয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত থাকবে?

(গ) উদ্দীপকে বাঘটি হরিণকে ধরতে পারবে কি? গাণিতিক বিশ্লেষণ করে উত্তর দাও।

সমাধানঃ

ক দেওয়া আছে, নৌকার বেগ, u = 10 কিমি/ঘন্টা
স্রোতের বেগ, v = 6 কিমি/ঘন্টা

নদীর প্রস্থ = 500 মিটার = $\frac{500}{1000}$ কিমি = $\frac{1}{2}$ কিমি



ন্যূনতম পথে নদীটি পাড়ি দিলে $\theta = 90°$

$$\tan 90° = \frac{u\sin\alpha}{v+u\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0}=\frac{u\sin\alpha}{v+u\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow v+u\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow u\cos\alpha = -v$$

$$\therefore w^2 = u^2+v^2+2uv\cos\alpha = u^2+v^2+2v(-v) = u^2-v^2$$

$\therefore$ লব্ধি, $w=\sqrt{u^2-v^2}=\sqrt{(10)^2-(6)^2}=8$ কিমি/ঘন্টা

প্রয়োজনীয় সময়, $t=\frac{\frac{1}{2}}{8}=\frac{1}{16}$ ঘন্টা = 3 মিনিট 45 সেকেন্ড **(Ans.)**

খ ধরি, t সময় পরে বাঘ ও হরিণের বেগ সমান হবে।
বাঘের ক্ষেত্রেঃ আদিবেগ, $u_1 = 2\ ms^{-1}$
ত্বরণ, $f_1 = 1.5\ ms^{-2}$
t সময় পর বেগ = v_1
হরিণের ক্ষেত্রেঃ আদিবেগ, $u_2 = 4\ ms^{-1}$
ত্বরণ, $f_2 = 1\ ms^{-2}$
t সময় পর বেগ = v_2
প্রশ্নমতে, $v_1 = v_2$

$$\Rightarrow u_1 + f_1t = u_2 + f_2t$$

$$\Rightarrow 2 + 1.5t = 4 + t$$

$$\Rightarrow 0.5t = 2$$

$$\Rightarrow t = 4 \text{ sec}$$ **(Ans.)**

4sec এ বাঘের অতিক্রান্ত দূরত্ব,

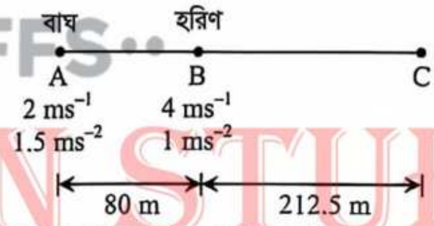
$$x_1 = u_1t+\frac{1}{2}f_1t^2 = 2\times4+\frac{1}{2}\times1.5\times(4)^2 = 20\text{ m}$$

4sec এ হরিণের অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$x_2 = u_2t+\frac{1}{2}f_2t^2 = 4\times4+\frac{1}{2}\times1\times(4)^2 = 24\text{ m}$$

বেগ সমান হওয়ার মুহূর্তে বাঘ ও হরিণের মধ্যবর্তী দূরত্ব,
$= (24-20)+80 = 84$ m **(Ans.)**

গ



এখানে, AB = 80 m, BC = 212.5 m
ধরি, t_1 সময়ে হরিণ BC দূরত্ব অতিক্রম করে,

$$BC = 212.5 = 4t_1+\frac{1}{2}\times1.(t_1)^2$$

$$\Rightarrow 0.5t_1^2+4t_1-212.5=0$$

$t_1 = 17$ sec, -25 sec [$\therefore -25$ sec গ্রহনযোগ্য নয়]
আবার, ধরি, t_2 সময়ে বাঘ AC দূরত্বে গমন করে।

$$\therefore AC = 80+212.5 = 2t_2+\frac{1}{2}\times1.5\times(t_2)^2$$

$$\Rightarrow 292.5 = 2t_2+0.75t_2^2$$

$$\Rightarrow 0.75t_2^2+2t_2-292.5=0$$

$t_2 = 18.46$ sec, -21.126 [$\therefore -21.126$ sec গ্রহনযোগ্য নয়]
যেহেতু $t_1 < t_2$
হরিণটি আগেই নিরাপদ আশ্রয়ে পৌঁছে যাবে।
সুতরাং বাঘ হরিণটিকে ধরতে পারবে না। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮ দৃশ্যকল্প-১: 50 ফুট উঁচু টাওয়ারের ছাদ থেকে ইমন একটি টেনিস বল নিচে ফেলে দিল। বলটি 8 ফুট নিচে নামার পর সুমন অপর একটি টেনিস বল y ফুট নিচ হতে ফেলে দিল। উভয় বল স্থিরাবস্থা থেকে একই সাথে ভূমিতে পতিত হলো। কিছুক্ষণ পর ইমন একটি ক্রিকেট বল আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে নিক্ষেপ করে।

দৃশ্যকল্প-২: একটি শূন্য কূপের মধ্যে একটি ঢিল ফেলার t সেকেন্ড পরে কূপের তলদেশে ঢিল পড়ার শব্দ শোনা গেল। শব্দের বেগ v এবং কূপের গভীরতা h।

(ক) 9.8 m/s বেগ এবং α কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে কী শর্তে পাল্লা সর্বাধিক হবে এবং তা কত নির্ণয় কর। ($g = 9.8\ m/s^2$) [কু. বো. ১৯]

(খ) সুমন কত উচ্চতা থেকে টেনিস বলটি ফেলেছিল? [কু. বো. ১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $(2h - gt^2)v^2 + 2hgtv = h^2g$ [দি. বো. ১৭]

সমাধান:

ক এখানে, আদিবেগ, $u = 9.8\ ms^{-1}$

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$

আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(9.8)^2 \times \sin 2\alpha}{9.8}$

$= 9.8 \sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha$ এর উপর আনুভূমিক পাল্লা নির্ভর করবে। অর্থাৎ, $\sin 2\alpha$ সর্বাধিক হলে পাল্লা সর্বাধিক হবে।

যেহেতু $\sin 2\alpha$ এর বৃহত্তম মান = 1

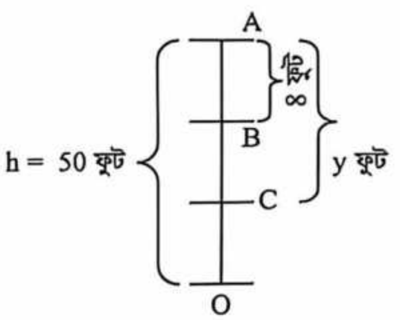
$\therefore \sin 2\alpha = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

সর্বাধিক পাল্লার মান $= 9.8 \times \sin\frac{\pi}{2} = 9.8 \times 1 = 9.8$ মিটার **(Ans.)**

খ টাওয়ারের উচ্চতা, OA = h = 50 ফুট অভিকর্ষজ ত্বরণ, g = 32 ফুট/সে.^{2} ইমনের ফেলে দেয়া ১ম টেনিস বলটি 8 ফুট নিচে নামার পর B বিন্দুতে v বেগ প্রাপ্ত হয়।



$\therefore v^2 = u^2 + 2 \times g \times 8$

$\Rightarrow v^2 = 2 \times 8 \times 32 = 512$

$v = 22.63$ ফুট/সে.^{2}

ধরি, ইমন দ্বিতীয় বলটি C বিন্দু হতে ফেলে দেয় এবং বল দুটি t সময়ে ভূমিতে পতিত হয়।

১ম বলের ক্ষেত্রে,

OB = (50 – 8) ফুট বা 42 ফুট দূরত্ব নামার জন্য প্রয়োজনীয় সময় t এবং আদিবেগ v হলে,

$42 = vt + \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 42 = 22.63 \times t + \frac{1}{2} \times 32 \times t^2$

$\Rightarrow 42 = 22.63t + 16t^2$

$\Rightarrow 16t^2 + 22.63t - 42 = 0$

$\Rightarrow t = \frac{-(22.63) \pm \sqrt{(22.63)^2 - 4 \times 16 \times (-42)}}{2 \times 16}$

$\therefore t = 1.06, -2.47$ [যা গ্রহণযোগ্য নয়]

২য় বলের ক্ষেত্রে:

OC = (50 –y) ফুট নিচে নামার ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় সময় t এবং আদিবেগ = 0 হলে,

$\therefore 50 - y = 0 + \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 50 - y = \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 50 - y = \frac{1}{2} \times 32 \times (1.06)^2$

$\Rightarrow 50 - y = 17.98$

$\Rightarrow y = 32.02$ ফুট ≈ 32 ফুট (প্রায়)

সুমন টেনিস বলটি ছাদ হতে 32 ফুট নিচ থেকে এবং ভূমি হতে (50 – 32) বা 18 ফুট উঁচু থেকে ফেলেছিল। **(Ans.)**

গ ধরি, আদি অবস্থা হতে পাথরটি পড়তে t_1 সে. এবং পাথর পতনের পর শব্দ শুনতে t_2 সে. সময় লাগে।

$\therefore t = t_1 + t_2$ .... (i)

কুয়ার গভীরতা h হলে,

পাথর পড়ার ক্ষেত্রে, $h = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

এখানে, শব্দের বেগ = v এবং কূপের গভীরতা = h

আমরা জানি, শব্দ সমবেগে চলে।

$\therefore h = vt_2$

$\Rightarrow t_2 = \frac{h}{v}$

এখন, (i) নং এ t_1 ও t_2 এর মান বসিয়ে পাই,

$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}$

$\Rightarrow t - \frac{h}{v} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\Rightarrow \left(t - \frac{h}{v}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2$

$\Rightarrow t^2 - 2\frac{h}{v}t + \frac{h^2}{v^2} = \frac{2h}{g}$

$\Rightarrow \frac{v^2t^2 - 2hvt + h^2}{v^2} = \frac{2h}{g}$

$\Rightarrow gv^2t^2 - 2hgvt + h^2g = 2hv^2$

$\Rightarrow 2hv^2 - gv^2t^2 + 2hgvt - h^2g = 0$

$\Rightarrow (2h - gt^2)v^2 + 2hgvt = h^2g$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ৯ উদ্দীপক-১: একটি টাওয়ারের শীর্ষ হতে অবাধে পড়ন্ত একটি পাথর, তার গতির শেষতম সেকেন্ডে টাওয়ারের উচ্চতার $\frac{5}{9}$ অংশ অতিক্রম করে।

উদ্দীপক-২: দুইটি রেলগাড়ি একই রেল লাইনে যথাক্রমে u ও v সমবেগে একে অপরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। যখন তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব d তখন একে অপরের দেখতে পায়। ট্রেন দুইটির সর্বোচ্চ মন্দন a ও b প্রয়োগ করে কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব।

(ক) 490 মিটার উঁচু একটি টাওয়ারের শীর্ষ হতে একটি পাথরকে আনুভূমিকভাবে নিক্ষেপ করা হলো। পাথরটি মাটিতে পৌছার সময় নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২]

(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২]

(গ) উদ্দীপক-২ এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $u^2b + v^2a = 2abd$ [কু. বো. ২২]

সমাধান:

ক এখানে, উচ্চতা, $h = 490$ m

ধরি, আনুভূমিক বেগ u m/s, নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = 0$ এবং পাথরটির মাটিতে পৌছানোর সময় = t সে.।

আনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে,

$$h = u\sin\alpha t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow 490 = u\sin 0°.t + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$

$$\Rightarrow 490 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \times 490}{9.8}} = 10 \text{ সেকেন্ড (Ans.)}$$

খ ধরি, টাওয়ারের উচ্চতা = h মিটার এবং পাথরটি মাটিতে পড়তে t সে. সময় লাগে। এখানে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8$ ms^{-2}

$\therefore h = \frac{1}{2}gt^2$...... (i) [স্থিরাবস্থান হতে পতনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে]

t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $h_{th} = \frac{1}{2} \times g(2t-1)$

এখানে, $h_{th} = \frac{5h}{9}$

$$\therefore \frac{5h}{9} = \frac{1}{2}g(2t-1)$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9} \times \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(2t-1) \text{ [(i) নং হতে]}$$

$$\Rightarrow 5t^2 = 18t - 9$$

$$\Rightarrow 5t^2 - 18t + 9 = 0$$

$$\Rightarrow 5t^2 - 15t - 3t + 9 = 0$$

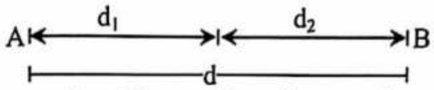
$$\Rightarrow 5t(t-3) - 3(t-3) = 0$$

$$\Rightarrow (t-3)(5t-3) = 0$$

হয়, $t - 3 = 0$ $\Rightarrow t = 3s$ | অথবা, $5t - 3 = 0$ $\Rightarrow t = \frac{3}{5} = 0.6 < 1$ s; যা গ্রহণযোগ্য নয়।

$$\therefore h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 3^2 = 44.1 \text{ মিটার। (Ans.)}$$

গ



মনে করি, দুইটি রেলগাড়ি একই রেল লাইনের A ও B বিন্দু হতে পরস্পর বিপরীত দিকে u ও v গতিবেগে অগ্রসর হওয়ার সময় d দূরত্বে একে অপরকে দেখতে পায়। সংঘর্ষ এড়ানোর জন্য রেলগাড়ি দুইটি সর্বোচ্চ মন্দন যথাক্রমে a ও b প্রয়োগ করে d_1 ও d_2 দূরত্ব অতিক্রম করে থেমে যায়।

$\therefore$ প্রথম রেল গাড়ির ক্ষেত্রে, $0 = u^2 - 2ad_1$

$$\Rightarrow 2ad_1 = u^2$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{u^2}{2a}$$

এবং দ্বিতীয় রেল গাড়ির ক্ষেত্রে, $0 = v^2 - 2bd_2$

$$\Rightarrow 2bd_2 = v^2$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{v^2}{2b}$$

কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানোর জন্য,

$$d_1 + d_2 = d$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{2a} + \frac{v^2}{2b} = d$$

$$\therefore u^2b + v^2a = 2abd$$

$\therefore u^2b + v^2a = 2abd$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ১০ দৃশ্যকল্প-১: একটি ট্রেন রেলপথে 4 কি. মি. ব্যবধানে দুটি স্টেশনে থামে। এক স্টেশন থেকে অন্য স্টেশনে পৌছাতে সময় লাগে 8 মিনিট। ট্রেনটির গতিপথের প্রথম অংশ m সমত্বরণে এবং দ্বিতীয় অংশ n সমমন্দনে চলে।

দৃশ্যকল্প-২: একটি টাওয়ারের চূড়া হতে একখণ্ড পাথর x মিটার নিচে নামার পর অপর খণ্ড পাথর চূড়ার y মিটার নিচ হতে ফেলে দেয়া হলো। উভয়েই স্থিরাবস্থা হতে পড়ে এবং একই সঙ্গে ভূমিতে পতিত হয়।

(ক) একটি কার স্থিরাবস্থা হতে সমত্বরণে 1 কিলোমিটার পথ 2 মিনিটে অতিক্রম করলে বেগ কত হবে? [ঢা. বো. ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 8$ [ঢা. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৭]

(গ) দেখাও যে, টাওয়ারটির উচ্চতা $\frac{(x+y)^2}{4x}$ মিটার। [ঢা. বো. ১৯]

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, দূরত্ব, $s = 1$ কি.মি. $= 1000$ মিটার

সময়, $t = 2$ মিনিট $= 120$ সেকেন্ড

আদিবেগ, $u = 0$ মিটার/সেকেন্ড

শেষবেগ, $v = ?$

সমত্বরণ a হলে, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$$\Rightarrow 1000 = 0 + \frac{1}{2}.a.(120)^2$$

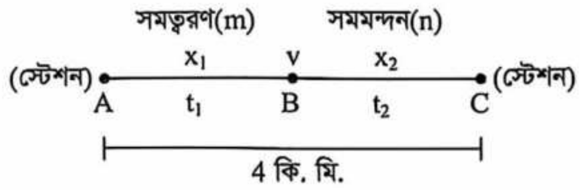
$$\Rightarrow a.14400 = 2000$$

$$\Rightarrow a = \frac{2000}{14400} = \frac{5}{36} \text{ মিটার/সেকেন্ড}^2$$

আবার, $v^2 = u^2 + 2as = 0 + 2 \times \frac{5}{36} \times 1000 = \frac{2500}{9}$

$$\Rightarrow v = \frac{50}{3} \text{ মিটার/সেকেন্ড। (Ans.)}$$

খ



স্টেশন দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব, $AC = x_1 + x_2 = 4$ কি.মি

এবং মোট সময়, $t = t_1 + t_2 = 8$ মিনিট

AB অংশের ক্ষেত্রে:

দূরত্ব $= x_1$, সময় $= t_1$ এবং সমত্বরণ $= m$, এবং B বিন্দুতে v বেগ প্রাপ্ত হয়।

সুতরাং, $v = 0 + mt_1$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{v}{m} \text{ .... (i)}$$

এবং $x_1 = \frac{1}{2}mt_1^2$

$$= \frac{1}{2}mt_1.t_1$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2}vt_1 \text{ ..... (ii)}$$

BC অংশের ক্ষেত্রে:

দূরত্ব $= x_2$, সময় $= t_2$ এবং সমমন্দন $= n$ এবং C বিন্দুতে বেগ শূন্য হয়।

সুতরাং, $0 = v - nt_2$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{v}{n} \text{ .... (iii)}$$

এবং $x_2 = vt_2 - \frac{1}{2}nt_2^2$

$$= vt_2 - \frac{1}{2}nt_2.t_2$$

$$\Rightarrow x_2 = vt_2 - \frac{1}{2}vt_2$$

$$= \frac{1}{2}vt_2 \text{ ..... (iv)}$$

$$\text{(i)} + \text{(iii)} \Rightarrow t_1 + t_2 = \frac{v}{m} + \frac{v}{n} = v\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \text{ .... (v)}$$

$$\text{(ii)} + \text{(iv)} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{1}{2}v(t_1 + t_2)$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{1}{2}v.8$$

$$\Rightarrow v = 1$$

(v) থেকে পাই,

$$1.\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = 8 \quad [\because v = 1; t_1 + t_2 = 8]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 8 \text{ (Proved)}$$

গ মনে করি, টাওয়ার এর উচ্চতা, $AD = H$

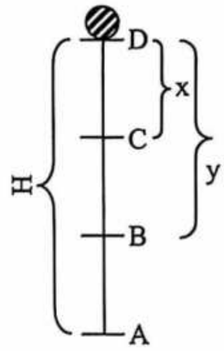
১ম পাথর টাওয়ারের শীর্ষ হতে x মিটার নিচে নামার পর বেগ = v

$$\therefore v^2 = 0^2 + 2gx$$

$$\Rightarrow v^2 = 2gx$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gx} \text{ ..... (i)}$$

আবার, ধরি, ১ম পাথর ও ২য় পাথর t সময় পর ভূমিতে পৌছে।



১ম পাথরের ক্ষেত্রে,

দূরত্ব $AC = H - x$, আদিবেগ $= v$ এবং সময় $= t$

$$\therefore H - x = vt + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow H - x = \sqrt{2gx}\,t + \frac{1}{2}gt^2 \text{ .....(ii)}$$

২য় পাথরের ক্ষেত্রে,

দূরত্ব $AB = H - y$, আদিবেগ $= 0$ এবং সময় $= t$

$$\therefore H - y = 0 + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow H - y = \frac{1}{2}gt^2 \text{ ..... (iii)}$$

সমীকরণ (ii) ও (iii) হতে পাই,

$$H - x - H + y = \sqrt{2gx}.t + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow y - x = \sqrt{2gx}.t$$

$$\Rightarrow (y - x)^2 = 2gxt^2$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{(y - x)^2}{2gx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 = \frac{(y - x)^2}{4x} \text{ ..... (iv)}$$

(iv) এর মান (iii) এ বসিয়ে পাই,

$$\therefore H - y = \frac{(y - x)^2}{4x}$$

$$\Rightarrow H = y + \frac{(y - x)^2}{4x} = \frac{4xy + y^2 - 2xy + x^2}{4x}$$

$$\Rightarrow H = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4x}$$

$$\therefore H = \frac{(y + x)^2}{4x} \text{ (Showed)}$$

প্রশ্ন ▶ ১১ দৃশ্যকল্প-১: স্থিরাবস্থা হতে সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণ প্রথমে y সমত্বরণে এবং পরে z সমমন্দনে চলে।

দৃশ্যকল্প-২: একটি স্তম্ভের শীর্ষ থেকে 98 মি./সেকেন্ড বেগে A বস্তুকে খাড় উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। 2 সেকেন্ড পরে একই বিন্দু হতে অপ একটি B বস্তুকে ছেড়ে দেওয়া হলো।

(ক) 64 মিটার উঁচু দালানের ছাদ থেকে একটি পাথর ছেড়ে দিলে ভূমিতে পড়তে কত সময় লাগবে? [রা. বো. ২

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ কণাটি যদি t সময়ে d দূরত্ব অতিক্রম করে তবে দেখা যে, $t = \sqrt{2d\left(\frac{y + z}{yz}\right)}$ [রা. বো. ২

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বস্তু দুটি ভূমি হতে কত উচ্চতায় মিলিত হবে তা নির্ণ কর। [রা. বো. ২

সমাধান:

ক এখানে, দালানের উচ্চতা, $h = 64$ m
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8$ ms^{-2}
আদিবেগ, $u = 0$ ms^{-1}
এখন, সময় t হলে,

আমরা জানি, $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$

$$\Rightarrow 64 = 0 \times t + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$

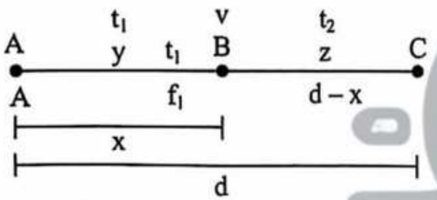
$$\Rightarrow t^2 = \frac{64 \times 2}{9.8}$$

$\therefore t = 3.61$ সেকেন্ড **(Ans.)**

খ স্থান দুইটির মধ্যবর্তী মোট দূরত্ব, $AC = d$
ধরি, ১ম অংশের জন্য দূরত্ব, $AB = x$, সময় $= t_1$, সমত্বরণ $= y$
এবং ২য় অংশের জন্য দূরত্ব, $BC = d - x$, সময় $= t_2$, সমমন্দন $= z$
সময়, $t = t_1 + t_2$
সমত্বরণের ক্ষেত্রে:

$$v = 0 + yt_1$$

$$\Rightarrow \frac{v}{y} = t_1 \text{ .... (i)}$$



এবং $x = \frac{1}{2}yt_1^2 = \frac{1}{2}yt_1.t_1 = \frac{1}{2}vt_1$ .... (ii)

সমমন্দনের ক্ষেত্রে:

$$0 = v - zt_2$$

$$\Rightarrow v = zt_2$$

$$\therefore \frac{v}{z} = t_2 \text{ .... (iii)}$$

এবং $d - x = vt_2 - \frac{1}{2}zt_2^2$

$$= vt_2 - \frac{1}{2}vt_2$$

$$= \frac{1}{2}vt_2 \text{ ...... (iv)}$$

(i) + (iii) করে পাই,

$$t_1 + t_2 = \frac{v}{y} + \frac{v}{z}$$

$$\Rightarrow t = v\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \text{ ...... (v)}$$

(ii) + (iv) করে পাই,

$$d = \frac{1}{2}vt_1 + \frac{1}{2}vt_2$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2}v(t_1 + t_2)$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2}vt \quad [\because t = t_1 + t_2]$$

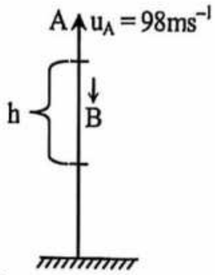
$$\Rightarrow v = \frac{2d}{t} \text{ ...... (vi)}$$

সমীকরণ (v) এ (vi) এর মান বসিয়ে পাই,

$$t = \frac{2d}{t}\left(\frac{y+z}{yz}\right) \Rightarrow \frac{t^2}{2d} = \frac{y+z}{yz} \Rightarrow t^2 = \frac{2d(y+z)}{yz}$$

$$\therefore t = \sqrt{2d\left(\frac{y+z}{yz}\right)} \text{ (Showed)}$$

গ



মনে করি, B বস্তুটি ফেলে দেওয়ার t সেকেন্ড পরে স্তম্ভের শীর্ষ হতে h মিটার নিচে A বস্তুটি B বস্তুর সাথে মিলিত হয়।

A বস্তুর ক্ষেত্রে,

$$h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow h = -98(t+2) + \frac{1}{2} \times 9.8 \times (t+2)^2 \text{ .....(i)}$$

B বস্তুর ক্ষেত্রে,

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \text{ ...... (ii)}$$

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$$-98(t+2) + \frac{1}{2} \times 9.8(t+2)^2 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow -98t - 196 + 4.9(t^2 + 2.t.2 + 4) = \frac{1}{2} \times 9.8\, t^2$$

$$\Rightarrow -98t - 196 + 4.9t^2 + 19.6t + 19.6 - 4.9t^2 = 0$$

$$\Rightarrow -78.4t - 176.4 = 0$$

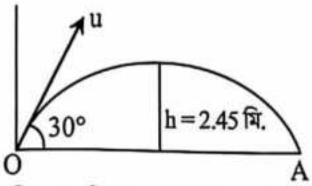
$$\Rightarrow -78.4\,t = 176.4$$

$$\therefore t = -2.25 \text{ s}$$

কিন্তু t এর মান ঋণাত্মক হওয়া সম্ভব নয়।
অর্থাৎ, A ও B বস্তু দুইটি ভূমিতে পড়ার আগে মিলিত হবে না। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ১২ দৃশ্যকল্প-১: একটি নদী সোজাসুজি পার হতে একজন সাঁতারুর t_1 সেকেন্ড সময় লাগে। স্রোতের অনুকূলে তীর বরাবর একই দূরত্ব অতিক্রম করতে তার t_2 সেকেন্ড সময় লাগে।

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বেগের বৃহত্তম লব্ধি 14 m/sec এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 2m/sec হলে, বেগদ্বয় নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ শান্ত নদীতে সাঁতারুর বেগ u এবং স্রোতের বেগ v হলে প্রমাণ কর যে, $t_1 : t_2 = \sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}$ অথবা $u : v = (t_1^2 + t_2^2) : (t_1^2 - t_2^2)$ অথবা সাঁতারুর গতিবেগ 20 cm/s এবং স্রোতের গতিবেগ 10 cm/s হলে, $t_1 : t_2$ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩; ঢা. বো. ২২; রা. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ কণাটির সর্বোচ্চ উচ্চতা h হলে OA নির্ণয় কর। $[g = 9.8 \text{ m/s}^2]$ [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২৩; রা. বো. ১৭]

সমাধান:

ক ধরি, বেগ দুটি u ও v; যেখানে $u > v$

এখন, বৃহত্তম লব্ধি, $u + v = 14\ ms^{-1}$ .....(i)

এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি, $u - v = 2\ ms^{-1}$ ....(ii)

(i) + (ii) হতে পাই,

$2u = 16\ ms^{-1}$

$\therefore u = 8\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

(i) নং হতে,

$\Rightarrow 8\ ms^{-1} + v = 14\ ms^{-1}$

$\therefore v = 6\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

খ এখানে, সাঁতারুর বেগ u এবং স্রোতের বেগ v

ধরি, লব্ধি বেগ = w

$\therefore w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$ ...... (i)

সোজাসুজি পারাপারের ক্ষেত্রে, $\theta = 90°$

$$\therefore \tan 90° = \frac{u \sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0} = \frac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$$

$\Rightarrow v + u\cos\alpha = 0$

$\therefore u\cos\alpha = -v$

u এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$w^2 = u^2 + v^2 - 2v.v = u^2 - v^2$

$\Rightarrow w = \sqrt{u^2 - v^2}$

নদীর বিস্তার d হলে,

$d = wt_1$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{d}{w} = \frac{d}{\sqrt{u^2 - v^2}} \text{......(ii)}$$

আবার, স্রোতের অনুকূলে প্রকৃত বেগ = u + v

$\therefore$ শর্তমতে,

$d = (u + v)t_2$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{d}{u + v} \text{.......(iii)}$$

(ii) ÷ (iii) করে পাই,

$$\therefore \frac{t_1}{t_2} = \frac{u + v}{\sqrt{u^2 - v^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{u + v}{\sqrt{u + v}\sqrt{u - v}}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{u + v}}{\sqrt{u - v}} \textbf{ (Proved)} \text{ .... (iii)}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{u + v}{u - v}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1^2 - t_2^2} = \frac{u + v + u - v}{u + v - u + v} \text{ [যোজন-বিয়োজন করে]}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1^2 - t_2^2} = \frac{u}{v}$$

$\therefore u : v = (t_1^2 + t_2^2) : (t_1^2 - t_2^2)$ **(Proved)**

আবার, (iii) থেকে পাই,

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{u + v}}{\sqrt{u - v}} = \frac{\sqrt{20 + 10}}{\sqrt{20 - 10}} = \sqrt{3}$$

$\therefore t_1 : t_2 = \sqrt{3} : 1$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$g = 9.8\ ms^{-2}$

সর্বোচ্চ উচ্চতা, $h = 2.45$ মিটার

নিক্ষেপণ কোণ, $\alpha = 30°$

এখন, আদিবেগ u হলে,

$$\text{আমরা জানি, } h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow 2.45 = \frac{u^2(\sin 30°)^2}{2 \times 9.8}$$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{2.45 \times 2 \times 9.8}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$\Rightarrow u = \sqrt{192.08} = 13.86\ ms^{-1}$

উদ্দীপকে, OA = আনুভূমিক পাল্লা

আমরা জানি, আনুভূমিক পাল্লা,

$$OA = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(13.86)^2 \times \sin(2 \times 30°)}{9.8} = 16.97 \text{ m } \textbf{(Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ১৩ উদ্দীপক-১: একজন সাঁতারু s মিটার প্রশস্ত একটি নদী স্রোতহীন অবস্থায় t মিনিটে প্রস্থ বরাবর পার হতে পারে। স্রোত থাকা অবস্থায় সাঁতারুর নদীটি প্রস্থ বরাবর পার হতে t_1 মিনিট সময় লাগে।

উদ্দীপক-২: R পাল্লার জন্য একটি প্রক্ষেপকের দুটি গতিপথের সর্বোচ্চ উচ্চতা h_1 ও h_2

(ক) একটি বুলেট একটি তক্তা ভেদ করতে এর বেগের $\frac{1}{10}$ অংশ হারায়। মন্দন সুষম হলে, বুলেটটি থামার পূর্বে অনুরূপ কতগুলো তক্তা ভেদ করবে? [ঢা. বো. ২২]

(খ) সাঁতারুর স্রোতের সাথে 120° কোণে সাঁতার দিলে প্রমাণ কর যে, স্রোতের বেগ $\frac{s}{tt_1}\sqrt{t_1^2 - t}$ মিটার/মিনিট হবে।

(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে দেখাও যে, $R = 4\sqrt{h_1h_2}$

[ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ১৭]

সমাধান:

ক ধরি, বুলেটটির আদিবেগ = u, মন্দন = a

এবং একটি তক্তার পুরুত্ব = d

একটি তক্তা ভেদ করার পর বেগ,

$$v = u - \frac{u}{10} = \frac{9u}{10}$$

আমরা জানি, $v^2 = u^2 - 2as$

$$\Rightarrow \left(\frac{9u}{10}\right)^2 = u^2 - 2ad$$

$$\Rightarrow 2ad = u^2 - \frac{81u^2}{100} = \frac{100u^2 - 81u^2}{100} = \frac{19u^2}{100}$$

$$\therefore a = \frac{19u^2}{200d}$$

ধরি, বুলেটটি থামার পূর্বে আরও n টি তক্তা ভেদ করবে।

তাহলে, $v = 0$

$\therefore v^2 = u^2 - 2a(nd)$

$$\Rightarrow 0 = u^2 - 2.\frac{19u^2}{200d}nd$$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{2 \times 19u^2}{200d}nd$$

$$\Rightarrow n = \frac{100}{19} = 5.26 \approx 5 \textbf{ (Ans.)}$$

খ ধরি, সাঁতারুর বেগ u, স্রোতের বেগ v, এবং লব্ধি বেগ = w ।
স্রোতহীন অবস্থায় নদী পার হতে t মিনিট সময় লাগে।

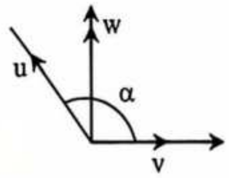
$\therefore s = ut$

$\therefore u = \frac{s}{t}$ .... (i)

স্রোত থাকাকালীন নদী পার হতে t_1 মিনিট সময় লাগে,

$s = wt_1$

$\Rightarrow w = \frac{s}{t_1}$ ..... (ii)



সোজাসুজি পারাপারের ক্ষেত্রে, $\theta = 90°$

$$\tan 90° = \frac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0} = \frac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha} \Rightarrow v + u\cos\alpha = 0 \Rightarrow u\cos\alpha = -v$$

আবার, $w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$

$\Rightarrow w^2 = u^2 + v^2 + 2v.(-v)$

$\Rightarrow w^2 = u^2 + v^2 - 2v^2$

$\Rightarrow w^2 = u^2 - v^2$

$\Rightarrow w = \sqrt{u^2 - v^2}$

(ii) থেকে পাই, $\sqrt{u^2 - v^2} = \frac{s}{t_1}$

$$\Rightarrow u^2 - v^2 = \frac{s^2}{t_1^2} \Rightarrow \left(\frac{s}{t}\right)^2 - v^2 = \frac{s^2}{t_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{s^2}{t^2} - v^2 = \frac{s^2}{t_1^2} \Rightarrow v^2 = \frac{s^2}{t^2} - \frac{s^2}{t_1^2}$$

$$\Rightarrow v^2 = s^2\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t_1^2}\right) \Rightarrow v = s\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t_1^2}}$$

$$\Rightarrow v = s\sqrt{\frac{t_1^2 - t^2}{t^2 . t_1^2}}$$

$$\Rightarrow v = \frac{s}{tt_1}\sqrt{t_1^2 - t^2}$$ মিটার/মিনিট **(Proved)**

গ আমরা জানি, একটি প্রক্ষেপকের নির্দিষ্ট পাল্লা R এর জন্য দুইটি নিক্ষেপণ কোণ থাকে। এদের একটি α হলে অপরটি (90° – α)। ধরি, নিক্ষেপণ বেগ u এবং উদ্দীপক-২ অনুসারে নিক্ষেপণ কোণ α এর জন্য বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা h_1 ও নিক্ষেপণ কোণ (90° – α) এর জন্য বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা h_2 ।

$$\therefore h_1 = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$$

এবং $h_2 = \frac{u^2\sin^2(90° - \alpha)}{2g}$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g} \quad [\because \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha]$$

এখন, $h_1h_2 = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \times \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}$

$$\Rightarrow h_1h_2 = \frac{(2u^2\sin\alpha\cos\alpha)^2}{16g^2}$$

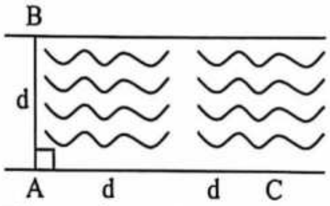
$$\Rightarrow h_1h_2 = \frac{(u^2\sin 2\alpha)^2}{16g^2} = \frac{1}{16}\left(\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}\right)^2$$

$\Rightarrow h_1h_2 = \frac{1}{16}R^2$ $\left[\because \text{আনুভূমিক পাল্লা } R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}\right]$

$\Rightarrow R^2 = 16\, h_1h_2$

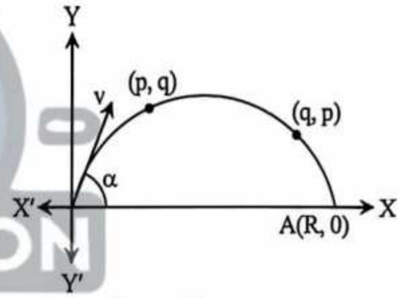
$\therefore R = 4\sqrt{h_1h_2}$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▶ ১৪ দৃশ্যকল্প-১:



সাঁতারুর বেগ u_1, স্রোতের বেগ u_2, AB = d, AC = 2d

দৃশ্যকল্প-২: চিত্রে O বিন্দু হতে বায়ুশূন্য স্থানে প্রক্ষিপ্ত একটি বস্তুর গতিপথ দেখানো হয়েছে।



(ক) সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা t-তম সেকেন্ডে x দূরত্ব এবং (t + n) তম সেকেন্ডে y দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, ত্বরণ $f = \frac{y - x}{n}$ [দি. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ AC বরাবর প্রবাহিত নদী একজন সাঁতারু t_1 সময়ে AB দূরত্ব এবং t_2 সময়ে AC দূরত্ব অতিক্রম করলে t_1 এবং t_2 এর অনুপাত নির্ণয় কর। [ব. বো. ১৭]

(গ) দেখাও যে, $\frac{v}{g}\text{cosec}\alpha$ সময় পরে প্রক্ষিপ্ত বস্তুটি তার প্রক্ষেপণ দিকের সাথে লম্বভাবে চলবে। [সি. বো. ১৭]

সমাধান:

ক ধরি, বস্তুকণাটির আদিবেগ u এবং সমত্বরণ f

শর্তমতে, $x = u + \frac{1}{2}f(2t - 1)$ ..... (i)

$y = u + \frac{1}{2}f\{2(t + n) - 1\}$ ..... (ii)

(ii) – (i) করে পাই,

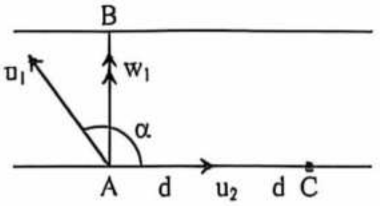
$\Rightarrow y - x = \frac{1}{2}f(2t + 2n - 1 - 2t + 1)$

$\Rightarrow y - x = \frac{1}{2}f.2n$

$\Rightarrow y - x = fn$

$\therefore f = \frac{y - x}{n}$ **(Proved)**

খ দেওয়া আছে, সাঁতারুর বেগ $= u_1$, স্রোতের বেগ $= u_2$,
$AB = d$, $AC = 2d$
১ম ক্ষেত্রে,
মনে করি, লব্ধি $= w_1$, যখন সাঁতারু t_1 সময়ে AB দূরত্ব অতিক্রম করে।



$AB = w_1 t_1$

$\Rightarrow t_1 = \frac{d}{w_1}$ ...... (i)

লব্ধি বেগ w_1 হলে, $w_1^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\cos\alpha$ ... (ii)

আবার, $\tan 90° = \frac{u_1 \sin\alpha}{u_2 + u_1\cos\alpha}$

$\Rightarrow \frac{1}{0} = \frac{u_1\sin\alpha}{u_2 + u_1\cos\alpha}$

$\Rightarrow u_2 + u_1\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow u_1\cos\alpha = -u_2$

(ii) থেকে পাই, $w_1^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_2(-u_2)$

$= u_1^2 + u_2^2 - 2u_2^2$

$\therefore w_1 = \sqrt{u_1^2 - u_2^2}$ .... (iii)

আবার ২য় ক্ষেত্রে,
মনে করি, লব্ধি বেগ $= w_2$, যখন সাঁতারু t_2 সময়ে AC দূরত্ব অতিক্রম করে।

$AC = w_2 t_2$

$\Rightarrow t_2 = \frac{2d}{w_2}$ .... (iv)

আবার, $w_2 = u_1 + u_2$ ...... (v)

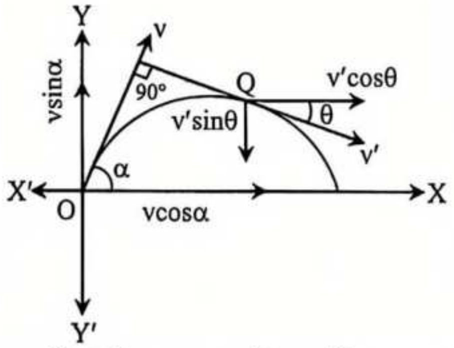
(i) ÷ (iv) $\Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{w_2}{2w_1} = \frac{u_1 + u_2}{2\sqrt{u_1^2 - u_2^2}}$ [(iii) ও (v) থেকে পাই]

$= \frac{u_1 + u_2}{2\sqrt{(u_1 + u_2)(u_1 - u_2)}}$

$= \frac{\sqrt{u_1 + u_2}}{2\sqrt{u_1 - u_2}}$

$\therefore t_1 : t_2 = \sqrt{u_1 + u_2} : 2\sqrt{u_1 - u_2}$ **(Ans.)**

গ



মনে করি, O বিন্দু হতে প্রক্ষেপিত বস্তুটির প্রক্ষেপণ বেগ = v, প্রক্ষেপণ কোণ = α। বস্তুটি t সময় পরে Q বিন্দুতে পৌঁছে v′ বেগ প্রাপ্ত হয় যা v বেগের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করে এবং আনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

v বেগের ক্ষেত্রে,
আনুভূমিক উপাংশ = $v\cos\alpha$
লম্বিক উপাংশ = $v\sin\alpha$

v′ বেগের ক্ষেত্রে,
আনুভূমিকের উপাংশ = $v'\cos\theta$
লম্বিক উপাংশ = $v'\sin\theta$

আবার, $v'\sin\theta = v\sin\alpha - gt$ ..... (i)

$v'\cos\theta = v\cos\alpha$ .... (ii)

এখানে, $\tan\alpha = \frac{v\sin\alpha}{v\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ = v বেগের ঢাল

(i) ÷ (ii) $\Rightarrow \tan\theta = \frac{v\sin\alpha - gt}{v\cos\alpha}$ = v′ বেগের ঢাল

আবার, $\tan\theta.\tan\alpha = -1$

$\Rightarrow \frac{v\sin\alpha - gt}{v\cos\alpha}.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -1$

$\Rightarrow \frac{(v\sin\alpha - gt)\sin\alpha}{v\cos^2\alpha} = -1$

$\Rightarrow v\sin^2\alpha - gt\sin\alpha = -v\cos^2\alpha$

$\Rightarrow v\sin^2\alpha + v\cos^2\alpha = gt\sin\alpha$

$\Rightarrow v(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = gt\sin\alpha$

$\Rightarrow gt\sin\alpha = v$

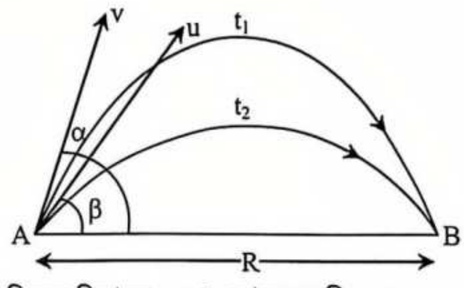
$\Rightarrow t = \frac{v}{g\sin\alpha}$

$\Rightarrow t = \frac{v}{g}\operatorname{cosec}\alpha$

$\therefore \frac{v}{g}\operatorname{cosec}\alpha$ সময় পরে প্রক্ষিপ্ত বস্তুটি প্রক্ষেপণ দিকের সাথে লম্বভাবে চলবে। **(Proved)**

প্রশ্ন ▸ ১৫ দৃশ্যকল্প-১: মহানগর এক্সপ্রেস আখাউড়া জাংশন থেকে ঢাকা স্টেশনে থামে। তার গতিপথের ১ম $\frac{1}{2}$ অংশ সমত্বরণে, শেষ $\frac{1}{3}$ অংশ সমমন্দনে ও অবশিষ্ট পথ সমবেগে চলে।

দৃশকল্প-২:



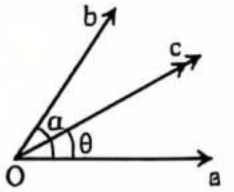
(ক) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত a ও b বেগদ্বয়ের লব্ধি c এবং a এর দিক বরাবর c এর লম্বাংশের পরিমাণ b হলে দেখাও যে, $c = \sqrt{b^2 - a^2 + 2ab}$ [ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে মহানগরের সর্বোচ্চ বেগ ও গড় বেগের অনুপাত 11 : 6 সঠিক কিনা যাচাই কর। [রা. বো. ১৭]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রক্ষেপক দুটির ভ্রমণকাল t_1 ও t_2 হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 + t_2^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ [ব. বো. ২৩]

ব্যাখ্যা:

ক ধরি, a ও b এর মধ্যবর্তী কোণ α এবং a ও c এর মধ্যবর্তী কোণ θ



∴ a এর দিক বরাবর c এর লম্বাংশের পরিমাণ $= c\cos\theta$

প্রশ্নমতে,

$\therefore c\cos\theta = b$

a এর দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$c\cos\theta = a\cos 0^\circ + b\cos\alpha$

$\Rightarrow b = a + b\cos\alpha$

$\Rightarrow b\cos\alpha = b - a$

আবার,

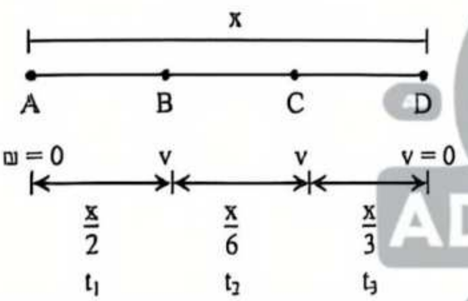
লব্ধি $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$

$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2a(b - a)}$

$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab - 2a^2}$

$\therefore c = \sqrt{b^2 - a^2 + 2ab}$ (Showed)

খ



মনে করি, মহানগর এক্সপ্রেস A বিন্দু হতে সুষম ত্বরণে t_1 সময় পর B বিন্দুতে পৌঁছে সর্বোচ্চ v বেগ প্রাপ্ত হয় এবং B বিন্দু হতে C বিন্দু পর্যন্ত t_2 সময়ে সমবেগে চলে। এরপর C বিন্দু হতে সুষম মন্দনে t_3 সময় পর D বিন্দুতে থামে।

$\therefore$ মোট সময়, $t = t_1 + t_2 + t_3$

এক্ষেত্রে, $AB = \frac{x}{2}$, $BC = \left(x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{6}$ এবং $CD = \frac{x}{3}$

মোট দূরত্ব $= x$

আমরা জানি, গড় বেগ $= \frac{\text{মোট দূরত্ব}}{\text{মোট সময়}} = \frac{x}{t}$ .... (i)

AB অংশের ক্ষেত্রে,

গড়বেগ $= \frac{0 + v}{2} = \frac{\frac{x}{2}}{t_1}$

$\Rightarrow t_1 = \frac{x}{v}$ ...... (ii)

BC অংশের ক্ষেত্রে,

গড়বেগ, $v = \frac{\frac{x}{6}}{t_2}$

$\Rightarrow t_2 = \frac{x}{6v}$ ...... (iii)

CD অংশের ক্ষেত্রে,

গড়বেগ, $\frac{0 + v}{2} = \frac{\frac{x}{3}}{t_3}$

$\Rightarrow t_3 = \frac{2x}{3v}$ ----- (iv)

(ii) + (iii) + (iv) ⇒

$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{x}{v} + \frac{x}{6v} + \frac{2x}{3v}$

$\Rightarrow t_1 + t_2 + t_3 = \frac{x}{v}\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow vt = \left(\frac{6 + 1 + 4}{6}\right)x$

$\Rightarrow vt = \frac{11}{6}x$

$\Rightarrow v = \frac{11}{6} \cdot \frac{x}{t}$

$\Rightarrow$ সর্বোচ্চ বেগ $= \frac{11}{6} \times$ গড় বেগ   [(i) থেকে পাই]

$\Rightarrow$ সর্বোচ্চ বেগ : গড় বেগ $= 11 : 6$

$\therefore$ উক্তিটি সঠিক (Ans.)

গ এখানে, α কোণে ও v বেগে নিক্ষিপ্ত বস্তুটি t_1 সময়ে $AB = R$ দূরত্ব অতিক্রম করে। আবার β কোণে ও u বেগে নিক্ষিপ্ত বস্তুটি t_2 সময়ে $AB = R$ দূরত্ব অতিক্রম করে।

১ম ক্ষেত্রে, $R = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}$ ——(i)

এবং $t_1 = \frac{2v\sin\alpha}{g}$ ----- (ii)

২য় ক্ষেত্রে, $R = \frac{u^2\sin 2\beta}{g}$ ---- (iii)

$t_2 = \frac{2u\sin\beta}{g}$ ------ (iv)

(i) ও (iii) নং হতে পাই,

$\frac{v^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{u^2\sin 2\beta}{g}$

$\Rightarrow \frac{v^2}{u^2} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \frac{2\sin\beta.\cos\beta}{2\sin\alpha.\cos\alpha}$

$\Rightarrow \frac{v^2}{u^2} = \frac{\sin\beta.\cos\beta}{\sin\alpha.\cos\alpha}$ ------ (v)

(ii) ÷ (iv) করে পাই,

$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v}{u}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$\Rightarrow \frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{v^2}{u^2} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}$

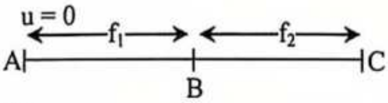
$\Rightarrow \frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{\sin\beta.\cos\beta.\sin^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha.\sin^2\beta}$

$\Rightarrow \frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{\sin\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\sin\beta}$

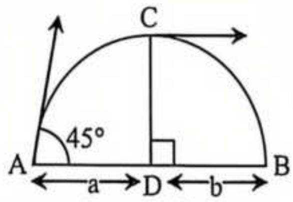
$\Rightarrow \frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 + t_2^2} = \frac{\sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta}{\sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

$\therefore \frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 + t_2^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ (Proved)

প্রশ্ন ▶ ১৬ উদ্দীপক-১:



উদ্দীপক-২:



(ক) স্রোত না থাকলে এক ব্যক্তি 240 মিটার প্রশস্ত একটি নদী সাঁতার দিয়ে 6 মিনিটে সোজাসুজিভাবে পার হয়। কিন্তু স্রোত থাকলে ঐ একই পথ 10 মিনিটে পার হতে পারে। সাঁতারুর গতিবেগ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৩]

(খ) উদ্দীপক-১ এ বস্তুটির সমত্বরণ f_1, সমমন্দন f_2 এবং t সময় পরে A হতে S দূরত্বে C বিন্দুতে থেমে যায়, প্রমাণ কর যে,

$t^2 = 2S\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$ অথবা $\frac{t^2}{2S} = \left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$ অথবা $S = \frac{t^2 f_1 f_2}{2(f_1+f_2)}$

[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২৩; ব. বো. ২৩; য. বো. ২২; য. বো. ১৯]

(গ) উদ্দীপক-২ এ, A বিন্দু হতে প্রক্ষিপ্ত বস্তুটির C বিন্দুতে বেগের দিক আনুভূমিকের সমান্তরাল হলে, প্রমাণ কর যে, CD দেওয়ালের উচ্চতা $\frac{ab}{a+b}$। [ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ১৭]

সমাধান:

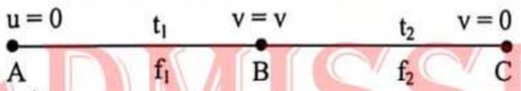
ক এখানে, নদীর প্রস্থ, d = 240 মিটার

স্রোত না থাকলে নদী সোজাসুজিভাবে পার হতে সময় লাগে,

t = 6 মিনিট

$\therefore$ সাঁতারুর গতিবেগ, $v = \frac{d}{t} = \frac{240}{6} = 40$ মিটার/মিনিট (Ans.)

খ ধরি, কণাটি A বিন্দু হতে f_1 সুষম ত্বরণে t_1 সময় পর B বিন্দুতে পৌঁছে। এরপর B বিন্দু হতে f_2 সুষম মন্দনে t_2 সময় পর C বিন্দুতে থামে।



মোট সময়, $t = t_1 + t_2$

সুতরাং মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব, S = AB + BC

সুষম ত্বরণের ক্ষেত্রে,

$v = u + f_1 t_1$

$\Rightarrow v = 0 + f_1 t_1$

$\Rightarrow t_1 = \frac{v}{f_1}$

সুষম মন্দনের ক্ষেত্রে,

$0 = v - f_2 t_2$

$\Rightarrow t_2 = \frac{v}{f_2}$

সুতরাং, $t_1 + t_2 = t = \frac{v}{f_1} + \frac{v}{f_2}$

$\therefore t = v\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$ ...... (i)

আবার, $AB = \frac{0+v}{2}.t_1$

$\therefore AB = \frac{vt_1}{2}$

এবং $BC = \frac{v+0}{2}.t_2 = \frac{vt_2}{2}$

$\therefore AB + BC = S = \frac{v}{2}(t_1+t_2)$

$\Rightarrow S = \frac{v}{2}t$

$\therefore v = \frac{2S}{t}$

সমীকরণ (i) এ, $v = \frac{2S}{t}$ বসিয়ে পাই,

$t = \frac{2S}{t}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$

$\Rightarrow t^2 = 2S\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$ **(Proved)**

$\Rightarrow \frac{t^2}{2S} = \left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$ **(Proved)**

$\Rightarrow t^2 = 2S\left(\frac{f_1+f_2}{f_1 f_2}\right)$

$\therefore S = \frac{t^2 f_1 f_2}{2(f_1+f_2)}$ **(Proved)**

গ এখানে, নিক্ষেপণ কোণ, $\alpha = 45°$

আমরা জানি, বায়ুশূন্য স্থানে প্রক্ষিপ্ত কণার গতিপথের সমীকরণ,

$y = x.\tan\alpha\left(1-\frac{x}{R}\right)$

CD দেওয়ালের উচ্চতা h হলে, x = a এবং y = h

আবার, উদ্দীপকের প্রাসটির আনুভূমিক পাল্লা,

R = a + b

$\therefore h = a.\tan\alpha\left(1-\frac{a}{R}\right) = a.\tan45°\left(1-\frac{a}{a+b}\right) = a\left(\frac{a+b-a}{a+b}\right)$

$\therefore h = \frac{ab}{a+b}$

$\therefore$ CD দেওয়ালের উচ্চতা, $h = \frac{ab}{a+b}$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ (i) একটি বস্তু সমত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলে 25 তম সেকেন্ডে 266 সে.মি. এবং 42 তম সেকেন্ডে 402 সে.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে।

(ii) আনুভূমিকের সাথে α কোণে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু নিক্ষেপণ বিন্দু হতে যথাক্রমে q ও p দূরত্বে অবস্থিত p, q উচ্চতাবিশিষ্ট দুইটি দেয়াল কোনো রকমে অতিক্রম করে।

(ক) স্থির অবস্থা হতে একটি কণা 10 সে.মি/সে.২ সমত্বরণে কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখায় চলছে। 5 সেকেন্ড পরে বস্তুটির বেগ কত হবে? [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২৩, ১৭]

(খ) (i) এ বর্ণিত বস্তুটির আদিবেগ নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩]

(গ) (ii) এ বর্ণিত বস্তুটির আনুভূমিক পাল্লা R হলে দেখাও যে,

$R = \frac{p^2+pq+q^2}{p+q}$ অথবা $R(p+q) = p^2+pq+q^2$

[সি. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩; সি. বো. ১৭]

সমাধান:

ক এখানে,

আদিবেগ, u = 0 সে.মি./সে.

সমত্বরণ, f = 10 সে.মি./সে.২

সময়, t = 5 সে.

বেগ v হলে,

আমরা জানি,

v = u + ft = 0 + 10 × 5 = 50 সে.মি./সে. **(Ans.)**

খ ধরি, বস্তুর আদিবেগ u এবং সমত্বরণ f

আমরা জানি, t তম সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$S_t = u + \frac{1}{2} f(2t - 1)$$

25 তম সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব S_{25} হলে,

$$S_{25} = u + \frac{1}{2} f(2 \times 25 - 1)$$

$$\Rightarrow S_{25} = u + \frac{49}{2} f$$

$$\Rightarrow 266 = u + \frac{49}{2} f \text{....(i)}$$

এবং 42 তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব S_{42} হলে,

$$S_{42} = u + \frac{1}{2} f(2 \times 42 - 1)$$

$$S_{42} = u + \frac{83}{2} f$$

$$\Rightarrow 402 = u + \frac{83}{2} f \text{......(ii)}$$

(ii) – (i) হতে পাই,

$$\frac{83 - 49}{2} f = 402 - 266$$

$$\Rightarrow f = \frac{136}{17}$$

$\therefore$ f = 8 সে.মি./সে.^{2}

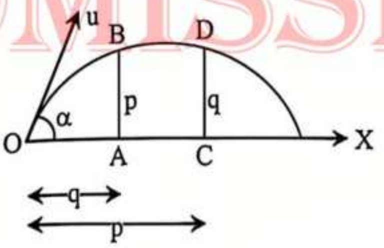
(i) নং হতে,

$$u + \frac{49}{2} \times 8 = 266$$

$$\Rightarrow u = 266 - 196$$

$\therefore$ u = 70 সে.মি./সে. **(Ans.)**

গ মনে করি, O বিন্দু হতে u আদিবেগে এবং আনুভূমিকের সাথে α কোণে বস্তুটি নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটি AB ও CD দুইটি খাঁড়া দেওয়াল কোনো রকমে অতিক্রম করে।



CD দেওয়ালের ক্ষেত্রে,

$$q = p \tan\alpha \left(1 - \frac{p}{R}\right) \text{..... (i)}$$

AB দেওয়ালের ক্ষেত্রে,

$$p = q \tan\alpha \left(1 - \frac{q}{R}\right) \text{..... (ii)}$$

(i) ÷ (ii) ⇒

$$\frac{q}{p} = \frac{p}{q} \cdot \frac{R - p}{R - q}$$

$$\Rightarrow q^2(R - q) = p^2(R - p)$$

$$\Rightarrow q^2R - q^3 = p^2R - p^3$$

$$\Rightarrow p^3 - q^3 = p^2R - q^2R$$

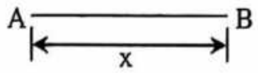
$$\Rightarrow R = \frac{p^3 - q^3}{p^2 - q^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{(p - q)(p^2 + pq + q^2)}{(p + q)(p - q)}$$

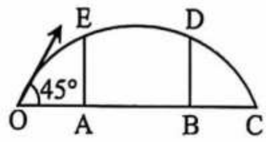
$$\Rightarrow R = \frac{p^2 + pq + q^2}{p + q} \text{ (Showed)}$$

$\therefore R(p + q) = p^2 + pq + q^2$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



AE = BD = 4.5 মিটার

AB = $2\sqrt{10}$ মিটার

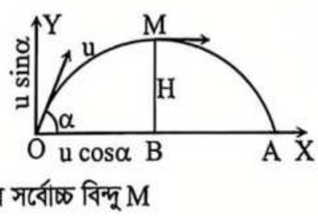
(ক) u বেগে এবং আনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$ [সি. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে যদি দুইটি রেলগাড়ি A ও B এর বিপরীত দিক হতে u_1 ও u_2 গতিবেগে অগ্রসর হওয়ার সময় একে অপরকে দেখতে পায় তখন তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব x। সংঘর্ষ এড়ানোর জন্য রেল গাড়ি দুইটি সর্বোচ্চ মন্দন যথাক্রমে a_1 ও a_2 প্রয়োগ করে। তাহলে দেখাও যে, কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $u_1^2a_2 + u_2^2a_1 \leq 2a_1a_2x$ হয়। [ঢা. বো. ১৭]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর আনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। [সি. বো. ২৩]

সমাধান:

ক ধরি, O বিন্দু থেকে আনুভূমিকের সাথে α কোণে এবং u বেগে একটি বস্তু প্রক্ষিপ্ত হল। u এর উলম্ব উপাংশ usinα এবং আনুভূমিক উপাংশ ucosα।



বস্তুটির গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দু M

$\therefore$ BM = H

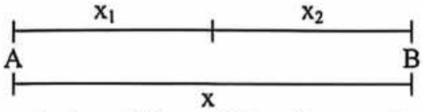
M বিন্দু দিয়ে অতিক্রম কালে বস্তুটি আনুভূমিকভাবে চলবে অর্থাৎ বেগের উলম্ব উপাংশ শূন্য হবে।

$$\therefore 0^2 = (u \sin\alpha)^2 - 2gH$$

$$\Rightarrow 2gH = u^2\sin^2\alpha$$

$$\therefore H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \text{ (Proved)}$$

খ



দেওয়া আছে, দুইটি রেলগাড়ি একই রেল লাইনের A ও B বিন্দু হতে পরস্পর বিপরীত দিকে u_1ও u_2 গতিবেগে অগ্রসর হওয়ার সময় x দূরত্বে একে অপরকে দেখতে পায়। সংঘর্ষ এড়ানোর জন্য রেলগাড়ি দুইটি সর্বোচ্চ মন্দন যথাক্রমে a_1 ও a_2 প্রয়োগ করে x_1 ও x_2 দূরত্ব অতিক্রম করে থেমে যায়।

প্রথম রেলগাড়ির ক্ষেত্রে: $0^2 = u_1^2 - 2a_1x_1$

$$\Rightarrow 2a_1x_1 = u_1^2$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{u_1^2}{2a_1}$$

এবং দ্বিতীয় রেলগাড়ির ক্ষেত্রে: $0^2 = u_2^2 - 2a_2x_2$

$$\Rightarrow 2a_2x_2 = u_2^2$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{u_2^2}{2a_2}$$

কোনোরকমে সংঘর্ষ এড়ানোর জন্য: $x_1 + x_2 \le x$

$$\Rightarrow \frac{u_1^2}{2a_1} + \frac{u_2^2}{2a_2} \le x$$

$$\Rightarrow u_1^2\, a_2 + u_2^2\, a_1 \le 2a_1a_2x \textbf{ (Showed)}$$

গ ধরি, প্রক্ষেপণ বেগ = u এবং প্রক্ষেপের t সেকেন্ড পর বস্তুটি 4.5 m উচ্চতায় আরোহণ করে।

এখানে, $\alpha = 45°$ এবং আনুভূমিক পাল্লা = R

$\therefore 4.5 = x\tan 45°\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

$\Rightarrow \frac{9}{2} = x - \frac{x^2}{R} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{Rx - x^2}{R}$

$\Rightarrow 9R = 2Rx - 2x^2$

$\Rightarrow 2x^2 - 2Rx + 9R = 0$, যা x এর দ্বিঘাত সমীকরণ,

ধরি, এর মূলদ্বয় x_1 ও x_2

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-(-2R)}{2} = R$

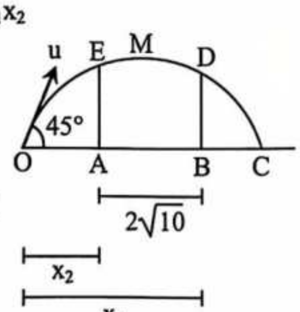
এবং $x_1x_2 = \frac{9R}{2}$

দেয়াল দুটির ব্যবধান,

$AB = 2\sqrt{10} = x_1 - x_2$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

$\Rightarrow (2\sqrt{10})^2 = R^2 - 4.\frac{9R}{2}$



$\Rightarrow 40 = R^2 - 18R$

$\Rightarrow R^2 - 18R - 40 = 0$

$\Rightarrow R^2 - 20\,R + 2R - 40 = 0$

$\Rightarrow R(R - 20) + 2(R - 20) = 0$

$\Rightarrow (R - 20)\,(R + 2) = 0$

হয়, $R - 20 = 0$

$\therefore R = 20$

অথবা, $R + 2 = 0$

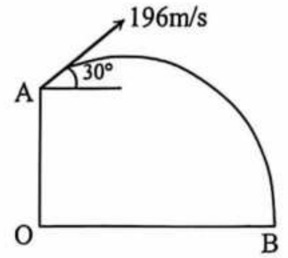
$\therefore R = -2$

কিন্তু $R > 0$ অর্থাৎ $R \ne -2$

$\therefore R = 20$ মিটার **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ দৃশ্যকল্প-১: একজন মোটর সাইকেল আরোহী 15 মিটার দূরে একজন অশ্বারোহীকে দেখতে পেয়ে স্থিরাবস্থা হতে 5 m/sec² ত্বরণে অশ্বারোহীর পশ্চাতে মোটর সাইকেল চালাতে লাগল। অশ্বারোহী 12.5 m/sec সমবেগে যাচ্ছিল।

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) সচরাচর সংকেতমালায় প্রমাণ কর যে, $v = u + ft$ [ঢা. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে মোটর সাইকেল আরোহী কত দূরে গিয়ে অশ্বারোহীকে ধরতে পারবে? [য. বো. ১৭]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ OA = 49 মিটার হলে OB এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

[রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ১৭; কু. বো. ১৯]

সমাধান:

ক মনে করি, একটি কণা x অক্ষ বরাবর f সমত্বরণে গতিশীল। t = 0 সময়ে কণাটির আদিবেগ u। t সময় পরে কণাটির বেগ v হলে,

$f = \frac{dv}{dt}$ [∵ সময়ের সাপেক্ষে বেগের অন্তরজ = ত্বরণ]

$\Rightarrow dv = fdt$ ....(i)

(i) সমীকরণকে যোগজীকরণ করে পাই,

$\int_u^v dv = f\int_0^t dt$

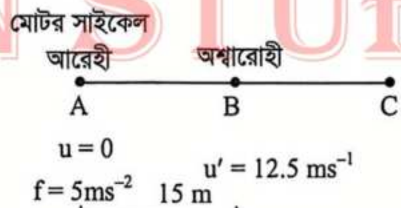
[যখন $t = 0$ তখন $v = u$ এবং যখন $t = t$ তখন $v = v$]

$\Rightarrow [v]_u^v = f[t]_0^t$

$\Rightarrow v - u = f(t - 0)$

$\Rightarrow v = u + ft$ **(Proved)**

খ



একজন মোটর সাইকেল আরোহী A বিন্দু হতে AB = 15 m দূরে অশ্বারোহীকে দেখে স্থিরাবস্থা থেকে $f = 5\ ms^{-2}$ ত্বরণে চলতে শুরু করে। এবং অশ্বারোহী একই সময়ে B বিন্দু হতে $u' = 12.5\ ms^{-1}$ সমবেগে চলতে লাগলো। মনে করি, t সময়ে পরে তারা C বিন্দুতে মিলিত হয়।

∴ মোটর সাইকেল আরোহীর ক্ষেত্রে, $AC = 0 \times t + \frac{1}{2} \times 5 \times t^2$

$$\Rightarrow AC = \frac{5}{2}t^2 \text{ ...... (i)}$$

অশ্বারোহীর ক্ষেত্রে, $BC = 12.5\,t$ ...... (ii)

(i) থেকে পাই,

$$AB + BC = \frac{5}{2}t^2$$
$$\Rightarrow 15 + 12.5t = \frac{5}{2}t^2$$
$$\Rightarrow 30 + 25t = 5t^2$$
$$\Rightarrow 5t^2 - 25t - 30 = 0$$
$$\Rightarrow t^2 - 5t - 6 = 0$$
$$\Rightarrow t^2 - 6t + t - 6 = 0$$
$$\Rightarrow t(t-6) + 1(t-6) = 0$$
$$\Rightarrow (t-6)(t+1) = 0$$
$$\therefore t - 6 = 0;\ t + 1 = 0$$
$$\Rightarrow t = 6 \text{ sec}$$
$$\Rightarrow t = -1 \text{ sec} \quad [\because t \text{ এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না}]$$

মোটর সাইকেল আরোহী কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \frac{5}{2} \times (6)^2$

$= 90$ মিটার **(Ans.)**

গ এখানে, নিক্ষেপণ বেগ, $u = 196$ m/s

নিক্ষেপণ কোণ, $\alpha = 30°$ এবং উচ্চতা $h = OA = 49$ m

ধরি, t সময়ে বস্তুটি ভূমিতে পতিত হয়।

$$\therefore h = -u\sin\alpha.t + \frac{1}{2}gt^2$$
$$\Rightarrow 49 = -196 \sin 30°.t + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$
$$\Rightarrow 49 = -196 \times \frac{1}{2} \times t + 4.9t^2$$
$$\Rightarrow 4.9t^2 - 98t - 49 = 0 \Rightarrow t^2 - 20t - 10 = 0$$
$$\Rightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2 \times 1}$$
$$= \frac{20 \pm \sqrt{440}}{2} = \frac{20 \pm 2\sqrt{110}}{2} = 10 \pm \sqrt{110}$$
$$\therefore t = 20.488, -0.488$$

কিন্তু t এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না।

$$\therefore t = 20.488\text{s}$$

$\therefore$ আনুভূমিক দূরত্ব, $OB = u\cos\alpha t$

$= 196 \times \cos 30° \times 20.488$

$= 196 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20.488$

$= 3477.65$ মিটার (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২০ দৃশ্যকল্প-১: একটি বস্তুকণা a সমত্বরণে একটি সরলরেখা বরাবর চলে t_1 সময়ে y_1 দূরত্ব এবং পরবর্তী t_2 সময়ে y_2 দূরত্ব অতিক্রম করে।

দৃশ্যকল্প-২: একটি বস্তুকণা u_1 আদিবেগে প্রক্ষিপ্ত হলে বস্তুকণাটি সর্বাধিক y উচ্চতায় গমন করে।

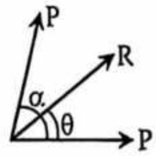
(ক) দেখাও যে, সমমানের দুইটি একবিন্দুগামী বেগের লব্ধি এদের অন্তর্গত কোণকে সমান দুইভাগে বিভক্ত করে। [সি. বো. ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $a = 2\left(\frac{y_2}{t_2} - \frac{y_1}{t_1}\right)/(t_1 + t_2)$. (সংশোধিত) [সি. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বস্তুকণার আনুভূমিক পাল্লা X হলে, প্রমাণ কর যে, $X = 4\sqrt{\frac{y(u_1^2 - 2gy)}{2g}}$ [সি. বো. ২২]

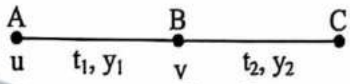
সমাধানঃ

ক ধরি, O বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি সমান বেগ P। বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α, লব্ধি বেগ R ও P এর অন্তর্গত θ.



$$\therefore \tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P + P\cos\alpha}$$
$$= \frac{P\sin\alpha}{P(1+\cos\alpha)}$$
$$= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$
$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$= \tan\frac{\alpha}{2}$$
$$\therefore \theta = \frac{\alpha}{2} \textbf{ (Showed)}$$

খ



AB অংশেঃ বস্তুকণাটি A বিন্দু হতে u আদিবেগে a সমত্বরণে চলে t_1 সময়ে y_1 দূরত্ব অতিক্রম করে B বিন্দুতে v বেগ প্রাপ্ত হয়।

$$\therefore y_1 = ut_1 + \frac{1}{2}a.t_1^2$$
$$\Rightarrow \frac{y_1}{t_1} = u + \frac{1}{2}at_1 \ .....(i)$$

এবং $v = u + at_1$

$$\Rightarrow u - v = -at_1 \ ....(ii)$$

BC অংশেঃ বস্তু কণাটি v আদিবেগে একই সমত্বরণে চলে t_2 সময়ে y_2 দূরত্ব অতিক্রম করে।

$$\therefore y_2 = vt_2 + \frac{1}{2}at_1^2$$
$$\Rightarrow \frac{y_2}{t_2} = v + \frac{1}{2}at_2 \ ......(iii)$$

(i) – (iii) করে পাই,

$$\Rightarrow \frac{y_1}{t_1} - \frac{y_2}{t_2} = u - v + \frac{1}{2}at_1 - \frac{1}{2}at_2$$
$$\Rightarrow \frac{y_1}{t_1} - \frac{y_2}{t_2} = -at_1 + \frac{1}{2}at_1 - \frac{1}{2}at_2 \ [(ii) \text{ নং হতে}]$$
$$\Rightarrow \frac{y_1}{t_1} - \frac{y_2}{t_2} = \frac{-1}{2}at_1 - \frac{1}{2}at_2$$
$$\Rightarrow \frac{y_2}{t_2} - \frac{y_1}{t_1} = \frac{1}{2}a(t_1 + t_2)$$
$$\therefore a = 2\left(\frac{y_2}{t_2} - \frac{y_1}{t_1}\right)/(t_1 + t_2). \textbf{ (Showed)}$$

গ ধরি, নিক্ষেপণ কোণ, α

সর্বাধিক উচ্চতা, $y = \frac{u_1^2 \sin^2\alpha}{2g}$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{2gy}{u_1^2}$$
$$\therefore \sin\alpha = \frac{\sqrt{2gy}}{u_1}$$

এবং পাল্লা, $X = \frac{u_1^2 \sin 2\alpha}{g}$

$= \frac{u_1^2}{g} .2\sin\alpha\cos\alpha$

$= \frac{2u_1^2}{g} \frac{\sqrt{2gy}}{u_1} .\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$= \frac{2u_1}{g} \sqrt{2gy} .\sqrt{1-\frac{2gy}{u_1^2}}$

$= 2u_1 . \frac{\sqrt{2gy}}{g} . \frac{\sqrt{u_1^2 - 2gy}}{u_1}$

$= 2 \times \sqrt{\frac{2y}{g}} . \sqrt{u_1^2 - 2gy}$

$= 2 \times 2\sqrt{\frac{y}{2g}} . \sqrt{u_1^2 - 2gy}$

$\therefore X = 4\sqrt{\frac{y(u_1^2 - 2gy)}{2g}}$ **(Proved)**

প্রশ্ন ▶ ২১ দৃশ্যকল্প-১: একটি বিড়াল 12 মিটার দূরে একটি ইঁদুরকে দেখতে পেয়ে স্থিরাবস্থা থেকে 2 মি./সে.^{2} ত্বরণে দৌড়াল এবং ইঁদুরটি 4 মিটার/সে. সমবেগে দৌড়াল।

দৃশ্যকল্প-২: একটি প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণার দুটি গতিপথের বৃহত্তম উচ্চতা যথাক্রমে 4 মিটার ও 6 মিটার।

(ক) মাধ্যাকর্ষণের প্রভাবে 100 মিটার উঁচু স্থান হতে পড়ন্ত বস্তুর 2 sec এ প্রাপ্ত বেগ নির্ণয় কর। ($g = 9.8\ ms^{-2}$) [ব. বো. ১৯]

(খ) বিড়ালটি কত সময় পরে এবং কত দূরে ইঁদুরটিকে ধরতে পারবে? [ব. বো. ১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $R = 8\sqrt{6}$। [ব. বো. ১৯]

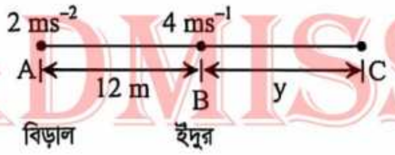
সমাধান:

ক এখানে, উচ্চতা, $h = 100$ মিটার; সময়, $t = 2$ সে.

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8$ মি./সে.^{2}

$\therefore$ 2 সে. এ প্রাপ্ত বেগ, $v = gt = 9.8 \times 2 = 19.6$ মি./সে. **(Ans.)**

খ



বিড়াল ও ইঁদুরের মধ্যবর্তী দূরত্ব, AB = 12 মিটার। মনে করি, t সেকেন্ড পরে ইঁদুরের আদি অবস্থান থেকে $BC = y$ দূরে বিড়ালটি ইঁদুরটিকে ধরতে পারবে এবং বিড়ালটি দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব x হলে,

$x = AC = 12 + y$

এখন, ইঁদুরের ক্ষেত্রে, $y = 4t$ [$\because$ সমবেগ] ..... (i)

এবং বিড়ালের ক্ষেত্রে, $x = 0.t + \frac{1}{2}.2.t^2$

$\Rightarrow x = t^2$ ....(ii)

আবার, $x = 12 + y$

$t^2 = 12 + 4t$ [(i) ও (ii) নং হতে]

$\Rightarrow t^2 - 4t - 12 = 0$

$\Rightarrow (t-6)(t+2) = 0$

$\Rightarrow t - 6 = 0$ [$\because (t+2) \neq 0$]

$\therefore t = 6$ সে. **(Ans.)**

$\therefore x = 12 + 4t = 12 + 4 \times 6 = 36$ মিটার **(Ans.)**

গ ধরি, প্রক্ষিপ্ত বস্তুটির আদিবেগ u

প্রথম গতিপথের জন্য প্রক্ষেপণ কোণ $= \alpha$

দ্বিতীয় গতিপথের জন্য প্রক্ষেপণ কোণ $= \frac{\pi}{2} - \alpha$

প্রত্যেক ক্ষেত্রে আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

$\therefore$ প্রথম ক্ষেত্রে, সর্বোচ্চ উচ্চতা $H = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$

$\Rightarrow 4 = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$ ..... (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, সর্বোচ্চ উচ্চতা $= \frac{u^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2g}$

$\Rightarrow 6 = \frac{u^2 \cos^2\alpha}{2g}$ .....(ii)

(i) × (ii) করে পাই,

$24 = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} \times \frac{u^2 \cos^2\alpha}{2g} = \frac{u^4 \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4g^2} = \frac{1}{16}\left(\frac{u^2 2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2$

$= \frac{1}{16}\left(\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}\right)^2 = \frac{1}{16} R^2$

$\Rightarrow R^2 = 24 \times 16$

$\Rightarrow R = \sqrt{64 \times 6} = 8\sqrt{6}$

$\therefore R = 8\sqrt{6}$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▶ ২২ দৃশ্যকল্প-১: দুইটি বেগের বৃহত্তম লব্ধি এদের ক্ষুদ্রতম লব্ধির n গুণ। বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে, লব্ধি বেগের মান এদের সমষ্টির অর্ধেক হয়।

দৃশ্যকল্প-২: একটি বস্তুকে থেকে α কোণে এমনভাবে নিক্ষেপ করা হলো যেন তা 2h ব্যবধানে অবস্থিত h পরিমাণ উঁচু দুইটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে অতিক্রম করে।

(ক) একটি কণা u আদিবেগে প্রক্ষিপ্ত হলো। যদি কণাটির বৃহত্তম উচ্চতা H হয়, তবে প্রমাণ কর যে, এর আনুভূমিক পাল্লা $R = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\cos\alpha = \frac{n^2+2}{2(1-n^2)}$

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, বস্তুটির পাল্লা $R = 2h\cos\frac{\alpha}{2}$

সমাধান:

ক আমরা জানি, বৃহত্তম উচ্চতা, $H = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$

আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

$R.H.S = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)} = 4\sqrt{\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\left(\frac{u^2}{2g} - \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right)}$

$= 4\sqrt{\frac{u^2}{2g}\sin^2\alpha \times \frac{u^2}{2g}(1 - \sin^2\alpha)}$

$= 4\frac{u^2}{2g}\sqrt{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = 4\frac{u^2}{2g}\sin\alpha.\cos\alpha$

$= \frac{u^2.2\sin\alpha.\cos\alpha}{g} = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = R = L.H.S$

$\therefore L.H.S = R.H.S$ **(Proved)**

খ ধরি, বেগদ্বয়, u ও v যেখানে $u > v$

বৃহত্তম লব্ধি, $R_{max} = u + v$ এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি, $R_{min} = u - v$

প্রশ্নমতে, $R_{max} = n \times R_{min}$

$$\Rightarrow u + v = n \times (u - v) \text{ ..... (i)}$$

এবং $R = \frac{u+v}{2}$ [দেওয়া আছে, লব্ধি বেগের মান বেগদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধেক]

$$\Rightarrow R^2 = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{(u+v)^2}{2} = 2(u^2 + v^2) + 4uv\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{(u+v)^2}{2} = \{(u+v)^2 + (u-v)^2\} + \{(u+v)^2 - (u-v)^2\}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\{n \times (u-v)\}^2}{2} = \{n \times (u-v)\}^2 + (u-v)^2$$

$$+ \{\{n \times (u-v)\}^2 - (u-v)^2\}\cos\alpha \text{ [(i) থেকে পাই]}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{2} = n^2 + 1 + (n^2 - 1)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow -(n^2 - 1)\cos\alpha = n^2 + 1 - \frac{n^2}{2}$$

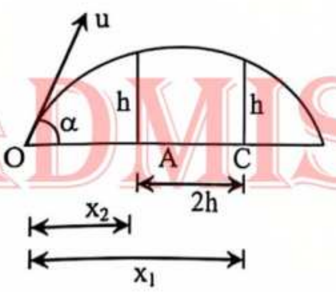
$$\Rightarrow -(n^2 - 1)\cos\alpha = \frac{2n^2 + 2 - n^2}{2}$$

$$\Rightarrow -(n^2 - 1)\cos\alpha = \frac{n^2 + 2}{2}$$

$$\Rightarrow (1 - n^2)\cos\alpha = \frac{n^2 + 2}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{n^2 + 2}{2(1 - n^2)} \text{ (Proved)}$$

গ



আমরা জানি, $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

আনুভূমিক পাল্লা = R
প্রক্ষেপণ কোণ = α
প্রক্ষেপণ বিন্দু হতে দেওয়ালের দূরত্ব = x
দেওয়ালের উচ্চতা = h

$$\therefore h = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$$

$$\Rightarrow x\tan\alpha - \frac{x^2}{R}\tan\alpha = h$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{R}\tan\alpha - x\tan\alpha + h = 0$$

ধরি, মূলদ্বয় x_1, x_2

$$x_1 + x_2 = \frac{\tan\alpha}{\frac{\tan\alpha}{R}} = R \text{ ..... (i)}$$

$$x_1.x_2 = \frac{h}{\frac{\tan\alpha}{R}} = \frac{Rh}{\tan\alpha}$$

প্রশ্নমতে, $x_1 - x_2 = 2h$ [$\because x_1 > x_2$]

(i) থেকে পাই,

$$x_1 + x_2 = R$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = (R)^2$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 = R^2$$

$$\Rightarrow (2h)^2 + 4.\frac{Rh}{\tan\alpha} = (R)^2$$

$$\Rightarrow R^2\tan\alpha - 4Rh - 4h^2\tan\alpha = 0$$

$$\therefore R = \frac{-(-4h) \pm \sqrt{(-4h)^2 - 4\tan\alpha(-4h^2\tan\alpha)}}{2\tan\alpha}$$

$$= \frac{4h \pm \sqrt{16h^2 + 16h^2\tan^2\alpha}}{2\tan\alpha}$$

$$R = \frac{4h \pm 4h\sqrt{(1 + \tan^2\alpha)}}{2\tan\alpha} = \frac{4h \pm 4h\sec\alpha}{2\tan\alpha}$$

$$= \frac{4h \pm 4h\sec\alpha}{2\tan\alpha} = 2h\cot\alpha \pm \frac{2h}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{2h}{\sin\alpha}(\cos\alpha \pm 1) = \frac{2h}{\sin\alpha}(\cos\alpha + 1)$$

[$\because$ $(\cos\alpha - 1)$ গ্রহণযোগ্য নয়]

$$= \frac{2h \times 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow R = 2h\cot\frac{\alpha}{2} \text{ (Proved)}$$

প্রশ্ন ▶ ২৩ দৃশ্যকল্প-১: একটি শূন্য কূপের মধ্যে একটি ভারী বস্তু ফেলার 5.5 সেকেন্ড পরে এর তলদেশে ভারী বস্তুটির পতনের শব্দ শোনা গেল।

দৃশ্যকল্প-২: একটি খাড়া দেওয়ালের পাদদেশ হতে ভূমি বরাবর 75 মিটার দূরত্বের কোনো বিন্দু হতে 45° কোণে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে চলে গেল এবং দেওয়ালের অপর পার্শ্বে 45 মিটার দূরত্বে গিয়ে ভূমিতে পতিত হলো।

(ক) 20 ms^{-1} বেগে উর্ধ্বগামী কোনো বেলুন হতে পতিত এক টুকরা পাথর 15 সেকেন্ডে মাটিতে পতিত হয়। যখন পাথরের টুকরা পতিত হয়, তখন বেলুনের উচ্চতা কত?

[দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২; সি. বো. ২২; দি. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে শব্দের বেগ 327 মিটার/সেকেন্ড হলে, কূপের গভীরতা নির্ণয় কর। ($g = 9.81$ মিটার/সেকেন্ড^2) [দি. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, দেওয়ালটির উচ্চতা $h = 28.125$ মিটার। [দি. বো. ২৩]

সমাধান:

ক এখানে, আদিবেগ, $u = 20\ ms^{-1}$

সময়, $t = 15\ s$

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$

ধরি, h উচ্চতা হতে পাথরের টুকরাটি পতিত হয়।

$$\therefore h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$$

$$= -20 \times 15 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times (15)^2$$

$$= -300 + 1102.5 = 802.5\ m \text{ (Ans.)}$$

খ ধরি, কূপের গভীরতা = h মিটার

বস্তুটি কূপের তলায় পড়তে সময় লাগে = t_1 সে.

∴ শব্দ কূপের তলা থেকে ফিরে আসতে সময় লাগবে,

$t_2 = 5.5 - t_1$ সে.

এখানে, $h = \frac{1}{2}gt_1^2$ ..... (i) [আদিবেগ, $u = 0$]

∴ শব্দের বেগ, $v = 327\ ms^{-1}$

$h = vt_2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}gt_1^2 = 327(5.5 - t_1)$ [(1) নং হতে]

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 9.81 \times t_1^2 = 327 \times 5.5 - 327\ t_1$

$\Rightarrow 4.9\ t_1^2 + 327\ t_1 - 1798.5 = 0$

$\Rightarrow t_1 = \frac{-327 \pm \sqrt{(327)^2 - 4 \times 4.9 \times (-1798.5)}}{2 \times 4.9}$

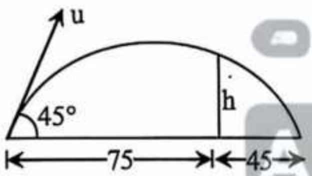
∴ $t_1 = 5.11s$ এবং -71.70 sec

কিন্তু $t_1 = -71.70$ সে. মানটি গ্রহণযোগ্য নয়।

এখন (i) নং হতে, $h = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2} \times 9.81 \times (5.11)^2$

$= 128.08$ মিটার **(Ans.)**

গ ধরি, দেয়ালের উচ্চতা h



এখানে, নিক্ষেপণ কোণ, $\alpha = 45°$

বস্তুটির আনুভূমিক পাল্লা, $R = 75 + 45 = 120$ মিটার

বস্তুটি নিক্ষেপণ বিন্দু হতে $x = 75$ m দূরে h উচ্চতার দেয়ালকে ঠিক উপর দিয়ে অতিক্রম করে।

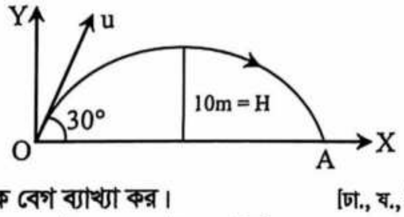
∴ $y = h$

আমরা জানি, $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

$\Rightarrow h = 75\tan45°\left(1 - \frac{75}{120}\right) = 28.125$ মিটার। **(Showed)**

প্রশ্ন ▸ ২৪ **দৃশ্যকল্প-১: একটি টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু হতে পড়ন্ত একখণ্ড পাথর 2 মিটার নিচে পৌছানোর পর টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু থেকে 8 মিটার নিচে কোনো বিন্দু থেকে অপর একখণ্ড পাথর নিচে ফেলে দেয়া হলো। পাথরদ্বয় স্থিরাবস্থা থেকে একই সময়ে ভূমিতে পড়ে।**

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) আপেক্ষিক বেগ ব্যাখ্যা কর। [ঢা., য., সি. ও দি. বো. ১৮]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। [চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৯; ঢা. বো. ১৭]

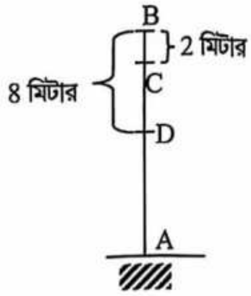
(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রক্ষেপকটির পাল্লা এবং বিচরণকাল নির্ণয় কর। [চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ১৭; দি. বো. ২২]

সমাধান:

ক দুইটি গতিশীল বস্তুকণার প্রথমটির সাপেক্ষে দ্বিতীয়টির সরণের পরিবর্তনের হারকে প্রথম বস্তুকণার সাপেক্ষে দ্বিতীয় বস্তুকণার আপেক্ষিক বেগ বলা হয়। মনে করি, A ও B দুইটি গতিশীল বস্তুকণা একই দিকে চলছে এবং এদের বেগ যথাক্রমে $20\ ms^{-1}$ ও $30\ ms^{-1}$। এক্ষেত্রে A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগ হবে।

$v_{BA} = v_B - v_A = 30 - 20 = 10\ ms^{-1}$

খ ধরি, AB = h মিটার উঁচু টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু B হতে পড়ন্ত ১ম পাথর খন্ডটি C তে পৌঁছামাত্র D বিন্দু থেকে ২য় পাথর খন্ডটি নিচে ফেলা হলো এবং দুটি পাথর একই সাথে t সময় পর ভূমিতে পতিত হয়।



BC = 2 মিটার, BD = 8 মিটার

AD = AB − BD = (h − 8) মিটার

AC = AB − BC = (h − 2) মিটার

C বিন্দুতে ১ম পাথর খন্ডের অর্জিত বেগ v হলে,

$v^2 = u^2 + 2g \times BC$

$\Rightarrow v^2 = 0 + 2g \times 2 = 4g$

∴ $v = \sqrt{4g}$

এখন, ১ম পাথরের ক্ষেত্রে, $CA = h - 2 = vt + \frac{1}{2}gt^2$...... (i)

আবার, ২য় পাথরের ক্ষেত্রে, $DA = h - 8 = 0 + \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow h - 8 = \frac{1}{2}gt^2$...... (ii)

(i) − (ii) করে পাই,

$-2 - (-8) = vt$

$\Rightarrow 8 - 2 = \sqrt{4g} \times t$

$\Rightarrow t = \frac{6}{\sqrt{4g}} = \frac{6}{\sqrt{4 \times 9.8}} = 0.96$ সেকেন্ড

∴ সমীকরণ (ii) হতে পাই,

$h - 8 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times (0.96)^2 = 4.52$

$\Rightarrow h = 8 + 4.52 = 12.52$ মিটার **(Ans.)**

গ এখানে, সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = 10$ m

নিক্ষেপণ কোণ, $\alpha = 30°$

এবং নিক্ষেপণ বেগ = u

আমরা জানি, $H = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$

$\Rightarrow 10 = \frac{u^2 (\sin30)^2}{2 \times 9.8}$

$\Rightarrow u^2 = \frac{10 \times 9.8 \times 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 784$

∴ $u = 28\ ms^{-1}$

পাল্লা, $R = \frac{u^2 \sin2\alpha}{g} = \frac{(28)^2 \sin(2 \times 30°)}{9.8}$

$= \frac{784 \times \sin60°}{9.8} = 69.28$ m **(Ans.)**

বিচরণকাল, $T = \frac{2u \sin\alpha}{g} = \frac{2 \times 28 \times \sin30°}{9.8} = 2.86$ s **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৫ **দৃশ্যকল্প-১: u আদিবেগ এবং আনুভূমিকের সাথে α কোণে একটি বস্তুকণা নিক্ষেপ করা হলো। t সময় পর (x, y) বিন্দুতে পৌঁছায়।**

দৃশ্যকল্প-২: একটি পাথর কুয়ার ভিতর ফেলার t সময় পরে পানিতে এর পতন শোনা গেল। শব্দের বেগ v এবং কুয়ার গভীরতা h। বাতাসের বাধা অগ্রাহ্য করা হলো।

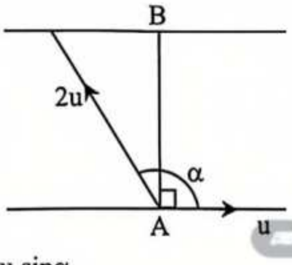
(ক) একজন সাঁতারু স্রোতের বেগের দ্বিগুণ বেগে সাঁতার দিয়ে একটি নদীর অপর তীরে যাত্রা বিন্দুর বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছাল। স্রোতের দিকের সাথে সে যে কোণে যাত্রা করেছিল, তা নির্ণয় কর। [ব. বো. ২২]

(খ) উদ্দীপক-১ ব্যবহার করে দেখাও যে, $x^2\tan\alpha - xR\tan\alpha + Ry = 0$ [ব. বো. ২২]

(গ) উদ্দীপক-২ ব্যবহার করে দেখাও যে, $vgt^2 - 2h(gt + v) = 0$ [ব. বো. ২২]

সমাধান:

ক ধরি, একজন সাঁতারু u স্রোতের বেগের দ্বিগুণ 2u বেগে A বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে নদীর অপর তীরে যাত্রা বিন্দুর বিপরীত B বিন্দুতে পৌঁছাল এবং স্রোতের বেগের সাথে যাত্রাপথের মধ্যবর্তী কোণ α



$\therefore \tan 90° = \dfrac{2u\sin\alpha}{u + 2u\cos\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{0} = \dfrac{2\sin\alpha}{1 + 2\cos\alpha}$

$\Rightarrow 1 + 2\cos\alpha = 0$

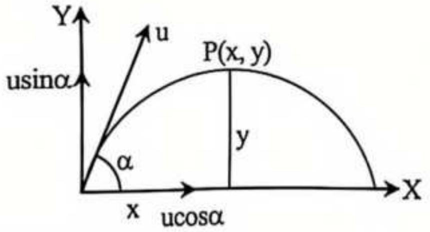
$\Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \cos 120°$

$\therefore \alpha = 120°$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

বস্তুটির আদিবেগ u, নিক্ষেপণ কোণ α এবং t সময় পর বস্তুটি (x, y) বিন্দুতে পৌঁছায়।



$\therefore$ বস্তুটির উলম্ব সরণ,

$y = u\sin\alpha t - \dfrac{1}{2}gt^2$ ...... (i)

t সময়ে আনুভূমিক সরণ,

$x = u\cos\alpha t$

$\Rightarrow t = \dfrac{x}{u\cos\alpha}$

t এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$y = u\sin\alpha . \dfrac{x}{u\cos\alpha} - \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{x}{u\cos\alpha}\right)^2$

$\Rightarrow y = x\tan\alpha - \dfrac{1}{2}g.\dfrac{x^2}{u^2\cos^2\alpha}$

$\Rightarrow y = x\tan\alpha\left(1 - \dfrac{gx}{2u^2\cos^2\alpha\tan\alpha}\right)$

$\Rightarrow y = x\tan\alpha\left(1 - \dfrac{gx}{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}\right)$

$\Rightarrow y = x\tan\alpha\left(1 - \dfrac{gx}{u^2\sin 2\alpha}\right)$

$\Rightarrow y = x\tan\alpha\left(1 - \dfrac{x}{R}\right)\left[\because R = \dfrac{u^2\sin 2\alpha}{g}\right]$

$\Rightarrow y = x\tan\alpha - \dfrac{x^2}{R}\tan\alpha$

$\Rightarrow Ry = Rx\tan\alpha - x^2\tan\alpha$

$\therefore x^2\tan\alpha - xR\tan\alpha + Ry = 0$ **(Showed)**

গ ধরি, আদি অবস্থা হতে পাথরটি পড়তে t_1 সে. এবং তলদেশে সৃষ্ট শব্দ কূপের উপরে আসতে t_2 সময় লাগে।

$\therefore t = t_1 + t_2$ ....(i)

কুয়ার গভীরতা h হলে,

পাথর পড়ার ক্ষেত্রে, $h = \dfrac{1}{2}gt_1^2$

$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

এখানে, শব্দের বেগ = v এবং কূয়ার গভীরতা = h

আমরা জানি, শব্দ সমবেগে চলে।

$\therefore h = vt_2$

$\Rightarrow t_2 = \dfrac{h}{v}$

এখন, (i) নং এ t_1 ও t_2 এর মান বসিয়ে পাই,

$t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} + \dfrac{h}{v}$

$\Rightarrow t - \dfrac{h}{v} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

$\Rightarrow \left(t - \dfrac{h}{v}\right)^2 = \dfrac{2h}{g}$

$\Rightarrow t^2 + \left(\dfrac{h}{v}\right)^2 - \dfrac{2th}{v} = \dfrac{2h}{g}$

$\left(\dfrac{h}{v}\right)^2$ অতিক্ষুদ্র বিধায় তা বর্জন করে পাই,

$\Rightarrow t^2 - \dfrac{2th}{v} - \dfrac{2h}{g} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{vgt^2 - 2ght - 2hv}{vg} = 0$

$\Rightarrow vgt^2 - 2h(gt + v) = 0$ **(Showed)**

প্রশ্ন ▸ ২৬ দৃশ্যকল্প-১: একটি বস্তু একই বেগে আনুভূমিক তলের সাথে দুইটি ভিন্ন কোণে প্রক্ষিপ্ত হয়ে t_1 ও t_2 সময়ে একই আনুভূমিক পাল্লা R অতিক্রম করে।

দৃশ্যকল্প-২: ভূমি থেকে প্রক্ষিপ্ত একটি ক্রিকেট বল প্রক্ষিপ্ত বিন্দু হতে যথাক্রমে $\frac{1}{b}$ এবং $\frac{1}{a}$ দূরে অবস্থিত $\frac{1}{a}$ এবং $\frac{1}{b}$ উচ্চতার দুইটি দেওয়াল কোনো রকমে অতিক্রম করে।

(ক) স্থিরাবস্থা থেকে একটি বস্তু $4ms^{-2}$ সমত্বরণে চলতে থাকলো। ৭ম সেকেন্ডে এটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে তা নির্ণয় কর। [দি. বো. ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $R = \frac{1}{2}gt_1t_2$ অথবা $t_1t_2 = \frac{2R}{g}$ [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২]

(গ) উদ্দীপক হতে দেখাও যে, আনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{a+b}{ab} - \frac{1}{a+b}$ (সংশোধিত) [য. বো. ১৯]

সমাধান:

ক এখানে আদিবেগ, $u = 0\ ms^{-1}$; ত্বরণ, $f = 4\ ms^{-2}$

আমরা জানি, $S_t = u + \frac{1}{2}f(2t-1)$

৭ম সেকেন্ডের জন্য $S_7 = 0 + \frac{1}{2} \times 4(2\times 7 - 1)$

$= 26\ m$ **(Ans.)**

খ ধরি, প্রক্ষেপণ বেগ = u

প্রথম বিচরণ পথের জন্য প্রক্ষেপণ কোণ = α

দ্বিতীয় বিচরণ পথের জন্য প্রক্ষেপণ কোণ = $\frac{\pi}{2} - \alpha$

তাহলে, $t_1 = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

এবং $t_2 = \frac{2u\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{g} = \frac{2u\cos\alpha}{g}$

আবার, আনুভূমিক পাল্লা,

$$R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$$
$$\Rightarrow R = \frac{2u\sin\alpha . 2u\cos\alpha}{2g}$$
$$\Rightarrow R = \frac{g}{2} . \frac{2u\sin\alpha}{g} . \frac{2u\cos\alpha}{g}$$
$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}gt_1t_2 \textbf{ (Proved)}$$
$$\therefore t_1t_2 = \frac{2R}{g} \textbf{ (Proved)}$$

গ মনে করি, প্রাসের আদিবেগ u এবং নিক্ষেপণ কোণ α

আমরা জানি, $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$ ...... (i)

প্রাসটি $\frac{1}{b}$ একক দূরে $\frac{1}{a}$ উচ্চতার দেয়াল অতিক্রম করে অর্থাৎ $\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$ বিন্দুগামী।

(i) নং হতে পাই,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b}\tan\alpha\left(1 - \frac{\frac{1}{b}}{R}\right) ..... (ii)$$

আবার, প্রাসটি $\frac{1}{a}$ একক দূরে $\frac{1}{b}$ উচ্চতার দেয়াল অতিক্রম করে।

অর্থাৎ $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ বিন্দুগামী

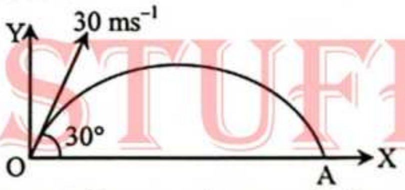
(i) নং হতে পাই,

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a}\tan\alpha\left(1 - \frac{\frac{1}{a}}{R}\right) ..... (iii)$$

(ii) ÷ (iii) হতে,

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b}\left(\frac{1-\frac{1}{bR}}{1-\frac{1}{aR}}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{abR - a}{abR - b}$$
$$\Rightarrow ab^3R - b^3 = a^3bR - a^3$$
$$\Rightarrow R(ab^3 - a^3b) = b^3 - a^3$$
$$\Rightarrow R = \frac{b^3 - a^3}{ab(b^2 - a^2)}$$
$$= \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{ab(b-a)(b+a)}$$
$$= \frac{(a^2+ab+b^2)}{ab(a+b)}$$
$$= \frac{a^2+2ab+b^2-ab}{ab(a+b)}$$
$$= \frac{(a+b)^2 - ab}{ab(a+b)}$$
$$= \frac{(a+b)^2}{ab(a+b)} - \frac{ab}{ab(a+b)}$$
$$\therefore R = \frac{a+b}{ab} - \frac{1}{a+b} \textbf{ (Showed)}$$

প্রশ্ন ▸ ২৭ উদ্দীপক-১:



উদ্দীপক-২: কোনো আনুভূমিক তলের উপরস্থ একটি বিন্দু হতে একটি কণা u বেগে এবং α কোণে প্রক্ষিপ্ত হলো। তার পাল্লা R এবং লব্ধ বৃহত্তম উচ্চতা H।

(ক) একটি বস্তুকণাকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত করা হলো। কণাটি সর্বোচ্চ 39.2 মিটার উপরে উঠে ভূমিতে পতিত হলে, বেগ নির্ণয় কর। [য. বো. ২২]

(খ) উদ্দীপক-১ এ নিক্ষিপ্ত কণাটি 1 মিটার উচ্চতায় পৌছার সময়ের পার্থক্য নির্ণয় কর। [ব. বো. ১৭]

(গ) উদ্দীপক-২ হতে, প্রমাণ কর যে, $16gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$ [য. বো. ২২]

সমাধান:

ক এখানে, সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = 39.2$ m

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$

ধরি, নিক্ষেপণ বেগ = u

আমরা জানি, খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতা,

$$H = \frac{u^2}{2g}$$
$$\Rightarrow u^2 = 2gH$$
$$\therefore u = \sqrt{2gH} = \sqrt{2\times 9.8 \times 39.2}\ ms^{-1} = 27.72\ ms^{-1}\text{(প্রায়)} \textbf{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে,

$u = 30\ ms^{-1}$

নিক্ষেপণ কোণ, $\alpha = 30°$

মনে করি, প্রক্ষেপিত কণাটির 1 মিটার উচ্চতায় পৌঁছাতে t সময় প্রয়োজন।

আমরা জানি,

$$y = u\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow 1 = 30\sin30°t - \frac{1}{2} \times 9.8t^2$$

$$\Rightarrow 4.9t^2 - 15t + 1 = 0 \text{ ...... (i)}$$

(i) নং সমীকরণটি t এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্দেশ করে।

$t = 2.993s,\ 0.0681s$

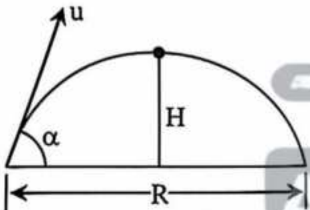
$\therefore$ 1 মিটার উচ্চতায় পৌঁছার সময়ের পার্থক্য $= (2.993 - 0.0681)$

$= 2.925$ সে. **(Ans.)**

গ এখানে, প্রক্ষিপ্ত বস্তুর আদিবেগ $= u$ এবং প্রক্ষেপণ কোণ $= \alpha$

বৃহত্তম উচ্চতা $= H$

এবং পাল্লা $= R$



আমরা জানি, কোনো বিন্দু হতে u আদিবেগে α কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতা,

$$H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$$

এবং আনুভূমিক পাল্লা,

$$R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g}$$

$$\Rightarrow R = \frac{2u^2\sin\alpha.\cos\alpha}{g}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{4u^4\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{g^2} \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{4u^4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}{g^2}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{4u^4\sin^2\alpha - 4u^4\sin^4\alpha}{g^2}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{4u^4\sin^2\alpha}{g^2} - \frac{4u^4\sin^4\alpha}{g^2}$$

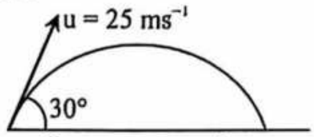
$$\Rightarrow R^2 = \frac{8u^2}{g}.\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} - 4 \times 4\left(\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right)^2$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{8u^2}{g}.H - 16.H^2$$

$$\Rightarrow gR^2 = 8u^2H - 16\ gH^2 \text{ [g দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\therefore\ 16gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0 \textbf{ (Proved)}$$

প্রশ্ন ▸ ২৮ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: ক্রিকেটার সাকিব ও রুবেল এর উচ্চতা যথাক্রমে 1.8 মিটার ও 1.7 মিটার।

(ক) u বেগে ভূমি হতে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত কণার উত্থানকাল নির্ণয় কর। [ব. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রক্ষেপকটির আনুভূমিক পাল্লা এবং সর্বাধিক উচ্চতা নির্ণয় কর। 1.5 সেকেন্ড পর এর অবস্থান ও বেগ নির্ণয় কর।

(গ) সাকিব 30° কোণে $39.2\ ms^{-1}$ বেগে একটি ক্রিকেট বল নিক্ষেপ করেন। রুবেল 1.4 মিটার উচ্চতা থেকে বলটি ধরে ফেলেন। সাকিব ও রুবেল এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর–দৃশ্যকল্প-২ হতে। [দি. বো. ১৯]

সমাধান:

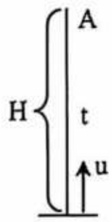
ক একটি বস্তুকণাকে u বেগে ভূমি হতে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হয়। মনে করি, বস্তুটি t সময়ে সর্বাধিক H উচ্চতায় আরোহণ করে এবং এর শেষবেগ $v = 0$

তাহলে, $v = u - gt$ [t = উত্থানকাল]

$\Rightarrow 0 = u - gt$

$\Rightarrow t = \frac{u}{g}$

$\therefore$ উত্থানকাল, $t = \frac{u}{g}$ **(Ans.)**



খ দেওয়া আছে, প্রক্ষেপকের আদিবেগ, $u = 25\ ms^{-1}$

প্রক্ষেপণ কোণ, $\alpha = 30°$

আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g} = \frac{(25)^2 \times \sin60°}{9.8}$

$= 55.23$ m **(Ans.)**

সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{(25)^2 \times \sin^2 30°}{2 \times 9.8}$

$= 7.97$ m **(Ans.)**

মনে করি, 1.5 sec পর প্রক্ষেপকটির অবস্থান (x,y) এবং বেগ v ms^{-1}

আনুভূমিক সরণ, $x = u\cos\alpha \times t$

$= 25 \times \cos30° \times 1.5$

$= 32.48$ m

উলম্ব সরণ, $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$

$= 32.48 \times \tan30° - \frac{9.8 \times (32.48)^2}{2 \times (25)^2 \times \cos^2 30°}$

$= 7.725$ m

$\therefore$ 1.5 sec পর প্রক্ষেপকটির অবস্থান (32.48 m, 7.725 m) **(Ans.)**

বেগের আনুভূমিক ও উলম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_x ও v_y হলে,

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$v_x = u\cos\alpha = 25\cos30° = 21.65\ ms^{-1}$

$v_y = u\sin\alpha - gt = 25\sin30° - 9.8 \times 1.5 = -2.2\ ms^{-1}$

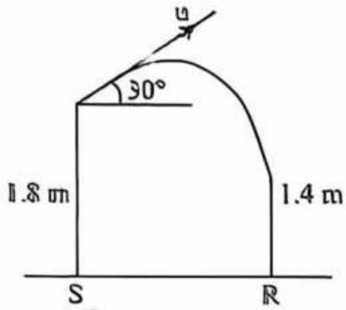
$\therefore v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$

$= \sqrt{(21.65)^2 + (-2.2)^2}$

$= 21.76\ ms^{-1}$

$\therefore$ 1.5 sec পর প্রক্ষেপকটির বেগ, $v = 21.76$ m/s **(Ans.)**

গ এখানে, নিক্ষেপণ কোণ, $\alpha = 30^\circ$
নিক্ষেপণ বেগ, $u = 39.2\ ms^{-1}$
উল্লম্ব দূরত্ব, $y = (1.8 - 1.4)\ m = 0.4 m$



সাকিব ও রবেলের আনুভূমিক দূরত্ব, $x = ?$

আমরা জানি, $y = -u\sin\alpha t + \frac{1}{2}gt^2$

$$\Rightarrow 0.4 = -39.2 \times \sin 30^\circ \times t + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$
$$\Rightarrow 4.9t^2 - 19.6t - 0.4 = 0$$
$$\Rightarrow t = \frac{-(-19.6) \pm \sqrt{(-19.6)^2 - 4 \times 4.9 \times (-0.4)}}{2 \times 4.9}$$
$$= \frac{19.6 \pm \sqrt{392}}{9.8} = \frac{19.6 \pm 14\sqrt{2}}{9.8} = 4.02, -0.02$$

$\therefore t = 4.02$ sec [∵ সময় ঋণাত্মক হতে পারে না]

এখানে, $x = u\cos\alpha\ t$
$= 39.2 \times \cos 30^\circ \times 4.02$
$= 136.47$ মিটার (প্রায়) (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ২৬ দৃশ্যকল্প-১: একটি ক্রিকেট বল u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। 5 সে. পর একই বিন্দু হতে একই বেগে অপর একটি বলকে একই দিকে নিক্ষেপ করা হলো।
দৃশ্যকল্প-২: একটি বস্তুকণা u বেগে আনুভূমিক এর সাথে α কোণে নিক্ষেপ করা হলো।

(ক) একটি বস্তুকণার উপর যথাক্রমে 3, 5, 7 সে.মি. মানের তিনটি বেগ বিভিন্ন দিকে ক্রিয়া করে বস্তুকণা স্থিতিশীল রাখলে প্রথম দুইটি বেগের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [রা., কু., চ. ও ব. বো. ১৮]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে u = 320 ফুট/সে. হলে বল দুইটি কোথায় ও কখন মিলিত হবে? [রা., কু., চ. ও ব. বো. ১৮]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রক্ষিপ্ত কণা কর্তৃক লব্ধ বৃহত্তম উচ্চতা x এবং তার আনুভূমিক পাল্লা y হলে দেখাও যে, $\frac{y^2}{16} + x^2 = \frac{u^2 x}{2g}$ [রা., কু., চ. ও ব. বো. ১৮]

সমাধান:

ক মনে করি, 3 সে.মি./সে. ও 5 সে.মি./সে. বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α। যেহেতু বেগত্রয় একটি বস্তুকণার ওপর ক্রিয়া করে সুস্থিত আছে, সেহেতু প্রথম দুইটি বেগের লব্ধি তৃতীয় বেগের সমান ও বিপরীত হবে। বেগের সামান্তরিকের সূত্রানুসারে,

$$7^2 = 3^2 + 5^2 + 2 \times 3 \times 5\cos\alpha$$
$$\Rightarrow 49 = 9 + 25 + 30\cos\alpha$$
$$\Rightarrow 30\cos\alpha = 49 - 34$$
$$\Rightarrow 30\cos\alpha = 15$$
$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \cos\alpha = \cos 60^\circ$$
$\therefore \alpha = 60^\circ$ (Ans.)

খ ধরি, দ্বিতীয় বলটি নিক্ষেপের t সেকেন্ড পরে তারা ভূমি হতে h উচ্চতায় মিলিত হবে।
দেওয়া আছে, দ্বিতীয় বলটি প্রথম বলের 5 s পর নিক্ষেপ করা হয়।
তাহলে, প্রথম বলটি (t + 5) সে. সময় পরে h উচ্চতায় থাকবে।
এখানে, আদিবেগ, u = 320 ফুট/সে.
অভিকর্ষজ ত্বরণ, g = 32 ফুট/সে.^{2}

$\therefore$ ১ম বলের ক্ষেত্রে, $h = 320(t+5) - \frac{1}{2}g(t+5)^2$ ...(i)

আবার, ২য় বলের ক্ষেত্রে, $h = 320t - \frac{1}{2}gt^2$ ......(ii)

(i) – (ii) করে পাই,
$$320(t+5) - \frac{1}{2}g(t+5)^2 - 320t + \frac{1}{2}gt^2 = 0$$
$$\Rightarrow 320t + 1600 - 320t - \frac{1}{2}g(t^2 + 10t + 25 - t^2) = 0$$
$$\Rightarrow 1600 - \frac{1}{2}g(10t + 25) = 0$$
$$\Rightarrow 1600 - \frac{1}{2} \times 32\ (10t + 25) = 0$$
$$\Rightarrow 1600 - 160t - 400 = 0$$
$$\Rightarrow 160t = 1200$$
$$\Rightarrow t = \frac{1200}{160} = 7.5 \text{ সে. } \textbf{(Ans.)}$$

(ii) নং হতে পাই,
$$h = 320 \times 7.5 - \frac{1}{2} \times 32 \times (7.5)^2 = 2400 - 900$$
$\therefore h = 1500$ ফুট **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, আনুভূমিক পাল্লা = y এবং বৃহত্তম উচ্চতা = x
u বেগে এবং α কোণে প্রক্ষিপ্ত কণার আনুভূমিক পাল্লা, $y = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

এবং সর্বোচ্চ উচ্চতা, $x = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$

$$\text{L.H.S} = \frac{y^2}{16} + x^2 = \frac{\left(\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}\right)^2}{16} + \left(\frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}\right)^2$$
$$= \frac{u^4 \sin^2 2\alpha}{16g^2} + \frac{u^4 \sin^4\alpha}{4g^2}$$
$$= \frac{u^4 \sin^2 2\alpha + 4u^4 \sin^4\alpha}{16g^2}$$
$$= \frac{u^4 (\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha)}{16g^2}$$
$$= \frac{u^4 \{(2\sin\alpha \cos\alpha)^2 + 4\sin^4\alpha\}}{16g^2}$$
$$= \frac{u^4(4\sin^2\alpha \cos^2\alpha + 4\sin^4\alpha)}{16g^2}$$
$$= \frac{4u^4 \sin^2\alpha\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{16g^2}$$
$$= u^2 \times \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} \times \frac{1}{2g}$$
$$= \frac{u^2 x}{2g} = \text{R.H.S } \textbf{(Showed)}$$

HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

সরণ, বেগ, ত্বরণ ও বল নির্ণয় সংক্রান্ত

১। স্থিরাবস্থা হতে একটি বস্তু $3\ ms^{-2}$ সমত্বরণে যাত্রা করলে 10 s এ কত মিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে? [কু. বো. ২৩]

ⓚ 30 ⓛ 105
ⓜ 150 ⓝ 300

উত্তর: ⓜ 150

ব্যাখ্যা: $S = ut + \frac{1}{2}ft^2$
$= \frac{1}{2} \times 3 \times 100$
$= 150\ m$

এখানে,
$u = 0\ ms^{-1}$
$f = 3\ ms^{-2}$
$t = 10\ s$

২। একটি চলন্ত ট্রেনকে ব্রেক করে 10 সেকেন্ডে থামিয়ে দেওয়া হলো। ট্রেনটির গড় মন্দন $70\ m/sec^2$ হলে, এর গতিবেগ কত ছিল?

ⓚ 1000 m/sec ⓛ 800 m/sec
ⓜ 700 m/sec ⓝ 500 m/sec

উত্তর: ⓜ 700 m/sec

ব্যাখ্যা: $v = u + at$
$\Rightarrow 0 = u - 70 \times 10$
$\therefore u = 700\ m/sec$

৩। একটি কণা সমত্বরণে 5 মি./সে. আদিবেগে 50 সে.মি. পথ অতিক্রম করে 10 মি./সে. গতিবেগ অর্জন করে। কণাটির ত্বরণ কত? [সি. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ১৯]

ⓚ -75 মি/সে.^{2} ⓛ 75 মি/সে.^{2}
ⓜ $\frac{-3}{4}$ মি/সে.^{2} ⓝ $\frac{3}{4}$ মি/সে.^{2}

উত্তর: ⓛ 75 মি/সে.^{2}

ব্যাখ্যা: এখানে,
$u = 5ms^{-1}$
$s = 50 \times 10^{-2} m$
$v = 10ms^{-1}$
গাড়ীটির ত্বরণ a হলে,
$v^2 = u^2 + 2as$
$\Rightarrow a = \frac{v^2 - u^2}{2s} = \frac{10^2 - 5^2}{2 \times 50 \times 10^{-2}} = 75$ মি/সে.^{2}

৪। একটি গাড়ী 15 m/s আদিবেগে এবং $4\ m/s^2$ সমত্বরণে চলে 150 m দূরে অবস্থিত একটি খুঁটিকে অতিক্রম করে। খুঁটিটি অতিক্রমের মুহূর্তে গাড়িটির বেগ কত ছিল? [ঢা. বো. '১৭]

ⓚ 37.75 m/s ⓛ 30.75 m/s
ⓜ 29.75 m/s ⓝ 28.75 m/s

উত্তর: ⓚ 37.75 m/s

ব্যাখ্যা: $v^2 = u^2 + 2as$
$\therefore v = \sqrt{(15)^2 + 2 \times 4 \times 150}$
$= 37.75\ m/s$

এখানে,
$u = 15\ ms^{-1}$
$a = 4\ ms^{-2}$
$s = 150\ m$
$v = ?$

৫। একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে সমত্বরণে এক সরলরেখায় চলে এবং 2 সেকেন্ডে 1 মিটার দূরত্ব যাওয়ার পর সমবেগে চলতে থাকে। পরবর্তী 1 মিটার যেতে কণাটির কত সময় লাগবে?

ⓚ 1 সে. ⓛ 1.5 সে.
ⓜ 2 সে. ⓝ 3 সে.

উত্তর: ⓚ 1 সে.

ব্যাখ্যা: ধরি, 2 সেকেন্ড পরে বেগ = v, ত্বরণ a, সরণ s = 1 m

$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \times a \times 2^2 = 1 \therefore a = \frac{1}{2}\ m/sec^2$

$v = u + at = \frac{1}{2} \times 2 = 1\ m/sec$

আবার, $s' = vt'$; $s' = 1\ m$

$\therefore t' = \frac{s'}{v} = \frac{1}{1} = 1\ sec$

৬। সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা $3\ ms^{-2}$ সমত্বরণে 20 সেকেন্ড যাবৎ চলে গড়বেগ $50\ ms^{-1}$ প্রাপ্ত হলে তার আদিবেগ কোনটি? [দি. বো. ১৭]

ⓚ $40\ ms^{-1}$ ⓛ $35\ ms^{-1}$
ⓜ $20\ ms^{-1}$ ⓝ $10\ ms^{-1}$

উত্তর: ⓜ $20\ ms^{-1}$

ব্যাখ্যা: গড়বেগ, $\bar{v} = \frac{u + v}{2} = 50$

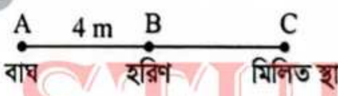
$\therefore u + v = 100$ ....(i)
আবার, $v = u + at$
$\therefore v - u = at = 20 \times 3 = 60$ ....(ii)
(i) − (ii), $2u = 100 - 60 \therefore u = 20\ ms^{-1}$

৭। একটি বাঘ একটি হরিণের 4 মিটার পিছনে থেকে ধরার জন্য স্থির অবস্থা থেকে $2\ m/sec^2$ সমত্বরনে দৌড়াতে শুরু করলো। হরিণটি 3 m/sec সমবেগে দৌড়ালে বাঘটি কখন হরিণটিকে ধরতে পারবে?

ⓚ 1 sec ⓛ 5 sec
ⓜ 2 sec ⓝ 4 sec

উত্তর: ⓝ 4 sec

ব্যাখ্যা:



$AC = AB + BC \Rightarrow 0 \times t + \frac{1}{2} \times 2t^2 = 4 + 3t \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$
$\therefore t = 4\ sec$

৮। দুটি ট্রেন একই রেলপথে বিপরীত দিক থেকে একই 60 m/sec গতিবেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। 1200 m দূরত্বে একে অপরকে দেখতে পেল। মন্দনের সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর যাতে সংঘর্ষ এড়ানো যেতে পারে। [য. বো. ১৯]

ⓚ $2\ m/sec^2$ ⓛ $3\ m/sec^2$
ⓜ $4\ m/sec^2$ ⓝ $5\ m/sec^2$

উত্তর: ⓛ $3\ m/sec^2$

ব্যাখ্যা: ধরি, মন্দন a এবং দুটি ট্রেনের অতিক্রান্ত দূরত্ব s_1 ও s_2;
শেষবেগ 0 ; u = 60 m/sec

$\therefore 0 = u^2 - 2as_1 \therefore s_1 = \frac{u^2}{2a}$; অনুরূপভাবে $s_2 = \frac{u^2}{2a}$

$\therefore s_1 + s_2 = \frac{u^2}{2a} + \frac{u^2}{2a}$

$\frac{u^2}{a} = 1200$ [সংঘর্ষ এড়ানোর জন্য $s_1 + s_2$ এর সর্বোচ্চ মান 1200 m]

$\therefore a = \frac{(60)^2}{1200} = 3\ ms^{-2}$

৯। গাছ থেকে 2 kg ভরের একটি নারকেল নিচের দিকে পড়ছে। বাতাসের বাধা 7.36 N হলে, নারকেলের ত্বরণ কত?

ক $6\ m/s^2$ খ $7\ m/s^2$
গ $8\ m/s^2$ ঘ $10\ m/s^2$

উত্তর: ক $6\ m/s^2$

ব্যাখ্যা: বাতাসের বাধা $R = 7.36\ N$

যেহেতু নিচে পড়ছে $\therefore mg > R$

$\therefore mg - R = ma$

$\Rightarrow 2 \times 9.8 - 7.36 = 2a$

$\therefore a = 6.12\ m/s^2$

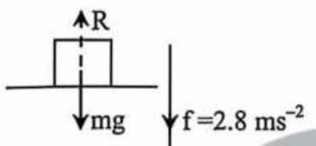
১০। একটি লিফট $2.8\ ms^{-2}$ ত্বরণে নিচে নামছে। লিফটের মধ্যে দাঁড়ানো একজন ব্যক্তির ভর 90 kg হলে, তিনি যে ওজন অনুভব করবেন–

ক 252 N খ 630 N
গ 882 N ঘ 1134 N

উত্তর: খ 630 N

ব্যাখ্যা: $mg - R = mf$

$\Rightarrow R = mg - mf$
$= m(g - f)$
$= 90(9.8 - 2.8)$
$= 90 \times 7 = 630\ N$



১১। কি পরিমাণ বল 33 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর প্রয়োগ করলে 5 sec এ তার বেগ 15 m/sec হবে? [রা. বো. ২২]

ক 11 N খ 33 N
গ 66 N ঘ 99 N

উত্তর: ঘ 99 N

ব্যাখ্যা: ত্বরণ $a = \frac{v-u}{t} = \frac{15-0}{5} = 3ms^{-2}$

$\therefore$ বল $f = ma = 33 \times 3 = 99\ N$

১২। যদি $s = t^3 + 3t^2 + 6$ হয়, তবে 2 sec পরে এর ত্বরণ কত? [রা. বো. ২২]

ক $6\ m/sec^2$ খ $12\ m/sec^2$
গ $18\ m/sec^2$ ঘ $24\ m/sec^2$

উত্তর: গ $18\ m/sec^2$

ব্যাখ্যা: সময়ের সাপেক্ষে সরণের অন্তরজ বেগ এবং বেগের অন্তরজ ত্বরণ

এখানে, $s = t^3 + 3t^2 + 6$

$\therefore v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 6t$

$\therefore a = \frac{dv}{dt} = 6t + 6$

$t = 2s$ হলে, $a = 6 \times 2 + 6 = 18\ m/sec^2$

নদী পারাপার সংক্রান্ত সমস্যাবলী

১৩। এক ব্যক্তি 450 মিটার চওড়া একটি স্রোতহীন নদী সাঁতার দিয়ে ঠিক সোজাসুজিভাবে 15 মিনিটে পার হলে সাতারুর বেগ কত কি.মি./ঘন্টা? [ঢা. বো. ২২]

ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{9}{5}$
গ 3 ঘ $\frac{9}{2}$

উত্তর: খ $\frac{9}{5}$

ব্যাখ্যা: নদীর প্রস্থ, $d = 450\ m = 0.45\ km$

সময় $t = 15\ min = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}\ h$

$\therefore$ বেগ $v = \frac{d}{t} = \frac{0.45}{\frac{1}{4}} = \frac{9}{5}\ kmh^{-1}$

১৪। একজন সাঁতারু স্রোতের বেগের দ্বিগুণ বেগে সাঁতার দিয়ে একটি নদীর যাত্রা বিন্দুর বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছাল। স্রোতের সাথে তার দিক কত ছিল? [চ. বো. ২৩]

ক 120° খ 90°
গ 45° ঘ 30°

উত্তর: ক 120°

ব্যাখ্যা: $\tan 90° = \frac{2u\sin\alpha}{u + 2u\cos\alpha} = \frac{1}{0}$

$\therefore u + 2u\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 120°$

Note: সরাসরি পার হলে, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{\text{ছোট বেগ}}{\text{বড় বেগ}}\right)$

১৫। স্থির পানিতে নৌকার গতিবেগ 13 km/hr, যদি স্রোতের বেগ 4 km/hr হয়, তাহলে স্রোতের দিকে নৌকাটির 68 km অতিক্রম করতে কত সময় লাগবে?

ক 2 hr খ 3 hr
গ 4 hr ঘ 5 hr

উত্তর: গ 4 hr

ব্যাখ্যা: অনুকূলে বেগ, $v = 13 + 4 = 17\ km/h$

সময়, $t = \frac{s}{v} = \frac{68}{17} = 4\ hr$

❖ নিচের উদ্দীপকটি পড় এবং এর আলোকে ১৬ ও ১৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

1 km প্রস্থের একটি নদীর স্রোতের বেগ 2 km/h. [ঢা. বো. ২৩]

১৬। সর্বনিম্ন সময়ে পার হতে একজন সাঁতারু 6 km/h বেগে কোন দিকে সাঁতার দিবে?

ক 15° খ 30°
গ 60° ঘ 90°

উত্তর: ঘ 90°

ব্যাখ্যা: নদী পারাপারের জন্য $t = \frac{d}{v\sin\alpha}$

t_{min} এর জন্য $v\sin\alpha$ অর্থাৎ, $\sin\alpha$ সর্বোচ্চ হতে হবে।

$\therefore \sin\alpha = 1$

$\therefore \alpha = 90°$

১৭। নদী পার হতে সাঁতারুর সর্বনিম্ন কত সময় লাগবে?

ক 10 min খ 15 min
গ 30 min ঘ 475 min

উত্তর: ক 10 min

ব্যাখ্যা: নদীর প্রস্থ, $d = 1\ km = 1000\ m$

সাঁতারুর বেগ, $v = 6\ km/h = \frac{6000}{60} = 100\ m/min$

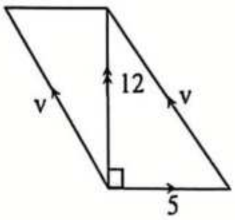
$\therefore$ সর্বনিম্ন সময়, $t = \frac{d}{v\sin\theta} = \frac{1000}{100\sin 90°} = 10\ min$

১৮। একটি নৌকা 12 মি./সে. বেগে সোজাসুজি একটি নদী পাড়ি দিতে পারে। যদি স্রোতের বেগ 5 মি./সে. হয়, তবে নৌকার বেগ কত? [ম. বো. ২৩]

ক) 7 মি./সে. খ) $\sqrt{119}$ মি./সে.
গ) 13 মি./সে. ঘ) 17 মি./সে.

উত্তর: গ) 13 মি./সে.

ব্যাখ্যা: নৌকার বেগ $v = \sqrt{12^2 + 5^2}$
$= 13$ মি./সে.



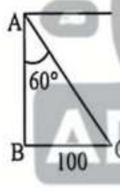
১৯। একটি নদীর প্রস্থ বরাবর দুই পাড়ে দু'টি খুঁটি A ও B রয়েছে। B খুঁটি হতে নদীর পাড় দিয়ে 100 মিটার দূরত্বে C খুঁটিতে যাওয়ার পর দেখা গেল A খুঁটিতে 60° কোণ উৎপন্ন হয়েছে। নদীটির প্রস্থ কত?

ক) $100\sqrt{3}$ মিটার খ) $\frac{100}{\sqrt{3}}$ মিটার
গ) 50 মিটার ঘ) $\frac{100}{\sqrt{2}}$ মিটার

উত্তর: খ) $\frac{100}{\sqrt{3}}$ মিটার

ব্যাখ্যা: $\tan 60° = \frac{100}{AB}$

$\therefore AB = \frac{100}{\tan 60°} = \frac{100}{\sqrt{3}}$ মিটার



২০। 2.45 km প্রস্থের নদীতে পানির স্রোতের $\frac{7}{3}$ গুণ বেগে ও স্রোতের সাথে লম্বভাবে একজন সাঁতারু সোজাসুজি নদী পাড়ি দেওয়ার জন্য যাত্রা শুরু করল। সে অপর তীরে যাত্রা-বিন্দুর ঠিক বিপরীত স্থান হতে কত দূরত্বে ভাটিতে পৌঁছাবে? [দি. বো. ১৭]

ক) 0.32 km খ) 1.05 km
গ) 1.50 km ঘ) 5.72 km

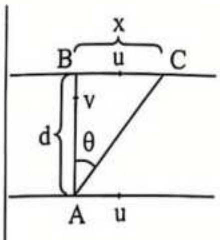
উত্তর: খ) 1.05 km

ব্যাখ্যা: ধরি, স্রোতের বেগ u

$\therefore$ সাতারুর বেগ $v = \frac{7}{3}u$

নদীর প্রস্থ $d = 2.45$ km $= AB$

AB বরাবর যাত্রা শুরু করে C বিন্দুতে পৌঁছায়।



চিত্র হতে, $\tan\theta = \frac{u}{v} = \frac{u}{\frac{7}{3}u} = \frac{3}{7}$

আবার, $\tan\theta = \frac{x}{d}$

$\therefore x = d\tan\theta = 2.45 \times \frac{3}{7} = 1.05$ km

গড়বেগ নির্ণয় সংক্রান্ত

২১। সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা 2 m/sec² সমত্বরণে 30 সেকেন্ড যাবৎ চলে। গড়বেগ 60 m/sec হলে তার আদিবেগ– [দি. বো. ২৩]

ক) 120 m/sec খ) 90 m/sec
গ) 45 m/sec ঘ) 30 m/sec

উত্তর: ঘ) 30 m/sec

ব্যাখ্যা: $s = \left(\frac{u+v}{2}\right)t = 60 \times 30 = 1800$m

আবার, $s = ut + \frac{1}{2}ft^2 \Rightarrow 1800 = 30u + \frac{1}{2} \times 2 \times 30^2$

$\therefore u = 30\ ms^{-1}$

Note: গড়বেগ $= \frac{u+v}{2}$

২২। একটি বস্তুকণা 35 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পরিধি বরাবর 10 সেকেন্ডে একটি ব্যাসের এক প্রান্ত থেকে অপর প্রান্তে যায়। বস্তুকণাটির গড়বেগ কত?

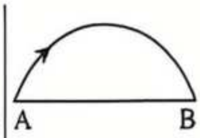
ক) 5 সে.মি./সে. খ) 7 সে.মি./সে.
গ) 9 সে.মি./সে. ঘ) 11 সে.মি./সে.

উত্তর: খ) 7 সে.মি./সে.

ব্যাখ্যা: বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 35 সে.মি.

ব্যাস = সরণ = AB = 2 × 35 = 70 সে.মি.

$\therefore$ গড় বেগ $= \frac{\text{মোট সরণ}}{\text{মোট সময়}} = \frac{70}{10} = 7$ সে.মি./ সে.



২৩। এক ব্যক্তি কোন স্থানে যাওয়ার সময় ঘণ্টায় 4 কি.মি. বেগে যায় এবং ফিরে আসার সময় ঘণ্টায় 5 কি.মি. বেগে ফিরে আসে। তার গড় গতিবেগ কত?

ক) 4.44 কি.মি/ঘণ্টা খ) 3.44 কি.মি/ঘণ্টা
গ) 0.23 কি.মি/ঘণ্টা ঘ) 1.23 কি.মি/ঘণ্টা

উত্তর: ক) 4.44 কি.মি/ঘণ্টা

ব্যাখ্যা: গড় বেগ $= \frac{\text{মোট সরণ}}{\text{মোট সময়}} = \frac{s+s}{t_1+t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{4}+\frac{s}{5}} = \frac{2 \times 4 \times 5}{5+4} = 4.44\ kmh^{-1}$

২৪। একজন সাইকেল চালক সোজাপথে 3 ঘণ্টায় 30 কি.মি. যাওয়ার পর প্রথম রাস্তার সাথে লম্বভাবে অপর একটি পথে 8 কি.মি./ঘণ্টা বেগে 5 ঘণ্টা চলল। তার গড়বেগ কত?

ক) $6\frac{1}{4}$ কি.মি./ঘণ্টা খ) $6\frac{1}{2}$ কি.মি./ঘণ্টা
গ) $6\frac{3}{4}$ কি.মি./ঘণ্টা ঘ) কোনোটিই নয়

উত্তর: ক) $6\frac{1}{4}$ কি.মি./ঘণ্টা

ব্যাখ্যা: AB = 30 কি.মি.

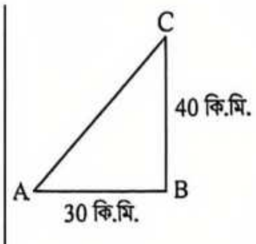
BC = 5 × 8 = 40 কি.মি.

$\therefore AC = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ কি.মি.

$\therefore$ গড় বেগ $= \frac{\text{মোট সরণ}}{\text{মোট সময়}}$

$= \frac{50}{5+3} = \frac{25}{4}$

$= 6\frac{1}{4}$ কি.মি./ঘণ্টা



n তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় সংক্রান্ত

২৫। $20 m/s$ বেগে ও $4m/s^2$ সমত্বরণে চলমান বস্তুকণার 5 তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব– [চ. বো. ২২]

ⓚ 36 m ⓛ 38 m
ⓜ 42 m ⓝ 150 m

উত্তর: ⓛ 38 m

ব্যাখ্যা: t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$s_{th} = u + \frac{1}{2}a(2t-1) = 20 + \frac{1}{2} \times 4(2 \times 5 - 1) \quad [t = 5]$$
$$= 38 \text{ m}$$

২৬। একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে $2 ms^{-2}$ সমত্বরণে ১ম সেকেন্ডে 1 m দূরত্ব অতিক্রম করে। পরবর্তী 1 সেকেন্ডে কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব কত? [চ. বো. ১৭]

ⓚ 1 ⓛ 2
ⓜ 3 ⓝ 4

উত্তর: ⓜ 3

ব্যাখ্যা: এখানে, $u = 0$; $f = 2 ms^{-2}$

পরবর্তী 1 সেকেন্ড অর্থ ২য় সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$s_{th} = u + \frac{1}{2}f(2t-1) = 0 + \frac{1}{2} \times 2\,(2 \times 2 - 1) = 3 \text{ m}$$

২৭। সরল পথে স্থিতাবস্থা হতে সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা 5 তম সেকেন্ডে 18 m পথ অতিক্রম করে। 10 সেকেন্ডে এর অতিক্রান্ত দূরত্ব– [ঢা. বো. ২৩]

ⓚ 100 m ⓛ 150 m
ⓜ 200 m ⓝ 250 m

উত্তর: ⓜ 200 m

ব্যাখ্যা: $s_{th} = \frac{1}{2}f(2t-1)$

5 তম সেকেন্ডে, $18 = \frac{1}{2}f(2 \times 5 - 1)$

$$\therefore f = \frac{36}{9} = 4 \text{ ms}^{-2}$$

10 সেকেন্ড পর অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = \frac{1}{2}ft^2 \quad [\because u = 0]$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 100 = 200 \text{ m}$$

২৮। স্থিরাবস্থা হতে সমত্বরণে চলমান একটি কণা 4 সেকেন্ডে 16 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। 5^{th} সেকেন্ডে কণাটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? [কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২; ঢা. বো. ১৯]

ⓚ 9 মিটার ⓛ 11 মিটার
ⓜ 18 মিটার ⓝ 22 মিটার

উত্তর: ⓚ 9 মিটার

ব্যাখ্যা: $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

$u = 0$
$t = 4$ s
$s = 16$

$$\Rightarrow 16 = 0 \times t + \frac{1}{2} \times f(4)^2$$
$$\Rightarrow 16 = 8f$$
$$\therefore f = 2 \text{ ms}^{-2}$$

t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$s_{th} = u + \frac{1}{2}f(2t-1)$$
$$s_{5th} = 0 + \frac{1}{2} \times 2\,(2 \times 5 - 1) \qquad [\because t = 5^{th} \text{ sec}]$$
$$= 9 \text{ m}$$

২৯। একটি ট্রেন 30 মি./সে. বেগে চলা অবস্থায় ব্রেক করে 5 মি./সে.^{2} মন্দন সৃষ্টি করা হলো। চতুর্থ সেকেন্ডে এটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? [দি. বো. ২২]

ⓚ 12.5 মি. ⓛ 14.5 মি.
ⓜ 16.5 মি. ⓝ 18.5 মি.

উত্তর: ⓚ 12.5 মি.

ব্যাখ্যা: t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$s_{th} = u + \frac{1}{2}a(2t-1)$$
$$= 30 + \frac{1}{2} \times (-5)(2 \times 4 - 1)$$
$$= 12.5 \text{ m}$$

এখানে,
$u = 30 \text{ ms}^{-1}$
$a = -5 \text{ ms}^{-2}$
$t_{th} = 4$ s

তলভেদ সংক্রান্ত

৩০। একটি বুলেট কোনো দেয়ালের ভিতর 3 ইঞ্চি ভেদ করতে এ বেগের $\frac{1}{3}$ অংশ হারায়। বুলেটটি দেয়ালের ভিতর আর কতদূর ঢুকবে? [দি. বো. ২৩]

ⓚ $\frac{3}{8}$ ইঞ্চি ⓛ $\frac{3}{4}$ ইঞ্চি
ⓜ $\frac{6}{5}$ ইঞ্চি ⓝ $\frac{12}{5}$ ইঞ্চি

উত্তর: ⓝ $\frac{12}{5}$ ইঞ্চি

ব্যাখ্যা: এখানে, $s = 3$ এবং $n = 3$

$$\therefore x = \frac{s(n-1)^2}{2n-1}$$
$$\Rightarrow x = \frac{3(3-1)^2}{2 \times 3 - 1}$$
$$= \frac{12}{5} \text{ ইঞ্চি}$$

৩১। একটি বুলেট কোনো দেয়ালের ভিতর 2 ইঞ্চি ঢুকবার পর বেগ অর্ধেক হারায়। বুলেটটি দেয়ালের ভিতর আরো কত ইঞ্চি ঢুকবে? [চ. বো. ২৩]

ⓚ 2 ⓛ $\frac{2}{3}$
ⓜ 1 ⓝ $\frac{1}{2}$

উত্তর: ⓛ $\frac{2}{3}$

ব্যাখ্যা: এখানে, $s = 2$ এবং $n = 2$

$$\therefore x = \frac{s(n-1)^2}{2n-1}$$
$$\Rightarrow x = \frac{2(2-1)^2}{2 \times 2 - 1}$$
$$= \frac{2}{3} \text{ ইঞ্চি}$$

Note: s পরিমান ভেদ করার পর বেগ $\frac{1}{n}$ অংশ হারালে আরও প্রবেশ করবে $x = \frac{s(n-1)^2}{2n-1}$

আপেক্ষিক বেগ সংক্রান্ত

৩২। **u ও v দুটি বেগ পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে এদের লব্ধি বেগ হবে–** [ব. বো. ১৯]

ⓚ $\sqrt{u+v}$ ⓛ $u+v$
ⓜ $u-v$ ⓝ $\sqrt{u-v}$

উত্তর: ⓜ $u-v$

ব্যাখ্যা: বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে মধ্যবর্তী কোণ 180°

$$\text{লব্ধি, } w = \sqrt{u^2+v^2+2uv\cos180^\circ} = \sqrt{u^2+v^2+2uv(-1)} = \sqrt{u^2+v^2-2uv} = \sqrt{(u-v)^2} = u-v$$

Note: একই দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি $u+v$ [$\because \cos0^\circ = 1$]
বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি $u-v$ [$u>v$] [$\cos180^\circ = -1$]
লম্বভাবে ক্রিয়া করলে লব্ধি $= \sqrt{u^2+v^2}$ [$\because \cos90^\circ = 0$]

৩৩। **স্রোতের বেগ u এবং নৌকার বেগ v, নৌকাটি স্রোতের বিপরীত দিকে চালালে স্রোতের সাপেক্ষে নৌকাটির আপেক্ষিক বেগ কত?** [সি. বো. ২৩]

ⓚ $u+v$ ⓛ $u-v$
ⓜ v ⓝ $v-u$

উত্তর: ⓚ $u+v$

ব্যাখ্যা: দুটি বেগ বিপরীতমুখী হলে তাদের মধ্যবর্তী আপেক্ষিক বেগ হবে বেগদ্বয়ের যোগফলের সমান।

$\therefore$ u এর সাপেক্ষে নৌকার আপেক্ষিক বেগ $= v-(-u) = v+u$

৩৪। **স্রোতের বেগ 2 m/s এবং নৌকার বেগ 8 m/s। নৌকাটি স্রোতের বিপরীত দিকে চালালে স্রোতের সাপেক্ষে নৌকার আপেক্ষিক বেগ কত?** [কু. বো. ২৩]

ⓚ 4 m/s ⓛ 6 m/s
ⓜ 10 m/s ⓝ 16 m/s

উত্তর: ⓜ 10 m/s

ব্যাখ্যা: স্রোতের সাপেক্ষে নৌকার আপেক্ষিক বেগ $= (8+2)\ ms^{-1} = 10\ ms^{-1}$

৩৫। পূর্ব $\xleftarrow{v = 10\ ms^{-1}}$ 0 $\xrightarrow{u = 15\ ms^{-1}}$ পশ্চিম

u এর সাপেক্ষে v এর আপেক্ষিক বেগ– [য. বো. ২৩]

ⓚ পশ্চিম দিকে $5\ ms^{-1}$ ⓛ পশ্চিম দিকে $25\ ms^{-1}$
ⓜ পূর্ব দিকে $5\ ms^{-1}$ ⓝ পূর্ব দিকে $25\ ms^{-1}$

উত্তর: ⓝ পূর্ব দিকে $25\ ms^{-1}$

ব্যাখ্যা: এখানে, $v = 10\ ms^{-1}$ পূর্ব দিকে
এবং $u = -15\ ms^{-1}$ পূর্ব দিকে

$\therefore$ আপেক্ষিক বেগ $= v-u = 10-(-15) = 25\ ms^{-1}$ পূর্ব দিকে

৩৬। **X এবং Y দুটি বাস সমান্তরাল দুটি রাস্তা বরাবর একই দিকে যথাক্রমে 20 km/h এবং 10 km/h বেগে চলছে। Y বাসের সাপেক্ষে X বাসের আপেক্ষিক বেগ কত?** [সি. বো. ১৯]

ⓚ 0 ⓛ 10
ⓜ 20 ⓝ 30

উত্তর: ⓛ 10

ব্যাখ্যা: যার সাপেক্ষে তার বেগ (–) মাইনাস করতে হবে,

$v_x = 20$ km/h
$v_y = 10$ km/h
$\therefore$ y এর সাপেক্ষে x এর বেগ,
$v_{xy} = v_x - v_y = 20-10 = 10\ kmh^{-1}$

উল্লম্বভাবে নিক্ষিপ্ত ও পড়ন্ত বস্তুর গতি সংক্রান্ত

৩৭। **একটি বস্তু মুক্তভাবে 4 সেকেন্ডে পড়ল। এটি শেষ 1 সেকেন্ডে কত ফুট পড়েছিল?** [য. বো. ২৩]

ⓚ 16 ⓛ 112
ⓜ 144 ⓝ 256

উত্তর: ⓛ 112

ব্যাখ্যা: $h_{4th} = \frac{1}{2}g(2t-1) = \frac{1}{2}\times32(2\times4-1) = 112$ ফুট

Note: $g = 9.8\ ms^{-2} = 32\ fts^{-2}$

৩৮। **9.8 মিটার/সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপিত কোনো বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতা কত?** [কু. বো. ২২]

ⓚ 2.0 মি. ⓛ 4.9 মি.
ⓜ 9.8 মি. ⓝ 19.6 মি.

উত্তর: ⓛ 4.9 মি.

ব্যাখ্যা: $H = \frac{u^2}{2g} = \frac{(9.8)^2}{2\times9.8} = 4.9$ মি.

৩৯। **ভূমির 150 মিটার উঁচু একটি স্থান হতে একটি ভারী বস্তুকে ছেড়ে দেওয়া হলো। ভূমিতে পতনের সময় বেগ কত হবে?** [ব. বো. ২৩]

ⓚ 29.4 মি./সে ⓛ 54.2 মি./সে
ⓜ 5.53 মি./সে ⓝ 14.2 মি./সে

উত্তর: ⓛ 54.2 মি./সে

ব্যাখ্যা: উচ্চতা, $h = 150$ m

$\therefore v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times9.8\times150} = 54.22\ ms^{-1}$

৪০। **স্থিরাবস্থায় 5 m উঁচু থেকে অবাধে খাড়া নিম্নমুখী পড়ন্ত বস্তুর ভূমিতে পতনকাল কত সেকেন্ড?** [কু. বো. ২৩]

ⓚ $\sqrt{\frac{5}{g}}$ ⓛ $\sqrt{\frac{5}{2g}}$
ⓜ $\sqrt{\frac{10}{g}}$ ⓝ $\sqrt{\frac{g}{5}}$

উত্তর: ⓜ $\sqrt{\frac{10}{g}}$

ব্যাখ্যা: পতনকাল = t

$h = \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\times5}{g}} = \sqrt{\frac{10}{g}}$ s

৪১। একটি স্তম্ভের শীর্ষ হতে u ms^{-1} বেগে খাড়া উপরে নিক্ষিপ্ত পাথর 10 সেকেন্ডে মাটিতে 58 ms^{-1} বেগে পড়ে। u এর মান হলো– [ঢা. বো. ২৩]

ⓚ 156 ms^{-1} ⓚ 48.2 ms^{-1}
ⓖ 40 ms^{-1} ⓖ 30 ms^{-1}

উত্তর: ⓖ 40 ms^{-1}

ব্যাখ্যা: $g = 9.8\ ms^{-2}$; $t = 10$ s

শেষ বেগ, $v = 58\ ms^{-1}$

আদি বেগ, u ms^{-1}

$v = -u + gt$

$\Rightarrow 58 = -u + 9.8 \times 10$

$\Rightarrow u = 98 - 58$

$\therefore u = 40\ ms^{-1}$

৪২। একটি বস্তু উপর থেকে মুক্তভাবে 5 সেকেন্ডে পড়ল। বস্তুটি শেষের 3 সেকেন্ডে কত ফুট পড়েছিল? [ম. বো. ২২]

ⓚ 336 ⓚ 256
ⓖ 192 ⓖ 128

উত্তর: ⓚ 336

ব্যাখ্যা: 5 s এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$h = ut + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 32 \times 5^2 = 400 \text{ ft}$$

$[u = 0;\ g = 32\ fts^{-2}]$

এবং ১ম 2s এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$h = \frac{1}{2} \times 32 \times 2^2 = 64 \text{ ft}$$

$\therefore$ শেষ 3s এ অতিক্রম করে $400 - 64 = 336$ ft

৪৩। 64 ft/sec বেগে ভূমি থেকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত কণার বিচরণকাল– [চ. বো. ২৩]

ⓚ 0.065 sec ⓚ 0.13 sec
ⓖ 2.00 sec ⓖ 4.00 sec

উত্তর: ⓖ 4.00 sec

ব্যাখ্যা: $T = \frac{2u}{g} = \frac{2 \times 64}{32} = 4$ s

৪৪। একটি পাথরকে ভূমি থেকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে এটি 5 সেকেন্ড পরে নিক্ষেপণ বিন্দুতে ফিরে আসে। পাথরটির ভূমিতে পতন বেগ কত? [দি. বো. ২২]

ⓚ 18.56 ms^{-1} ⓚ 24.5 ms^{-1}
ⓖ 25.57 ms^{-1} ⓖ 22.40 ms^{-1}

উত্তর: ⓚ 24.5 ms^{-1}

ব্যাখ্যা: যে বেগে নিক্ষেপ করা হবে পাথরটি সেই বেগেই পতিত হবে।

নিক্ষেপণ বেগ = পতন বেগ = u হলে,

বিচরণকাল, $T = \frac{2u}{g}$

$\therefore u = \frac{gT}{2} = \frac{9.8 \times 5}{2} = 24.5\ ms^{-1}$

৪৫। 20 m/sec বেগে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি বেলুন হতে একখণ্ড পাথর ফেলে দেয়া হল। পাথরটি 10 সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হয়। পাথরটি যখন ফেলা হয়েছিল, তখন বেলুনের উচ্চতা কত মিটার ছিল? [ঢা. বো. ২২]

ⓚ 780 ⓚ 690
ⓖ 580 ⓖ 290

উত্তর: ⓖ 290

ব্যাখ্যা: বেলুনের বেগ $u = 20\ ms^{-1}$ উপরের দিকে

$\therefore$ বেলুনের উচ্চতা হবে,

$h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$

$= -200 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 100$

$= 290$ m

[এখানে u এর সাথে (–) নেওয়া হয়েছে কারণ সরণ ও অভিকর্ষজ ত্বরণ উভয়ই নিচের দিকে এবং বেগের দিক উপরে।]

৪৬। u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু h উচ্চতায় আসার দুটি সময়ের পার্থক্য কত? [সি. বো. ২২]

ⓚ $\sqrt{u^2 - 2gh}$ ⓚ $\frac{2}{g}\sqrt{u^2 - 2gh}$
ⓖ $\frac{g}{2}\sqrt{u^2 - 2gh}$ ⓖ $g\sqrt{u^2 - 2gh}$

উত্তর: ⓚ $\frac{2}{g}\sqrt{u^2 - 2gh}$

ব্যাখ্যা: h উচ্চতায় আসতে t সময় লাগলে,

$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow gt^2 - 2ut + 2h = 0$ ..... (i)

$\Rightarrow t = \frac{2u \pm \sqrt{(-2u)^2 - 4 \times 2h \times g}}{2g}$

$\therefore t_1 = \frac{2u + \sqrt{4u^2 - 8gh}}{2g}$; $t_2 = \frac{2u - \sqrt{4u^2 - 8gh}}{2g}$

$\therefore \Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2\sqrt{4u^2 - 8gh}}{2g} = \frac{2}{g}\sqrt{u^2 - 2gh}$

৪৭। ভূমি হতে u আদিবেগে একটি বস্তু উল্লম্বভাবে উপরে উড্ডয়ন করলে বস্তুটি সর্বাধিক কত উপরে উঠবে? [ঢা. বো. ১৭]

ⓚ $\frac{u^2}{g}$ ⓚ $\frac{u^2}{2g}$
ⓖ $\frac{u}{g}$ ⓖ $\frac{2u}{g}$

উত্তর: ⓚ $\frac{u^2}{2g}$

ব্যাখ্যা: সর্বাধিক উচ্চতায় বস্তুর শেষ বেগ, $v = 0$

নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে,

$\Rightarrow 0 = u^2 - 2gH\ [\because v = 0]$

$\Rightarrow H = \frac{u^2}{2g}$

৪৮। u বেগে ভূমি হতে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণার– [চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ১৭]

(i) সর্বাধিক উচ্চতা $\frac{u^2}{g}$

(ii) সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছার সময় $\frac{u}{g}$

(iii) বিচরণকাল $\frac{2u}{g}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii   খ i ও iii
গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) সর্বাধিক উচ্চতায় বেগ শূন্য

$\therefore 0 = u^2 - 2gh$

$\therefore h = \frac{u^2}{2g}$ [(i) সঠিক নয়]

(ii) $v = u - gt$

$0 = u - gt$

$\therefore t = \frac{u}{g}$ = সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছার সময় [(ii) নং সঠিক]

(iii) বিচরণকাল $T = \frac{2u}{g}$ [(iii) নং সঠিক]

বেগ ও দূরত্ব সংক্রান্ত

৪৯। একটি কণার উপর $3ms^{-1}$, $4ms^{-1}$, এবং $5ms^{-1}$ বেগ তিনটি ক্রিয়া করায় কণাটি সাম্যাবস্থায় আছে। ক্ষুদ্রতর বেগ দুইটির মধ্যবর্তী কোণ কত? [য. বো. ২২]

ক 0°   খ 60°
গ 90°   ঘ 120°

উত্তর: গ 90°

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, $3ms^{-1}$, $4ms^{-1}$ এবং $5ms^{-1}$ বেগ তিনটি ক্রিয়া করায় কণাটি সাম্যাবস্থায় আছে। এক্ষেত্রে যেকোনো দুইটি বেগের লব্ধি তৃতীয়টির সমান হবে। ক্ষুদ্রতর বেগ ($3ms^{-1}$ ও $4ms^{-1}$) দুটির মধ্যবর্তী কোণ α হলে–

$\therefore 5^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \times 3 \times 4.\cos\alpha$

$\Rightarrow 25 = 9 + 16 + 24\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = 90°$

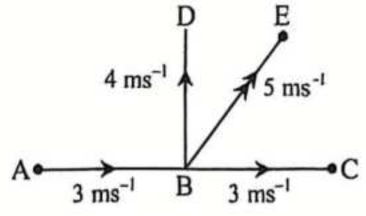
$\therefore \alpha = 90°$

৫০। একটি কণা একটি সরলরেখা বরাবর 3m/s গতিতে চলছে। 3sec পর কণাটির গতির সাথে লম্ব বরাবর 4m/s গতি সংযোজন করা হলো। এর 2sec পর কণাটি কর্তৃক শুরু থেকে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব–

ক 13 মিটার   খ 19 মিটার
গ 17 মিটার   ঘ 21 মিটার

উত্তর: খ 19 মিটার

ব্যাখ্যা: প্রথম 3s শুধু আনুভূমিক বেগ কাজ করে এবং পরবর্তী 2s আনুভূমিক বেগ ও উলম্ব বেগ উভয়ই কাজ করে।



দূরত্ব, $AB = 3 \times 3 = 9$ মিটার

B বিন্দুতে BC এবং BD বরাবর বেগ কাজ করছে।

$\therefore$ লব্ধি বেগ $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ ms^{-1}$ (BE বরাবর)

$\therefore$ BE বরাবর দূরত্ব $= 5 \times 2 = 10$ মিটার

$\therefore$ মোট দূরত্ব $= 9 + 10 = 19$ মিটার

৫১। একটি গাড়ি ঘণ্টায় 8 কি.মি. বেগে চলছে। গাড়ি থেকে ঘণ্টায় 16 কি.মি. বেগে একটি বস্তুকে কোনদিকে নিক্ষেপ করলে বস্তুর গতিপথ গাড়ির সাথে সমকোণ তৈরি করবে? [সি. বো. '২২]

ক 30°   খ 45°
গ 100°   ঘ 120°

উত্তর: ঘ 120°

ব্যাখ্যা: গাড়ির বেগ $v_c = 8\ kmh^{-1}$

বস্তুর বেগ $v_b = 16\ kmh^{-1}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{8}{16}\right) = 120°$

Note: u, v বেগদ্বয়ের (u < v) লব্ধি u বলের সাথে লম্ব বরাবর ক্রিয়াশীল হলে লব্ধি $w = \sqrt{v^2 - u^2}$

এবং বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)$

এভাবে সহজে মনে রাখতে পারো,

লব্ধি $w = \sqrt{(\text{বড় বেগ})^2 - (\text{ছোট বেগ})^2}$

মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{\text{ছোট বেগ}}{\text{বড় বেগ}}\right)$

৫২। একটি শূন্য কূপে একটি পাথর টুকরা ফেলার 4 sec পরে উহার তলদেশে পতনের শব্দ শোনা গেল। শব্দের বেগ 330 ms^{-1} হলে, কূপের গভীরতা কত? [দি. বো. ১৭]

ক 75.5 m   খ 76.5 m
গ 78.4 m   ঘ 79.4 m

উত্তর: সঠিক উত্তর নেই।

ব্যাখ্যা: ধরি, কুয়ার গভীরতা h ও শব্দের বেগ $v = 330\ ms^{-1}$

$\therefore$ পাথরের পতনকাল $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

শব্দ উৎপন্ন হবার t_2 সময় পর শোনা গেলে $t_2 = \frac{h}{v}$

$\therefore t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{2h}{9.8}} + \frac{h}{330} = 4$

$\therefore h = 70.27$ m

প্রক্ষেপকের গতি সংক্রান্ত

৫৩। বায়ুশূন্য স্থানে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথ একটি– [সি. বো. ১৯]

ⓚ পরাবৃত্ত ⓛ উপবৃত্ত
ⓜ অধিবৃত্ত ⓝ বৃত্ত

উত্তর: ⓚ পরাবৃত্ত

ব্যাখ্যা: গতিপথের সমীকরণ $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos\alpha}$

যা $y = ax^2 + bx$ আকারের; $\left[\text{যেখানে, } a = -\frac{g}{2u^2\cos\alpha}\right]$

যা পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

৫৪। একজন খেলোয়াড় পেনাল্টি শট করার জন্য 14 ms^{-1} বেগে একটি বল শট করলেন এবং তা 10 মিটার দূরে কোনো রকমে বারের উপর দিয়ে আনুভূমিকভাবে অতিক্রম করল। বল শট করার সময় প্রক্ষেপণ কোণ কত ছিল? [ব. বো. ২৩]

ⓚ 30° ⓛ 40°
ⓜ 45° ⓝ 60°

উত্তর: ⓜ 45°

ব্যাখ্যা: 10 m দূরে বারের উপর আনুভূমিকভাবে অতিক্রম করে।

$\therefore$ আনুভূমিক পাল্লা $= (10 + 10) = 20$ m

আনুভূমিক পাল্লা $= \frac{u^2\sin2\alpha}{g}$

প্রশ্নমতে,

$\frac{u^2\sin2\alpha}{g} = 20$

$\Rightarrow \sin2\alpha = \frac{20 \times 9.8}{14^2}$ $[\because g = 9.8\ ms^{-2}]$

$\Rightarrow \sin2\alpha = 1 = \sin90°$

$\therefore \alpha = 45°$ [$\because \alpha$ = প্রক্ষেপণ কোণ]

৫৫। কোনো প্রক্ষেপকের আদি নিক্ষেপণ বেগ দ্বিগুণ বৃদ্ধি করা হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ আনুভূমিক পাল্লা দ্বিগুণ হবে ⓛ আনুভূমিক পাল্লা তিনগুণ হবে
ⓜ আনুভূমিক পাল্লা চারগুণ হবে ⓝ কোনোটিই নয়

উত্তর: ⓝ কোনোটিই নয়

ব্যাখ্যা: আদি নিক্ষেপণ বেগ = u এবং নিক্ষেপণ কোণ = α হলে,

পাল্লা $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g}$

এখন দ্বিগুণ বৃদ্ধি করা হলে নিক্ষেপণ বেগ $= u + 2u = 3u$

আনুভূমিক পাল্লা $= \frac{(3u)^2\sin2\alpha}{g} = 9 \times \frac{u^2\sin2\alpha}{g} = 9R$

অর্থাৎ আনুভূমিক পাল্লা 9 গুণ হবে।

৫৬। 32 ft/sec আদিবেগে এবং ভূমির সাথে 30° কোণে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলো। ইহার ভ্রমণকাল কত? [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২৩; ব. বো. ২২; ঢা. বো. ২২; চ. বো. ২২; য. বো. ১৭]

ⓚ 0.5 sec ⓛ 1 sec
ⓜ 1.5 sec ⓝ 2 sec

উত্তর: ⓛ 1 sec

ব্যাখ্যা: এখানে, $g = 32\ ft/s^2$, $\alpha = 30°$ এবং $u = 32\ fts^{-1}$

$$T = \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2 \times 32\sin30°}{32} = 1 \text{ sec}$$

৫৭। u গতিবেগে ও আনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর আনুভূমিক পাল্লা– [দি. বো. ১৯]

ⓚ $(u\sin2\alpha)/g$ ⓛ $(u^2\sin2\alpha)/g$
ⓜ $(u\sin2\alpha)/2g$ ⓝ $(u^2\sin2\alpha)/2g$

উত্তর: ⓛ $(u^2\sin2\alpha)/g$

ব্যাখ্যা: আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g}$

৫৮। আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে এবং 9.8 মি./সে. বেগে একটি বস্তু প্রক্ষিপ্ত হল। কত সময় পরে বস্তুটি আনুভূমিকভাবে চলবে? [কু. বো. ২২]

ⓚ $\frac{1}{2}$ সে. ⓛ $\frac{1}{4}$ সে.
ⓜ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ সে. ⓝ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ সে.

উত্তর: ⓚ $\frac{1}{2}$ সে.

ব্যাখ্যা: এখানে $\theta = 30°$; $v_0 = 9.8\ ms^{-1}$

$\therefore t = \frac{v_0\sin\theta}{g} = \frac{9.8\sin30°}{9.8} = \frac{1}{2}$ s

Note: প্রাসের ক্ষেত্রে মোট বিচরণকালের অর্ধেক সময় পর বস্তুটি আনুভূমিকভা বে চলবে।

$t = \frac{T}{2} = \frac{v_0\sin\theta}{g}$

৫৯। 16 ft/sec আদিবেগে এবং ভূমির সাথে 45° কোণে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলে আনুভূমিক পাল্লা হবে ($g = 32\ ft/sec^2$) [ম. বো. ২৩]

ⓚ 16 ft ⓛ 8 ft
ⓜ $4\sqrt{2}$ ft ⓝ 1 ft

উত্তর: ⓛ 8 ft

ব্যাখ্যা: এখানে, u = 16 ft/sec

$\alpha = 45°$

$g = 32\ ft/sec^2$

$$R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g} = \frac{(16)^2\sin(2 \times 45°)}{32} = 8 \text{ ft}$$

৬০। 19.6 মিটার/সে. আদিবেগে ভূমির সাথে 45° কোণে একটি বস্তুকণা শূন্যে নিক্ষেপ করা হলে সর্বাধিক কত মিটার উচ্চতায় উঠবে? [ব. বো. ২২]

ⓚ 9.8 মিটার ⓛ 11.025 মিটার
ⓜ 10 মিটার ⓝ 12 মিটার

উত্তর: ⓚ 9.8 মিটার

ব্যাখ্যা: $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{(19.6)^2 \times \frac{1}{2}}{2 \times 9.8} = 9.8$ মিটার

৬১। কোনো বস্তুর নিক্ষেপণ বেগ 240 ft/s এবং নিক্ষেপণ কোণ 30° হলে, 3s এ উহার উচ্চতা কত?

ⓚ 180 ft ⓛ 240 ft
ⓜ 216 ft ⓝ 300 ft

উত্তর: ⓜ 216 ft

ব্যাখ্যা: এখানে, $u = 240$ ft/s, $\alpha = 30°$,

$t = 3s$, $g = 32\ ft/sec^2$

$$h = u\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 = 240 \times \frac{1}{2} \times 3 - \frac{1}{2} \times 32 \times (3)^2 = 216 \text{ ft}$$

৬২। 2m/s বেগে ও 30° কোণে ভূমি হতে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের সর্বাধিক উচ্চতা− [চ. বো. ১৯]

ⓚ $\frac{1}{2g}$ ⓛ $\frac{1}{g}$
ⓖ $\frac{2}{g}$ ⓘ $\frac{2\sqrt{3}}{g}$

উত্তর: ⓚ $\frac{1}{2g}$

ব্যাখ্যা: $H = \frac{(u\sin\alpha)^2}{2g} = \frac{(2\times\sin30°)^2}{2g} = \frac{1}{2g}$

৬৩। একটি প্রক্ষেপকের সর্বোচ্চ পাল্লা 200 m। ইহা সর্বোচ্চ কত উচ্চতা অর্জন করে?

ⓚ 25 m ⓛ 50 m
ⓖ 75 m ⓘ 100 m

উত্তর: ⓛ 50 m

ব্যাখ্যা: সর্বোচ্চ পাল্লার জন্য $\alpha = 45°$; $R = 200$

$$\tan\alpha = \frac{4H}{R}$$

$$\therefore H = \frac{R\tan\alpha}{4} = \frac{200\tan45°}{4} = 50\text{ m}$$

Note: $\tan\alpha = \frac{4H}{R}$ এবং $\tan\alpha = \frac{gT^2}{2R}$

এখানে, H = প্রাসের সর্বোচ্চ উচ্চতা
R = প্রাসের আনুভূমিক পাল্লা
T = প্রাসের বিচরণকাল

৬৪। u আদিবেগে ভূমির সাথে 60° কোণে একটি বস্তুকণা নিক্ষেপ করা হলে t সময় পর তা ভূমিতে ফিরে আসে। আনুভূমিক পাল্লা কত? [ব. বো. ১৭]

ⓚ $\frac{u^2}{2g}$ ⓛ $\frac{u^2}{\sqrt{2}g}$
ⓖ $\frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$ ⓘ $\frac{2u^2}{\sqrt{3}g}$

উত্তর: ⓖ $\frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$

ব্যাখ্যা: আনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g} = \frac{u^2\sin120°}{g}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{u^2}{g} = \frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$$

৬৫। আনুভূমিকের সাথে α কোণে u বেগে প্রক্ষিপ্ত কণার আনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g}$। প্রক্ষেপণ কোণ α কত হলে R বৃহত্তম হবে? [ব. বো. ১৯]

ⓚ 30° ⓛ 45°
ⓖ 60° ⓘ 90°

উত্তর: ⓛ 45°

ব্যাখ্যা: আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g}$

R সর্বাধিক হবে যখন $\sin2\alpha$ বৃহত্তম হবে

∴ বৃহত্তম $\sin2\alpha = 1$

$$\Rightarrow 2\alpha = \sin^{-1}1 = 90°$$

$$\therefore \alpha = 45°$$

৬৬। প্রক্ষেপকের ভ্রমণকাল T, আনুভূমিক পাল্লা T এবং আনুভূমিকের সঙ্গে প্রক্ষেপণ কোণ α হলে, $\frac{T^2}{R} = ?$

ⓚ $\frac{g}{2}\tan\alpha$ ⓛ $\frac{g}{2}\cot\alpha$
ⓖ $\frac{2}{g}\tan\alpha$ ⓘ $\frac{2}{g}\cot\alpha$

উত্তর: ⓖ $\frac{2}{g}\tan\alpha$

ব্যাখ্যা: $\tan\alpha = \frac{gT^2}{2R}$

$$\therefore \frac{T^2}{R} = \frac{2}{g}\tan\alpha$$

৬৭। ভূমি হতে 3 মি./সে. আদিবেগে একটি বস্তু উলম্বভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে বস্তুটি সর্বাধিক কত মিটার উপরের উঠবে? [য. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ১৯; সকল বো. ১৮; ঢা. বো. ১৭]

ⓚ $\frac{6}{g}$ ⓛ $\frac{3}{g}$
ⓖ $\frac{9}{2g}$ ⓘ $\frac{9}{g}$

উত্তর: ⓖ $\frac{9}{2g}$

ব্যাখ্যা: এখানে, $u = 3\text{ ms}^{-1}$; $\alpha = 90°$

$$H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{3^2\times\sin^2 90°}{2g} = \frac{9}{2g}$$

৬৮। একটি প্রক্ষেপকের বৃহত্তম পাল্লা আনুভূমিক পাল্লার দ্বিগুণ হলে প্রক্ষেপ কোণ কত? [ব. বো. ২৩]

ⓚ 30° অথবা 150° ⓛ 15° অথবা 75°
ⓖ 15° অথবা 60° ⓘ 30° অথবা 75°

উত্তর: ⓛ 15° অথবা 75°

ব্যাখ্যা: বৃহত্তম পাল্লা $= \frac{u^2}{g}$

আনুভূমিক পাল্লা $= \frac{u^2\sin2\alpha}{g}$

প্রশ্নমতে, $\frac{u^2}{g} = 2\frac{u^2\sin2\alpha}{g}$

$$\Rightarrow 2\sin2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \sin2\alpha = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \sin2\alpha = \sin30°$	$\sin2\alpha = \sin150°$
$\Rightarrow 2\alpha = 30°$	$\Rightarrow 2\alpha = 150°$
$\therefore \alpha = 15°$	$\therefore \alpha = 75°$

Note: প্রাসের ক্ষেত্রে একই আনুভূমিক পাল্লার জন্য নিক্ষেপণ কোণের দুটি মান পাওয়া যায়। মানগুলো যথাক্রমে α ও 90° − α

৬৯। একজন ক্রিকেটার একটি ক্রিকেট বলকে আনুভূমিকের সাথে **60°** কোণে **20** মিটার/সে. বেগে আঘাত করলে বলটির বিচরণকাল কত? [ব. বো. ২২]

ক) $\frac{10}{g}$ সে. খ) $\frac{10\sqrt{3}}{g}$ সে.
গ) $\frac{20}{g}$ সে. ঘ) $\frac{20\sqrt{3}}{g}$ সে.

উত্তর: ঘ) $\frac{20\sqrt{3}}{g}$ সে.

ব্যাখ্যা: $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

$= \frac{2 \times 20 \times \sin 60°}{g}$

$= \frac{20\sqrt{3}}{g}$ সে.

৭০। ভূমির সাথে **60°** কোণে এবং **9.8 ms^{-1}** বেগে একটি ক্রিকেট বল নিক্ষিপ্ত হলে, ইহা সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠবে? [কু. বো. ১৯]

ক) 1.225 মিটার খ) 3.675 মিটার
গ) 4.239 মিটার ঘ) 7.350 মিটার

উত্তর: খ) 3.675 মিটার

ব্যাখ্যা: এখানে, নিক্ষেপণ কোণ $\theta = 60°$ ও আদিবেগ $u = 9.8\ ms^{-1}$

$\therefore$ সর্বাধিক উচ্চতা $H = \frac{(u\sin\theta)^2}{2g}$

$= \frac{(9.8 \times \sin 60°)^2}{2 \times 9.8}$

$= 3.675$ m

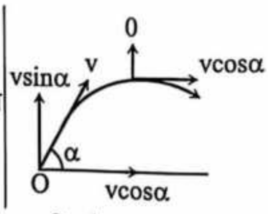
৭১। $\frac{u}{\sqrt{3}}$ বেগে **30°** কোণে প্রক্ষিপ্ত কণার সর্বোচ্চ উচ্চতায় বেগ কত একক/সে.? [সম্মিলিত. বো. ১৮]

ক) $\frac{2u}{\sqrt{3}}$ খ) $\frac{u}{\sqrt{3}}$
গ) $\frac{u}{2}$ ঘ) $\frac{u}{2\sqrt{2}}$

উত্তর: গ) $\frac{u}{2}$

ব্যাখ্যা: এখানে, $v = \frac{u}{\sqrt{3}}$; $\alpha = 30°$

সর্বাধিক উচ্চতায় বেগের উলম্ব উপাংশ = 0



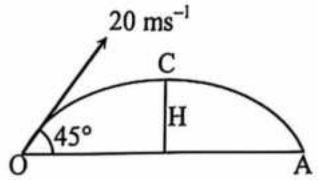
$\therefore$ সর্বাধিক উচ্চতায় বেগ = আনুভূমিক উপাংশ

$= v\cos\alpha$

$= \frac{u}{\sqrt{3}}\cos 30°$

$= \frac{u}{2}$ একক

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ৭২ ও ৭৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



O বিন্দু হতে একটি বলকে তীর্যকভবে ছুঁড়ে দেওয়া হলো। বলটির গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দু **C** এবং বলটি **T** সময় পরে নিক্ষেপণ বিন্দুর সমতলে **A** বিন্দুতে ফিরে আসে। [সি. বো. ২৩]

৭২। বলটির সর্বাধিক আনুভূমিক পাল্লা কত মিটার?

ক) 56.4 খ) 48.5
গ) 45.4 ঘ) 40.8

উত্তর: ঘ) 40.8

ব্যাখ্যা: $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$

$= \frac{20^2 \times \sin 90°}{9.8}$

$= 40.82$ m

৭৩। **C** বিন্দুতে পৌঁছাতে কত সেকেন্ড সময় লাগবে?

ক) 4.5 খ) 3.6
গ) 2.8 ঘ) 1.4

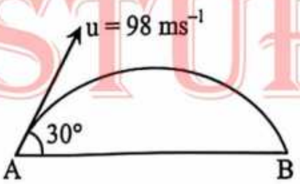
উত্তর: ঘ) 1.4

ব্যাখ্যা: $\frac{T}{2} = t = \frac{u\sin\alpha}{g}$

$= \frac{20 \times \sin 45°}{9.8}$

$= 1.4$ s

❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ৭৪ ও ৭৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও: [রা. বো. ২৩]



৭৪। প্রক্ষেপকটির বিচরণকাল কত?

ক) 5s খ) 10s
গ) $5\sqrt{3}$s ঘ) $10\sqrt{3}$s

উত্তর: খ) 10s

ব্যাখ্যা: $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2 \times 98 \times \sin 30°}{9.8} = 10$ sec

৭৫। **AB** এর দৈর্ঘ্য কত?

ক) 122.5 m খ) 240 m
গ) 490 m ঘ) $490\sqrt{3}$ m

উত্তর: ঘ) $490\sqrt{3}$ m

ব্যাখ্যা: পাল্লা $AB = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{98^2 \times \sin 60°}{9.8} = 490\sqrt{3}$ m

৭৬। $9.8\ ms^{-1}$ আদিবেগে আনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণে প্রক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপকের– [ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৯; য. বো. ১৯]

(i) সর্বাধিক উচ্চতা 1.22 m
(ii) বিচরণকাল 1s
(iii) আনুভূমিক পাল্লা $4.9\sqrt{3}$ m

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $u = 9.8\ ms^{-1}$; $\theta = 30°$

(i) সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{(9.8)^2 (\sin 30°)^2}{2 \times 9.8} = \frac{9.8}{8} = 1.22$ m

(ii) বিচরণকাল, $T = \frac{2u \sin\alpha}{g} = \frac{2 \times 9.8 \times \sin 30°}{9.8} = 1$ s

(iii) আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(9.8)^2 \sin 60°}{9.8} = 4.9\sqrt{3}$ m

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ৭৭ ও ৭৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
u আদিবেগে ভূমির সাথে α কোণে একটি বস্তুকণা নিক্ষেপ করা হলো। [দি. বো. ২৩]

৭৭। ভূমির সাথে কত কোণে নিক্ষেপ করলে বস্তুটি সর্বাধিক দূরত্বে পড়বে?

ক 45° খ 60°
গ 90° ঘ 120°

উত্তর: ক 45°

ব্যাখ্যা: আনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$

R সর্বাধিক হবে যখন $\sin 2\alpha$ বৃহত্তম হবে।

$\therefore \sin 2\alpha = 1$
$\Rightarrow 2\alpha = \sin^{-1}1 = 90°$
$\therefore \alpha = 45°$

৭৮। $\alpha = 60°$ এবং u = 16 m/sec হলে, সর্বোচ্চ উচ্চতা–

ক $\frac{48}{g}$ খ $\frac{96}{g}$
গ $\frac{192}{g}$ ঘ $\frac{192\sqrt{3}}{g}$

উত্তর: খ $\frac{96}{g}$

ব্যাখ্যা: $H = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{(16)^2 (\sin 60°)^2}{2g} = \frac{256 \times \frac{3}{4}}{2g} = \frac{96}{g}$ m

৭৯। প্রক্ষেপক কোণ 45° হলে– [চ. বো. ১৯]

(i) $R = \frac{u^2}{g}$
(ii) $H = \frac{u^2}{4g}$
(iii) $T = \frac{u}{g}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: এখানে $\alpha = 45°$

(i) $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{u^2\sin(2 \times 45°)}{g} = \frac{u^2\sin 90°}{g} = \frac{u^2}{g}$

(ii) $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{u^2\sin^2 45°}{2g} = \frac{u^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2g} = \frac{u^2}{4g}$

(iii) $T = \frac{2u \sin\alpha}{g} = \frac{2u\sin 45°}{g} = \frac{2u \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{g} = \frac{\sqrt{2}u}{g}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৮০ ও ৮১ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
একজন ক্রিকেটার একটি ক্রিকেট বলকে আনুভূমিকের সাথে 60° কোণে 20 মি./সে. বেগে আঘাত করল।

৮০। বলটির বিচরণকাল কত? [য. বো. ১৭]

ক $\frac{10}{g}$ সে. খ $\frac{10\sqrt{3}}{g}$ সে.
গ $\frac{20}{g}$ সে. ঘ $\frac{20\sqrt{3}}{g}$ সে.

উত্তর: ঘ $\frac{20\sqrt{3}}{g}$ সে.

ব্যাখ্যা: এখানে, $\alpha = 60°$ এবং $u = 20ms^{-1}$

বিচরণকাল $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2 \times 20 \times \sin 60°}{g}$

$= \frac{2 \times 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{g}$

$= \frac{20\sqrt{3}}{g}$ সে.

৮১। বলটি ভূমি হতে সর্বোচ্চ কত উচ্চতায় উঠবে? [য. বো. ১৭]

ক $\frac{50}{g}$ মি. খ $\frac{100}{g}$ মি.
গ $\frac{150}{g}$ মি. ঘ $\frac{300}{g}$ মি.

উত্তর: গ $\frac{150}{g}$ মি.

ব্যাখ্যা: $\alpha = 60°$; $u = 20\ ms^{-1}$

সর্বাধিক উচ্চতা $H = \frac{(u\sin\alpha)^2}{2g} = \frac{(20\sin 60°)^2}{2 \times g} = \frac{150}{g}$ মি.

৮২। ভূমি হতে u আদিবেগে একটি বস্তু উলম্বভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে– [দি. বো. ২৩]

(i) বৃহত্তম উচ্চতা $= \frac{u^2}{2g}$
(ii) বিচরণকাল $= \frac{u}{g}$
(iii) h উচ্চতায় গমনকাল $= \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 2gh}}{g}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

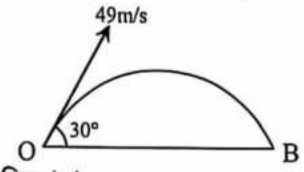
উত্তর: গ i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) বৃহত্তম উচ্চতা, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{u^2}{2g}$ [$\alpha = 90°$]

(ii) বিচরণকাল, $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2u}{g}$ [$\alpha = 90°$]

(iii) h উচ্চতায় গমনকাল $= \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 2gh}}{g}$ [সূত্র]

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৮৩ ও ৮৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৮৩। প্রক্ষেপকটির বিচরণকাল– [ঢা. বো. ২২; চ. বো. ২২]

ক $\frac{5}{2}$ সেকেন্ড   খ 5 সেকেন্ড

গ 10 সেকেন্ড   ঘ $\frac{245}{8}$ সেকেন্ড

উত্তর: খ 5 সেকেন্ড

ব্যাখ্যা: এখানে, $\theta = 30°$; $u = 49ms^{-1}$

বিচরণকাল $T = \frac{2u\sin\theta}{g} = \frac{2 \times 49 \times \sin 30°}{9.8} = 5s$

৮৪। প্রক্ষেপকটির সর্বাধিক উচ্চতা– [ঢা. বো. ২২; চ. বো. ২২]

ক $\frac{245}{8}$ মিটার   খ $\frac{245}{4}$ মিটার

গ 5 মিটার   ঘ 10 মিটার

উত্তর: ক $\frac{245}{8}$ মিটার

ব্যাখ্যা: এখানে, $\theta = 30°$; $u = 49ms^{-1}$

সর্বাধিক উচ্চতা $H = \frac{(u\sin\theta)^2}{2g} = \frac{(49 \times \sin 30°)^2}{2 \times 9.8}$

$= \frac{245}{8}$ মিটার

৮৫। আনুভূমিকের সাথে **A** কোণে এবং **B** বেগে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর– [কু. বো. ২২]

(i) সর্বোচ্চ উচ্চতা $= \frac{B^2\sin^2A}{2g}$

(ii) সর্বোচ্চ উচ্চতায় গমনকাল $= \frac{2B\sin A}{g}$

(iii) আনুভূমিক পাল্লা $= \frac{B^2\sin 2A}{g}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii   খ i ও iii

গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) সর্বাধিক উচ্চতা $= \frac{(B\sin A)^2}{2g}$ ∴ সঠিক

(ii) সর্বাধিক উচ্চতায় গমনকাল $= \frac{B\sin A}{g}$ ∴ (ii) সঠিক নয়

(iii) আনুভূমিক পাল্লা $= \frac{B^2\sin 2A}{g}$ সঠিক

৮৬। একটি কণা **10 m/sec** বেগে এবং **30°** কোণে প্রক্ষিপ্ত হলে– [য. বো. ১৯]

(i) সর্বাধিক উচ্চতা $\frac{25}{2g}$ **m**

(ii) উড্ডয়নকাল $\frac{10}{g}$ **sec**

(iii) আনুভূমিক পাল্লা $\frac{50}{g}$ **m**

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii   খ i ও iii

গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{25}{2g}$ m

(ii) $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{10}{g}$ s

(iii) $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{50\sqrt{3}}{g}$ m

৮৭। **u** আদিবেগে আনুভূমিকের সাথে α কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত হয়ে **t** সময় পরে কোনো প্রক্ষেপক **P(x, y)**বিন্দুতে পৌঁছালে– [সি. বো. ২৩]

(i) আনুভূমিক দূরত্ব, $x = u\cos\alpha.t$

(ii) উলম্ব দূরত্ব, $y = u\sin\alpha.t + \frac{1}{2}gt^2$

(iii) গতির সমীকরণ, $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{R}{x}\right)$

যেখানে **R** = আনুভূমিক পাল্লা

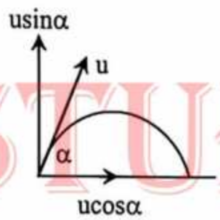
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii   খ i ও iii

গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii

উত্তর: সঠিক উত্তর নেই।

ব্যাখ্যা: আনুভূমিক দূরত্ব, $x = u\cos\alpha\ t$



আনুভূমিক দূরত্ব, $x = u\cos\alpha \times t$

উলম্ব দূরত্ব, $y = u\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$

গতির সমীকরণ, $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

৮৮। **u** গতিবেগে আনুভূমিকের সাথে α কোণে একটি বস্তুকণা প্রক্ষিপ্ত হলে– [সি. বো. ২২]

(i) বায়ুশূন্য স্থানে বস্তুকণাটির গতিপথ একটি পরাবৃত্ত

(ii) আনুভূমিক পাল্লা **R** বৃহত্তম হলে, $R = \frac{u^2}{g}$

(iii) বস্তুকণাটির বিচরণকাল $= \frac{u\sin\alpha}{g}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii   খ i ও iii

গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) প্রাসের গতিপথ $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$

যা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ। [∴ সঠিক]

(ii) $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g}$ বৃহত্তম হবে যখন $\sin2\alpha = 1$

$\therefore R = \frac{u^2}{g}$ [সঠিক]

(iii) বিচরণকাল $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$ [সঠিক নয়]

৮৯। **9.8 মিটার/সেকেন্ড আদি বেগে এবং আনুভূমিকের সহিত 30° কোণে একটি বস্তুকে শূন্যে নিক্ষেপ করা হলো।** [ব. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২]

(i) বস্তুটির সর্বাধিক উচ্চতা = 2.45 মিটার
(ii) সর্বাধিক আনুভূমিক পাল্লা = 9.8 মিটার
(iii) বিচরণকাল = 1 সেকেন্ড

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii　　খ i ও iii
গ ii ও iii　　ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ ii ও iii

ব্যাখ্যা: $u = 9.8$ m/s, $\alpha = 30°$

(i) সর্বাধিক উচ্চতা $= \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{(9.8)^2 \times (\sin30°)^2}{2 \times 9.8} = 1.23\text{m}$

(ii) সর্বাধিক আনুভূমিক পাল্লা $= \frac{u^2}{g} = \frac{(9.8)^2}{9.8} = 9.8\text{m}$

(iii) বিচরণকাল $= \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2 \times 9.8 \times \sin30°}{9.8} = 1\text{ sec}$

৯০। **30 m/s বেগে একটি বস্তুকণা 30° কোণে প্রক্ষিপ্ত হল প্রক্ষেপকটির–** [রা. বো. ১৯]

(i) আনুভূমিক পাল্লা 79.53 m
(ii) সর্বাধিক উচ্চতা 11.48 m
(iii) বিচরণকাল 3.06 sec

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii　　খ ii ও iii
গ i ও iii　　ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $u = 30\text{ms}^{-1}$, $\alpha = 30°$

(i) $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g} = \frac{(30)^2 \times \sin60°}{9.8} = 79.53\text{m}$

(ii) $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{(30)^2 \times (\sin30°)^2}{2 \times 9.8} = 11.48\text{m}$

(iii) $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2 \times 30 \times \sin30°}{9.8} = 3.065\text{s}$

৯১। **কোনো প্রক্ষেপকের আনুভূমিক পাল্লা R, বিচরণকাল T, সর্বাধিক উচ্চতা H এবং প্রক্ষেপণ কোণ α হলে–** [দি. বো. ২২]

(i) $R = 4H\cot\alpha$
(ii) $H = \frac{gT^2}{8}$
(iii) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{gT^2}{2R}\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii　　খ i ও iii
গ ii ও iii　　ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $\tan\alpha = \frac{4H}{R}$ $\therefore R = \frac{4H}{\tan\alpha} = 4H\cot\alpha$

(ii) $\tan\alpha = \frac{gT^2}{2R}$ $\therefore R = \frac{gT^2}{2\tan\alpha}$

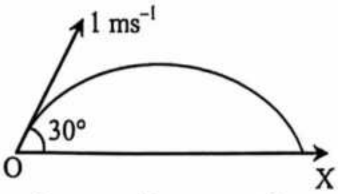
আবার, $R = \frac{4H}{\tan\alpha}$

$\therefore \frac{gT^2}{2\tan\alpha} = \frac{4H}{\tan\alpha}$

$\therefore H = \frac{gT^2}{8}$

(iii) $R = \frac{gT^2}{2\tan\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{gT^2}{2R}$ $\therefore \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{gT^2}{2R}\right)$

৯২। [কু. বো. ২৩]



O বিন্দু হতে প্রক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকটির–

(i) সর্বাধিক উচ্চতা $\frac{1}{8g}$ m
(ii) আনুভূমিক পাল্লা $\frac{\sqrt{3}}{2g}$ m
(iii) বিচরণকাল $\frac{1}{g}$ s

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii　　খ i ও iii
গ ii ও iii　　ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $u = 1\text{ ms}^{-1}$

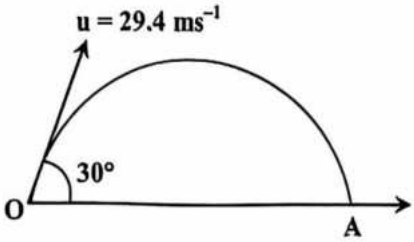
$\alpha = 30°$

(i) সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{1(\sin30°)^2}{2g} = \frac{1}{8g}\text{ m}$

(ii) আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g} = \frac{\sin60°}{g} = \frac{\sqrt{3}}{2g}\text{ m}$

(iii) বিচরণকাল, $t = \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2u\sin30°}{g} = \frac{1}{g}\text{ s}$

৯৩।



উদ্দীপকে OA = ? [ঢা. বো. ১৯]

ক 74 m　　খ 76.38 m
গ 78 m　　ঘ 78.4 m

উত্তর: খ 76.38 m

ব্যাখ্যা: এখানে, $\alpha = 30°$; $u = 29.4$

$OA = R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g} = \frac{(29.4)^2 \times \sin60°}{9.8} = 76.38\text{ m}$

নিজেকে যাচাই করো

১। একটি কণা একটি সরলরেখা বরাবর 3 m/s গতিতে চলছে। 3 sec পর কণাটির গতির সাথে লম্ব বরাবর 4 m/s গতি সংযোজন করা হলো। এর 2sec পর কণাটি কর্তৃক শুরু থেকে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব–

(ক) 13 মিটার (খ) 19 মিটার (গ) 17 মিটার (ঘ) 21 মিটার

২। আনুভূমিকের সাথে A কোণে এবং B বেগে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর–

(i) সর্বোচ্চ উচ্চতা $= \frac{B^2\sin^2A}{2g}$

(ii) সর্বোচ্চ উচ্চতায় গমনকাল $= \frac{2B\sin A}{g}$

(iii) আনুভূমিক পাল্লা $= \frac{B^2\sin 2A}{g}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৩। প্রক্ষেপক কোণ 45° হলে–

(i) $R = \frac{u^2}{g}$ (ii) $H = \frac{u^2}{4g}$ (iii) $T = \frac{u}{g}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৪। একটি লিফট 2.8 ms^{-2} ত্বরণে নিচে নামছে। লিফটের মধ্যে দাঁড়ানো একজন ব্যক্তির ভর 90 kg হলে, তিনি যে ওজন অনুভব করবেন–

(ক) 252 N (খ) 630 N (গ) 882 N (ঘ) 1134 N

৫। u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু h উচ্চতায় আসার দুটি সময়ের পার্থক্য কত?

(ক) $\sqrt{u^2-2gh}$ (খ) $\frac{2}{g}\sqrt{u^2-2gh}$ (গ) $\frac{g}{2}\sqrt{u^2-2gh}$ (ঘ) $g\sqrt{u^2-2gh}$

৬। ভূমি হতে u আদিবেগে একটি বস্তু উলম্বভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে–

(i) বৃহত্তম উচ্চতা $= \frac{u^2}{2g}$ (ii) বিচরণকাল $= \frac{u}{g}$

(iii) h উচ্চতায় গমনকাল $= \frac{u \pm \sqrt{u^2-2gh}}{g}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৭। 20 m/sec বেগে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি বেলুন হতে একখণ্ড পাথর ফেলে দেয়া হল। পাথরটি 10 সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হয়। পাথরটি যখন ফেলা হয়েছিল, তখন বেলুনের উচ্চতা কত মিটার ছিল?

(ক) 780 (খ) 690 (গ) 580 (ঘ) 290

❖ নিচের উদ্দীপকটি পড় এবং এর আলোকে ৮ ও ৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

1 km প্রস্থের একটি নদীর স্রোতের বেগ 2 km/h.

৮। সর্বনিম্ন সময়ে পার হতে একজন সাঁতারু 6 km/h বেগে কোন দিকে সাঁতার দিবে?

(ক) 15° (খ) 30° (গ) 60° (ঘ) 90°

৯। নদী পার হতে সাঁতারুর সর্বনিম্ন কত সময় লাগবে?

(ক) 10 min (খ) 15 min (গ) 30 min (ঘ) 475 min

১০। একটি কণার উপর $3ms^{-1}$, $4ms^{-1}$, এবং $5ms^{-1}$ বেগ তিনটি ক্রিয়া করায় কণাটি সাম্যাবস্থায় আছে। ক্ষুদ্রতর বেগ দুইটির মধ্যবর্তী কোণ কত?

(ক) 0° (খ) 60° (গ) 90° (ঘ) 120°

১১। একটি বস্তু উপর থেকে মুক্তভাবে 5 সেকেন্ডে পড়ল। বস্তুটি শেষের 3 সেকেন্ডে কত ফুট পড়েছিল?

(ক) 336 (খ) 256 (গ) 192 (ঘ) 128

১২। কোনো প্রক্ষেপকের আনুভূমিক পাল্লা R, বিচরণকাল T, সর্বাধিক উচ্চতা H এবং প্রক্ষেপণ কোণ α হলে–

(i) $R = 4H\cot\alpha$ (ii) $H = \frac{gT^2}{8}$ (iii) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{gT^2}{2R}\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১৩। স্রোতের বেগ u এবং নৌকার বেগ v, নৌকাটি স্রোতের বিপরীত দিকে চালালে স্রোতের সাপেক্ষে নৌকাটির আপেক্ষিক বেগ কত?

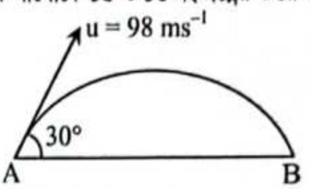
(ক) u + v (খ) u − v (গ) v (ঘ) v − u

১৪। একজন সাইকেল চালক সোজাপথে 3 ঘণ্টায় 30 কি.মি. যাওয়ার পর প্রথম রাস্তার সাথে লম্বভাবে অপর একটি পথে 8 কি.মি./ঘণ্টা বেগে 5 ঘণ্টা চলল। তার গড়বেগ কত?

(ক) $6\frac{1}{4}$ কি.মি./ঘণ্টা (খ) $6\frac{1}{2}$ কি.মি./ঘণ্টা

(গ) $6\frac{3}{4}$ কি.মি./ঘণ্টা (ঘ) কোনোটিই নয়

❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ১৫ ও ১৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



১৫। প্রক্ষেপকটির বিচরণকাল কত?

(ক) 5s (খ) 10s (গ) $5\sqrt{3}$s (ঘ) $10\sqrt{3}$s

১৬। AB এর দৈর্ঘ্য কত?

(ক) 122.5 m (খ) 240 m (গ) 490 m (ঘ) $490\sqrt{3}$ m

১৭। একটি বুলেট কোনো দেয়ালের ভিতর 3 ইঞ্চি ভেদ করতে এ বেগের $\frac{1}{3}$ অংশ হারায়। বুলেটটি দেয়ালের ভিতর আর কতদূর ঢুকবে?

(ক) $\frac{3}{8}$ ইঞ্চি (খ) $\frac{3}{4}$ ইঞ্চি (গ) $\frac{6}{5}$ ইঞ্চি (ঘ) $\frac{12}{5}$ ইঞ্চি

১৮। একটি প্রক্ষেপকের সর্বোচ্চ পাল্লা 200 m। ইহা সর্বোচ্চ কত উচ্চতা অর্জন করে?

(ক) 25 m (খ) 50 m (গ) 75 m (ঘ) 100 m

১৯। 2.45 km প্রস্থের নদীতে পানির স্রোতের $\frac{7}{3}$ গুণ বেগে ও স্রোতের সাথে লম্বভাবে একজন সাঁতারু সোজাসুজি নদী পাড়ি দেওয়ার জন্য যাত্রা শুরু করল। সে অপর তীরে যাত্রা-বিন্দুর ঠিক বিপরীত স্থান হতে কত দূরত্বে ভাটিতে পৌঁছাবে?

(ক) 0.32 km (খ) 1.05 km (গ) 1.50 km (ঘ) 5.72 km

২০। সরল পথে স্থিতাবস্থা হতে সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা 5 তম সেকেন্ডে 18 m পথ অতিক্রম করে। 10 সেকেন্ডে এর অতিক্রান্ত দূরত্ব–

(ক) 100 m (খ) 150 m (গ) 200 m (ঘ) 250 m

২১। দুটি ট্রেন একই রেলপথে বিপরীত দিক থেকে একই 60 m/sec গতিবেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। 1200 m দূরত্বে একে অপরকে দেখতে পেল। মন্দনের সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর যাতে সংঘর্ষ এড়ানো যেতে পারে।

(ক) 2 m/sec^2 (খ) 3 m/sec^2 (গ) 4 m/sec^2 (ঘ) 5 m/sec^2

২২। একটি শূন্য কূপে একটি পাথর টুকরা ফেলার 4 sec পরে উহার তলদেশে পতনের শব্দ শোনা গেল। শব্দের বেগ 330 ms^{-1} হলে, কূপের গভীরতা কত?

(ক) 70.27 m (খ) 76.5 m (গ) 78.4 m (ঘ) 79.4 m

২৩। একটি বস্তুকণা 35 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পরিধি বরাবর 10 সেকেন্ডে একটি ব্যাসের এক প্রান্ত থেকে অপর প্রান্তে যায়। বস্তুকণাটির গড়বেগ কত?

(ক) 5 সে.মি./সে. (খ) 7 সে.মি./সে.

(গ) 9 সে.মি./সে. (ঘ) 11 সে.মি./সে.

২৪। কোনো প্রক্ষেপকের আদি নিক্ষেপণ বেগ দ্বিগুণ বৃদ্ধি করা হলে নিচের কোনটি সঠিক?

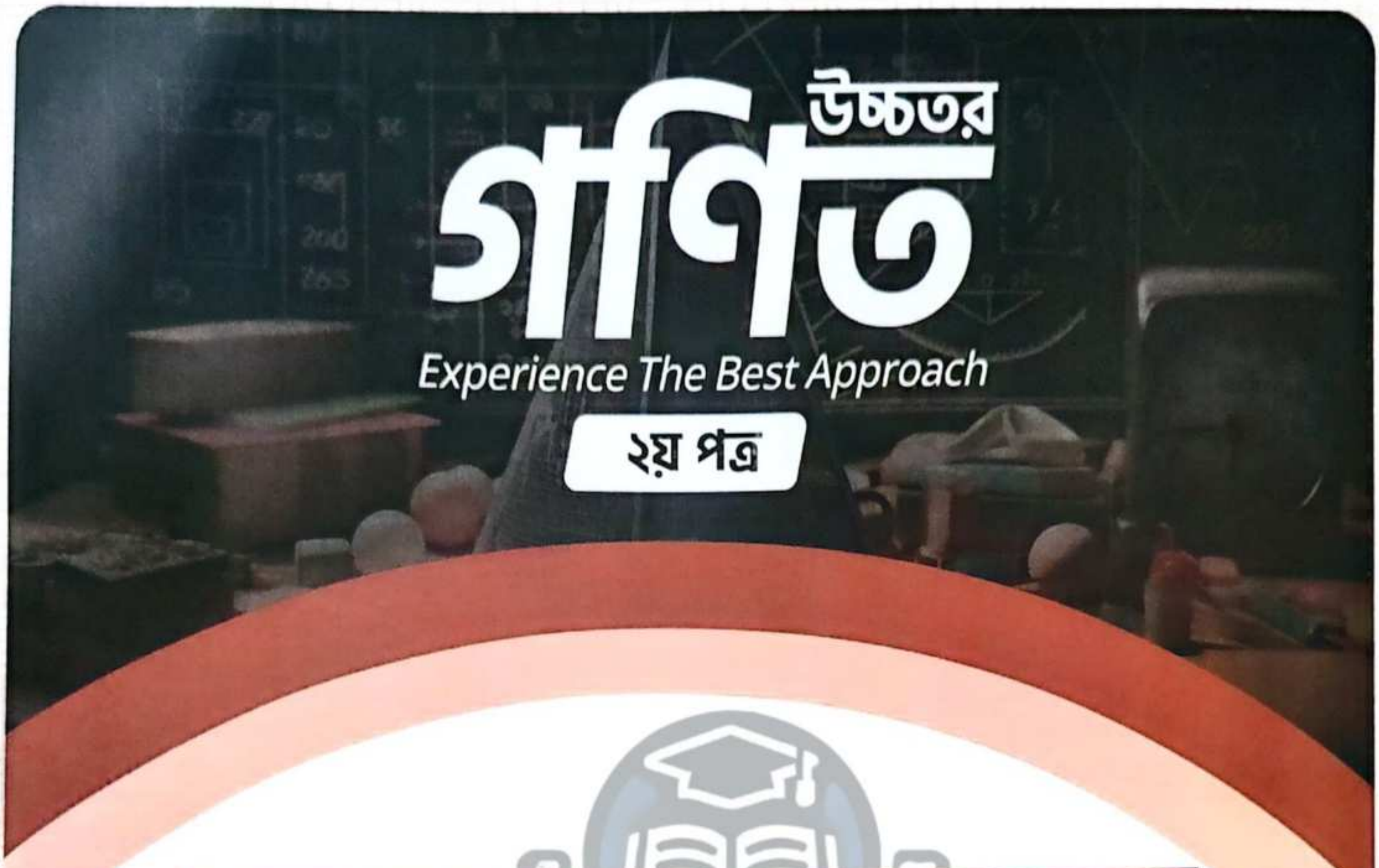
(ক) আনুভূমিক পাল্লা দ্বিগুণ হবে (খ) আনুভূমিক পাল্লা তিনগুণ হবে

(গ) আনুভূমিক পাল্লা চারগুণ হবে (ঘ) কোনোটিই নয়

২৫। সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা 3 ms^{-2} সমত্বরণে 20 সেকেন্ড যাবৎ চলে গড়বেগ 50 ms^{-1} প্রাপ্ত হলে তার আদিবেগ কোনটি?

(ক) 40 ms^{-1} (খ) 35 ms^{-1} (গ) 20 ms^{-1} (ঘ) 10 ms^{-1}

উত্তরপত্র		১	খ	২	খ	৩	ক	৪	খ	৫	খ	৬	গ	৭	ঘ	৮	ঘ	৯	ক	১০	গ	১১	ক	১২	ঘ
১৩	ক	১৪	ক	১৫	খ	১৬	গ	১৭	ঘ	১৮	খ	১৯	খ	২০	গ	২১	খ	২২	ক	২৩	খ	২৪	ঘ	২৫	গ



এইচএসসি পরীক্ষার চূড়ান্ত প্রস্তুতির জন্য আমাদের বইসমূহ

ACS | RHOMBUS PUBLICATIONS