PDF Credit - Admission Stuffs

ACS

# উচ্চতর গণিত

Experience The Best Approach

১ম পত্র

ADMISSION STUFFS

HSC
কম্প্যাক্ট সিরিজ

ADMISSION STUFFS

- শতভাগ গোছানো প্রস্তুতি
- সুপার কম্প্যাক্ট ফরম্যাট
- সর্বোচ্চ কোয়ালিটির নিশ্চয়তা

ADMISSION
STUFFS

@AdmissionStuffs

অভি | রাকিব

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

Experience The Best Approach

# এক নজরে আমাদের বই

- পুরো সিলেবাসকে নিখুঁতভাবে বিশ্লেষণ করে আমরা বেছে নিয়েছি গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নমালা যা একজন HSC পরীক্ষার্থীকে স্বল্প সময়ে সম্পূর্ণ সিলেবাস আয়ত্ত করতে সাহায্য করবে।
- প্রতিটি সৃজনশীল প্রশ্নের উত্তর আমাদের কন্টেন্ট টিম কর্তৃক এমনভাবে প্রস্তুত করা হয়েছে যেন একজন শিক্ষার্থী পরীক্ষায় সর্বোচ্চ নম্বর অর্জন করতে পারে।
- MCQ প্রশ্নের জন্য প্রয়োজনীয় ব্যাখ্যা প্রদান করা হয়েছে। পর্যাপ্ত Shortcut Technique দেখানো হয়েছে যেন পরীক্ষায় দ্রুত উত্তর করতে পারো।

ADMISSION STUFFS

## কীভাবে বইটি অধ্যয়ন করবে?

বোর্ড পরীক্ষার জন্য কোনো অধ্যায়ের চূড়ান্ত প্রস্তুতির অংশ হিসেবে ওই অধ্যায়ের সকল সৃজনশীল এবং বহুনির্বাচনী প্রশ্ন পড়ে ফেল। প্রশ্নগুলো এমন ভাবে বাছাই করা হয়েছে যে এতে তোমার খুব দ্রুত একটি কার্যকর এবং পূর্ণাঙ্গ প্রস্তুতি হয়ে যাবে।

ADMISSION STUFFS

কপিরাইট: প্রকাশকের লিখিত অনুমতি ব্যতীত এই বই বা বইয়ের কোনো অংশ নকল/ফটোকপি করে বিক্রি করা কপিরাইট আইন, ২০০০ অনুযায়ী দণ্ডনীয় অপরাধ। বই বা বইয়ের কোনো অংশ অনলাইন প্লাটফর্ম যেমন ফেসবুকের কোনো পেইজ/গ্রুপে প্রচার করলে তার বিরুদ্ধে কঠোর আইনগত ব্যবস্থা নেওয়া হবে।

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs

# রচনায়


অভি দত্ত তুষার
ME'15, BUET

কাজী রাকিবুল হাসান
CSE'18, BUET

মোঃ সুজাউল ইসলাম
NAME'14, BUET

নাফিয়া মানফি
EEE'15, BUET

পরাগ কুমার কবিরাজ
EEE'21, BUET

প্রকাশ কুমার
CE'22, BUET

আলভি সাখাওয়াত অর্নব
NAME'18, BUET

মোঃ মাসুদ মিয়া
MME'16, BUET

হাবিব উল্লাহ খান
IPE'18, BUET

প্রসেনজিৎ দাস
CE'23, BUET

মোঃ ফয়সাল রহমান
EEE'22, BUET


# সম্পাদকীয় বার্তা

ADMISSION STUFFS

প্রিয় HSC পরীক্ষার্থীবৃন্দ,

কয়েকমাস পরেই তোমরা জীবনের একটি খুবই গুরুত্বপূর্ণ পরীক্ষায় অংশগ্রহণ করতে যাচ্ছো। তোমাদের মনে প্রশ্ন আসতে পারে বাজারের এত বইয়ের সমাহারের মাঝে আমাদের বইটি আলাদা কী গুরুত্ব বহন করছে? আমাদের বইয়ের বিশেষত্বই বা কী?

ADMISSION STUFFS

একজন HSC পরীক্ষার্থীর জন্য পরীক্ষার আগের কয়েকটি মাস খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এ সময় বিশাল সিলেবাসকে একদম গুছিয়ে পড়তে হয় অন্যথায় হাবুডুবু খেতে হয়। এ ব্যাপারটি মাথায় রেখে আমরা তোমাদের জন্য নিয়ে এসেছি কম্প্যাক্ট সাজেশন বুক। আমাদের কন্টেন্ট টিম রীতিমতো গবেষণা করে একেকটি অধ্যায়ের জন্য সীমিত পরিমাণে এমনভাবে সৃজনশীল এবং বহুনির্বাচনি প্রশ্ন বাছাই করেছে যা তোমাদের প্রত্যেকটি অধ্যায়ের সকল টপিক দ্রুত কভার করতে সাহায্য করবে। আমরা আশাবাদী যে আমাদের এই বইগুলো তোমাদের প্রস্তুতিকে অন্য মাত্রায় নিয়ে যাবে।

তোমাদের ভবিষ্যৎ জীবনের প্রতি অনেক শুভকামনা।

## অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়

অভি দত্ত তুষার

মঈনুল হাসান

t.me/admission_stuffs

**PDF Credit - Admission Stuffs**

# প্রকাশনা

রম্বস পাবলিকেশন্স
মিরপুর ডিওএইচএস, ঢাকা - ১২১৬

**প্রথম প্রকাশ** : ডিসেম্বর, ২০২৪

**সম্পাদনায়** : মোঃ সুজাউল ইসলাম

**প্রচ্ছদ** : তারিকুজ্জামান

**গ্রাফিক্স** : তারিকুজ্জামান
ইফরান আহম্মেদ ইউশা

**অঙ্গসজ্জা** : রাজন সামি

**বর্ণবিন্যাস** : মাহফুজুর রহমান
মোঃ শাহজালাল
রফিকুল ইসলাম

**মূদ্রন ও বাধাই** : রম্বস পাবলিকেশন্স

**মূল্য** : ৪৫০.০০(চারশত পঞ্চাশ) টাকা

ADMISSION STUFFS

## উৎসর্গ

পরম করুণাময় সৃষ্টিকর্তা যিনি আমাদের সৃষ্টি করেছেন এবং মা-বাবা কে যাদের কল্যাণে আমরা পৃথিবীর আলো দেখতে পেরেছি!

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs

# অধ্যায়ভিত্তিক বোর্ডে আসা সৃজনশীল প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ

| অধ্যায় | সাল / বোর্ড | ঢাকা | ময়মনসিংহ | রাজশাহী | কুমিল্লা | যশোর | চট্টগ্রাম | বরিশাল | সিলেট | দিনাজপুর | মোট | সর্বমোট |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| সমাজ্জিক ও নির্যায়ক | ২০২৩ | ২ | ২ | ২ | ২ | ১ | ২ | ১ | ২ | ১ | ১৫ | ২৯ |
| | ২০২২ | ২ | ১ | ২ | ১ | ২ | ২ | ১ | ২ | ১ | ১৪ | |
| সরলরেখা | ২০২৩ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ২ | ১০ | ২০ |
| | ২০২২ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ২ | ১০ | |
| বৃত্ত | ২০২৩ | ১ | ১ | ১ | ১ | ২ | ১ | ২ | ১ | ১ | ১১ | ২৩ |
| | ২০২২ | ১ | ২ | ১ | ২ | ১ | ১ | ২ | ১ | ১ | ১২ | |
| সংযুক্ত লোগের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত | ২০২৩ | ২ | ১ | ২ | ২ | ১ | ১ | ১ | ২ | ১ | ১২ | ২৪ |
| | ২০২২ | ২ | ১ | ২ | ১ | ১ | ১ | ১ | ২ | ১ | ১২ | |
| অন্তরীকরণ | ২০২৩ | ১ | ২ | ২ | ১ | ২ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১২ | ২৫ |
| | ২০২২ | ১ | ২ | ১ | ২ | ১ | ১ | ২ | ১ | ১ | ১৩ | |
| যোগজীকরণ | ২০২৩ | ১ | ১ | ২ | ১ | ২ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১২ | ২৩ |
| | ২০২২ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১১ | |




ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs

# সূচিপত্র


| বিষয় | পৃষ্ঠা |
|---|---|
| ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক | ০১ |
| সরলরেখা | ৩৫ |
| বৃত্ত | ৭৯ |
| সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত | ১০৫ |
| অন্তরীকরণ | ১৪৩ |
| যোগজীকরণ | ১৯১ |


ADMISSION STUFFS

@AdmissionStuffs

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs

# ০১ ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক
# Matrices and Determinants

## Board Questions Analysis

সৃজনশীল প্রশ্ন

| বোর্ড / সাল | ঢাকা | ময়মনসিংহ | রাজশাহী | কুমিল্লা | যশোর | চট্টগ্রাম | বরিশাল | সিলেট | দিনাজপুর |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ২০২৩ | ২ | ২ | ২ | ২ | ১ | ২ | ১ | ২ | ১ |
| ২০২২ | ২ | ১ | ২ | ১ | ২ | ২ | ১ | ২ | ১ |

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

| বোর্ড / সাল | ঢাকা | ময়মনসিংহ | রাজশাহী | কুমিল্লা | যশোর | চট্টগ্রাম | বরিশাল | সিলেট | দিনাজপুর |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ২০২৩ | ৫ | ৫ | ৪ | ৪ | ৭ | ৪ | ৫ | ৪ | ৫ |
| ২০২২ | ৩ | ৫ | ৪ | ৫ | ৪ | ৪ | ৪ | ৫ | ৪ |

## এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

- **ম্যাট্রিক্সের সমতা:** দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B সমান হবে যদি তাদের ক্রম এবং অনুরূপ ভুক্তিগুলো সমান হয়।
- **ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগ:** দুটি ম্যাট্রিক্স যোগ বা বিয়োগ করা যাবে যদি উভয় ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা ও কলাম সংখ্যা সমান হয়।
- **ম্যাট্রিক্সের গুণ:** যদি A ম্যাট্রিক্সের ক্রম $m \times n$ এবং B ম্যাট্রিক্সের ক্রম $n \times l$ হয়, তাহলে AB নির্ণয়যোগ্য হবে।
  এক্ষেত্রে AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম হবে $m \times l$
- **ট্রেস:** মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলোর যোগফল।
  **মুখ্যপদ:** মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলোর গুণফল।
  **মাধ্যমিক পদ:** গৌণ কর্ণের ভুক্তিগুলোর গুণফল।
  ট্রেস, মুখ্যপদ ও মাধ্যমিক পদ শুধু বর্গ ম্যাট্রিক্সের হয়।
- প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে, $A^T = A$ এবং $a_{ij} = a_{ji}$
  বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্র, $A^T = -A$ এবং $a_{ij} = -a_{ji}$
  বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে মুখ্য কর্ণের সকল ভুক্তি 0 হয়।
- **অনুরাশি:** কোনো নির্ণায়কের যেকোনো একটি ভুক্তির সংশ্লিষ্ট সারি এবং কলামের সকল ভুক্তি বাদ দিয়ে অবশিষ্ট ভুক্তি নিয়ে যে নির্ণায়ক হয় সেটাই সেই ভুক্তির সংশ্লিষ্ট অনুরাশি।
- **সহগুণক** $= (-1)^{r+c} \times$ অনুরাশি; r ও c যথাক্রমে সারি সংখ্যা ও কলাম সংখ্যা।
- যদি $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ হয়, $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$
  যেখানে, A এর সহগুণক ম্যাট্রিক্স $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$; $|A|$ হলো ম্যাট্রিক্স A এর সংশ্লিষ্ট নির্ণায়ক।
- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হলে, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$,
  এবং $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$
- **বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য:**
  (i) $(A^{-1})^{-1} = A$
  (ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
  (iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
  (iv) $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$
  (v) $(BA)A^{-1} = B(AA^{-1}) = B$
  (vi) $I = I^{-1} = I^n$
  (vii) $AB = C$ হলে $A = CB^{-1}$ এবং $B = A^{-1}C$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



❑ একটি $n \times n$ ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর জন্য,

(i) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

(ii) $|pA| = p^n |A|$

(iii) $|(pA)^{-1}| = \frac{1}{p^n|A|}$

(iv) $|pA^{-1}| = \frac{p^n}{|A|}$; যেখানে, p ধ্রুবক

❑ **নির্ণায়কের ধর্মাবলি (Properties of determinant):**

(i) যদি কোনো নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির প্রত্যেক ভুক্তি শূন্য হয়, তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

যেমন, $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$

(ii) নির্ণায়কের সারিকে কলাম এবং কলামকে সারিতে পরিবর্তন করলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

যেমন, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(iii) নির্ণায়কের দুইটি কলাম বা সারি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের সংখ্যামানের পরিবর্তন হয় না কিন্তু চিহ্নের পরিবর্তন হয়।

যেমন, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix},$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$

(iv) যদি কোনো নির্ণায়কের দুইটি কলাম বা সারি এক হয় বা একটি অন্যটির গুণিতক হয় অর্থাৎ দুইটি কলাম বা সারির অনুরূপ ভুক্তির অনুপাত সমান হয়, তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

যেমন, $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_1 & ma_1 & c_1 \\ a_2 & ma_2 & c_2 \\ a_3 & ma_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$

$\begin{vmatrix} ma_1 & na_1 & c_1 \\ ma_2 & na_2 & c_2 \\ ma_3 & na_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

(v) নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির প্রত্যেক ভুক্তিকে কোনো সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে নির্ণায়কের মানকেও সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হয়।

$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ হলে, $\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = mA$

(vi) নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির প্রতিটি ভুক্তি অন্য একটি কলাম বা সারির অনুরূপ ভুক্তির একই গুণিতক দ্বারা বৃদ্ধি বা হ্রাস করা হলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। যেমন-

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + mb_1 & b_1 - nc_1 & c_1 \\ a_2 + mb_2 & b_2 - nc_2 & c_2 \\ a_3 + mb_3 & b_3 - nc_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

তবে, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{mn} \begin{vmatrix} ma_1 + b_1 & nb_1 - c_1 & c_1 \\ ma_2 + b_2 & nb_2 - c_2 & c_2 \\ ma_3 + b_3 & nb_3 - c_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(vii) যদি কোনো নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির প্রতিটি ভুক্তি দুইটি পদের যোগফল বা বিয়োগফলরূপে প্রকাশিত হয়, তবে সেই নির্ণায়ককে দুইটি নির্ণায়কের যোগফল বা বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করা যায়। যেমন-

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + \beta_1 & b_1 + \beta_2 & c_1 + \beta_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

❑ **তিন চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোট:**

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}\right\}$$ এর সমাধান [ক্রেমারের নিয়ম]

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$\therefore x = \frac{D_x}{D}$

$\therefore y = \frac{D_y}{D}$

$\therefore z = \frac{D_z}{D}$

ADMISSION STUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

**প্রশ্ন ▶ ১** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং

$$D = 8\begin{vmatrix} \frac{p-q-r}{2} & p & p \\ q & \frac{q-r-p}{2} & q \\ r & r & \frac{r-p-q}{2} \end{vmatrix}$$

(ক) $P = [1 \ \ 2 \ \ 3]$ এবং $Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ হলে, $(PQ)^t$ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৩]

(খ) উদ্দীপক হতে $A^3 - 3A^2 - A + 9I = 0$ এর সাহায্যে $A^{-1}$ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩]

(গ) প্রমাণ কর যে, $D = S^3$, যেখানে $S = p + q + r$ [ঢা. বো. ২৩]

সমাধান:

**ক** দেওয়া আছে, $P = [1 \ \ 2 \ \ 3]$ এবং $Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore PQ = [1 \ \ 2 \ \ 3]\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [3 + 4 + 3] = [10]$$

$\therefore (PQ)^t = [10]^t = [10]$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

এবং $A^3 - 3A^2 - A + 9I = 0$

$\Rightarrow A^{-1}(A^3 - 3A^2 - A + 9I) = 0$

$\Rightarrow A^{-1}.A^3 - 3A^{-1}.A^2 - A^{-1}A + 9A^{-1}.I = 0$

$\Rightarrow I.A^2 - 3I.A - I + 9A^{-1} = 0 \quad [\because A^{-1}.A = I \ ; A^{-1}I = A^{-1}]$

$\Rightarrow 9A^{-1} = 3A - A.A + I$

$$\Rightarrow 9A^{-1} = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 9A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 9 & -3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 9A^{-1} = \begin{bmatrix} 3-4+1 & 6-3+0 & 3-0+0 \\ 0+3+0 & 3-2+1 & -3+2+0 \\ 9-6+0 & -3-4+0 & 3-5+1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 9A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -7 & -1 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

**গ** $D = 8\begin{vmatrix} \frac{p-q-r}{2} & p & p \\ q & \frac{q-r-p}{2} & q \\ r & r & \frac{r-p-q}{2} \end{vmatrix}$

$$= 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\begin{vmatrix} p-q-r & 2p & 2p \\ 2q & q-r-p & 2q \\ 2r & 2r & r-p-q \end{vmatrix}$$

[প্রত্যেকটি সারিকে 2 দ্বারা গুণ করে]

$$= 8 \times \frac{1}{8}\begin{vmatrix} p+q+r & p+q+r & p+q+r \\ 2q & q-r-p & 2q \\ 2r & 2r & r-p-q \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 + r_2 + r_3]$

$$= (p+q+r)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2q & q-r-p & 2q \\ 2r & 2r & r-p-q \end{vmatrix}$$

$$= (p+q+r)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p+q+r & -(p+q+r) & 2q \\ 0 & p+q+r & r-p-q \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2 \ ; \ c_2' = c_2 - c_3]$

$= (p+q+r)\{(p+q+r)^2 + 0\}$ [১ম সারির সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$= (p+q+r)^3$

$= S^3 \quad [S = p+q+r]$

$\therefore D = S^3$ **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ২** $P = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $Q = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(ক) $P + Q$ ম্যাট্রিক্সের ট্রেস নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৩]

(খ) প্রমাণ কর যে, $(PQ)^t = Q^tP^t$ [ঢা. বো. ২৩]

(গ) $PR = RP = I$ হলে, R ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। যেখানে I একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স। [ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২; য. বো. ২১]

সমাধান:

**ক** দেওয়া আছে, $P = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

এবং $Q = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore P + Q = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+0 & -1+4 & 3+3 \\ 0-3 & 7-4 & 5-5 \\ 6-2 & -2+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore P + Q$ ম্যাট্রিক্সের ট্রেস $= 4 + 3 + 4 = 11$ **(Ans.)**



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** দেওয়া আছে, $P = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore P^t = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ -1 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

এবং $Q = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore Q^t = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$PQ = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+3-6 & 16+4+3 & 12+5+6 \\ 0-21-10 & 0-28+5 & 0-35+10 \\ 0+6-4 & 24+8+2 & 18+10+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 23 & 23 \\ -31 & -23 & -25 \\ 2 & 34 & 32 \end{bmatrix}$$

L.H.S. $= (PQ)^t$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 23 & 23 \\ -31 & -23 & -25 \\ 2 & 34 & 32 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -31 & 2 \\ 23 & -23 & 34 \\ 23 & -25 & 32 \end{bmatrix}$$

R.H.S. $= Q^tP^t$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ -1 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+3-6 & 0-21-10 & 0+6-4 \\ 16+4+3 & 0-28+5 & 24+8+2 \\ 12+5+6 & 0-35+10 & 18+10+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -31 & 2 \\ 23 & -23 & 34 \\ 23 & -25 & 32 \end{bmatrix} = (PQ)^t$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. **(Proved)**

**গ** দেওয়া আছে, $P = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$PR = RP = I$ হলে, $R = P^{-1}$ $[\because PP^{-1} = I]$

এখন, $|P| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

$= 4(14+10) + 1(0-30) + 3(0-42)$

$= -60 \neq 0$

$\therefore P^{-1}$ বিদ্যমান।

P এর সহগুণক সমূহ:

$P_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 14 + 10 = 24$

$P_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -(0-30) = 30$

$P_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 42 = -42$

$P_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -(-2+6) = -4$

$P_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10$

$P_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -(-8+6) = 2$

$P_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 21 = -26$

$P_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -(20-0) = -20$

$P_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 0 = 28$

$$\text{Adj } P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 30 & -42 \\ -4 & -10 & 2 \\ -26 & -20 & 28 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & -4 & -26 \\ 30 & -10 & -20 \\ -42 & 2 & 28 \end{bmatrix}$$

এখন, $R = P^{-1} = \frac{1}{|P|}\text{AdjP}$

$$= \frac{1}{-60}\begin{bmatrix} 24 & -4 & -26 \\ 30 & -10 & -20 \\ -42 & 2 & 28 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -12 & 2 & 13 \\ -15 & 5 & 10 \\ 21 & -1 & -14 \end{bmatrix}$$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৩** দৃশ্যকল্প-১: $P = \begin{bmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{bmatrix}$

দৃশ্যকল্প-২: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}$

(ক) দেখাও যে, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ একটি অভেদঘাতি (involutary) ম্যাট্রিক্স। [রা. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $|P| = (c-a)(a^2+b^2+c^2)$ [কু. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $\Delta + \Delta_1 = 0$. [রা. বো. ২৩]

সমাধান:

**ক** ধরি, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

এখন, $A^2 = A.A$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

যেহেতু $A^2 = I$

সুতরাং, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স। **(Showed)**



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** দেওয়া আছে, $P = \begin{bmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{bmatrix}$

$$\therefore |P| = \begin{vmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & a+b+c & -c \\ -2 & a+b+c & -a \\ a+b-c & c^2-ab & ab \end{vmatrix} \quad [c_2' = c_2 - c_1]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-c \\ -2 & a+b+c & -a \\ a+b-c & c^2-ab & ab \end{vmatrix} \quad [r_1' = r_1 - r_2]$$

$$= (a-c)\begin{vmatrix} -2 & a+b+c \\ a+b-c & c^2-ab \end{vmatrix}$$

$$= (a-c)[-2(c^2-ab) - \{(a+b)^2 - c^2\}]$$

$$= (a-c)(-2c^2+2ab-a^2-2ab-b^2+c^2)$$

$$= (a-c)(-a^2-b^2-c^2)$$

$$= (c-a)(a^2+b^2+c^2)$$

$\therefore |P| = (c-a)(a^2+b^2+c^2)$ **(Showed)**

**গ** L.H.S.

$$= \Delta + \Delta_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & yz & x \\ 1 & zx & y \\ 1 & xy & z \end{vmatrix}$$ [২য় নির্ণায়কের কলাম ও সারি প্রতিস্থাপন করে]

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x & xyz & x^2 \\ y & xyz & y^2 \\ z & xyz & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + \frac{1}{xyz} \cdot xyz \begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ y & 1 & y^2 \\ z & 1 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$ [২য় নির্ণায়কের ১ম ও ২য় কলাম স্থানান্তর করে]

$= 0 =$ R.H.S. **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ৪** $A = \begin{pmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{pmatrix}$ এবং $\Delta = \begin{bmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 3 & 2 & x-1 \end{bmatrix}$

**(ক)** K এর কোন মানের জন্য $P = \begin{bmatrix} K-3 & -1 \\ -2 & K-2 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হবে? [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১]

**(খ)** প্রমাণ কর যে, $\det(A) = (b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2)$

**(গ)** উদ্দীপকের সাহায্যে $|\Delta + I| = 0$ সমীকরণের সমাধান কর। যেখানে I একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স। [রা. বো. ২৩]

সমাধান:

**ক** দেওয়া আছে, $P = \begin{bmatrix} K-3 & -1 \\ -2 & K-2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে,

$$\begin{vmatrix} K-3 & -1 \\ -2 & K-2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (K-3)(K-2) - 2 = 0$

$\Rightarrow K^2 - 2K - 3K + 6 - 2 = 0$

$\Rightarrow K^2 - 5K + 4 = 0$

$\Rightarrow K^2 - K - 4K + 4 = 0$

$\Rightarrow K(K-1) - 4(K-1) = 0$

$\Rightarrow (K-1)(K-4) = 0$

হয়, $K-1=0$ | অথবা, $K-4=0$

$\Rightarrow K = 1$ | $\therefore K = 4$

নির্ণেয় $K = 1, 4$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $A = \begin{pmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ ax+by & bx+cy & -(ax^2+2bxy+cy^2) \end{vmatrix} \quad [\because c_3' = c_3 - (xc_1 + yc_2)]$$

$$= -(ax^2+2bxy+cy^2)\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

$$= -(ax^2-2bxy+cy^2)(ac-b^2)$$

$$= (b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2)$$ **(Proved)**

**গ** দেওয়া আছে, $\Delta = \begin{bmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 3 & 2 & x-1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \Delta + I = \begin{bmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 3 & 2 & x-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{bmatrix}$$

এখানে, $|\Delta + I| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow x(x^2-2) - 2(x-3) + 3(2-3x) = 0$

$\Rightarrow x^3 - 2x - 2x + 6 + 6 - 9x = 0$

$\Rightarrow x^3 - 13x + 12 = 0$

$\Rightarrow x^3 - x^2 + x^2 - x - 12x + 12 = 0$

$\Rightarrow x^2(x-1) + x(x-1) - 12(x-1) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+x-12) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2-3x+4x-12) = 0$

$\Rightarrow (x-1)\{x(x-3) + 4(x-3)\} = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-3)(x+4) = 0$

হয়, $x-1=0$ | অথবা, $x-3=0$ | অথবা, $x+4=0$

$\therefore x = 1$ | $\therefore x = 3$ | $\therefore x = -4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = -4, 1, 3$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ৫** $A = (1 \quad -2 \quad 3)$

$$X = (x \quad y \quad z),\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} (m+n)^2 & l^2 & l^2 \\ m^2 & (n+l)^2 & m^2 \\ n^2 & n^2 & (l+m)^2 \end{pmatrix}$$

**(ক)** $3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + E = I_2$ হলে E ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩]

**(খ)** ক্রেমারের নিয়মে $BX^T = A^T$ সমীকরণ জোট সমাধান কর।

[য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২, ম. বো. ২১]

**(গ)** দেখাও যে, $|C| = 2lmn(l+m+n)^3$. [য. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + E = I_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$$ **(Ans.)**

**খ** $A^T = (1 \quad -2 \quad 3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

এবং $X = (x \quad y \quad z)$

$$X^T = (x \quad y \quad z)^T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

এখন, $BX^T = A^T$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-2y+3z \\ x+5y+0z \\ 4x-2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে,

$x - 2y + 3z = 1$

$x + 5y + 0z = -2$

$4x - 2y + z = 3$

x, y ও z এর সহগগুলো নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1(5+0) + 2(1-0) + 3(-2-20)$

$= -59$

এখন, $D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(5+0) + 2(-2-0) + 3(4-15)$

$= -32$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1(-2-0) - 1(1-0) + 3(3+8)$

$= 30$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 1(15-4) + 2(3+8) + 1(-2-20)$

$= 11$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-32}{-59} = \frac{32}{59}$;

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{30}{-59} = -\frac{30}{59}$;

$z = \frac{D_z}{D} = \frac{11}{-59} = -\frac{11}{59}$

নির্ণেয় সমাধান: $(x, y, z) = \left(\frac{32}{59}, -\frac{30}{59}, -\frac{11}{59}\right)$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $C = \begin{pmatrix} (m+n)^2 & l^2 & l^2 \\ m^2 & (n+l)^2 & m^2 \\ n^2 & n^2 & (l+m)^2 \end{pmatrix}$

$$\therefore |C| = \begin{vmatrix} (m+n)^2 & l^2 & l^2 \\ m^2 & (n+l)^2 & m^2 \\ n^2 & n^2 & (l+m)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (m+n)^2 - l^2 & 0 & l^2 \\ 0 & (n+l)^2 - m^2 & m^2 \\ n^2 - (l+m)^2 & n^2 - (l+m)^2 & (l+m)^2 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_3 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (l+m+n)(m+n-l) & 0 & l^2 \\ 0 & (l+m+n)(n+l-m) & m^2 \\ (l+m+n)(n-l-m) & (l+m+n)(n-l-m) & (l+m)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (l+m+n)^2 \begin{vmatrix} m+n-l & 0 & l^2 \\ 0 & n+l-m & m^2 \\ n-l-m & n-l-m & l^2+2lm+m^2 \end{vmatrix}$$

$$= (l+m+n)^2 \begin{vmatrix} m+n-l & 0 & l^2 \\ 0 & n+l-m & m^2 \\ -2m & -2l & 2lm \end{vmatrix}$$

$[r_3' = r_3 - (r_1 + r_2)]$

$$= \frac{(l+m+n)^2}{lm} \begin{vmatrix} lm+nl-l^2 & 0 & l^2 \\ 0 & mn+lm-m^2 & m^2 \\ -2lm & -2lm & 2lm \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(l+m+n)^2}{lm} \begin{vmatrix} lm+nl & l^2 & l^2 \\ m^2 & mn+lm & m^2 \\ 0 & 0 & 2lm \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_1' = c_1 + c_3 \\ c_2' = c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(l+m+n)^2}{lm} \cdot 2lm\{(lm+nl)(mn+lm) - l^2m^2\}$$

[৩য় সারি বরাবর বিস্তার করে]

$= 2(l+m+n)^2 \cdot lm\{(m+n)(n+l) - lm\}$

$= 2(l+m+n)^2\, lmn(l+m+n)$

$= 2lmn(l+m+n)^3$ **(Showed)**



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ৬** দৃশ্যকল্প-১: $A = \begin{bmatrix} yz & x & x^2 \\ zx & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{bmatrix}$

দৃশ্যকল্প-২: $\frac{x}{5} + \frac{3y}{10} + \frac{z}{10} = \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = \frac{3y}{7} + \frac{4z}{7} = 1$

(ক) বিস্তার না করে $\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩]

(খ) $|A| = 0$ এবং $x \neq y \neq z$ হলে, দেখাও যে, $xy + yz + zx = 0$

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। [ঢা. বো. ২৩]

সমাধান:

**ক** প্রদত্ত রাশি $= \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a+b+c & 1 & b+c \\ a+b+c & 1 & c+a \\ a+b+c & 1 & a+b \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 + c_3]$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= (a+b+c).0$ [∵ প্রথম দুইটি কলাম একই]

$= 0$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} yz & x & x^2 \\ zx & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{bmatrix}$

এবং প্রশ্নমতে, $|A| = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ zx & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} yz-zx & x-y & x^2-y^2 \\ zx-xy & y-z & y^2-z^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{bmatrix} r_1' = r_1 - r_2 \\ r_2' = r_2 - r_3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} -z & 1 & x+y \\ -x & 1 & y+z \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-z & 0 & x-z \\ -x & 1 & y+z \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{bmatrix} r_1' = r_1 - r_2 \\ \because x \neq y \neq z \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -x & 1 & y+z \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} = 0$ [∵ $x \neq z$]

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -x-y-z & 1 & y+z \\ xy-z^2 & z & z^2 \end{vmatrix} = 0$ $[c_1' = c_1 - c_3]$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} -x-y-z & 1 \\ xy-z^2 & z \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow -zx - yz - z^2 - xy + z^2 = 0$

$\Rightarrow -xy - yz - zx = 0$

$\therefore xy + yz + zx = 0$ **(Showed)**

**গ** দেওয়া আছে, $\frac{x}{5} + \frac{3y}{10} + \frac{z}{10} = 1$

$\Rightarrow 2x + 3y + z = 10$ ..... (i)

এবং $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$

$\Rightarrow x + y = 4$

$\Rightarrow x + y + 0.z = 4$ ..... (ii)

এবং $\frac{3y}{7} + \frac{4z}{7} = 1$

$\Rightarrow 3y + 4z = 7$

$\Rightarrow 0.x + 3y + 4z = 7$ ..... (iii)

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) হতে পাই,

$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2(4-0) - 3(4-0) + 1(3-0)$

$= -1$

$\therefore D_x = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= 10(4-0) - 3(16-0) + 1(12-7)$

$= -3$

$\therefore D_y = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2(16-0) - 10(4-0) + 1(7-0)$

$= -1$

$\therefore D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

$= 2(7-12) - 3(7-0) + 10(3-0)$

$= -1$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{-1} = 3$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-1} = 1$

$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-1}{-1} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y, z) = (3, 1, 1)$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৭** দৃশ্যকল্প-১: $Q = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$

দৃশ্যকল্প-২: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$, $B = A^{-1}$

(ক) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & m \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম হলে m এর মান নির্ণয় কর। [য. বো. ২১]

(খ) $|Q| = 0$ হলে, সমাধান সেট নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে, B নির্ণয় কর। [ম. বো. ২১]



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধান:**

**ক** প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স বিপ্রতিসম হলে,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & m \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T = -\begin{bmatrix} 0 & 2 & m \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ m & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -m \\ 2 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

এখন, ম্যাট্রিক্স সমতার শর্তানুযায়ী, $m = -4$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $Q = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$

$|Q| = 0$ হলে,

$$\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (3+x)\{(2+x)(4+x)-9\} - 4(16+4x-6) + 2(12-4-2x) = 0$

$\Rightarrow (3+x)(x^2+6x+8-9) - 4(4x+10) + 2(8-2x) = 0$

$\Rightarrow x^3 + 6x^2 - x + 3x^2 + 18x - 3 - 16x - 40 + 16 - 4x = 0$

$\Rightarrow x^3 + 9x^2 - 3x - 27 = 0$

$\Rightarrow x^2(x+9) - 3(x+9) = 0$

হয়, $x + 9 = 0$

$\Rightarrow x = -9$

অথবা, $x^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 3$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট $= \{-9, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = 1(-12+2) - 0 + 2(-2+4)$

$= -6 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ বিদ্যমান।

A এর সহগুণক সমূহ:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -(12-4) = -8$

$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(1+0) = -1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+4) = -2$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 = 2$

$\therefore \text{Adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} -10 & -8 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} -10 & 2 & -4 \\ -8 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore B = A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{|A|}$

$= \dfrac{1}{-6}\begin{bmatrix} -10 & 2 & -4 \\ -8 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 10 & -2 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৮** $A = \begin{bmatrix} p & p+1 & p+1 \\ p+1 & p & p+1 \\ p+1 & p+1 & p \end{bmatrix}$

(ক) বিস্তার না করে $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় কর। [সি. বো. ২৩]

(খ) উদ্দীপকের আলোকে $A^2 - 7A - 8I_3$ নির্ণয় কর ; যখন $p = 2$ [সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩]

(গ) $AX = B$ হলে নির্ণায়কের সাহায্যে 'X' নির্ণয় কর ; যেখানে $p = 1$, $B = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

[সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২৩, ২২; ম. বো. ২৩; চ. বো. ২২; রা. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} c_2' = c_2 - c_1 \\ c_3' = c_3 - c_2 \end{bmatrix}$

$= 0$ **(Ans.)** [$\because$ দুইটি কলাম একই]

**খ** দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} p & p+1 & p+1 \\ p+1 & p & p+1 \\ p+1 & p+1 & p \end{bmatrix}$

$p = 2$ হলে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$A^2 = A.A$

$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+9+9 & 6+6+9 & 6+9+6 \\ 6+6+9 & 9+4+9 & 9+6+6 \\ 6+9+6 & 9+6+6 & 9+9+4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{bmatrix}$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



প্রদত্ত রাশি

$= A^2 - 7A - 8I_3$

$= \begin{bmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 21 & 21 \\ 21 & 14 & 21 \\ 21 & 21 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (Ans.)

**গ** দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} p & p+1 & p+1 \\ p+1 & p & p+1 \\ p+1 & p+1 & p \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

$p = 1$ হলে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ধরি, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

আবার, $AX = B$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+2y+2z \\ 2x+y+2z \\ 2x+2y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে পাই,

$x + 2y + 2z = 11$

$2x + y + 2z = 10$

$2x + 2y + z = 9$

x, y ও z এর সহগগুলো নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক,

$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(1-4) - 2(2-4) + 2(4-2)$

$= 5$

এখন, $D_x = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 2 \\ 10 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 11(1-4) - 2(10-18) + 2(20-9)$

$= 5$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 2 & 10 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(10-18) - 11(2-4) + 2(18-20)$

$= 10$

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 2 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix}$

$= 1(9-20) - 2(18-20) + 11(4-2)$

$= 15$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{5}{5} = 1$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{10}{5} = 2$

$z = \frac{D_z}{D} = \frac{15}{5} = 3$

$\therefore X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (Ans.)

**প্রশ্ন ▶ ৯** $px + qy + rz = 1$

$p^2x + q^2y + r^2z = a$

$(p^3 - 1)x + (q^3 - 1)y + (r^3 - 1)z = a^2$

(ক) প্রমাণ কর যে, $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতী ম্যাট্রিক্স। [সি. বো. ২৩]

(খ) উদ্দীপকের সমীকরণগুলোকে $AX = B$ আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে, $pqr = 1$, যখন $\text{Det}(A) = 0$ এবং $p \neq q \neq r$ [সি. বো. ২৩]

(গ) $p = 1, q = 2, r = -1$ হলে, $A^{-1}$ নির্ণয় কর।

[সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চা. বো. ২২; রা. বো. ২১]

সমাধান:

**ক** ধরি, $P = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore P^2 = P.P$

$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16-12 & 12-9 \\ -16+12 & -12+9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = P$

$\because P^2 = P$

$\therefore P = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতী ম্যাট্রিক্স। **(Proved)**

**খ** দেওয়া আছে,

$px + qy + rz = 1$

$p^2x + q^2y + r^2z = a$

$(p^3 - 1)x + (q^3 - 1)y + (r^3 - 1)z = a^2$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3 - 1 & q^3 - 1 & r^3 - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow AX = B$

যেখানে $A = \begin{bmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3 - 1 & q^3 - 1 & r^3 - 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$

এখন, $\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3 - 1 & q^3 - 1 & r^3 - 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3 & q^3 & r^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= pqr\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix}$

[পাশাপাশি দুইটি সারি বা কলাম পরিবর্তন করলে নির্ণায়কের চিহ্নের পরিবর্তন হয়। এখানে দুইবার সারি পরিবর্তন করা হয়েছে।]

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$= (pqr-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix}$$

$$= (pqr-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p-q & q-r & r \\ p^2-q^2 & q^2-r^2 & r^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$$

$$= (pqr-1)\begin{vmatrix} p-q & q-r \\ p^2-q^2 & q^2-r^2 \end{vmatrix}$$

$$= (pqr-1)(p-q)(q-r)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p+q & q+r \end{vmatrix}$$

$$= (pqr-1)(p-q)(q-r)(q+r-p-q)$$

$$= (pqr-1)(p-q)(q-r)(r-p)$$

এখন, $\text{Det}(A) = 0$ এবং $p \neq q \neq r$

$\Rightarrow (pqr-1)(p-q)(q-r)(r-p) = 0$

$\Rightarrow pqr - 1 = 0$ [$\because p \neq q \neq r$]

$\therefore pqr = 1$ **(Showed)**

**গ** 'খ' হতে প্রাপ্ত, $A = \begin{bmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3-1 & q^3-1 & r^3-1 \end{bmatrix}$

$p = 1, q = 2$ এবং $r = -1$ হলে,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1^2 & 2^2 & (-1)^2 \\ 1^3-1 & 2^3-1 & (-1)^3-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix}$$

$= 1(-8-7) - 2(-2-0) - 1(7-0)$

$= -18 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ বিদ্যমান।

A এর সহগুণক সমূহ:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -8-7 = -15$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-0) = 2$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7-0 = 7$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -(-4+7) = -3$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2+0 = -2$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -(7-0) = -7$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2+4 = 6$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4-2 = 2$

$$\therefore \text{Adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -15 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & -7 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -15 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \\ 7 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}A = \frac{1}{-18}\begin{bmatrix} -15 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \\ 7 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 15 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -7 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১০** সমীকরণ জোটঃ $tx + uy + vz = 5$

$t^2x + u^2y + v^2z = 5$; $(t^3-1)x + (u^3-1)y + (v^3-1)z = -5$

(ক) $M = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$, $N = [-3 \quad 5 \quad 6]$ হলে, $[MN]^T$ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২৩]

(খ) $t = 1, u = 2, v = 3$ হলে সমীকরণ জোটের সমাধান কর।

[ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্নঃ ঢা. বো. ২৩; রা. বো. ২৩; চ. বো. ২৩, ২১]

(গ) x, y, z এর সহগগুলি দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক D হলে প্রমাণ কর,

$D = (tuv-1)(t-u)(u-v)(v-t)$ [ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্নঃ সি. বো. ২৩]

সমাধানঃ

**ক** দেওয়া আছে, $M = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$ এবং $N = [-3 \quad 5 \quad 6]$

$$\therefore MN = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}[-3 \quad 5 \quad 6]$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 10 & 12 \\ -27 & 45 & 54 \\ 9 & -15 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [MN]^T = \begin{bmatrix} -6 & 10 & 12 \\ -27 & 45 & 54 \\ 9 & -15 & -18 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -27 & 9 \\ 10 & 45 & -15 \\ 12 & 54 & -18 \end{bmatrix}$$ **(Ans.)**

**খ** $t = 1, u = 2, v = 3$ হলে,

প্রদত্ত সমীকরণ জোটঃ $x + 2y + 3z = 5$

$x + 4y + 9z = 5$

$0.x + 7y + 26z = -5$

x, y, ও z এর সহগগুলো নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 0 & 7 & 26 \end{vmatrix}$$

$= 1(104-63) - 2(26-0) + 3(7-0)$

$= 10$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \\ -5 & 7 & 26 \end{vmatrix}$$
$$= 5(104-63) - 2(130+45) + 3(35+20)$$
$$= 20$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \\ 0 & -5 & 26 \end{vmatrix}$$
$$= 1(130+45) - 5(26-0) + 3(-5-0)$$
$$= 30$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix}$$
$$= 1(-20-35) - 2(-5-0) + 5(7-0)$$
$$= -10$$

$$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{20}{10} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{30}{10} = 3$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-10}{10} = -1$$

∴ নির্ণেয় সমাধান: (x, y, z) = (2, 3, – 1) **(Ans.)**

**গ** প্রদত্ত সমীকরণ জোটের x, y, z এর সহগগুলো দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক,

$$D = \begin{vmatrix} t & u & v \\ t^2 & u^2 & v^2 \\ t^3-1 & u^3-1 & v^3-1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} t & u & v \\ t^2 & u^2 & v^2 \\ t^3 & u^3 & v^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} t & u & v \\ t^2 & u^2 & v^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= tuv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & u & v \\ t^2 & u^2 & v^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & u & v \\ t^2 & u^2 & v^2 \end{vmatrix}$$

[∵ পাশাপাশি দুইটি সারি বা কলাম পরিবর্তন করলে নির্ণায়কের চিহ্নের পরিবর্তন হয়। এখানে দুইবার সারি পরিবর্তন করা হয়েছে।]

$$= (tuv-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & u & v \\ t^2 & u^2 & v^2 \end{vmatrix}$$
$$= (tuv-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t-u & u-v & v \\ t^2-u^2 & u^2-v^2 & v^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$$
$$= (tuv-1) \begin{vmatrix} t-u & u-v \\ t^2-u^2 & u^2-v^2 \end{vmatrix}$$
$$= (tuv-1)(t-u)(u-v) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t+u & u+v \end{vmatrix}$$
$$= (tuv-1)(t-u)(u-v)(u+v-t-u)$$
$$= (tuv-1)(t-u)(u-v)(v-t)$$

$D = (tuv-1)(t-u)(u-v)(v-t)$ **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ১১** দৃশ্যকল্প-১: $2x - y - z = 6$, $x + 3y + 2z = 1$ এবং $3x - y - 5z = 1$

দৃশ্যকল্প-২: $B = \begin{bmatrix} p^2 & qr & 2p \\ q^2 & rp & 2q \\ r^2 & pq & 2r \end{bmatrix}$

(ক) $\begin{bmatrix} x-5 & 8 \\ -1 & y+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y-1 & 8 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ হলে (x, y) এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে, x, y ও z এর সহগগুলো নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে $A^{-1}$ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১, ২২, ২৩; দি. বো. ২৩; ব. বো. ২২; চ. বো. ২১; ম. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে, প্রমাণ কর যে, $|B| = -2(p-q)(q-r)(p-r)(pq+qr+rp)$ [দি. বো. ২৩]

সমাধান:

**ক** দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix} x-5 & 8 \\ -1 & y+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y-1 & 8 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে,

$y + 3 = 7$

$\therefore y = 4$

এবং $x - 5 = y - 1$

$\Rightarrow x - 5 = 4 - 1$

$\therefore x = 8$

∴ নির্ণেয় মান: (x, y) = (8, 4) **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $2x - y - z = 6$, $x + 3y + 2z = 1$, $3x - y - 5z = 1$

x, y ও z এর সহগগুলো নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্স,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$
$$= 2(-15+2) + 1(-5-6) - 1(-1-9)$$
$$= -27 \neq 0$$

$\therefore A^{-1}$ বিদ্যমান।

A এর সহগুণক সমূহ:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 2 = -13$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-5-6) = 11$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 9 = -10$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -(5-1) = -4$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 3 = -7$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+3) = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+1) = -5$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7$$

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -13 & 11 & -10 \\ -4 & -7 & -1 \\ 1 & -5 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -13 & -4 & 1 \\ 11 & -7 & -5 \\ -10 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}A = \frac{1}{-27}\begin{bmatrix} -13 & -4 & 1 \\ 11 & -7 & -5 \\ -10 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 13 & 4 & -1 \\ -11 & 7 & 5 \\ 10 & 1 & -7 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

**গ** দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} p^2 & qr & 2p \\ q^2 & rp & 2q \\ r^2 & pq & 2r \end{bmatrix}$

$$\therefore |B| = \begin{vmatrix} p^2 & qr & 2p \\ q^2 & rp & 2q \\ r^2 & pq & 2r \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} p^2 & qr & p \\ q^2 & rp & q \\ r^2 & pq & r \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} p^2-q^2 & qr-rp & p-q \\ q^2-r^2 & rp-pq & q-r \\ r^2 & pq & r \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} r_1' = r_1 - r_2 \\ r_2' = r_2 - r_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} (p+q)(p-q) & -r(p-q) & p-q \\ (q+r)(q-r) & -p(q-r) & q-r \\ r^2 & pq & r \end{vmatrix}$$

$$= 2(p-q)(q-r)\begin{vmatrix} p+q & -r & 1 \\ q+r & -p & 1 \\ r^2 & pq & r \end{vmatrix}$$

$$= 2(p-q)(q-r)\begin{vmatrix} p-r & p-r & 0 \\ q+r & -p & 1 \\ r^2 & pq & r \end{vmatrix} \quad [r_1' = r_1 - r_2]$$

$$= 2(p-q)(q-r)(p-r)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ q+r & -p & 1 \\ r^2 & pq & r \end{vmatrix}$$

$$= 2(p-q)(q-r)(p-r)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q+r & -p-q-r & 1 \\ r^2 & pq-r^2 & r \end{vmatrix}$$

$$[c_2' = c_2 - c_1]$$

$$= 2(p-q)(q-r)(p-r)\begin{vmatrix} -p-q-r & 1 \\ pq-r^2 & r \end{vmatrix}$$

$$= 2(p-q)(q-r)(p-r)(-rp-qr-r^2-pq+r^2)$$

$$= -2(p-q)(q-r)(p-r)(pq+qr+rp) \textbf{ (Proved)}$$

**প্রশ্ন ▶ ১২** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix}$ এবং $\begin{vmatrix} u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} = 0$

$(u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0)$

**(ক)** $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ এবং $Q = (4 \quad 5 \quad 6)$ হলে $(PQ)^T$ নির্ণয়। [ম. বো. ২৩]

**(খ)** $AB = I_2$ হলে m ও n এর মান বের কর।

[ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১]

**(গ)** প্রমাণ কর যে, $u = v = w$।

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ এবং $Q = (4 \quad 5 \quad 6)$

$$\therefore PQ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(4 \quad 5 \quad 6) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore (PQ)^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় } (PQ)^T = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

**খ** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix}$

এখন, $AB = I_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+0 & m+4n \\ 0+0 & 0+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & m+4n \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে,

$n = 1$

এবং $m + 4n = 0$

$\Rightarrow m + 4 = 0 \quad [\because n = 1]$

$\therefore m = -4$

নির্ণেয় মান: $m = -4$ এবং $n = 1$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $\begin{vmatrix} u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow uvw\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow uvw\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ u-v & v-w & w \\ u^2-v^2 & v^2-w^2 & w^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow uvw\begin{vmatrix} u-v & v-w \\ u^2-v^2 & v^2-w^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow uvw(u-v)(v-w)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ u+v & v+w \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow uvw(u-v)(v-w)(v+w-u-v) = 0$$

$$\Rightarrow uvw(u-v)(v-w)(w-u) = 0$$

$$\Rightarrow (u-v)(v-w)(w-u) = 0$$

$\therefore u - v = 0$ | অথবা, $v - w = 0$ | অথবা, $w - u = 0$

$\therefore u = v$ | $\therefore v = w$ | $\therefore w = u$

$\therefore u = v = w$ **(Proved)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ১৫** $A = \begin{pmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix} a^2 & bc & ca+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{bmatrix}$$

(ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = 0$ [ম. বো. ২০]

(খ) দেখাও যে, $\det A = (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$. [ম. বো. ২০]

(গ) প্রমাণ কর যে, $|B| = 4a^2b^2c^2$ [ম. বো. ২২]

সমাধানঃ

ক L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a & abc & abc(b+c) \\ b & abc & abc(c+a) \\ c & abc & abc(a+b) \end{vmatrix}$

$= \frac{abc \cdot abc}{abc} \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} a+b+c & 1 & b+c \\ a+b+c & 1 & c+a \\ a+b+c & 1 & a+b \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 + c_3]$

$= abc(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= abc(a+b+c) \cdot 0$ [∵ প্রথম দুইটি কলাম একই]

$= 0 =$ R.H.S. **(Proved)**

খ দেওয়া আছে, $A = \begin{pmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{pmatrix}$

$\therefore \det A = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b^2+2bc+c^2+a^2-2bc & a^2 & bc \\ c^2+2ca+a^2+b^2-2ca & b^2 & ca \\ a^2+2ab+b^2+c^2-2ab & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 + c_2 - 2c_3]$

$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & a^2 & bc \\ a^2+b^2+c^2 & b^2 & ca \\ a^2+b^2+c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= (a^2+b^2+c^2) \begin{vmatrix} 1 & a^2 & bc \\ 1 & b^2 & ca \\ 1 & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= (a^2+b^2+c^2) \begin{vmatrix} 1 & a^2 & bc \\ 0 & b^2-a^2 & ca-bc \\ 0 & c^2-a^2 & ab-bc \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} r_2' = r_2 - r_1 \\ r_3' = r_3 - r_1 \end{bmatrix}$

$= (a^2+b^2+c^2) \begin{vmatrix} (a+b)(b-a) & -c(b-a) \\ (c+a)(c-a) & -b(c-a) \end{vmatrix}$

$= (a^2+b^2+c^2)(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a+b & -c \\ c+a & -b \end{vmatrix}$

$= (a^2+b^2+c^2)(b-a)(c-a)(-ab-b^2+c^2+ca)$

$= -(a^2+b^2+c^2)(a-b)(c-a)\{-(b^2-c^2)-a(b-c)\}$

$= -(a^2+b^2+c^2)(a-b)(c-a)(b-c)(-b-c-a)$

$= (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

**(Showed)**

গ L.H.S. $= |B| = \begin{vmatrix} a^2 & bc & ca+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} a & c & a+c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} a+c-a-c & c & a+c \\ a+b+b-a & b & a \\ b+b+c-c & b+c & c \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 + c_2 - c_3]$

$= abc \begin{vmatrix} 0 & c & a+c \\ 2b & b & a \\ 2b & b+c & c \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} 0 & c & a+c \\ 0 & -c & a-c \\ 2b & b+c & c \end{vmatrix}$ $[r_2' = r_2 - r_3]$

$= 2ab^2c \begin{vmatrix} c & a+c \\ -c & a-c \end{vmatrix}$

$= 2ab^2c \times c \begin{vmatrix} 1 & a+c \\ -1 & a-c \end{vmatrix}$

$= 2ab^2c^2(a-c+a+c)$

$= 4a^2b^2c^2$

$=$ R.H.S. **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ১৪** $A = \begin{bmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -2 & x+1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$

(ক) দেখাও যে, B একটি সমঘাতী ম্যাট্রিক্স। [ঢা. বো. ২২]

(খ) $|A| = 0$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২২]

(গ) $(A^T)^{-1}$ নির্ণয় কর যখন, $x = 0$ হয়। [ঢা. বো. ২২]

সমাধানঃ

ক দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$

এখন, $B^2 = B.B$

$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 25-20 & 10-8 \\ -50+40 & -20+16 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$

$= B$

∵ $B^2 = B$

∴ B একটি সমঘাতী ম্যাট্রিক্স। **(Showed)**

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -2 & x+1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$ এবং $|A|=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -2 & x+1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1+1+2 & 1 & 2 \\ -2+x+1+3 & x+1 & 3 \\ 2+0+x & 0 & x \end{vmatrix}=0 \quad [c_1' = c_1+c_2+c_3]$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 2 \\ x+2 & x+1 & 3 \\ x+2 & 0 & x \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & x+1 & 3 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & -1 & x-2 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{bmatrix} r_2' = r_2 - r_1 \\ r_3' = r_3 - r_1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow (x+2)\{x(x-2)+1\}$

হয়, $x+2=0$ | অথবা, $x^2-2x+1=0$

$\Rightarrow x=-2$ | $\Rightarrow (x-1)^2=0$

$\Rightarrow x=1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $x=-2, 1$

**গ** দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -2 & x+1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$

$\therefore x=0$ হলে, $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^T=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

এখন, $|A^T|=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

$=-1(0-0)+2(0-0)+2(3-2)$

$=2\neq 0 \therefore (A^T)^{-1}$ বিদ্যমান।

$A^T$ এর সহগুণক সমূহ:

$A^T_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=0-0=0$

$A^T_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-(0-0)=0$

$A^T_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1$

$A^T_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-(0-6)=6$

$A^T_{22}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0-4=-4$

$A^T_{23}=-\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-(-3+4)=-1$

$A^T_{31}=\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0-2=-2$

$A^T_{32}=-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-(0-2)=2$

$A^T_{33}=\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1+2=1$

$$\therefore \text{Adj } A^T=\begin{bmatrix} A^T_{11} & A^T_{12} & A^T_{13} \\ A^T_{21} & A^T_{22} & A^T_{23} \\ A^T_{31} & A^T_{32} & A^T_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A^T)^{-1}=\frac{\text{Adj}A^T}{|A^T|}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

**প্রশ্ন ▶ ১৫** $A=\begin{bmatrix} 3+x & 4 & 1 \\ 4 & 1+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix} 2+x & b+x & c+x \\ 2+y & b+y & c+y \\ 4 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$

**(ক)** $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ হলে, $B.B^t$ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২]

**(খ)** দেখাও যে, $\det(B)=(2-b)(b-c)(c-2)(x-y)$ [রা. বো. ২২]

**(গ)** $\det(A)=0$ সমীকরণের বাস্তব মূল নিয়ে A এর ট্রেস নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ হলে,

$$B^t=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B.B^t=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4+1 & 0+2 \\ 0+2 & 0+4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $B=\begin{bmatrix} 2+x & b+x & c+x \\ 2+y & b+y & c+y \\ 4 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \det(B)=\begin{vmatrix} 2+x & b+x & c+x \\ 2+y & b+y & c+y \\ 4 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2-b & b-c & c+x \\ 2-b & b-c & c+y \\ 4-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$$

$$=(2-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c+x \\ 1 & 1 & c+y \\ 2+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(2-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & c+x \\ 0 & 1 & c+y \\ 2-c & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2]$

$=(2-b)(b-c)(2-c)\begin{vmatrix} 1 & c+x \\ 1 & c+y \end{vmatrix}$

$=(2-b)(b-c)(2-c)(c+y-c-x)$

$=(2-b)(b-c)(c-2)(x-y)$

$\therefore \det(B)=(2-b)(b-c)(c-2)(x-y)$ **(Showed)**



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}3+x & 4 & 1\\ 4 & 1+x & 3\\ 1 & 3 & 4+x\end{bmatrix}$

এখানে, $\det(A)=0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}3+x & 4 & 1\\ 4 & 1+x & 3\\ 1 & 3 & 4+x\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow (3+x)(4+x+4x+x^2-9)-4(16+4x-3)+1(12-1-x)=0$

$\Rightarrow 3x^2+15x-15+x^3+5x^2-5x-52-16x+11-x=0$

$\Rightarrow x^3+8x^2-7x-56=0$

$\Rightarrow x^2(x+8)-7(x+8)=0$

$\Rightarrow (x+8)(x^2-7)=0$

হয়, $x+8=0$ | অথবা, $x^2-7=0$

$\Rightarrow x=-8$ | $\Rightarrow x^2=7$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{7}$

∴ নির্ণেয় মূলগুলো: $x=-8, \sqrt{7}, -\sqrt{7}$ এখানে, সবগুলো মূলই বাস্তব।

A এর ট্রেস $=3+x+1+x+4+x=8+3x$

এখন, $x=-8$ হলে, A এর ট্রেস $=8+3(-8)$

$=8-24=-16$

$x=\sqrt{7}$ হলে, A এর ট্রেস $=8+3\sqrt{7}$

$x=-\sqrt{7}$ হলে, A এর ট্রেস $=8-3\sqrt{7}$

∴ নির্ণেয় A এর ট্রেসসমূহ: $-16\ ;\ 8+3\sqrt{7}\ ;\ 8-3\sqrt{7}$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৬** $S=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$,

$U=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 2a^3+1 & 2b^3+1 & 2c^3+1\\ a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix}$

**(ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর** $\begin{vmatrix}a & -x & a+x\\ b & -y & b+y\\ c & -z & c+z\end{vmatrix}=0.$ [য. বো. ২২]

**(খ) দেখাও যে, $(ST)^{-1}-T^{-1}S^{-1}$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।** [য. বো. ২২]

**(গ) প্রমাণ কর যে, $|U|=-(2abc+1)(a-b)(b-c)(c-a)$.**

[য. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** L.H.S. $=\begin{vmatrix}a & -x & a+x\\ b & -y & b+y\\ c & -z & c+z\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a & -x & a\\ b & -y & b\\ c & -z & c\end{vmatrix}=0 \qquad [c_3'=c_3+c_2]$

[∵ নির্ণায়কটির ১ম ও ৩য় কলামের উপাদানসমূহ একই]

$=$ R.H.S.

∴ $\begin{vmatrix}a & -x & a+x\\ b & -y & b+y\\ c & -z & c+z\end{vmatrix}=0$ **(Proved)**

**খ** দেওয়া আছে, $S=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$ST=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3-1 & 5+2\\ 6+3 & -10-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 7\\ 9 & -16\end{pmatrix}$

∴ $|ST|=64-63=1\neq 0$

আমরা জানি, $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

∴ $(ST)^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-16 & -7\\ -9 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -7\\ -9 & -4\end{pmatrix}$

$|T|=6-5=1\neq 0$

∴ $T^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

∴ $|S|=3-2=1\neq 0$

∴ $S^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

$T^{-1}S^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6-10 & -2-5\\ -3-6 & -1-3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-16 & -7\\ -9 & -4\end{pmatrix}$

$(ST)^{-1}-T^{-1}S^{-1}=\begin{pmatrix}-16 & -7\\ -9 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-16 & -7\\ -9 & -4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; যা একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স। **(Showed)**

**গ** দেওয়া আছে, $U=\begin{bmatrix}a & b & c\\ 2a^3+1 & 2b^3+1 & 2c^3+1\\ a^2 & b^2 & c^2\end{bmatrix}$

∴ $|U|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ 2a^3+1 & 2b^3+1 & 2c^3+1\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a & b & c\\ 2a^3 & 2b^3 & 2c^3\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & c\\ 1 & 1 & 1\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$

$=2abc\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a & b & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a & b & c\end{vmatrix}$

$=(2abc+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a & b & c\end{vmatrix}$

$=(2abc+1)\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2\\ a-b & b-c & c\end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix}c_1'=c_1-c_2\\ c_2'=c_2-c_3\end{bmatrix}$

$=(2abc+1)\begin{vmatrix}a^2-b^2 & b^2-c^2\\ a-b & b-c\end{vmatrix}$

$=(2abc+1)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}a+b & b+c\\ 1 & 1\end{vmatrix}$

$=(2abc+1)(a-b)(b-c)(a+b-b-c)$

$=-(2abc+1)(a-b)(b-c)(c-a)$

∴ $|U|=-(2abc+1)(a-b)(b-c)(c-a)$ **(Proved)**



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ১৭** $A=\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^4-2a & b^4-2b & c^4-2c \end{bmatrix}$,

$P=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $f(x)=5x^2-11x$.

(ক) প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$ [রা. বো. ২১]

(খ) $f(P)+6I_2$ নির্ণয় কর।

[চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২০, ২২; য. বো. ২২; দা. বো. ২১]

(গ) প্রমাণ কর যে, $\det(A) = abc(abc-2)(a-b)(b-c)(c-a)$.

[চ. বো. ২২]

সমাধান:

ক L.H.S. $=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-p & p-p^2 & p^2 \\ 1-p^2 & p^2-p^4 & p^4 \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} c_1'=c_1-c_2 \\ c_2'=c_2-c_3 \end{bmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 1-p & p(1-p) \\ 1-p^2 & p^2(1-p^2) \end{vmatrix}$

$=(1-p^2)\begin{vmatrix} 1-p & p(1-p) \\ 1 & p^2 \end{vmatrix}$

$=p(1-p^2)(1-p)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & p \end{vmatrix}$

$=p(1-p^2)(1-p)(p-1)$

$=p(p^2-1)(p-1)^2$

$=$ R.H.S. (Proved)

খ দেওয়া আছে, $P=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $f(x)=5x^2-11x$

$\therefore P^2=P.P=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 9+6 & -6-2 \\ -9-3 & 6+1 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 15 & -8 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore f(P)=5P^2-11P$

$=5\begin{bmatrix} 15 & -8 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}-11\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 75 & -40 \\ -60 & 35 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -33 & 22 \\ 33 & -11 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 75+33 & -40-22 \\ -60-33 & 35+11 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 108 & -62 \\ -93 & 46 \end{bmatrix}$

$\therefore f(P)+6I_2=\begin{bmatrix} 108 & -62 \\ -93 & 46 \end{bmatrix}+6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 108 & -62 \\ -93 & 46 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 114 & -62 \\ -93 & 52 \end{bmatrix}$ (Ans.)

গ দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^4-2a & b^4-2b & c^4-2c \end{bmatrix}$

$\therefore \det(A)=\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^4-2a & b^4-2b & c^4-2c \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$

$=a^2b^2c^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}-2abc\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$=a^2b^2c^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}-2abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$=abc(abc-2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$\begin{bmatrix} c_1'=c_1-c_2 \\ c_2'=c_2-c_3 \end{bmatrix}$

$=abc(abc-2)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix}$

$=abc(abc-2)(a-b)(b-c)(b+c-a-b)$

$\therefore \det(A)=abc(abc-2)(a-b)(b-c)(c-a)$ (Proved)

**প্রশ্ন ▶ ১৮** $B=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$P=\begin{vmatrix} 2x-S & 2x & 2x \\ 2y & 2y-S & 2y \\ 2z & 2z & 2z-S \end{vmatrix}$

(ক) $2\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=x^2$ হলে, x-এর মান নির্ণয় কর। [সি. বো. ২২]

(খ) B নির্ণায়কের ২য় সারির উপাদানগুলোর সহগুণক যথাক্রমে $A_2$, $B_2$ এবং $C_2$ হলে, $a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2$ এর মান নির্ণয় কর। [সি. বো. ২২]

(গ) $x+y+z=S$ হলে, দেখাও যে, $P=S^3$. [সি. বো. ২২]

সমাধান:

ক এখানে, $2\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=x^2$

$\Rightarrow 2(3-2x)=x^2$

$\Rightarrow 6-4x=x^2$

$\Rightarrow x^2+4x-6=0$

$\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.1(-6)}}{2.1}$

$=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{2}$

$=\frac{-4\pm2\sqrt{10}}{2}$

$=-2\pm\sqrt{10}$ (Ans.)

ADMISSION STUFFS

ADMISSION ··STUFFS··



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**ঘ** দেওয়া আছে, $B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এখানে, ২য় সারির উপাদানগুলোর সহগুণক যথাক্রমে $A_2$, $B_2$ এবং $C_2$

$\therefore a_2$ এর সহগুণক, $A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_1c_3 - b_3c_1)$

$b_2$ এর সহগুণক, $B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1c_3 - a_3c_1)$

$c_2$ এর সহগুণক, $C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_3 - a_3b_1)$

এখন,

$a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2$

$= -a_3(b_1c_3 - b_3c_1) + b_3(a_1c_3 - a_3c_1) - c_3(a_1b_3 - a_3b_1)$

$= -a_3b_1c_3 + a_3b_3c_1 + a_1b_3c_3 - a_3b_3c_1 - a_1b_3c_3 + a_3b_1c_3$

$= 0$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $P = \begin{vmatrix} 2x-S & 2x & 2x \\ 2y & 2y-S & 2y \\ 2z & 2z & 2z-S \end{vmatrix}$

$S = x + y + z$ হলে,

$P = \begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$ $[r_1' = r_1 + r_2 + r_3]$

$= (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$

$= (x+y+z)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x+y+z & -x-y-z & 2y \\ 0 & x+y+z & z-x-y \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$= (x+y+z)\begin{vmatrix} x+y+z & -x-y-z \\ 0 & x+y+z \end{vmatrix}$

$= (x+y+z)\{(x+y+z)^2 - 0\}$

$= (x+y+z)^3 = S^3$ **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ১৯** $P = \begin{bmatrix} 1+x^2-y^2 & 2xy & 2y \\ 2xy & 1-x^2+y^2 & -2x \\ -2y & 2x & 1-x^2-y^2 \end{bmatrix}$ এবং

$A = [a_{ij}]_{3\times3}$ ; যেখানে $a_{ij} = 2i - j$

(ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & a & a-2 \\ 2 & b & b-4 \\ 3 & c & c-6 \end{vmatrix} = 0.$ [ব. বো. ২২]

(খ) $\det(P) = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = -1$ [রা. বো. ২১]

(গ) $(A + I_3) . (A^T - I_3)$ নির্ণয় কর। [চা. বো. ২১]

সমাধান:

**ক** L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & a & a-2 \\ 2 & b & b-4 \\ 3 & c & c-6 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 2 & b & b \\ 3 & c & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & b & 4 \\ 3 & c & 6 \end{vmatrix}$

$= 0 - 2\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & b & 2 \\ 3 & c & 3 \end{vmatrix}$

$= 0 - 2 \times 0 = 0 =$ R.H.S. **(Proved)**

**খ** $\det(P) = \begin{vmatrix} 1+x^2-y^2 & 2xy & 2y \\ 2xy & 1-x^2+y^2 & -2x \\ -2y & 2x & 1-x^2-y^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+x^2+y^2 & 2xy & 2y \\ 0 & 1-x^2+y^2 & -2x \\ -y-x^2y-y^3 & 2x & 1-x^2-y^2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 + y\,c_3]$

$= (1+x^2+y^2)\begin{vmatrix} 1 & 2xy & 2y \\ 0 & 1-x^2+y^2 & -2x \\ -y & 2x & 1-x^2-y^2 \end{vmatrix}$

$= (1+x^2+y^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2y \\ 0 & 1+x^2+y^2 & -2x \\ -y & x+x^3+xy^2 & 1-x^2-y^2 \end{vmatrix}$

$[c_2' = c_2 - x\,c_3]$

$= (1+x^2+y^2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & -2x \\ -y & x & 1-x^2-y^2 \end{vmatrix}$

$= (1+x^2+y^2)^2\{1(1-x^2-y^2+2x^2) - 0 + 2y(0+y)\}$

$= (1+x^2+y^2)^2(1+x^2-y^2+2y^2)$

$= (1+x^2+y^2)^2(1+x^2+y^2)$

$= (1+x^2+y^2)^3$

প্রশ্নমতে, $\det(P) = 0$ হলে,

$(1+x^2+y^2)^3 = 0$

$\Rightarrow 1+x^2+y^2 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 = -1$ **(Proved)**

**গ** দেওয়া আছে, $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ ; যেখানে $a_{ij} = 2i - j$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$a_{11} = 2-1 = 1$ ; $a_{12} = 2-2 = 0$ ; $a_{13} = 2-3 = -1$

$a_{21} = 4-1 = 3$ ; $a_{22} = 4-2 = 2$ ; $a_{23} = 4-3 = 1$

$a_{31} = 6-1 = 5$ ; $a_{32} = 6-2 = 4$, $a_{33} = 6-3 = 3$

$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

এখন, $(A + I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

এবং $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore A^T - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ডানপক্ষ $= (A + I_3)(A^T - I_3)$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0+1 & 6+0-1 & 10+0-2 \\ 0+0-1 & 9+3+1 & 15+12+2 \\ 0+0-4 & 15+4+4 & 25+16+8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ -1 & 13 & 29 \\ -4 & 23 & 49 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

**প্রশ্ন ▶ ২৩** মূলকক-১: $A = \begin{bmatrix} 1+p^2-q^2 & 2pq & -2q \\ 2pq & 1-p^2+q^2 & 2p \\ 2q & -2p & 1-p^2-q^2 \end{bmatrix}$

মূলকক-২: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

(ক) $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 10 \\ -7 & 0 & 15 \\ -10 & -15 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম কিনা যাচাই কর। [চ. বো. ২১]

(খ) দেখাও যে, $|A| = (1+p^2+q^2)^3$ [চ. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২১]

(গ) $BX = C$ হলে x, y, z নির্ণয় কর। [চ. বো. ২১]

সমাধান:

ক একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স P কে বিপ্রতিসম বলা হবে যদি $P^T = -P$ হয়।

যদি, $P = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 10 \\ -7 & 0 & 15 \\ -10 & -15 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore P^T = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 10 \\ -7 & 0 & 15 \\ -10 & -15 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 7 & 10 \\ -7 & 0 & 15 \\ -10 & -15 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -P$$

যেহেতু $P^T = -P$

$\therefore$ P বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

খ এখানে, $A = \begin{bmatrix} 1+p^2-q^2 & 2pq & -2q \\ 2pq & 1-p^2+q^2 & 2p \\ 2q & -2p & 1-p^2-q^2 \end{bmatrix}$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1+p^2-q^2 & 2pq & -2q \\ 2pq & 1-p^2+q^2 & 2p \\ 2q & -2p & 1-p^2-q^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+p^2+q^2 & 2pq & -2q \\ 0 & 1-p^2+q^2 & 2p \\ q(1+p^2+q^2) & -2p & 1-p^2-q^2 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - qc_3]$

$$= (1+p^2+q^2) \begin{vmatrix} 1 & 2pq & -2q \\ 0 & 1-p^2+q^2 & 2p \\ q & -2p & 1-p^2-q^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+p^2+q^2) \begin{vmatrix} 1 & -2pq+2pq & -2q \\ 0 & 1+p^2+q^2 & 2p \\ q & -p(1+p^2+q^2) & 1-p^2-q^2 \end{vmatrix}$$

$[c_2' = c_2 + pc_1]$

$$= (1+p^2+q^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2q \\ 0 & 1 & 2p \\ q & -p & 1-p^2-q^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+p^2+q^2)^2 \{1(1-p^2-q^2-2p^2) - 2q(-q)\}$$

$$= (1+p^2+q^2)^2 \{1-p^2-q^2-2p^2+2q^2\}$$

$$= (1+p^2+q^2)^2 (1+p^2+q^2)$$

$$= (1+p^2+q^2)^3 \text{ (Showed)}$$

গ দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

এখন, $BX = C$ হলে, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+0.y+2z \\ -2x+2y-2z \\ -2x+y-6z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$\therefore x + 0.y + 2z = 3$

$\therefore -2x + 2y - 2z = -2$

$\therefore -2x + y - 6z = -7$

$$\therefore D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-12+2) + 0 + 2(-2+4)$$

$$= -6$$

$$\therefore D_x = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -7 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-12+2) - 0 + 2(-2+14)$$

$$= -6$$

$$\therefore D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(12-14) - 3(12-4) + 2(14-4)$$

$$= -6$$

$$\therefore D_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-14+2) - 0 + 3(-2+4)$$

$$= -6$$

$$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-6}{-6} = 1;$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ (Ans.)



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ২১** $D=\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ একটি তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়ক এবং

$$R=\begin{bmatrix} a & b & a+b+2c \\ b & b+c+2a & c \\ c+a+2b & a & c \end{bmatrix}$$

(ক) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ হলে, $2A + B$ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২১]

(খ) প্রমাণ কর যে, $D = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$ [কু. বো. ২১]

(গ) প্রমাণ কর যে, $|R| = -2(a+b+c)^3$ [কু. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

$$\therefore 2A+B=2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -1 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$ **(Ans.)**

**খ** $D=\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} bc-ca & ca-ab & ab \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_1'=c_1-c_2 \\ c_2'=c_2-c_3 \end{bmatrix}$$
$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} -c & -a & ab \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$
$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} -c+a & -a & ab \\ 0 & 1 & c \\ a-c & b+c & c^2 \end{vmatrix} \quad [c_1'=c_1-c_2]$$
$$=(a-b)(b-c)(a-c)\begin{vmatrix} 1 & -a & ab \\ 0 & 1 & c \\ 1 & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$
$$=(a-b)(b-c)(a-c)\begin{vmatrix} 1 & -a & ab \\ 0 & 1 & c \\ 0 & a+b+c & c^2-ab \end{vmatrix}$$
$$[r_3'=r_3-r_1]$$
$$=(a-b)(b-c)(a-c)\{c^2-ab-c(a+b+c)\}$$
$$=(a-b)(b-c)(a-c)(c^2-ab-ac-bc-c^2)$$
$$=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$ **(Proved)**

**গ** দেওয়া আছে,

$$R=\begin{bmatrix} a & b & a+b+2c \\ b & b+c+2a & c \\ c+a+2b & a & c \end{bmatrix}$$
$$\therefore |R|=\begin{vmatrix} a & b & a+b+2c \\ b & b+c+2a & c \\ c+a+2b & a & c \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} 2a+2b+2c & b & a+b+2c \\ 2a+2b+2c & b+c+2a & c \\ 2a+2b+2c & a & c \end{vmatrix}$$
$$[c_1'=c_1+c_2+c_3]$$
$$=2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & a+b+2c \\ 1 & b+c+2a & c \\ 1 & a & c \end{vmatrix}$$
$$=2(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & -c-2a & a+b+c \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 1 & a & c \end{vmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} r_1'=r_1-r_2 \\ r_2'=r_2-r_3 \end{bmatrix}$$
$$=2(a+b+c)\begin{vmatrix} -c-2a & a+b+c \\ a+b+c & 0 \end{vmatrix}$$
$$=2(a+b+c)\{0-(a+b+c)^2\}$$
$$=-2(a+b+c)^3$$ **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ২২** $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & M \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3-1 & q^3-1 & r^3-1 \end{bmatrix}$ এবং

$$\Delta=\begin{vmatrix} (s-x)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (s-y)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (s-z)^2 \end{vmatrix}$$

(ক) M এর মান কত হলে A ম্যাট্রিক্সের ট্রেস 5 হবে? [চ. বো. ২১]

(খ) দেখাও যে, $|B| = (pqr-1)(p-q)(q-r)(r-p)$ [চ. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩; ব. বো. ২৩]

(গ) যদি $s = x+y+z$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\Delta = 2xyzs^3$ [চ. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** আমরা জানি, ম্যাট্রিক্স এর মুখ্যকর্ণের যোগফলকে ট্রেস বলে।

$\therefore \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & M \end{bmatrix}$ এর ট্রেস $= 4 + M$

প্রশ্নমতে, $4 + M = 5$

$\Rightarrow M = 5 - 4 = 1$

$\therefore M = 1$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $B=\begin{bmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3-1 & q^3-1 & r^3-1 \end{bmatrix}$

$$\therefore |B|=\begin{vmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3-1 & q^3-1 & r^3-1 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3 & q^3 & r^3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=pqr\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix}$$
$$=(pqr-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix}$$
$$=(pqr-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p-q & q-r & r \\ p^2-q^2 & q^2-r^2 & r^2 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_1'=c_1-c_2 \\ c_2'=c_2-c_3 \end{bmatrix}$$
$$=(pqr-1)\begin{vmatrix} p-q & q-r \\ p^2-q^2 & q^2-r^2 \end{vmatrix}$$
$$=(pqr-1)(p-q)(q-r)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p+q & q+r \end{vmatrix}$$
$$=(pqr-1)(p-q)(q-r)(q+r-p-q)$$
$$=(pqr-1)(p-q)(q-r)(r-p)$$
$$\therefore |B|=(pqr-1)(p-q)(q-r)(r-p)$$ **(Proved)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** দেওয়া আছে,

$$\Delta = \begin{vmatrix} (s-x)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (s-y)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (s-z)^2 \end{vmatrix}, s = x+y+z$$

$$= \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 \\ y^2 & (x+z)^2-y^2 & y^2-y^2 \\ z^2 & z^2-z^2 & (x+y)^2-z^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_2' = c_2 - c_1 \\ c_3' = c_3 - c_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (y+z)^2 & (x+y+z)(x-y-z) & (x+y+z)(x-y-z) \\ y^2 & (x+y+z)(x+z-y) & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y+z)(x+y-z) \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x-y-z & x-y-z \\ y^2 & z+x-y & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y-z) \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} 2yz & -2z & -2y \\ y^2 & z+x-y & 0 \\ z^2 & 0 & x+y-z \end{vmatrix} [r_1' = r_1 - r_2 - r_3]$$

$$= 2(x+y+z)^2 \begin{vmatrix} yz & -z & -y \\ y^2 & z+x-y & 0 \\ z^2 & 0 & x+y-z \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y+z)^2 \begin{vmatrix} yz & 0 & 0 \\ y^2 & z+x & \frac{y^2}{z} \\ z^2 & \frac{z^2}{y} & x+y \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_2' = c_2 + \frac{1}{y}c_1 \\ c_3' = c_3 + \frac{1}{z}c_1 \end{bmatrix}$$

$$= 2(x+y+z)^2\, yz \begin{vmatrix} z+x & \frac{y^2}{z} \\ \frac{z^2}{y} & x+y \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y+z)^2\, yz\,(zx+x^2+yz+xy-yz)$$

$$= 2yz(x+y+z)^2.x(x+y+z)$$

$$= 2xyz(x+y+z)^3$$

$$= 2xyz.s^3$$ **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ২৩** $x+y+z=3$

$x+ay+a^2z=l$

$x+a^2y+a^4z=m$

$$A = \begin{bmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{bmatrix}$$

(ক) প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix} x+y & 3(y+z) & z+x \\ 1 & 3 & 1 \\ z & 3x & y \end{vmatrix} = 0$ [ম. বো. ২১]

(খ) সমীকরণগুলোকে $AX = B$ আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে,

$Det(A) = a(a-1)^2(a^2-1)$. [ম. বো. ২১]

(গ) A ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক D হলে, প্রমাণ কর যে, $D = 2(x+y+z)^3$

**সমাধান:**

**ক** L.H.S. $= \begin{vmatrix} x+y & 3(y+z) & z+x \\ 1 & 3 & 1 \\ z & 3x & y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x+y+z & 3(x+y+z) & x+y+z \\ 1 & 3 & 1 \\ z & 3x & y \end{vmatrix} [r_1' = r_1 + r_3]$$

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ z & 3x & y \end{vmatrix}$$

$= (x+y+z).0$ [$\because r_1 = r_2$]

$= 0 =$ R.H.S. **(Proved)**

**খ** প্রদত্ত সমীকরণগুলো: $x+y+z=3$

$x+ay+a^2z=l$

$x+a^2y+a^4z=m$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ l \\ m \end{pmatrix}$$ যা $AX = B$ আকারে

যেখানে, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 3 \\ l \\ m \end{pmatrix}$

$$\therefore \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-a & a-a^2 & a^2 \\ 1-a^2 & a^2-a^4 & a^4 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-a & a(1-a) \\ 1-a^2 & a^2(1-a^2) \end{vmatrix}$$

$= (1-a)(1-a^2)(a^2-a)$

$= a(a-1)^2(a^2-1)$ **(Showed)**

**গ** দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{bmatrix}$

$$\therefore D = |A| = \begin{bmatrix} 2(x+y+z) & x & y \\ 2(x+y+z) & y+z+2x & y \\ 2(x+y+z) & x & z+x+2y \end{bmatrix}$$

$[c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$$= 2(x+y+z) \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & y+z+2x & y \\ 1 & x & z+x+2y \end{bmatrix}$$

$$= 2(x+y+z) \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & x+y+z & 0 \\ 0 & 0 & x+y+z \end{bmatrix}$$

$[r_2' = r_2 - r_1; r_3' = r_3 - r_1]$

$$= 2(x+y+z) \begin{vmatrix} x+y+z & 0 \\ 0 & x+y+z \end{vmatrix}$$

$= 2(x+y+z)^3$

$\therefore D = |A| = 2(x+y+z)^3$ **(Proved)**



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

### ম্যাট্রিক্সের পরিচয় ও প্রকারভেদ

১। যদি A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $A^2 = I$ হয়, তবে A কে বলে– [য. বো. ২২]

ক শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স খ অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স
গ শূন্য ম্যাট্রিক্স ঘ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স

উত্তর: খ অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স

ব্যাখ্যা: $A^2 = I$ হলে অভেদঘাতি হয়।

২। কোনটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স? [ম. বো. ২৩]

ক $\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix}-7 & 16\\-3 & 7\end{bmatrix}$
গ $[5\ \ 7\ \ 9]$ ঘ $[0\ 0\ 0]$

উত্তর: খ $\begin{bmatrix}-7 & 16\\-3 & 7\end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর জন্য $A^2 = I$ হলে তাকে অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স বলে। এখানে শুধুমাত্র অপশন খ তে বর্গ ম্যাট্রিক্স আছে। তাই এটিই সঠিক উত্তর।

অথবা, অপশন খ $\begin{bmatrix}-7 & 16\\-3 & 7\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = I_2$ [Using Calculator]

৩। $A^2 = A$ হলে A ম্যাট্রিক্সটি– [ম. বো. ২২]

ক সমঘাতি খ ব্যতিক্রমী
গ প্রতিসম ঘ অব্যতিক্রমী

উত্তর: ক সমঘাতি

ব্যাখ্যা: $A^2 = A$ হলে সমঘাতি হয়।

৪। নিচের কোনটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স? [কু. বো. ২২]

ক $\begin{bmatrix}-2 & -1\\-2 & -1\end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix}2 & 1\\-2 & -1\end{bmatrix}$
গ $\begin{bmatrix}-2 & 1\\-2 & -1\end{bmatrix}$ ঘ $\begin{bmatrix}2 & 1\\-2 & 1\end{bmatrix}$

উত্তর: খ $\begin{bmatrix}2 & 1\\-2 & -1\end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: $A^2 = A$ হলে সমঘাতি হয়।
Calculator দিয়ে $A^2$ বের করে Option Test কর।

৫। কর্ণ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে– [ঢা. বো. ১৯]

(i) $a_{ij} \neq 0, i = j$
(ii) $a_{ij} = 0, i > j$
(iii) $a_{ij} = 0, i < j$
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: কর্ণ ম্যাট্রিক্সের শর্ত: $a_{ij} = 0$, যখন $i \neq j$

**Extra Info:** একক/অভেদক ম্যাট্রিক্সের শর্ত: $a_{ij} = 1$, যখন $i = j$
এবং $a_{ij} = 0$, যখন $i \neq j$

৬। নিচের কোনটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স?

ক $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\2 & 3 & 0\\4 & 1 & 3\end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 3 & 4\\-1 & 4 & 5\end{bmatrix}$
গ $\begin{bmatrix}0 & 1 & -4\\-1 & 0 & 3\\4 & -3 & 0\end{bmatrix}$ ঘ কোনোটিই নয়

উত্তর: খ $\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 3 & 4\\-1 & 4 & 5\end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে,
$A = A^T$ হলে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে।

৭। $\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\0 & 5 & m\\-2 & 4 & 5\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হলে m = কত? [কু. বো. ২৩]

ক $-2$ খ 0
গ 4 ঘ 5

উত্তর: গ 4

ব্যাখ্যা: প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের সাধারণ ফরম্যাট $\begin{bmatrix}e & a & b\\a & f & c\\b & c & g\end{bmatrix}$

$\therefore$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে, $a_{ij} = a_{ji}$
$\Rightarrow a_{23} = a_{32}$
$\therefore m = 4$

৮। যদি $\begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\-5 & 0 & y\\x & 4 & 0\end{bmatrix}$ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) = ? [দি. বো. ২২]

ক $(-3, -4)$ খ $(-3, 4)$
গ $(3, -4)$ ঘ $(3, 4)$

উত্তর: গ $(3, -4)$

ব্যাখ্যা: $\begin{bmatrix}0 & a\\-a & 0\end{bmatrix}$ or, $\begin{bmatrix}0 & a & b\\-a & 0 & c\\-b & -c & 0\end{bmatrix}$

এটি বিপ্রতিসম Matrix এর সাধারণ ফরম্যাট। মুখ্য কর্ণের সকল ভুক্তি 0 এবং মুখ্য কর্ণ ব্যতীত তীর্যক ভুক্তিগুলি পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হবে।

$\therefore x = 3; y = -4$

৯। $\begin{bmatrix}a & 2 & d\\-2 & b & -3\\-7 & 3 & c\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম হলে, a + b + c + d এর মান কত?

ক 3 খ 2
গ 7 ঘ 5

উত্তর: গ 7

ব্যাখ্যা: বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের সবগুলো ভুক্তি শূন্য হয় এবং $a_{ij} = -a_{ji}$

$\therefore a = 0, b = 0, c = 0$ এবং এখানে $d = 7$

$\therefore a + b + c + d = 7$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**১০। নিচের কোনটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স?** [কু. বো. ২১]

ক $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix}$

গ $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ ঘ $\begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & a \end{bmatrix}$

**উত্তর:** গ $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$

**ব্যাখ্যা:** $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ or, $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ এটি বিপ্রতিসম Matrix এর সাধারণ ফরম্যাট। মুখ্য কর্ণের সকল ভুক্তি 0 এবং মুখ্য কর্ণ ব্যতীত তীর্যক ভুক্তিগুলি পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হবে।

**১১। A ও B দুইটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে AB – BA একটি–**

ক প্রতিসম ম্যাট্রিক্স খ কর্ণ ম্যাট্রিক্স

গ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স ঘ শূন্য ম্যাট্রিক্স

**উত্তর:** গ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স

**ব্যাখ্যা:** $A = A^T$, $B = B^T$

$\therefore (AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T$

$= B^TA^T - A^TB^T$

$= BA - AB$

$= -(AB - BA)$

$\therefore$ AB – BA একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স

**Note:** বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের শর্ত: $A^T = -A$

**১২। বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে কোনটি সত্য?** [রা. বো. ২৩]

ক $a_{ij} = a_{ji}$ খ $a_{ij} = 0$

গ $a_{ij} = -a_{ji}$ ঘ $a_{ij} \neq a_{ji}$

**উত্তর:** গ $a_{ij} = -a_{ji}$

**ব্যাখ্যা:** বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে, $a_{ij} = -a_{ji}$

**Note:** প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে, $a_{ij} = a_{ji}$
বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে, $a_{ij} = -a_{ji}$

**১৩।** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ **এটি কোন ধরনের ম্যাট্রিক্স?** [ম. বো. ২৩]

ক স্কেলার খ নিম্ন ত্রিভুজাকার

গ উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ঘ কর্ণ

**উত্তর:** গ উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার

**ব্যাখ্যা:** যে Matrix এর মুখ্য কর্ণের নিচের সবগুলো ভুক্তি 0, তাকে উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার Matrix বলে।

**১৪।** $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & a \end{bmatrix}$ **ম্যাট্রিক্সটির ট্রেস (Trace) এর মান 8 হলে, a এর মান কোনটি?**

ক 5 খ 3

গ 2 ঘ 4

**উত্তর:** খ 3

**ব্যাখ্যা:** $1 + 4 + a = 8$

$\therefore a = 3$

**Note:** ট্রেস = মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলোর যোগফল। ট্রেস শুধুমাত্র বর্গ ম্যাট্রিক্সের হয়।

**১৫।** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-2i \\ 1+2i & i-2 \end{pmatrix}$ **ম্যাট্রিক্সের অনুবন্ধী (conjugate) ম্যাট্রিক্স কোনটি?** [সি. বো. ২৩]

ক $\begin{pmatrix} 2 & 3+2i \\ 1-2i & i+2 \end{pmatrix}$ খ $\begin{pmatrix} 3-2i & 2 \\ i-2 & 1+2i \end{pmatrix}$

গ $\begin{pmatrix} 2 & 1+2i \\ 3-2i & i-2 \end{pmatrix}$ ঘ $\begin{pmatrix} 2 & 3+2i \\ 1-2i & -i-2 \end{pmatrix}$

**উত্তর:** ঘ $\begin{pmatrix} 2 & 3+2i \\ 1-2i & -i-2 \end{pmatrix}$

**ব্যাখ্যা:** জটিল ম্যাট্রিক্সের অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স মানে জটিল ভুক্তিগুলোর অনুবন্ধী নিয়ে যে ম্যাট্রিক্স হয় সেটা। অর্থাৎ জটিল ভুক্তিগুলোর কেবল i এর সহগের চিহ্ন পরিবর্তন হবে।

$\therefore$ A এর অনুবন্ধী $= \begin{pmatrix} 2 & 3+2i \\ 1-2i & -i-2 \end{pmatrix}$

**১৬। A ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে যখন–** [কু. বো. ২১]

**(i) A বর্গ**
**(ii) $A^2 = A$**
**(iii) $A^T = A$**
**নিচের কোনটি সঠিক?**

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** খ i ও iii

**ব্যাখ্যা:** (i) A বর্গ ম্যাট্রিক্স হতে হবে।
(ii) $A^2 = A$ হলে সমঘাতি হয়, প্রতিসম না।
(iii) $A = A^T$ হলে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে।

**১৭।** $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **একটি–** [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২]

**(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স**
**(ii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স**
**(iii) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স**
**নিচের কোনটি সঠিক?**

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** ক i ও ii

**ব্যাখ্যা:** (i) সারি = 3 ; কলাম = 3 → বর্গ Matrix
(ii) $A = A^T$ ; প্রতিসম Matrix
(iii) Det $= 7(30 - 9) = 147 \neq 0$ $\therefore$ অব্যতিক্রমী

**১৮।** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **ম্যাট্রিক্সটি–** [ম. বো. ২২]

**(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স**
**(ii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স**
**(iii) অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স**
**নিচের কোনটি সঠিক?**

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** ঘ i, ii ও iii

**ব্যাখ্যা:** (i) সারি সংখ্যা = কলাম সংখ্যা
(ii) $A = A^T$ ; প্রতিসম।
(iii) $|A| \neq 0$ ; অব্যতিক্রমী



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



১৯। $\begin{bmatrix}7 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -5\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি– [চ. বো. ২৩]

(i) কর্ণ ম্যাট্রিক্স
(ii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স
(iii) ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) মুখ্য কর্ণের ভুক্তি ছাড়া বাকি সবাই 0

(ii) $A = A^T$ ; যেখানে $A = \begin{bmatrix}7 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -5\end{bmatrix}$

(iii) ত্রিভুজাকার Matrix এর ক্ষেত্রে মুখ্য কর্ণের উপরে বা নিচের ভুক্তিগুলো 0 হয়।

২০। $\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\0 & 7 & 0\\0 & 0 & 8\end{bmatrix}$ একটি– [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১, ১৭; কু. বো. ১৭; য. বো. ১৭]

(i) কর্ণ ম্যাট্রিক্স
(ii) বর্গ ম্যাট্রিক্স
(iii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণ ব্যতীত বাকি সকল ভুক্তি শূন্য তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলে।
(ii) সারি সংখ্যা ও কলাম সংখ্যা সমান হলে সেটি বর্গ ম্যাট্রিক্স।
(iii) যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের অশূন্য ভুক্তিগুলো সমান তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে।

২১। $\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\0 & -6 & 0\\0 & 0 & -6\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি– [য. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: সকল বো. ১৮]

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স
(ii) অভেদক ম্যাট্রিক্স
(iii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) সারি সংখ্যা = কলাম সংখ্যা
(ii) মুখ্য কর্ণের সবগুলো উপাদান 1 এবং বাকি উপাদান 0 হলে তাকে অভেদক ম্যাট্রিক্স বলে।
(iii) স্কেলার; কারণ মুখ্য কর্ণের উপাদানগুলি সমান ও বাকি সব ভুক্তি 0।

২২। $A = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি হলো– [রা. বো. ২১]

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স
(ii) কর্ণ ম্যাট্রিক্স
(iii) সমঘাতি ম্যাট্রিক্স
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) কলাম সংখ্যা = সারি সংখ্যা
(ii) কারণ, মুখ্য কর্ণ বাদে বাকি সকল ভুক্তি 0
(iii) $A^2 \neq A$ ; সমঘাতি না।

## ম্যাট্রিক্সের যোগ, বিয়োগ

❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ২৩ ও ২৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -3\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}-2 & 3\\-1 & 4\end{bmatrix}$

২৩। $A + B$ = কত? [ব. বো. ২১]

ক $\begin{bmatrix}-1 & 5\\1 & 1\end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix}-1 & -1\\-5 & 1\end{bmatrix}$
গ $\begin{bmatrix}-1 & 5\\-1 & 1\end{bmatrix}$ ঘ $\begin{bmatrix}-1 & 5\\-1 & -1\end{bmatrix}$

উত্তর: গ $\begin{bmatrix}-1 & 5\\-1 & 1\end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: $A + B = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2 & 3\\-1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 5\\-1 & 1\end{bmatrix}$

২৪। $A' - B'$ = কত? [ব. বো. ২১]

ক $\begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & -7\end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix}-3 & 1\\-1 & -7\end{bmatrix}$
গ $\begin{bmatrix}3 & -1\\-1 & -7\end{bmatrix}$ ঘ $\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & -7\end{bmatrix}$

উত্তর: ক $\begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & -7\end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: $A' - B' = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & -3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2 & -1\\3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & -7\end{bmatrix}$

২৫। $A + B = \begin{bmatrix}2 & -3\\4 & -1\end{bmatrix}$ এবং $A - B = \begin{bmatrix}4 & 5\\-2 & 7\end{bmatrix}$ হলে নিম্নের কোনটি B ম্যাট্রিক্স? [য. বো. ১৯]

ক $\begin{bmatrix}-1 & -4\\3 & -4\end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix}-1 & 1\\3 & 3\end{bmatrix}$
গ $\begin{bmatrix}6 & 2\\2 & 6\end{bmatrix}$ ঘ $\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$

উত্তর: ক $\begin{bmatrix}-1 & -4\\3 & -4\end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: $A + B = \begin{bmatrix}2 & -3\\4 & -1\end{bmatrix}$ ..... (i)

$A - B = \begin{bmatrix}4 & 5\\-2 & 7\end{bmatrix}$ ..... (ii)

(i) – (ii) $\Rightarrow 2B = \begin{bmatrix}-2 & -8\\6 & -8\end{bmatrix} \therefore B = \begin{bmatrix}-1 & -4\\3 & -4\end{bmatrix}$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**২৬।** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & -1 & 2\\0 & 1 & -5\end{bmatrix}$ হলে $A+3I=?$ [দি. বো. ২৩]

ⓚ $\begin{bmatrix}-2 & 2 & 3\\4 & -4 & 2\\0 & 1 & -8\end{bmatrix}$ ⓛ $\begin{bmatrix}-2 & 2 & 3\\4 & 2 & 2\\0 & 1 & -2\end{bmatrix}$

ⓜ $\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\4 & 2 & 2\\0 & 1 & -2\end{bmatrix}$ ⓝ $\begin{bmatrix}-2 & 5 & 3\\4 & -1 & 5\\0 & 4 & -2\end{bmatrix}$

**উত্তর:** ⓜ $\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\4 & 2 & 2\\0 & 1 & -2\end{bmatrix}$

**ব্যাখ্যা:** $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & -1 & 2\\0 & 1 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\4 & 2 & 2\\0 & 1 & -2\end{bmatrix}$

**২৭।** $A+B=\begin{bmatrix}2 & -3\\4 & -1\end{bmatrix}$ এবং $A-B=\begin{bmatrix}4 & 5\\-2 & 7\end{bmatrix}$ হলে, নিম্নের কোনটি B ম্যাট্রিক্স? [য. বো. ১৯]

ⓚ $\begin{bmatrix}-1 & -4\\3 & -4\end{bmatrix}$ ⓛ $\begin{bmatrix}-1 & 1\\3 & 3\end{bmatrix}$

ⓜ $\begin{bmatrix}6 & 2\\2 & 6\end{bmatrix}$ ⓝ $\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$

**উত্তর:** ⓚ $\begin{bmatrix}-1 & -4\\3 & -4\end{bmatrix}$

**ব্যাখ্যা:** $A+B=\begin{bmatrix}2 & -3\\4 & -1\end{bmatrix}$ ..... (i)

$A-B=\begin{bmatrix}4 & 5\\-2 & 7\end{bmatrix}$ ..... (ii)

$(i)-(ii)\Rightarrow 2B=\begin{bmatrix}-2 & -8\\6 & -8\end{bmatrix}\therefore B=\begin{bmatrix}-1 & -4\\3 & -4\end{bmatrix}$

**২৮।** A ও B দুটি $3\times3$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে, $|A-B|=0$ এর সমার্থক– [ব. বো. ১৭]

ⓚ $A=0_{mat}$ বা $B=0_{mat}$ ⓛ $|A|=0$ বা $|B|=0$

ⓜ $|A|=0$ এবং $|B|=0$ ⓝ $A=0_{mat}$ এবং $B=0_{mat}$

**উত্তর:** ⓝ $A=0_{mat}$ এবং $B=0_{mat}$

**ব্যাখ্যা:** এটা এক প্রকার স্বতঃসিদ্ধ, তুমি চাইলে A ও B কে Option wise Matrix ধরে Option check করতে পারো।

এখানে, ⓚ এবং ⓛ নং অপশনের ক্ষেত্রে যেকোন একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স বোঝায়।

ⓜ এবং ⓝ নং অপশনের ক্ষেত্রে উভয়ই শূন্য ম্যাট্রিক্স বোঝায়।

## ম্যাট্রিক্সের ক্রম ও গুণ

**২৯।** দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B এর মাত্রা যথাক্রমে $p\times q$ এবং $n\times r$ হলে AB নির্ণয়ের শর্ত কোনটি? [কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩]

ⓚ $p=r$ ⓛ $p=n$

ⓜ $q=r$ ⓝ $q=n$

**উত্তর:** ⓝ $q=n$

**ব্যাখ্যা:** দুইটি ম্যাট্রিক্স গুণ করার শর্ত হলো:

১ম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা = ২য় ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা।

$\therefore q=n$ হলে গুণ করা যাবে।

**৩০।** $A=[a_{ij}]_{3\times2}$ এবং $B=[b_{ij}]_{2\times4}$ হলে, AB ম্যাট্রিক্সটির আকার– [চ. বো. ২১]

ⓚ $3\times2$ ⓛ $2\times4$

ⓜ $4\times3$ ⓝ $3\times4$

**উত্তর:** ⓝ $3\times4$

**ব্যাখ্যা:** গুণফল ম্যাট্রিক্সের মাত্রা = ১ম ম্যাট্রিক্সের সারি × ২য় ম্যাট্রিক্সের কলাম।

$A\rightarrow3\times2$

$B\rightarrow2\times4$ $\rightarrow$ AB এর ক্রম $3\times4$

**৩১।** A, B, C ম্যাট্রিক্সত্রয়ের মাত্রা যথাক্রমে $3\times4$, $4\times5$ ও $5\times2$ হলে, (AB)C এর মাত্রা– [ম. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২৩; দি. বো. ২৩; রা. বো. ১৭]

ⓚ $4\times5$ ⓛ $3\times2$

ⓜ $2\times3$ ⓝ $3\times5$

**উত্তর:** ⓛ $3\times2$

**ব্যাখ্যা:** আমরা জানি, গুণফল Matrix এর মাত্রা = ১ম ম্যাট্রিক্স এর সারি সংখ্যা × ২য় Matrix এর কলাম সংখ্যা।

A এর মাত্রা $3\times4$

B এর মাত্রা $4\times5$

$\therefore$ AB এর মাত্রা $3\times5$

C এর মাত্রা $5\times2$

$\therefore$ (AB)C এর মাত্রা $3\times2$

**৩২।** $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ এবং $Q=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$ হলে PQ এর ক্রম কত? [কু. বো. ১৯]

ⓚ $1\times2$ ⓛ $2\times1$

ⓜ $4\times1$ ⓝ $4\times4$

**উত্তর:** ⓛ $2\times1$

**ব্যাখ্যা:** গুণফল ম্যাট্রিক্সের মাত্রা = ১ম ম্যাট্রিক্সের সারি × ২য় ম্যাট্রিক্সের কলাম।

$P\rightarrow2\times4$

$Q\rightarrow4\times1$ $\rightarrow$ PQ এর ক্রম $2\times1$

**৩৩।** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$ হলে, AB এর ক্রম কত? [ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১]

ⓚ $2\times1$ ⓛ $1\times2$

ⓜ $3\times1$ ⓝ $2\times3$

**উত্তর:** ⓚ $2\times1$

**ব্যাখ্যা:** $A\rightarrow2\times3$, $B\rightarrow3\times1$ $\Rightarrow AB=2\times1$

**৩৪।** A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর আকার যথাক্রমে $m\times n$, $n\times m$ এবং $m\times s$ হলে $(A^T+B)C$ ম্যাট্রিক্সের আকার হবে– [রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২১]

ⓚ $m\times s$ ⓛ $s\times n$

ⓜ $n\times m$ ⓝ $n\times s$

**উত্তর:** ⓝ $n\times s$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: যোগফলের ক্ষেত্রে দুটি ম্যাট্রিক্সের আকার এবং যোগফল ম্যাট্রিক্সের আকার সবর্দা সমান হবে।

$\therefore A^T + B$ এর আকার $n \times m$

C এর আকার $m \times s$

$\therefore (A^T + B)C$ এর আকার $n \times s$

**৩৫। A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর মাত্রা যথাক্রমে $4 \times 3$, $3 \times 4$ এবং $7 \times 4$ হলে $(B + A^T)$. $C^T$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা কত?** [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো, ২২; রা. বো. ২১; ব. বো. ১৯]

ক $3 \times 4$ খ $3 \times 7$

গ $4 \times 3$ ঘ $4 \times 7$

উত্তর: খ $3 \times 7$

ব্যাখ্যা: যোগফলের ক্ষেত্রে দুটি ম্যাট্রিক্সের আকার এবং যোগফল ম্যাট্রিক্সের আকার সবর্দা সমান হবে।

$\therefore B + A^T$ এর আকার $3 \times 4$

$C^T$ এর আকার $4 \times 7$

$\therefore (A^T + B)C$ এর আকার $3 \times 7$

**৩৬। $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ এবং $B = [a \quad b]$ হলে $BA$ = কত?** [ব. বো. ২৩]

ক $[-b \quad a]$ খ $\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$

গ $[b \quad -a]$ ঘ $\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$

উত্তর: গ $[b \quad -a]$

ব্যাখ্যা: $BA = [a \quad b] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [b \quad -a]$

**৩৭। $A = [2 \quad 1 \quad -1]$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ হলে, $BA$ = ?** [ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ১৯]

ক $[1]$ খ $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

গ $[4 \quad 0 \quad -3]$ ঘ $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

উত্তর: ঘ $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: $B = 3 \times 1$; $A = 1 \times 3$

$BA = 3 \times 3$

শুধু ঘ নং Option এ $3 \times 3$ ক্রম আছে।

**Note:** এমন প্রশ্নের ক্ষেত্রে অপশনে প্রথমে ম্যাট্রিক্সের আকারের দিকে নজর দিবে।

**৩৮। $A = [1 \quad -2 \quad 3]$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$ হলে, $3AB$ = কত?** [ব. বো. ২১]

ক $[-27]$ খ $[-7]$

গ $[7]$ ঘ $[21]$

উত্তর: ঘ $[21]$

ব্যাখ্যা: $AB = [1 \quad -2 \quad 3] \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$= [(2 \times 1) + (-2 \times (-4)) + (3 \times (-1))]$

$= [2 + 8 - 3] = [7]$

$\therefore 3AB = 3[7] = [21]$

**৩৯। $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হলে $IA$ = ?** [ম. বো. ২১]

ক $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

গ $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ ঘ $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

উত্তর: ঘ $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: $IA = A$

**Note:** অভেদক ম্যাট্রিক্সের সাথে কোনো ম্যাট্রিক্সকে গুণ করলে ঐ ম্যাট্রিক্সই পাওয়া যায়। যেমন $IA = A$

**৪০। ম্যাট্রিক্স $M = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ হলে, $M^T I$ = কোনটি?**

ক $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -4 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

গ $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 7 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ঘ $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

উত্তর: খ $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: $M^T I = M^T$

এখানে, $M^T = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

**Note:** অভেদক ম্যাট্রিক্স দিয়ে কোনো ম্যাট্রিক্সকে গুণ করলে ঐ ম্যাট্রিক্সই পাওয়া যায়। যেমন $AI = A$

**৪১। $p = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ হলে, $p^2 - 2I$ এর মান হয়–** [চ. বো., দি. বো. ২১ অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৭]

ক $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ খ $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

গ $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ ঘ $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

উত্তর: খ $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

ব্যাখ্যা: $p^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore p^2 - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

**৪২। A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $A^5 = A$ হলে, A ম্যাট্রিক্সের পর্যায়কাল কত?**

ক 3 খ 4

গ 5 ঘ 6

উত্তর: খ 4

ব্যাখ্যা: বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে যদি $A^{k+1} = A$ হয় তাহলে A ম্যাট্রিক্সের পর্যায় k

এখানে, $A^5 = A^{4+1} = A$

$\therefore$ পর্যায় $k = 4$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৪৩। $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ ও $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$ হলে– [দি. বো. ২১]

(i) $A-B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

(ii) $A^T B$ এর মাত্রা $2\times 3$

(iii) AB নির্ণয়যোগ্য

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) সম্ভব না; কারণ বিয়োগ বা যোগ করতে হলে Matrix এর মাত্রা একই হতে হয়।

(ii) A এর মাত্রা $2\times 2$

$A^T$ এর মাত্রা $2\times 2$

B এর মাত্রা $2\times 3$

$\therefore A^TB$ এর মাত্রা $2\times 3$

(iii) ১ম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা এবং ২য় ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা সমান হলে ম্যাট্রিক্সদ্বয় গুণনযোগ্য হবে। এখানে A ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা 2 এবং B ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা 2, তাই AB নির্ণয়যোগ্য।

## ম্যাট্রিক্সের সমতা

৪৪। $\begin{bmatrix}x+y & 1\\ 8 & x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 1\\ 8 & 10\end{bmatrix}$ হলে, (x, y) এর মান কত?

ক (3, 3) খ (6, – 3)

গ (6, 0) ঘ (8, – 2)

উত্তর: ঘ (8, – 2)

ব্যাখ্যা: $x+y=6$

$x-y=10$

$\therefore x=8, y=-2$

৪৫। $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2\\ 10\end{bmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ এবং $AP=B$ হলে, $x+y=$ কত? [ঢা. বো. ২৩]

ক 2 খ 8

গ 10 ঘ 12

উত্তর: ক 2

ব্যাখ্যা: $AP=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x+y\\ 3x+5y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 10\end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে,

$2x+y=2$

$3x+5y=10$

$\therefore x=0\ ;\ y=2$ [Using Calculator]

$\therefore x+y=2$

৪৬। $\begin{bmatrix}2 & 3 & x\\ 3 & 4 & -5\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & 8 & 7\\ 2 & y & -9\\ z & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 3 & 7\\ 8 & 8 & -18\\ 0 & 5 & 2\end{bmatrix}$ হলে x, y ও z এর মান কত? [ম. বো. ২১]

ক – 4, 8, 2 খ 14, 12, 4

গ 0, 4, – 4 ঘ 0, – 4, 4

উত্তর: গ 0, 4, – 4

ব্যাখ্যা: যার যার value লাগবে শুধু ঐ বরাবর কাজ করবো।

$x+7=7\ \therefore x=0$

$4+y=8\ \therefore y=4$

$4+z=0\ \therefore z=-4$

এখানে ম্যাট্রিক্সের সমতার ধর্ম ব্যবহার করা হয়েছে।

৪৭। $A=\begin{bmatrix}9 & -4 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স এর (1, 3) এবং (3, 3) তম ভুক্তি দুইটির যোগফল $x+3$ হলে x এর মান কত?

ক 2 খ 1

গ 3 ঘ 0

উত্তর: ঘ 0

ব্যাখ্যা: (1, 3) তম ভুক্তি = 2

(3, 3) তম ভুক্তি = 1

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $2+1=x+3$

$\therefore x=0$

## নির্ণায়কের ধর্মাবলি

৪৮। $\begin{vmatrix}x+4 & 2\\ 4x & 6\end{vmatrix}=0$, x এর মান কত? [ম. বো. ২৩]

ক 12 খ 6

গ 4 ঘ – 12

উত্তর: ক 12

ব্যাখ্যা: $(x+4)\,6-8x=0$

$\therefore x=12$

৪৯। $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$ হলে, Det(A) এর মান কত? [ব. বো. ২২]

ক – 48 খ 0

গ 48 ঘ 60

উত্তর: খ 0

ব্যাখ্যা: $\text{Det}(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & -6\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$

**Note:** নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম একই হলে ঐ নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

৫০। $p=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ হলে $|p|$ এর মান কত?

[দি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২১, ১৯; রা. বো. ২১]

ক 12 খ 20

গ 60 ঘ 120

উত্তর: গ 60

ব্যাখ্যা: $|p|=3\times 4\times 5=60$

**Note:** $\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}=abc$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৫১। $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ e & \pi & \sqrt{3}\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}$ হলে, $|A| = ?$ [ব. বো. ২২]

ক $e$ খ $\pi$

গ $2(e-\pi+\sqrt{3})$ ঘ 0

উত্তর: ঘ 0

ব্যাখ্যা: $|A| = 3\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ e & \pi & \sqrt{3}\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0$

**Note:** নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম একই হলে ঐ নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

৫২। A একটি $2 \times 2$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং $|A| = 5$ হলে, $|3A|$ এর মান কত? [সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২১]

ক $\frac{5}{9}$ খ $\frac{5}{3}$

গ 15 ঘ 45

উত্তর: ঘ 45

ব্যাখ্যা: $|3A| = 3^2|A| = 3^2 \times 5 = 45$

**Note:** A একটি $n \times n$ ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এর জন্য,

(i) $|pA| = p^n|A|$

(ii) $|(pA)^{-1}| = \frac{1}{p^n|A|}$

(iii) $|pA^{-1}| = \frac{p^n}{|A|}$

যেখানে p ধ্রুবক

৫৩। A একটি $3 \times 3$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং $|A| = 1$ হলে, $|(3A)^{-1}|$ এর মান কত? [ব. বো. ২৩]

ক $\frac{1}{27}$ খ $\frac{1}{9}$

গ 9 ঘ 27

উত্তর: ক $\frac{1}{27}$

ব্যাখ্যা: $|(3A)^{-1}| = \frac{1}{3^3|A|} = \frac{1}{27}$

৫৪। $\begin{vmatrix}x & y+z & 1\\ y & x+z & 1\\ z & x+y & 1\end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান কোনটি? [কু. বো. ২১]

ক $4x^2y^2z^2$ খ $4xyz$

গ 1 ঘ 0

উত্তর: ঘ 0

ব্যাখ্যা: $x = 1 ; y = 1 ; z = 1$ ধরে পাই

$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = 0$

যেকোনো দুটি কলাম একই হলে নির্ণায়কের মান = 0

৫৫। $\begin{vmatrix}0 & 1 & \omega\\ 1 & \omega & \omega^2\\ \omega & 1 & \omega^2\end{vmatrix}$ এর মান কত? [ম. বো. ২৩]

ক $\omega - \omega^2$ খ $\omega^2$

গ $\omega + \omega^2$ ঘ $\omega^2 - \omega$

উত্তর: ক $\omega - \omega^2$

ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix}0 & 1 & \omega\\ 1 & \omega & \omega^2\\ \omega & 1 & \omega^2\end{vmatrix}$

$= 0 \times (\omega^3 - \omega^2) - 1(\omega^2 - \omega^3) + \omega(1 - \omega^2)$

$= 0 - 1(\omega^2 - 1) + \omega - \omega^3$

$= -\omega^2 + 1 + \omega - 1$

$= \omega - \omega^2$

৫৬। $\begin{vmatrix}1 & bc & bc(b+c)\\ 1 & ca & ca(c+a)\\ 1 & ab & ab(a+b)\end{vmatrix}$ এর মান কোনটি?

ক 1 খ abc

গ $abc(a+b+c)$ ঘ 0

উত্তর: ঘ 0

ব্যাখ্যা: $a = 1, b = 1, c = 1$ ধরে পাই

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix} = 0$

যেকোনো দুটি কলাম একই হলে নির্ণায়কের মান = 0

৫৭। $\begin{vmatrix}p & 2 & q+r\\ q & 2 & r+p\\ r & 2 & p+q\end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান কত? [দি. বো. ১৭]

ক 0 খ 1

গ pqr ঘ $p+q+r$

উত্তর: ক 0

ব্যাখ্যা: $p = 1, q = 1 ; r = 1$ ধরে পাই,

$\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix} = 0$

যেকোনো দুটি কলাম একই হলে নির্ণায়কের মান = 0

৫৮। $\begin{vmatrix}\ln x & \ln y & \ln z\\ \ln 2x & \ln 2y & \ln 2z\\ \ln 3x & \ln 3y & \ln 3z\end{vmatrix}$ এর মান কোনটি?

ক 0 খ $\ln 6$

গ $\ln 3$ ঘ $\ln xyz$

উত্তর: ক 0

ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix}\ln\frac{x}{y} & \ln\frac{y}{z} & \ln z\\ \ln\frac{x}{y} & \ln\frac{y}{z} & \ln 2z\\ \ln\frac{x}{y} & \ln\frac{y}{z} & \ln 3z\end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix}c_1' = c_1 - c_2\\ c_2' = c_2 - c_3\end{bmatrix}$

$= \ln\frac{x}{y} \cdot \ln\frac{y}{z}\begin{vmatrix}1 & 1 & \ln z\\ 1 & 1 & \ln 2z\\ 1 & 1 & \ln 3z\end{vmatrix} = 0$

৫৯। নিচের কোন নির্ণায়কের মান শূন্য? [ব. বো. ১৭]

ক $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}$ খ $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

গ $\begin{vmatrix}4 & 0 & 8\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 2\end{vmatrix}$ ঘ $\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 0\end{vmatrix}$

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



উত্তরঃ (গ) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

ব্যাখ্যঃ $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$ [Using Calculator]

৬০। $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ এর মান কোনটি?

(ক) 4xyz (খ) $2(x-y)(y-z)(z-x)$
(গ) 2xyz (ঘ) $-1$

উত্তরঃ (ক) 4xyz

ব্যাখ্যাঃ x, y, z এর যেকোনো মান ধরে নিয়ে Option Test করতে পারো।

৬১। $2\begin{vmatrix} 2 & 5 & x \\ 3 & 6 & y \\ 4 & 7 & z \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের সমান কোনটি? [দি. বো. ১৯]

(ক) $\begin{vmatrix} 4 & 10 & x \\ 6 & 12 & y \\ 8 & 14 & z \end{vmatrix}$ (খ) $\begin{vmatrix} 4 & 10 & 2x \\ 6 & 12 & 2y \\ 8 & 14 & 2z \end{vmatrix}$
(গ) $\begin{vmatrix} 4 & 7 & x+2 \\ 6 & 8 & y+2 \\ 8 & 9 & z+2 \end{vmatrix}$ (ঘ) $\begin{vmatrix} 2 & 10 & x \\ 3 & 12 & y \\ 4 & 14 & z \end{vmatrix}$

উত্তরঃ (ঘ) $\begin{vmatrix} 2 & 10 & x \\ 3 & 12 & y \\ 4 & 14 & z \end{vmatrix}$

ব্যাখ্যাঃ ② $\begin{vmatrix} 2 & 5 & x \\ 3 & 6 & y \\ 4 & 7 & z \end{vmatrix}$

→ একে হয় যেকোনো একটা সারি অথবা যেকোনো একটা কলামের সাথে গুণ করতে হবে।

$\therefore 2\begin{vmatrix} 2 & 5 & x \\ 3 & 6 & y \\ 4 & 7 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 10 & x \\ 3 & 12 & y \\ 4 & 14 & z \end{vmatrix}$

৬২। P এর কোন মানের জন্য $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & P \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে?

[য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্নঃ রা. বো. ১৭]

(ক) $-3$ (খ) $-1$
(গ) 1 (ঘ) 3

উত্তরঃ (ঘ) 3

ব্যাখ্যাঃ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & P \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 1(0-5P) - 2(0-3P) + 3(5-6) = 0$
$\Rightarrow -5P + 6P - 3 = 0$
$\therefore P = 3$

৬৩। x এর কোন মানের জন্য $\begin{vmatrix} x^2 & x & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0$ হবে? [য. বো. ২৩]

(ক) 0, 3 (খ) $-3, 0$
(গ) 0, 1 (ঘ) $-1, 0$

উত্তরঃ (গ) 0, 1

ব্যাখ্যাঃ $\begin{vmatrix} x^2 & x & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow -6(3x^2 - 3x) = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0$
$\therefore x = 0, 1$

৬৪। $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $|A| = 0$ হলে x এর মান কত?

[ব. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্নঃ দি. বো. ১৯]

(ক) $-2$ (খ) 0
(গ) $\frac{2}{5}$ (ঘ) 2

উত্তরঃ (ঘ) 2

ব্যাখ্যাঃ $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x(3-2) - 0(0-4) + 1(0-2) = 0$
$\therefore x = 2$

৬৫। $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & o \end{vmatrix} = ?$

(ক) $\begin{vmatrix} y & b & n \\ x & a & m \\ z & c & o \end{vmatrix}$ (খ) $\begin{vmatrix} y & x & z \\ b & a & c \\ n & m & o \end{vmatrix}$
(গ) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ n & m & a \\ b & c & o \end{vmatrix}$ (ঘ) (ক) ও (খ) উভয়ই

উত্তরঃ (ঘ) (ক) ও (খ) উভয়ই

ব্যাখ্যাঃ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & o \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ m & n & o \end{vmatrix}$ $[r_1 \leftrightarrow r_2]$

$= \begin{vmatrix} y & x & z \\ b & a & c \\ n & m & o \end{vmatrix}$ $[c_1 \leftrightarrow c_2]$ ∴ (খ) নং অপশন সঠিক

$= \begin{vmatrix} y & b & n \\ x & a & m \\ z & c & o \end{vmatrix}$ [Transposing] ∴ (ক) নং অপশন সঠিক

৬৬। $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এর দ্বিতীয় সারির উপাদান $a_2, b_2, c_2$ এর সহগুণক যথাক্রমে $A_2, B_2, C_2$ দ্বারা সূচিত করা হলে নিচের কোনটি সত্য?

(ক) $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0$ (খ) $a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 = 0$
(গ) $a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 = 0$ (ঘ) কোনোটিই নয়

উত্তরঃ (ক) $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0$

ব্যাখ্যাঃ $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$A_2 = -(b_1c_3 - b_3c_1) = (b_3c_1 - b_1c_3)$
$B_2 = (a_1c_3 - a_3c_1)$
$C_2 = -(a_1b_3 - b_1a_3) = (a_3b_1 - a_1b_3)$
$\therefore a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2$
$= a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 + a_1b_1c_3 - a_3b_1c_1 + a_3b_1c_1 - a_1b_3c_1$
$= 0$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৬৭। $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ হলে– [কু. বো. ২১]

(i) Det P = 1
(ii) $P^T = P$
(iii) $P = I_3$
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) অভেদক ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান 1।
(ii) সঠিক।
(iii) P, 3 ক্রমের অভেদক ম্যাট্রিক্স।

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ৬৮ ও ৬৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$A=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\\4&6&8\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

৬৮। তথ্যের আলোকে– [রা. বো. ২১]

(i) $|A| = 0$
(ii) AB এর ক্রম $3 \times 1$
(iii) BA নির্ণয়যোগ্য
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) Using Calculator
(ii) গুণফল Matrix এর মাত্রা = ১ম ম্যাট্রিক্স এর সারি × ২য় Matrix এর কলাম।
(iii) ১ম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা এবং ২য় ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা সমান হলে ম্যাট্রিক্সদ্বয় গুণনযোগ্য হবে। এখানে, B এর কলাম সংখ্যা এবং A এর সারি সংখ্যা সমান নয়। তাই BA নির্ণয়যোগ্য নয়।

৬৯। AB ম্যাট্রিক্সটি হবে– [রা. বো. ২১]

ক $\begin{bmatrix}28\\22\\40\end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix}22\\28\\40\end{bmatrix}$
গ [22 28 40] ঘ [28 22 40]

উত্তর: খ $\begin{bmatrix}22\\28\\40\end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: $AB=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\\4&6&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6+15\\2+8+18\\4+12+24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22\\28\\40\end{bmatrix}$

৭০। যদি $A=\begin{bmatrix}2&-3\\1&6\end{bmatrix}$ হয়, তবে– [চ. বো. ২২]

(i) A একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স
(ii) $|A| = 15$
(iii) A একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স নয়
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $A^T=\begin{bmatrix}2&1\\-3&6\end{bmatrix}$; $A \neq -A^T$; বিপ্রতিসম নয়।
(ii) $|A| = 12 + 3 = 15$
(iii) $A^2 \neq I$; অভেদঘাতি নয়।

৭১। নির্ণায়কের ক্ষেত্রে–
(i) দুইটি সারি একই হলে নির্ণায়কের মান শূন্য হয়
(ii) দুইটি কলাম একই হলে নির্ণায়কের মান শূন্য হয়
(iii) একটি সারির সকল ভুক্তি শূন্য হলে নির্ণায়কের মান 1 হয়
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) ও (ii) নির্ণায়কের ধর্ম।
(iii) সঠিক নয় কারণ একটি সারির সকল ভুক্তি শূন্য হলে নির্ণায়কের মান 0 হয়।

৭২। $A=\begin{vmatrix}\alpha_1&\beta_1&\gamma_1\\\alpha_2&-\beta_2&\gamma_2\\-\alpha_3&\beta_3&-\gamma_3\end{vmatrix}$ এর মান– [কু. বো. ১৭]

(i) $\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2&-\alpha_3\\\beta_1&-\beta_2&\beta_3\\\gamma_1&\gamma_2&-\gamma_3\end{vmatrix}$ এর মানের সমান

(ii) $\begin{vmatrix}\alpha_1+c\alpha_2&\alpha_2&-\alpha_3\\\beta_1+c\beta_2&-\beta_2&\beta_3\\\gamma_1+c\gamma_2&\gamma_2&-\gamma_3\end{vmatrix}$ এর মানের সমান

(iii) $\begin{vmatrix}\alpha_1&\beta_1&-\gamma_1\\-\alpha_3&\beta_3&-\gamma_3\\\alpha_2&-\beta_2&\gamma_2\end{vmatrix}$ এর মানের সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i খ i ও ii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i

ব্যাখ্যা: (i) নির্ণায়কের সারিগুলোকে কলামে আর কলামগুলোকে সারিতে পরিণত করলে নির্ণায়কের মান অপরিবর্তিত থাকে। তাই (i) সঠিক।
(ii) এর ক্ষেত্রে নির্ণায়কটিতে $[C_1' = C_1 + cC_2]$ অপারেশন করা হয়েছে। সে অনুযায়ী (2, 1) তম ভুক্তি $\beta_1 - c\beta_2$ হবে, তাই (ii) সঠিক নয়।
(iii) এ ২য় ও ৩য় সারি Interchange হয়েছে। নির্ণায়কের পাশাপাশি দুইটি সারি/কলাম Interchange হলে নির্ণায়কের চিহ্ন পরিবর্তন হয়। কিন্তু (iii) নং এ চিহ্ন পরিবর্তিত হয়নি। তাই (iii) সঠিক নয়।

## অনুরাশি ও সহগুণক

৭৩। $\begin{vmatrix}-2&5&1\\0&-3&4\\2&7&-4\end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির – 4 ভুক্তির অনুরাশি কত? [সি. বো. ২১]

ক 24 খ 6
গ – 6 ঘ – 24

উত্তর: খ 6

ব্যাখ্যা: – 4 ভুক্তির অনুরাশি হবে – 4 ভুক্তির সারি ও কলাম বাদে গঠিত নির্ণায়কটির মান $\begin{vmatrix}-2&5\\0&-3\end{vmatrix}=6$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৭৪। $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ এর (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি নিচের কোনটি? [ম. বো. ২৩]

ক 2 খ 0
গ 5 ঘ 7

উত্তর: খ 0

ব্যাখ্যা: (2, 3) তম ভুক্তি 6

6 এর অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

৭৫। $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & x \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ এর (1, 1) তম ভুক্তির অনুরাশি – 4 হলে x এর মান কত? [দি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১]

ক 6 খ 2
গ $-2$ ঘ $-6$

উত্তর: গ $-2$

ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix} -1 & x \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -4$

$\Rightarrow (-8 - 2x) = -4$

$\therefore x = -2$

৭৬। $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ y & 6 & x \\ -3 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের (3, 2) তম অনুরাশির মান 2 হলে x ও y এর মধ্যে সম্পর্কটি– [চ. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ১৯]

ক $2x + 5y = 2$ খ $3x + y = 2$
গ $x - 2y = 2$ ঘ $x - 2y = 1$

উত্তর: ঘ $x - 2y = 1$

ব্যাখ্যা: (3, 2) তম অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ y & x \end{vmatrix} = 2x - 4y$

প্রশ্নমতে, $2x - 4y = 2$

$\therefore x - 2y = 1$

৭৭। $\begin{vmatrix} 7 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & p & 3 \end{vmatrix}$ এ p এর সহগুণক কোনটি? [কু. বো. ২৩]

ক $-7$ খ $-6$
গ 6 ঘ 7

উত্তর: ঘ 7

ব্যাখ্যা: সহগুণক $= (-1)^{\text{সারি + কলাম}} \begin{vmatrix} \text{ঐ ভুক্তির সারি ও কলাম} \\ \text{বাদ দিয়ে গঠিত নির্ণায়ক} \end{vmatrix}$

$\therefore$ p এর সহগুণক $= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 7$

৭৮। $\begin{vmatrix} 13 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ এর (1, 3) তম ভুক্তির সহগুণক কত? [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩; য. বো. ২২; চ. বো. ২২; ঢা. বো. ২১]

ক $-13$ খ $-2$
গ 2 ঘ 13

উত্তর: ক $-13$

ব্যাখ্যা: সহগুণক $= (-1)^{\text{সারি + কলাম}} \begin{vmatrix} \text{ঐ ভুক্তির সারি ও কলাম} \\ \text{বাদে গঠিত নির্ণায়ক} \end{vmatrix}$

(1, 3) তম ভুক্তি 2

2 এর সহগুণক $= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 7 = -13$

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ৭৯ ও ৮০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & -2 & -4 \end{vmatrix}$ একটি নির্ণায়ক।

৭৯। (2, 1) তম ভুক্তির অনুরাশি [ম. বো. ২২]

ক $-41$ খ $-12$
গ 12 ঘ 41

উত্তর: গ 12

ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 12$

৮০। (3, 2) তম ভুক্তির সহগুণক– [ম. বো. ২২]

ক $-12$ খ $-9$
গ 9 ঘ 12

উত্তর: খ $-9$

ব্যাখ্যা: $(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9$

সহগুণক $= (-1)^{\text{সারি + কলাম}} \begin{vmatrix} \text{ঐ ভুক্তির সারি ও কলাম} \\ \text{বাদে গঠিত নির্ণায়ক} \end{vmatrix}$

৮১। $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & x \end{bmatrix}$ এর (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক 5 হলে x এর মান কত? [ম. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১]

ক 0 খ $\frac{5}{2}$
গ 5 ঘ 10

উত্তর: ক 0

ব্যাখ্যা: (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক $= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -(2x - 5)$

প্রশ্নমতে, $-(2x - 5) = 5$ $\therefore x = 0$

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ৮২ ও ৮৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & m \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

৮২। (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশির মান কত? [দি. বো. ২৩]

ক 11 খ 5
গ $-5$ ঘ $-11$

উত্তর: গ $-5$

ব্যাখ্যা: (2, 3) তম ভুক্তি = m

m এর অনুরাশি $= +3 - 8 = -5$

৮৩। নির্ণায়কের মান শূন্য হলে m এর মান কত? [দি. বো. ২৩]

ক $-\frac{9}{11}$ খ $\frac{5}{9}$
গ $\frac{9}{11}$ ঘ $\frac{9}{5}$

উত্তর: ঘ $\frac{9}{5}$

Rhombus Publications

ADMISSION STUFFS

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & m \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$3(0-m)-2(0-4m)+1(-1-8)=0$

$\therefore m = \frac{9}{5}$

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ৮৪ ও ৮৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

৮৪। $|A|$ এর মান কত? [চ. বো. ২৩]

ক $-23$ খ $-7$

গ $-3$ ঘ $7$

উত্তর: ঘ 7

ব্যাখ্যা: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -7 \end{vmatrix}$

$= 1(-7-6)+1(0+15)+1(0+5)$

$= -13+15+5$

$= 7$

অথবা, Calculator দিয়ে সহজেই এই প্রশ্নগুলো Solve করা যায়।

৮৫। $|A|$ এর (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক– [চ. বো. ২৩]

ক $-15$ খ $-5$

গ $5$ ঘ $15$

উত্তর: ক $-15$

ব্যাখ্যা: (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -15$

৮৬। $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কে– [ঢা. বো. ২৩]

(i) (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক 3

(ii) (2, 2) তম ভুক্তির অনুরাশি 1

(iii) নির্ণায়কের মান 12

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) (1, 2) তম ভুক্তি 2 ; 2 এর সহগুণক হবে

$\Rightarrow (-1)^{1+2}[-3] = 3$

(ii) (2, 2) তম ভুক্তি 6 ; এর অনুরাশি বের করতে এর সারি ও কলাম বাদ দিয়ে যা থাকবে তাই।

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$ → অনুরাশি 1

(iii) মান $= 6+6 = 12$

৮৭। $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির– [কু. বো. ২২]

(i) মান = 0

(ii) (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি = 5

(iii) (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক = 0

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) Using Calculator

(ii) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3-2 = -5$

(iii) $(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4+4) = 0$

## ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

৮৮। $A = \begin{bmatrix} x+4 & 4 \\ -4 & x-4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি অব্যতিক্রমী হওয়ার শর্ত কোনটি? [য. বো. ২৩]

ক $x \neq -4$ খ $x \neq 0$

গ $x \neq 4$ ঘ $x \neq 4\sqrt{2}$

উত্তর: খ $x \neq 0$

ব্যাখ্যা: ব্যতিক্রমী হলে, $|A| = 0$ হবে

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+4 & 4 \\ -4 & x-4 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x+4)(x-4)+16 = 0$

$\Rightarrow x^2+4x-4x-16+16 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 0 \therefore x = 0$

$\therefore x \neq 0$ হলে অব্যতিক্রমী হবে।

৮৯। P এর মান কত হলে $\begin{bmatrix} p+1 & 6 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে? [চ. বো. ২৩]

ক 4 খ 2

গ $-2$ ঘ $-4$

উত্তর: ঘ $-4$

ব্যাখ্যা: ব্যতিক্রমী হতে হলে,

$\begin{vmatrix} p+1 & 6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (p+1)(-8)-24 = 0$

$\therefore p = -4$

৯০। নিচের কোনটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স? [রা. বো. ২১]

ক $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

গ $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ঘ $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

উত্তর: গ $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য নয়।

Option গ এর নির্ণায়কের মান $= (12-2) = 10 \neq 0$

$\therefore$ Option গ সঠিক উত্তর।

৯১। কোনটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স? [ব. বো. ২১]

ক $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

গ $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ ঘ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

উত্তর: ঘ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: Determinant = 0 হলে ব্যতিক্রমী Matrix



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৯২। $\begin{bmatrix} m & -1 \\ m-2 & m-2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে, m এর মান কোনটি?

[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২১]

ক $1, -2$ খ $-1, -2$

গ $-1, 2$ ঘ $1, 2$

উত্তর: গ $-1, 2$

ব্যাখ্যা: ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য।

$$\therefore \begin{vmatrix} m & -1 \\ m-2 & m-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow m(m-2) + 1(m-2) = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0$$

$$\therefore m = -1, 2$$

৯৩। $\begin{bmatrix} 1 & 3 & \lambda+2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, $\lambda$ এর মান–

[সি. বো. ২২]

ক $-2$ খ $2$

গ $4$ ঘ $-4$

উত্তর: গ $4$

ব্যাখ্যা: ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য।

$$\therefore 1(40-40) - 3(20-24) + (\lambda+2)(10-12) = 0$$

$$\therefore \lambda = 4$$

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ৯৪ ও ৯৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$A = \begin{bmatrix} x+4 & 8 \\ 2 & x-2 \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স।

৯৪। যদি A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হয়, তবে x এর মান নিচের কোনটি?

[রা. বো. ২২]

ক $-4, 2$ খ $-2, 4$

গ $-4, 6$ ঘ $-6, 4$

উত্তর: ঘ $-6, 4$

ব্যাখ্যা: A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে, $|A| = 0$

$$\Rightarrow (x+4)(x-2) - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$\therefore x = 4, -6$$

৯৫। প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সে $x = 3$ হলে $A^2$ নিচের কোনটি? [রা. বো. ২২]

ক $\begin{bmatrix} 65 & 64 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix} 49 & 46 \\ 41 & 43 \end{bmatrix}$

গ $\begin{bmatrix} 40 & 48 \\ 52 & 64 \end{bmatrix}$ ঘ $\begin{bmatrix} 64 & 49 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

উত্তর: ক $\begin{bmatrix} 65 & 64 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: $x = 3$ হলে, $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

এখন, Calculator দিয়ে $A^2$ এর মান বের করে ফেল।

## অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স ও বিপরীত ম্যাট্রিক্স

৯৬। $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ এর অ্যাডজয়েন্ট (Adjoint) ম্যাট্রিক্স কোনটি?

[কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২১, কু. বো. ১৯]

ক $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

গ $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ঘ $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

উত্তর: গ $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ এর Adj Matrix $= \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ এর Adj Matrix $= \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

৯৭। $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স কোনটি?

[য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি.বো. ২২]

ক $\frac{1}{27}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ খ $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

গ $\frac{1}{27}\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ঘ $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

উত্তর: খ $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হলে, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ধরি, $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{15-12}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

৯৮। $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ হলে, $B^{-1} = ?$

[কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩, ২২, ২১; কু. বো. ১৭]

ক $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ খ $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$

গ $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ঘ $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

উত্তর: ক $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: $B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

**Note:** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হলে $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

৯৯। $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, A = কত? [ব. বো. ২৩]

ক $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

গ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ঘ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

উত্তর: খ $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: $A = \left(A^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{3-2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**১০০। $A=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&6&0\\0&0&7\end{bmatrix}$ হলে, $A^{-1}=?$**

[রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৯; ঢা. বো. ১৭]

ক $\begin{bmatrix}\frac{1}{7}&0&0\\0&\frac{1}{6}&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$ খ $\frac{1}{210}\begin{bmatrix}5&0&0\\0&6&0\\0&0&7\end{bmatrix}$

গ $\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&\frac{1}{6}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$ ঘ $\frac{1}{210}\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&\frac{1}{6}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$

উত্তর: গ $\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&\frac{1}{6}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: কর্ণ ম্যাট্রিক্স $A=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$ হলে,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&\frac{1}{b}&0\\0&0&\frac{1}{c}\end{bmatrix}$$

**১০১। $3\times3$ মাত্রার একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স $I_3$ হলে $(I_3)^{-1}$ কত?**

[রা. বো. ২৩]

ক $3I_3$ খ 0

গ $\frac{I_3}{3}$ ঘ $I_3$

উত্তর: ঘ $I_3$

ব্যাখ্যা: অভেদক Matrix এর Inverse করলেও অভেদক Matrix ই পাওয়া যাবে।

$\therefore (I_3)^{-1}=I_3$

**১০২। বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে $A^2=I$ হলে, $A^{-1}=?$** [সি. বো. ২২]

ক $2A$ খ $A$

গ 0 ঘ $A+1$

উত্তর: খ $A$

ব্যাখ্যা: $A^2=I \Rightarrow A.A=I$

আমরা জানি, $A.A^{-1}=I$

$\therefore A=A^{-1}$

**১০৩। কোনটি বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য নয়?**

ক $(A^{-1})^{-1}=A$ খ $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

গ $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ ঘ $(BA)A^{-1}=B$

উত্তর: খ $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

ব্যাখ্যা: বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য অনুসারে $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ হবে।

**১০৪। $A^{-1}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$, $B^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ হলে, $(AB)^{-1}$ এর মান কত?** [সি. বো. ২২]

ক $\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$

গ $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ঘ $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

উত্তর: ক $\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}$

**১০৫। A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং K একটি স্কেলার হলে–** [সি. বো. ২২]

(i) $(A^t)^t=A$

(ii) $(KA)^t=KA^t$

(iii) যদি $|A|\neq0$ হয়, তবে $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: i, ii ও iii সবগুলোই Matrix এর ধর্ম।

**১০৬। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর–** [দি. বো. ১৭]

(i) প্রত্যেক অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান

(ii) A ও B বর্গাকার অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(iii) কোনো নির্ণায়কের অনুরূপ সারি এবং কলামসমূহ পরস্পর অবস্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের মানের পরিবর্তন হয়।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i), (ii) Matrix এর স্বতঃসিদ্ধ।

(iii) এর শর্তের ক্ষেত্রে নির্ণায়কের মানের পরিবর্তন হয় না।

**১০৭। $A=\begin{bmatrix}p-3&-1\\-8&p+4\end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স হলে–** [বি. বো. ২৩]

(i) $p=4$ এর জন্য $A^{-1}$ নির্ণয় করা যায় না

(ii) $p=-5$ এর জন্য A একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

(iii) $|A|$ এর (2, 1) তম ভুক্তির অনুরাশি 1

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) $A^{-1}$ নির্ণয় করা যায় না যখন $|A|=0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}p-3&-1\\-8&p+4\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (p-3)(p+4)-8=0$

$\Rightarrow p^2-3p+4p-12-8=0 \Rightarrow p^2+p-20=0$

$\Rightarrow p^2+5p-4p-20=0 \Rightarrow p(p+5)-4(p+5)=0$

$\Rightarrow (p+5)(p-4)=0$

$\therefore p=4,-5$ হলে $A^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য নয়।

(ii) $p=4,-5$ এর জন্য $|A|=0$

$\therefore p=-5$ এর জন্য A ব্যতিক্রমী

(iii) $\begin{bmatrix}p-3&-1\\-8&p+4\end{bmatrix}$

(2, 1) তম ভুক্তির অনুরাশি $=-1$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## নিজেকে যাচাই করো

১। $A = [2\ \ 1\ \ -1]$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ হলে, $BA = ?$

ক $[1]$ খ $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ গ $[4\ 0\ -3]$ ঘ $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

২। $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এর দ্বিতীয় সারির উপাদান $a_2, b_2, c_2$ এর সহগুণক যথাক্রমে $A_2, B_2, C_2$ দ্বারা সূচিত করা হলে নিচের কোনটি সত্য?

ক $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0$ খ $a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 = 0$
গ $a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 = 0$ ঘ কোনোটিই নয়

৩। $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ হলে, $B^{-1} = ?$

ক $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ খ $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ গ $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ঘ $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

৪। A ও B দুইটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে $AB - BA$ একটি–

ক প্রতিসম ম্যাট্রিক্স খ কর্ণ ম্যাট্রিক্স গ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স ঘ শূন্য ম্যাট্রিক্স

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ৫ ও ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & -2 & -4 \end{vmatrix}$ একটি নির্ণায়ক।

৫। (2, 1) তম ভুক্তির অনুরাশি

ক $-41$ খ $-12$ গ 12 ঘ 41

৬। (3, 2) তম ভুক্তির সহগুণক–

ক $-12$ খ $-9$ গ 9 ঘ 12

৭। P এর কোন মানের জন্য $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & P \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে?

ক $-3$ খ $-1$ গ 1 ঘ 3

৮। $A = \begin{bmatrix} p-3 & -1 \\ -8 & p+4 \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স হলে–

(i) $p = 4$ এর জন্য $A^{-1}$ নির্ণয় করা যায় না
(ii) $p = -5$ এর জন্য A একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স
(iii) $|A|$ এর (2, 1) তম ভুক্তির অনুরাশি 1

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৯। কোনটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স?

ক $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix} -7 & 16 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ গ $[5\ \ 7\ \ 9]$ ঘ $[0\ 0\ 0]$

১০। $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e & \pi & \sqrt{3} \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, $|A| = ?$

ক e খ $\pi$ গ $2(e - \pi + \sqrt{3})$ ঘ 0

১১। A ও B দুটি $3 \times 3$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে, $|A - B| = 0$ এর সমার্থক–

ক $A = 0_{mat}$ বা $B = 0_{mat}$ খ $|A| = 0$ বা $|B| = 0$
গ $|A| = 0$ এবং $|B| = 0$ ঘ $A = 0_{mat}$ এবং $B = 0_{mat}$

১২। $\begin{bmatrix} m & -1 \\ m-2 & m-2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে, m এর মান কোনটি?

ক 1, $-2$ খ $-1$, $-2$ গ $-1$, 2 ঘ 1, 2

১৩। A একটি $2 \times 2$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং $|A| = 5$ হলে, $|3A|$ এর মান কত?

ক $\frac{5}{9}$ খ $\frac{5}{3}$ গ 15 ঘ 45

১৪। A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর মাত্রা যথাক্রমে $4 \times 3$, $3 \times 4$ এবং $7 \times 4$ হলে, $(B + A^T).C^T$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা কত?

ক $3 \times 4$ খ $3 \times 7$ গ $4 \times 3$ ঘ $4 \times 7$

১৫। কোনটি বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য নয়?

ক $(A^{-1})^{-1} = A$ খ $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
গ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ঘ $(BA)A^{-1} = B$

১৬। $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ এবং $AP = B$ হলে, $x + y =$ কত?

ক 2 খ 8 গ 10 ঘ 12

১৭। A একটি $3 \times 3$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং $|A| = 1$ হলে, $|(3A)^{-1}|$ এর মান কত?

ক $\frac{1}{27}$ খ $\frac{1}{9}$ গ 9 ঘ 27

১৮। $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & m \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হলে $m =$ কত?

ক $-2$ খ 0 গ 4 ঘ 5

১৯। $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির–

(i) মান = 0 (ii) (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি = 5
(iii) (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক = 0

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

২০। $\begin{bmatrix} a & 2 & d \\ -2 & b & -3 \\ -7 & 3 & c \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম হলে, $a + b + c + d$ এর মান কত?

ক 3 খ 2 গ 7 ঘ 5

২১। $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $A - B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ হলে, নিম্নের কোনটি B ম্যাট্রিক্স?

ক $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ খ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ গ $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ঘ $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

২২। $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ হলে, $B^{-1} = ?$

ক $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ খ $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$
গ $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ঘ $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

২৩। $\begin{vmatrix} lnx & lny & lnz \\ ln2x & ln2y & ln2z \\ ln3x & ln3y & ln3z \end{vmatrix}$ এর মান কোনটি?

ক 0 খ $ln6$ গ $ln3$ ঘ $lnxyz$

২৪। $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি–

(i) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (ii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (iii) ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

২৫। $p = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ হলে, $p^2 - 2I$ এর মান হয়–

ক $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ খ $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ গ $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ ঘ $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

| উত্তরপত্র | ১ | ঘ | ২ | ক | ৩ | ক | ৪ | গ | ৫ | গ | ৬ | খ | ৭ | ঘ | ৮ | ক | ৯ | খ | ১০ | ঘ | ১১ | ঘ | ১২ | গ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ১৩ | ঘ | ১৪ | খ | ১৫ | খ | ১৬ | ক | ১৭ | ক | ১৮ | গ | ১৯ | খ | ২০ | গ | ২১ | ক | ২২ | ক | ২৩ | ক | ২৪ | ঘ | ২৫ | খ |



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs

০৩

# সরলরেখা
# Straight Line

## Board Questions Analysis

সৃজনশীল প্রশ্ন

| বোর্ড / সাল | ঢাকা | ময়মনসিংহ | রাজশাহী | কুমিল্লা | যশোর | চট্টগ্রাম | বরিশাল | সিলেট | দিনাজপুর |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ২০২৩ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ২ |
| ২০২২ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ২ |

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

| বোর্ড / সাল | ঢাকা | ময়মনসিংহ | রাজশাহী | কুমিল্লা | যশোর | চট্টগ্রাম | বরিশাল | সিলেট | দিনাজপুর |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ২০২৩ | ৫ | ৪ | ৪ | ৫ | ৪ | ৪ | ৪ | ৮ | ৪ |
| ২০২২ | ৫ | ৪ | ৬ | ৫ | ৫ | ৫ | ৫ | ৪ | ৪ |

## এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

❑ কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক সম্পর্কিত: কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$ এবং পোলার স্থানাঙ্ক $(r, \theta)$ হলে, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ এবং

১ম চতুর্ভাগে, $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

২য় চতুর্ভাগে, $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

৩য় চতুর্ভাগে, $\theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ অথবা, $\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

৪র্থ চতুর্ভাগে, $\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ অথবা, $\theta = 2\pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

❑ দূরত্ব নির্ণয় সংক্রান্ত:

(i) কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

(ii) পোলার স্থানাঙ্ক $(r_1, \theta_1)$ এবং $(r_2, \theta_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 \sim \theta_2)}$

❑ অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত সংক্রান্ত: $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $R(x, y)$ বিন্দুটি $m_1 : m_2$ অনুপাতে,

(i) অন্তর্বিভক্ত করলে, $R \equiv \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$

(ii) বহির্বিভক্ত করলে, $R \equiv \left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$

❑ মধ্যবিন্দু সংক্রান্ত: $(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

❑ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র সংক্রান্ত: $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ এবং $(x_3, y_3)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

❑ ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত:

(i) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$ অথবা, $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{bmatrix}$

(ii) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ এবং $D(x_4, y_4)$ চারটি বিন্দু দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{bmatrix}$

@AdmissionStuffs

❑ সরলরেখার ঢাল সংক্রান্ত:

(i) $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

(ii) $ax + by + c = 0$; সরলরেখার ঢাল $= -\frac{a}{b}$

(iii) একটি সরলরেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করলে তার ঢাল, $m = \tan\theta$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



❑ **সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত:**

(i) কোনো সরলরেখার ঢাল m এবং y অক্ষ হতে কর্তিত অংশের পরিমাণ c হলে, সরলরেখার সমীকরণ: $y = mx + c$; $c = 0$ হলে, সমীকরণ $y = mx$ (যা মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ)।

(ii) $(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী এবং m ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ: $y - y_1 = m(x - x_1)$

(iii) $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

(iv) কোনো সরলরেখা কর্তৃক x অক্ষের ছেদাংশ a এবং y অক্ষের ছেদাংশ b হলে, সরলরেখার সমীকরণ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

(v) মূলবিন্দু হতে কোনো সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উক্ত লম্বের উৎপন্ন কোণের পরিমাণ $\alpha$ হলে, সরলরেখার সমীকরণ: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

(vi) সরলরেখার দূরত্ব আকার সমীকরণ: $\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = \pm r$

❑ **দুটি সরলরেখা একই হওয়ার শর্ত:**

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

❑ **তিনটি সরলরেখার সমবিন্দু হওয়ার শর্ত:**

তিনটি সরলরেখা $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ও $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ সমবিন্দু হওয়ার শর্ত: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

❑ **দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হওয়ার শর্ত:**

(i) $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ রেখা সমান্তরাল হবে যদি $m_1 = m_2$ হয়।

(ii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হবে যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ হয়।

❑ **দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত:**

(i) $m_1$ ও $m_2$ ঢালবিশিষ্ট দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হলে, $m_1.m_2 = -1$

(ii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয় লম্ব হবে যদি $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ হয়।

❑ **লম্ব সরলরেখার সমীকরণ:**

(i) $ax + by + c = 0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ যেকোনো রেখার সমীকরণ, $bx - ay + k = 0$, যেখানে k ধ্রুবক।

(ii) $ax + by + c = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং $(\alpha, \beta)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $bx - ay = b\alpha - \alpha\beta$

❑ **সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ:**

(i) $ax + by + c = 0$ রেখার সমান্তরাল এরূপ যেকোনো রেখার সমীকরণ, $ax + by + k = 0$, যেখানে k ধ্রুবক।

(ii) $ax + by + c = 0$ এর সমান্তরাল এবং $(\alpha, \beta)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $ax + by = a\alpha + b\beta$

❑ **দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয়:**

(i) $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta$ হলে, $\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$

(ii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সরলরেখা দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta$ হলে, $\tan\theta = \pm\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}$

❑ **বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় সংক্রান্ত:**

(i) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় $ax + by + c = 0$ রেখার একই পার্শ্বে থাকলে $ax_1 + by_1 + c$ এবং $ax_2 + by_2 + c$ একই চিহ্নবিশিষ্ট এবং বিপরীত পার্শ্বে থাকলে বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হবে।

(ii) $P(x', y')$ বিন্দুটি $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে অথবা সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত হবে যখন যথাক্রমে $(a_1x' + b_1y' + c_1)(a_2x' + b_2y' + c_2)(a_1a_2 + b_1b_2) > 0$ অথবা, $< 0$ হয়।

❑ **নির্দিষ্ট কোনো বিন্দু হতে কোনো রেখার লম্ব দূরত্ব সংক্রান্ত:**

(i) $(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব, $= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(ii) মূলবিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

❑ **দুটি সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় সংক্রান্ত:**

$ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

❑ **দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক সমীকরণ সংক্রান্ত:**

(i) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

(ii) $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ হলে (+) নিয়ে স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং (–) নিয়ে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্ণয় করতে হবে।

(iii) $a_1a_2 + b_1b_2 < 0$ হলে (–) নিয়ে স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং (+) নিয়ে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

(iv) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ক্ষেত্রে $c_1c_2 > 0$ হলে (+) চিহ্নযুক্ত সমীকরণটি মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্দেশ করে এবং $c_1c_2 < 0$ হলে (–) চিহ্নযুক্ত সমীকরণটি মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্দেশ করে।

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

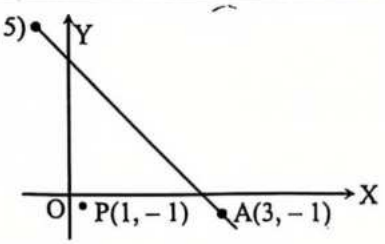
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

**প্রশ্ন ▶ ১** B(– 1, 5)




**(ক) উদ্দীপকের AB সরলরেখাটি Y অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।** [ঢা. বো. ২৩]

**(খ) P বিন্দুগামী এবং AB সরলরেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩, ২২, ২১, ১৯; দি. বো. ২২, ২১; কু. বো. ২১; সি. বো. ২১; ম. বো. ২১; সকল বো. ১৮; ব. বো. ১৭]

**(গ) AB এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা P বিন্দু থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত।** [ঢা. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে,

A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, – 1)

B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 1, 5)

আমরা জানি, দুইটি বিন্দু $(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ:

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{3-(-1)}=\frac{y-(-1)}{-1-5}$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{-6}$$

$$\Rightarrow -6x+18=4y+4$$

$$\Rightarrow -6x-4y+14=0$$

$$\Rightarrow 3x+2y=7$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{7}{3}}+\frac{y}{\frac{7}{2}}=1$$

y অক্ষে ভুজ = 0

∴ AB সরলরেখা ও Y অক্ষের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(0, \frac{7}{2}\right)$ **(Ans.)**

**খ** 'ক' হতে প্রাপ্ত, AB সরলরেখার সমীকরণ,

$$3x+2y-7=0 \quad \cdots\cdots (i)$$

$$\Rightarrow 2y=-3x+7$$

$$\Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$$

∴ AB রেখার ঢাল $=-\frac{3}{2}$

P(1, – 1) বিন্দুগামী m ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ,

$$y-(-1)=m(x-1)$$

$$\Rightarrow y+1=m(x-1) \quad \cdots\cdots (ii)$$

যেহেতু (i) নং রেখার সাথে (ii) নং রেখা 45° কোণ উৎপন্ন করে সেহেতু,

$$\tan 45^\circ=\pm\frac{m+\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}m} \quad \left[\because \tan\theta=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right]$$

$$\Rightarrow 1=\pm\frac{\frac{2m+3}{2}}{\frac{2-3m}{2}}$$

$$\Rightarrow 1=\pm\frac{2m+3}{2-3m}$$

$$\Rightarrow 2-3m=\pm(2m+3)$$

(+ ve) চিহ্ন নিয়ে,

$$2-3m=2m+3$$

$$\therefore m=-\frac{1}{5}$$

এবং (– ve) চিহ্ন নিয়ে,

$$2-3m=-2m-3$$

$$\therefore m=5$$

(ii) নং সমীকরণে m এর মান বসিয়ে পাই,

$m=-\frac{1}{5}$ হলে,

$$y+1=-\frac{1}{5}(x-1)$$

$$\Rightarrow 5y+5=-(x-1)$$

$$\therefore x+5y+4=0$$

আবার,

$m = 5$ হলে,

$$y+1=5(x-1)$$

$$\Rightarrow y+1=5x-5$$

$$\therefore 5x-y-6=0$$

∴ নির্ণেয় সমীকরণদ্বয়: $x+5y+4=0$ এবং $5x-y-6=0$ **(Ans.)**

**গ** 'ক' হতে প্রাপ্ত,

AB রেখার সমীকরণ: $3x+2y-7=0$

AB রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ: $2x-3y+k=0 \cdots\cdots (i)$

P(1, – 1) বিন্দু হতে (i) নং রেখার লম্বদূরত্ব,

$$\left|\frac{2\times 1-3(-1)+k}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}\right|=2$$

$$\Rightarrow \frac{(5+k)^2}{13}=4 \quad \text{[উভয় পক্ষকে বর্গ করে]}$$

$$\Rightarrow (5+k)^2=4\times 13$$

$$\Rightarrow 5+k=\pm 2\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow k=\pm 2\sqrt{13}-5$$

k এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$2x-3y\pm 2\sqrt{13}-5=0$$

∴ নির্ণেয় লম্ব রেখার সমীকরণ: $2x-3y\pm 2\sqrt{13}-5=0$ **(Ans.)**

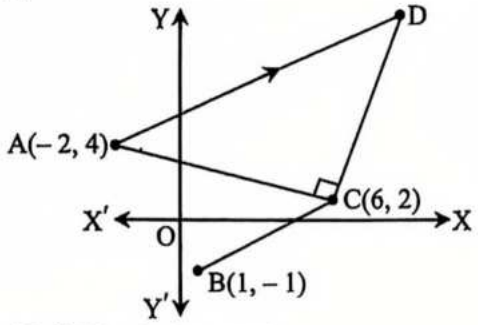


t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ২** দৃশ্যকল্প-১:




**AD ∥ BC, ∠ACD = 90°**

**দৃশ্যকল্প-২: A(8, 3) এবং B = (p, q), AB এর লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ y = – 2x + 4.**

**(ক) P(3, – 3) ও Q(– 2, 7) হলে PQ সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।** [দি. বো. ২১]

**(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে D বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।** [রা. বো. ২৩]

**(গ) দৃশ্যকল্প-২ ব্যবহার করে p এবং q এর মান নির্ণয় কর।** [রা. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, – 3) এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 2, 7)

আমরা জানি,

$(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখার ঢাল $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore$ PQ সরলরেখার ঢাল $= \frac{7 - (-3)}{-2 - 3}$

$= -2$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে,

A(– 2, 4), B(1, – 1) ও C(6, 2), AD ∥ BC এবং ∠ACD = 90°

আমরা জানি, দুইটি সমান্তরাল রেখার ঢাল সমান হয়।

$\therefore$ AD রেখার ঢাল = BC রেখার ঢাল $= \frac{2 - (-1)}{6 - 1} = \frac{3}{5}$

এখন, A(– 2, 4) বিন্দুগামী ও $\frac{3}{5}$ ঢাল বিশিষ্ট AD রেখার সমীকরণ,

$y - 4 = \frac{3}{5}(x + 2)$

$\Rightarrow 5y - 20 = 3x + 6$

$\therefore 3x - 5y + 26 = 0$ .... (i)

আবার, CD রেখার ঢাল $= -\frac{1}{\text{AC রেখার ঢাল}}$ [$\because$ ∠ACD 90° ]

$= -\frac{1}{\frac{4-2}{-2-6}} = 4$

$\therefore$ C(6, 2) বিন্দুগামী এবং 4 ঢাল বিশিষ্ট CD রেখার সমীকরণ,

$y - 2 = 4(x - 6)$

$\Rightarrow y - 2 = 4x - 24$

$\therefore y = 4x - 22$ ..... (ii)

D বিন্দুটি হবে AD ও CD রেখার ছেদবিন্দু।

(ii) নং হতে y এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে,

$3x - 20x + 110 + 26 = 0$

$\therefore x = 8$

$\therefore y = 4 \times 8 - 22$ [(ii) নং হতে]

$= 10$

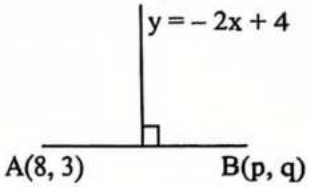
$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (8, 10) **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, AB এর লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$y = -2x + 4$ ..... (i)

ঢাল $= -2$

$\therefore$ AB রেখার ঢাল $= \frac{1}{2}$




A(8, 3) বিন্দুগামী এবং $\frac{1}{2}$ ঢাল বিশিষ্ট AB রেখার সমীকরণ:

$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 8)$

$\Rightarrow 2y - 6 = x - 8$

$\Rightarrow x = 2y + 2$ ..... (ii)

AB রেখা ও লম্ব সমদ্বিখন্ডকের ছেদবিন্দু AB রেখার মধ্যবিন্দু।

(ii) নং হতে x এর মান (i) নং বসিয়ে,

$y = -2(2y + 2) + 4$

$\Rightarrow 4y + y + 4 - 4 = 0$

$\therefore y = 0$

(ii) নং হতে, $x = 2 \times 0 + 2 = 2$

$\therefore$ AB এর মধ্যবিন্দু (2, 0)

আবার, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (8, 3)

B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (p, q)

$\therefore$ AB রেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{8+p}{2}, \frac{3+q}{2}\right) \equiv (2, 0)$

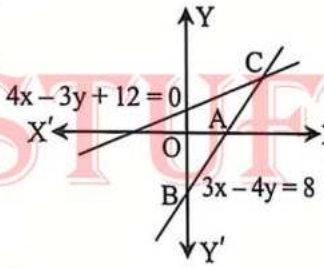
প্রশ্নমতে, $\frac{8+p}{2} = 2$ এবং $\frac{3+q}{2} = 0$

$\Rightarrow 8 + p = 4$ | $\Rightarrow 3 + q = 0$

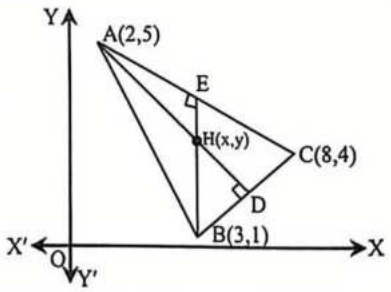
$\therefore p = -4$ | $\therefore q = -3$

$\therefore$ p এবং q এর মান যথাক্রমে – 4 এবং – 3

**প্রশ্ন ▶ ৩** দৃশ্যকল্প-১:




দৃশ্যকল্প-২:




**(ক) দৃশ্যকল্প-১ হতে ΔOAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২১]

**(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে এরূপ একটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা C বিন্দুগামী এবং x – y + 2 = 0 রেখার সমান্তরাল।** [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২]

**(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে ABC ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র H(x, y) নির্ণয় কর।** [চ. বো. ২১]

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধান:**

**ক** এখানে, AB রেখার সমীকরণ, $3x - 4y = 8$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{8}{3}} + \frac{y}{\frac{8}{-4}} = 1$$

$$\therefore \frac{x}{\frac{8}{3}} + \frac{y}{-2} = 1$$

$\therefore$ AB রেখাটি x অক্ষকে $A\left(\frac{8}{3}, 0\right)$ এবং y অক্ষকে $B(0, -2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore OA = \frac{8}{3}$ একক এবং $OB = |-2|$ একক $= 2$ একক

$\therefore \Delta OAB$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times OA \times OB$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times 2 \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{8}{3} \text{ বর্গ একক (Ans.)}$$

**খ** চিত্র অনুসারে C বিন্দুটি,

$4x - 3y + 12 = 0$ ....(i) এবং $3x - 4y - 8 = 0$ ....(ii) রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু।

(i) × 4 – (ii) × 3 করে পাই,

$16x - 12y + 48 = 0$

$9x - 12y - 24 = 0$

(–) (+) (+)

$7x + 72 = 0$

$\therefore x = -\frac{72}{7}$

x এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$3\left(-\frac{72}{7}\right) - 4y - 8 = 0$

$\Rightarrow -\frac{216}{7} - 4y - 8 = 0$

$\Rightarrow 4y = -\frac{216}{7} - 8 = -\frac{272}{7}$

$\therefore y = -\frac{68}{7}$

$\therefore$ ছেদবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{72}{7}, -\frac{68}{7}\right)$

$x - y + 2 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ:

$x - y + k = 0$ .... (iii)

(iii) নং রেখা $C\left(-\frac{72}{7}, \frac{-68}{7}\right)$ বিন্দুগামী

$\therefore -\frac{72}{7} - \left(-\frac{68}{7}\right) + k = 0$

$\Rightarrow k = \frac{72}{7} - \frac{68}{7} = \frac{4}{7}$

(iii) নং হতে, $x - y + \frac{4}{7} = 0$

$\therefore 7x - 7y + 4 = 0$ **(Ans.)**

**গ** এখানে, A(2, 5), B(3, 1), C(8, 4) ও H(x, y)

BC রেখার ঢাল, $m_{BC} = \frac{4-1}{8-3} = \frac{3}{5}$

$\therefore$ BC রেখার উপর লম্ব AD রেখার ঢাল, $m_{AD} = -\frac{5}{3}$

A(2, 5) বিন্দুগামী $-\frac{5}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট AD রেখার সমীকরণ,

$y - 5 = -\frac{5}{3}(x - 2)$

$\Rightarrow 3y - 15 = -5x + 10$

$\Rightarrow 5x + 3y - 25 = 0$ ..... (i)

আবার,

AC রেখার ঢাল, $m_{AC} = \frac{4-5}{8-2} = \frac{-1}{6}$

AC রেখার উপর লম্ব BE রেখার ঢাল, $m_{BE} = 6$

B(3, 1) বিন্দুগামী 6 ঢাল বিশিষ্ট BE রেখার সমীকরণ,

$y - 1 = 6(x - 3)$

$\Rightarrow y - 1 = 6x - 18$

$\Rightarrow 6x - y - 17 = 0$ ..... (ii)

(i) নং (ii) নং এর ছেদবিন্দুই $\Delta ABC$ এর লম্বকেন্দ্র H(x, y)

(i) + (ii) × 3 করে পাই,

$5x + 3y = 25$

(+) $18x - 3y = 51$

$23x = 76$

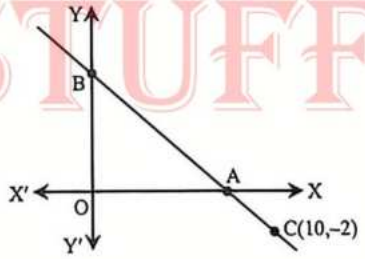
$\therefore x = \frac{76}{23}$

(ii) নং এ $x = \frac{76}{23}$ বসিয়ে পাই, $6 \times \frac{76}{23} - y = 17$

$\therefore y = \frac{65}{23}$

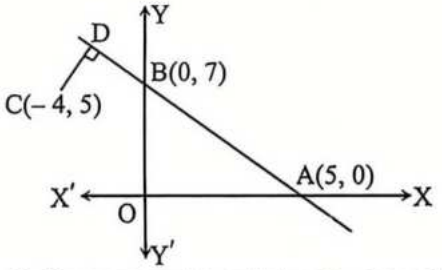
$\therefore$ ABC ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র, $H\left(\frac{76}{23}, \frac{65}{23}\right)$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৪** দৃশ্যকল্প-১:




**OA – OB = 3**

দৃশ্যকল্প-২:




(ক) (– 2, 3) ও (1, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 3 : 2 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ম. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১: হতে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ম. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২: হতে D বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

[য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২; ঢা. বো. ২১; দি. বো. ২১]

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধান:**

**ক** আমরা জানি, $(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে $m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক,

$$(x, y) \equiv \left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$$

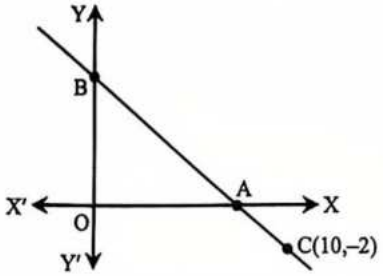
ধরি, $(-2, 3)$ ও $(1, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $3 : 2$ অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$।

$$\therefore x = \frac{3 \times 1 - 2 \times (-2)}{3 - 2} = \frac{3 + 4}{1} = 7$$

$$\text{এবং } y = \frac{3 \times 2 - 2 \times 3}{3 - 2} = \frac{6 - 6}{1} = 0$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(7, 0)$ **(Ans.)**

**খ**




ধরি, AB রেখা x ও y অক্ষকে $A(a, 0)$ ও $B(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

A ও B বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ..... (i)

$\therefore OA = a ; OB = b$

এখানে, $OA - OB = 3$

$\Rightarrow a - b = 3$

$\therefore a = b + 3$ ..... (ii)

(i) নং রেখা $C(10, -2)$ বিন্দুগামী।

$$\frac{10}{a} + \frac{-2}{b} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{10b - 2a}{ab} = 1$$

$$\Rightarrow 10b - 2a = ab$$

$$\Rightarrow 10b - 2(b + 3) = (b + 3)b \quad [\text{(ii) নং হতে}]$$

$$\Rightarrow 10b - 2b - 6 = b^2 + 3b$$

$$\Rightarrow b^2 + 3b - 8b + 6 = 0$$

$$\Rightarrow b^2 - 3b - 2b + 6 = 0$$

$$\Rightarrow b(b - 3) - 2(b - 3) = 0$$

$$\Rightarrow (b - 3)(b - 2) = 0$$

হয় $b - 3 = 0$ | অথবা, $b - 2 = 0$

$\therefore b = 3$ | $\therefore b = 2$

$\therefore$ b এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$b = 3$ হলে, $a = 3 + 3 = 6$

(i) নং হতে পাই, $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x + 2y}{6} = 1$$

$$\Rightarrow x + 2y = 6$$

$$\therefore x + 2y - 6 = 0$$

$b = 2$ হলে $a = 2 + 3 = 5$

(i) নং হতে পাই, $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{2x + 5y}{10} = 1$$

$$\Rightarrow 2x + 5y = 10$$

$$\therefore 2x + 5y - 10 = 0$$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ: $x + 2y - 6 = 0$ অথবা, $2x + 5y - 10 = 0$ **(Ans.)**

**গ** $A(5, 0)$ ও $B(0, 7)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 1$$

$$\therefore 7x + 5y - 35 = 0 \text{ ..... (i)}$$

$$\text{এবং AB রেখার ঢাল} = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{7}{5}$$

আবার, $AD \perp CD$

$$\therefore \text{CD রেখার ঢাল} = \frac{5}{7}$$

$(-4, 5)$ বিন্দুগামী এবং $\frac{5}{7}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ,

$$y - 5 = \frac{5}{7}(x + 4)$$

$$\Rightarrow 7y - 35 = 5x + 20$$

$$\therefore 5x - 7y + 55 = 0 \text{ .....(ii)}$$

এখন, (i) ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুই হবে D বিন্দুর স্থানাংক।

(i) × 7 + (ii) × 5 করে পাই,

$$49x + 35y - 245 = 0$$
$$(+)\ 25x - 35y + 275 = 0$$
$$74x + 30 = 0$$

$$\therefore x = -\frac{15}{37}$$

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$7 \times \left(-\frac{15}{37}\right) + 5y - 35 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{105}{37} + 5y - 35 = 0$$

$$\Rightarrow 5y = 35 + \frac{105}{37} = \frac{1400}{37}$$

$$\therefore y = \frac{280}{37}$$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{15}{37}, \frac{280}{37}\right)$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৫** দৃশ্যকল্প-১: দুইটি সরলরেখার সমীকরণ $x - 2y + 3 = 0, 2x + 3y = 1$

দৃশ্যকল্প-২: $A \equiv 3x + y - 15, B \equiv 4x + 3y - 12$

$C \equiv 3x - 4y + 16, D \equiv 4x - 3y + 12$

[D সংশোধিত]

(ক) $2x - 3y + 5 = 0$ এবং $7x + 4y - 3 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে সমীকরণ দুইটি কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং উক্ত সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(2, -3)$ হলে অপর বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে যদি $B = 0$, $C = 0$ এবং $D = 0$ ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমীকরণ হয় তবে ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর। [য. বো. ২১]

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, রেখাদ্বয়, $2x - 3y + 5 = 0$ .... (i)

এবং $7x + 4y - 3 = 0$ ..... (ii)

(i) × 4 + (ii) × 3 করে পাই,

$$\begin{array}{r} 8x - 12y = -20 \\ (+)\ 21x + 12y = 9 \\ \hline 29x = -11 \end{array}$$

$$\therefore x = \frac{-11}{29}$$

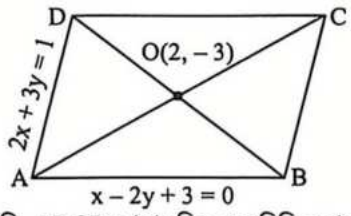
x এর মান (i) নং এ বসিয়ে,

$$2\left(\frac{-11}{29}\right) - 3y + 5 = 0$$

$$\therefore y = \frac{41}{29}$$

$\therefore$ ছেদবিন্দু $\left(\frac{-11}{29}, \frac{41}{29}\right)$ **(Ans.)**

**খ**




ধরি, ABCD সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয়,

$AB \equiv x - 2y + 3 = 0$ ..... (i)

এবং $AD \equiv 2x + 3y = 1$

$\Rightarrow 2x + 3y - 1 = 0$ ..... (ii)

$\therefore$ AB ও AD রেখার ছেদবিন্দু A সামান্তরিকের একটি শীর্ষ।

(i) × 2 – (ii) করে পাই

$$\begin{array}{r} 2x - 4y = -6 \\ 2x + 3y = 1 \\ (-)\ (-)\ (-) \\ \hline -7y = -7 \end{array}$$

$$\therefore y = 1$$

y এর মান (i) নং এ বসিয়ে, $x = -1$

$\therefore$ শীর্ষ A(– 1, 1)

ধরি, A এর বিপরীত শীর্ষবিন্দু $C(x_1, y_1)$

দেওয়া আছে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু (2, – 3)

সুতরাং AC কর্ণের মধ্যবিন্দু (2, – 3)

$$\therefore \frac{x_1 - 1}{2} = 2 \qquad \text{এবং } \frac{y_1 + 1}{2} = -3$$

$$\Rightarrow x_1 - 1 = 4 \qquad \Rightarrow y_1 + 1 = -6$$

$$\therefore x_1 = 5 \qquad \therefore y_1 = -7$$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাংক (5, – 7)

এখন, AB রেখার সমান্তরাল C(5, – 7) বিন্দুগামী CD রেখার সমীকরণ,

$$x - 2y = 5 - 2 \times (-7)$$

$$\Rightarrow x - 2y - 19 = 0$$

আবার AD রেখার সমান্তরাল C(5, – 7) বিন্দুগামী BC রেখার সমীকরণ,

$$2x + 3y = 5 \times 2 + 3 \times (-7)$$

$$\Rightarrow 2x + 3y + 11 = 0$$

$\therefore$ অপর বাহু দুইটির সমীকরণ: $x - 2y - 19 = 0$ এবং $2x + 3y + 11 = 0$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $B \equiv 4x + 3y - 12$; $C \equiv 3x - 4y + 16$

এবং $D \equiv 4x - 3y + 12$

এখানে, $B = 0$

$\Rightarrow 4x + 3y - 12 = 0$ ..... (i)

$C = 0$

$\Rightarrow 3x - 4y + 16 = 0$ ..... (ii)

এবং $D = 0$

$\Rightarrow 4x - 3y + 12 = 0$ ..... (iii)

(i) নং ও (ii) নং হতে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{3 \times 16 - (-12) \times (-4)} = \frac{y}{-12 \times 3 - 4 \times 16} = \frac{1}{4 \times (-4) - 3 \times 3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{48 - 48} = \frac{y}{-36 - 64} = \frac{1}{-16 - 9}$$

$$\therefore \frac{x}{0} = \frac{y}{-100} = \frac{1}{-25}$$

$\therefore x = 0$ এবং $y = 4$

$\therefore$ (i) নং ও (ii) নং সরলরেখার ছেদবিন্দু (0, 4)

আবার, (ii) নং ও (iii) নং হতে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{-4 \times 12 - 16 \times (-3)} = \frac{y}{16 \times 4 - 3 \times 12} = \frac{1}{3 \times (-3) - (-4) \times 4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-48 + 48} = \frac{y}{64 - 36} = \frac{1}{-9 + 16}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{0} = \frac{y}{28} = \frac{1}{7}$$

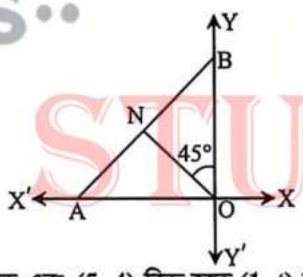
$\therefore x = 0$ এবং $y = 4$

$\therefore$ (ii) ও (iii) নং সরলরেখার ছেদবিন্দু (0,4)

$\therefore$ সরলরেখা তিনটি সমবিন্দুগামী।

অর্থাৎ, সরলরেখা তিনটি দ্বারা কোনো ত্রিভুজ গঠিত হয় না। তাই অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় সম্ভব নয়। **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৬**




**(ক) X অক্ষ এবং (5, 4) বিন্দু হতে (1, t) বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে t এর মান নির্ণয় কর।** [সি. বো. ২৩]

**(খ) ON রেখার সমান্তরাল এবং উহা হতে $6\sqrt{2}$ একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

[সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩, ১৭; কু. বো. ২১; ব. বো. ১৯; সকল বো. ১৮]

**(গ) $\Delta OAB$ এর ক্ষেত্রফল 18 বর্গ একক হলে AB এর সমত্রিখন্ডক বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।** [সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম.বো. ২২; ঢা. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** আমরা জানি, X অক্ষ হতে (1, t) বিন্দুর দূরত্ব = (1, t) বিন্দুর y স্থানাংক বা কোটি = t একক

এবং (5, 4) বিন্দু হতে (1, t) বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(5-1)^2 + (4-t)^2}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(5-1)^2 + (4-t)^2} = t$

$\Rightarrow 16 + (4-t)^2 = t^2$

$\Rightarrow 16 + 16 - 8t + t^2 = t^2$

$\Rightarrow 32 - 8t = 0$

$\therefore t = 4$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** প্রদত্ত চিত্রে, ON রেখা Y অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করেছে।

∴ X অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে (90° + 45°) = 135° কোণ উৎপন্ন করে।

∴ ON রেখার ঢাল, $m = \tan 135° = -1$

আবার, ON রেখা O(0, 0) বিন্দুগামী।

∴ ON রেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 0 = -1(x - 0)$

$\Rightarrow y = -x$

$\therefore x + y = 0$ ..... (i)

(i) নং রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ,

$x + y + k = 0$ ..... (ii)

এখন (i) নং ও (ii) রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$$\frac{|k - 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|k|}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{\sqrt{2}} = \pm 6\sqrt{2}$$

$\Rightarrow k = \pm \sqrt{2} \times 6\sqrt{2}$

$\Rightarrow k = \pm 6 \times 2 = \pm 12$

k এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x + y \pm 12 = 0$

∴ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ,

$x + y + 12 = 0, x + y - 12 = 0$ **(Ans.)**

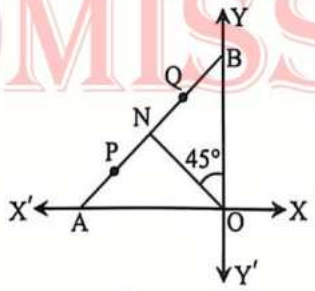
**গ** ধরি, AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{-a} + \frac{y}{b} = 1$ ..... (i)

[∵ A বিন্দুটি x অক্ষের – ve দিকে]

∴ AB রেখাটি X অক্ষকে A(– a, 0) এবং Y অক্ষকে B(0, b) বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ OA = |– a| = a এবং OB = |b| = b

এখানে, ΔOAB এর ক্ষেত্রফল = 18 বর্গ একক




$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times OA \times OB = 18 \Rightarrow \frac{1}{2} ab = 18$$

$\Rightarrow ab = 36$ ..... (ii)

এখন, ΔOAN এ ∠AON = 45° [∵ OA ⊥ OB, ∠BON = 45°]

∴ ∠OAN = 45° [∵ ON ⊥ AB]

আবার, ΔOAB এ ∠OAB = 45°

$$\therefore \tan \angle OAB = \frac{OB}{OA}$$

$$\Rightarrow \tan 45° = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{b}{a}$$

$\Rightarrow a = b$

(ii) নং সমীকরণ a = b বসিয়ে পাই,

$b^2 = 36$

$\Rightarrow b = 6$

$\therefore a = 6$

∴ A(– 6, 0) এবং B(0, 6)

ধরি, P ও Q বিন্দুদ্বয় AB রেখার সমত্রিখন্ডক বিন্দু। তাই, P বিন্দু AB রেখাকে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$\therefore \text{P বিন্দুর স্থানাংক} \equiv \left(\frac{1 \times 0 + 2 \times (-6)}{1 + 2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times 0}{1 + 2}\right)$$

$$= (-4, 2)$$

আবার, Q বিন্দু P ও B বিন্দুর সংযোজক রেখা মধ্যবিন্দু।

$$\therefore \text{Q বিন্দুর স্থানাংক} \equiv \left(\frac{-4 + 0}{2}, \frac{6 + 2}{2}\right) = (-2, 4)$$

∴ নির্ণেয় সমত্রিখন্ডক বিন্দুর স্থানাংক (– 4, 2) এবং (– 2, 4) **(Ans.)**

**বিকল্প পদ্ধতি:**

'খ' হতে পাই,

ON রেখার সমীকরণ, $x + y = 0$

∴ AB রেখার সমীকরণ, $x - y + k = 0$

$\Rightarrow x - y = -k$

$$\Rightarrow \frac{x}{-k} + \frac{y}{k} = 1 \text{ ..... (i)}$$

প্রশ্নমতে, $\left|\frac{1}{2} \times (-k) \times k\right| = 18$

$\Rightarrow k^2 = 18 \times 2$

$\Rightarrow k^2 = 36$

$\Rightarrow k = \pm 6$

AB রেখার A বিন্দু ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

∴ k = 6 হলে A(– 6, 0) এবং B(0, 6)

ধরি, P, Q হলো AB রেখার সমত্রিখন্ডক বিন্দু।

$$\therefore P \equiv \left(\frac{1 \times 0 + 2 \times (-6)}{1 + 2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times 0}{1 + 2}\right)$$

$$= (-4, 2)$$

$$\therefore Q \equiv \left(\frac{2 \times 0 + 1 \times (-6)}{2 + 1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1}\right)$$

$$= (-2, 4)$$

∴ নির্ণেয় সমত্রিখন্ডক বিন্দুদ্বয় (– 4, 2) এবং (– 2, 4) **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৭** দুইটি সরলরেখা $12x - 5y + 26 = 0$ ..... (i)

$x + 5y = 13$ ..... (ii)

**(ক)** (– 1, – 1) বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২৩; ঢা. বো. ২১; কু. বো. ২১; য. বো. ২১; চ. বো. ২১; সকল বো. ১৮; সি. বো. ১৭]

**(খ)** (i) নং রেখা হতে 2 একক দূরবর্তী এবং (ii) নং রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. বো. ২৩]

**(গ)** 'খ' হতে প্রাপ্ত বিন্দুদ্বয় কোনো ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু হলে এবং ত্রিভুজটির লম্ববিন্দু $\left(\frac{-9}{25}, \frac{9}{5}\right)$ হলে, ত্রিভুজটির তৃতীয় শীর্ষের স্থানাংক কত? [ব. বো. ২৩]

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধান:**

**ক** ধরি, $(x, y) \equiv (-1, -1)$

বিন্দুটির পোলার স্থানাংক $(r, \theta)$ হলে,

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$(-1, -1)$ বিন্দুটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত,

$\therefore \theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \pi + \tan^{-1}\left|\frac{-1}{-1}\right|$

$= \pi + \tan^{-1}(1) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$\therefore (-1, -1)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাংক $\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $12x - 5y + 26 = 0$ ..... (i)

$x + 5y = 13$ ..... (ii)

ধরি, (i) নং রেখা হতে 2 একক দূরবর্তী একটি বিন্দু (a, b)

এখন, (a, b) বিন্দু হতে রেখাটির দূরত্ব,

$\frac{|12a - 5b + 26|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = 2$

$\Rightarrow 12a - 5b + 26 = \pm 26$

(+) চিহ্ন নিয়ে পাই, $12a - 5b + 26 = 26$

$\therefore 12a - 5b = 0$ ..... (iii)

(–) চিহ্ন নিয়ে পাই, $12a - 5b + 26 = -26$

$\therefore 12a - 5b + 52 = 0$ ..... (iv)

আবার, (a, b) বিন্দুটি (ii) নং রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore a + 5b - 13 = 0$ .... (v)

(iii) + (v) করে পাই,

$13a - 13 = 0$

$\Rightarrow 13a = 13$

$\therefore a = 1$

a এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\Rightarrow 5b = 12$

$\therefore b = \frac{12}{5}$

$\therefore (a, b) \equiv \left(1, \frac{12}{5}\right)$

আবার, (iv) + (v) করে পাই,

$13a + 39 = 0$

$\Rightarrow 13a = -39 \Rightarrow a = \frac{-39}{13} = -3$

$\therefore a = -3$

a এর মান (v) নং সমীকরণ বসিয়ে পাই,

$-3 + 5b - 13 = 0$

$\Rightarrow 5b = 16$

$\therefore b = \frac{16}{5}$

$\therefore (a, b) \equiv \left(-3, \frac{16}{5}\right)$

নির্ণেয় (ii) নং রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাংক,

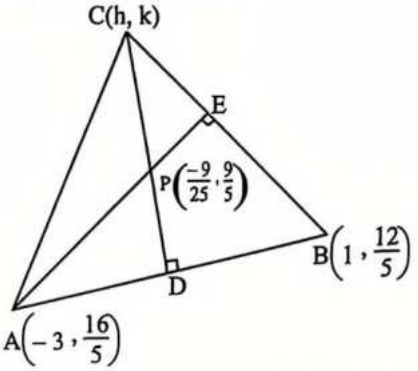
$\left(1, \frac{12}{5}\right), \left(-3, \frac{16}{5}\right)$ **(Ans.)**

**গ** 'খ' হতে প্রাপ্ত বিন্দুদ্বয় $\left(-3, \frac{16}{5}\right), \left(1, \frac{12}{5}\right)$

মনে করি, ABC ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু $A\left(-3, \frac{16}{5}\right), B\left(1, \frac{12}{5}\right)$

এবং লম্বকেন্দ্র $P\left(-\frac{9}{25}, \frac{9}{5}\right)$

ধরি, ত্রিভুজটির তৃতীয় শীর্ষবিন্দু C(h, k)




এখানে, AB ও CD পরস্পর লম্ব হওয়ায় তাদের ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -1$

$\therefore \frac{\frac{12}{5} - \frac{16}{5}}{1 - (-3)} \times \frac{k - \frac{9}{5}}{h - \left(-\frac{9}{25}\right)} = -1$

$\Rightarrow \frac{-\frac{4}{5}}{4} \times \frac{\frac{5k - 9}{5}}{\frac{25h + 9}{25}} = -1$

$\Rightarrow \frac{1}{5} \times \frac{25(5k - 9)}{5(25h + 9)} = 1$

$\Rightarrow 25h + 9 = 5k - 9$

$\Rightarrow 25h = 5k - 9 - 9$

$\therefore 25h = 5k - 18$ .....(i)

আবার, BC ও AE পরস্পর লম্ব হওয়ায় তাদের ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -1$

$\therefore \frac{\frac{9}{5} - \frac{16}{5}}{-\frac{9}{25} - (-3)} \times \frac{k - \frac{12}{5}}{h - 1} = -1$

$\Rightarrow \frac{35}{66} \times \frac{5k - 12}{5(h - 1)} = 1 \Rightarrow 66(h - 1) = 7(5k - 12)$

$\Rightarrow 66h - 66 = 7(5k - 18 + 6)$

$\Rightarrow 66h - 66 = 7(25h + 6)$ [(i) নং হতে]

$\Rightarrow 66h - 66 = 175h + 42$

$\Rightarrow 109h = -108$

$\therefore h = \frac{-108}{109}$

h এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$25 \times \left(-\frac{108}{109}\right) = 5k - 18$

$\Rightarrow -\frac{2700}{109} = 5k - 18 \Rightarrow 5k = 18 - \frac{2700}{109} = -\frac{738}{109}$

$\Rightarrow k = -\frac{738}{109 \times 5} = \frac{-738}{545}$

$\therefore$ নির্ণেয় তৃতীয় শীর্ষের স্থানাংক $\left(-\frac{108}{109}, \frac{-738}{545}\right)$ **(Ans.)**

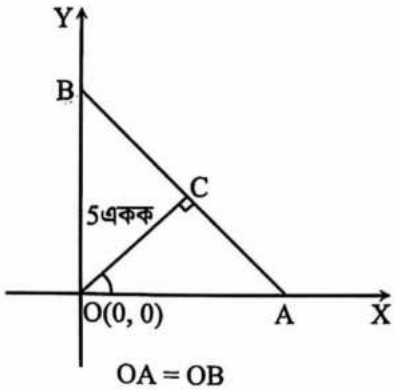
Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ৮** দৃশ্যকল্প-১:




OA = OB

**দৃশ্যকল্প-২: $4x - 3y + 1 = 0$ এবং $3x + 4y + 8 = 0$**

**(ক) (3, – 1) এবং (2, – 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগরেখা x অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।** [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২১]

**(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে AB সরলরেখার উপর লম্বরেখা OC এর সমীকরণ নির্ণয় কর।** [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২১; ম. বো. ২১]

**(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২; রা. বো. ১৭]

**সমাধান:**

**ক** x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ $\theta$ হলে,

ঢাল $= \tan\theta = \frac{-2+1}{2-3} = 1$

$\therefore \theta = \tan^{-1}1 = 45°$ **(Ans.)**

এবং x অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ $= 180° - 45°$
$= 135°$ **(Ans.)**

**খ** এখানে, OA = OB

$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 45°$

এবং $OC \perp AB$

$\therefore \angle OAC = \angle AOC = 45°$

ধরি, AB রেখার সমীকরণ,

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = 5$

$\Rightarrow x\cos\angle AOC + y\sin\angle AOC = 5$

$\therefore x\cos45° + y\sin45° = 5$

$\Rightarrow x\frac{1}{\sqrt{2}} + y\frac{1}{\sqrt{2}} = 5$

$\Rightarrow x + y = 5\sqrt{2}$

O(0, 0) বিন্দুগামী $x + y = 5\sqrt{2}$ রেখার উপর লম্ব OC রেখার সমীকরণ, $x - y = 0$ **(Ans.)**

**বিকল্প পদ্ধতি:**

দেওয়া আছে, OA = OB

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ হবে,

$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ [ যেখানে A(a, 0) এবং B(0, a)]

$\Rightarrow x + y = a$ ..... (i)

(i) নং রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ হবে, $x - y + k = 0$ ..... (ii)

(ii) নং সমীকরণটি (0, 0) বিন্দুগামী।

$\therefore 0 - 0 + k = 0$

$\Rightarrow k = 0$

$\therefore x - y = 0$; যা OC রেখার সমীকরণ। **(Ans.)**

**গ** প্রদত্ত রেখাদ্বয়, $4x - 3y + 1 = 0$ ..... (i)

এবং $3x + 4y + 8 = 0$ ..... (ii)

(i) নং ও (ii) নং রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ।

$\frac{4x - 3y + 1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \pm\frac{3x + 4y + 8}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$

$\Rightarrow 4x - 3y + 1 = \pm(3x + 4y + 8)$

এখানে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 4 \times 3 + (-3)4 = 12 - 12 = 0$

অর্থাৎ, রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

(+) চিহ্ন নিয়ে পাই,

মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডক: $4x - 3y + 1 = 3x + 4y + 8$

$\Rightarrow x - 7y = 7$

$\Rightarrow \frac{x}{7} + \frac{y}{-1} = 1$

$\therefore$ সমদ্বিখন্ডকটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 1$

$= 3\frac{1}{2}$ বর্গ একক **(Ans.)**

আবার, (–) চিহ্ন নিয়ে পাই, অপর মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডক

$4x - 3y + 1 = -(3x + 4y + 8)$

$\Rightarrow 4x - 3y + 1 = -3x - 4y - 8$

$\Rightarrow 7x + y = -9$

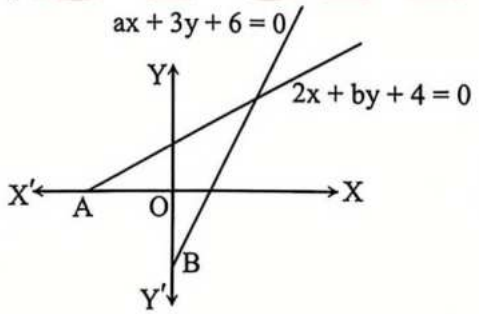
$\Rightarrow \frac{x}{-\frac{9}{7}} + \frac{y}{-9} = 1$

$\therefore$ সমদ্বিখন্ডকটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{7} \times 9$

$= 5\frac{11}{14}$ বর্গ একক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৯** দৃশ্যকল্প-১:




**দৃশ্যকল্প-২: $3x + 4y - 24 = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।**

**(ক) $x^2 + y^2 - 4y = 0$ সমীকরণকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর।** [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২]

**(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।** [দি. বো. ২৩]

**(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশকে সমান তিনভাগে বিভক্ত করে এমন বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।** [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩; সি. বো. ১৯; ব. বো. ১৯]



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধান:**

**ক** কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাংক (x, y) এবং পোলার স্থানাংক (r, θ) হলে, স্থানাংকের সম্পর্ক হতে পাই, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

এবং $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

এখানে, $x^2 + y^2 - 4y = 0$

$\Rightarrow r^2 - 4r\sin\theta = 0$

$\Rightarrow r^2 = 4r\sin\theta$

$\therefore r = 4\sin\theta$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $ax + 3y + 6 = 0$ ..... (i)

এবং $2x + by + 4 = 0$ ..... (ii)

(i) নং হতে পাই, $ax + 3y = -6$

$$\Rightarrow \frac{ax}{-6} + \frac{3y}{-6} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-\frac{6}{a}} + \frac{y}{-2} = 1$$

$\therefore$ (i) নং রেখাটি x অক্ষকে $\left(-\frac{6}{a}, 0\right)$ এবং y অক্ষকে $B(0, -2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) নং হতে পাই, $2x + by = -4$

$$\Rightarrow \frac{2x}{-4} + \frac{by}{-4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{4}{b}} = 1$$

$\therefore$ (ii) নং রেখাটি x অক্ষকে $A(-2, 0)$ বিন্দুতে এবং y অক্ষকে $\left(0, \frac{4}{b}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, $A(-2, 0)$ এবং $B(0, -2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা AB এর সমীকরণ:

$$\frac{x-(-2)}{-2-0} = \frac{y-0}{0-(-2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{-2} = \frac{y}{2}$$

$\Rightarrow x + 2 = -y$

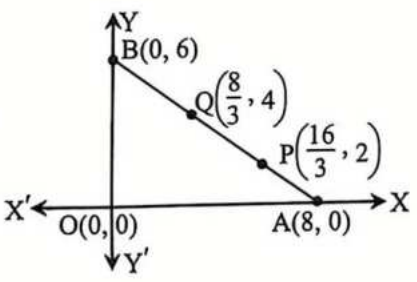
$\therefore x + y + 2 = 0$ **(Ans.)**

**গ** প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ,

$3x + 4y - 24 = 0$ ..... (i)

$$\Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$$

$\therefore$ সরলরেখাটির x অক্ষের ছেদবিন্দু A(8, 0) ও y অক্ষের ছেদবিন্দু B(0, 6)




ধরি, P ও Q বিন্দুদ্বয় AB কে সমান তিনভাগে ভাগ করে।

তাহলে, P বিন্দু AB কে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$\therefore \text{P বিন্দুর স্থানাংক} \equiv \left(\frac{1\times0+2\times8}{1+2}, \frac{1\times6+2\times0}{2+1}\right)$$

$$\equiv \left(\frac{16}{3}, 2\right)$$

এবং Q বিন্দুর AB কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$\therefore \text{Q বিন্দুর স্থানাংক} \equiv \left(\frac{2\times0+1\times8}{2+1}, \frac{2\times6+1\times0}{2+1}\right)$$

$$\equiv \left(\frac{8}{3}, 4\right)$$

মূলবিন্দু O(0, 0) এবং $P\left(\frac{16}{3}, 2\right)$ বিন্দুর সংযোজক রেখা OP এর সমীকরণ,

$$\frac{y-0}{x-0} = \frac{0-2}{0-\frac{16}{3}}$$

$\Rightarrow 16y = 6x$

$\therefore 3x - 8y = 0$

আবার, মূলবিন্দু O(0, 0) এবং $Q\left(\frac{8}{3}, 4\right)$ বিন্দুর সংযোজক রেখা OQ এর সমীকরণ,

$$\frac{y-0}{x-0} = \frac{0-4}{0-\frac{8}{3}}$$

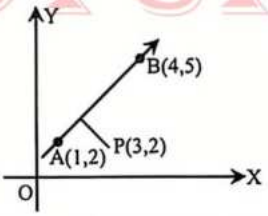
$\Rightarrow 8y = 12x$

$\therefore 3x - 2y = 0$

$\therefore$ সমত্রিখন্ডক বিন্দু ও মূলবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ:

$3x - 8y = 0$ এবং $3x - 2y = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১০** দৃশ্যকল্প-১:




দৃশ্যকল্প-২: $L \equiv (4, 3)$, $M \equiv (3, 5)$, $N \equiv (6, 4)$

(ক) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা x অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুগামী। [ম. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে, AB = 3BC হলে, AC এর লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে MN ও NL রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২; দি. বো. ২২, ১৯; ম. বো. ২২; রা. বো. ২১; চ. বো. ২১; য. বো. ১৯, ১৭]



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধান:**

**ক** প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ,

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$$

$\Rightarrow bx - ay = ab$ .... (i)

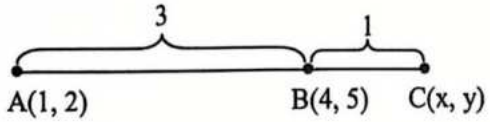
(i) নং রেখা x অক্ষকে A(a, 0) বিন্দুতে ছেদ করে,

$\therefore$ A(a, 0) বিন্দুগামী (i) নং রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ,

$ax + by = a \times a + 0$

$\therefore ax + by = a^2$ **(Ans.)**

**খ**




ধরি, C বিন্দুটি (x, y)

দেওয়া আছে, AB = 3BC

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{3}{1}$$

$\Rightarrow$ AB : BC = 3 : 1

B বিন্দুটি AC কে 3 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে

$$\therefore \text{B বিন্দুর স্থানাঙ্ক} \equiv \left(\frac{3x+1}{3+1}, \frac{3y+2}{3+1}\right) \equiv (4, 5)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3x+1}{4}, \frac{3y+2}{4}\right) \equiv (4, 5)$$

$\Rightarrow \frac{3x+1}{4} = 4$ এবং $\frac{3y+2}{4} = 5$

$\Rightarrow 3x + 1 = 16$ $\Rightarrow 3y + 2 = 20$

$\Rightarrow x = 5$ $\Rightarrow y = 6$

C(x, y) $\equiv$ (5, 6)

এখন, AC এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \equiv (3, 4)$

এবং AC রেখার ঢাল $= \frac{6-2}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$

$\therefore$ AC রেখার সাথে লম্ব লেখার ঢাল $= -1$

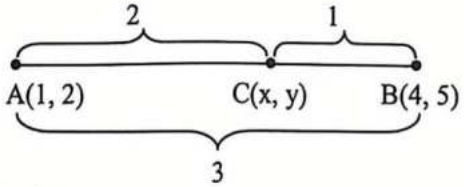
$\therefore$ (3, 4) বিন্দুগামী এবং –1 ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ:

$y - 4 = -1(x - 3)$

$\Rightarrow y - 4 = -x + 3$

$\therefore x + y = 7$

আবার,




ধরি, C বিন্দুটি (x, y)

দেওয়া আছে, AB = 3BC

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{AB-BC}{BC}=\frac{3-1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{2}{1}$$

অর্থাৎ, AB কে C বিন্দুটি 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$\therefore \text{C বিন্দুর স্থানাঙ্ক} \equiv \left(\frac{2\times4+1\times1}{2+1}, \frac{2\times5+1\times2}{2+1}\right)$$

$$\equiv (3, 4)$$

$$\therefore \text{AC এর মধ্যবিন্দু} \equiv \left(\frac{3+1}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \equiv (2, 3)$$

$\therefore$ (2, 3) বিন্দুগামী – 1 ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ:

$y - 3 = -1(x - 2)$

$\Rightarrow y - 3 = -x + 2$

$\therefore x + y = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় AC এর লম্ব সমদ্বিখন্ডক: $x + y = 7$ ও $x + y = 5$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, L(4, 3), M(3, 5), N(6, 4)

এখন, M(3, 5) এবং N(6, 4) বিন্দুর সংযোজক রেখা MN এর সমীকরণ,

$$\frac{x-3}{3-6}=\frac{y-5}{5-4}$$

$\Rightarrow x - 3 = -3y + 15$

$\therefore x + 3y - 18 = 0$ ..... (i)

আবার, N(6, 4) এবং L(4, 3) বিন্দুর সংযোজক রেখা NL এর সমীকরণ,

$$\frac{x-6}{6-4}=\frac{y-4}{4-3}$$

$\Rightarrow x - 6 = 2y - 8$

$\therefore x - 2y + 2 = 0$ ..... (ii)

(i) নং ও (ii) নং রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডক রেখার সমীকরণ,

$$\frac{x+3y-18}{\sqrt{1^2+3^2}}=\pm\frac{x-2y+2}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x+3y-18}{\sqrt{10}}=\pm\frac{x-2y+2}{\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow x + 3y - 18 = \pm\sqrt{2}(x - 2y + 2)$

এখানে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 1 \times 1 + 3(-2) = -5 < 0$

(+) চিহ্ন নিয়ে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ:

$x + 3y - 18 = \sqrt{2}(x - 2y + 2)$

$\Rightarrow x + 3y - 18 = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow (1-\sqrt{2})x + (3 + 2\sqrt{2})y - 18 - 2\sqrt{2} = 0$

(–) চিহ্ন নিয়ে স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ:

$x + 3y - 18 = -\sqrt{2}(x - 2y + 2)$

$\Rightarrow x + 3y - 18 = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow x + \sqrt{2}x + 3y - 2\sqrt{2}y - 18 + 2\sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow (1+\sqrt{2})x + (3 - 2\sqrt{2})y - 18 + 2\sqrt{2} = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডক রেখার সমীকরণ:

$(1-\sqrt{2})x + (3 + 2\sqrt{2})y - 18 - 2\sqrt{2} = 0$

এবং $(1+\sqrt{2})x + (3 - 2\sqrt{2})y - 18 + 2\sqrt{2} = 0$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS
ADMISSIONSTUFFS

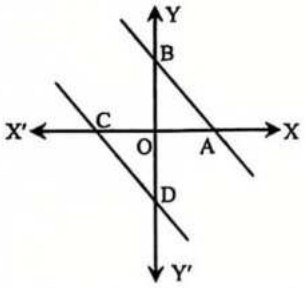


t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ১১**




**AB = 4x + 3y – 12 = 0 এবং AB || CD.**

**(ক) AB কে ঢাল আকারে প্রকাশ করে ইহার ঢাল নির্ণয় কর।** [ঢা. বো. ২২]

**(খ) মূলবিন্দু হতে AB ও CD রেখার দূরত্ব সমান হলে CD রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।** [ঢা. বো. ২২]

**(গ) দেখাও যে, ABCD একটি রম্বস।** [ঢা. বো. ২২]

**গমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $AB = 4x + 3y - 12 = 0$

$\Rightarrow 3y = -4x + 12$

$\Rightarrow y = \frac{-4}{3}x + \frac{12}{3}$ .... (i)

(i) নং কে $y = mx + c$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

ঢাল, $m = \frac{-4}{3}$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $AB = 4x + 3y - 12 = 0$

O(0, 0) হতে AB রেখার লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{4\times0+3\times0-12}{\sqrt{4^2+3^2}}\right|$

$= \frac{12}{5}$ একক

আবার, AB || CD

ধরি, CD রেখার সমীকরণ: $4x + 3y + k = 0$

O(0, 0) হতে CD রেখার দূরত্ব, $\left|\frac{4\times0+3\times0-k}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \frac{12}{5}$

$\Rightarrow \left|\frac{k}{5}\right| = \frac{12}{5}$

$\Rightarrow k = \pm 12$

কিন্তু $k = -12$ হলে সেটি AB রেখার সমীকরণ হয়।

$\therefore k = 12$

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ: $4x + 3y + 12 = 0$ **(Ans.)**

**গ** AB রেখার সমীকরণ:

$4x + 3y - 12 = 0$

$\Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

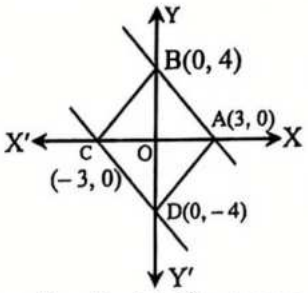
$\therefore$ x ও y অক্ষের ছেদবিন্দু যথাক্রমে A(3, 0) ও B(0, 4)

CD রেখার সমীকরণ:

$4x + 3y + 12 = 0$

$\Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} = 1$

$\therefore$ x ও y অক্ষের ছেদবিন্দু যথাক্রমে C(– 3, 0) ও D(0, – 4)




এখন, A, B, C ও D বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ABCD চতুর্ভুজের

AB বাহু $= \sqrt{(3-0)^2+(0-4)^2} = 5$ একক

BC বাহু $= \sqrt{(0+3)^2+(4-0)^2} = 5$ একক

CD বাহু $= \sqrt{(-3-0)^2+(0+4)^2} = 5$ একক

AD বাহু $= \sqrt{(0-3)^2+(-4-0)^2} = 5$ একক

কর্ণ AC $= \sqrt{(3+3)^2+(0-0)^2} = 6$ একক

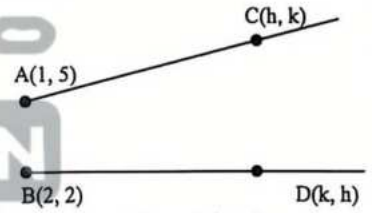
কর্ণ BD $= \sqrt{(0+0)^2+(4+4)^2} = 8$ একক

যেহেতু ABCD চতুর্ভুজের AB = BC = CD = AD

এবং কর্ণ AC ≠ কর্ণ BD

$\therefore$ ABCD একটি রম্বস। **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ১২** দৃশ্যকল্প-১:




দৃশ্যকল্প-২: **3x + 8y – 24 = 0**

**(ক) 2x – 3y + k = 0 এবং 2x – 3y = 0 রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $2\sqrt{13}$ একক হলে k এর মান নির্ণয় কর।** [রা. বো. ২২]

**(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে AC এবং BD রেখাদ্বয়ের ঢাল যথাক্রমে – 2 এবং – 1 হলে x অক্ষকে CD রেখা যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।** [রা. বো. ২২]

**(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রদত্ত রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের মধ্যবিন্দু ও মূলবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।** [ম. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $2x - 3y + k = 0$ ..... (i)

এবং $2x - 3y = 0$ ..... (ii)

(i) ও (ii) এর মধ্যবর্তী দূরত্ব

$\frac{|k-0|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = 2\sqrt{13}$

$\Rightarrow \frac{|k|}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$

$\therefore k = \pm 26$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, A(1, 5), C(h, k)

এখানে, AC এর ঢাল $= \frac{k-5}{h-1} = -2$

$\Rightarrow k - 5 = -2h + 2$

$\Rightarrow 2h + k = 7$ ..... (i)

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



আবার, B(2, 2), D(k, h)

BD এর ঢাল $\frac{h-2}{k-2} = -1$

$\Rightarrow h - 2 = -k + 2$

$\Rightarrow h + k = 4$ ..... (ii)

(i) – (ii) করে পাই, $h = 3$

(ii) নং এ $h = 3$ বসিয়ে পাই, $k = 1$

$\therefore$ C(h, k) ≡ (3, 1) এবং D(k, h) ≡ (1, 3)

CD রেখার সমীকরণ,

$\frac{y-1}{x-3} = \frac{1-3}{3-1}$

$\Rightarrow \frac{y-1}{x-3} = -1$

$\Rightarrow y - 1 = -x + 3$

$\Rightarrow x + y = 4$

$\Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$

$\therefore$ CD রেখার x অক্ষের ছেদবিন্দু (4, 0) **(Ans.)**

**গ** প্রদত্ত রেখা,

$3x + 8y - 24 = 0$

$\Rightarrow 3x + 8y = 24$

$\Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{3} = 1$

$\therefore$ রেখাটি x অক্ষকে A(8, 0) এবং y অক্ষকে B(0, 3) বিন্দুতে ছেদ করে।

AB এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{8+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(4, \frac{3}{2}\right)$

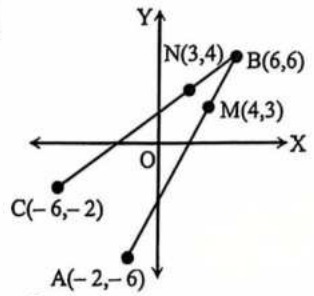
এখন, মূলবিন্দু (0, 0) এবং $\left(4, \frac{3}{2}\right)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$\frac{y-0}{x-0} = \frac{0-\frac{3}{2}}{0-4}$

$\Rightarrow -4y = -\frac{3x}{2}$

$\therefore 3x - 8y = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৩**




**(ক) AM রেখাটি x-অক্ষ দ্বারা যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়, তা নির্ণয় কর।** [কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৯]

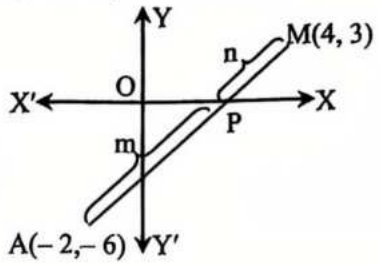
**(খ) B(6, 6) বিন্দু হতে AC সরলরেখার লম্বদূরত্ব নির্ণয় কর।** [কু. বো. ২২]

**(গ) দেখাও যে, ∠B এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।**

[কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২৩; চ. বো. ২২; সি. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, A(– 2, – 6) এবং M(4, 3)।




ধরি, AM রেখাটি x অক্ষ দ্বারা P বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

$\therefore P \equiv \left(\frac{4m-2n}{m+n}, \frac{3m-6n}{m+n}\right)$

x অক্ষের উপর P বিন্দুর কোটি শূন্য।

$\therefore \frac{3m-6n}{m+n} = 0$

$\Rightarrow 3m - 6n = 0$

$\Rightarrow 3m = 6n$

$\therefore m = 2n$

$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2}{1}$

$\therefore m : n = 2 : 1$

$\therefore$ AM রেখা x অক্ষ দ্বারা 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, A(– 2, – 6), C(– 6, – 2)।

AC রেখার সমীকরণ,

$\frac{y+6}{x+2} = \frac{-6+2}{-2+6}$

$\Rightarrow \frac{y+6}{x+2} = -1$

$\Rightarrow y + 6 = -x - 2$

$\therefore x + y + 8 = 0$ .....(i)

এখন,

B(6, 6) বিন্দু হতে (i) নং রেখার লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{6+6+8}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|$

$= 10\sqrt{2}$ একক **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে B(6, 6) ও C(– 6, – 2)

BC রেখার সমীকরণ,

$\frac{x-6}{6+6} = \frac{y-6}{6+2}$

$\Rightarrow 8x - 48 = 12y - 72$

$\Rightarrow 8x - 12y + 24 = 0$

$\Rightarrow 2x - 3y + 6 = 0$ ....(i)

আবার, A(– 2, – 6) ও B(6, 6)

AB রেখার সমীকরণ,

$\frac{x+2}{-2-6} = \frac{y+6}{-6-6}$

$\Rightarrow \frac{x+2}{8} = \frac{y+6}{12}$

$\Rightarrow 12x + 24 = 8y + 48$

$\Rightarrow 12x - 8y - 24 = 0$

$\therefore 3x - 2y - 6 = 0$ ..... (ii)

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



এখন, (i) ও (ii) রেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{2x-3y+6}{\sqrt{2^2+3^2}} = \pm\frac{3x-2y-6}{\sqrt{3^2+2^2}}$$

$\Rightarrow 2x-3y+6 = \pm(3x-2y-6)$

'+' চিহ্ন নিয়ে,

$2x-3y+6 = 3x-2y-6$

$\Rightarrow 2x-3x-3y+2y+6+6=0$

$\Rightarrow -x-y+12=0$

$\Rightarrow y=-x+12$

$\therefore$ ঢাল, $m_1=-1$

আবার, '–' চিহ্ন নিয়ে,

$2x-3y+6=-3x+2y+6$

$\Rightarrow 2x+3x-3y-2y+6-6=0$

$\Rightarrow 5x-5y=0$

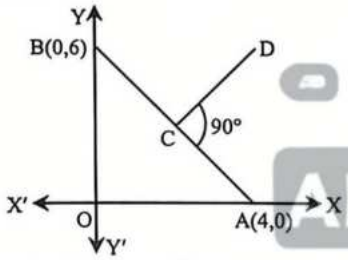
$\Rightarrow y=x$

$\therefore$ ঢাল, $m_2=1$

এখানে, $m_1m_2=(-1)\times 1=-1$

$\therefore$ সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ১৪** দৃশ্যকল্প-১:




এখানে C, AB এর মধ্যবিন্দু

দৃশ্যকল্প-২: $3x+8y-24=0$

(ক) (2, – 1) বিন্দু থেকে যে সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব 1 একক সেই সেটের সঞ্চারপথ নির্ণয় করো। [কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে CD সরলরেখার সমীকরণ ও তার ঢাল নির্ণয় কর। [ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর রেখা এবং $8x+3y+48=0$ রেখার অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক দ্বারা y অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য ও অক্ষদ্বয়ের সাথে অঙ্কিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ম. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** ধরি, সেটের যে কোনো বিন্দু, P(x, y)

P(x, y) হতে (2, –1) বিন্দুর দূরত্ব,

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=1$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=1$

সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে। **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, A(4, 0), B(0, 6)

এবং C বিন্দু AB এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাংক $\equiv \left(\frac{0+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) \equiv (2, 3)$

AB রেখার ঢাল $= \frac{6-0}{0-4} = -\frac{3}{2}$

যেহেতু $CD \perp AB$

$\therefore$ CD রেখার ঢাল $= \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট C(2, 3) বিন্দুগামী CD রেখার সমীকরণ,

$y-3=\frac{2}{3}(x-2)$

$\Rightarrow 3y-9=2x-4$

$\therefore 2x-3y+5=0$

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ: $2x-3y+5=0$ এবং তার ঢাল $=\frac{2}{3}$ **(Ans.)**

**গ** প্রদত্ত রেখাদ্বয়, $3x+8y-24=0$ ..... (i)

এবং $8x+3y+48=0$ ..... (ii)

এখন, $a_1a_2+b_1b_2=3\times 8+8\times 3=24+24>0$

$\therefore$ (i) নং ও (ii) নং রেখার অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{3x+8y-24}{\sqrt{3^2+8^2}} = \frac{8x+3y+48}{\sqrt{8^2+3^2}}$$

$\Rightarrow 3x+8y-24=8x+3y+48$

$\Rightarrow -5x+5y=72$

$\Rightarrow \frac{-5x}{72}+\frac{5y}{72}=1$

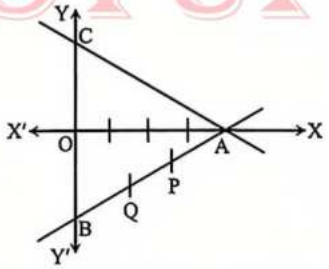
$\Rightarrow \frac{x}{-\frac{72}{5}}+\frac{y}{\frac{72}{5}}=1$

$\therefore$ স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডক দ্বারা y অক্ষের খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $\frac{72}{5}$ একক।

$\therefore$ স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডক দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সাথে অঙ্কিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\times\frac{72}{5}\times\frac{72}{5}$

$= \frac{2592}{25}$ বর্গ একক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৫** দৃশ্যকল্প-১:




চিত্রে OA = 4, OB = 2 এবং OC = 3

দৃশ্যকল্প-২: $7x-y=5$

(ক) (2, – 3) বিন্দুগামী এবং x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে AP = PQ = QB হলে $\Delta OPQ$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [দি. বো. ২২]

(গ) (– 1, 5) বিন্দুগামী এবং দৃশ্যকল্প-২ এর রেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে বিন্দুটি হতে রেখাটির লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর। [সি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২১; রা. বো. ১৭]



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



সমাধানঃ

**ক** (2, – 3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$y + 3 = m(x - 2)$ ..... (i)

(i) নং রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করলে ঢাল, $m = \tan 45° = 1$

m এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$y + 3 = 1(x - 2)$

$\therefore x - y - 5 = 0$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, OA = 4 এবং A বিন্দু x অক্ষের উপর ধনাত্মক দিকে অবস্থিত।

∴ A বিন্দুর স্থানাংক (4, 0)

OB = 2 এবং B বিন্দু y অক্ষের উপর ঋণাত্মক দিকে অবস্থিত।

∴ B বিন্দুর স্থানাংক (0, – 2)

যেহেতু AP = PQ = QB

P বিন্দু AB রেখাকে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাংক $\equiv \left(\frac{1\times 0 + 2\times 4}{1+2}, \frac{1(-2) + 2\times 0}{1+2}\right)$

$\equiv \left(\frac{8}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

আবার, Q, PB এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাংক $= \left(\frac{\frac{8}{3}+0}{2}, \frac{-2-\frac{2}{3}}{2}\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

এবং মূলবিন্দু O(0, 0)

$$\therefore \Delta OPQ \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left|-\frac{32}{9} + \frac{8}{9}\right|$$

$= \frac{4}{3}$ বর্গ একক **(Ans.)**

**গ** প্রদত্ত রেখার সমীকরণ,

$7x - y = 5$

$\Rightarrow 7x - y - 5 = 0$ ..... (i)

∴ (– 1, 5) বিন্দুগামী (i) নং রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$x + 7y = -1 + 35$

$\Rightarrow x + 7y - 34 = 0$ ..... (ii)

এখানে, (i) ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুই হলো পাদবিন্দু।

(i) × 7 + (ii) করে পাই,

$50x = 69$

$\therefore x = \frac{69}{50}$

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে,

$y = \frac{233}{50}$

$\therefore$ পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{69}{50}, \frac{233}{50}\right)$

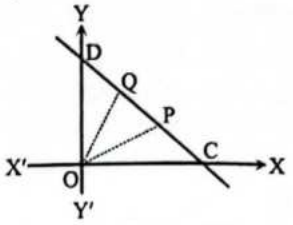
এখানে, (– 1, 5) এবং $\left(\frac{69}{50}, \frac{233}{50}\right)$ বিন্দু দুটির মধ্যবর্তী দূরত্বই নির্ণেয় লম্ব দূরত্ব।

$\therefore$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{\left(\frac{69}{50}+1\right)^2 + \left(\frac{233}{50}-5\right)^2}$

$= \frac{17\sqrt{2}}{10}$ একক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৬** দৃশ্যকল্প-১: A(3, –2), B(5, 6) দুটি বিন্দু।

দৃশ্যকল্প-২:




AB রেখার সমীকরণ $2x + 3y = 12$ এবং CD রেখার উপর (6, 4) একটি বিন্দু।

(ক) (5, – 5) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [দি. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে AB এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক রেখাটি y অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

[দি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্নঃ ম. বো. ২৩; রা. বো. ২২; য. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ AB || CD এবং CD রেখার সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয় P ও Q হলে, ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল বের কর।

[য. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্নঃ ঢা. বো. ১৯; চ. বো. ১৭]

সমাধানঃ

**ক** ধরি, (5, – 5) বিন্দুর পোলার স্থানাংক (r, θ)

$\therefore r = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$ একক

যেহেতু (5, – 5) বিন্দুটির চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore \theta = -\tan^{-1}\left|\frac{-5}{5}\right| = -\tan^{-1}1 = -\frac{\pi}{4}$

অথবা, $\theta = 2\pi - \tan^{-1}\left|\frac{-5}{5}\right| = 2\pi - \tan^{-1}1 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ (5,– 5)এর পোলার স্থানাংক $\left(5\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$ অথবা, $\left(5\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

**খ** এখানে, A(3, – 2), B(5, 6) দুইটি বিন্দু।

AB রেখার মধ্যবিন্দু অর্থাৎ সমদ্বিখন্ডক বিন্দুর স্থানাংক,

$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) \equiv (4, 2)$

AB রেখার ঢাল $= \frac{-2-6}{3-5} = 4$

$\therefore$ লম্ব রেখার ঢাল $= -\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}$ ঢাল বিশিষ্ট (4, 2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 4)$

$4y - 8 = -x + 4$

$\Rightarrow x + 4y = 12$

$\Rightarrow \frac{x}{12} + \frac{y}{3} = 1$

$\therefore$ y অক্ষের ছেদবিন্দু (0, 3) **(Ans.)**



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** এখানে, AB রেখার সমীকরণ,

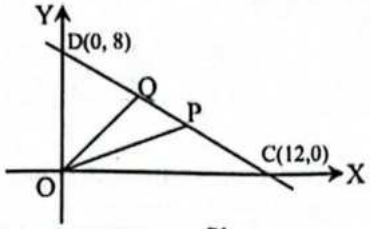
$2x + 3y = 12$

যেহেতু AB || CD ∴ CD রেখার সমীকরণ,

$2x + 3y = 2 \times 6 + 3 \times 4$ [∵ CD রেখা (6, 4) গামী]

$\Rightarrow 2x + 3y = 24 \Rightarrow \frac{x}{12} + \frac{y}{8} = 1$

∴ x অক্ষের ছেদবিন্দু C ≡ (12, 0) ও y অক্ষের ছেদবিন্দু D ≡ (0, 8)




P বিন্দু CD কে 1 : 2 অনুপাতে অন্তঃর্বিভক্ত করে।

∴ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক ≡ $\left(\frac{1\times0+2\times12}{1+2}, \frac{1\times8+2\times0}{1+2}\right)$

≡ $\left(8, \frac{8}{3}\right)$

∴ PD এর মধ্যবিন্দু Q

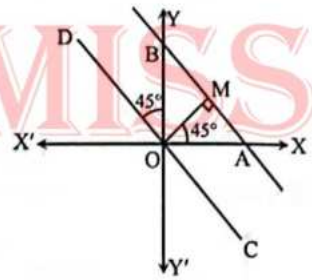
∴ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক ≡ $\left(\frac{0+8}{2}, \frac{8+\frac{8}{3}}{2}\right) \equiv \left(4, \frac{16}{3}\right)$

ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & \frac{8}{3} & 1 \\ 4 & \frac{16}{3} & 1 \end{vmatrix}$

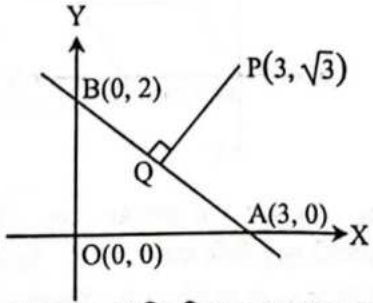
$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{128}{3} - \frac{32}{3}\right)\right|$

= 16 বর্গ একক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৭** দৃশ্যকল্প-১:




দৃশ্যকল্প-২:




(ক) Y অক্ষ ও (2, 2) বিন্দু থেকে (a, 5) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে, CD সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ AQ : QB = 2 : 3 হলে, ΔPQB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ১৯]

সমাধান:

**ক** Y অক্ষ হতে (a, 5) বিন্দুর দূরত্ব = |a|

(2 , 2) হতে (a, 5) বিন্দুর দূরত্ব,

$\sqrt{(2-a)^2 + (2-5)^2} = |a|$

$\Rightarrow \sqrt{4 - 4a + a^2 + 9} = |a|$

$\Rightarrow \sqrt{a^2 - 4a + 13} = |a|$

$\Rightarrow a^2 - 4a + 13 = a^2$

$\Rightarrow -4a + 13 = 0$

$\therefore a = \frac{13}{4}$ **(Ans.)**

**খ** CD রেখার x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ = 90° + 45° = 135°

∴ CD রেখার ঢাল, m = tan 135° = –1

(0,0) বিন্দুগামী – 1 ঢাল বিশিষ্ট CD রেখার সমীকরণ,

$\Rightarrow y - 0 = -1(x - 0)$

$\Rightarrow y = -x$

$\therefore x + y = 0$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, x + y = 0 **(Ans.)**

**গ** এখানে, AQ : QB = 2 : 3 অর্থাৎ, Q বিন্দু AB কে 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

অতএব, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক ≡ $\left(\frac{2\times0+3\times3}{2+3}, \frac{2\times2+3\times0}{2+3}\right)$

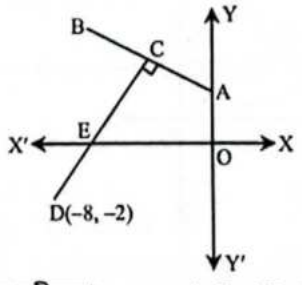
≡ $\left(\frac{9}{5}, \frac{4}{5}\right)$

∴ Δ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{3} & 1 \\ \frac{9}{5} & \frac{4}{5} & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \left|\frac{1}{2}\left\{3\left(\frac{4}{5}-2\right) - \sqrt{3}\left(\frac{9}{5}-0\right) + 1\left(\frac{18}{5}-0\right)\right\}\right|$

$= \frac{9\sqrt{3}}{10}$ বর্গ একক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৮**




AB রেখার সমীকরণ x + y = 4, C, AB এর মধ্যবিন্দু।

(ক) AB রেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। [রা. বো. ২১]

(খ) E বিন্দুগামী AB এর সমান্তরাল সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২]

(গ) O বিন্দু এবং EC রেখার সমত্রিখণ্ডন বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২]



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, AB রেখার সমীকরণ: $x + y = 4$

$\Rightarrow y = -x + 4$

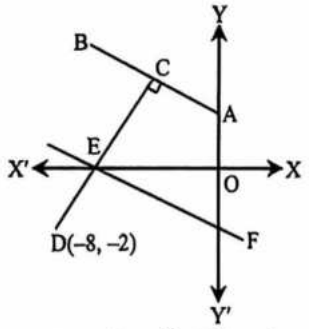
$\therefore$ AB রেখার ঢাল $= -1$

AB রেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan\theta = -1$

$\therefore \theta = 135°$ **(Ans.)**

**খ**




এখানে, AB রেখার সমীকরণ: $x + y = 4$

AB রেখার উপর লম্ব D(– 8, – 2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$x - y = -8 + 2$

$\Rightarrow x - y = -6$

$\Rightarrow \frac{x}{-6} + \frac{y}{6} = 1$

$\therefore$ CD রেখা দ্বারা x অক্ষের ছেদবিন্দু E(– 6, 0)

AB রেখার সমান্তরাল E(– 6, 0) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$x + y = -6 + 0$

$\Rightarrow \frac{x}{-6} + \frac{y}{-6} = 1$

$\therefore$ OF = OE = |– 6| = 6

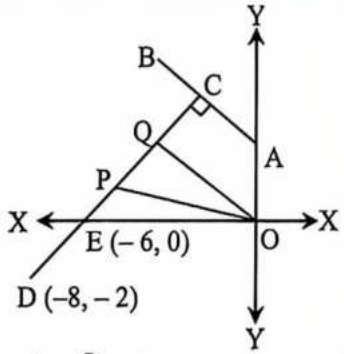
$\therefore$ রেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সাথে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times OF \times OE$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6$

= 18 বর্গ একক **(Ans.)**

**গ**




AB রেখার সমীকরণ, $x + y = 4$ ..... (i)

'খ' হতে প্রাপ্ত, CD রেখার সমীকরণ,

$x - y = -6$ ..... (ii)

(i) + (ii) করে পাই, $2x = -2$

$\therefore x = -1$

(i) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই, $-1 + y = 4$

$\therefore y = 5$

$\therefore$ (i) ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দু C(– 1,5)

এবং 'খ' হতে প্রাপ্ত E(– 6, 0)

ধরি, P ও Q বিন্দুদ্বয় EC কে সমত্রিখন্ডিত করে।

$\therefore$ EC কে P বিন্দু 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{1 \times (-1) + 2 \times (-6)}{1+2}, \frac{1 \times 5 + 2 \times 0}{1+2}\right)$

$\equiv \left(\frac{-13}{3}, \frac{5}{3}\right)$

$\therefore$ PC এর মধ্যবিন্দু Q

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{-\frac{13}{3} - 1}{2}, \frac{\frac{5}{3} + 5}{2}\right) \equiv \left(-\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$

OP রেখার সমীকরণ: $\frac{y-0}{x-0} = \frac{0 - \frac{5}{3}}{0 + \frac{13}{3}}$

$\Rightarrow 13y = -5x$

$\Rightarrow 5x + 13y = 0$

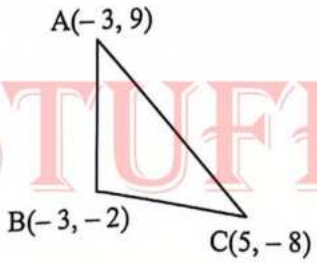
OQ রেখার সমীকরণ: $\frac{y-0}{x-0} = \frac{0 - \frac{10}{3}}{0 + \frac{8}{3}}$

$\Rightarrow 8y = -10x$

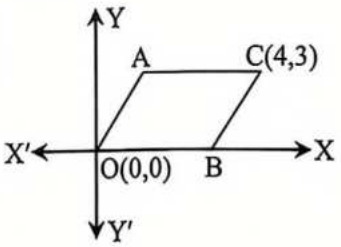
$\Rightarrow 5x + 4y = 0$

$\therefore$ O বিন্দু ও EC রেখার সমত্রিখণ্ডন বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার সমীকরণ: $5x + 13y = 0$ এবং $5x + 4y = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৯** উদ্দীপক-১:




উদ্দীপক-২:




(ক) $4x - 3y + 2 = 0$ এবং $8x - 6y - 9 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২১]

(খ) উদ্দীপক-১ এর প্রদর্শিত ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সাহায্যে A বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু. বো. ২১]

(গ) উদ্দীপক-২ এ প্রদর্শিত OBCA একটি সামান্তরিক এবং OA রেখার সমীকরণ $y = 3x$, AB কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ১৯]

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



সমাধান:

**ক** প্রদত্ত রেখাদ্বয়, $4x - 3y + 2 = 0$

$\Rightarrow 8x - 6y + 4 = 0$ ..... (i)

এবং $8x - 6y - 9 = 0$ .....(ii)

(i) ও (ii) নং সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{|4-(-9)|}{\sqrt{8^2+(-6)^2}}$

$= \frac{|4+9|}{\sqrt{64+36}}$

$= \frac{13}{10}$ একক **(Ans.)**

**খ** এখানে, $\Delta ABC$ এর শীর্ষবিন্দু A(−3, 9), B(−3 , −2) এবং C(5, −8)

$\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল

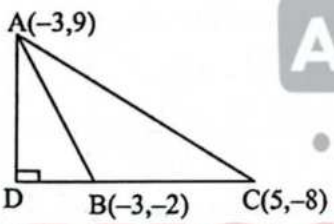
$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 9 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{-3(-2+8) - 9(-3-5) + 1(24+10)\}$

$= \frac{1}{2}(-18 + 72 + 34)$

$= \frac{1}{2} \times 88$

$= 44$ বর্গ একক




A হতে BC এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য, AD = $\Delta ABC$ এর উচ্চতা।

ভূমি, $BC = \sqrt{(5+3)^2 + (-8+2)^2}$

$= 10$ একক

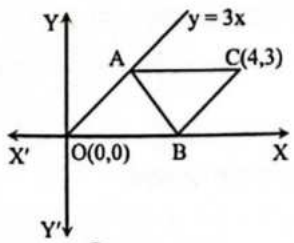
অর্থাৎ $\Delta$ ABC এর ক্ষেত্রফল,

$\frac{1}{2}$ BC. AD = 44

$\Rightarrow \frac{1}{2} 10 \times AD = 44$

$\therefore AD = \frac{44}{5}$ একক **(Ans.)**

**গ**




OA রেখার সমীকরণ, $y = 3x$

$\Rightarrow 3x - y = 0$ ..... (i)

OA এর সমান্তরাল C(4, 3) বিন্দুগামী BC রেখার সমীকরণ,

$3x - y = 12 - 3$

$\Rightarrow y = 3x - 9$

এখন, B বিন্দুতে $y = 0$ $\therefore x = \frac{9}{3} = 3$

$\therefore$ B বিন্দু $\equiv (3, 0)$

আবার, AC রেখা x অক্ষের সমান্তরাল।

C বিন্দুর কোটি = A বিন্দুর কোটি = 3

(i) নং সমীকরণে $y = 3$ বসিয়ে, $3x - 3 = 0$

$\Rightarrow x = 1$

$\therefore$ A বিন্দু $\equiv (1, 3)$

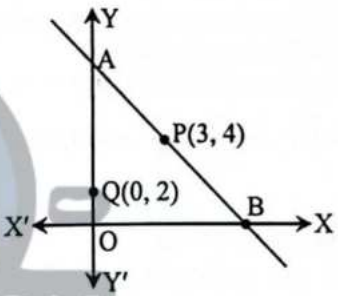
$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ,

$\frac{y-0}{x-3} = \frac{0-3}{3-1}$

$\Rightarrow 2y = -3x + 9$

$\Rightarrow 3x + 2y - 9 = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২০**




এখানে AP = BP

(ক) (0, −3) ও (5, 0) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমান্তরাল এবং (3, 5) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২১]

(খ) Q বিন্দু হতে AB রেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। [ব. বো. ২১]

(গ) Q বিন্দুগামী এবং P বিন্দু হতে 2 একক দূরবর্তী রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২১; অনু. রা. বো. ২৩

সমাধান:

**ক** এখানে, (0, −3) ও (5, 0) বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= \frac{-3-0}{0-5} = \frac{3}{5}$

যেহেতু দুইটি সমান্তরাল রেখার ঢাল পরস্পর সমান।

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার ঢাল $= \frac{3}{5}$

(3, 5) বিন্দুগামী এবং $\frac{3}{5}$ ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ,

$y - 5 = \frac{3}{5}(x - 3)$

$\Rightarrow 5y - 25 = 3x - 9$

$\Rightarrow 3x - 5y - 9 + 25 = 0$

$\therefore 3x - 5y + 16 = 0$ **(Ans.)**

**খ** ধরি, AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ..... (i)

যেখানে, B বিন্দু $\equiv (a, 0)$ এবং A বিন্দু $\equiv (0, b)$

AB এর মধ্যবিন্দু $\equiv \left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2}\right) \equiv \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

যেহেতু AP = BP

সেহেতু AB এর মধ্যবিন্দু, P ≡ (3, 4)

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

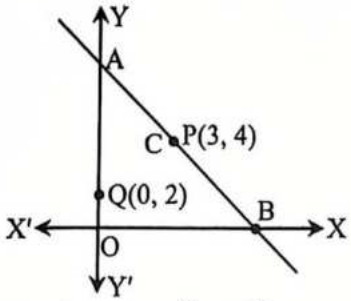
PDF Credit - Admission Stuffs



প্রশ্নমতে, $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = (3, 4)$

অর্থাৎ, $\frac{a}{2} = 3$ এবং $\frac{b}{2} = 4$

$\Rightarrow a = 6$ $b = 8$




সমীকরণ (i) এ a এবং b এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$

$\Rightarrow 4x + 3y = 24$

$\Rightarrow 4x + 3y - 24 = 0$

নির্ণেয় AB রেখার সমীকরণ $4x + 3y - 24 = 0$

এখানে, Q(0, 2) বিন্দু হতে AB রেখার লম্ব দূরত্ব,

$= \frac{|4 \times 0 + 3 \times 2 - 24|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-18|}{5} = \frac{18}{5}$ একক **(Ans.)**

**গ** ধরি, Q(0, 2) বিন্দুগামী রেখার ঢাল = m

তাহলে m ঢাল বিশিষ্ট Q(0, 2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$y - 2 = m(x - 0)$

$\Rightarrow y - 2 = mx$

$\Rightarrow mx - y + 2 = 0$ .....(i)

P(3, 4) বিন্দু হতে (i) নং এর দূরত্ব

$\frac{|3m - 4 + 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|3m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$

$\Rightarrow \frac{(3m - 2)^2}{m^2 + 1} = 4$

$\Rightarrow 9m^2 - 12m + 4 = 4m^2 + 4$

$\Rightarrow 5m^2 - 12m = 0$

$\Rightarrow m(5m - 12) = 0$

হয়, $m = 0$ অথবা, $5m - 12 = 0$

$\Rightarrow 5m = 12$

$\therefore m = \frac{12}{5}$

$\therefore$ সরলরেখাদ্বয়ের ঢাল $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{12}{5}$

মধ্যবর্তী কোণ $\theta$ হলে,

$$\tan\theta = \pm \frac{\frac{12}{5} - 0}{1 + \frac{12}{5} \cdot 0}$$

$\Rightarrow \tan\theta = \pm \frac{12}{5}$

(+) চিহ্ন নিয়ে পাই, $\tan\theta = \frac{12}{5}$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{12}{5} = 67.38°$

(–) চিহ্ন নিয়ে পাই, $\tan\theta = -\frac{12}{5}$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{12}{5}\right)$

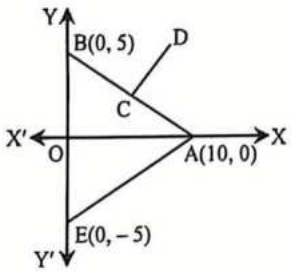
$= 180° - \tan^{-1}\frac{12}{5}$

$= 180° - 67.38°$

$= 112.62°$

$\therefore$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 67.38° অথবা 112.62° **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২১**




(ক) $P(3, \sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ১৯]

(খ) $\angle AOE$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২১]

(গ) $CD \perp AB$ এবং $AC : BC = 2 : 3$ হলে CD রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২১]

সমাধান:

**ক** দেওয়া আছে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, \sqrt{3})$

ধরি, P বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(r, \theta)$

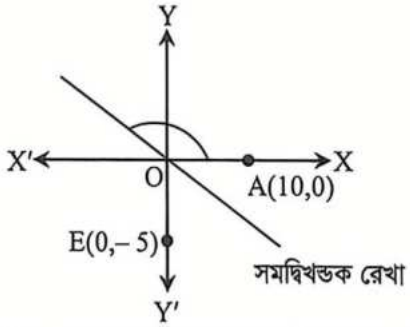
$\therefore r = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ P বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(r, \theta) \equiv \left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ **(Ans.)**

**খ** এখানে, OA রেখার সমীকরণ বা x অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$ ..... (i)

OE রেখার সমীকরণ বা y অক্ষের সমীকরণ, $x = 0$ ..... (ii)




(i) নং ও (ii) নং এর মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ,

$\frac{y}{\sqrt{1^2}} = \pm \frac{x}{\sqrt{1^2}}$

$\Rightarrow y = \pm x$

চিত্রে, $\angle AOE$ এর সমদ্বিখণ্ডকের ঢাল ঋণাত্মক।

$\therefore \angle AOE$ এর সমদ্বিখণ্ডক: $y = -x$

$\Rightarrow x + y = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় $\angle AOE$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ: $x + y = 0$

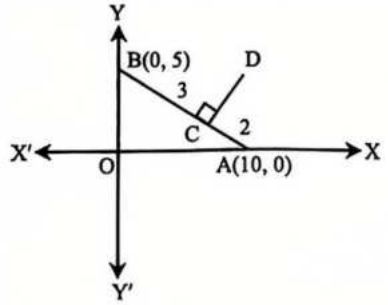
Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ**




এখানে, AC : BC = 2 : 3

অর্থাৎ, C বিন্দুটি AB কে 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{2\times 0+3\times 10}{2+3}, \frac{2\times 5+3\times 0}{2+3}\right)$

$\equiv (6, 2)$

আবার, AB রেখার ঢাল $= \frac{0-5}{10-0} = \frac{-1}{2}$

$\therefore$ CD রেখার ঢাল $= 2$ [$\because$ CD $\perp$ AB]

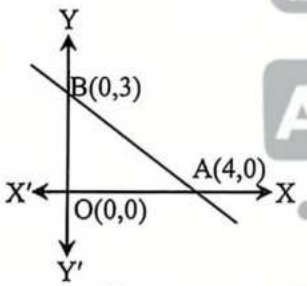
এখন, C(6, 2) বিন্দুগামী এবং 2 ঢাল বিশিষ্ট CD রেখার সমীকরণ,

$y - 2 = 2(x - 6)$

$\Rightarrow y - 2 = 2x - 12$

$\therefore 2x - y - 10 = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২২** দৃশ্যকল্প-১:




দৃশ্যকল্প-২: একটি সরলরেখার সমীকরণ $2x - 3y + c = 0$ এর উপর দুটি বিন্দু P(4, 3) ও Q(– 8, – 5)। (সংশোধিত)

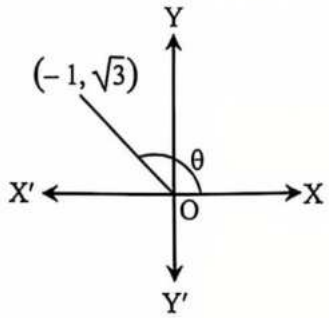
(ক) $(-1, \sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্পের আলোকে AB রেখা হতে 3 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ১৭]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে, PQ রেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দ্বারা x অক্ষের ছেদাংশ নির্ণয় কর। [রা. বো. ১৯]

সমাধান:

**ক**




ধরি, $(-1, \sqrt{3}) \equiv (x, y)$

$\therefore x = -1, y = \sqrt{3}$

এবং প্রদত্ত বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(r, \theta)$

আমরা জানি,

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

আবার,

$\theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$ [$\because$ বিন্দুটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত]

$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় পোলার স্থানাঙ্ক $(r, \theta) \equiv \left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, A(4, 0) ও B (0, 3)

AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

$\Rightarrow \frac{3x + 4y}{12} = 1$

$\Rightarrow 3x + 4y - 12 = 0$ ..... (i)

(i) নং রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ: $3x + 4y + k = 0$ ..... (ii)

(i) ও (ii) নং রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{|k - (-12)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$

$\Rightarrow 3 = \frac{|k + 12|}{5}$

$\Rightarrow \frac{k + 12}{5} = \pm 3$

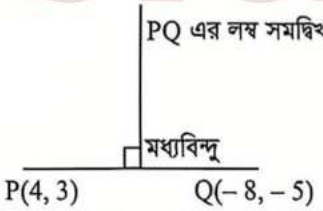
$\Rightarrow k + 12 = \pm 15$

| (+) চিহ্ন নিয়ে, | (–) চিহ্ন নিয়ে, |
|---|---|
| $k + 12 = 15$ | $k + 12 = -15$ |
| $\Rightarrow k = 15 - 12$ | $\Rightarrow k = -15 - 12$ |
| $\therefore k = 3$ | $\therefore k = -27$ |

k এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই

$3x + 4y + 3 = 0$ এবং $3x + 4y - 27 = 0$; যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ। **(Ans.)**

**গ**




দেওয়া আছে, P(4, 3) এবং Q(– 8, – 5) দুটি বিন্দু।

$\therefore$ PQ রেখার ঢাল $= \frac{-5-3}{-8-4} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ PQ রেখার লম্ব রেখার ঢাল $= \frac{-3}{2}$

PQ এর মধ্যবিন্দু $\equiv \left(\frac{4-8}{2}, \frac{3-5}{2}\right) = (-2, -1)$

এখানে, $(-2, -1)$ বিন্দুগামী $-\frac{3}{2}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ:

$y + 1 = -\frac{3}{2}(x + 2)$

$\Rightarrow 2y + 2 = -3x - 6$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$\Rightarrow 3x + 2y = -8$

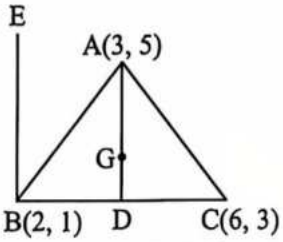
$\Rightarrow \frac{3x}{-8} + \frac{2y}{-8} = 1$

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{-8}{3}} + \frac{y}{-4} = 1$

$\therefore$ PQ রেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দ্বারা x অক্ষের ছেদাংশ $= \left|\frac{-8}{3}\right|$ একক

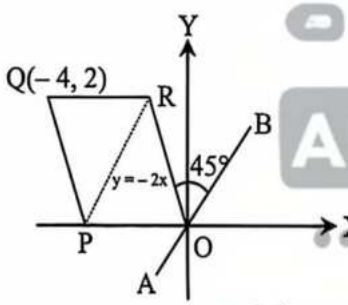
$= \frac{8}{3}$ একক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২৩** দৃশ্যকল্প-১:




চিত্রে, G, $\Delta ABC$ এর ভরকেন্দ্র; D, BC এর মধ্যবিন্দু; $EB \perp BC$।

দৃশ্যকল্প-২: OPQR একটি সামান্তরিক




(ক) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, G বিন্দুটি AD রেখাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। [য. বো. ১৭]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, A(3, 5), B(2, 1) ও C(6, 3)

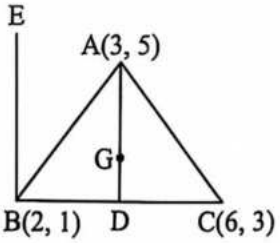
$\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}|\{3(1-3) - 5(2-6) + 1(6-6)\}|$

$= \frac{1}{2}(-6 + 20)$

$= 7$ বর্গ একক। **(Ans.)**

**খ**



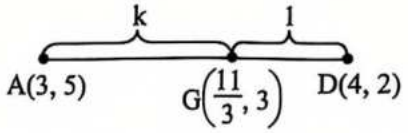

এখানে, D বিন্দুটি BC বাহুর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \equiv (4, 2)$

আবার, G বিন্দু $\Delta ABC$ এর ভরকেন্দ্র।

$\therefore$ G বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{3+2+6}{3}, \frac{5+1+3}{3}\right) \equiv \left(\frac{11}{3}, 3\right)$

ধরি, $G\left(\frac{11}{3}, 3\right)$ বিন্দুটি AD কে k : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।




$\therefore G \equiv \left(\frac{11}{3}, 3\right) \equiv \left(\frac{4k+3}{k+1}, \frac{2k+5}{k+1}\right)$

অর্থাৎ, $\frac{11}{3} = \frac{4k+3}{k+1}$

$\Rightarrow 11k + 11 = 12k + 9$

$\therefore k = 2$

$\therefore$ G বিন্দুটি AD রেখাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। **(Showed)**

**গ** দৃশ্যকল্প-২ হতে, AB রেখা মূলবিন্দুগামী

$\therefore$ AB সরলরেখার সমীকরণ: $y = mx$ ..... (i)

এবং OR সরলরেখার সমীকরণ: $y = -2x$ ..... (ii)

যার ঢাল $m_2 = -2$

চিত্র হতে, (i) ও (ii) নং সমীকরণ, পরস্পরের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে, $\tan 45° = \pm \frac{m - (-2)}{1 + m(-2)}$

$\Rightarrow 1 = \pm \frac{m+2}{1-2m}$

$\Rightarrow (1 - 2m) = \pm (m + 2)$

(+) চিহ্ন নিয়ে পাই, $1 - 2m = m + 2$

$\Rightarrow 3m = -1$

$\therefore m = -\frac{1}{3}$; যা গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ, চিত্রে উল্লেখিত AB সরলরেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ, AB রেখার ঢাল ধনাত্মক।

(–) চিহ্ন নিয়ে পাই,

$1 - 2m = -(m + 2)$

$\Rightarrow 1 - 2m = -m - 2$

$\Rightarrow -2m + m = -2 - 1$

$\Rightarrow -m = -3$

$\therefore m = 3$; ইহা গ্রহণযোগ্য।

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $y = 3x$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ২৪** $3x + 2y - 6 = 0$ এবং $2x + 3y - 8 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

(ক) (1, 2) এবং (3, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে যে বিন্দু 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. বো. ১৭]

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং উভয় অক্ষের ধনাত্মক দিক থেকে সমান অংশ ছেদ করে, এইরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [সকল বো. ১৮]

(গ) উদ্দীপকে বর্ণিত রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। [সকল বো. ১৮]

**সমাধান:**

**ক**

ধরি, (1, 2) এবং (3, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে P বিন্দু 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক,

$$P(x, y) \equiv \left(\frac{2\times3+3\times1}{2+3}, \frac{2\times6+3\times2}{2+3}\right) \equiv \left(\frac{9}{5}, \frac{18}{5}\right) \textbf{ (Ans.)}$$

**খ** উভয় অক্ষের ধনাত্মক দিকে সমান অংশ ছেদকারী সরলরেখাটির সমীকরণ:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ,

$$\Rightarrow \frac{x+y}{a}=1$$

$\therefore x + y = a$ ..... (i)

দেওয়া আছে, $3x + 2y - 6 = 0$ ..... (ii)

এবং $2x + 3y - 8 = 0$ ..... (iii)

(ii) $\times 3$ – (iii) $\times 2$ করে,

$9x + 6y - 18 - 4x - 6y + 16 = 0$

$\Rightarrow 5x = 2$

$\therefore x = \frac{2}{5}$

x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$3\times\frac{2}{5}+2y-6=0$$

$$\therefore y=\frac{12}{5}$$

$\therefore$ (ii) ও (iii) নং রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু, $(x, y) \equiv \left(\frac{2}{5}, \frac{12}{5}\right)$

(i) নং সরলরেখাটি $\left(\frac{2}{5}, \frac{12}{5}\right)$ বিন্দু দিয়ে যায়,

$$\Rightarrow \frac{2}{5}+\frac{12}{5}=a$$

$$\therefore a=\frac{14}{5}$$

(i) নং এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$$x+y=\frac{14}{5}$$

$\therefore 5x + 5y = 14$ **(Ans.)**

**বিকল্প পদ্ধতি:**

উভয় অক্ষের ধনাত্মক দিকে সমান অংশ ছেদকারী সরলরেখাটির সমীকরণ:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ,

$$\Rightarrow \frac{x+y}{a}=1$$

$\therefore x + y = a$ ..... (i)

দেওয়া আছে, $3x + 2y - 6 = 0$ ..... (ii)

এবং $2x + 3y - 8 = 0$ ..... (iii)

(ii) ও (iii) নং রেখার ছেদবিন্দুগামী যেকোনো রেখার সমীকরণ,

$3x + 2y - 6 + k(2x + 3y - 8) = 0$

$\Rightarrow (3 + 2k)x + (2 + 3k)y + (-6 - 8k) = 0$ ..... (iv)

(i) নং রেখা ও (iv) নং রেখা একই হলে,

$$\frac{3+2k}{1}=\frac{2+3k}{1}=\frac{-6-8k}{-a}$$

$\therefore 3 + 2k = 2 + 3k$

$\Rightarrow k = 1$

(iv) নং এ $k = 1$ বসিয়ে পাই,

$(3 + 2)x + (2 + 3)y + (-6 - 8) = 0$

$\Rightarrow 5x + 5y - 14 = 0$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $3x + 2y - 6 = 0$ ..... (i)

এবং $2x + 3y - 8 = 0$ ..... (ii)

এখানে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 3 \times 2 + 2 \times 3 = 12 > 0$

(i) ও (ii) নং সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ:

$$\frac{3x+2y-6}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{2x+3y-8}{\sqrt{2^2+3^2}}$$

$\Rightarrow 3x + 2y - 6 = 2x + 3y - 8$

$\therefore y = x + 2$, যার ঢাল = 1

$\therefore$ x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\theta = \tan^{-1}(1)$

$= 45°$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২৫** দৃশ্যকল্প-১: $3x - 4y + 12 = 0$

দৃশ্যকল্প-২: $8x + 15y - 12 = 0$

(ক) A(2, 1) ও B(5, 2) বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) দৃশ্যকল্প-২ নং সরলরেখার সমান্তরাল 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার মূলবিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ১৭]

(গ) দৃশ্যকল্প-১ এবং দৃশ্যকল্প-২ সমীকরণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের যে সমদ্বিখণ্ডক x অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ১৭]

**সমাধান:**

**ক** এখানে, A(2, 1) ও B(5, 2) বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= \sqrt{(5-2)^2 + (2-1)^2}$ একক

$= \sqrt{3^2 + 1}$ একক

$= \sqrt{10}$ একক **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** $8x + 15y - 12 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল যেকোনো রেখার সমীকরণ $8x + 15y + k = 0$ ..... (i)

প্রশ্নমতে, প্রদত্ত সরলরেখা এবং তার সমান্তরাল সরলরেখা (i) এর মধ্যবর্তী দূরত্ব 2 একক।

অর্থাৎ, $\left|\frac{k-(-12)}{\sqrt{8^2+15^2}}\right| = 2$

$\Rightarrow \frac{|k+12|}{17} = 2$

$\Rightarrow k + 12 = \pm 34$

| (+) চিহ্ন নিয়ে, | (–) চিহ্ন নিয়ে, |
|---|---|
| $k + 12 = 34$ | $k + 12 = -34$ |
| $\Rightarrow k = 34 - 12$ | $\Rightarrow k = -34 - 12$ |
| $\because k = 22$ | $\therefore k = -46$ |

$\therefore$ সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির সমীকরণ:

$8x + 15y - 46 = 0$ .... (ii) ও $8x + 15y + 22 = 0$ ..... (iii)

এখন মূলবিন্দু হতে (ii) নং রেখার লম্ব দূরত্ব $= \frac{|8\times0 + 15\times0 - 46|}{\sqrt{8^2+15^2}}$

$= \frac{46}{17}$ একক

এবং মূলবিন্দু হতে (iii) নং রেখার লম্ব দূরত্ব $= \frac{|8\times0 + 15\times0 + 22|}{\sqrt{8^2+15^2}}$

$= \frac{22}{17}$ একক **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ: $3x - 4y + 12 = 0$ ও $8x + 15y - 12 = 0$ এদের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$\frac{3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{(8x+15y-12)}{\sqrt{8^2+15^2}}$

$\Rightarrow \frac{3x-4y+12}{5} = \pm\frac{8x+15y-12}{17}$

$\Rightarrow 51x - 68y + 204 = \pm(40x + 75y - 60)$

(+) চিহ্ন নিয়ে:

$51x - 68y + 204 = 40x + 75y + 60$

$\Rightarrow 11x - 143y + 264 = 0$

$\Rightarrow 143y = 11x + 264$

$\Rightarrow y = \frac{1}{13}x + \frac{24}{13}$; যার ঢাল $= \frac{1}{13}$; অর্থাৎ, x অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে।

(–) চিহ্ন নিয়ে:

$51x - 68y + 204 = -(40x + 75y - 60)$

$\Rightarrow 51x - 68y + 204 = -40x - 75y + 60$

$\Rightarrow 91x + 7y + 144 = 0$

$\Rightarrow y = -\frac{91}{7}x - \frac{144}{7}$

$\therefore y = -13x - \frac{144}{7}$; যার ঢাল $= -13$; অর্থাৎ, x অক্ষের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore$ নির্ণেয় ঢাল $= \frac{1}{13}$। **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২৬** $5x - 4y - 1 = 0$ ও $-8x + 7y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু স্টেশনমাস্টারের কক্ষে অবস্থিত। $4x + 3y - 5 = 0$ রেখা বরাবর রেলপথের একটি লাইন অবস্থিত।

(ক) $(-1, 2)$ এবং $(3, -5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৭]

(খ) স্টেশনমাস্টারের কক্ষ বিন্দু হতে রেললাইনের উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৭]

(গ) রেললাইনের সাথে $3x - 4y + 6 = 0$ রেখা দ্বারা উৎপন্ন সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৭]

সমাধান:

**ক** $(-1, 2)$ এবং $(3, -5)$ বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ:

$\frac{x-(-1)}{-1-3} = \frac{y-2}{2-(-5)}$

$\Rightarrow \frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{7}$

$\Rightarrow 7x + 7 = -4y + 8$

$\therefore 7x + 4y = 1$ **(Ans.)**

**খ** এখানে প্রদত্ত রেখাদ্বয়, $5x - 4y - 1 = 0$ ..... (i)

এবং $-8x + 7y + 1 = 0$ ..... (ii)

(i) $\times 7$ + (ii) $\times 4$ করে পাই,

$3x = 3$

$\therefore x = 1$

$\therefore x = 1$, (i) নং এ বসিয়ে পাই, $5 \times 1 - 4y - 1 = 0$ $\therefore y = 1$

$\therefore$ স্টেশন মাস্টারের কক্ষবিন্দু $(x,y) \equiv (1, 1)$

আবার,

রেল লাইনের সমীকরণ, $4x + 3y - 5 = 0$ ..... (iii)

(iii) এর উপর লম্ব এবং (1, 1) গামী রেখার সমীকরণ:

$3x - 4y = 3 \times 1 - 4 \times 1$

$\therefore 3x - 4y + 1 = 0$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, রেললাইনের সমীকরণ: $4x + 3y - 5 = 0$ ..... (i)

প্রদত্ত রেখার সমীকরণ: $3x - 4y + 6 = 0$ ..... (ii)

এখানে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 4 \times 3 + 3(-4) = 12 - 12 = 0$

$\therefore$ (i) ও (ii) নং সরলরেখা পরস্পর লম্ব।

সুতরাং, রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত প্রতিটি কোণই এক সমকোণ এবং রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোনো সূক্ষ্মকোণ নেই।

(i) ও (ii) নং সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$\frac{4x+3y-5}{\sqrt{4^2+3^2}} = \pm\frac{3x-4y+6}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$\Rightarrow 4x + 3y - 5 = \pm(3x - 4y + 6)$

(+) চিহ্ন নিয়ে পাই,

$4x + 3y - 5 = 3x - 4y + 6$

$\Rightarrow x + 7y - 11 = 0$

(–) চিহ্ন নিয়ে পাই,

$4x + 3y - 5 = -3x + 4y - 6$

$\Rightarrow 7x - y + 1 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$x + 7y - 11 = 0$ এবং $7x - y + 1 = 0$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

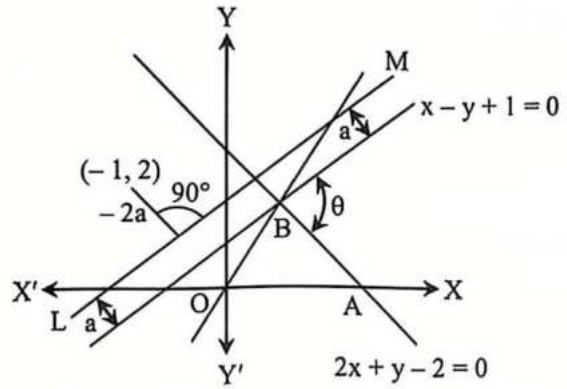
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ২৭** দৃশ্যকল্প-১: তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক A(a, – 1), B(0, – 2) এবং C(– 2, – 4)

দৃশ্যকল্প-২:




(ক) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ এবং $(at_3^2, 2at_3)$। যদি এর ভরকেন্দ্র y অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, তাহলে দেখাও যে, $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 0$.

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে, AB এর মধ্যবিন্দুর ভূজ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ হলে, C বিন্দুগামী AB এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ১৭]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে, LM রেখার সমীকরণ $3x - 3y + 5 = 0$ এর সঠিকতা গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

সমাধান:

**ক** দেওয়া আছে,

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় যথাক্রমে $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ এবং $(at_3^2, 2at_3)$

∴ ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$\equiv \left(\frac{at_1^2 + at_2^2 + at_3^2}{3}, \frac{2at_1 + 2at_2 + 2at_3}{3}\right)$; যা y অক্ষের উপর অবস্থিত।

অর্থাৎ, $\frac{at_1^2 + at_2^2 + at_3^2}{3} = 0$

$\Rightarrow at_1^2 + at_2^2 + at_3^2 = 0$

∴ $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 0$ **(Showed)**

**খ** দেওয়া আছে,

A(a, – 1), B(0, – 2) ও C(– 2, – 4)

AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{-1-2}{2}\right) \equiv \left(\frac{a}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

প্রশ্নমতে, $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

∴ $a = \sqrt{5}$

∴ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\sqrt{5}, -1)$

∴ AB রেখার ঢাল, $m_{AB} = \frac{-1-(-2)}{\sqrt{5}-0} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

∴ AB রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $= -\sqrt{5}$

∴ $-\sqrt{5}$ ঢাল বিশিষ্ট C(– 2, – 4) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ:

$y + 4 = -\sqrt{5}(x + 2)$

∴ $y + \sqrt{5}x + 4 + 2\sqrt{5} = 0$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, LM রেখার সমান্তরাল a দূরত্বে অবস্থিত রেখার সমীকরণ: $x - y + 1 = 0$

∴ LM রেখার সমীকরণ, $x - y + k = 0$ ..... (i)

প্রশ্নমতে, $\left|\frac{k-1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}\right| = a$

$\Rightarrow \frac{k-1}{\sqrt{2}} = \pm a$

∴ $k = \pm\sqrt{2}a + 1$ ..... (ii)

আবার,

চিত্র হতে, (– 1, 2) বিন্দু হতে (i) নং রেখার লম্ব দূরত্ব – 2a একক

∴ $\left|\frac{-1-2+k}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}\right| = -2a$

$\Rightarrow \frac{k-3}{\sqrt{2}} = \mp 2a$

$\Rightarrow k = \mp 2\sqrt{2}a + 3$

$\Rightarrow \pm\sqrt{2}a + 1 = \mp 2\sqrt{2}a + 3$ [(ii) হতে]

$\Rightarrow \pm\sqrt{2}a \pm 2\sqrt{2}a = 2$

$\Rightarrow \pm\sqrt{2}a(1 + 2) = 2$

$\Rightarrow \pm\sqrt{2}a = \frac{2}{3}$

∴ (ii) হতে, $k = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$

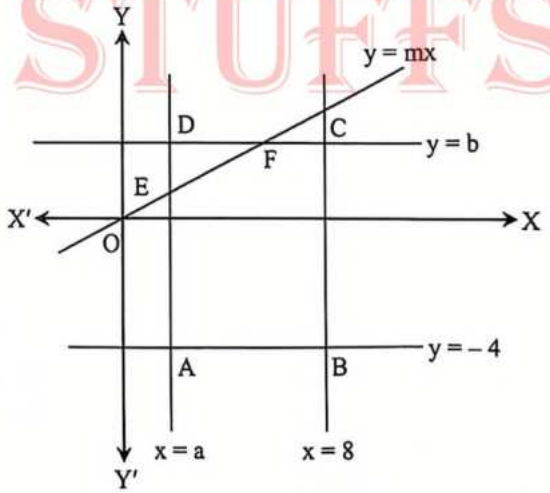
k এর মান (i) নং সমীকরণ বসিয়ে পাই,

$x - y + \frac{5}{3} = 0$

$\Rightarrow 3x - 3y + 5 = 0$

∴ LM রেখার সমীকরণ: $3x - 3y + 5 = 0$ **(যাচাইকৃত)**

**প্রশ্ন ▶ ২৮**




(ক) (3, 5) ও (6, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখন্ডকের ঢাল নির্ণয় কর। [চ. বো. ১৭]

(খ) প্রমাণ কর যে, DEF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2m}(b - ma)^2$ বর্গ একক।

(গ) a = b = 2 হলে ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করে দেখাও যে, কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব।

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধান:**

**ক** (3,5) ও (6,7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার ঢাল $= m_1 = \frac{7-5}{6-3} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ লম্ব দ্বিখন্ডকের ঢাল, $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{3}{2}$ **(Ans.)**

**খ** উদ্দীপকের চিত্র হতে,

AD রেখার সমীকরণ: $x = a$ ..... (i)

CD রেখার সমীকরণ: $y = b$ ..... (ii)

EF রেখার সমীকরণ: $y = mx$ ..... (iii)

(i) ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক, $D \equiv (a, b)$

(i) ও (iii) নং রেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক, $E \equiv (a, ma)$

(ii) ও (iii) নং রেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক, $F \equiv \left(\frac{b}{m}, b\right)$

$\therefore$ DEF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a & ma & 1 \\ \frac{b}{m} & b & 1 \end{vmatrix}$$ বর্গ একক

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & b-ma & 0 \\ a-\frac{b}{m} & ma-b & 0 \\ \frac{b}{m} & b & 1 \end{vmatrix}$$ বর্গ একক $\begin{bmatrix} r_1' = r_1 - r_2 \\ r_2' = r_2 - r_3 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\left\{0 - (b-ma)\left(a-\frac{b}{m}\right)\right\}$$ বর্গ একক

$$= \frac{1}{2}(b-ma)\left(\frac{b-ma}{m}\right)$$ বর্গ একক

$$= \frac{1}{2m}(b-ma)^2$$ বর্গ একক **(Proved)**

**গ** দেওয়া আছে, $a = b = 2$

উদ্দীপকের চিত্র হতে,

AB রেখার সমীকরণ: $y = -4$ ..... (i)

BC রেখার সমীকরণ: $x = 8$ ..... (ii)

CD রেখার সমীকরণ: $y = b = 2$ ..... (iii)

এবং AD রেখার সমীকরণ: $x = a = 2$ .... (iv)

(i) ও (iv) নং রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক, $A \equiv (2, -4)$

(i) ও (ii) নং রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক, $B \equiv (8, -4)$

(ii) ও (iii) নং রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক, $C \equiv (8, 2)$

(iii) ও (iv) নং রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক, $D \equiv (2, 2)$

$\therefore$ A(2, – 4) ও C(8, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ:

$$\frac{x-2}{2-8} = \frac{y+4}{-4-2}$$

$\Rightarrow -6x + 12 = -6y - 24$

$\Rightarrow 6x - 6y - 24 - 12 = 0$

$\therefore x - y - 6 = 0$; যা AC কর্ণের সমীকরণ।

$\therefore$ B(8, – 4) ও D(2, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ:

$$\frac{x-8}{8-2} = \frac{y+4}{-4-2}$$

$\Rightarrow -6x + 48 = 6y + 24$

$\Rightarrow 6x + 6y + 24 - 48 = 0$

$\therefore x + y - 4 = 0$; যা BD কর্ণের সমীকরণ।

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়: $x - y - 6 = 0$ এবং $x + y - 4 = 0$ **(Ans.)**

আবার,

AC কর্ণের ঢাল, $m_{AC} = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{1}{-1} = 1$

BD কর্ণের ঢাল, $m_{BD} = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{1}{1} = -1$

$\therefore m_{AC} \times m_{BD} = -1$

$\therefore$ কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব। **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ২৯** দৃশ্যকল্প-১: A(1, 1), B(3, 4) এবং C(5, – 2) বিন্দু তিনটি $\Delta ABC$ এর শীর্ষবিন্দু।

দৃশ্যকল্প-২: $12x - 5y + 1 = 0$ এবং $5x + 12y - 16 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

(ক) $r^2 = a^2\cos 2\theta$ পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর।

(খ) দেখাও যে, AD মধ্যমা G বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

(গ) দেখাও যে, (0, 1) বিন্দুটি প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

**সমাধান:**

**ক** $r^2 = a^2\cos 2\theta$

$\Rightarrow r^2 = a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

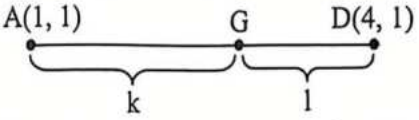
$\Rightarrow r^4 = a^2(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)$

$\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ **(Ans.)**

**খ** এখানে, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়, A(1, 1), B(3, 4) এবং C(5, – 2)

$\Delta ABC$ এর AD মধ্যমা হলে D, BC এর মধ্যবিন্দু হবে।

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{3+5}{2}, \frac{4-2}{2}\right) \equiv (4, 1)$




মনে করি, G বিন্দু AD কে k : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ G বিন্দু $\equiv \left(\frac{4k+1}{k+1}, \frac{k+1}{k+1}\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{1+3+5}{3}, \frac{1+4-2}{3}\right) = \left(\frac{4k+1}{k+1}, 1\right)$

$\Rightarrow (3, 1) \equiv \left(\frac{4k+1}{k+1}, 1\right)$

$\therefore \frac{4k+1}{k+1} = 3$

$\Rightarrow 4k + 1 = 3k + 3$

$\therefore k = 2$

$\therefore$ AD মধ্যমা G বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। **(Showed)**

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** প্রদত্ত রেখাদ্বয়, $12x - 5y + 1 = 0$ এবং $5x + 12y - 16 = 0$

রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{12x - 5y + 1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \pm \frac{5x + 12y - 16}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

$\Rightarrow 12x - 5y + 1 = \pm (5x + 12y - 16)$

(+) চিহ্ন নিয়ে, $12x - 5y + 1 = 5x + 12y - 16$

$\Rightarrow 7x - 17y + 17 = 0$ ..... (i)

(–) চিহ্ন নিয়ে, $12x - 5y + 1 = -(5x + 12y - 16)$

$\Rightarrow 17x + 7y - 15 = 0$ ..... (ii)

(0, 1) বিন্দু (i) নং এ বসিয়ে পাই,

L.H.S $= 7 \times 0 - 17 \times 1 + 17 = 0 =$ R.H.S

(0, 1) বিন্দু (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

L.H.S $= 17 \times 0 + 7 \times 1 - 15 = 7 - 15 = -8 \neq$ R.H.S

$\therefore$ (0, 1) বিন্দুটি প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের একটি সমদ্বিখণ্ডক $7x - 17y + 17 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ৩০** **A(– 1, 3), B(4, – 5), C(7, 0) এবং D(h + 2, 3k) একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।**

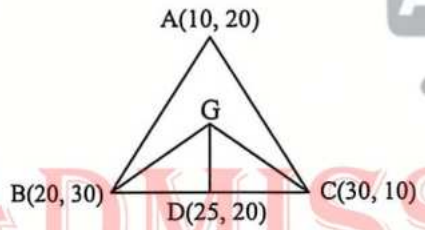
**(ক) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (10, 20), (20, 30) ও (30, 10) এবং G ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র হলে, GBC ত্রিভুজের GD মধ্যমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।**

**(খ) AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।**

**(গ) h = k হলে, D বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।**

সমাধান:

**ক**




G এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{60}{3}, \frac{60}{3}\right) \equiv (20, 20)$

$\left[\text{ভরকেন্দ্র} \equiv \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)\right]$

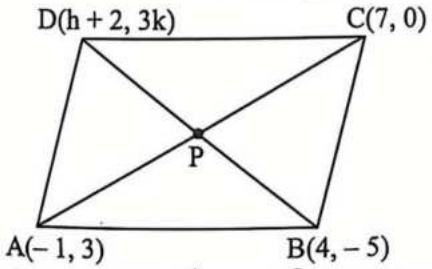
D এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{20 + 30}{2}, \frac{30 + 10}{2}\right) \equiv (25, 20)$

$\therefore$ GD মধ্যমার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(25 - 20)^2 + (20 - 20)^2}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$ একক **(Ans.)**

**খ**




এখন, AC ও BD কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু হলো A ও C বিন্দুর মধ্যবিন্দু।

$\therefore P \equiv \left(\frac{-1 + 7}{2}, \frac{3 + 0}{2}\right) \equiv \left(3, \frac{3}{2}\right)$

আবার, B(4, – 5) এবং D(h + 2, 3k) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু P।

$\therefore P\left(3, \frac{3}{2}\right) \equiv \left(\frac{h + 2 + 4}{2}, \frac{-5 + 3k}{2}\right) \equiv \left(\frac{h + 6}{2}, \frac{-5 + 3k}{2}\right)$

প্রশ্নমতে, $\frac{h + 6}{2} = 3$ | এবং $\frac{-5 + 3k}{2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow h + 6 = 6$ | $\Rightarrow -5 + 3k = 3$

$\therefore h = 0$ | $\therefore k = \frac{8}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv (h + 2, 3k) \equiv \left(0 + 2, 3 \times \frac{8}{3}\right)$

$\equiv (2, 8)$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(h + 2, 3k) \equiv (x, y)$

$\therefore h + 2 = x$

$\Rightarrow h = x - 2$

এবং $3k = y$

$\Rightarrow k = \frac{y}{3}$

প্রশ্নমতে, $h = k$

$\Rightarrow x - 2 = \frac{y}{3}$

$\Rightarrow 3x - 6 = y$

$\therefore 3x - y - 6 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ: $3x - y - 6 = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৩১** **একটি সরলরেখা (– 2, – 5) বিন্দুগামী এবং x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন, OA + 2OB = 0 হয় যখন O মূলবিন্দু। আবার, দুইটি সরলরেখা $x - y + 4 = 0$ রেখার সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে।**

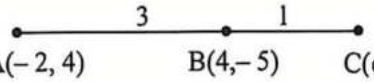
**(ক) A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (– 2, 4) এবং (4, – 5)। AB রেখা C বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যেন AB = 3BC হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।**

**(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত প্রথম রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।**

**(গ) রেখা দুইটি (3, 4) বিন্দুগামী হলে এদের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান:

**ক**




শর্তমতে, AB = 3BC

$\therefore AB : BC = 3 : 1$

$\therefore \frac{3\alpha - 2}{3 + 1} = 4 \quad \therefore \alpha = 6$

আবার, $\frac{3\beta + 4}{3 + 1} = -5$

$\therefore \beta = -8$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (6, – 8) **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ..... (i)

$\therefore$ x অক্ষে ছেদবিন্দু (a, 0) এবং y অক্ষে ছেদবিন্দু (0, b)

তাহলে, OA = a, OB = b

শর্তানুসারে, $a+2b=0$

$\Rightarrow a=-2b$ ..... (ii)

আবার, (i) নং রেখা (– 2, – 5) বিন্দুগামী।

$\therefore \frac{-2}{a}+\frac{-5}{b}=1$

$\Rightarrow 2b+5a=-ab$

$\Rightarrow 2b+5(-2b)=-(-2b)b \quad [\because a=-2b]$

$\Rightarrow 2b^2+8b=0$

$\Rightarrow 2b(b+4)=0$

$\therefore b=-4 \quad [\because b\neq 0]$

$\therefore a=8 \quad$ [(ii) নং হতে]

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ: $\frac{x}{8}+\frac{y}{-4}=1$

$\therefore x-2y=8$ **(Ans.)**

**গ** ধরি, (3, 4) বিন্দুগামী নির্ণেয় রেখার ঢাল = m

প্রদত্ত রেখা $x-y+4=0$ এর ঢাল $=-\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}}$

$=-\frac{1}{-1}=1$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখা $x-y+4=0$ রেখার সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan 60^\circ=\pm\frac{m-1}{1+m}$

$\Rightarrow \sqrt{3}(1+m)=\pm(m-1)$

(+) চিহ্ন নিয়ে, $(m+1)\sqrt{3}=m-1$

$\Rightarrow m\sqrt{3}+\sqrt{3}=m-1$

$\Rightarrow m(\sqrt{3}-1)=-1-\sqrt{3}$

$\therefore m=-2-\sqrt{3}$

(–) চিহ্ন নিয়ে, $\sqrt{3}(1+m)=-(m-1)$

$\Rightarrow \sqrt{3}m+\sqrt{3}=-m+1$

$\Rightarrow m(\sqrt{3}+1)=1-\sqrt{3}$

$\therefore m=-2+\sqrt{3}$

$\therefore$ (3, 4) বিন্দুগামী ও $-2-\sqrt{3}$ ঢাল বিশিষ্ট সমীকরণ:

$y-4=(-2-\sqrt{3})(x-3)$

$\Rightarrow (2+\sqrt{3})x+y=6+3\sqrt{3}+4$

$\therefore (2+\sqrt{3})x+y=10+3\sqrt{3}$ **(Ans.)**

$\therefore$ (3, 4) বিন্দুগামী ও $-2+\sqrt{3}$ ঢাল বিশিষ্ট সমীকরণ:

$y-4=(-2+\sqrt{3})(x-3)$

$\Rightarrow y-4=(-2+\sqrt{3})x+6-3\sqrt{3}$

$\therefore (2-\sqrt{3})x+y=10-3\sqrt{3}$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৩২** দৃশ্যকল্প-১: ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 2, – 1), (3, – 5), এবং (5, – 2)

দৃশ্যকল্প-২: A(2, – 2) এবং B(– 1, 4) দুইটি বিন্দু।

(ক) (1, 2), (4, 4) এবং (2, 8) যথাক্রমে ত্রিভুজ ABC এর বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু। ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক বের কর।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর, অক্ষদ্বয় AB রেখাকে সমান তিনভাগে বিভক্ত করে।

সমাধান:

**ক** ধরি, D ≡ (1, 2); E ≡ (4, 4); F ≡ (2, 8)

$\therefore \Delta DEF=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 4 & 1\\ 2 & 8 & 1\end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}|1(4-8)-2(4-2)+1(32-8)|$

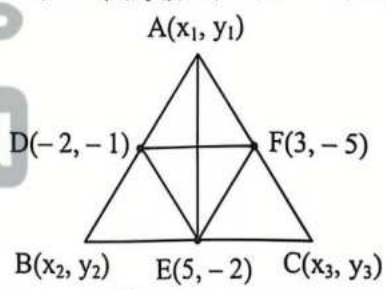
$=\frac{1}{2}\times 16=8$ বর্গ একক

যেহেতু D, E, F হল মধ্যবিন্দু সেহেতু,

$\Delta ABC=4\times\Delta DEF=4\times 8$ বর্গ একক = 32 বর্গ একক **(Ans.)**

**খ** ধরি,

ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$।




AB, BC ও CA বাহুর মধ্যবিন্দুত্রয় যথাক্রমে D, E ও F

এখানে, AE এর মধ্যবিন্দু ≡ DF এর মধ্যবিন্দু

$\therefore \left(\frac{x_1+5}{2}, \frac{y_1-2}{2}\right)\equiv\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{-1-5}{2}\right)$

অর্থাৎ, $\frac{x_1+5}{2}=\frac{1}{2}$ | এবং $\frac{y_1-2}{2}=-3$

$\therefore x_1=-4$ | $\therefore y_1=-4$

$\therefore$ A বিন্দু ≡ (– 4, – 4)

আবার, AC এর মধ্যবিন্দু F।

$\therefore \left(\frac{-4+x_3}{2}, \frac{-4+y_3}{2}\right)\equiv(3,-5)$

অর্থাৎ, $-4+x_3=6$ | এবং $-4+y_3=-10$

$\therefore x_3=10$ | $\therefore y_3=-6$

$\therefore$ C বিন্দু ≡ (10, – 6)

আবার, AB এর মধ্যবিন্দু D।

$\therefore \left(\frac{-4+x_2}{2}, \frac{-4+y_2}{2}\right)\equiv(-2,-1)$

অর্থাৎ, $-4+x_2=-4$ | এবং $-4+y_2=-2$

$\therefore x_2=0$ | $\therefore y_2=2$

$\therefore$ B বিন্দু ≡ (0, 2)

$\therefore$ ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (– 4, – 4), (0, 2) ও (10, – 6) **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS

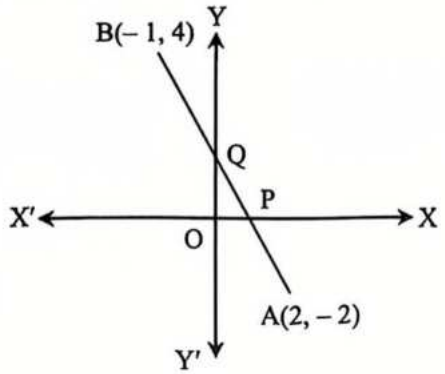


t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ**




মনেকরি, AB সরলরেখা x অক্ষরেখাকে P বিন্দুতে এবং y অক্ষরেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

মনেকরি, P বিন্দু AB সরলরেখাকে k : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে।

$\therefore P \equiv \left(\frac{-k+2}{k+1}, \frac{4k-2}{k+1}\right)$

প্রশ্নমতে, $\frac{4k-2}{k+1} = 0$

$\therefore k = \frac{1}{2}$

∴ P বিন্দু AB কে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

অর্থাৎ, P বিন্দু AB সরলরেখার একটি সমত্রিখণ্ডন বিন্দু।

অনুরূপভাবে, Q, AB সরলরেখাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

অর্থাৎ, Q বিন্দু AB সরলরেখার সমত্রিখন্ডন বিন্দু। **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ৩৩** $x\cos\alpha + y\sin\alpha = m$ ..... (i)

$4x + 3y = d$ ..... (ii)

$12x - 5y = 2(d + 3)$ ..... (iii)

**(ক)** t পরিবর্তনশীল হলে $P(3t - 1, t + 2)$ এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

**(খ)** (i) সরলরেখাটি x অক্ষ ও y অক্ষকে যথাক্রমে L ও G বিন্দুতে ছেদ করে। $\alpha$ কে পরিবর্তনশীল ধরে দেখাও যে, LG এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ, $m^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$.

**(গ)** মূলবিন্দু হতে (ii) ও (iii) সরলরেখা সমদূরবর্তী হলে, d এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর।

**সমাধান:**

**ক** $P(x, y) \equiv (3t - 1, t + 2)$

$\therefore x = 3t - 1$

$\Rightarrow t = \frac{x+1}{3}$ ..... (i)

$\therefore y = t + 2$

$\therefore t = y - 2$ ..... (ii)

(i) ও (ii) হতে,

$\frac{x+1}{3} = y - 2$

$\Rightarrow x + 1 = 3y - 6$

$\therefore x - 3y + 7 = 0$

**খ** প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = m$

$\therefore \frac{x}{\frac{m}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{m}{\sin\alpha}} = 1$

∴ সরলরেখাটি x অক্ষ ও y অক্ষকে যথাক্রমে $L\left(\frac{m}{\cos\alpha}, 0\right)$ ও $G\left(0, \frac{m}{\sin\alpha}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, LG এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y) \equiv \left(\frac{\frac{m}{\cos\alpha} + 0}{2}, \frac{0 + \frac{m}{\sin\alpha}}{2}\right)$

অর্থাৎ, $x = \frac{m}{2\cos\alpha}, y = \frac{m}{2\sin\alpha}$

$\therefore \cos\alpha = \frac{m}{2x}, \sin\alpha = \frac{m}{2y}$

আমরা জানি, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\therefore \left(\frac{m}{2x}\right)^2 + \left(\frac{m}{2y}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \frac{m^2}{4x^2} + \frac{m^2}{4y^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{m^2}{4}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) = 1$

$\therefore m^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$

∴ নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ: $m^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$ **(Showed)**

**গ** দেওয়া আছে, প্রদত্ত রেখাদ্বয়: $4x + 3y - d = 0$ ..... (i)

এবং $12x - 5y - 2(d + 3) = 0$ ..... (ii)

মূলবিন্দু (0, 0) হতে (i) নং এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|4 \times 0 + 3 \times 0 - d|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$

$= \frac{|d|}{5}$

আবার, (0, 0) হতে (ii) নং এর লম্ব দূরত্ব,

$= \frac{|12 \times 0 - 5 \times 0 - 2(d + 3)|}{\sqrt{12^2 + 5^2}}$

$= \frac{|2(d + 3)|}{13}$

শর্তানুসারে, $\frac{d}{5} = \pm\frac{2(d + 3)}{13}$

$\Rightarrow 13d = \pm 10(d + 3)$

(+) চিহ্ন নিয়ে, $13d = 10d + 30$

$\Rightarrow 3d = 30$

$\therefore d = 10 > 0$

(–) চিহ্ন নিয়ে, $13d = -10d - 30$

$\Rightarrow 23d = -30$

$\therefore d = -\frac{30}{23} < 0$

∴ d এর ধনাত্মক মান 10 **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

### সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক

১। $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি?

[রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ১৯]

ক $\left(2, -\frac{3\pi}{2}\right)$ খ $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$

গ $\left(2, -\frac{5\pi}{4}\right)$ ঘ $\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$

উত্তর: ঘ $\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$

ব্যাখ্যা: $r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = 2$

বিন্দুটি ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore \theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}\right| = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$\therefore$ পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$

২। $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক কত? [ঢা. বো. ২১]

ক $\left(4, \frac{7\pi}{4}\right)$ খ $\left(6, \frac{-\pi}{4}\right)$

গ $\left(8, \frac{\pi}{4}\right)$ ঘ $\left(2, \frac{-\pi}{4}\right)$

উত্তর: ঘ $\left(2, \frac{-\pi}{4}\right)$

ব্যাখ্যা: $r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$

বিন্দুটি ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| = -\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2, \frac{-\pi}{4}\right)$

৩। (1, –1) বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি? [সি. বো. ১৭]

ক $(\sqrt{2}, 45°)$ খ $(\sqrt{2}, 135°)$

গ $(\sqrt{2}, 225°)$ ঘ $(\sqrt{2}, 315°)$

উত্তর: ঘ $(\sqrt{2}, 315°)$

ব্যাখ্যা: $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$

বিন্দুটি ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\theta = 360° - \tan^{-1}\left|\frac{-1}{1}\right| = 315°$

$\therefore$ পোলার স্থানাঙ্ক $(\sqrt{2}, 315°)$

৪। (1, 150°) বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নিচের কোনটি?

[ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১; ব. বো. ১৯]

ক $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ খ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

গ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ঘ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

উত্তর: খ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

ব্যাখ্যা: $x = r\cos\theta = 1 \times \cos 150° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$y = r\sin\theta = 1 \times \sin 150° = \frac{1}{2}$

$\therefore$ কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

৫। কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাংকের কোটি 90° হলে ঐ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাংকের ভুজ– [ব. বো. ১৭]

ক $x = r$ খ $x = 0$

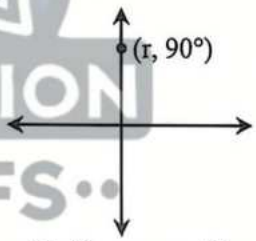
গ $y = r$ ঘ $y = 0$

উত্তর: খ $x = 0$

ব্যাখ্যা: পোলার স্থানাঙ্ক $(r, \theta)$ $\therefore \theta = 90°$

কার্তেসীয় এর ভুজ ; $x = r\cos\theta = r\cos 90° = 0$

অথবা,




$\therefore$ বিন্দুটি y অক্ষে অবস্থিত

$\therefore$ ভুজ, $x = 0$

৬। $r = 3\cos\theta$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ কোনটি? [রা. বো. ২১]

ক $x^2 + y^2 - 3x = 0$ খ $x^2 + y^2 + 3x = 0$

গ $x^2 + y^2 - 3y = 0$ ঘ $x^2 + y^2 + 3y = 0$

উত্তর: ক $x^2 + y^2 - 3x = 0$

ব্যাখ্যা: $r = 3\cos\theta$

$\Rightarrow r^2 = 3r\cos\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 3x = 0$

**Note:** $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি রেখার সমীকরণ $x + 3y + 3 = 0$

৭। রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি? [রা. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩, ২১; য. বো. ২২; কু. বো. ২২; সি. বো. ২২, ২১; রা. বো. ২১; চ. বো. ২১]

ক $(-1, 0°)$ খ $(1, 0°)$

গ $(1, 90°)$ ঘ $(1, 270°)$

উত্তর: ঘ $(1, 270°)$



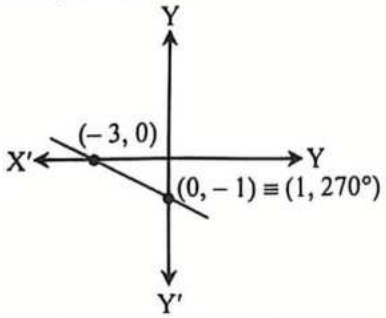
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-1}=1$

y অক্ষের ছেদবিন্দু $(0,-1)$



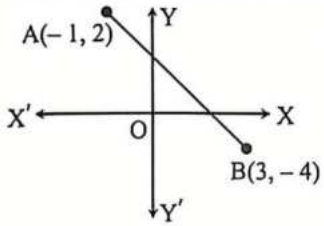

$(0,-1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক, $(1, 270°)$ [চিত্র হতে]

অথবা, $r=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$

$\theta=360°-\tan^{-1}\frac{|-1|}{|0|}=360°-90°=270°$

## বিভক্ত বিন্দু, অনুপাত ও ত্রিভুজের বিভিন্ন কেন্দ্র

❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ৮ ও ৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




৮। A বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক হল– [ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২, ২১; দি. বো. ২২; রা. বো. ২১; সকল বো. ১৮]

ক $\left(5, \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ খ $(5, \tan^{-1}(-2))$

গ $\left(\sqrt{5}, \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ ঘ $\left(\sqrt{5}, \tan^{-1}(-2)\right)$

উত্তর: ঘ $\left(\sqrt{5}, \tan^{-1}(-2)\right)$

ব্যাখ্যা: $r=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

বিন্দুটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত

$\therefore \theta=\pi-\tan^{-1}(2)=\tan^{-1}(-2)$

$\therefore$ পোলার স্থানাঙ্ক $\left(\sqrt{5}, \tan^{-1}(-2)\right)$

৯। A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে x অক্ষরেখা কত অনুপাতে বিভক্ত করে? [ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩]

ক 2 : 1 খ 1 : 2

গ 3 : 1 ঘ 1 : 3

উত্তর: খ 1 : 2

ব্যাখ্যা: নির্ণেয় অনুপাত $=\left|\frac{\text{১ম বিন্দুর কোটি}}{\text{২য় বিন্দুর কোটি}}\right|=\left|\frac{2}{-4}\right|=1:2$

**Note:** X অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে $=\left|\frac{\text{১ম বিন্দুর কোটি}}{\text{২য় বিন্দুর কোটি}}\right|$

Y অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে $=\left|\frac{\text{১ম বিন্দুর ভুজ}}{\text{২য় বিন্দুর ভুজ}}\right|$

বি: দ্র: Modulus এর মধ্যে (– ve) হলে অন্তর্বিভক্ত করে এবং (+ ve) হলে বহির্বিভক্ত করে।

১০। $(-3,-4)$ ও $(6, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাটিকে Y-অক্ষরেখা যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তা হলো– [ম. বো. ২২]

ক 2 : 1 খ 1 : 2

গ 2 : 3 ঘ 3 : 2

উত্তর: খ 1 : 2

ব্যাখ্যা: নির্ণেয় অনুপাত $=\left|\frac{\text{১ম বিন্দুর ভুজ}}{\text{২য় বিন্দুর ভুজ}}\right|=\left|\frac{-3}{6}\right|=1:2$

১১। $A(1,-2)$ ও $B(-8, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ BA কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নিচের কোনটি? [কু. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩]

ক $(-5,-1)$ খ $(-2,-1)$

গ $(-2, 0)$ ঘ $(-5, 0)$

উত্তর: খ $(-2,-1)$

ব্যাখ্যা: $(x, y)\equiv\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ | $(-8, 1)\equiv(x_1, y_1)$, $(1,-2)\equiv(x_2, y_2)$, $m_1:m_2\equiv 2:1$

$(x, y)\equiv\left(\frac{2\times1+1\times(-8)}{2+1}, \frac{2\times(-2)+1\times1}{2+1}\right)$

$(x, y)\equiv(-2,-1)$

১২। $(-2, 4)$ এবং $(8,-10)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে 2 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? [রা. বো. ২২]

ক $(-22, 8)$ খ $(22,-8)$

গ $(-22, 32)$ ঘ $(22,-32)$

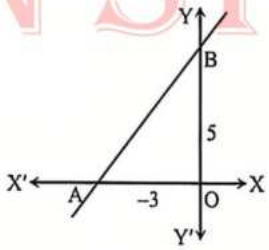
উত্তর: গ $(-22, 32)$

ব্যাখ্যা: $(x, y)\equiv\left(\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$ | $(-2, 4)\equiv(x_1,y_1)$, $(8,-10)\equiv(x_2,y_2)$, $m_1:m_2\equiv 2:3$

$(x, y)\equiv\left(\frac{2\times8-3\times(-2)}{-1}, \frac{2\times(-10)-3\times4}{-1}\right)$

$(x, y)\equiv(-22, 32)$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




১৩। OAB ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাংক কোনটি? [রা. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২; সকল বো. ১৮; দি. বো. ১৭]

ক $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ খ $\left(\frac{-5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

গ $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$ ঘ $\left(\frac{5}{3}, -1\right)$

উত্তর: গ $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$

ব্যাখ্যা: O(0, 0), A(– 3, 0), B(0, 5)

$\therefore$ ভরকেন্দ্র $\equiv\left(\frac{0-3+0}{3}, \frac{0+0+5}{3}\right)\equiv\left(-1, \frac{5}{3}\right)$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



১৪। AD মধ্যমা বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র (– 1, 1)। D(– 3, – 1) হলে, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি?

ক (3, 5) খ (1, 3)
গ (7, 9) ঘ (– 7, –5)

উত্তর: ক (3, 5)

ব্যাখ্যা: কোনো ত্রিভুজের মধ্যমা তার ভরকেন্দ্রে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

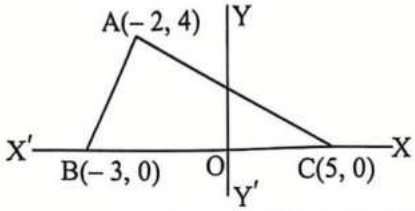
ধরি, A (x, y), D (– 3, –1) ও G (– 1, 1)

$\therefore -1 = \frac{-3\times 2 + 1.x}{1+2}$ | $\therefore 1 = \frac{-1\times 2 + 1.y}{1+2}$

$\therefore x = 3$ | $\therefore y = 5$

$\therefore A \equiv (3, 5)$

❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ১৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




[ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২; কু. বো. ২১; সকল বো. ১৮]

১৫। BC এর মধ্যবিন্দু কত?

ক (0, 1) খ (1, 0)
গ (4, 0) ঘ (0, 4)

উত্তর: খ (1, 0)

ব্যাখ্যা: BC এর মধ্যবিন্দু $\equiv \left(\frac{-3+5}{2}, 0\right) \equiv (1, 0)$

## সরলরেখার ঢাল সংক্রান্ত

১৬। (m, 0), (0, n), (1, 1) বিন্দু তিনটি সমরেখ হওয়ার শর্ত কোনটি? [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২৩]

ক $m - n = mn$ খ $m - n + mn = 0$
গ $m + n = 0$ ঘ $m + n = mn$

উত্তর: ঘ $m + n = mn$

ব্যাখ্যা: বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে তাদের দ্বারা উৎপন্ন সরলরেখার ঢাল সমান হবে।

$\therefore \frac{0-n}{m-0} = \frac{n-1}{0-1}$

$n = mn - m$

$\therefore m + n = mn$

১৭। একটি সরলরেখা (5, 5) ও (3, 7) বিন্দুগামী হলে রেখাটির ঢাল কত? [ব. বো. ২১]

ক – 2 খ – 1
গ 3 ঘ 10

উত্তর: খ –1

ব্যাখ্যা: ঢাল $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{7-5}{3-5}$

$= -\frac{2}{2}$

$= -1$

১৮। $qy + px + r = 0$ রেখার ঢাল কোনটি? [ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২৩, ২১; কু. বো. ২২; রা. বো. ২১, ১৯, ১৭; চ. বো. ২১; ব. বো. ১৯; য. বো. ১৭]

ক $-\frac{p}{q}$ খ $-\frac{q}{p}$
গ $\frac{q}{p}$ ঘ $\frac{p}{q}$

উত্তর: ক $-\frac{p}{q}$

ব্যাখ্যা: ঢাল $= -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{p}{q}$

১৯। কোনো সরলরেখা x অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করলে তার ঢাল–

ক 1 খ – 1
গ 0 ঘ ± 1

উত্তর: ঘ ± 1

ব্যাখ্যা: ঢাল $= \tan(\pm 45°) = \pm 1$

২০। $3x + \sqrt{3}y - 10 = 0$ রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে? [ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২৩; ব. বো. ২১, ১৭; চ. বো. ১৯]

ক $\frac{\pi}{3}$ খ $\frac{2\pi}{3}$
গ $\frac{\pi}{6}$ ঘ $\frac{5\pi}{6}$

উত্তর: খ $\frac{2\pi}{3}$

ব্যাখ্যা: x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ $\theta$ হলে ঢাল,

$\tan\theta = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}}$

$\Rightarrow \tan\theta = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\tan 60° = \tan(180° - 60°)$

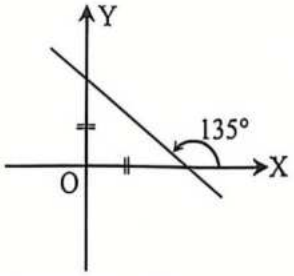
$\therefore \theta = 120°$

২১। অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিক থেকে সমান অংশ ছেদকারী রেখার ঢাল কত?

ক – 1 খ 1
গ 0 ঘ $\sqrt{3}$

উত্তর: ক – 1

ব্যাখ্যা:




ঢাল $= \tan 135° = -1$

অথবা, অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিকে সমান অংশ ছেদকারী রেখা: $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$

$\Rightarrow y = -x + a$

$\therefore$ ঢাল $= -1$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## একটি নির্দিষ্ট ঢাল ও এক বিন্দুগামী সরলরেখা

২২। $(-5, 10)$ বিন্দুগামী সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ কোণ উৎপন্ন করে। সরলরেখার সমীকরণ–

[চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২; চ. বো. ২১]

ক $4x + 3y - 10 = 0$ খ $3x - 4y + 55 = 0$
গ $3x + 4y + 55 = 0$ ঘ $4x + 3y + 30 = 0$

উত্তর: খ $3x - 4y + 55 = 0$

ব্যাখ্যা: x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে তৈরি কোণ $= \theta$ হলে,

ঢাল, $m = \tan\theta = \tan\left(\tan^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

$(-5, 10)$ বিন্দুগামী ও $\frac{3}{4}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখা: $y - 10 = \frac{3}{4}(x + 5)$

$\Rightarrow 3x - 4y + 55 = 0$

২৩। $\frac{2}{3}$ ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব এবং $(-1, 0)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কোনটি? [ঢা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২১]

ক $3x - 2y + 3 = 0$ খ $3x + 2y + 3 = 0$
গ $2x - 3y + 2 = 0$ ঘ $2x - 3y - 2 = 0$

উত্তর: খ $3x + 2y + 3 = 0$

ব্যাখ্যা: $\frac{2}{3}$ ঢালবিশিষ্ট রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $= -\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}$ ঢালবিশিষ্ট ও $(-1, 0)$ বিন্দুগামী রেখা: $y - 0 = -\frac{3}{2}(x + 1)$

$\Rightarrow 3x + 2y + 3 = 0$

২৪। একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{2}{3}$ এবং y অক্ষের খণ্ডিতাংশ $-5$ হলে, রেখাটির সমীকরণ– [কু. বো. ২১]

ক $2x + 3y = 15$ খ $3x + 2y = 15$
গ $2x - 3y = 15$ ঘ $3x - 2y = 15$

উত্তর: গ $2x - 3y = 15$

ব্যাখ্যা: $y = \underset{\uparrow}{mx} + \underset{\uparrow}{c}$
ঢাল y অক্ষের খন্ডিতাংশ

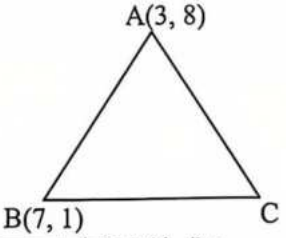
$\therefore y = \frac{2}{3}x - 5$

$\Rightarrow 3y = 2x - 15$

$\therefore 2x - 3y = 15$

## লম্ব রেখা সংক্রান্ত

❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ২৫ ও ২৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাংক $(6, 4)$।

২৫। C বিন্দুর স্থানাংক হল– [য. বো. ২৩]

ক $(3, 8)$ খ $(8, 3)$
গ $(2, -1)$ ঘ $(2, 1)$

উত্তর: খ $(8, 3)$

ব্যাখ্যা: ধরি, $C(x, y)$

$\therefore$ ভরকেন্দ্র $\equiv \left(\frac{3+7+x}{3}, \frac{8+1+y}{3}\right) \equiv (6, 4)$

$\therefore \frac{3+7+x}{3} = 6$ $\therefore \frac{8+1+y}{3} = 4$

$\Rightarrow 10 + x = 18$ $\Rightarrow 9 + y = 12$

$\Rightarrow x = 8$ $\Rightarrow y = 3$

$\therefore C(x, y) \equiv (8, 3)$

২৬। AB এর উপর লম্ব রেখার ঢাল কত? [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩]

ক $-\frac{7}{4}$ খ $\frac{7}{4}$
গ $\frac{4}{7}$ ঘ $-\frac{4}{7}$

উত্তর: গ $\frac{4}{7}$

ব্যাখ্যা: $A(3, 8), B(7, 1)$

AB এর লম্ব রেখার ঢাল $= \frac{-1}{\text{AB এর ঢাল}} = \frac{-1}{\frac{8-1}{3-7}} = \frac{4}{7}$

২৭। $y = -7x + 9$ রেখার সাথে লম্ব রেখার নতি কত? [ঢা. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১]

ক $\frac{1}{7}$ খ $-\frac{1}{7}$
গ $-7$ ঘ $7$

উত্তর: ক $\frac{1}{7}$

ব্যাখ্যা: $y = -7x + 9$ কে $y = mx + c$ এর সাথে তুলনা করে।

ঢাল, $m = -7$

$\therefore$ লম্ব রেখার নতি/ঢাল $= -\frac{1}{m} = \frac{1}{7}$

২৮। $4x - 3y - 51 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল কত? [চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২; সি. বো. ২১; ব. বো. ১৯]

ক $\frac{4}{3}$ খ $-\frac{4}{3}$
গ $\frac{3}{4}$ ঘ $-\frac{3}{4}$

উত্তর: ঘ $-\frac{3}{4}$

ব্যাখ্যা: $4x - 3y - 51 = 0$ এর ঢাল, $m_1 = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$

লম্ব রেখার ঢাল, $m_2$ হলে, $m_1 m_2 = -1$ $\therefore m_2 = -\frac{3}{4}$

২৯। M এর মান কত হলে $2x - y + 6 = 0$ ও $3x + My - 3 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে? [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩, ২১; চ. বো. ২১]

ক $-6$ খ $-\frac{3}{2}$
গ $\frac{3}{2}$ ঘ $6$

উত্তর: ঘ $6$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: $2x - y + 6 = 0$ এর ঢাল $= -\frac{2}{-1} = 2$

$3x + My - 3 = 0$ এর ঢাল $= -\frac{3}{M}$

প্রশ্নমতে, $2 \times \left(-\frac{3}{M}\right) = -1$

[∵ পরস্পর লম্ব দুইটি সরলরেখার ঢালদ্বয়ের গুণফল $-1$]

$\therefore M = 6$

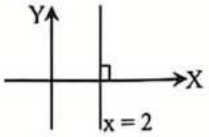
**Note:** দুটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হলে, তাদের ঢালদ্বয় সমান হবে।
দুটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হলে, তাদের ঢালদ্বয়ের গুণফল $-1$ হবে।

৩০। $x + y = 6$ এবং $y - x = 2$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী এবং x অক্ষের উপর লম্বরেখার সমীকরণ কোনটি?
[চ. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ১৭]

ক $x = 2$ খ $x = 4$
গ $y = 2$ ঘ $y = 4$

উত্তর: ক $x = 2$

ব্যাখ্যা:




$x + y = 6$ ..... (i)
$-x + y = 2$ ..... (ii)
Solving by Calculator $x = 2, y = 4$
$\therefore$ ছেদবিন্দু $(2, 4)$
x অক্ষের ওপর লম্ব বা y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $x = a \Rightarrow x = 2$

৩১। $(1, 2)$ বিন্দুগামী $3x + 2y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ কোনটি? [ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩; চ. বো. ২৩; য. বো. ২২; রা. বো. ২১]

ক $2x + 3y - 8 = 0$ খ $3x + 2y + 1 = 0$
গ $3x + 2y - 7 = 0$ ঘ $2x - 3y + 4 = 0$

উত্তর: ঘ $2x - 3y + 4 = 0$

ব্যাখ্যা: $3x + 2y + 5 = 0$ এর উপর লম্ব $(1, 2)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,
$2x - 3y = 2 \times 1 - 3 \times 2$
$\Rightarrow 2x - 3y + 4 = 0$

## সমান্তরাল সরলরেখা

৩২। $8x - by - 9 = 0$ এবং $4x + 3y + 2 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ। রেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে, b এর মান কত?
[চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২]

ক $-6$ খ $-3$
গ $3$ ঘ $6$

উত্তর: ক $-6$

ব্যাখ্যা: $8x - by - 9 = 0$ এর ঢাল $= \frac{8}{b}$

$4x + 3y + 2 = 0$ এর ঢাল $= -\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{8}{b} = -\frac{4}{3}$ [∵ সমান্তরাল রেখা সমূহের ঢাল সমান]

$\therefore b = -6$

অথবা, দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হলে, x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত = y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{8}{4} = \frac{-b}{3}$

$\therefore b = -6$

৩৩। $2x + 3y = 7$ এবং $3ax - 5by + 15 = 0$ সমীকরণ দুটি একই সরলরেখা প্রকাশ করলে ধ্রুবক a এর মান কত? [য. বো. ২১]

ক $\frac{10}{7}$ খ $-\frac{10}{7}$
গ $\frac{5}{7}$ ঘ $-\frac{5}{7}$

উত্তর: খ $-\frac{10}{7}$

ব্যাখ্যা: একই সরলরেখা প্রকাশ করলে, x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত = y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত = ধ্রুবকপদদ্বয়ের অনুপাত

[ধ্রুবকগুলো অবশ্যই সমান চিহ্নের একই পাশে নিতে হবে।]

$2x + 3y - 7 = 0$ এবং $3ax - 5by + 15 = 0$

$\Rightarrow \frac{2}{3a} = \frac{3}{-5b} = \frac{-7}{15}$

$\Rightarrow \frac{2}{3a} = \frac{-7}{15}$

$\therefore a = -\frac{10}{7}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৩৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x + 2y - 6 = 0$ এবং $x + 2y + 8 = 0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ।

৩৪। নিচের কোনটি সঠিক? [সকল বো. ১৮]

ক রেখাদ্বয় মূল বিন্দু দিয়ে যায় খ রেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে
গ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব ঘ রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল

উত্তর: ঘ রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল

ব্যাখ্যা: $x + 2y - 6 = 0$ রেখার ঢাল, $m_1 = -\frac{1}{2}$

$x + 2y + 8 = 0$ রেখার ঢাল, $m_2 = -\frac{1}{2}$

$\therefore m_1 = m_2$

$\therefore$ রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

৩৫। x অক্ষরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হল– [ব. বো. ২৩]

ক $x = 2$ খ $x = y$
গ $y = 1$ ঘ $x - y = 2$

উত্তর: গ $y = 1$

ব্যাখ্যা: x অক্ষের সমান্তরাল রেখা, $y = b$ [b ধ্রুবক]
অপশন অনুযায়ী গ ই সঠিক উত্তর।

৩৬। $x + y = 4$ এবং $x - y = 2$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী ও y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ–
[চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২; সকল বো. ১৮]

ক $y = 1$ খ $x = 1$
গ $y = 3$ ঘ $x = 3$

উত্তর: ঘ $x = 3$

ব্যাখ্যা: $x + y = 4$ ও $x - y = 2$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(3, 1)$
y অক্ষের সমান্তরাল $(3, 1)$ বিন্দুগামী রেখা, $x = 3$

[$(a, b)$ বিন্দুগামী x অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $y = b$,
y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $x = a$]

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৩৭। $2x + 5y + 1 = 0$ এবং $-kx + 10y - 3 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ। $(1, 0)$ বিন্দুগামী প্রথম রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ কোনটি? [দি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১]

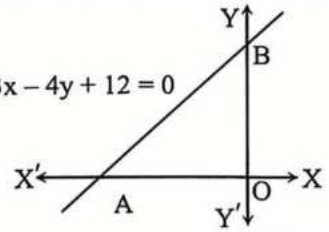
ক $2x + 5y - 2 = 0$ খ $2x + 5y + 2 = 0$
গ $5x - 2y - 5 = 0$ ঘ $5x - 2y + 5 = 0$

উত্তর: ক $2x + 5y - 2 = 0$

ব্যাখ্যা: $2x + 5y + 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ,
$2x + 5y + k = 0$; যা $(1, 0)$ বিন্দুগামী
$\Rightarrow k = -2$
$\therefore 2x + 5y - 2 = 0$

## সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের খন্ডিত অংশ

❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ৩৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



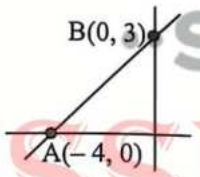

[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩; ব. বো. ১৭]

৩৮। AB রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাংক কোনটি?

ক $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ খ $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$
গ $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ ঘ $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

উত্তর: খ $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$

ব্যাখ্যা: $3x - 4y = -12$
$\Rightarrow \frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$



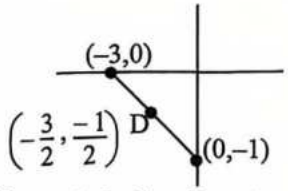

AB এর মধ্যবিন্দু $= \left(-2, \frac{3}{2}\right)$

৩৯। একটি রেখার সমীকরণ $x + 3y + 3 = 0$। রেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিত অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? [রা. বো. ১৯]

ক $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ খ $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
গ $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ঘ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

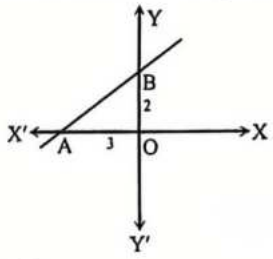
উত্তর: গ $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

ব্যাখ্যা: $x + 3y = -3$
$\Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{-1} = 1$




$\therefore$ অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দুদ্বয় $(-3, 0)$ ও $(0, -1)$
$\therefore$ মধ্যবিন্দু $\equiv \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৪০ ও ৪১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




$OA = 3, OB = 2$

৪০। AB এর সমীকরণ কোনটি? [ম. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৭]

ক $2x + 3y = 1$ খ $2x + 3y = 6$
গ $2x - 3y = -6$ ঘ $2x - 3y = 1$

উত্তর: গ $2x - 3y = -6$

ব্যাখ্যা: রেখাটি x অক্ষকে $(-3, 0)$ ও y অক্ষকে $(0, 2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ সমীকরণ, $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$

$\Rightarrow 2x - 3y = -6$

৪১। AB এর ঢাল কত? [ম. বো. ২১]

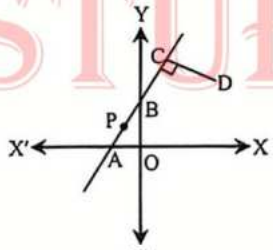
ক $-\frac{2}{3}$ খ $\frac{2}{3}$
গ $\frac{3}{2}$ ঘ $-\frac{3}{2}$

উত্তর: খ $\frac{2}{3}$

ব্যাখ্যা: $A(-3, 0)$ ; $B(0, 2)$

ঢাল $= \frac{2 - 0}{0 + 3} = \frac{2}{3}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৪২ ও ৪৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




AB রেখার সমীকরণ $6x - 4y + 24 = 0$ এবং $AP = PB$

৪২। CD রেখার ঢাল কত? [কু. বো. ১৯]

ক $-\frac{3}{2}$ খ $\frac{3}{2}$
গ $-\frac{2}{3}$ ঘ $\frac{2}{3}$

উত্তর: গ $-\frac{2}{3}$

ব্যাখ্যা: AB রেখার ঢাল, $= -\frac{6}{-4} = \frac{3}{2}$

AB এর উপর লম্ব CD এর ঢাল $= -\frac{2}{3}$

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**৪৩। OP রেখার সমীকরণ কোনটি?** [কু. বো. ১৯]

ক $y = -\frac{2}{3}x$ খ $y = -\frac{3}{2}x$

গ $y = \frac{2}{3}x$ ঘ $y = \frac{3}{2}x$

**উত্তর:** খ $y = -\frac{3}{2}x$

**ব্যাখ্যা:** P হল AB এর মধ্যবিন্দু।

$6x - 4y = -24$

$\Rightarrow \frac{x}{-4} + \frac{y}{6} = 1$

$A(-4, 0)$ ; $B(0, 6) \rightarrow$ মধ্যবিন্দু $(-2, 3)$

$(0, 0)$ ও $(-2, 3)$ বিন্দুর সংযোগকারী রেখা OP এর সমীকরণ

$y = -\frac{3}{2}x$

**৪৪। $3x - 2y + 6 = 0$ সরলরেখা দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশ কত একক?**
[চ. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২; সি. বো. ২২, ২১; ম. বো. ২২; দি. বো. ২১; ব. বো. ১৯]

ক $-3$ খ $-2$

গ 2 ঘ 3

**উত্তর:** খ $-2$

**ব্যাখ্যা:** $3x - 2 \times 0 + 6 = 0$ [$\because$ x অক্ষে $y = 0$]

$\therefore x = -2$

**Note:** প্রশ্নে শুধু খন্ডিতাংশ চাইলে চিহ্নসহ এবং খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য/পরিমাণ চাইলে মান শুধু ধনাত্মক নিতে হবে।

**৪৫। $\sqrt{2}x - y + 5 = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ। প্রদত্ত সরলরেখার দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কোনটি?**
[কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২১, ১৯]

ক $-5$ খ $-\frac{5}{\sqrt{2}}$

গ $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ঘ 5

**উত্তর:** ঘ 5

**ব্যাখ্যা:** $\sqrt{2}x - y = -5$

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{-5}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{5} = 1$

$\therefore$ y অক্ষের খন্ডিতাংশ 5

**অথবা,** y অক্ষে $x = 0$

$0 - y + 5 = 0$

$\therefore y = 5$

**৪৬। অক্ষদ্বয় দ্বারা $4x + 3y = 12$ সরলরেখার ছেদিত অংশের দৈর্ঘ্য–**

ক 5 খ 4

গ 3 ঘ 2

**উত্তর:** ক 5

**ব্যাখ্যা:** $4x + 3y = 12$

$\Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

অক্ষদ্বয় দ্বারা ছেদিত অংশ $= \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= 5$ একক

**৪৭। $2x - y + 1 = 0$ সরলরেখাটি–**
[ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২৩; দি. বো. ২২]

(i) $x + 2y + 1 = 0$ রেখার উপর লম্ব

(ii) $x - 2y + 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল

(iii)এর দ্বারা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশের পরিমাণ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** খ i ও iii

**ব্যাখ্যা:** (i) $x + 2y + 1 = 0$ এর উপর লম্ব $2x - y + k = 0$

$\therefore$ লম্ব হতে পারে যেহেতু $2x - y$ এই part টা মিল আছে।

(ii) $2x - y + 1 = 0$ এর সমান্তরাল $2x - y + k = 0$

$\therefore$ এটা ভুল Option

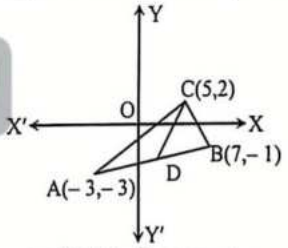
অপশন অনুযায়ী (ii) নং ভুল হলে খ অপশনই সঠিক।

(iii) $\frac{x}{-\frac{1}{2}} + \frac{y}{1} = 1$

খন্ডিতাংশ $= \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ একক

## ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৪৮ ও ৪৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




চিত্রে CD, AB বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা।

**৪৮। CD এর দৈর্ঘ্য কত একক?** [কু. বো. ১৭]

ক 10 খ 5

গ 4 ঘ 3

**উত্তর:** খ 5

**ব্যাখ্যা:** $D \equiv \left(\frac{7-3}{2}, \frac{-1-3}{2}\right) \equiv (2, -2)$ [$\because$ D, AB এর মধ্যবিন্দু]

$CD = \sqrt{(5-2)^2 + (2+2)^2} = 5$ একক

**৪৯। $\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল কত বর্গএকক?**
[কু. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২৩; সকল বো. ১৮]

ক 6 খ 12

গ 17 ঘ 34

**উত্তর:** গ 17

**ব্যাখ্যা:** $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 17$ বর্গএকক [Using Calculator]

**৫০। $x = 0$, $x = 4$, $y = 2$, $y = 6$ রেখাগুলো দ্বারা আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?** [য. বো. ১৭]

ক 24 খ 16

গ 12 ঘ 8

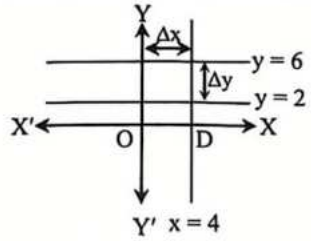
**উত্তর:** খ 16

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা:




$\therefore \Delta x = 4 - 0 = 4$

$\therefore \Delta y = 6 - 2 = 4$

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \Delta x \cdot \Delta y = 4 \times 4 = 16$ বর্গ একক

**Note:** $\Delta x$ = ভুজের পরিবর্তন
$\Delta y$ = কোটির পরিবর্তন

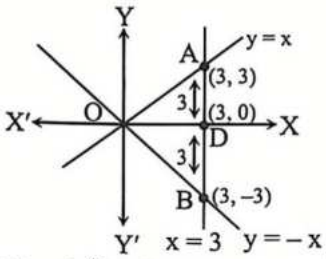
**৫১। $x = 3$ এবং $y = \pm x$ সরলরেখাগুলো দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?** [দি. বো. ২১]

ক 3 খ $\frac{9}{2}$

গ 6 ঘ 9

উত্তর: ঘ 9

ব্যাখ্যা:




ভূমি, AB = 6 ; উচ্চতা, OD = 3

$\therefore \Delta = \frac{1}{2} \times AB \times OD$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 3$

= 9 বর্গ একক

অথবা, Δ OAB এর ক্ষেত্রফল স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে করতে পারো।

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 9 \text{ বর্গ একক [Using Calculator]}$$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৫২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$2x + 2y - \sqrt{5} = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।

**৫২। উদ্দীপকের সরলরেখাটি দ্বারা স্থানাংকের অক্ষদ্বয়ের সহিত উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি?** [ব. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২; সি. বো. ২২, ২১; য. বো. ২১; দি. বো. ২১]

ক $\frac{5}{8}$ বর্গ একক খ $\frac{5}{4}$ বর্গ একক

গ $\frac{5}{2}$ বর্গ একক ঘ $4\sqrt{5}$ বর্গ একক

উত্তর: ক $\frac{5}{8}$ বর্গ একক

ব্যাখ্যা: $2x + 2y = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{y}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 1$ ; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে,

$\Delta = \frac{1}{2}|ab| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2}\right| = \frac{5}{8}$ বর্গ একক

❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ৫৩ ও ৫৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$3x + y = 3$ এবং $3x - y = 3$ দুইটি সরলরেখা। [চ. বো. ২৩]

**৫৩। ঢালদ্বয়ের গুণফল–**

ক $-9$ খ $-1$

গ 1 ঘ 9

উত্তর: ক $-9$

ব্যাখ্যা: $3x + y = 3$ এর ঢাল $= -3$ $\left[\text{ঢাল} = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}}\right]$

$3x - y = 3$ এর ঢাল $= +3$

$\therefore$ ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -9$

**৫৪। রেখাদ্বয় y অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল কত বর্গএকক?** [রা. বো. ২২]

ক 3 খ 6

গ 12 ঘ 18

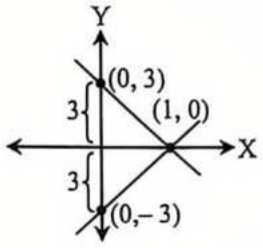
উত্তর: ক 3

ব্যাখ্যা: $3x + y = 3$

$\Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$ রেখার y অক্ষের ছেদবিন্দু (0, 3)

আবার, $3x - y = 3$

$\Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{-3} = 1$ রেখার y অক্ষের ছেদবিন্দু (0, – 3)




y অক্ষের সাথে ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 6 \times 1 = 3$ বর্গএকক

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৫৫ ও ৫৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x + y + 4 = 0$ এবং $x - y - 2 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

**৫৫। রেখা দুইটির ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি?** [চ. বো. ২২]

ক (3, 1) খ (1, 3)

গ (– 3, – 1) ঘ (– 1, – 3)

উত্তর: ঘ (– 1, – 3)

ব্যাখ্যা: Using calculator for solving two equations-

$x = -1$ ; $y = -3$

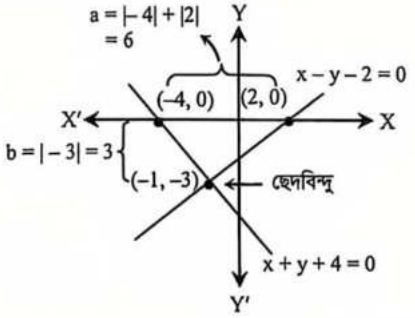
**৫৬। x অক্ষের সাথে রেখা দুইটি যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল কত?** [চ. বো. ২২]

ক 9 বর্গএকক খ 6 বর্গএকক

গ 4 বর্গএকক ঘ 3 বর্গএকক

উত্তর: ক 9 বর্গএকক

ব্যাখ্যা:




Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$x + y = -4$

$\Rightarrow \frac{x}{-4} + \frac{y}{-4} = 1$ রেখার x অক্ষের ছেদবিন্দু $(-4, 0)$

$x - y = 2$

$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$ রেখার x অক্ষের ছেদবিন্দু $(2, 0)$

রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(-1, -3)$

$\therefore \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 9$ [Using Calculator]

অথবা, $\Delta = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$

**৫৭। $3x + 4y - 12 = 0$ সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে একটি ত্রিভুজ গঠন করলে–** [ব. বো. ২১]

**(i) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 6 বর্গএকক**

**(ii) ত্রিভুজটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত**

**(iii) অক্ষদ্বয় কর্তৃক রেখাটির খণ্ডিত অংশের পরিমাণ 5 একক**

**নিচের কোনটি সঠিক?**

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

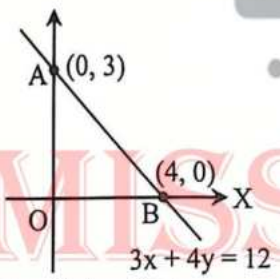
উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $3x + 4y = 12$

$\Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \left|\frac{1}{2}ab\right| = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ বর্গএকক

(ii)




$\therefore$ ত্রিভুজটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

(iii) অক্ষদ্বয় হতে রেখার খন্ডিতাংশ,

$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = 5$ একক

**Note:** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ এর অক্ষদ্বয় হতে খন্ডিতাংশ $= \sqrt{a^2 + b^2}$

**৫৮। $ax + by + c = 0$ সমীকরণটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে।** [ম. বো. ২১]

**(i) সরলরেখাটির ঢাল $-\frac{a}{b}$**

**(ii) $c = 0$ হলে সেটি মূলবিন্দুগামী**

**(iii) অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|ab|$ বর্গএকক**

**নিচের কোনটি সঠিক?**

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) ঢাল $= -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{a}{b}$

(ii) মূলবিন্দুগামী যা $(0, 0)$ বিন্দুগামী হলে,

$ax + by + c = 0$

$\Rightarrow 0 + 0 + c = 0 \quad \therefore c = 0$

$ax + by = -c$

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{-c}{a}} + \frac{y}{\frac{-c}{b}} = 1$

(iii) $\Delta = \frac{1}{2}\left|-\frac{c}{a} \times \left(-\frac{c}{b}\right)\right| = \frac{1}{2}\frac{c^2}{ab}$

**Note:** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ এটা হলে, $\Delta = \frac{1}{2}ab$

**৫৯। A(6, 4) এবং B(10, 8) দুইটি বিন্দু হলে–** [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩; চ. বো. ২২]

**(i) AB রেখার ঢাল 1**

**(ii) AB রেখার সমীকরণ $x - y - 2 = 0$**

**(iii) AB কে বাহু ধরে অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল 8 বর্গ একক**

**নিচের কোনটি সঠিক?**

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) AB এর ঢাল $= \frac{8-4}{10-6} = 1$

(ii) সমীকরণ, $\frac{y-4}{8-4} = \frac{x-6}{10-6}$

$\therefore x - y - 2 = 0$

(iii) AB এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(10-6)^2 + (8-4)^2} = 4\sqrt{2}$

$\therefore$ বর্গের ক্ষেত্রফল $= (4\sqrt{2})^2 = 32$

## সমবিন্দুগামী সরলরেখা ও সরলরেখার সঞ্চারপথ সংক্রান্ত

**৬০। তিনটি সরলরেখার সমীকরণ $x + y = 0$; $x + ay - 1 = 0$ ও $x - y + 2 = 0$। সরলরেখা তিনটি সমবিন্দুগামী হলে a এর মান কত?**

ক $-1$ খ 1

গ $-2$ ঘ 2

উত্তর: ঘ 2

ব্যাখ্যা: সরলরেখাত্রয় $x + y = 0$

$x + ay - 1 = 0$

$x - y + 2 = 0$

সমবিন্দুগামী হলে, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (2a - 1) - (2 + 1) = 0$

$\therefore a = 2$

অথবা, $x + y = 0$ ..... (i)

$x + ay - 1 = 0$ ..... (ii)

$x - y + 2 = 0$ ..... (iii)

(i) নং ও (iii) নং রেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখা হবে (ii) নং রেখা।

$\therefore$ ছেদবিন্দু $\equiv (-1, 1)$ [Using Calculator]

$(-1, 1)$ বিন্দুটি (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$-1 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = 2$

Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৬১। দুইটি সরলরেখা $x + by = 1$ এবং $ax + y = 1$, (1, 1) বিন্দুতে ছেদ করে। a এবং b এর মান কত? [ম. বো. ২১]

ক 0, 0 খ 0, 1
গ 1, 0 ঘ 1, 1

উত্তর: ক 0, 0

ব্যাখ্যা: দুটি সরলরেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করে। অর্থাৎ রেখাদ্বয় অবশ্যই ঐ বিন্দুগামী।

$x + by = 1$ রেখাটি (1, 1) বিন্দুগামী বলে, $1 + b = 1$

$\therefore b = 0$

$ax + y = 1$ রেখাটি (1, 1) বিন্দুগামী বলে, $a + 1 = 1$

$\therefore a = 0$

❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ৬২ ও ৬৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

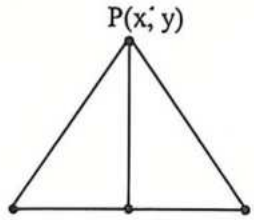
P(x, y), Q(2, – 2) এবং R(0, 4) বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

৬২। P হতে QR এর উপর মধ্যমার দৈর্ঘ্য $\sqrt{3}$ একক হলে মধ্যমাটির সমীকরণ নিচের কোনটি? [কু. বো. ২১]

ক $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 1$ খ $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 1$
গ $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 1$ ঘ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 1$

উত্তর: গ $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 1$

ব্যাখ্যা:




Q ও R এর মধ্যবিন্দু $\Rightarrow D\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$

$\Rightarrow D(1, 1)$

PD মধ্যমার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 3 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 2y = 1$

Note: মধ্যমা একটি সরলরেখা, এটা মধ্যমার সমীকরণ নয় বরং মধ্যমার সঞ্চারপথের সমীকরণ।

৬৩। (i) QR এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 1) [কু. বো. ২১]
(ii) QR এর সমান্তরাল রেখার ঢাল 3
(iii) QR এর দৈর্ঘ্য $2\sqrt{10}$
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) D (1, 1)

(ii) QR এর ঢাল = QR এর সমান্তরাল রেখার ঢাল

$\Rightarrow \frac{4+2}{0-2}$

$\therefore$ QR এর সমান্তরাল রেখার ঢাল $= -3$

(iii) $QR = \sqrt{(0-2)^2 + (4+2)^2} = 2\sqrt{10}$ একক

## সরলরেখার লম্ব আকৃতি

৬৪। $2x + 3y - 4 = 0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান–

ক $\frac{1}{\sqrt{13}}$ খ $-\frac{1}{\sqrt{13}}$
গ $\frac{3}{\sqrt{13}}$ ঘ $\frac{4}{\sqrt{13}}$

উত্তর: ঘ $\frac{4}{\sqrt{13}}$

ব্যাখ্যা: $2x + 3y - 4 = 0$

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$

প্রশ্নমতে, $\frac{2}{\cos\alpha} = \frac{3}{\sin\alpha} = \frac{-4}{-p}$

$\therefore \cos\alpha = \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$

$\therefore \sin\alpha = \frac{3p}{4}$

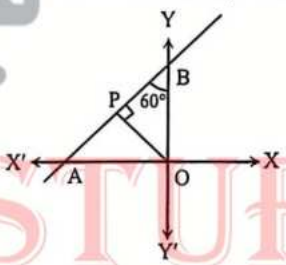
এখন, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{p^2}{4} + \frac{9p^2}{16}$

$\Rightarrow 1 = \frac{13p^2}{16}$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

$\Rightarrow p^2 = \frac{16}{13}$

$\therefore p = \pm\frac{4}{\sqrt{13}}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৬৫ ও ৬৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

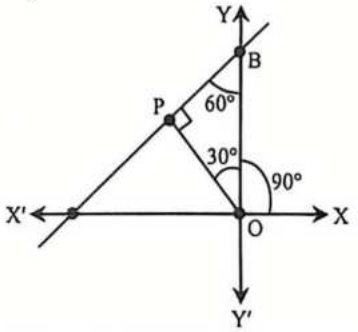



৬৫। OP রেখার ঢাল কত? [সি. বো. ২১]

ক $-\sqrt{3}$ খ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
গ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ঘ $\sqrt{3}$

উত্তর: ক $-\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা:




OP রেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে, $\theta = 90° + 30° = 120°$ কোণ তৈরি করে।

ঢাল $= \tan\theta = \tan 120° = -\sqrt{3}$

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**৬৬। OP = 2 হলে AB রেখার সমীকরণ কোনটি?** [সি. বো. ২১]

ⓚ $x+\sqrt{3}y+4=0$ ⓚ $x-\sqrt{3}y+4=0$

ⓖ $\sqrt{3}x+y+4=0$ ⓖ $\sqrt{3}x-y+4=0$

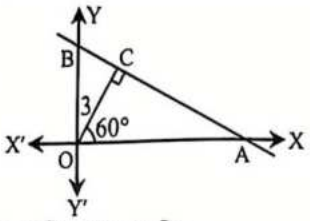
**উত্তর:** ⓚ $x-\sqrt{3}y+4=0$

**ব্যাখ্যা:** মূলবিন্দু হতে কোনো সরলরেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে ঐ লম্বের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha$ হলে রেখাটি সমীকরণ, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

$\Rightarrow x\cos120^\circ + y\sin120^\circ = 2$ [এখানে, $p=2$ ; $\alpha=120^\circ$]

$\therefore x-\sqrt{3}y+4=0$

❖ **উদ্দীপকটির আলোকে ৬৭ ও ৬৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**




**৬৭। AB সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?** [চ. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩]

ⓚ $\sqrt{3}x+y=6$ ⓚ $x+\sqrt{3}y=6$

ⓖ $\sqrt{3}x-y=6$ ⓖ $x-\sqrt{3}y=6$

**উত্তর:** ⓚ $x+\sqrt{3}y=6$

**ব্যাখ্যা:** $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

$\Rightarrow x\times\frac{1}{2}+y\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

$\therefore x+\sqrt{3}y=6$

**৬৮। $\Delta OAC$ এর ক্ষেত্রফল কোনটি?** [চ. বো. ১৭]

ⓚ $3\sqrt{3}$ বর্গএকক ⓚ $\frac{9}{3}$ বর্গএকক

ⓖ 9 বর্গএকক ⓖ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ বর্গএকক

**উত্তর:** ⓖ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ বর্গএকক

**ব্যাখ্যা:** AB রেখার সমীকরণ, $x+\sqrt{3}y=6$

$\Rightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{\frac{6}{\sqrt{3}}}=1$

$\therefore$ x অক্ষের খন্ডিতাংশ, OA = 6

$\Delta = \frac{1}{2}\times OA\times OC\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times6\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ বর্গএকক

## লম্ব দূরত্ব সংক্রান্ত

**৬৯। মূলবিন্দু হতে 4 একক দূরবর্তী এবং – 1 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নিচের কোনটি?** [ব. বো. ২১]

ⓚ $x+y\pm4\sqrt{2}=0$ ⓚ $y-x\pm4\sqrt{2}=0$

ⓖ $y+4\sqrt{2}x=0$ ⓖ $4\sqrt{2}x-y=0$

**উত্তর:** ⓚ $x+y\pm4\sqrt{2}=0$

**ব্যাখ্যা:** ধরি, – 1 ঢাল বিশিষ্ট সমীকরণ: $y=-x+c$

$\Rightarrow x+y-c=0$; যা মূল বিন্দু হতে 4 একক দূরবর্তী।

প্রশ্নমতে, $\left|\frac{0+0-c}{\sqrt{2}}\right|=4$

$\therefore c=\pm4\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x+y\pm4\sqrt{2}=0$

**অথবা, Option Test:**

শুধুমাত্র অপশন ⓚ তে $x+y\pm4\sqrt{2}=0$ রেখার ঢাল $=-1$

$\therefore$ সঠিক উত্তর ⓚ

**৭০। $2x+3y=9$ এবং $4x+6y=7$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কোনটি?** [ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২, ২১; চ. বো. ২১; ম. বো. ২১; য. বো. ২১; সকল বো. ১৮]

ⓚ $\frac{1}{\sqrt{13}}$ ⓚ $\frac{2}{\sqrt{13}}$

ⓖ $\frac{11}{2\sqrt{13}}$ ⓖ $\frac{25}{2\sqrt{13}}$

**উত্তর:** ⓖ $\frac{11}{2\sqrt{13}}$

**ব্যাখ্যা:** $2x+3y=9$

$4x+6y=18$.....(i) [2 দ্বারা গুণ করে]

$4x+6y=7$ .....(ii)

রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল,

দূরত্ব $=\left|\frac{18-7}{\sqrt{4^2+6^2}}\right|=\frac{11}{2\sqrt{13}}$ একক

**৭১। $3x-4y-18=0$ এবং $-3x+4y-7=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব কত?** [কু. বো. ২১]

ⓚ $\pm5$ ⓚ $\pm\frac{11}{5}$

ⓖ $\frac{11}{5}$ ⓖ 5

**উত্তর:** ⓖ 5

**ব্যাখ্যা:** $3x-4y-18=0$

$3x-4y+7=0$ [মাইনাস (–) দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ দূরত্ব $=\left|\frac{7+18}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=5$

**Note:** দূরত্ব বের করার সময় উভয়ই সমীকরণের x ও y এর সহগ সমান হতে হবে।

**৭২। $4y=3(x-4)$ এবং $4y=3(x-1)$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব কত?** [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২; চ. বো. ২১]

ⓚ $\frac{9}{4}$ একক ⓚ $\frac{15}{9}$ একক

ⓖ $\frac{9}{5}$ একক ⓖ কোনোটিই নয়

**উত্তর:** ⓖ $\frac{9}{5}$ একক

**ব্যাখ্যা:** $3x-4y-12=0$

$3x-4y-3=0$

দূরত্ব $=\left|\frac{-3+12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\frac{9}{5}$ একক

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS

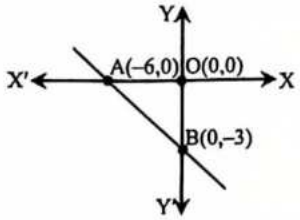


t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৭৩ ও ৭৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




৭৩। AB এর ঢাল কত? [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১; ঢা. বো. ১৯]

ক $-\frac{1}{2}$ খ $\frac{3}{4}$

গ $-\frac{3}{4}$ ঘ $-\frac{4}{3}$

উত্তর: ক $-\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা: ঢাল $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-0}{0+6} = -\frac{1}{2}$

৭৪। মূলবিন্দু থেকে AB এর লম্ব দূরত্ব কত? [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩; ঢা. বো. ১৯; য. বো. ১৭]

ক 4 একক খ 3 একক

গ $\frac{12}{5}$ একক ঘ $\frac{12}{25}$ একক

উত্তর: সঠিক উত্তর নেই

ব্যাখ্যা: AB রেখার সমীকরণ,

$\frac{x}{-6} + \frac{y}{-3} = 1 \Rightarrow 3x + 6y + 18 = 0$

(0, 0) বিন্দু হতে দূরত্ব $= \left|\frac{0+0+18}{\sqrt{3^2+6^2}}\right| = \frac{6}{\sqrt{5}}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৭৫ ও ৭৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দু হতে $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য P এবং লম্ব রেখাটি x অক্ষের সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করলে–

৭৫। P এর মান কত? [সি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২৩, ২১; কু. বো. ২৩, ২২; ঢা. বো. ২২; য. বো. ২১]

ক 5 খ 4

গ 2 ঘ $5\sqrt{2}$

উত্তর: ক 5

ব্যাখ্যা: $P = \left|\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3} - 1 + 8}{\sqrt{3+1}}\right| = 5$

৭৬। $\theta$-এর মান– [সি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২১]

ক 30° খ 120°

গ 60° ঘ 150°

উত্তর: ঘ 150°

ব্যাখ্যা: $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ এর ঢাল, $m_1 = \sqrt{3}$

$\therefore$ লম্ব রেখার ঢাল $= -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \theta = 150°$

৭৭। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর–

(i) (3, – 2) বিন্দু থেকে $12x - 5y + 6 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 4 একক

(ii) মূলবিন্দু ও $(x_1, y_1)$ বিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ $y = \frac{y_1}{x_1}x$

(iii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত হলো $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) (3, – 2) হতে $12x - 5y + 6 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের

দৈর্ঘ্য $= \frac{|12\times 3 - 5\times(-2) + 6|}{\sqrt{12^2+5^2}} = 4$

(ii) (0, 0) ও $(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$\frac{y-0}{x-0} = \frac{0-y_1}{0-x_1} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow y = \frac{y_1}{x_1}\cdot x$

(iii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এর ঢাল $m_1 = \frac{-a_1}{b_1}$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এর ঢাল $m_2 = \frac{-a_2}{b_2}$

লম্ব হলে, $m_1m_2 = -1$

$\frac{-a_1}{b_1} \times \left(\frac{-a_2}{b_2}\right) = -1$

$\Rightarrow a_1a_2 = -b_1b_2$

$\therefore a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

## সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ ও কোণের সমদ্বিখন্ডকের সংক্রান্ত

৭৮। $x + y = 3$ এবং $x - y = 3$ দুটি রেখার সমীকরণ। রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? [রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২; য. বো. ২১; ব. বো. ১৭]

ক 30° খ 45°

গ 60° ঘ 90°

উত্তর: ঘ 90°

ব্যাখ্যা: $x + y = 3 \rightarrow m_1 = -1$

$x - y = 3 \rightarrow m_2 = 1$

$\because m_1m_2 = -1 \therefore$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

৭৯। $y = 2x + 3$ এবং $3x - y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ কত? [দি. বো. ২১]

ক $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{7}\right)$ খ $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

গ $-\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$ ঘ $\tan^{-1}(7)$

উত্তর: খ $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

ব্যাখ্যা: $2x - y + 3 = 0$ ; ঢাল $m_1 = 2$

$3x - y + 5 = 0$ ; ঢাল $m_2 = 3$

$\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \pm\frac{2-3}{1+6} = \pm\frac{-1}{7}$

$\tan\theta$ এর মান positive হলে সূক্ষ্মকোণ।

$\therefore \tan\theta = \frac{1}{7}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs


**৮০। $x = a$ এবং $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের মান–**

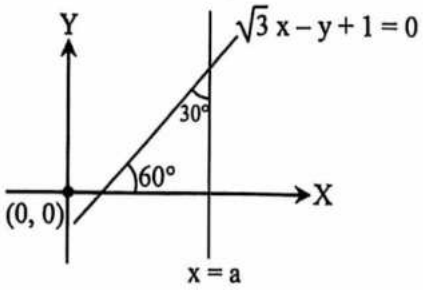
ক 30° খ 45°
গ 60° ঘ 75°

**উত্তর:** ক 30°

**ব্যাখ্যা:** $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ রেখার ঢাল $= \sqrt{3}$

$\therefore$ x অক্ষের সাথে উক্ত রেখার উৎপন্ন কোণ $= 60°$

যেহেতু, $x = a$, y অক্ষের সমান্তরাল রেখা, অতএব $x = a$ এবং $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $= 90° - 60° = 30°$




**বিকল্প পদ্ধতি:**

$$m_1 = \sqrt{3},\ m_2 = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{1}{0} = \infty$$

$$\therefore \tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{m_2\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)}{m_2\left(\frac{1}{m_2} + m_1\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{m_1}{\infty} - 1}{\frac{1}{\infty} + m_1}\right|$$

$$= \pm\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\therefore \tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad [\text{সূক্ষ্মকোণের জন্য } (+) \text{ নিয়ে}]$$

$$\Rightarrow \varphi = 30°$$

**৮১। $3x - 4y + 3 = 0$ এবং $4x - 3y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ–** [ম. বো. ২১]

ক $x + y = 2$ খ $x - y = 2$
গ $x + y + 2 = 0$ ঘ $x - y + 2 = 0$

**উত্তর:** গ $x + y + 2 = 0$

**ব্যাখ্যা:** $3x - 4y + 3 = 0$

$4x - 3y + 5 = 0$

$\Rightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 24 > 0$; (+ ve) চিহ্ন নিয়ে প্রাপ্ত সমদ্বিখন্ডকই স্থূলকোণের।

$$\frac{3x - 4y + 3}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4x - 3y + 5}{\sqrt{9 + 16}}$$

$\therefore x + y + 2 = 0$

**৮২। $y = b$ এবং $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের মান–**

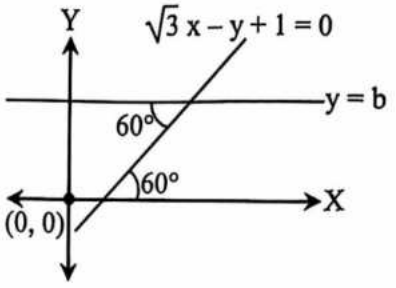
ক 30° খ 45°
গ 60° ঘ 90°

**উত্তর:** গ 60°

**ব্যাখ্যা:** $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ রেখার ঢাল $= \sqrt{3}$

$\therefore$ x অক্ষের সাথে উক্ত রেখার উৎপন্ন কোণ $= 60°$

যেহেতু, $y = b$, x অক্ষের সমান্তরাল রেখা, অতএব $y = b$ এবং $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $= 60°$




**৮৩। $y - 2x = 5$ এবং $3y - x = 6$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী স্থূলকোণ কত?**

ক 90° খ 120°
গ 135° ঘ 150°

**উত্তর:** গ 135°

**ব্যাখ্যা:** $y - 2x = 5$ রেখার ঢাল, $m_1 = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{-2}{1} = 2$

$3y - x = 6$ রেখার ঢাল, $m_2 = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\theta$ হলে, $\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$

$$\Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \times \frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \pm 1$$

$\therefore$ সূলকোণের জন্য, $\tan\theta = -1$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-1)$$

$$\Rightarrow \theta = 135°$$

**৮৪। $x - 2y - 5 = 0$ এবং $2x + 4y - 1 = 0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ।** [দি. বো. ১৯]

**(i)** রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $\left(\frac{11}{4}, -\frac{9}{8}\right)$

**(ii)** দ্বিতীয় রেখার ঢাল $-\frac{1}{2}$

**(iii)** রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ 0°

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** ক i ও ii

**ব্যাখ্যা:** (i) calculator দিয়ে সমীকরণ দুটি সমাধান করে x ও y এর মানই ছেদবিন্দু।

(ii) $m_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

(iii) $m_1 = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

$m_1 \neq m_2$ ; রেখাদ্বয় সমান্তরাল নয় তাই কখনো মধ্যবর্তী কোণ 0° হবে না।

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## নিজেকে যাচাই করো

১। $x+y=3$ এবং $x-y=3$ দুটি রেখার সমীকরণ। রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?

ক 30° খ 45°
গ 60° ঘ 90°

২। $x=3$ এবং $y=\pm x$ সরলরেখাগুলো দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

ক 3 খ $\frac{9}{2}$
গ 6 ঘ 9

৩। M এর মান কত হলে $2x-y+6=0$ ও $3x+My-3=0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে?

ক $-6$ খ $-\frac{3}{2}$
গ $\frac{3}{2}$ ঘ 6

৪। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর–

(i) $(3,-2)$ বিন্দু থেকে $12x-5y+6=0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 4 একক

(ii) মূলবিন্দু ও $(x_1, y_1)$ বিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ $y=\frac{y_1}{x_1}x$

(iii) $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত হলো $a_1a_2+b_1b_2=0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৫। $2x+3y-4=0$ এবং $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান–

ক $\frac{1}{\sqrt{13}}$ খ $-\frac{1}{\sqrt{13}}$
গ $\frac{3}{\sqrt{13}}$ ঘ $\frac{4}{\sqrt{13}}$

৬। $3x+4y-12=0$ সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে একটি ত্রিভুজ গঠন করলে–

(i) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 6 বর্গএকক

(ii) ত্রিভুজটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত

(iii) অক্ষদ্বয় কর্তৃক রেখাটির খণ্ডিত অংশের পরিমাণ 5 একক

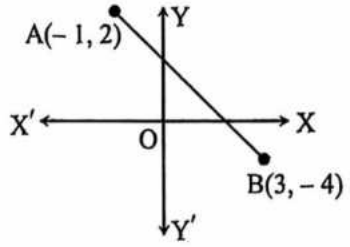
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

৭। তিনটি সরলরেখার সমীকরণ $x+y=0;\ x+ay-1=0$ ও $x-y+2=0$। সরলরেখা তিনটি সমবিন্দুগামী হলে a এর মান কত?

ক $-1$ খ 1
গ $-2$ ঘ 2

❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ৮ ও ৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




৮। A বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক হলো–

ক $\left(5, \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ খ $(5, \tan^{-1}(-2))$
গ $\left(\sqrt{5}, \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ ঘ $(\sqrt{5}, \tan^{-1}(-2))$

৯। A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে x অক্ষরেখা কত অনুপাতে বিভক্ত করে?

ক 2 : 1 খ 1 : 2
গ 3 : 1 ঘ 1 : 3

১০। $3x-2y+6=0$ সরলরেখা দ্বারা x অক্ষের খন্ডিতাংশ কত একক?

ক $-3$ খ $-2$
গ 2 ঘ 3

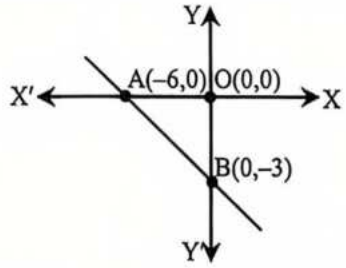
১১। একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{2}{3}$ এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $-5$ হলে, রেখাটির সমীকরণ–

ক $2x+3y=15$ খ $3x+2y=15$
গ $2x-3y=15$ ঘ $3x-2y=15$

১২। $(1, 150°)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নিচের কোনটি?

ক $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ খ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
গ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ঘ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১৩ ও ১৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




১৩। AB এর ঢাল কত?

ক $-\frac{1}{2}$ খ $\frac{3}{4}$
গ $-\frac{3}{4}$ ঘ $-\frac{4}{3}$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs

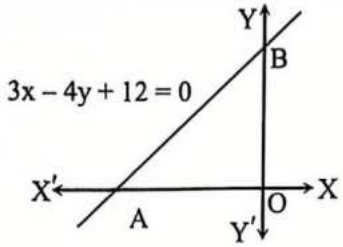


১৪। মূলবিন্দু থেকে AB এর লম্ব দূরত্ব কত?

ক 4 একক　　খ 3 একক

গ $\frac{12}{5}$ একক　　ঘ $\frac{6}{\sqrt{5}}$ একক

❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ১৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




১৫। AB রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাংক কোনটি?

ক $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$　　খ $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$

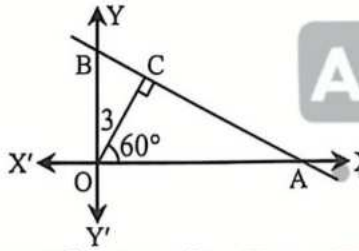
গ $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$　　ঘ $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

১৬। $x = a$ এবং $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের মান–

ক 30°　　খ 45°

গ 60°　　ঘ 75°

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১৭ ও ১৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




১৭। AB সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?

ক $\sqrt{3}x + y = 6$　　খ $x + \sqrt{3}y = 6$

গ $\sqrt{3}x - y = 6$　　ঘ $x - \sqrt{3}y = 6$

১৮। $\Delta OAC$ এর ক্ষেত্রফল কোনটি?

ক $3\sqrt{3}$ বর্গএকক　　খ $\frac{9}{3}$ বর্গএকক

গ 9 বর্গএকক　　ঘ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ বর্গএকক

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

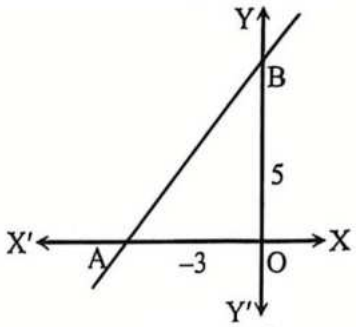
$2x + 2y - \sqrt{5} = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।

১৯। উদ্দীপকের সরলরেখাটি দ্বারা স্থানাংকের অক্ষদ্বয়ের সহিত উৎপন্ন ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি?

ক $\frac{5}{8}$ বর্গ একক　　খ $\frac{5}{4}$ বর্গ একক

গ $\frac{5}{2}$ বর্গ একক　　ঘ $4\sqrt{5}$ বর্গ একক

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ২০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




২০। OAB ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাংক কোনটি?

ক $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$　　খ $\left(\frac{-5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

গ $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$　　ঘ $\left(\frac{5}{3}, -1\right)$

❖ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ২১ ও ২২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

P(x, y), Q(2, – 2) এবং R(0, 4) বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

২১। P হতে QR এর উপর মধ্যমার দৈর্ঘ্য $\sqrt{3}$ একক হলে মধ্যমাটির সমীকরণ নিচের কোনটি?

ক $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 1$　　খ $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 1$

গ $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 1$　　ঘ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 1$

২২। (i) QR এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 1)

(ii) QR এর সমান্তরাল রেখার ঢাল 3

(iii) QR এর দৈর্ঘ্য $2\sqrt{10}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii　　খ i ও iii

গ ii ও iii　　ঘ i, ii ও iii

২৩। $x + y = 4$ এবং $x - y = 2$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী ও y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ–

ক $y = 1$　　খ $x = 1$

গ $y = 3$　　ঘ $x = 3$

২৪। $3x - 4y + 3 = 0$ এবং $4x - 3y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ–

ক $x + y = 2$　　খ $x - y = 2$

গ $x + y + 2 = 0$　　ঘ $x - y + 2 = 0$

২৫। $2x + 3y = 9$ এবং $4x + 6y = 7$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কোনটি?

ক $\frac{1}{\sqrt{13}}$　　খ $\frac{2}{\sqrt{13}}$

গ $\frac{11}{2\sqrt{13}}$　　ঘ $\frac{25}{2\sqrt{13}}$

| উত্তরপত্র | ১ | ঘ | ২ | ঘ | ৩ | ঘ | ৪ | ঘ | ৫ | ঘ | ৬ | ঘ | ৭ | ঘ | ৮ | ঘ | ৯ | খ | ১০ | খ | ১১ | গ | ১২ | খ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ১৩ | ক | ১৪ | ঘ | ১৫ | খ | ১৬ | ক | ১৭ | খ | ১৮ | ঘ | ১৯ | ক | ২০ | গ | ২১ | গ | ২২ | খ | ২৩ | ঘ | ২৪ | গ | ২৫ | গ |

ADMISSION STUFFS

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs

০৪

# বৃত্ত
# Circle

## Board Questions Analysis

সৃজনশীল প্রশ্ন

| বোর্ড / সাল | ঢাকা | ময়মনসিংহ | রাজশাহী | কুমিল্লা | যশোর | চট্টগ্রাম | বরিশাল | সিলেট | দিনাজপুর |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ২০২৩ | ১ | ১ | ১ | ১ | ২ | ১ | ২ | ১ | ১ |
| ২০২২ | ১ | ২ | ১ | ২ | ১ | ১ | ২ | ১ | ১ |

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

| বোর্ড / সাল | ঢাকা | ময়মনসিংহ | রাজশাহী | কুমিল্লা | যশোর | চট্টগ্রাম | বরিশাল | সিলেট | দিনাজপুর |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ২০২৩ | ৪ | ২ | ৪ | ৩ | ৪ | ৫ | ৫ | ৫ | ৪ |
| ২০২২ | ৪ | ৪ | ৩ | ৩ | ৪ | ৩ | ৫ | ৪ | ৫ |

## এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

❑ **বৃত্তের সমীকরণ, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় সংক্রান্ত:**

(i) $(0, 0)$ কেন্দ্র এবং $r$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = r^2$

(ii) $(h, k)$ কেন্দ্র এবং $r$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

(iii) $(h, k)$ কেন্দ্র এবং $(\alpha, \beta)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = (\alpha - h)^2 + (\beta - k)^2$

(iv) $(x_1, y_1)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করলে ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের কোটি| = $|y_1|$

(v) $(x_1, y_1)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত y-অক্ষকে স্পর্শ করলে ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের ভুজ| = $|x_1|$

❑ **বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় এবং অক্ষ থেকে কর্তিত অংশের পরিমাণ ও অক্ষকে স্পর্শকারী ও নির্দিষ্ট বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত:**

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

এখানে, কেন্দ্র $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ = $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

- বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষ থেকে কর্তিত অংশের পরিমাণ = $2\sqrt{g^2 - c}$
- বৃত্ত দ্বারা y-অক্ষ থেকে কর্তিত অংশের পরিমাণ = $2\sqrt{f^2 - c}$
- যদি বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে, তাহলে $g^2 = c$
- যদি বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে, তাহলে $f^2 = c$
- যদি বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে, তাহলে $g^2 = f^2 = c$
- বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী হলে, $c = 0$
- কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে, $f = 0$
- কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে, $g = 0$

❑ **বৃত্তের সাপেক্ষে বিন্দুর অবস্থান:**

(i) $(x_1, y_1)$ বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে অবস্থান করলে, $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c > 0$

(ii) $(x_1, y_1)$ বিন্দুটি বৃত্তের উপরের অবস্থান করলে, $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$

(iii) $(x_1, y_1)$ বিন্দুটি বৃত্তের ভিতরে অবস্থান করলে, $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c < 0$

❑ **দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করার শর্ত সংক্রান্ত:**

(i) যদি $C_1$ এবং $C_2$ কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে $r_1$ এবং $r_1$ হয় তবে বৃত্ত দুটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করবে যদি, $C_1C_2 = r_1 \sim r_2$ হয়। যেখানে, $C_1C_2$ হলো কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব।

(ii) বৃত্ত দুটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করবে যদি $C_1C_2 = r_1 + r_2$ হয়।

(iii) বৃত্ত দুটি পরস্পরকে ছেদ করবে যদি, $r_1 \sim r_2 < C_1C_2 < r_1 + r_2$ হয়।

(iv) বৃত্ত দুটি পরস্পরকে ছেদ বা স্পর্শ করবে না যদি, $C_1C_2 > r_1 + r_2$ অথবা $C_1C_2 < r_1 \sim r_2$ হয়।

❑ **দুইটি বিন্দুর সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়:**

$(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ: $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



❑ **নির্দিষ্ট বিন্দু, বৃত্ত ও রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত:**

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্ত এবং $ax + by + c_1 = 0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c) + k(ax + by + c_1) = 0$

যেখানে, k একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক; $k \neq 0$

❑ **বৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত:**

(i) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের উপরিস্থিত $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ: $xx_1 + yy_1 = a^2$

(ii) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপরিস্থিত $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ:

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

(iii) $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$x_1y - y_1x = 0$

(iv) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $(y_1 + f)x - (x_1 + g)y + gy_1 - fx_1 = 0$

❑ **স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় সংক্রান্ত:**

(i) বহিঃস্থ $(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - a^2}$

(ii) বহিঃস্থ $(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$

❑ **জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত:**

(i) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দু $(x_1, y_1)$ হলে, ঐ জ্যা এর সমীকরণ: $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$

(ii) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দু $(x_1, y_1)$ হলে, ঐ জ্যা এর সমীকরণ:

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

❑ **স্পর্শ জ্যা এর সমীকরণ সংক্রান্ত:**

(i) $(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শ জ্যা এর সমীকরণ, $xx_1 + yy_1 = a^2$

(ii) $(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শ জ্যা এর সমীকরণ,

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

❑ **দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত:**

$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ এবং

$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$

বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ,

$2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + c_1 - c_2 = 0$

## HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

**প্রশ্ন ▶ ১** $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ বৃত্তের একটি স্পর্শক $3x + 4y - 9 = 0$

(ক) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ 5 একক হলে, বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩]

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত বৃত্তে এরূপ দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উদ্দীপকের স্পর্শকের উপর লম্ব। [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩, ১৯; ঢা. বো. ১৯]

(গ) (4, – 3) বিন্দু থেকে উদ্দীপকের বৃত্তটির উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য এবং সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩ অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** একটি বৃত্তের কেন্দ্রের পোলার স্থানাঙ্ক $(r, \theta) \equiv \left(6, \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ বৃত্তটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(x, y) \equiv (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\equiv \left(6\cos\frac{\pi}{4}, 6\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\equiv (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

এখন, $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ কেন্দ্র এবং 5 একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 3\sqrt{2})^2 + (y - 3\sqrt{2})^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 + y^2 - 6\sqrt{2}y + 18 = 25$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 36 - 25 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 11 = 0$ **(Ans.)**

**খ** এখানে বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ ..... (i)

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f) \equiv (1, -1)$

এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 - (-2)}$

$= 2$ একক

বৃত্তটির একটি স্পর্শক, $3x + 4y - 9 = 0$

ধরি, স্পর্শকের লম্ব রেখার সমীকরণ,

$4x - 3y + k = 0$ ..... (ii)

(ii) নং রেখা (i) নং বৃত্তের স্পর্শক হলে কেন্দ্র হতে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\frac{|4 \times 1 - 3 \times (-1) + k|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2$

$\Rightarrow \frac{|k + 7|}{5} = 2$

$\Rightarrow |k + 7| = 5 \times 2$

$\therefore k + 7 = \pm 10$

হয়, $k + 7 = 10$ অথবা, $k + 7 = -10$

$\Rightarrow k = 3$ $\Rightarrow k = -17$

k এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$k = 3$ হলে, সমীকরণ: $4x - 3y + 3 = 0$ **(Ans.)**

$k = -17$ হলে, সমীকরণ: $4x - 3y - 17 = 0$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** এখানে, বৃত্তের সমীকরণ,
$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$
'খ' হতে প্রাপ্ত, বৃত্তটির কেন্দ্র $(1, -1)$ এবং ব্যাসার্ধ = 2 একক
$(4, -3)$ বিন্দুগামী এবং m ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ,
$(y + 3) = m(x - 4)$
$\Rightarrow y + 3 = mx - 4m$
$\Rightarrow mx - y - 4m - 3 = 0$ ..... (i)
(i) নং রেখা বৃত্তের স্পর্শক হলে কেন্দ্র $(1, -1)$ হতে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\left|\frac{m + 1 - 4m - 3}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}\right| = 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-3m - 2}{\sqrt{m^2 + 1}}\right)^2 = 4 \quad \text{[বর্গ করে]}$$

$$\Rightarrow \frac{9m^2 + 12m + 4}{m^2 + 1} = 4$$

$$\Rightarrow 9m^2 + 12m + 4 = 4m^2 + 4$$

$$\Rightarrow 5m^2 + 12m = 0$$

$$\Rightarrow 5m\left(m + \frac{12}{5}\right) = 0$$

$$\Rightarrow m\left(m + \frac{12}{5}\right) = 0$$

হয়, $m = 0$ অথবা, $m + \frac{12}{5} = 0$

$$\therefore m = -\frac{12}{5}$$

m এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$m = 0$ হলে, স্পর্শকের সমীকরণ: $y + 3 = 0$ **(Ans.)**

$m = -\frac{12}{5}$ হলে, স্পর্শকের সমীকরণ:

$$-\frac{12}{5}x - y - 4\left(-\frac{12}{5}\right) - 3 = 0$$

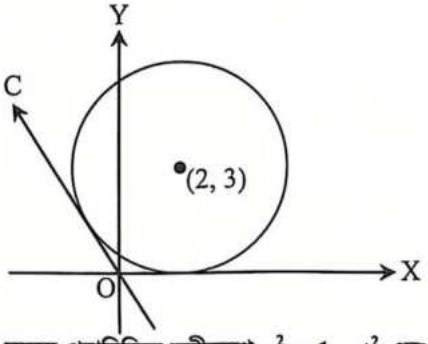
$$\Rightarrow -\frac{12}{5}x - y + \frac{48}{5} - 3 = 0$$

$\therefore 12x + 5y - 33 = 0$ **(Ans.)**

এখন, $(4, -3)$ বিন্দু থেকে প্রদত্ত বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য,
$= \sqrt{4^2 + (-3)^2 - 2 \times 4 + 2(-3) - 2}$
$= 3$ একক **(Ans.)**

**Note:** স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের জন্য অবশ্যই বৃত্তের সমীকরণকে আদর্শ আকার $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এ নিতে হবে।

**প্রশ্ন ▶ ২**




(ক) একটি বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ $x^2 = 1 - t^2$ এবং $y = t + 3$ হলে, বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ কত? [ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩]

(খ) এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র X অক্ষের উপর অবস্থিত এবং উদ্দীপকে উল্লিখিত বৃত্তটির কেন্দ্র ও মূলবিন্দু দিয়ে যায়। [ঢা. বো. ২৩]

(গ) OC স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২; য. বো. ২২; চ. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ, $x^2 = 1 - t^2$ ..... (i)
এবং $y = t + 3$
$\Rightarrow t = y - 3$ ..... (ii)
(ii) নং হতে t এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,
$x^2 = 1 - (y - 3)^2$
$\Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 1$ ..... (iii)
$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $(0, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ = 1 একক **(Ans.)**

**খ** ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ,
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)
বৃত্তের কেন্দ্র x অক্ষের উপর হলে কেন্দ্রের কোটি শূন্য।
$\therefore -f = 0 \Rightarrow f = 0$
আবার, বৃত্তটি $(0, 0)$ বিন্দুগামী হলে, $c = 0$
$(2, 3)$ বিন্দুগামী হলে,
$2^2 + 3^2 + 2.g.2 + 2.f.3 + c = 0$

$$\therefore g = -\frac{13}{4} \quad [f = 0; c = 0]$$

(i) নং এ g, f, c এর মান বসিয়ে নির্ণেয় বৃত্তটির সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{13}{4}\right)x + 0 + 0 = 0$$

$\therefore 2x^2 + 2y^2 - 13x = 0$ **(Ans.)**

**গ** এখানে, বৃত্তটির কেন্দ্র $(2, 3)$ এবং বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে।
$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের কোটি| = |3| = 3 একক
$(0, 0)$ বিন্দুগামী OC রেখার ঢাল m হলে সমীকরণ,
$y = mx$
$\Rightarrow mx - y = 0$ ..... (i)
OC রেখা স্পর্শক হলে কেন্দ্র $(2, 3)$ থেকে লম্ব দূরত্ব হবে বৃত্তটির ব্যাসার্ধের সমান।

$$\therefore \left|\frac{(2m - 3)}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}\right| = 3$$

$$\Rightarrow |2m - 3| = 3\sqrt{1 + m^2}$$

$$\Rightarrow (2m - 3)^2 = 9(1 + m^2)$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 12m + 9 = 9 + 9m^2$$

$$\Rightarrow 5m^2 + 12m = 0$$

$$\Rightarrow m(5m + 12) = 0$$

হয়, $m = 0$ অথবা, $5m + 12 = 0$

$$\therefore m = -\frac{12}{5}$$

কিন্তু, $m = 0$, x অক্ষের ঢাল।

$$\therefore \text{OC রেখার ঢাল } m = -\frac{12}{5}$$

m এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$-\frac{12}{5}x - y = 0$$

$$\Rightarrow -12x - 5y = 0$$

$\therefore 12x + 5y = 0$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ৩** দৃশ্যকল্প-১: $x = 0$, $y = 0$ এবং $x = 10$ তিনটি সরলরেখার সমীকরণ।

দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 - 12x + 16y - 69 = 0$

এবং $x^2 + y^2 - 9x + 12y - 59 = 0$ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ।

(ক) $r - 2\cos\theta + 4\sin\theta = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় কর। [সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩; য. বো. ২৩; দি. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সরলরেখা তিনটিকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২; দি. বো. ১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩; দি. বো. ২৩, ২২]

সমাধান:

**ক** কার্তেসীয় স্থানাংক $(x, y)$ এবং পোলার স্থানাংক $(r, \theta)$ হলে,

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ এবং $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

এখানে, $r - 2\cos\theta + 4\sin\theta = 0$

$\Rightarrow r^2 - 2r\cos\theta + 4r\sin\theta = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ ..... (i)

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f) \equiv (1, -2)$ **(Ans.)**

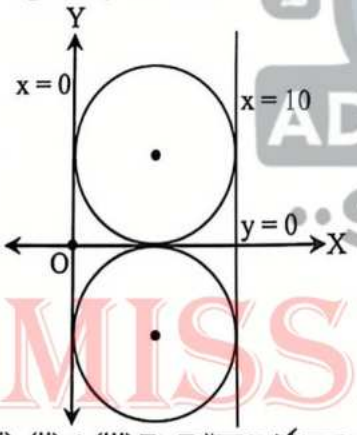
**খ** প্রদত্ত রেখা তিনটি, $x = 0$ ..... (i)

$y = 0$ ..... (ii)

$x = 10$ ..... (iii)

ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (iv)




(iv) নং বৃত্তটি (i), (ii) ও (iii) নং রেখাকে স্পর্শ করে।

$\therefore y^2 + 2fy + c = 0$ ..... (v)

$x^2 + 2gx + c = 0$ ..... (vi)

এবং $10^2 + y^2 + 2g.10 + 2fy + c = 0$

$\Rightarrow 100 + y^2 + 20g + 2fy + c = 0$ ..... (vii)

(vii) – (v) করে, $100 + 20g = 0$

$\therefore g = -5$

আবার, বৃত্তটি $y = 0$ বা x অক্ষকে স্পর্শ করলে,

$g^2 = c$

$\Rightarrow (-5)^2 = c$

$\therefore c = 25$

বৃত্তটি $x = 0$ বা y অক্ষকে স্পর্শ করলে,

$f^2 = c$

$\Rightarrow f^2 = 25$

$\therefore f = \pm 5$

এখন, g, f এবং c এর মান (iv) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 + 2.(-5).x + 2.(\pm 5).y + 25 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 10x \pm 10y + 25 = 0$ **(Ans.)**

**গ** প্রদত্ত বৃত্তদ্বয়, $x^2 + y^2 - 12x + 16y - 69 = 0$ ..... (i)

এবং $x^2 + y^2 - 9x + 12y - 59 = 0$ ..... (ii)

বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 12x + 16y - 69 - (x^2 + y^2 - 9x + 12y - 59) = 0$

$\Rightarrow -3x + 4y - 10 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{3x + 10}{4}$ ..... (iii)

y এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে,

$x^2 + \left(\frac{3x + 10}{4}\right)^2 - 9x + 12\left(\frac{3x + 10}{4}\right) - 59 = 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{9x^2 + 60x + 100}{16} - 9x + 9x + 30 - 59 = 0$

$\Rightarrow 16x^2 + 9x^2 + 60x + 100 - 144x + 144x + 480 - 944 = 0$

$\Rightarrow 25x^2 + 60x - 364 = 0$

$\therefore x = -\frac{26}{5}, \frac{14}{5}$ [Using Calculator]

(iii) নং হতে,

$x = -\frac{26}{5}$ হলে, $y = \frac{3 \times \left(\frac{-26}{5}\right) + 10}{4} = -\frac{7}{5}$

$x = \frac{14}{5}$ হলে, $y = \frac{3 \times \frac{14}{5} + 10}{4} = \frac{23}{5}$

$\therefore$ ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় $\left(-\frac{26}{5}, -\frac{7}{5}\right)$ এবং $\left(\frac{14}{5}, \frac{23}{5}\right)$

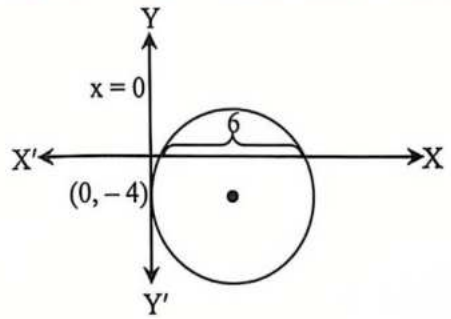
বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$\left(x + \frac{26}{5}\right)\left(x - \frac{14}{5}\right) + \left(y + \frac{7}{5}\right)\left(y - \frac{23}{5}\right) = 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{12}{5}x + y^2 - \frac{16}{5}y - 21 = 0$

$\therefore 5x^2 + 5y^2 + 12x - 16y - 105 = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৪** উদ্দীপক-১:




উদ্দীপক-২:

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25$

$g(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 6y - 31$

(ক) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 1 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২৩]

(খ) উদ্দীপক-১ এর বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২]

(গ) দেখাও যে, $f(x, y) = 0$ ও $g(x, y) = 0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢ. বো. ২৩]

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



সমাধানঃ

**ক** এখানে, $3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{1}{3} = 0$

$\therefore g = -1$ এবং $f = -2$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f) \equiv (1, 2)$ **(Ans.)**

এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 - \frac{1}{3}}$

$= \sqrt{\frac{14}{3}}$ একক **(Ans.)**

**খ** ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)

বৃত্তটি y অক্ষকে $(0, -4)$ বিন্দুতে স্পর্শ করলে কেন্দ্রের কোটি হবে স্পর্শবিন্দুর কোটি।

$\therefore -f = (-4) \Rightarrow f = 4$

আবার, বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে বলে,

$c = f^2 = 4^2 = 16 \quad \therefore c = 16$

এখানে, x অক্ষ হতে কর্তিত অংশের দৈর্ঘ্য 6 একক।

$\therefore 2\sqrt{g^2 - c} = 6$

$\Rightarrow \sqrt{g^2 - 16} = 3$

$\therefore g = \pm 5$

এখানে, $g = -5$ হবে কারণ কেন্দ্র চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।

এখন, (i) নং সমীকরণে g, f এবং c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 10x + 8y + 16 = 0$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $f(x, y) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$

$[g = -5, f = 3, c = 25]$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র $(5, -3)$

এবং ব্যাসার্ধ, $r_1 = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{(-5)^2 + (3)^2 - 25}$

$= 3$ একক

আবার, $g(x, y) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 6y - 31 = 0$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র $(-3, 3)$

এবং ব্যাসার্ধ, $r_2 = \sqrt{9 + 9 + 31} = 7$ একক

$\therefore$ বৃত্ত দুটির কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $= \sqrt{(5+3)^2 + (-3-3)^2}$

$= 10$ একক

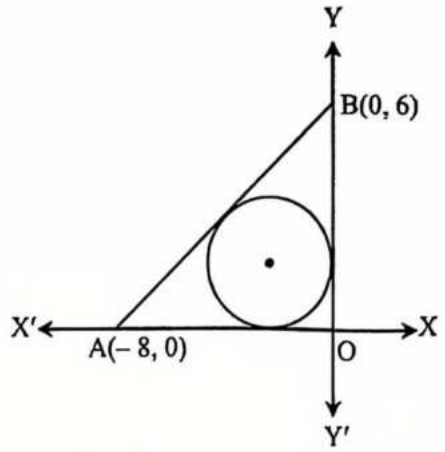
এবং ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফল $= 3 + 7 = 10$ একক

$\therefore$ কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব = ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফল

$\therefore f(x, y)$ ও $g(x, y)$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

**(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ৫**




(ক) $(2, 2)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২]

(খ) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা y অক্ষকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং x অক্ষ হতে AB এর সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা কর্তন করে। [সি. বো. ২৩]

(গ) উদ্দীপকের বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২৩]

সমাধানঃ

**ক** $(2, 2)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2^2 + 2^2 + 4 \times 2 - 2 \times 2 + 4} = 4$ একক **(Ans.)**

**খ** ধরি, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

y অক্ষকে $B(0, 6)$ বিন্দুতে স্পর্শ করলে স্পর্শবিন্দুর কোটি হবে কেন্দ্রের কোটি।

$\therefore -f = 6 \Rightarrow f = -6$

এবং $c = f^2 = (-6)^2 = 36$ [$\because$ বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে]

এখানে, $A(-8, 0)$ এবং $B(0, 6)$

$\therefore AB = \sqrt{(-8-0)^2 + (0-6)^2}$

$\Rightarrow 2\sqrt{g^2 - c} = \sqrt{64 + 36}$

$\Rightarrow 2\sqrt{g^2 - 36} = 10$

$\Rightarrow g^2 - 36 = 25$

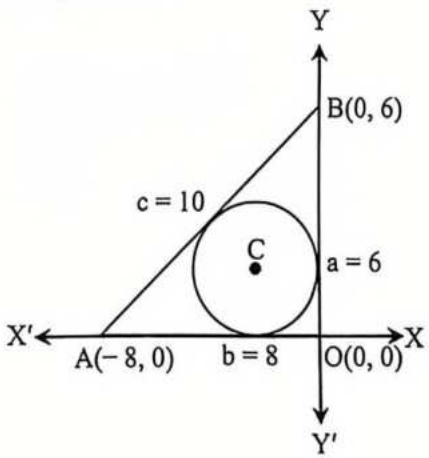
$\therefore g = \pm\sqrt{61}$

এখন, (i) নং এ g, f এবং c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{61}x - 12y + 36 = 0$ **(Ans.)**

**গ** ধরি, বৃত্তটির কেন্দ্র C

বৃত্তটি $\Delta OAB$ এর একটি অন্তঃবৃত্ত। সুতরাং ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রই হবে বৃত্তটির কেন্দ্র।




Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



এখানে,
$OB = a = 6$; $OA = b = 8$; $AB = c = 10$
$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষত্রয়ের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c হলে, ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র,

$$I \equiv \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}\right)$$

এখানে, $\Delta AOB$ এর অন্তঃকেন্দ্র,

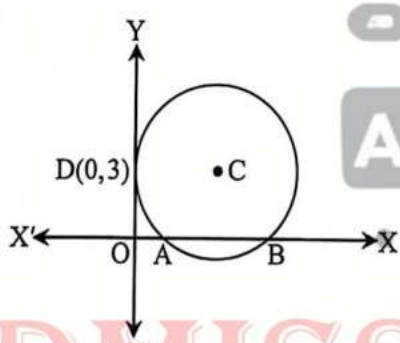
$$C \equiv \left(\frac{6\times(-8) + 8\times 0 + 10\times 0}{6+8+10}, \frac{6\times 0 + 8\times 6 + 10\times 0}{6+8+10}\right)$$

$$\equiv \left(\frac{-48}{24}, \frac{48}{24}\right)$$

$$\equiv (-2, 2)$$

অন্তঃবৃত্তটি x ও y উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে,
$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের ভুজ|
= |কেন্দ্রের কোটি|
= |– 2|
= 2 একক
$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ: $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$
$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 4$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৬**




**(ক)** ব্যাসার্ধ 3 একক এবং $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ বৃত্তের সাথে সমকেন্দ্রিক এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩]

**(খ)** A ও B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 0) ও (9, 0) হলে, C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২৩]

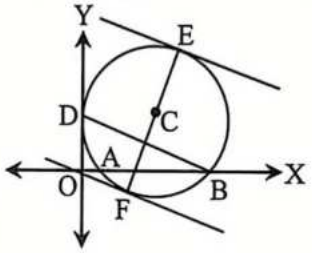
**(গ)** BD এর সমান্তরাল রেখা উদ্দীপকের বৃত্তকে যে বিন্দুতে স্পর্শ করে তা নির্ণয় কর। [ব. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** প্রদত্ত বৃত্ত, $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$
$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f) \equiv (2, 3)$
এখন,(2, 3) কেন্দ্র এবং 3 একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,
$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9$
$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ **(Ans.)**

**খ** ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)
বৃত্তটি y অক্ষকে (0, 3) বিন্দুতে স্পর্শ করলে কেন্দ্রের কোটি হবে স্পর্শবিন্দুর কোটি।
$\therefore -f = 3$
$\Rightarrow f = -3$
আবার, $c = f^2 = 9$ [$\because$ y অক্ষকে স্পর্শ করে]
এখন, x অক্ষের খন্ডিতাংশ = AB
$\Rightarrow 2\sqrt{g^2 - c} = \sqrt{(1-9)^2 + (0-0)^2} = 8$
$\Rightarrow \sqrt{g^2 - 9} = 4$
$\Rightarrow g^2 - 9 = 16$
$\Rightarrow g = \pm 5$
এখানে, $g = -5$ কারণ বৃত্তটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত।
g, f এবং c এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$x^2 + y^2 + 2(-5)x + 2(-3)y + 9 = 0$
$\therefore x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$ **(Ans.)**

**গ** এখানে, B(9, 0) এবং D(0, 3)
'খ' থেকে পাই,
বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$ ..... (i)
$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র (5, 3) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{25 + 9 - 9}$
$= 5$ একক
এখন, BD রেখার সমীকরণ, $\frac{y-0}{x-9} = \frac{0-3}{9-0}$
$\therefore x + 3y = 9$
ধরি, BD এর সমান্তরাল রেখা বৃত্তটিকে E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করে।




EF $\perp$ BD এবং EF, C(5, 3) বিন্দুগামী।
$\therefore$ EF রেখার সমীকরণ হবে $3x - y + k = 0$ ..... (ii)
(ii) নং রেখাটি (5, 3) বিন্দুগামী,
$\therefore 3\times 5 - 3 + k = 0$
$\Rightarrow 15 - 3 + k = 0$
$\Rightarrow 12 + k = 0$
$\therefore k = -12$
k এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$3x - y - 12 = 0$
$\therefore y = 3x - 12$ ..... (iii)
এখন, (i) ও (iii) নং হতে পাই,
$x^2 + (3x-12)^2 - 10x - 6(3x-12) + 9 = 0$
$\Rightarrow x^2 + 9x^2 - 72x + 144 - 10x - 18x + 72 + 9 = 0$
$\Rightarrow 10x^2 - 100x + 225 = 0$
$\Rightarrow 2x^2 - 20x + 45 = 0$
$\therefore x = \frac{10 \pm \sqrt{10}}{2}$ [Using Calculator]

(iii) নং হতে, $y = 3\times\frac{10+\sqrt{10}}{2} - 12$
$= \frac{30 + 3\sqrt{10}}{2} - 12$
$= \frac{30 + 3\sqrt{10} - 24}{2}$
$= \frac{6 + 3\sqrt{10}}{2}$

Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



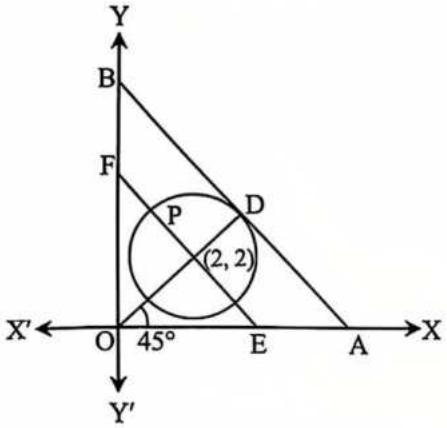
এবং $x = \frac{10-\sqrt{10}}{2}$ হলে, $y = 3 \times \frac{10-\sqrt{10}}{2} - 12$

$= \frac{30-3\sqrt{10}-24}{2} = \frac{6-3\sqrt{10}}{2}$

∴ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $\left(\frac{10+\sqrt{10}}{2}, \frac{6+3\sqrt{10}}{2}\right)$

এবং $\left(\frac{10-\sqrt{10}}{2}, \frac{6-3\sqrt{10}}{2}\right)$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৭**




**(ক)** $r = b\sin 2\theta$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে রূপান্তর কর। [ব. বো. ২২]

**(খ)** যদি P বিন্দুটি EF রেখাংশের একটি সমত্রিখণ্ডক হয়, তবে OP রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো.; য. বো.; সি. বো.; দি. বো. ১৮]

**(গ)** যদি $OD = 3\sqrt{2}$ হয়, তবে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো.; য. বো.; সি. বো.; দি. বো. ১৮]

**সমাধান:**

**ক** কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) এবং পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হলে,

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ এবং $r = \sqrt{x^2+y^2}$

দেওয়া আছে,

$r = b\sin 2\theta$

$\Rightarrow r = 2b\sin\theta.\cos\theta$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2b \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{x}{r}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{2bxy}{r^2}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{2bxy}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 2bxy$

$\Rightarrow (x^2+y^2)^2 . (x^2+y^2) = 4b^2x^2y^2$ [বর্গ করে]

$\therefore (x^2+y^2)^3 = 4b^2x^2y^2$ **(Ans.)**

**খ** চিত্রে, মূলবিন্দু O(0, 0) এবং ধরি, C(2, 2)

$\therefore OC = \sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{2}$ একক

যেহেতু, মূলবিন্দু হতে EF সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{2}$ একক এবং লম্বটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে।

∴ EF সরলরেখার সমীকরণ: $x\cos 45° + y\sin 45° = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x + y = 4$

$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$; এটি x অক্ষকে E(4, 0) এবং y অক্ষকে F(0, 4) বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু, P বিন্দুটি EF রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয়ের একটি বিন্দু। ধরি, P বিন্দুটি EF রেখাংশকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

∴ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{2\times 0+1\times 4}{2+1}, \frac{2\times 4+1\times 0}{2+1}\right) \equiv \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

∴ OP সরলরেখার সমীকরণ: $y = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}}x \Rightarrow 2x - y = 0$ **(Ans.)**

আবার, ধরি, P বিন্দুটি EF রেখাংশকে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

∴ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{1\times 0+2\times 4}{1+2}, \frac{1\times 4+2\times 0}{1+2}\right) \equiv \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$

∴ OP সরলরেখার সমীকরণ: $y = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}}x$

∴ $x - 2y = 0$ **(Ans.)**

**গ** চিত্রে, নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র C(2, 2)

এখানে, $OD = 3\sqrt{2}$ একক

∴ $OC = \sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{2}$ একক

∴ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $CD = OD - OC$

$= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$ একক

∴ বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 2$

∴ $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৮** P(1, 2), Q(2, 3) দুইটি বিন্দু এবং $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 1 = 0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

**(ক)** $2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$ বৃত্তটি দ্বারা y অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

**(খ)** P কেন্দ্রবিশিষ্ট এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়। [ম. বো. ২৩]

**(গ)** P ও Q বিন্দুগামী এবং y অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ম. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 3y + \frac{1}{2} = 0$

এখানে, $g = 1$, $f = \frac{3}{2}$ এবং $c = \frac{1}{2}$

∴ বৃত্তটির কেন্দ্র $\equiv (-g, -f) \equiv \left(-1, -\frac{3}{2}\right)$

∴ বৃত্তটি দ্বারা y অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{f^2 - c}$

$= 2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}}$

$= \sqrt{7}$ একক **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** প্রদত্ত বৃত্ত, $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 1 = 0$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f) \equiv (3, 2)$

দেওয়া আছে, নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র P(1, 2) এবং বৃত্তটি (3, 2) বিন্দুগামী।

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(1-3)^2 + (2-2)^2} = 2$ একক

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4$

$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ **(Ans.)**

**গ** ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)

(i) নং বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে। $\therefore f^2 = c$ ..... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + f^2 = 0$ ..... (iii)

আবার, (i) নং বৃত্তটি P(1, 2) ও (2, 3) বিন্দুগামী,

$\therefore 1^2 + 2^2 + 2g.1 + 2f.2 + f^2 = 0$

$\Rightarrow 5 + 2g + 4f + f^2 = 0$ ..... (iv)

এবং $2^2 + 3^2 + 2g.2 + 2f.3 + f^2 = 0$

$\therefore 13 + 4g + 6f + f^2 = 0$ ..... (v)

(v) – (iv) করে, $8 + 2g + 2f = 0$

$\Rightarrow g = -f - 4$ ..... (vi)

এখন, (iv) ও (vi) নং হতে পাই,

$5 + 2(-f - 4) + 4f + f^2 = 0$

$\Rightarrow 5 - 2f - 8 + 4f + f^2 = 0$

$\Rightarrow f^2 + 2f - 3 = 0$

$\therefore f = 1, -3$

f এর মান (vi) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$f = 1$ হলে, $g = -1 - 4 = -5$

এবং $c = f^2 = 1^2 = 1$

$\therefore$ সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 1 = 0$ **(Ans.)**

$f = -3$ হলে, $g = 3 - 4 = -1$

এবং $c = f^2 = (-3)^2 = 9$

$\therefore$ সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৯** দৃশ্যকল্প-১: $f(x, y) = 3x - 4y - 5$

এবং $g(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9$

দৃশ্যকল্প-২: (5, 3) ও (– 5, 7) বিন্দুদ্বয় একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু।

(ক) $g(x, y) = 0$ বৃত্ত দ্বারা y অক্ষের খণ্ডিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৯]

(খ) দেখাও যে, দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত $f(x, y) = 0$ রেখাটি $g(x, y) = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। [ঢা. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুযায়ী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। নির্ণেয় বৃত্ত ও $f(x, y) = 0$ রেখার ছেদবিন্দু ও মূলবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণও নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ১৯]

সমাধান:

**ক** প্রদত্ত বৃত্ত, $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$

এখানে, $g = -3$, $f = 4$ এবং $c = 9$

$\therefore$ বৃত্তের y অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ $= 2\sqrt{f^2 - c}$

$= 2\sqrt{4^2 - 9}$ একক

$= 2\sqrt{7}$ একক **(Ans.)**

**খ** প্রদত্ত বৃত্ত, $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$ .... (i)

এখানে, $g = -3$, $f = 4$ এবং $c = 9$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f) \equiv (3, -4)$

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(-3)^2 + 4^2 - 9} = 4$ একক

প্রদত্ত রেখা, $3x - 4y - 5 = 0$ ..... (ii)

এখন, (ii) নং রেখাটি (i) নং বৃত্তের স্পর্শক হবে যদি কেন্দ্র (3, – 4) হতে (ii) নং রেখার এর লম্ব দূরত্ব বৃত্তটির ব্যাসার্ধের সমান হয়।

এখন, কেন্দ্র (3, – 4) হতে (ii) নং রেখার দূরত্ব,

$$d = \left| \frac{3 \times 3 - 4 \times (-4) - 5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right|$$

$$= \frac{20}{5} = 4 \text{ একক} = \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}$$

$\therefore f(x, y) = 0$ রেখাটি, $g(x, y) = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক।

**(Showed)**

**গ** দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় (5, 3) ও (– 5, 7)

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 5)(x + 5) + (y - 3)(y - 7) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5^2 + y^2 - 7y - 3y + 21 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10y - 4 = 0$ .... (i) **(Ans.)**

দেওয়া আছে, $f(x, y) = 0$

$\Rightarrow 3x - 4y - 5 = 0$ ..... (ii)

এখন, (i) নং বৃত্ত ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 10y - 4 + k(3x - 4y - 5) = 0$ .... (iii)

(iii) নং বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী হলে,

$0^2 + 0^2 - 10 \times 0 - 4 + k(3 \times 0 - 4 \times 0 - 5) = 0$

$\therefore k = -\frac{4}{5}$

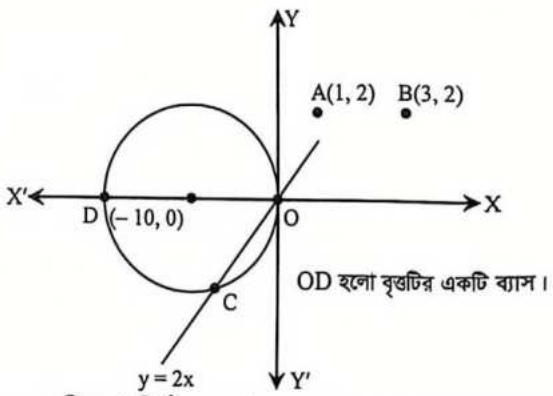
k এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 10y - 4 - \frac{4}{5}(3x - 4y - 5) = 0$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 50y - 20 - 12x + 16y + 20 = 0$

$\therefore 5x^2 + 5y^2 - 12x - 34y = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১০**




(ক) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (1, 3) এবং x অক্ষকে স্পর্শ করে। [য. বো. ২২]

(খ) OC জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২]

(গ) A এবং B বিন্দুগামী বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করলে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২]

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধান:**

**ক** এখানে, (1, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের কোটি| = 3 একক

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 9$

$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$ **(Ans.)**

**খ** এখানে, OD বৃত্তের ব্যাস।

$\therefore$ OD = |– 10| একক = 10 একক

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ, $r = \frac{10}{2}$ একক = 5 একক

O(0, 0) এবং D(– 10, 0) বিন্দুর সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুই হবে বৃত্তটির কেন্দ্র।

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $\left(\frac{-10+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) \equiv (-5, 0)$

এখন, (– 5, 0) কেন্দ্র এবং 5 একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট OCD বৃত্তের সমীকরণ,

$(x+5)^2 + (y-0)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 = 25$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10x = 0$ ..... (i)

OC জ্যা এর সমীকরণ, $y = 2x$

$\Rightarrow y - 2x = 0$ ..... (ii)

(i) নং বৃত্ত ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 10x + k(y - 2x) = 0$ ..... (iii)

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (10 - 2k)x + ky = 0$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f) \equiv \left(-5 + k, -\frac{k}{2}\right)$

(ii) নং রেখা বৃত্তের ব্যাস হলে, কেন্দ্র (ii) নং রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore -\frac{k}{2} - 2(-5 + k) = 0$

$\Rightarrow -\frac{k}{2} + 10 - 2k = 0$

$\Rightarrow 5k = 20$

$\therefore k = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + (10 - 8)x + 4y = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$ **(Ans.)**

**গ** ধরি, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)

বৃত্তটি A(1, 2) এবং B(3, 2) বিন্দুগামী,

$\therefore 1 + 4 + 2g + 4f + c = 0$

$\Rightarrow 5 + 2g + 4f + c = 0$ ..... (ii)

এবং $9 + 4 + 6g + 4f + c = 0$

$\Rightarrow 13 + 6g + 4f + c = 0$ .... (iii)

(ii) – (iii) করে, $-8 - 4g = 0$

$\therefore g = -2$

বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করলে, $g^2 = c$

$\therefore c = 4$

(ii) নং এ g ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$5 + 2(-2) + 4f + 4 = 0$

$\Rightarrow 4f = -5$

$\therefore f = -\frac{5}{4}$

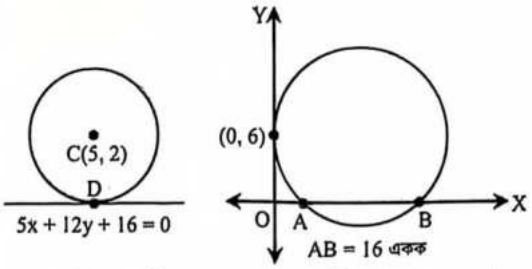
এখন, (i) নং সমীকরণে g, f এবং c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2\left(-\frac{5}{4}\right)y + 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - \frac{5}{2}y + 4 = 0$

$\therefore 2x^2 + 2y^2 - 8x - 5y + 8 = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ➤ ১১**




**(ক)** **(0, – 1)** এবং **(2, 3)** বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্ত দ্বারা x অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

**(খ)** **C** কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শবিন্দু **D** এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২]

**(গ)** **AB** জ্যা বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** (0, – 1) এবং (2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 0)(x - 2) + (y + 1)(y - 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 - 3y + y - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$

এখানে, $g = -1$, $f = -1$ এবং $c = -3$

$\therefore$ বৃত্তটি দ্বারা x অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{g^2 - c}$

$= 2\sqrt{(-1)^2 - (-3)}$

$= 4$ একক **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, কেন্দ্র C(5, 2)

স্পর্শবিন্দু হতে কেন্দ্রগামী রেখা স্পর্শকের উপর লম্ব।

D বিন্দুতে স্পর্শক, $5x + 12y + 16 = 0$ ..... (i)

$\therefore$ C(5, 2) বিন্দুগামী $5x + 12y + 16 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$12x - 5y = 12 \times 5 - 5 \times 2$

$\Rightarrow 12x - 5y - 50 = 0$ ..... (ii)

(i) নং ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুই হবে D বিন্দুর স্থানাঙ্ক।

এখন, (i) × 5 + (ii) × 12 করে,

$$\begin{array}{r} 25x + 60y + 80 = 0 \\ 144x - 60y - 600 = 0 \\ \hline 169x - 520 = 0 \end{array}$$

$\therefore x = \frac{520}{169} = \frac{40}{13}$

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$5 \times \frac{40}{13} + 12y + 16 = 0 \Rightarrow y = -\frac{34}{13}$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{40}{13}, -\frac{34}{13}\right)$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** ধরি, AB জ্যা বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)

বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করলে, $f^2 = c$

আবার, (i) নং বৃত্তটি (0, 6) বিন্দুগামী।

$\therefore 0^2 + 6^2 + 2.g.0 + 2.f.6 + c = 0$

$\Rightarrow 36 + 12f + f^2 = 0$ $[\because c = f^2]$

$\Rightarrow f = -6 \therefore c = 36$

দেওয়া আছে, x অক্ষের ছেদাংশ,

$2\sqrt{g^2 - c} = 16$

$\Rightarrow \sqrt{g^2 - c} = 8$

$\Rightarrow g^2 - c = 64$

$\Rightarrow g^2 - 36 = 64$ $[\because c = 36]$

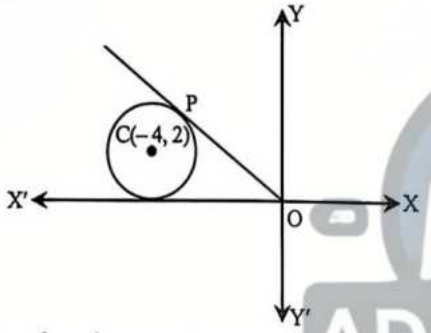
$\Rightarrow g = \pm 10$

$\therefore g = -10$ [∵ কেন্দ্র ১ম চতুর্ভাগে]

(i) নং সমীকরণে g, f এবং c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 20x - 12y + 36 = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১২** দৃশ্যকল্প-১:




দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 - 6x = 0$ ..... (i)

$x - 4 = 0$ ..... (ii)

(ক) (1, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত y অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর বৃত্তটির একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু (– 5, 3) বিন্দুতে অবস্থিত। [য. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (7, 0) এবং (i) নং বৃত্ত এবং (ii) নং রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। [দি. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** এখানে, (1, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত y অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ, = |কেন্দ্রের ভুজ| = 1 একক

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 1$

$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$ **(Ans.)**

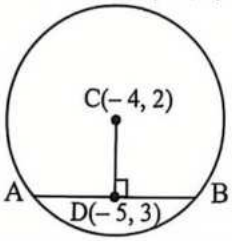
**খ** দেওয়া আছে, বৃত্তের কেন্দ্র C(– 4, 2)

ধরি, AB বৃত্তের জ্যা এবং AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু D(– 5, 3)

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ,

$\frac{y-2}{x+4} = \frac{2-3}{-4+5}$

$\Rightarrow x + y + 2 = 0$




কোনো বৃত্তের জ্যা এর মধ্যবিন্দু হতে কেন্দ্রগামী রেখা জ্যা এর উপর লম্ব।

$\therefore$ D(– 5, 3) বিন্দুগামী এবং CD রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ,

$x - y = -5 - 3$

$\Rightarrow x - y + 8 = 0$ **(Ans.)**

**গ** দৃশ্যকল্প-২: এ $x^2 + y^2 - 6x = 0$ ..... (i)

$x - 4 = 0$ ..... (ii)

(ii) নং হতে পাই, $x - 4 = 0 \therefore x = 4$

(i) নং এ $x = 4$ বসিয়ে পাই, $4^2 + y^2 - 6 \times 4 = 0$

$\Rightarrow y^2 = 8$

$\therefore y = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore$ (i) নং বৃত্ত ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুদ্বয় $(4, \pm 2\sqrt{2})$

দেওয়া আছে, কেন্দ্র (7, 0)

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(7-4)^2 + (0 - 2\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{17}$ একক

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ: $(x - 7)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{17})^2$

$\Rightarrow x^2 - 14x + 49 + y^2 - 17 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 14x + 32 = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৩** দৃশ্যকল্প-১: A(1, 1) বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত। রেখাত্রয়ের সমীকরণ $x = 0$, $y = 0$, $x = a$

দৃশ্যকল্প-২: তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক A(a, – 1), B(0, – 2) এবং C(– 2, – 4)।

(ক) যদি $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে তবে c এর মান নির্ণয় কর। [ম. বো. ২২]

(খ) দৃশকল্প-১ হতে, A বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। A বিন্দুগামী বৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণও নির্ণয় কর। [ম. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল 1 বর্গ একক হলে, C কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং A বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

**সমাধান:**

**ক** প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2(-3)y + c = 0$

এখানে, $g = -2$, $f = -3$

বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করলে, $g^2 = c$

$\therefore c = 4$ **(Ans.)**

**খ** প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$

এখানে, $g = 2$, $f = 3$ এবং $c = -12$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-2, -3)$

ধরি, A (1, 1) বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক B $(\alpha, \beta)$

$\therefore$ (1, 1) ও $(\alpha, \beta)$ বিন্দুর সংযোজক রেখার মধ্যবিন্দু হলো বৃত্তটির কেন্দ্র।

প্রশ্নমতে, $\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) \equiv (-2, -3)$

$\therefore \frac{\alpha+1}{2} = -2$ এবং $\frac{\beta+1}{2} = -3$

$\Rightarrow \alpha = -5$ $\Rightarrow \beta = -7$

$\therefore$ B $(-5, -7)$ **(Ans.)**

এখন, A(1, 1) বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.1 + y.1 + 2(x + 1) + 3(y + 1) - 12 = 0$

$\Rightarrow x + y + 2x + 2 + 3y + 3 - 12 = 0$

$\therefore 3x + 4y - 7 = 0$ **(Ans.)**

Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** দেওয়া আছে, A(a, – 1), B(0, – 2) এবং C(– 2, – 4)

ΔABC এর ক্ষেত্রফল = 1 বর্গ একক

$\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\Rightarrow a(-2+4)+(0+2)+(0-4)=2$

$\therefore a = 2$

$\therefore A(2, -1)$

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = AC এর দূরত্ব

$= \sqrt{(-2-2)^2+(-4+1)^2}$

$= 5$ একক

$\therefore$ C কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং A বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x+2)^2+(y+4)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2+8y+16 = 25$

$\therefore x^2+y^2+4x+8y-5=0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৪** $x^2+y^2-8x-6y+16=0$ ... ... ... (i)

$x^2+y^2=4$ ... ... ... (ii)

**(ক)** $r = 6\cos\theta + 4\sin\theta$ বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ১৭]

**(খ)** উদ্দীপকের বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৯]

**(গ)** উদ্দীপকের বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ তৈরি করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** বৃত্তের সমীকরণ, $r = 6\cos\theta + 4\sin\theta$

$\Rightarrow r^2 = 6r\cos\theta + 4r\sin\theta$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 6x+4y$

$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2-4y+4=13$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2 = (\sqrt{13})^2$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র (3, 2) এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{13}$ একক **(Ans.)**

**খ** প্রদত্ত বৃত্ত, $x^2+y^2-8x-6y+16=0$ ..... (i)

কেন্দ্র $C_1(4, 3)$; ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2-16} = 3$ একক

এবং $x^2+y^2=4$ ..... (ii)

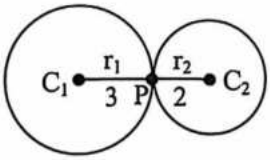
কেন্দ্র $C_2(0, 0)$; ব্যাসার্ধ $r_2 = 2$ একক

এখানে, কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}$

$= 5$

= ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফল

$\therefore$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করবে।




দুটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা স্পর্শবিন্দুতে ব্যাসার্ধের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

$\therefore C_1(4, 3)$ ও $C_2(0, 0)$ বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা স্পর্শবিন্দুতে 3 : 2 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

ধরি, স্পর্শবিন্দু $P(\alpha, \beta)$

$\therefore P(\alpha, \beta) \equiv \left(\frac{3\times0+2\times4}{3+2}, \frac{3\times0+2\times3}{3+2}\right) \equiv \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $x^2+y^2-8x-6y+16=0$ ..... (i)

এবং $x^2+y^2=4$ ..... (ii)

$\Rightarrow x^2+y^2-4=0$ ..... (iii)

$\therefore$ সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$x^2+y^2-8x-6y+16-(x^2+y^2-4)=0$

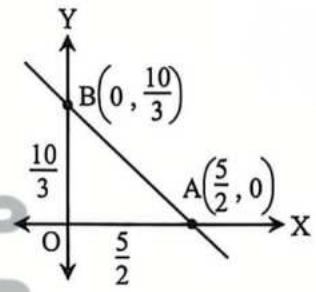
$\Rightarrow -8x-6y+20=0$

$\Rightarrow 8x+6y=20$

$\Rightarrow \frac{8x}{20}+\frac{6y}{20}=1$

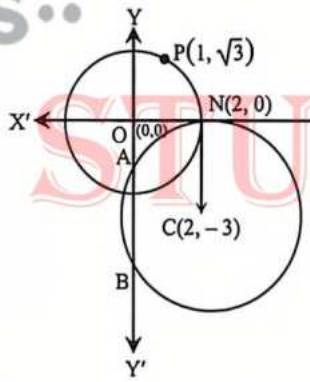
$\Rightarrow \frac{x}{\frac{20}{8}}+\frac{y}{\frac{20}{6}}=1$

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{5}{2}}+\frac{y}{\frac{10}{3}}=1$; যা বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যায়ের সমীকরণ।




$\therefore \Delta OAB$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{10}{3} = \frac{25}{6}$ বর্গ একক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৫**




**(ক)** $x^2+y^2-2x-3y-17=0$ বৃত্তের সাপেক্ষে (1, 2) বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় কর।

**(খ)** O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩]

**(গ)** A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** ধরি, $f(x) = x^2+y^2-2x-3y-17$

$\therefore f(1, 2) = 1^2+2^2-2\times1-3\times2-17$

$= -20 < 0$

$\therefore$ (1, 2) বিন্দুটি $x^2+y^2-2x-3y-17=0$ বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত। **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** O(0, 0) কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = 2 একক
[∵ বৃত্তটি N(2, 0) বিন্দুগামী]

∴ বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 = (2)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

$P(1, \sqrt{3})$ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.1 + y.\sqrt{3} = 4$

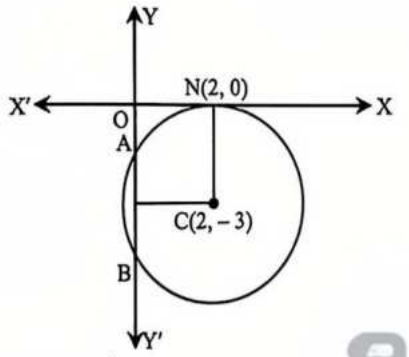
∴ $x + \sqrt{3}y = 4$ **(Ans.)**

∴ $P(1, \sqrt{3})$ বিন্দুগামী $x + \sqrt{3}y = 4$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$\sqrt{3}x - y = \sqrt{3} \times 1 - \sqrt{3}$

∴ $\sqrt{3}x - y = 0$ **(Ans.)**

**গ**




x অক্ষকে স্পর্শ করলে,

বৃত্তের ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের কোটি|

= |– 3|

= 3 একক

∴ বৃত্তটির সমীকরণ,

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 9$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ ..... (i)

আবার, (i) নং বৃত্তটি y অক্ষকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে।

∴ A ও B বিন্দুর ভুজ, x = 0

(i) এ বসিয়ে পাই,

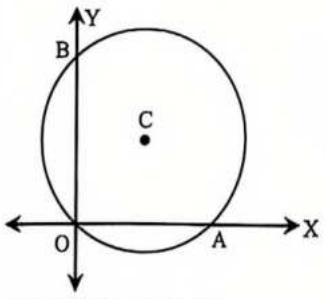
$y^2 + 6y + 4 = 0$

∴ $y = -3 \pm \sqrt{5}$ [Using Calculator]

∴ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -3 + \sqrt{5})$

এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -3 - \sqrt{5})$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৬**




**OA = 3 একক এবং OB = 5 একক।**

**(ক) একটি বৃত্তের কেন্দ্র (4, – 5)। বৃত্তটি (7, 2) বিন্দুগামী হলে, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।**

**(খ) চিত্রে প্রদর্শিত বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।** [ব. বো. ১৯]

**(গ) O যদি একটি ব্যাসের একটি প্রান্তবিন্দু হয়, তবে ঐ ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [ব. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** বৃত্তটির কেন্দ্র (4, – 5)

বৃত্তটির (7, 2) বিন্দুগামী হওয়ায়,

ব্যাসার্ধ = $\sqrt{(4-7)^2 + (-5-2)^2}$

= $\sqrt{58}$ একক

∴ বৃত্তটির সমীকরণ,

$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = (\sqrt{58})^2$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 10y + 25 = 58$

∴ $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 17 = 0$ **(Ans.)**

**খ** চিত্রে, OA = 3 একক এবং OB = 5 একক

A(3, 0); B(0, 5)

ধরি, মূলবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$ ..... (i)

(i) নং বৃত্তটি (3, 0) ও (0, 5) বিন্দু দিয়ে যায়।

∴ $3^2 + 0^2 + 2g.3 + 0 = 0$

$\Rightarrow g = -\frac{3}{2}$

এবং $0^2 + 5^2 + 0 + 2f.5 = 0$

$\Rightarrow f = -\frac{5}{2}$

(i) নং এ g ও f এর মান বসিয়ে,

$x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{3}{2}\right)x + 2\left(-\frac{5}{2}\right)y = 0$

∴ $x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$ **(Ans.)**

**গ** 'খ' হতে বৃত্তের কেন্দ্র, $C(-g, -f) \equiv \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

এবং মূলবিন্দু O (0, 0)

ধরি, O বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক D (α, β)

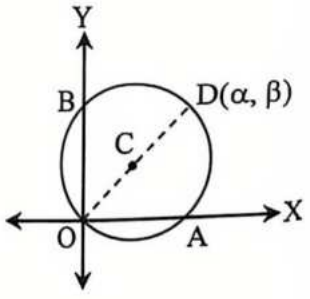
∴ OD ব্যাসের মধ্যবিন্দু $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$; যা বৃত্তের কেন্দ্র।

প্রশ্নমতে, $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \equiv \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}$ ∴ α = 3

এবং $\frac{\beta}{2} = \frac{5}{2}$ ∴ β = 5

∴ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 5)




∴ OD রেখার সমীকরণ: $y = \frac{5}{3}x$

$\Rightarrow 3y = 5x$

∴ $5x - 3y = 0$

D(3, 5) বিন্দুগামী $5x - 3y = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$3x + 5y = 3 \times 3 + 5 \times 5$

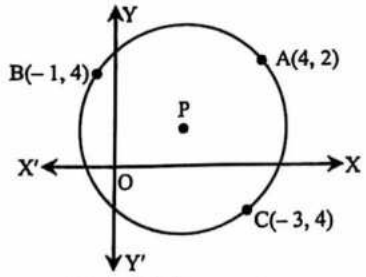
∴ $3x + 5y - 34 = 0$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ১৭**




**(ক)** AC জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো.; কু. বো.; চ. বো.; ব. বো. ১৮]

**(খ)** উদ্দীপকে বর্ণিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো.; কু. বো.; চ. বো.; ব. বো. ১৮]

**(গ)** C বিন্দু হতে $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো.; কু. বো.; চ. বো.; ব. বো. ১৮]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, A(4, 2) এবং C(– 3, 4)

$\therefore$ AC জ্যা এর সমীকরণ: $\frac{x-4}{4-(-3)} = \frac{y-2}{2-4}$

$\Rightarrow \frac{x-4}{4+3} = \frac{y-2}{-2}$

$\Rightarrow 7y - 14 = -2x + 8$

$\therefore 2x + 7y - 22 = 0$ **(Ans.)**

**খ** ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)

(i) নং বৃত্তটি (– 3, 4) বিন্দু দিয়ে যায়।

$\therefore (-3)^2 + 4^2 + 2g(-3) + 2f \times 4 + c = 0$

$\Rightarrow 25 - 6g + 8f + c = 0$ ..... (ii)

আবার, (i) নং বৃত্তটি (– 1, 4) বিন্দু দিয়ে যায়।

$\therefore (-1)^2 + 4^2 + 2g(-1) + 2f \times 4 + c = 0$

$\Rightarrow 17 - 2g + 8f + c = 0$ ..... (iii)

এবং (i) নং বৃত্তটি(4, 2) বিন্দু দিয়ে যায়।

$\therefore 4^2 + 2^2 + 2g \times 4 + 2f \times 2 + c = 0$

$\Rightarrow 20 + 8g + 4f + c = 0$ ..... (iv)

(ii) – (iii) করে,

$25 - 6g + 8f + c - 17 + 2g - 8f - c = 0$

$\therefore g = 2$

(iii) – (iv) করে,

$17 - 2g + 8f + c - 20 - 8g - 4f - c = 0$

$\Rightarrow -3 - 10g + 4f = 0$

$\Rightarrow -3 - 10 \times 2 + 4f = 0 \quad [\because g = 2]$

$\therefore f = \frac{23}{4}$

g ও f এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$25 - 6 \times 2 + 8 \times \frac{23}{4} + c = 0$

$\therefore c = -59$

(i) নং এ g, f ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 + 2 \times 2x + 2 \times \frac{23}{4} y - 59 = 0$

$\therefore 2x^2 + 2y^2 + 8x + 23y - 118 = 0$ **(Ans.)**

**গ** ধরি, C(– 3, 4) বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - 4 = m(x + 3)$ ..... (i)

$\therefore mx - y + 3m + 4 = 0$

প্রদত্ত বৃত্ত: $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$

এখানে, $g = -3$, $f = -4$ এবং $c = 9$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f) \equiv (3, 4)$

এবং বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 - 9}$

$= 4$ একক

শর্তমতে, বৃত্তের কেন্দ্র (3, 4) হতে স্পর্শক,

$mx - y + 3m + 4 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান।

$\therefore \left|\frac{m \times 3 - 4 + 3m + 4}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}\right| = 4$

$\Rightarrow \left|\frac{3m + 3m}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 4$

$\Rightarrow \left(\frac{6m}{\sqrt{m^2 + 1}}\right)^2 = 4^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{36m^2}{m^2 + 1} = 16$

$\Rightarrow 36m^2 = 16(m^2 + 1)$

$\therefore m = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$y - 4 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}(x + 3)$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৮** দৃশ্যকল্প-১: $6\sqrt{2}$ বাহু বিশিষ্ট বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং এর বিপরীত শীর্ষ y অক্ষের উপর অবস্থিত।

দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ ..... ..... (i)

**(ক)** $x^2 + y^2 - 3x = 0$ বৃত্তটিকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর। [কু. বো. ১৯]

**(খ)** দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ১৯]

**(গ)** দৃশ্যকল্প-২ হতে, এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা (i) এ বর্ণিত বৃত্তটির কেন্দ্র ও (3, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষকে স্পর্শ করে। [য. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) এবং পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হলে,

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ এবং $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 - 3x = 0$

$\Rightarrow r^2 - 3r\cos\theta = 0$

$\Rightarrow r - 3\cos\theta = 0$

$\therefore r = 3\cos\theta$; ইহাই নির্ণেয় পোলার সমীকরণ। **(Ans.)**

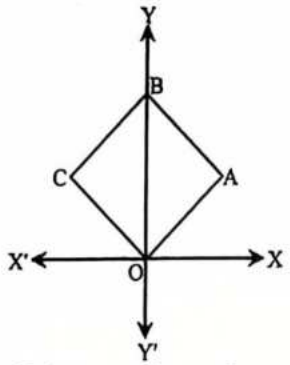


t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** ধরি, OABC বর্গের O বিন্দু মূলবিন্দুতে এবং এর বিপরীত শীর্ষবিন্দু B, y অক্ষের উপর অবস্থিত এবং $OA = AB = BC = CO = 6\sqrt{2}$




$\therefore$ OAB সমকোণী ত্রিভুজ, $OB^2 = OA^2 + AB^2$

$= (6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2 = 144$

$\therefore OB = \pm 12$

এখানে, OB = 12, y অক্ষের ধনাত্মক দিকে কর্ণ নির্দেশ করে।

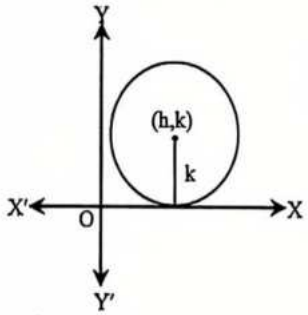
এবং OB = – 12, y অক্ষের ঋণাত্মক দিকে কর্ণ নির্দেশ করে।

এখন, O(0, 0) এবং B(0, ±12) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 0)(x - 0) + (y - 0)(y \pm 12) = 0$

$\therefore x^2 + y^2 \pm 12y = 0$ **(Ans.)**

**গ**




$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ ..... (i)

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f) \equiv (1, 2)$

ধরি, বৃত্তের কেন্দ্র (h, k)

যেহেতু, বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের কোটি| = |k|

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = |k|^2$ ..... (ii)

যেহেতু, (ii) নং বৃত্তটি (1, 2) ও (3, 2) বিন্দু দিয়ে যায়,

$\therefore$ (1, 2) বিন্দুর জন্য,

$(1 - h)^2 + (2 - k)^2 = k^2$

$\Rightarrow 1 - 2h + h^2 + 2^2 - 4k + k^2 = k^2$

$\Rightarrow 5 - 2h - 4k + h^2 = 0$ ..... (iii)

আবার, (3, 2) বিন্দুর জন্য,

$(3 - h)^2 + (2 - k)^2 = k^2$

$\Rightarrow 3^2 - 6h + h^2 + 2^2 - 4k + k^2 = k^2$

$\Rightarrow 13 - 6h - 4k + h^2 = 0$ ..... (iv)

এখন, (iii) – (iv) করে,

$5 - 2h - 4k + h^2 - 13 + 6h + 4k - h^2 = 0$

$\Rightarrow -8 + 4h = 0$

$\therefore h = 2$

(iii) নং এ h এর মান বসিয়ে পাই,

$5 - 4 - 4k + 4 = 0$

$\therefore k = \frac{5}{4}$

এখন, (ii) নং সমীকরণের h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

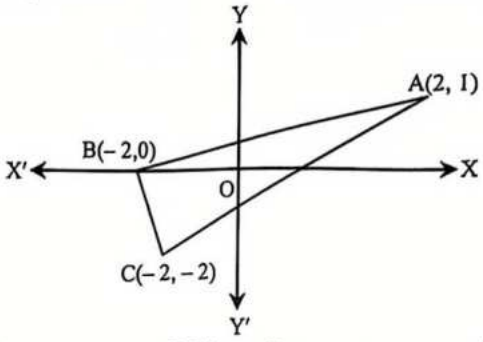
বৃত্তের সমীকরণ : $(x - 2)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{25}{16} = \frac{25}{16}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - \frac{5}{2}y + 4 = 0$

$\therefore 2x^2 + 2y^2 - 8x - 5y + 8 = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▸ ১৯** দৃশ্যকল্প-১:




দৃশ্যকল্প-২: (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করে।

(ক) $r(1 + \cos\theta) = 2$ সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর। [রা. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-২ হতে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি দ্বারা y অক্ষের খণ্ডিত অংশের পরিমাণও নির্ণয় কর। [ম. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-১ এ, (5, 4) বিন্দু হতে ΔABC এর পরিবৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৯]

সমাধান:

**ক** কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) এবং পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হলে,

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ এবং $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

দেওয়া আছে, $r(1 + \cos\theta) = 2$

$\Rightarrow r + r\cos\theta = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x = 2$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x \Rightarrow x^2 + y^2 = (2 - x)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4 - 4x + x^2$

$\therefore y^2 + 4x - 4 = 0$; ইহাই নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ। **(Ans.)**

**খ** (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ, r = |কেন্দ্রের কোটি| = 2 একক

এখন, (1, 2) কেন্দ্র ও 2 একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4$

$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ .....(i) **(Ans.)**

$\therefore$ (i) নং বৃত্তটি দ্বারা y অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{f^2 - c}$

$= 2\sqrt{(-2)^2 - 1}$

$= 2\sqrt{3}$ একক

**(Ans.)**

**গ** ধরি, ΔABC এর পরিবৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)

(i) নং বৃত্তটি A(2, 1), B(– 2, 0) ও C(– 2, – 2) বিন্দু দিয়ে যায়।

$\therefore 2^2 + 1^2 + 2g \times 2 + 2f \times 1 + c = 0$

$\Rightarrow 4g + 2f + c + 5 = 0$ ..... (ii)

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



আবার, $(-2)^2 + 0^2 + 2g(-2) + 0 + c = 0$

$\Rightarrow -4g + c + 4 = 0$ ..... (iii)

এবং $(-2)^2 + (-2)^2 + 2g.(-2) + 2f(-2) + c = 0$

$\Rightarrow -4g - 4f + c + 8 = 0$ ..... (iv)

(iv) – (iii) করে, $-4f + 4 = 0 \therefore f = 1$

(ii) – (iii) করে, $8g + 2f + 1 = 0$

$\Rightarrow 8g + 2 \times 1 + 1 = 0 \quad [\because f = 1]$

$\therefore g = -\frac{3}{8}$

(iii) নং এ g এর মান বসাই, $-4 \times \left(-\frac{3}{8}\right) + c + 4 = 0$

$\therefore c = -\frac{11}{2}$

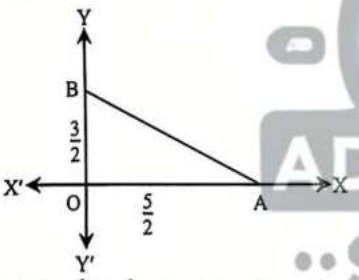
(i) নং এ g, f ও c এর মান বসিয়ে,

$x^2 + y^2 - \frac{3}{4}x + 2y - \frac{11}{2} = 0$ ..... (v)

$\therefore$ (5, 4) বিন্দু হতে (v) নং বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$= \sqrt{5^2 + 4^2 - \frac{3}{4} \times 5 + 2 \times 4 - \frac{11}{2}} = \frac{\sqrt{159}}{2}$ একক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২০** দৃশ্যকল্প-১:




দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

**(ক)** $x^2 + y^2 = 36$ এবং $x^2 + y^2 + 20x + 84 = 0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে কিরূপে স্পর্শ করে?

**(খ)** দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত বৃত্তের একটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x + 4y - 1 = 0$ এর সমান্তরাল। [দি. বো. ২২]

**(গ)** দৃশ্যকল্প-১ এ AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ ও B বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** ১ম বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow x^2 + y^2 = 6^2$

$\therefore$ কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ = 6 একক

আবার, ২য় বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 20x + 84 = 0$

$\therefore$ কেন্দ্র $\left(\frac{20}{-2}, 0\right) \equiv (-10, 0)$

এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{100 + 0 - 84}$

$= 4$ একক

এখন,

কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $= \sqrt{(0 + 10)^2 + (0 - 0)^2}$

$= 10$ একক

= ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফল

$\therefore$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। **(Ans.)**

**খ** এখানে, $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র (3, – 1)

এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{9 + 1 - 1} = 3$ একক

$3x + 4y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ,

$3x + 4y + k = 0$ ..... (i)

যেহেতু, কেন্দ্র (3, – 1) হতে (i) নং স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

$\therefore \left|\frac{3 \times 3 + 4(-1) + k}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = 3$

$\Rightarrow \left|\frac{9 - 4 + k}{5}\right| = 3 \Rightarrow 5 + k = \pm 15$

$\therefore k = 10, -20$

এখন, (i) নং হতে পাই: $k = 10$ হলে, $3x + 4y + 10 = 0$ **(Ans.)**

এবং $k = -20$ হলে, $3x + 4y - 20 = 0$ **(Ans.)**

**গ** A $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ ও B $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$\left(x - \frac{5}{2}\right)(x - 0) + (y - 0)\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{x(2x - 5)}{2} + \frac{y(2y - 3)}{2} = 0$

$\Rightarrow x(2x - 5) + y(2y - 3) = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2y^2 - 3y = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - \frac{5x}{2} - \frac{3y}{2} = 0$ ..... (i) **(Ans.)**

আমরা জানি, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

$\therefore B\left(0, \frac{3}{2}\right)$ বিন্দুতে (i) নং বৃত্তের অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

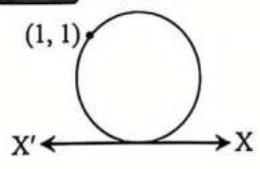
$0.x + \frac{3}{2} \cdot y - \frac{5}{4}(x + 0) - \frac{3}{4}\left(y + \frac{3}{2}\right) + 0 = 0$

$\Rightarrow \frac{3y}{2} - \frac{5x}{4} - \frac{3y}{4} - \frac{9}{8} = 0 \Rightarrow \frac{12y - 10x - 6y - 9}{8} = 0$

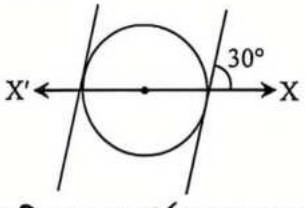
$\Rightarrow 6y - 10x - 9 = 0$

$\therefore 10x - 6y + 9 = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২১** উদ্দীপক-১




উদ্দীপক-২




**(ক)** $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করলে c এর মান নির্ণয় কর।

**(খ)** উদ্দীপক-১ এর বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার কেন্দ্র ১ম চতুর্ভাগে $x + y = 3$ রেখায় অবস্থিত।

**(গ)** উদ্দীপক-২ এর বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 16$ হলে, স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



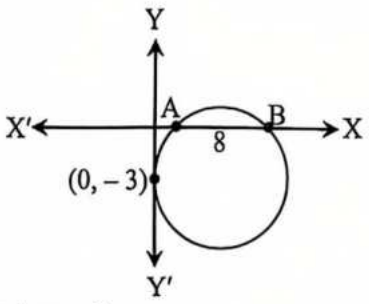
সমাধান:

**ক** প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$
বৃত্তটিকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের সাথে তুলনা করে পাই, $g = -2$, $f = -3$
যেহেতু, বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে।
$\therefore g^2 = c \Rightarrow (-2)^2 = c$
$\therefore c = 4$ **(Ans.)**

**খ** মনে করি, বৃত্তটির সমীকরণ,
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)
বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে বলে, $c = g^2$..... (ii)
এখানে, রেখার সমীকরণ, $x + y = 3$ ..... (iii)
(i) নং বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$, (iii) নং রেখার উপর অবস্থিত।
$\therefore -g - f = 3$
$\Rightarrow f = -g - 3$ ..... (iv)
আবার, বৃত্তটি (1, 1) বিন্দুগামী বলে,
$\therefore 1 + 1 + 2g + 2f + c = 0$
$\Rightarrow 2 + 2g + 2(-g - 3) + g^2 = 0$ $[\because c = g^2]$
$\Rightarrow g^2 = 4$
$\therefore g = -2$ [∵ ১ম চতুর্ভাগে g ও f ঋণাত্মক]
(ii) নং হতে পাই, $c = (-2)^2 = 4$
(iv) নং হতে পাই, $f = -(-2) - 3 = 2 - 3 = -1$
এখন, g, f এবং c এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ **(Ans.)**

**গ** এখানে, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = 16$
$\Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 4^2$
$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ 4 একক
স্পর্শকের ঢাল, $m = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$
ধরি, স্পর্শক দ্বারা y অক্ষের কর্তিত অংশের পরিমাণ c।
$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx + c \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{3}} + c$
$\Rightarrow x - \sqrt{3}y + \sqrt{3}c = 0$ ..... (i)
(i) নং রেখাটি বৃত্তটিকে স্পর্শ করায় কেন্দ্র (0, 0) হতে রেখার দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।
$\therefore \left|\frac{0 - 0 + \sqrt{3}c}{\sqrt{1 + 3}}\right| = 4$
$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{4}}\right| = 4 \therefore c = \pm\frac{8}{\sqrt{3}}$
c এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$x - \sqrt{3}y \pm \sqrt{3}\left(\pm\frac{8}{\sqrt{3}}\right) = 0$
$\therefore x - \sqrt{3}y \pm 8 = 0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২২** দৃশ্যকল্প-১:




দৃশ্যকল্প-২: $px + qy = 2$

**(ক)** $x^2 + y^2 + 4x + 6y - k = 0$ একটি বিন্দু বৃত্তের সমীকরণ হলে, k এর মান নির্ণয় কর।
**(খ)** দৃশ্যকল্প-১ হতে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
**(গ)** $x^2 + y^2 + 2ly = 0$ বৃত্তটি দৃশ্যকল্প-২ এর সরলরেখাকে স্পর্শ করলে দেখাও যে, $l^2p^2 - 4lq - 4 = 0$.

সমাধান:

**ক** প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 4x + 6y - k = 0$
এখানে, $g = 2$, $f = 3$, $c = -k$
ব্যাসার্ধ, $\sqrt{g^2 + f^2 - c} = 0$ [∵ বিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ 0]
$\Rightarrow 2^2 + 3^2 - (-k) = 0$
$\Rightarrow 13 + k = 0$
$\therefore k = -13$ **(Ans.)**

**খ** ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (i)
বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে।
$\therefore c = f^2$
আবার বৃত্তটি (0, −3) বিন্দুগামী।
$\therefore 0 + 9 + 0 - 6f + c = 0$
$\Rightarrow c - 6f + 9 = 0$
$\Rightarrow f^2 - 6f + 9 = 0$ $[\because c = f^2]$
$\Rightarrow (f - 3)^2 = 0$
$\therefore f = 3$
আবার, $c = f^2 = 3^2 = 9$
বৃত্তটি দ্বারা x অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য, AB = 8 একক
$\therefore 2\sqrt{g^2 - c} = 8$
$\Rightarrow \sqrt{g^2 - c} = 4$
$\Rightarrow g^2 - c = 16$ [বর্গ করে]
$\Rightarrow g^2 - 9 = 16$
$\Rightarrow g = \pm\sqrt{25} = \pm 5$
$\therefore g = -5$ [∵ বৃত্তের কেন্দ্র ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত]
(i) নং এ g, f ও c এর মান বসিয়ে পাই,
$x^2 + y^2 + 2.(-5).x + 2.3.y + 9 = 0$
$\therefore x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 = 0$ **(Ans.)**

**গ** দৃশ্যকল্প-২ হতে, প্রদত্ত রেখা, $px + qy = 2$ ..... (i)
এখানে, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2ly = 0$ ..... (ii)
বৃত্তটিকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,
$g = 0$, $f = l$, $c = 0$
$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f) \equiv (0, -l)$
এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{0 + (-l)^2 + 0} = l$ একক
(ii) নং বৃত্তটি (i) নং সরলরেখাকে স্পর্শ করলে, কেন্দ্র $(0, -l)$ হতে (i) নং রেখার লম্ব দূরত্ব (ii) নং বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।
অর্থাৎ, $\left|\frac{p.0 + q(-l) - 2}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right| = l$
$\Rightarrow \left|\frac{-(ql + 2)}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right| = l \Rightarrow \frac{(ql + 2)}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \pm l$
$\Rightarrow ql + 2 = \pm l\left(\sqrt{p^2 + q^2}\right) \Rightarrow (ql + 2)^2 = l^2(p^2 + q^2)$
$\Rightarrow q^2l^2 + 4ql + 4 = l^2p^2 + q^2l^2$
$\Rightarrow 4ql + 4 = l^2p^2$
$\therefore l^2p^2 - 4ql - 4 = 0$ **(Showed)**

Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

### বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয়

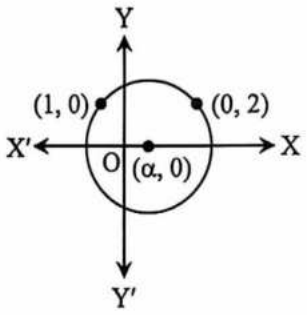
১। **(1, 0) এবং (0, 2) বিন্দুগামী এবং x অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ কোনটি?** [ঢা. বো. ২৩]

ক $\frac{3}{2}$ খ $\frac{5}{2}$

গ $\frac{41}{2}$ ঘ $\frac{25}{4}$

**উত্তর:** খ $\frac{5}{2}$

**ব্যাখ্যা:**




একটি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে তার উপরিস্থ সকল বিন্দুর দূরত্ব সমান

$(\alpha-1)^2+0^2=(\alpha-0)^2+(0-2)^2$

$\Rightarrow (\alpha-1)^2=\alpha^2+(-2)^2$

$\Rightarrow \alpha^2-2\alpha+1=\alpha^2+4$

$\Rightarrow -2\alpha-3=0$

$\Rightarrow \alpha=-\frac{3}{2}$

$\therefore$ কেন্দ্র $\left(-\frac{3}{2},0\right)$

ব্যাসার্ধ $=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}-1\right)^2+0^2}=\frac{5}{2}$

২। **(3, 4) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করলে উহার ব্যাসার্ধ কত?** [চ. বো. ২৩]

ক 3 খ 4

গ 5 ঘ 7

**উত্তর:** খ 4

**ব্যাখ্যা:** x অক্ষকে স্পর্শ করলে,

ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের কোটি| = 4

৩। **$2x^2+2y^2+4x-2y+4=0$ বৃত্তের কেন্দ্র কোনটি?** [কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২; কু. বো. ১৯, ১৭; সকল বো. ১৮; রা বো. ১৭; য. বো. ১৭]

ক $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ খ $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$

গ $(-2,1)$ ঘ $\left(2,-\frac{1}{2}\right)$

**উত্তর:** ক $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

**ব্যাখ্যা:** কেন্দ্র, ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে গেলে অবশ্যই বৃত্তটাকে Main format এ নিতে হবে।

↳ $x^2$ ও $y^2$ এর সহগ 1 করে।

$x^2+y^2+2x-y+2=0$

কেন্দ্র $\equiv\left(\frac{x\text{ এর সহগ}}{-2},\frac{y\text{ এর সহগ}}{-2}\right)\equiv\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

৪। **$3x-4y+4=0$ এবং $6x-8y-7=0$ সরলরেখাদ্বয় একই বৃত্তের স্পর্শক হলে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ–** [সি. বো. ২২]

ক $\frac{3}{5}$ খ $\frac{5}{7}$

গ $\frac{3}{4}$ ঘ $\frac{5}{6}$

**উত্তর:** গ $\frac{3}{4}$

**ব্যাখ্যা:** $3x-4y+4=0$

$3x-4y-\frac{7}{2}=0$

মূলত এই দুটি সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্বই হল বৃত্তের ব্যাস।

$3x-4y+4=0$ $\quad 6x-8y-7=0$

$\Rightarrow 3x-4y-\frac{7}{2}=0$

$\therefore$ ব্যাস $=\left|\frac{4+\frac{7}{2}}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|$ ← দুটি সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র

$=\frac{3}{2}$

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $=\frac{\text{ব্যাস}}{2}=\frac{3}{4}$

৫। **(–7, 8) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত y অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তটির ব্যাস কত?** [কু. বো. ১৯]

ক 7 খ 8

গ 14 ঘ 16

**উত্তর:** গ 14

**ব্যাখ্যা:** ব্যাসার্ধ = | কেন্দ্রের ভুজ | = 7 একক

[বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করলে, ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের কোটি|

বৃত্ত y অক্ষকে স্পর্শ করলে, ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের ভুজ|

$\therefore$ ব্যাস = 2 × ব্যাসার্ধ = 2 × 7 = 14

৬। **(– 2, 1) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের ব্যাস–** [সকল. বো. ১৮]

ক –2 খ 1

গ 2 ঘ 4

**উত্তর:** গ 2

**ব্যাখ্যা:** ব্যাসার্ধ = | কেন্দ্রের কোটি |

= 1 একক

$\therefore$ ব্যাস = 2 × ব্যাসার্ধ = 2 × 1 = 2

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৭। (3, 4) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করলে উহার ব্যাসার্ধ কত? [চ. বো. ১৭]

ক 3 একক খ 4 একক
গ 5 একক ঘ 7 একক

উত্তর: খ 4 একক

ব্যাখ্যা: ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের কোটি|
= 4 একক

**Note:** x অক্ষকে স্পর্শ করলে ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের কোটি|
y অক্ষকে স্পর্শ করলে ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের ভুজ|

৮। পোলার স্থানাংকে $r^2 - 2r\sin\theta = 3$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত একক? [সি. বো. ২৩]

ক 2 খ 3
গ 4 ঘ 6

উত্তর: ক 2

ব্যাখ্যা: $r^2 - 2r\sin\theta - 3 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ [$\because r^2 = x^2 + y^2; y = r\sin\theta$]
এখানে, $g = 0, f = -1, c = -3$
ব্যাসার্ধ $= \sqrt{0^2 + (-1)^2 - (-3)}$
= 2 একক

৯। (8, –10) বিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের ব্যাস কত একক? [ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২]

ক 8 খ 10
গ 16 ঘ 20

উত্তর: ঘ 20

ব্যাখ্যা: x অক্ষকে স্পর্শ করলে ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের কোটি|
$= |-10| = 10$
$\therefore$ ব্যাস = 20 একক

১০। $x^2 + y^2 + 12x - 4y + 31 = 0$ সমীকরণবিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [রা. বো. ২৩]

ক $2\pi$ খ $3\pi$
গ $9\pi$ ঘ $6\pi$

উত্তর: গ $9\pi$

ব্যাখ্যা: ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{36 + 4 - 31} = \sqrt{9} = 3 = r$
$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = 9\pi$

১১। $(x-3)^2 + y^2 = 36$ একটি বৃত্তের সমীকরণ হলে–

(i) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (3, 0)
(ii) ক্ষেত্রফল $6\pi$ বর্গ একক
(iii) ব্যাসার্ধ 6 একক
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: $(x-3)^2 + y^2 = 36$
$\therefore$ কেন্দ্র (3, 0), ব্যাসার্ধ = 6 একক
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $\pi(6)^2 = 36\pi$ বর্গ একক

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১২ ও ১৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$k\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{3} = 0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

১২। k এর মান কত?

ক $\frac{3}{2}$ খ 1
গ $\frac{3}{4}$ ঘ $\frac{4}{3}$

উত্তর: ঘ $\frac{4}{3}$

ব্যাখ্যা: $k\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{3} = 0$
বৃত্ত হতে হলে, $x^2$ এর সহগ = $y^2$ এর সহগ
$\Rightarrow \frac{k}{4} = \frac{1}{3}$
$\therefore k = \frac{4}{3}$

১৩। বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?

ক (1, – 1) খ (– 1, 1)
গ (2, – 2) ঘ (– 2, 2)

উত্তর: খ (– 1, 1)

ব্যাখ্যা: $k\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{3} = 0$
$\Rightarrow \frac{4}{3} \times \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{3} = 0$
$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 0$
$\therefore$ কেন্দ্র (– 1, 1)

## বৃত্তের প্রমিত, সাধারণ ও পোলার সমীকরণ সংক্রান্ত

১৪। $r = 2a\cos\theta$ বৃত্তের– [ঢা. বো. ২৩]

(i) কেন্দ্র (a, 0)
(ii) ব্যাসার্ধ 2a
(iii) x অক্ষ হতে ছেদাংশের পরিমাণ 2a
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: কার্তেসীয় স্থানাংক (x, y) এবং পোলার স্থানাংক (r, θ) হলে,
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ এবং $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
এখানে, $r^2 = 2ar\cos\theta = 2ax$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax = 0$
$x^2 + y^2 - 2ax = 0$ কে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

(i) কেন্দ্র $(-g, -f) = \left(-\frac{x \text{ এর সহগ}}{2}, -\frac{y \text{ এর সহগ}}{2}\right)$
$= \left(-\frac{-2a}{2}, -\frac{0}{2}\right)$
$= (a, 0)$

(ii) ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-a)^2 + 0^2 - 0} = \sqrt{a^2} = a$
$\therefore$ (ii) নং সঠিক নয়

(iii) x অক্ষের ছেদাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{(-a)^2 - 0} = 2\sqrt{a^2} = 2a$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



১৫। (2, – 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং y = 0 রেখাকে স্পর্শ করে এমন বৃত্তের সমীকরণ হলো–
[ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩; দি. বো. ২৩, ২২; য. বো. ২২]
ⓚ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$
ⓛ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
ⓜ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$
ⓝ $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$
উত্তর: ⓚ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$
ব্যাখ্যা: y = 0 রেখা x অক্ষের সমীকরণ।
x অক্ষকে স্পর্শ করলে ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের কোটি| = |– 3| = 3
∴ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 9$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

১৬। নিচের কোন শর্তে $ax^2 + by^2 = c$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে? [কু. বো. ২২]
ⓚ c = 0 ⓛ $c = r^2$
ⓜ $a \neq b$ ⓝ $\frac{a}{b} = 1, b \neq 0$
উত্তর: ⓝ $\frac{a}{b} = 1, b \neq 0$
ব্যাখ্যা: $ax^2 + by^2 = c$ সমীকরণটিকে একটি বৃত্ত নির্দেশ করতে হলে, অবশ্যই $x^2$ ও $y^2$ এর সহগ সমান হতে হবে। ∴ a = b
Option ⓝ $\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$

**Note:** বৃত্তের সমীকরণ হতে হলে,
(i) $x^2$ ও $y^2$ এর সহগ সমান হতে হবে এবং $x^2$ ও $y^2$ এর সহগ এর মান 0 হতে পারবে না।
(ii) xy সম্বলিত কোনো পদ থাকবে না।

১৭। A(1, 2) ও B(2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি? [সি. বো. ১৯]
ⓚ $x^2 + y^2 - 3x - 5y + 8 = 0$
ⓛ $x^2 + y^2 - 3x + 5y + 8 = 0$
ⓜ $x^2 + y^2 + 3x + 5y + 8 = 0$
ⓝ $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 8 = 0$
উত্তর: ⓚ $x^2 + y^2 - 3x - 5y + 8 = 0$
ব্যাখ্যা: $(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$ যদি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হয় তাহলে বৃত্তের সমীকরণ, $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$
এখানে, $(x-1)(x-2) + (y-2)(y-3) = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 3x - 5y + 8 = 0$

১৮। (2, – 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করলে তার সমীকরণ কোনটি? [ঢা. বো. ১৭]
ⓚ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2$ ⓛ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 2^2$
ⓜ $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2^2$ ⓝ $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$
উত্তর: ⓝ $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$
ব্যাখ্যা: x অক্ষকে স্পর্শ করলে ব্যাসার্ধ = | কেন্দ্রের কোটি | = 3
∴ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$

১৯। $r^2 + 2r\cos\theta + 4r\sin\theta = 3$ বৃত্তটির কেন্দ্রের কার্তেসীয় স্থানাংক কত? [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২]
ⓚ (– 1, – 2) ⓛ (– 2, – 4)
ⓜ (1, 2) ⓝ (2, 4)
উত্তর: ⓚ (– 1, – 2)
ব্যাখ্যা: $r^2 + 2r\cos\theta + 4r\sin\theta - 3 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$ [∵ $x = r\cos\theta; y = r\sin\theta$]
কেন্দ্র (– 1, – 2)

২০। $x^2 + y^2 + ay = 0$ এর পোলার সমীকরণ কোনটি? [কু. বো. ২৩]
ⓚ r + a = 0 ⓛ $r^2 + a = 0$
ⓜ $r + a\sin\theta = 0$ ⓝ $r^2 + a\sin\theta = 0$
উত্তর: ⓜ $r + a\sin\theta = 0$
ব্যাখ্যা: $x^2 + y^2 + ay = 0$
$\Rightarrow r^2 + ar\sin\theta = 0$ | $x^2 + y^2 = r^2$
$\Rightarrow r + a\sin\theta = 0$ | $y = r\sin\theta$

২১। r – 4 = 0 পোলার সমীকরণটি নির্দেশ করে– [ম. বো. ২২]
ⓚ পরাবৃত্ত ⓛ বৃত্ত
ⓜ উপবৃত্ত ⓝ অধিবৃত্ত
উত্তর: ⓛ বৃত্ত
ব্যাখ্যা: r – 4 = 0 | $r^2 = x^2 + y^2$
$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4$ | $\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2$; যা একটি বৃত্তের সমীকরণ।

২২। $r = 2\cos\theta$ পোলার সমীকরণটি নির্দেশ করে– [ঢা. বো. ১৯]
ⓚ সরলরেখা ⓛ পরাবৃত্ত
ⓜ উপবৃত্ত ⓝ বৃত্ত
উত্তর: ⓝ বৃত্ত
ব্যাখ্যা: $r = 2\cos\theta$
$\Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$; যা একটি বৃত্তের সমীকরণ।

২৩। k এর কোন মানের জন্য $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$ বৃত্ত প্রকাশ করবে?
ⓚ – 2 ⓛ – 1
ⓜ 1 ⓝ 2
উত্তর: ⓝ 2
ব্যাখ্যা: $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 9 - 2xy - 6y + 6x + kxy - kx + 2y - 2 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + xy(k - 2) - kx + 6x - 4y + 7 = 0$
শর্তমতে, xy এর সহগ = 0
$\Rightarrow k - 2 = 0$
∴ k = 2

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## বৃত্ত দ্বারা x ও y অক্ষকে স্পর্শ ও খন্ডিতাংশ নির্ণয়

**২৪। $x^2+y^2-4x-6y=7$ বৃত্তের x অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কত?**
[রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২৩; সি. বো. ১৯]

ক $2\sqrt{11}$ খ $\sqrt{22}$
গ 11 ঘ 22

**উত্তর:** ক $2\sqrt{11}$

**ব্যাখ্যা:** $g=\frac{x\text{ এর সহগ}}{2}=-2$

x অক্ষের খন্ডিতাংশ, $2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{4+7}=2\sqrt{11}$

**২৫। $x^2+y^2-4x+8y=0$ বৃত্তের y অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কোনটি?**
[কু. বো. ২২]

ক 4 খ 8
গ 16 ঘ 32

**উত্তর:** খ 8

**ব্যাখ্যা:** $f=\frac{y\text{ এর সহগ}}{2}=\frac{8}{2}=4$

y অক্ষের খন্ডিতাংশ $=2\sqrt{f^2-c}$
$=2\sqrt{16-0}$
$=8$

**২৬। $x^2+y^2-10x-12y+20=0$ বৃত্ত দ্বারা y অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কত একক?**
[ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২; দি. বো. ২২; চ. বো. ১৯; য. বো. ১৯, ১৭]

ক $2\sqrt{5}$ খ $6\sqrt{5}$
গ 8 ঘ $4\sqrt{14}$

**উত্তর:** গ 8

**ব্যাখ্যা:** $f=\frac{y\text{ এর সহগ}}{2}=-6$

y অক্ষের খন্ডিতাংশ $=2\sqrt{f^2-c}=2\sqrt{36-20}=8$

**২৭। $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তটি x অক্ষকে ছেদ করে না, যখন–**
[সি. বো. ১৭]

ক $g^2>c$ খ $g^2<c$
গ $f^2>c$ ঘ $f^2<c$

**উত্তর:** খ $g^2<c$

**ব্যাখ্যা:** $g^2=c$ হলে x অক্ষকে স্পর্শ করে।
$g^2<c$ হলে x অক্ষকে স্পর্শ/ছেদ করে না।
$g^2>c$ হলে x অক্ষকে ছেদ করে।

$f^2=c$ হলে y অক্ষকে স্পর্শ করে।
$f^2<c$ হলে y অক্ষকে স্পর্শ/ছেদ করে না।
$f^2>c$ হলে y অক্ষকে ছেদ করে।

**২৮। $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ বৃত্তটি স্পর্শ করে–**
[চ. বো. ২২]

ক x অক্ষকে খ y অক্ষকে
গ উভয় অক্ষকে ঘ মূলবিন্দুকে

**উত্তর:** ক x অক্ষকে

**ব্যাখ্যা:** x অক্ষকে স্পর্শ করলে $g^2=c$
y অক্ষকে স্পর্শ করলে $f^2=c$
উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে $g^2=f^2=c$
মূলবিন্দুকে স্পর্শ করলে $c=0$
এখানে, $g=-2$ ; $f=-5$ ; $c=4=g^2$
∴ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে।

**২৯। $2x^2+2y^2-12x-8y=14$ বৃত্তের–**
[চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩; চ. বো. ১৭]

**(i) কেন্দ্র (3, 2)**
**(ii) ব্যাসার্ধ $2\sqrt{5}$ একক**
**(iii) y অক্ষ দ্বারা খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{11}$ একক**
**নিচের কোনটি সঠিক?**

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** ঘ i, ii ও iii

**ব্যাখ্যা:** বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2-6x-4y-7=0$

(i) কেন্দ্র (3, 2)

(ii) ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$
$=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2-(-7)}$
$=\sqrt{9+4+7}$
$=\sqrt{20}$
$=2\sqrt{5}$

(iii) y অক্ষের খণ্ডিতাংশ $=2\sqrt{f^2-c}$
$=2\sqrt{(-2)^2-(-7)}$
$=2\sqrt{4+7}$
$=2\sqrt{11}$

**৩০। $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ বৃত্তের ক্ষেত্রে–** [রা. বো. ২৩]

**(i) ব্যাসার্ধ 2 একক**
**(ii) একটি স্পর্শক $y=1$**
**(iii) বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে**
**নিচের কোনটি সঠিক?**

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** ক i ও ii

**ব্যাখ্যা:** (i) এখানে, $g=-1, f=-3$
∴ ব্যাসার্ধ $=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2-6}=\sqrt{1+9-6}=2$ একক
(ii) $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ এখানে,
বৃত্তের কেন্দ্র $(-g,-f)\equiv(1,3)$
স্পর্শক হতে হলে, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হতে হবে।

কেন্দ্র থেকে স্পর্শক $(y-1=0)$ এর লম্ব দূরত্ব $=\left|\frac{3-1}{\sqrt{0^2+1^2}}\right|=2$

∴ ব্যাসার্ধ = বৃত্তের কেন্দ্র কেন্দ্র স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব = 2 [(ii) নং সঠিক]
(iii) y অক্ষকে স্পর্শ করলে, $f^2=c$
$\therefore f^2=(-3)^2=9\neq 6$

Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৩১। $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ বৃত্তটি– [ঢা. বো. ২২]

(i) মূলবিন্দুগামী

(ii) x অক্ষ থেকে 4 একক অংশ খণ্ডন করে

(iii) y অক্ষকে (0, –6) বিন্দুতে ছেদ করে

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) (0, 0) বিন্দু বসালে সিদ্ধ হলে সেটা মূলবিন্দুগামী।
বা, বৃত্তের সমীকরণে $c = 0$ হলে বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী।

(ii) $2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{4 - 0} = 4$

(iii) y অক্ষের উপর $x = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$

$\Rightarrow 0 + y^2 - 0 - 6y = 0$

$\Rightarrow y(y - 6) = 0$

$\therefore y = 0$ অথবা $y = 6$

$\therefore$ y অক্ষের ছেদবিন্দু (0, 0) এবং (0, 6)

৩২। (i) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত [দি. বো. ১৭]

(ii) $x^2 + 2y^2 = 4$ একটি বৃত্তের সমীকরণ

(iii) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = a^2$ ; কেন্দ্র (0, 0)

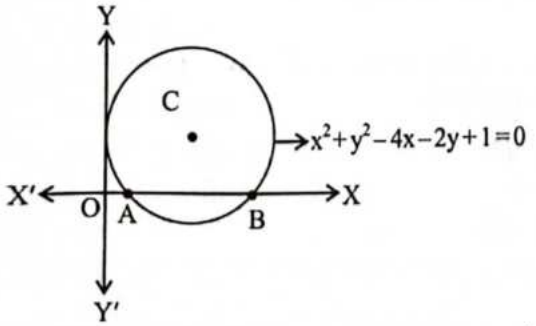
(ii) বৃত্ত হতে হলে $x^2$ ও $y^2$ এর সহগ একই হতে হবে।

(iii) এখানে, $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$ $\therefore$ ব্যাসার্ধ = 3 একক

y অক্ষকে স্পর্শ করলে ব্যাসার্ধ = | কেন্দ্রের ভুজ | = | – 3 |
= 3 একক

$\therefore$ y অক্ষকে স্পর্শ করবে।

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ৩৩ ও ৩৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




৩৩। প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র C হলো– [ব. বো. ২৩]

ক (1, 1) খ (2, 2)

গ (1, 2) ঘ (2, 1)

উত্তর: ঘ (2, 1)

ব্যাখ্যা: কেন্দ্র $\equiv \left(\frac{\text{x এর সহগ}}{-2}, \frac{\text{y এর সহগ}}{-2}\right)$
$\equiv (2, 1)$

৩৪। AB এর দৈর্ঘ্য কত একক? [ব. বো. ২৩]

ক 2 খ 4

গ $2\sqrt{3}$ ঘ $\sqrt{3}$

উত্তর: গ $2\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: x অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c}$ [$-g = 2, c = 1$]
$= 2\sqrt{4 - 1}$
$= 2\sqrt{3}$

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ৩৫ ও ৩৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 + y^2 + 8x - 12y + 2 = 0$

৩৫। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত একক? [ব. বো. ২৩]

ক $2\sqrt{3}$ খ $3\sqrt{6}$

গ 4 ঘ $5\sqrt{2}$

উত্তর: ঘ $5\sqrt{2}$

ব্যাখ্যা: $r = \sqrt{4^2 + (-6)^2 - 2} = 5\sqrt{2}$

$\left[\text{এখানে, } g = \frac{8}{2} = 4,\ f = \frac{-12}{2} - 6,\ c = 2\right]$

৩৬। বৃত্তটির y অক্ষের ছেদকৃত অংশের পরিমাণ কত একক? [ব. বো. ২৩]

ক $2\sqrt{34}$ খ $\sqrt{14}$

গ $2\sqrt{14}$ ঘ $6\sqrt{2}$

উত্তর: ক $2\sqrt{34}$

ব্যাখ্যা: y অক্ষের ছেদাংশ $= 2\sqrt{f^2 - c}$
$= 2\sqrt{(-6)^2 - 2}$
$= 2\sqrt{34}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৩৭ ও ৩৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 + y^2 - 12x + 8y + c = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে।

৩৭। c এর মান কত? [ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২; রা. বো. ১৯]

ক – 6 খ 4

গ 16 ঘ 36

উত্তর: ঘ 36

ব্যাখ্যা: $g = \frac{\text{x এর সহগ}}{2} = -6$

x অক্ষকে স্পর্শ করলে, $c = g^2$

$\therefore c = 36$

৩৮। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২; রা. বো. ১৯]

ক (0, – 4) খ (0, 4)

গ (6, 0) ঘ (– 6, 0)

উত্তর: গ (6, 0)

ব্যাখ্যা: x অক্ষের স্পর্শ বিন্দু $(-g, 0) \equiv (6, 0)$

$g = \frac{\text{x এর সহগ}}{2}$

$f = \frac{\text{y এর সহগ}}{2}$

**Note:** y অক্ষের স্পর্শ বিন্দু $(0, -f)$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৩৯ ও ৪০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

৩৯। বৃত্তটি x অক্ষকে যে বিন্দুতে স্পর্শ করে তা হলো– [ম. বো. ২২]

ক (1, 0) খ (0, 1)
গ (– 1, 1) ঘ (1, 1)

উত্তর: ক (1, 0)

ব্যাখ্যা: x অক্ষের স্পর্শ বিন্দু ≡ (– g, 0) ≡ (1, 0)

৪০। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ– [ম. বো. ২২]

ক $\frac{1}{2}$ খ 1
গ 2 ঘ 3

উত্তর: খ 1

ব্যাখ্যা: $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{1 + 1 - 1} = 1$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৪১ ও ৪২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 8 = 0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

৪১। বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি? [ব. বো. ১৯]

ক (– 2, 4) খ (2, – 4)
গ (1, – 2) ঘ (– 1, 2)

উত্তর: গ (1, – 2)

ব্যাখ্যা: সবসময় বৃত্তের সমীকরণকে আদর্শ আকারে নিতে হবে।
[$x^2$ ও $y^2$ এর সহগ সমান করে]

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$
কেন্দ্র ≡ (1, – 2)

৪২। বৃত্তটি দ্বারা x অক্ষের খণ্ডিত অংশ কত? [ব. বো. ১৯]

ক $4\sqrt{6}$ খ $4\sqrt{3}$
গ $4\sqrt{2}$ ঘ $2\sqrt{5}$

উত্তর: ঘ $2\sqrt{5}$

ব্যাখ্যা: x অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{1 + 4} = 2\sqrt{5}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৪৩ ও ৪৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$

৪৩। বৃত্তটির y অক্ষের ছেদকৃত অংশের পরিমাণ– [দি. বো. ১৭]

ক 6 খ $2\sqrt{2}$
গ $4\sqrt{2}$ ঘ 0

উত্তর: গ $4\sqrt{2}$

ব্যাখ্যা: y অক্ষের ছেদাংশ $= 2\sqrt{f^2 - c}$
$= 2\sqrt{9 - 1}$
$= 4\sqrt{2}$

৪৪। উদ্দীপকের বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কোনটি? [দি. বো. ১৭]

ক 2 খ 3
গ $2\sqrt{3}$ ঘ $\sqrt{14}$

উত্তর: গ $2\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: (– g, – f) = (– 2, 3); g = 2, f = – 3 এবং c = 1
ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
$= \sqrt{4 + 9 - 1}$
$= 2\sqrt{3}$

## বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক, অভিলম্বের সমীকরণ ও স্পর্শকের দৈর্ঘ্য সম্পর্কিত

৪৫। $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তের $(-1, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [ব. বো. ২৩]

ক $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ খ $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$
গ $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$ ঘ $\sqrt{3}x - y - 4 = 0$

উত্তর: ক $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$

ব্যাখ্যা: $x.(-1) + y.\sqrt{3} = 4$
$\Rightarrow x - \sqrt{3}y + 4 = 0$

৪৬। $x^2 + y^2 - 2x = 0$ বৃত্তের (1, – 1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২; চ. বো. ২২; দি. বো. ২২; ম. বো. ২২; ব. বো. ১৭; কু: বো: ১৭]

ক $y - 1 = 0$ খ $y + 1 = 0$
গ $2x - y - 1 = 0$ ঘ $2x - y + 1 = 0$

উত্তর: খ $y + 1 = 0$

ব্যাখ্যা: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ বৃত্তের (1, – 1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.1 + y.(-1) - 2 \times \left(\frac{x+1}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow x - y - (x + 1) = 0$
$\therefore y + 1 = 0$

৪৭। (– 2, – 1) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কোনটি? [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩; ব. বো. ২৩, ২২; রা. বো. ২২; সি. বো. ২২; দি. বো. ১৯]

ক $\sqrt{10}$ একক খ $2\sqrt{5}$ একক
গ $\sqrt{24}$ একক ঘ $5\sqrt{2}$ একক

উত্তর: খ $2\sqrt{5}$ একক

ব্যাখ্যা: (– 2, – 1) বিন্দু থেকে বৃত্তে স্পর্শকের দৈর্ঘ্য,
$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 - 6(-2) + 2(-1) + 5}$
$= 2\sqrt{5}$

৪৮। (1, – 1) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 7 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য– [রা. বো. ১৭]

ক $\sqrt{2}$ খ $\sqrt{10}$
গ 4 ঘ 10

উত্তর: খ $\sqrt{10}$

ব্যাখ্যা: দৈর্ঘ্য $= \sqrt{1^2 + (-1)^2 - 3(1) - 4(-1) + 7}$
$= \sqrt{10}$ একক

৪৯। $x + y = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে কোনটি সঠিক?

ক $a^2 - 2a = 1$ খ $a^2 + 2a = 1$
গ $a^2 + 2a = 1$ ঘ $a^2 - 2a = -1$

উত্তর: গ $a^2 + 2a = 1$

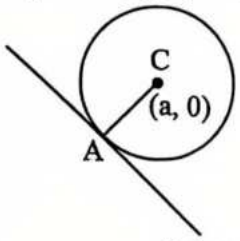


t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: বৃত্তের কেন্দ্র (a, 0) এবং ব্যাসার্ধ = a একক




$x + y - 1 = 0$

$\therefore$ AC = বৃত্তের ব্যাসার্ধ

$\Rightarrow \left|\frac{a+0-1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = a$

$\Rightarrow (a-1)^2 = 2a^2$

$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 2a^2$

$\therefore a^2 + 2a = 1$

৫০। $y = mx + c$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত–

ⓚ $c = \pm\sqrt{m^2+1}$ ⓛ $x = \pm\sqrt{m^2+1}$

ⓜ $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$ ⓝ $c = \pm\sqrt{a(1+m^2)}$

উত্তর: ⓜ $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$

ব্যাখ্যা: $y = mx + c$

$x^2 + y^2 = a^2$

$\Rightarrow x^2 + (mx+c)^2 = a^2$

$\Rightarrow x^2 + m^2x^2 + 2mxc + c^2 = a^2$

$\Rightarrow (m^2+1)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$

স্পর্শক হলে,

$D = 0$

$\Rightarrow (2mc)^2 - 4(m^2+1)(c^2-a^2) = 0$

$\Rightarrow 4m^2c^2 - 4m^2c^2 + 4m^2a^2 - 4c^2 + 4a^2 = 0$

$\Rightarrow m^2a^2 - c^2 + a^2 = 0$

$\Rightarrow c^2 = a^2(1+m^2)$

$\therefore c = \pm a\sqrt{1+m^2}$

৫১। $4x + 3y = a$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে– [রা. বো. ২২]

(i) বৃত্তের কেন্দ্র (2, 0)

(ii) বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4

(iii) a এর মান 18 অথবা –2

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ ii ও iii

ⓜ i ও iii ⓝ i, ii ও iii

উত্তর: ⓜ i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) কেন্দ্র $\equiv \left(\frac{x \text{ এর সহগ}}{-2}, \frac{y \text{ এর সহগ}}{-2}\right) \equiv (2, 0)$

(ii) $r = \sqrt{g^2+f^2-c} = \sqrt{4+0-0} = 2$

অথবা, বৃত্তের কেন্দ্র হতে রেখার দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ; এভাবে করেও a এর মান বের করতে পারো।

**Easy Tricks:** যেহেতু বহুপদী এবং অপশন গুলো এমন ভাবে দেওয়া যে (ii) নং ভুল মানে (i) ও (iii) নং সঠিক।

❖ উদ্দীপকের আলোকে ৫২ ও ৫৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 + y^2 = 12x - 30$ একটি বৃত্তের সমীকরণ

৫২। বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি? [কু. বো. ২৩]

ⓚ (– 6, 0) ⓛ (– 3, 0)

ⓜ (3, 0) ⓝ (6, 0)

উত্তর: ⓝ (6, 0)

ব্যাখ্যা: $x^2 + y^2 - 12x + 30 = 0$

কেন্দ্র (6, 0) $\Big| -g = \frac{-12}{-2} = 6, -f = 0$

৫৩। (1, – 1) বিন্দু হতে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত একক? [কু. বো. ২৩]

ⓚ $2\sqrt{11}$ ⓛ $2\sqrt{5}$

ⓜ $2\sqrt{6}$ ⓝ $3\sqrt{2}$

উত্তর: ⓛ $2\sqrt{5}$

ব্যাখ্যা: $x^2 + y^2 - 12x + 30 = 0$; (1, – 1) বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকের

দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 - 12.1 + 30}$

$= \sqrt{1 + 1 - 12 + 30}$

$= 2\sqrt{5}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৫৪ ও ৫৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

৫৪। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত? [দি. বো. ১৯]

ⓚ $3\sqrt{2}$ ⓛ $\sqrt{30}$

ⓜ $2\sqrt{5}$ ⓝ $\sqrt{10}$

উত্তর: ⓜ $2\sqrt{5}$

ব্যাখ্যা: ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2+f^2-c} = \sqrt{9+1+10} = 2\sqrt{5}$

৫৫। বৃত্তের উপর (1, – 1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [দি. বো. ১৯]

ⓚ $2x - y - 4 = 0$ ⓛ $2x - y - 3 = 0$

ⓜ $x - 3 = 0$ ⓝ $x - 4 = 0$

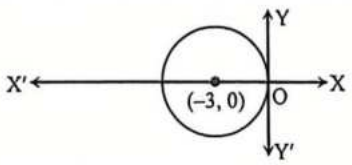
উত্তর: ⓛ $2x - y - 3 = 0$

ব্যাখ্যা: $x.1 + y.(-1) + 6\left(\frac{x+1}{2}\right) - 2\left(\frac{y-1}{2}\right) - 10 = 0$

$\Rightarrow x - y + 3x + 3 - y + 1 - 10 = 0$

$\Rightarrow 4x - 2y - 6 = 0 \therefore 2x - y - 3 = 0$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৫৬ ও ৫৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




৫৬। বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? [রা. বো. ১৭]

ⓚ $x^2 + y^2 - 6x = 0$ ⓛ $x^2 + y^2 + 6x = 0$

ⓜ $x^2 + y^2 - 6y = 0$ ⓝ $x^2 + y^2 + 6y = 0$

উত্তর: ⓛ $x^2 + y^2 + 6x = 0$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: কেন্দ্র $(-3, 0)$ ; ব্যাসার্ধ $= 3$

$(x+3)^2 + (y-0)^2 = 3^2$
$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 = 9$
$\therefore x^2 + y^2 + 6x = 0$

$\because$ বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে,
$\therefore$ ব্যাসার্ধ $= |$কেন্দ্রের ভুজ$|$
$= |-3| = 3$

**৫৭। বৃত্তটির যে স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল উহার সমীকরণ কোনটি?** [রা. বো. ১৭]

ক $y - 6 = 0$ খ $y + 6 = 0$
গ $x - 6 = 0$ ঘ $x + 6 = 0$

উত্তর: ঘ $x + 6 = 0$

ব্যাখ্যা: y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $x = a$
বৃত্তটির যে স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল তা $(-6, 0)$ বিন্দুগামী।
$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $x = -6$
$\therefore x + 6 = 0$

**৫৮। $y = mx + c$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত–** [য. বো. ২২]

ক $c = -25\sqrt{1+m^2}$ খ $c = 25\sqrt{1+m^2}$
গ $c = \pm 5\sqrt{1+m^2}$ ঘ $c = \pm 5\sqrt{1-m^2}$

উত্তর: গ $c = \pm 5\sqrt{1+m^2}$

ব্যাখ্যা: $y = mx + c$ সরলরেখাটির $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করার
শর্ত: $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$
এখানে, $c = \pm 5\sqrt{1+m^2}$

$x^2 + y^2 = 25$
$a =$ ব্যাসার্ধ $= 5$

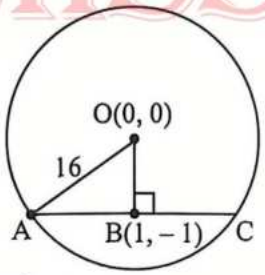
## জ্যা এর সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য

**৫৯। $x^2 + y^2 = 256$ বৃত্তের যে জ্যা $(1, -1)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তার সমীকরণ কোনটি?**

ক $x - y = 0$ খ $x - y = 2$
গ $x + y = 0$ ঘ $x + y$

উত্তর: খ $x - y = 2$

ব্যাখ্যা: $x^2 + y^2 = 256 = 16^2$




কেন্দ্র $(0, 0)$ ও ব্যাসার্ধ $= 16$ একক
OB এর সমীকরণ: $\frac{y-0}{x-0} = \frac{0+1}{0-1}$
$\Rightarrow y = -x \Rightarrow x + y = 0$
$\because$ AC $\perp$ OB, AC এর সমীকরণ: $x - y + k = 0$ ..... (i)
$(1, -1)$ বিন্দুটি AC রেখার উপর অবস্থিত।
$1 + 1 + k = 0$
$\Rightarrow k = -2$
(i) থেকে পাই,
$x - y - 2 = 0$
$\Rightarrow x - y = 2$

❖ **নিচের তথ্যের আলোকে ৬০ ও ৬১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**
**$x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$ এবং**
**$3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 3 = 0$ দুটি বৃত্তের সমীকরণ।**

**৬০। ২য় বৃত্তের দ্বারা x অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য কত?** [সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২, ১৭]

ক $3\sqrt{2}$ খ $2\sqrt{3}$
গ $2\sqrt{2}$ ঘ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

উত্তর: গ $2\sqrt{2}$

ব্যাখ্যা: এখানে, ২য় বৃত্ত, $3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 3 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3y - 1 = 0$
$\therefore g = -1, f = -\frac{3}{2}$ এবং $c = -1$

x অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c}$
$= 2\sqrt{(-1)^2 - (-1)}$
$= 2\sqrt{1+1}$
$= 2\sqrt{2}$

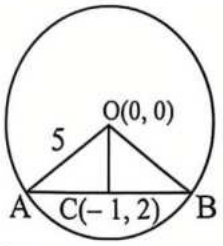
**৬১। বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ–** [সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২, ১৭; য. বো. ১৯]

ক $x - y - 6 = 0$ খ $x + y + 6 = 0$
গ $x + y - 6 = 0$ ঘ $x - y + 6 = 0$

উত্তর: গ $x + y - 6 = 0$

ব্যাখ্যা: পরস্পরছেদি দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ হবে বৃত্তদ্বয়ের আদর্শ সমীকরণের বিয়োগফল।
১ম বৃত্ত $\rightarrow x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$ ..... (i)
২য় বৃত্ত $\rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3y - 1 = 0$ ..... (ii)
সাধারণ জ্যা, (i) – (ii) $\Rightarrow -x - y + 6 = 0$
$\Rightarrow x + y - 6 = 0$

❖ **নিচের উদ্দীপকের আলোকে ৬২ ও ৬৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**




**C, AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু** [দি. বো. ২৩]

**৬২। AB জ্যায়ের সমীকরণ কোনটি?**

ক $x + 2y - 3 = 0$ খ $2x + y = 0$
গ $2x - y + 4 = 0$ ঘ $x - 2y + 5 = 0$

উত্তর: ঘ $x - 2y + 5 = 0$

Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**ব্যাখ্যা:** OC এর ঢাল $= \frac{2-0}{-1-0} = \frac{2}{-1}$

$\therefore$ OC রেখার ঢাল $\times$ AB রেখার ঢাল $= -1$ [$\because$ OC $\perp$ AB]

$\Rightarrow$ AB রেখার ঢাল $= \frac{1}{2}$

$\therefore$ AB এর সমীকরণ, $y-2 = \frac{1}{2}(x+1)$

$\Rightarrow 2y-4 = x+1$

$\therefore x-2y+5 = 0$

**৬৩। AB জ্যার দৈর্ঘ্য কোনটি?**

ক $4\sqrt{5}$ খ $2\sqrt{6}$

গ $5\sqrt{2}$ ঘ $2\sqrt{5}$

**উত্তর:** ক $4\sqrt{5}$

**ব্যাখ্যা:** $OC = \sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

$OA^2 = OC^2 + AC^2$

$\therefore AC^2 = 25-5 = 20$

$\therefore AC = 2\sqrt{5}$

$AB = 2AC = 4\sqrt{5}$

## বিবিধ

**৬৪। $x^2+y^2-12x+4y+6=0$ বৃত্তের ব্যাসের সমীকরণ– [ব. বো. ১৭]**

ক $x+y=0$ খ $x=y$

গ $x+3y=0$ ঘ $3x+2y=0$

**উত্তর:** গ $x+3y=0$

**ব্যাখ্যা:** বৃত্তটির কেন্দ্র $(6,-2)$

Option গুলোর মধ্যে যেটি এই বিন্দু দিয়ে সিদ্ধ হবে সেটিই ব্যাসের সমীকরণ ; কারণ ব্যাস অবশ্যই কেন্দ্রগামী।

অপশন গ $x+3y=0$, $(6,-2)$ বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হয়।

$\therefore x+3y=0$ রেখাটি $(6,-2)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

**৬৫। $x+y=4$ রেখাটি $x^2+y^2-12x-8y+34=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? [চ. বো. ২২]**

ক $(1,3)$ খ $(3,1)$

গ $(3,2)$ ঘ $(2,5)$

**উত্তর:** খ $(3,1)$

**ব্যাখ্যা:** $(3,1)$ বিন্দুটি $x+y=4$ রেখা এবং $x^2+y^2-12x-8y+34=0$ বৃত্ত উভয়কেই সিদ্ধ করে। তাই এটিই নির্ণেয় উত্তর।

**৬৬। $2x-y+k=0$ রেখাটি যদি $x^2+y^2-12x+5=0$ বৃত্তের ব্যাস হয় তবে, k এর মান কোনটি? [য. বো. ২৩]**

ক 24 খ 12

গ $-12$ ঘ $-24$

**উত্তর:** গ $-12$

**ব্যাখ্যা:** r বৃত্তের ব্যাস মানে বৃত্তের কেন্দ্র $2x-y+k=0$ রেখার উপর অবস্থিত।

বৃত্তের কেন্দ্র $(6,0)$

$2\times6-0+k=0$

$\therefore k=-12$

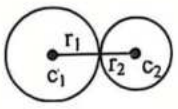
**৬৭। $x^2+y^2=9$ এবং $x^2+y^2+6x+8y+c=0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে c এর মান কত? [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৯]**

ক $-39$ খ $-21$

গ 39 ঘ 21

**উত্তর:** ঘ 21

**ব্যাখ্যা:** বৃত্তদ্বয় বহিঃস্থ ভাবে স্পর্শ করলে




$c_1c_2 = r_1 + r_2$

$c_1(0,0)$ ; $r_1 = 3$

$c_2(-3,-4)$ ; $r_2 = \sqrt{9+16-c}$

শর্তমতে, $c_1c_2 = r_1 + r_2$

$\Rightarrow \sqrt{(0+3)^2+(0+4)^2} = 3+\sqrt{25-c}$

$\therefore c = 21$

**৬৮। বিন্দু বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? [ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সকল বো. ১৮]**

ক $x^2+y^2-2x+2y+1=0$

খ $x^2+y^2-2x+2y+2=0$

গ $x^2+y^2-2x+2y-1=0$

ঘ $x^2+y^2-2x+2y=0$

**উত্তর:** খ $x^2+y^2-2x+2y+2=0$

**ব্যাখ্যা:** বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ শূন্য।

$\therefore$ অপশন খ এর ক্ষেত্রে,

$r = \sqrt{g^2+f^2-c}$

$= \sqrt{1+1-2}$ [$g=-1, f=1, c=2$]

$= 0$

**৬৯। $x^2+y^2+6x-4y-3=0$ বৃত্তের ক্ষেত্রে– [সি. বো. ২৩]**

**(i) কেন্দ্র $(-3,2)$**

**(ii) ব্যাসার্ধ = 4**

**(iii) মূলবিন্দুটি বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত**

**নিচের কোনটি সঠিক?**

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** ঘ i, ii ও iii

**ব্যাখ্যা:** (i) কেন্দ্র $(-3,2) \equiv (-g,-f)$

(ii) ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(3)^2+(-2)^2-(-3)} = 4$ একক

(iii) মূলবিন্দু বৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$(0)^2+(0)^2+6(0)-4(0)-3 < 0$

$\therefore$ মূলবিন্দুটি বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত।

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## নিজেকে যাচাই করো

১। $x^2 + y^2 - 2x = 0$ বৃত্তের (1, – 1) বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি?
ক $y - 1 = 0$ খ $y + 1 = 0$
গ $2x - y - 1 = 0$ ঘ $2x - y + 1 = 0$

২। $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে ছেদ করে না, যখন–
ক $g^2 > c$ খ $g^2 < c$ গ $f^2 > c$ ঘ $f^2 < c$

৩। (2, – 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং $y = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে এমন বৃত্তের সমীকরণ হলো–
ক $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ খ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
গ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$
ঘ $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$

৪। $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 6 = 0$ বৃত্তের ব্যাসের সমীকরণ–
ক $x + y = 0$ খ $x = y$
গ $x + 3y = 0$ ঘ $3x + 2y = 0$

৫। $x^2 + y^2 = 256$ বৃত্তের যে জ্যা (1, – 1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তার সমীকরণ কোনটি?
ক $x - y = 0$ খ $x - y = 2$ গ $x + y = 0$ ঘ $x + y$

৬। $r = 2a\cos\theta$ বৃত্তের–
(i) কেন্দ্র (a, 0)
(ii) ব্যাসার্ধ 2a
(iii) x অক্ষ হতে ছেদাংশের পরিমাণ 2a
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৭। $x + y = 4$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি?
ক (1, 3) খ (3, 1) গ (3, 2) ঘ (2, 5)

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৮ ও ৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 - 12x + 8y + c = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে।

৮। c এর মান কত?
ক – 6 খ 4
গ 16 ঘ 36

৯। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?
ক (0, – 4) খ (0, 4) গ (6, 0) ঘ (– 6, 0)

১০। (– 7, 8) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত y অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তটির ব্যাস কত?
ক 7 খ 8 গ 14 ঘ 16

১১। $x + y = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে কোনটি সঠিক?
ক $a^2 - 2a = 1$ খ $a^2 + 2a = 1$ গ $a^2 + 2a = 1$ ঘ $a^2 - 2a = -1$

১২। $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ বৃত্তটি–
(i) মূলবিন্দুগামী
(ii) x অক্ষ থেকে 4 একক অংশ খণ্ডন করে
(iii) y অক্ষকে (0, –6) বিন্দুতে ছেদ করে
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ ii ও iii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

১৩। A(1, 2) ও B(2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি?
ক $x^2 + y^2 - 3x - 5y + 8 = 0$ খ $x^2 + y^2 - 3x + 5y + 8 = 0$
গ $x^2 + y^2 + 3x + 5y + 8 = 0$ ঘ $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 8 = 0$

১৪। $2x - y + k = 0$ রেখাটি যদি $x^2 + y^2 - 12x + 5 = 0$ বৃত্তের ব্যাস হয় তবে, k এর মান কোনটি?
ক 24 খ 12 গ – 12 ঘ – 24

১৫। $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ বৃত্তের ক্ষেত্রে–
(i) কেন্দ্র (– 3, 2) (ii) ব্যাসার্ধ = 4 (iii) মূলবিন্দুটি বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১৬। (1, 0) এবং (0, 2) বিন্দুগামী এবং x অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ কোনটি?
ক $\frac{3}{2}$ খ $\frac{5}{2}$ গ $\frac{41}{2}$ ঘ $\frac{25}{4}$

১৭। বিন্দু বৃত্তের সমীকরণ কোনটি?
ক $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ খ $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$
গ $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ ঘ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$

১৮। $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ বৃত্তের ক্ষেত্রে–
(i) ব্যাসার্ধ 2 একক (ii) একটি স্পর্শক $y = 1$
(iii) বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১৯। $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 20 = 0$ বৃত্ত দ্বারা y অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কত একক?
ক $2\sqrt{5}$ খ $6\sqrt{5}$ গ 8 ঘ $4\sqrt{14}$

২০। (2, – 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করলে তার সমীকরণ কোনটি?
ক $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2$ খ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 2^2$
গ $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2^2$ ঘ $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$

২১। $x^2 + y^2 = 9$ এবং $x^2 + y^2 + 6x + 8y + c = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে c এর মান কত?
ক – 39 খ – 21 গ 39 ঘ 21

২২। পোলার স্থানাংকে $r^2 - 2r\sin\theta = 3$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত একক?
ক 2 খ 3 গ 4 ঘ 6

২৩। $4x + 3y = a$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে–
(i) বৃত্তের কেন্দ্র (2, 0) (ii) বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4
(iii) a এর মান 18 অথবা – 2
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ ii ও iii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

২৪। (– 2, – 1) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কোনটি?
ক $\sqrt{10}$ একক খ $2\sqrt{5}$ একক গ $\sqrt{24}$ একক ঘ $5\sqrt{2}$ একক

২৫। $y = mx + c$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত–
ক $c = -25\sqrt{1 + m^2}$ খ $c = 25\sqrt{1 + m^2}$
গ $c = \pm 5\sqrt{1 + m^2}$ ঘ $c = \pm 5\sqrt{1 - m^2}$

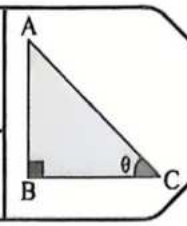
| উত্তরপত্র | ১ | খ | ২ | খ | ৩ | ক | ৪ | গ | ৫ | খ | ৬ | খ | ৭ | খ | ৮ | ঘ | ৯ | গ | ১০ | গ | ১১ | গ | ১২ | ক |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ১৩ | ক | ১৪ | গ | ১৫ | ঘ | ১৬ | খ | ১৭ | খ | ১৮ | ক | ১৯ | গ | ২০ | ঘ | ২১ | ঘ | ২২ | ক | ২৩ | গ | ২৪ | খ | ২৫ | গ |

t.me/admission_stuffs
Rhombus Publications

PDF Credit - Admission Stuffs

# ০৭ সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

## Trigonometric Ratios of Associated Angles




## Board Questions Analysis

সৃজনশীল প্রশ্ন

| বোর্ড / সাল | ঢাকা | ময়মনসিংহ | রাজশাহী | কুমিল্লা | যশোর | চট্টগ্রাম | বরিশাল | সিলেট | দিনাজপুর |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ২০২৩ | ২ | ১ | ১ | ২ | ১ | ১ | ১ | ২ | ১ |
| ২০২২ | ২ | ১ | ২ | ১ | ১ | ১ | ১ | ২ | ১ |

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

| বোর্ড / সাল | ঢাকা | ময়মনসিংহ | রাজশাহী | কুমিল্লা | যশোর | চট্টগ্রাম | বরিশাল | সিলেট | দিনাজপুর |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ২০২৩ | ৪ | ৪ | ৫ | ৪ | ৫ | ৫ | ৪ | ৪ | ৪ |
| ২০২২ | ৪ | ৪ | ২ | ৪ | ৪ | ৪ | ৪ | ৪ | ৪ |

## এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

❑ যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:

**(i) sin/cos এর যৌগিক কোণের সূত্র:**

- $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

**(ii) sin/cos এর গুণকে যোগ ও বিয়োগ আকারে:**

- $\sin(A + B)\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$
- $\cos(A + B)\cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$

**(iii) tan/cot এর যৌগিক কোণের সূত্র:**

- $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
- $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$
- $\cot(A + B) = \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$
- $\cot(A - B) = \dfrac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$
- $\tan(A + B)\tan(A - B) = \dfrac{\tan^2 A - \tan^2 B}{1 - \tan^2 A \tan^2 B}$
- $\cot(A + B)\cot(A - B) = \dfrac{\cot^2 A \cot^2 B - 1}{\cot^2 B - \cot^2 A}$
- $\tan(A + B + C) = \dfrac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$

❑ যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের অনুসিদ্ধান্ত ও প্রয়োগ এর প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:

**(i) sin/cos এর গুণকে যোগ ও বিয়োগ আকারে প্রকাশ:**

- $2\sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$
- $2\cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$
- $2\cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$
- $2\sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$

**(ii) sin/cos এর যোগ ও বিয়োগকে গুণ আকারে প্রকাশ:**

- $\sin C + \sin D = 2\sin\dfrac{C + D}{2}\cos\dfrac{C - D}{2}$
- $\sin C - \sin D = 2\cos\dfrac{C + D}{2}\sin\dfrac{C - D}{2}$
- $\cos C + \cos D = 2\cos\dfrac{C + D}{2}\cos\dfrac{C - D}{2}$
- $\cos C - \cos D = 2\sin\dfrac{C + D}{2}\sin\dfrac{D - C}{2}$

❑ গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এর প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:

**(i) sin/cos এর যোগ ও বিয়োগকে গুণ আকারে প্রকাশ:**

$1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$

$1 + \cos 2A = 2\cos^2 A$

**Note:** উপগুণিতক কোণের ক্ষেত্রে–

$1 - \cos A = 2\sin^2\dfrac{A}{2}$

$1 + \cos A = 2\cos^2\dfrac{A}{2}$

**(ii) গুণিতক কোণের sin/cos/tan এর সূত্র:**

- $\sin 2A = 2\sin A \cos A$
  $= \dfrac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



- $\cos2A = \cos^2A - \sin^2A$
  $= 1 - 2\sin^2A$
  $= 2\cos^2A - 1$
  $= \frac{1 - \tan^2A}{1 + \tan^2A}$
- $\tan2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2A}$

**(iii) বিশেষ সূত্র:**

- $\sin3A = 3\sin A - 4\sin^3A$
- $\cos3A = 4\cos^3A - 3\cos A$
- $\tan3A = \frac{3\tan A - \tan^3A}{1 - 3\tan^2A}$
- $\cot3A = \frac{\cot^3A - 3\cot A}{3\cot^2A - 1}$

❑ **ত্রিভূজের সাইন সূত্র এবং কোসাইন সূত্র:**

**ত্রিভূজের সাইন সূত্র:**

**(i)** $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

- $a = 2R\sin A$
- $b = 2R\sin B$
- $c = 2R\sin C$

**(ii)** $\sin A = \frac{a}{2R}$

- $\sin B = \frac{b}{2R}$
- $\sin C = \frac{c}{2R}$

**ত্রিভূজের কোসাইন সূত্র:**

**(iii)** $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

- $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
- $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

**(iv)** $a = b\cos C + c\cos B$

- $b = c\cos A + a\cos C$
- $c = a\cos B + b\cos A$

**ত্রিভূজের অর্ধ কোণসমূহের সূত্র:**

**(v)** $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

- $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$
- $\tan\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$

**(vi) $\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল,**

$= \frac{1}{2}bc\sin A$

$= \frac{1}{2}ca\sin B$

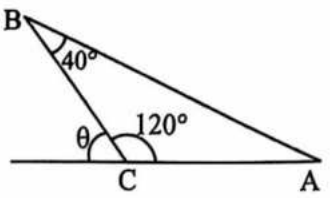
$= \frac{1}{2}ab\sin C$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ABC ত্রিভূজের পরিব্যাসার্ধ, $R = \frac{abc}{4\Delta}$ এবং অন্তঃব্যাসার্ধ, $r = \frac{\Delta}{s}$

## HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

**প্রশ্ন ▶ ১**




**(ক)** $\cot\theta = \sqrt{2}$ হলে, $\cos2\theta$ এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৩]

**(খ)** উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{cosec}A - \frac{1}{4}\sec A = 1$ [ঢা. বো. ২৩]

**(গ)** উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে,

$3 - \cos^2(\theta + A) - \cos^2A - \cos^2(\theta - A) = \frac{3}{2}$ [ঢা. বো. ২৩]

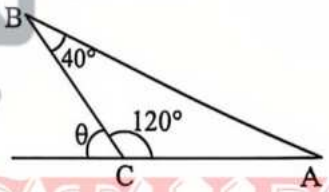
**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $\cot\theta = \sqrt{2}$

$\therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

এখন, $\cos2\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

**খ** ABC ত্রিভুজে, $B = 40°$, $C = 120°$




$\therefore A + B + C = 180°$

$\Rightarrow A = 180° - 40° - 120°$

$\therefore A = 20°$

$\text{L.H.S} = \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{cosec}A - \frac{1}{4}\sec A$

$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\operatorname{cosec}20° - \sec20°\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sin20°} - \frac{1}{\cos20°}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}\cos20° - \sin20°}{\sin20°.\cos20°}\right)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos20° - \frac{1}{2}\sin20°\right)}{\sin20°.\cos20°}$

$= \frac{\sin60°.\cos20° - \cos60°.\sin20°}{2\sin20°.\cos20°}$

[হরে sin এর সূত্র আসবে, এজন্য লবে এমন করেই মান বসাতে হবে যাতে sin এর সূত্র আসে]

$= \frac{\sin(60° - 20°)}{\sin(2 \times 20°)} = \frac{\sin40°}{\sin40°} = 1 = \text{R.H.S}$ **(Showed)**

ADMISSION STUFFS

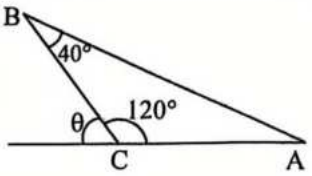
Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** চিত্র হতে,




$A = 20°$

$C = 120°$

এখন, $\theta = 180° - 120°$

$= 60°$

$L.H.S = 3 - \cos^2(\theta + A) - \cos^2 A - \cos^2(\theta - A)$

$= 3 - \cos^2 80° - \cos^2 20° - \cos^2 40°$

$= 3 - \frac{1}{2}(2\cos^2 80° + 2\cos^2 20° + 2\cos^2 40°)$

$= 3 - \frac{1}{2}(1 + \cos 160° + 1 + \cos 40° + 1 + \cos 80°)$

$= 3 - \frac{1}{2}(3 + \cos 40° + \cos 80° + \cos 160°)$

$= 3 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\{\cos 40° + (\cos 80° + \cos 160°)\}$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 40° + 2.\cos 120° . \cos 40°)$

$\left[\cos 120° = -\frac{1}{2}\right]$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 40° - \cos 40°)$

$= \frac{3}{2} = R.H.S$ **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ২** দৃশ্যকল্প-১: $\cos x + \cos y = a$, $\sin x + \sin y = b$

দৃশ্যকল্প-২: $\Delta PQR$ এ $p = 2q$ এবং $P = 3Q$

(ক) $\tan 3\theta$ কে $\tan\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ঢা. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $\cos(x + y)$ এর মান a ও b এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সকল বো. ১৮]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে R কোণ এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** $\tan 3\theta = \tan(\theta + 2\theta)$

$= \frac{\tan\theta + \tan 2\theta}{1 - \tan\theta.\tan 2\theta}$

$= \frac{\tan\theta + \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}}{1 - \tan\theta\frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}}$

$= \frac{\frac{\tan\theta - \tan^3\theta + 2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}}{\frac{1 - \tan^2\theta - 2\tan^2\theta}{1 - \tan^2\theta}}$

$= \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে,

$\cos x + \cos y = a$

$\Rightarrow 2\cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} = a$ ..... (i)

এবং $\sin x + \sin y = b$

$\Rightarrow 2\sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} = b$ ..... (ii)

(ii) ÷ (i) করে পাই,

$\frac{\sin\frac{x + y}{2}}{\cos\frac{x + y}{2}} = \frac{b}{a}$

$\Rightarrow \tan\frac{x + y}{2} = \frac{b}{a}$ ..... (iii)

প্রদত্ত রাশি, $\cos(x + y)$

$= \cos 2\cdot\left(\frac{x + y}{2}\right)$

$= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x + y}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x + y}{2}\right)}$

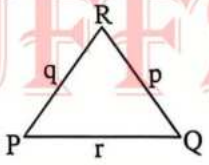
$= \frac{1 - \frac{b^2}{a^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ [(iii) নং থেকে মান বসিয়ে]

$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ **(Ans.)**

**গ** দৃশ্যকল্প-২ হতে,

$p = 2q$ ; $P = 3Q$

এখন ত্রিভুজের সাইন সূত্রানুসারে,




এখন, $\frac{p}{\sin P} = \frac{q}{\sin Q} = \frac{r}{\sin R}$

$\Rightarrow \frac{p}{\sin P} = \frac{q}{\sin Q}$

$\Rightarrow \frac{2q}{\sin 3Q} = \frac{q}{\sin Q}$

$\Rightarrow 2 = \frac{\sin 3Q}{\sin Q}$

$\Rightarrow 2 = \frac{3\sin Q - 4\sin^3 Q}{\sin Q}$

$\Rightarrow 2 = 3 - 4\sin^2 Q$

$\Rightarrow 4\sin^2 Q = 1$

$\sin Q = \frac{1}{2} = \sin 30°$ [$\because$ Q সূক্ষ্মকোণ]

$\Rightarrow Q = 30°$

$\therefore P = 3 \times 30° = 90°$

$\therefore R = 180° - (P + Q)$

$= 180° - 120°$

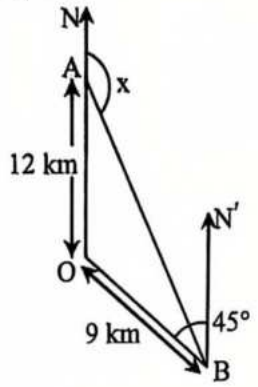
$= 60°$ **(Ans.)**

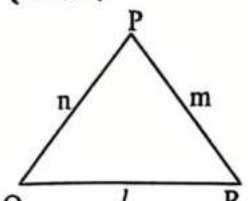
ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▸ ৩** দৃশ্যকল্প-১: দৃশ্যকল্প-২:




ON || BN′

(ক) $\tan\theta = \frac{y}{x}$ হলে, দেখাও যে, $x\cos2\theta + y\sin2\theta = x$ [রা. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ ব্যবহার করে AB দূরত্ব নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩]

(গ) $\frac{1}{T-m} + \frac{1}{T-l} = \frac{3}{T}$ হলে, দৃশ্যকল্প-২ এর ত্রিভুজের R কোণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে,

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$L.H.S = x\cos2\theta + y\sin2\theta$$

$$= x.\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} + y.\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$= x.\frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} + y.\frac{2.\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$= x.\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^3-xy^2+2xy^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x = R.H.S \text{ (Showed)}$$

**খ** এখানে,

OA = a = 12 km

OB = b = 9 km

AB = c = ?

যেহেতু, ON || BN′ ∴ TN || BN′

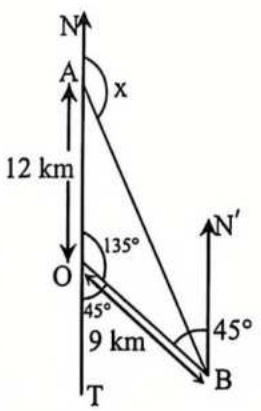
∴ ∠BOT = ∠OBN′ = 45°

[একান্তর কোণ পরস্পর সমান এবং OB ছেদক]

∴ ∠AOB = 180° − ∠BOT

= 180° − 45°

= 135°




ধরি, ∠AOB = ∠C = 135°

আমরা জানি,

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\Rightarrow \cos135° = \frac{144+81-c^2}{216}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{225-c^2}{216}$$

$$\Rightarrow \frac{-216}{\sqrt{2}} = 225-c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 225 + \frac{216}{\sqrt{2}}$$

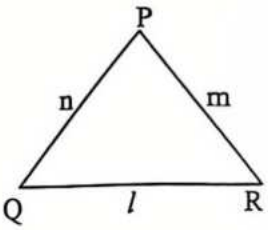
$$\Rightarrow c^2 = 377.73506$$

$$\Rightarrow c = 19.4354 \text{ km}$$

∴ AB = 19.44 km **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $T = l + m + n$

প্রদত্ত সমীকরণ,




$$\frac{1}{T-m} + \frac{1}{T-l} = \frac{3}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l+n} + \frac{1}{m+n} = \frac{3}{m+n+l}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l+n} + \frac{1}{m+n} = \frac{2}{l+m+n} + \frac{1}{l+m+n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l+n} - \frac{1}{l+m+n} = \frac{2}{l+m+n} - \frac{1}{m+n}$$

$$\Rightarrow \frac{l+m+n-l-n}{(l+n)(l+m+n)} = \frac{2m+2n-l-m-n}{(l+m+n)(m+n)}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{l+n} = \frac{m+n-l}{m+n}$$

$$\Rightarrow m^2+mn = ml+nl-l^2+mn+n^2-nl$$

$$\Rightarrow \frac{m^2+l^2-n^2}{ml} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{m^2+l^2-n^2}{2ml} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos R = \cos60°$$

∴ R = 60° **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▸ ৪** PQR একটি ত্রিভুজ।

(ক) cos3A কে cosA এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ম. বো. ২২]

(খ) উদ্দীপক হতে প্রমাণ কর যে,

$$1+4\sin\frac{Q+R}{4}\cdot\sin\frac{R+P}{4}\cdot\sin\frac{P+Q}{4} = \sin\frac{P}{2}+\sin\frac{Q}{2}+\sin\frac{R}{2}$$

[য. বো. ২৩]

(গ) উদ্দীপক হতে প্রমাণ কর যে,

$$p^3\cos(Q-R) + q^3\cos(R-P) + r^3\cos(P-Q) = 3pqr$$

[য. বো. ২৩]

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধান:**

**ক** $\cos3A = \cos(2A + A)$
$= \cos2A\cos A - \sin2A\sin A$
$= (2\cos^2A - 1)\cos A - 2\sin A\cos A\sin A$
$= 2\cos^3A - \cos A - 2\sin^2A\cos A$
$= 2\cos^3A - \cos A - 2(1 - \cos^2A)\cos A$
$= 2\cos^3A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3A$
$\therefore \cos3A = 4\cos^3A - 3\cos A$ **(Ans.)**

**খ** PQR ত্রিভুজে, $P + Q + R = \pi$

$$L.H.S = 1 + 4\sin\frac{Q+R}{4}\sin\frac{R+P}{4}\sin\frac{P+Q}{4}$$
$$= 1 + 2.2\sin\frac{Q+R}{4}.\sin\frac{R+P}{4}\sin\frac{P+Q}{4}$$
$$= 1 + 2\left[\cos\frac{Q+R-R-P}{4} - \cos\frac{Q+R+R+P}{4}\right]\sin\frac{P+Q}{4}$$
$$= 1 + 2\left[\cos\frac{Q-P}{4} - \cos\frac{Q+P+2R}{4}\right]\sin\frac{P+Q}{4}$$
$$= 1 + 2\cos\frac{Q-P}{4}\sin\frac{P+Q}{4} - 2\cos\frac{Q+P+2R}{4}\sin\frac{P+Q}{4}$$
$$= 1 + \sin\left(\frac{Q-P+P+Q}{4}\right) + \sin\left(\frac{P+Q-Q+P}{4}\right)$$
$$- \left\{\sin\left(\frac{Q+P+2R+P+Q}{4}\right) + \sin\left(\frac{P+Q-Q-P-2R}{4}\right)\right\}$$
$$= 1 + \sin\frac{Q}{2} + \sin\frac{P}{2} - \sin\frac{P+Q+R}{2} - \sin\left(-\frac{R}{2}\right)$$
$$= 1 + \sin\frac{Q}{2} + \sin\frac{P}{2} - \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{R}{2}$$
$$= \sin\frac{P}{2} + \sin\frac{Q}{2} + \sin\frac{R}{2} = R.H.S.$$ **(Proved)**

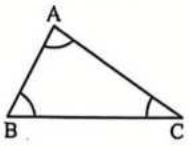
**গ** PQR ত্রিভুজে,

$$\frac{p}{\sin P} = \frac{q}{\sin Q} = \frac{r}{\sin R}$$
$p\sin Q = q\sin P$
$p\sin R = r\sin P$
এবং $p = q\cos R + r\cos Q$
$q = r\cos P + p\cos R$
$r = p\cos Q + q\cos P$
এখন,
$P^3\cos(Q - R)$
$= p\{p^2\cos(Q - R)\}$
$= p(p^2\cos Q.\cos R + p^2\sin Q.\sin R)$
$= p(p\cos Q.p\cos R + p\sin Q.p\sin R)$
$= p\{(r - q\cos P)(q - r\cos P) + q\sin P.r\sin P\}$
$= p(qr - q^2\cos P - r^2\cos P + qr\cos^2P + qr\sin^2P)$
$= p\{qr - (q^2 + r^2)\cos P + qr(\sin^2P + \cos^2P)\}$
$= p\{qr - (q^2 + r^2)\cos P + qr.1\}$
$= p\{2qr - (q^2 + r^2)\cos P\}$
$= 2pqr - p(q^2 + r^2)\cos P$
অনুরূপভাবে,
$q^3\cos(R - P) = 2pqr - q(r^2 + p^2).\cos Q$
এবং $r^3\cos(P - Q) = 2pqr - r(p^2 + q^2)\cos R$

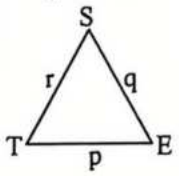
L.H.S
$= p^3\cos(Q - R) + q^3\cos(R - P) + r^3\cos(P - Q)$
$= 2pqr - p(q^2 + r^2)\cos P + 2pqr - q(r^2 + p^2)\cos Q + 2pqr - r(p^2 + q^2)\cos R$
$= 6pqr - pq^2\cos P - r^2p\cos P - qr^2\cos Q - p^2q\cos Q - rp^2\cos R - q^2r\cos R$
$= 6pqr - pq(p\cos Q + q\cos P) - qr(q\cos R + r\cos Q) - rp(r\cos P + p\cos R)$
$= 6pqr - pq.r - qr.p - rp.q$
$= 6pqr - 3pqr$
$= 3pqr = R.H.S$ **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ৫**

দৃশ্যকল্প-১:




দৃশ্যকল্প-২:




(ক) $\frac{\tan42^\circ\tan78^\circ}{\cot6^\circ\cot66^\circ}$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $(c - b)\sec\left(\frac{A}{2} + B\right) = a\sec\frac{A}{2}$ [দি. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ যদি $p^4 + q^4 + r^4 = 2p^2(q^2 + r^2)$ হয়, তবে দেখাও যে, $S = 45^\circ$ অথবা $135^\circ$ [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক**
$$\frac{\tan42^\circ\tan78^\circ}{\cot6^\circ\cot66^\circ}$$
$$= \frac{2\sin78^\circ.\sin42^\circ}{2\cos78^\circ.\cos42^\circ}.\frac{2\sin66^\circ.\sin6^\circ}{2\cos66^\circ.\cos6^\circ}$$
$$= \frac{\cos(78^\circ - 42^\circ) - \cos(78^\circ + 42^\circ)}{\cos(78^\circ + 42^\circ) + \cos(78 - 42^\circ)}.\frac{\cos(66^\circ - 6^\circ) - \cos(66^\circ + 6^\circ)}{\cos(66^\circ + 6^\circ) + \cos(66^\circ - 6^\circ)}$$
$$= \frac{\cos36^\circ - \cos120^\circ}{\cos120^\circ + \cos36^\circ}.\frac{\cos60^\circ - \cos72^\circ}{\cos72^\circ + \cos60^\circ}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{4}}.\frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{1}{2}}$$
$$= \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}.\frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 1}$$ [Calculator দিয়ে ans মিলিয়ে দেখবে]
$$= \frac{9 - 5}{5 - 1} = \frac{4}{4} = 1$$ **(Ans.)**

**খ** ABC ত্রিভুজ হতে পাই, $A + B + C = \pi$
আবার ত্রিভুজের সাইন সূত্রানুসারে,
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$
প্রমাণ করতে হবে যে,
$$(c - b)\sec\left(\frac{A}{2} + B\right) = a\sec\frac{A}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{c - b}{a}\sec\left(\frac{A}{2} + B\right) = \sec\frac{A}{2}$$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$L.H.S = \frac{c-b}{a}\sec\left(\frac{A}{2}+B\right)$$
$$= \frac{2R\sin C - 2R\sin B}{2R\sin A}\sec\left(\frac{A}{2}+B\right)$$
$$= \frac{\sin C - \sin B}{\sin A}\sec\left(\frac{A}{2}+B\right)$$
$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{C-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}} \times \frac{1}{\cos\left(\frac{A}{2}+B\right)}$$
$$= \frac{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}} \times \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}-\frac{C}{2}+B\right)}$$
$$= \frac{\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \times \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)}$$
$$= \frac{\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \times \frac{1}{\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{C-B}{2}\right)\right\}}$$
$$= \frac{\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \times \frac{1}{\sin\frac{C-B}{2}}$$
$$= \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} = \sec\frac{A}{2} = R.H.S \text{ (Proved)}$$

**গ** দেওয়া আছে,

$$p^4+q^4+r^4 = 2p^2(q^2+r^2)$$
$$\Rightarrow p^4+q^4+r^4-2p^2q^2-2p^2r^2 = 0$$
$$\Rightarrow p^4+q^4+r^4+2r^2q^2-2p^2q^2-2p^2r^2 = 2r^2q^2$$
$$\Rightarrow (r^2+q^2-p^2)^2 = 2r^2q^2$$
$$\Rightarrow r^2+q^2-p^2 = \pm\sqrt{2}rq$$
$$\Rightarrow \frac{r^2+q^2-p^2}{2rq} = \pm\frac{\sqrt{2}rq}{2rq}$$
$$\Rightarrow \cos S = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

হয়, $\cos S = \frac{1}{\sqrt{2}}$ অথবা, $\cos S = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

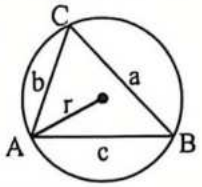
$\Rightarrow \cos S = \cos 45°$ $\Rightarrow \cos S = \cos 135°$

$\therefore S = 45°$ $\therefore S = 135°$

অতএব, $S = 45°$ অথবা $135°$ (Showed)

**প্রশ্ন ▶৬** উদ্দীপক-১: $\Delta ABC$ এ, $A+B+C = \pi$

উদ্দীপক-২:




(ক) উদ্দীপক-১ থেকে প্রমাণ কর যে,
$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ [কু. বো. ২৩]

(খ) উদ্দীপক-২ থেকে প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$ [কু. বো. ২৩]

(গ) উদ্দীপক-১ থেকে প্রমাণ কর যে,
$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2} = 1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$
[কু. বো. ২৩ ; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৫]

সমাধান:

**ক** $\Delta ABC$ এ

$A+B+C = \pi$
$\Rightarrow A+B = \pi - C$
$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan(\pi - C)$
$\Rightarrow \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B} = -\tan C$
$\Rightarrow \tan A+\tan B = -\tan C+\tan A.\tan B.\tan C$
$\therefore \tan A+\tan B+\tan C = \tan A\tan B\tan C$

**খ** এখানে, $\Delta ABC$ এর পরিব্যাসার্ধ = r

ত্রিভুজের সাইন সূত্রানুসারে,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$
$$R.H.S = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$
$$= \frac{2r\sin C - 2r\sin A}{2r\sin C + 2r\sin A}\cdot\cot\frac{B}{2}$$
$$= \frac{\sin C-\sin A}{\sin C+\sin A}\cdot\cot\frac{B}{2}$$
$$= \frac{2\cos\frac{C+A}{2}\cdot\sin\frac{C-A}{2}}{2\sin\frac{C+A}{2}\cdot\cos\frac{C-A}{2}}\cdot\cot\frac{B}{2}$$
$$= \cot\frac{C+A}{2}\cdot\tan\frac{C-A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}$$
$$= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)\cdot\tan\frac{C-A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}$$
$$= \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C-A}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}$$
$$= \tan\frac{C-A}{2} = L.H.S \text{ (Proved)}$$

**গ** এখানে, $\Delta ABC$ এ, $A+B+C = \pi$

$$L.H.S = \sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$$
$$= \frac{1}{2}.\left(2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin^2\frac{B}{2}\right)+\sin^2\frac{C}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(1-\cos A+1-\cos B)+\sin^2\frac{C}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\{2-(\cos A+\cos B)\}+\sin^2\frac{C}{2}$$
$$= 1-\frac{1}{2}.2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$$
$$= 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right).\cos\frac{A-B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$$

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



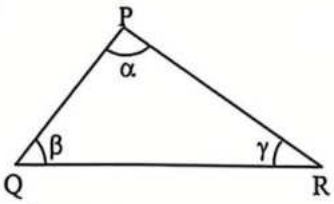
$= 1 - \sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$

$= 1 - \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{A+B}{2}\right)\right\}\right]$

$= 1 - \sin\frac{C}{2}\left\{\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\right\}$

$= 1 - 2\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$ = R.H.S **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ৭**




যেখানে, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

(ক) প্রমাণ কর: $\frac{\sin75° + \sin15°}{\sin75° - \sin15°} = \sqrt{3}$ [চ. বো. ২৩]

(খ) প্রমাণ কর: $\sin^2\alpha - \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$ [চ. বো. ২৩]

(গ) $\cos P = \sin Q - \cos R$ হলে দেখাও যে, PQR ত্রিভুজটি সমকোণী। [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** L.H.S $= \frac{\sin75° + \sin15°}{\sin75° - \sin15°}$

$= \frac{2\sin\frac{75°+15°}{2} \cdot \cos\frac{75°-15°}{2}}{2\cos\frac{75°+15°}{2} \cdot \sin\frac{75°-15°}{2}}$

$= \frac{\sin45°.\cos30°}{\cos45°.\sin30°}$

$= \tan45°.\cot30°$

$= 1.\sqrt{3} = \sqrt{3}$

= R.H.S **(Proved)**

**খ** $\Delta PQR$ এ, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

L.H.S $= \sin^2\alpha - \sin^2\beta + \sin^2\gamma$

$= \frac{1}{2}(2\sin^2\alpha + 2\sin^2\gamma) - \sin^2\beta$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos2\alpha + 1 - \cos2\gamma) - \sin^2\beta$

$= \frac{1}{2}\{2 - (\cos2\alpha + \cos2\gamma)\} - \sin^2\beta$

$= 1 - \frac{1}{2}.2\cos\frac{2\alpha+2\gamma}{2}\cos\frac{2\alpha-2\gamma}{2} - \sin^2\beta$

$= 1 - \sin^2\beta - \cos(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)$

$= \cos^2\beta - \cos(\pi-\beta)\cos(\alpha-\gamma)$

$= \cos^2\beta + \cos\beta\cos(\alpha-\gamma)$

$= \cos\beta\{\cos\beta + \cos(\alpha-\gamma)\}$

$= \cos\beta[\cos\{\pi - (\alpha+\gamma)\} + \cos(\alpha-\gamma)]$

$= \cos\beta[\cos(\alpha-\gamma) - \cos(\alpha+\gamma)]$

$= 2\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$

= R.H.S **(Proved)**

**গ** এখানে, $\Delta PQR$ এ $P + Q + R = \pi$

এখন, $\cos P = \sin Q - \cos R$ হলে,

$\cos P + \cos R = \sin Q$

$\Rightarrow 2\cos\frac{P+R}{2}.\cos\frac{P-R}{2} = \sin Q$

$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{Q}{2}\right).\cos\frac{P-R}{2} = \sin\left(2.\frac{Q}{2}\right)$

$\Rightarrow 2\sin\frac{Q}{2}.\cos\frac{P-R}{2} = 2\sin\frac{Q}{2}.\cos\frac{Q}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{P-R}{2} = \cos\frac{Q}{2}$

$\Rightarrow \frac{P-R}{2} = \frac{Q}{2}$

$\Rightarrow P = Q + R$

$\Rightarrow P = \pi - P$ [$\because P + Q + R = \pi$]

$\Rightarrow 2P = \pi$

$\therefore P = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ PQR ত্রিভুজটি সমকোণী। **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ৮** $A + B + C = \frac{\pi}{2}$

(ক) প্রমাণ কর যে, $\cos5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ [সি. বো. ২৩]

(খ) উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $\cos(B+C) + \cos(C+A) + \cos(A+B) = 1 + 4\sin\frac{\pi-2A}{4}\sin\frac{\pi-2B}{4}\sin\frac{\pi-2C}{4}$ [সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ১৯]

(গ) উদ্দীপকের আলোকে যদি $\tan A + \tan B + \tan C = \sqrt{3}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $A = B = C$ [সি. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** L.H.S $= \cos5\theta$

$= \cos(4\theta + \theta)$

$= \cos4\theta.\cos\theta - \sin4\theta.\sin\theta$

$= \cos(2.2\theta).\cos\theta - \sin(2.2\theta).\sin\theta$

$= (2\cos^2 2\theta - 1).\cos\theta - 2\sin2\theta.\cos2\theta.\sin\theta$

$= 2\cos^2 2\theta.\cos\theta - \cos\theta - 2.2\sin\theta.\cos\theta.\cos2\theta.\sin\theta$

$= 2(2\cos^2\theta - 1)^2.\cos\theta - \cos\theta - 4\sin^2\theta.\cos\theta.\cos2\theta$

$= 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1)\cos\theta - \cos\theta - 4(1 - \cos^2\theta).\cos\theta.\cos2\theta$

$= 8\cos^5\theta - 8\cos^3\theta + 2\cos\theta - \cos\theta - (4\cos\theta - 4\cos^3\theta).(2\cos^2\theta - 1)$

$= 8\cos^5\theta - 8\cos^3\theta + \cos\theta - (8\cos^3\theta - 4\cos\theta - 8\cos^5\theta + 4\cos^3\theta)$

$= 8\cos^5\theta - 8\cos^3\theta + \cos\theta - 8\cos^3\theta + 4\cos\theta + 8\cos^5\theta - 4\cos^3\theta$

$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

= R.H.S **(Proved)**

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** দেওয়া আছে, $A + B + C = \frac{\pi}{2}$

বামপক্ষ $= \cos(B + C) + \cos(C + A) + \cos(A + B)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$

$= \sin A + \sin B + \sin C$

$= 1 + 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} + \sin C - 1$

$= 1 + 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} + \sin C - \sin\frac{\pi}{2}$

$= 1 + 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} + \sin C - \sin(A + B + C)$

$= 1 + 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{C+A+B+C}{2} \cdot \sin\frac{C-A-B-C}{2}$

$= 1 + 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{A+B+2C}{2} \cdot \sin\left\{-\left(\frac{A+B}{2}\right)\right\}$

$= 1 + 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} - 2\cos\frac{A+B+2C}{2} \cdot \sin\frac{A+B}{2}$

$= 1 + 2\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B+2C}{2}\right]$

$= 1 + 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot 2\sin\frac{A-B+A+B+2C}{4} \cdot \sin\frac{A+B+2C-A+B}{4}$

$= 1 + 4\sin\frac{A+B}{2} \cdot \sin\frac{A+C}{2} \cdot \sin\frac{B+C}{2}$

$= 1 + 4\sin\frac{\frac{\pi}{2}-C}{2} \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2}-B}{2} \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2}-A}{2}$

$= 1 + 4\sin\frac{\pi-2C}{4} \cdot \sin\frac{\pi-2B}{4} \cdot \sin\frac{\pi-2A}{4}$

= L.H.S **(Showed)**

**গ** দেওয়া আছে, $A + B + C = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} - C$

$\Rightarrow \tan(A + B) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$

$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B} = \frac{1}{\tan C}$

$\Rightarrow \tan A.\tan C + \tan B.\tan C = 1 - \tan A.\tan B$

$\Rightarrow \tan A.\tan C + \tan B.\tan C + \tan A.\tan B = 1$ ...(i)

আবার, $\tan A + \tan B + \tan C = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C + 2(\tan A.\tan B + \tan B.\tan C + \tan C.\tan A) = 3$

$\Rightarrow \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C + 2(\tan A.\tan C + \tan B.\tan C + \tan A.\tan B) = 3(\tan A.\tan C + \tan B.\tan C + \tan A.\tan B)$

$\Rightarrow 2\tan^2 A + 2\tan^2 B + 2\tan^2 C - 2(\tan A.\tan B + \tan B.\tan C + \tan C.\tan A) = 0$

$\Rightarrow \tan^2 A - 2\tan A.\tan B + \tan^2 B + \tan^2 B - 2\tan B.\tan C + \tan^2 C + \tan^2 C - 2\tan C.\tan A + \tan^2 A = 0$

$\Rightarrow (\tan A - \tan B)^2 + (\tan B - \tan C)^2 + (\tan C - \tan A)^2 = 0$

একাধিক রাশির বর্গের যোগফল শূন্য হলে তারা প্রত্যেকে পৃথকভাবে শূন্য হয়।

$\therefore \tan A - \tan B = 0;\ \tan B - \tan C = 0;\ \tan C - \tan A = 0$

$\Rightarrow \tan A = \tan B \quad \Rightarrow \tan B = \tan C \quad \Rightarrow \tan C = \tan A$

$\Rightarrow A = B \quad \Rightarrow B = C \quad \Rightarrow C = A$

$\therefore A = B = C$ **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ৯** $\varphi(x) = \cos x$

(ক) কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 3a, 5a ও 7a একক হলে ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২৩]

(খ) $\varphi(2x)\ \varphi(4x)\ \varphi(8x)\ \varphi(14x)$ এর মান নির্ণয় কর, যখন $x = \frac{\pi}{15}$ [সি. বো. ২৩]

(গ) $p\varphi(x) + q\varphi(y) = r = p\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + q\varphi\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ হলে দেখাও যে, $\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{2r^2 - (p-q)^2}{4pq}}$ [সি. বো. ২৩]

সমাধান:

**ক** ধরি, $\Delta PQR$ এর বাহুগুলো p, q, r এবং $p = 3a,\ q = 5a,\ r = 7a$

$\because$ r বাহু বৃহত্তম।

$\therefore \angle R$ বৃহত্তম

$\cos R = \frac{p^2 + q^2 - r^2}{2pq}$

$= \frac{(3a)^2 + (5a)^2 - (7a)^2}{2.3a.5a}$

$= \frac{9a^2 + 25a^2 - 49a^2}{30a^2}$

$= \frac{-15a^2}{30a^2} = \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \cos R = \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \cos R = \cos 120°$

$\therefore R = 120°$

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণ 120°

**খ** $\varphi(x) = \cos x$

প্রদত্ত রাশি

$= \varphi(2x).\ \varphi(4x).\ \varphi(8x).\ \varphi(14x)$

$= \cos 2x.\ \cos 4x.\ \cos 8x.\ \cos 14x$

$= \frac{1}{2\sin 2x}(2\sin 2x.\cos 2x).\ \cos 4x.\cos 8x.\cos 14x$

$= \frac{1}{2\sin 2x}\sin 4x.\cos 4x.\cos 8x.\cos 14x$

$= \frac{1}{4\sin 2x}(2\sin 4x\cos 4x)\cos 8x.\cos 14x$

$= \frac{1}{4\sin 2x}.\sin 8x.\cos 8x.\cos 14x$

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$= \frac{1}{8\sin 2x}(2\sin 8x.\cos 8x)\cos 14x$

$= \frac{1}{8\sin 2x}.\sin 16x.\cos 14x$

$= \frac{1}{16\sin 2x}.2\sin 16x.\cos 14x$

$= \frac{1}{16\sin 2x}.\{\sin(16x+14x)+\sin(16x-14x)\}$

$= \frac{1}{16\sin 2x}.(\sin 30x+\sin 2x)$

$= \frac{1}{16\sin\frac{2\pi}{15}}\left(\sin 2\pi+\sin\frac{2\pi}{15}\right)\left[\because x=\frac{\pi}{15}\right]$

$= \frac{1}{16\sin\frac{2\pi}{15}}\left(0+\sin\frac{2\pi}{15}\right)=\frac{1}{16}$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে,

$\varphi(x) = \cos x$

$\therefore \varphi(y) = \cos y$

$\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$

$\varphi\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \sin y$

$\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) = \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

আবার, $p\varphi(x)+q\varphi(y)=r$

$\Rightarrow p\cos x+q\cos y=r$ .....(i)

এবং $p\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=q\varphi\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=r$

$\Rightarrow p\sin x+q\sin y=r$ .....(ii)

$(i)^2+(ii)^2 \Rightarrow$

$p^2\cos^2x+2pq\cos x.\cos y+q^2\cos^2y+p^2\sin^2x+2pq\sin x.\sin y+q^2\sin^2y=r^2+r^2$

$\Rightarrow p^2(\cos^2x+\sin^2x)+2pq(\cos x.\cos y+\sin x.\sin y)+q^2(\cos^2y+\sin^2y)=2r^2$

$\Rightarrow p^2+2pq\cos(x-y)+q^2=2r^2$

$\Rightarrow 2pq\cos(x-y)=2r^2-p^2-q^2$

$\Rightarrow \cos(x-y)=\frac{2r^2-p^2-q^2}{2pq}$

$\Rightarrow 2\cos^2\frac{x-y}{2}-1=\frac{2r^2-p^2-q^2}{2pq}$

$\Rightarrow 2\cos^2\frac{x-y}{2}=\frac{2r^2-p^2-q^2}{2pq}+1$

$\Rightarrow 2\cos^2\frac{x-y}{2}=\frac{2r^2-p^2-q^2+2pq}{2pq}$

$\Rightarrow \cos^2\frac{x-y}{2}=\frac{2r^2-(p^2-2pq+q^2)}{4pq}$

$\Rightarrow \cos\frac{x-y}{2}=\pm\sqrt{\frac{2r^2-(p-q)^2}{4pq}}$

$\therefore \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{2r^2-(p-q)^2}{4\,pq}}$ **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ১০** দৃশ্যকল্প-১: $f(x)=\cos x$

দৃশ্যকল্প-২: $\sin 2\alpha = Q-\sin 2\beta$

$\cos 2\beta = P-\cos 2\alpha$

(ক) দেখাও যে, $\sin 29^\circ+\cos 29^\circ=\sqrt{2}\cos 16^\circ$ [ব. বো. ২৩]

(খ) $f(\alpha)+f(\beta)=a$ এবং $f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=b$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ [ব. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$ [ব. বো. ২৩]

সমাধান:

**ক** L.H.S $= \sin 29^\circ+\cos 29^\circ$

$= \sin(90^\circ-61^\circ)+\cos 29^\circ$

$= \cos 61^\circ+\cos 29^\circ$

$= 2\cos\frac{61^\circ+29^\circ}{2}.\cos\frac{61^\circ-29^\circ}{2}$

$= 2\cos 45^\circ.\cos 16^\circ$

$= 2.\frac{1}{\sqrt{2}}.\cos 16^\circ$

$= \sqrt{2}\cos 16^\circ$

$=$ R.H.S **(Showed)**

**খ** দৃশ্যকল্প-১ হতে,

$f(x)=\cos x$

$\therefore f(\alpha)=\cos\alpha$

এবং $f(\beta)=\cos\beta$

$f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

$f\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta$

আবার, $f(\alpha)+f(\beta)=a$

$\Rightarrow \cos\alpha+\cos\beta=a$

$\Rightarrow 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=a$ ..... (i)

এবং $f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=b$

$\Rightarrow \sin\alpha+\sin\beta=b$

$\Rightarrow 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=b$ ..... (ii)

(i) নং কে (ii) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{a}{b}$

$\Rightarrow \cot\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a}{b} \Rightarrow \cot^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a^2}{b^2}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \operatorname{cosec}^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1=\frac{a^2}{b^2}$ [$\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$]

$\Rightarrow \operatorname{cosec}^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a^2}{b^2}+1 \Rightarrow \operatorname{cosec}^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a^2+b^2}{b^2}$

$\Rightarrow \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{b^2}{a^2+b^2}$

$\therefore \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **(Proved)**



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** দেওয়া আছে,

$\sin2\alpha = Q - \sin2\beta$

$\Rightarrow \sin2\alpha + \sin2\beta = Q$

$\Rightarrow 2\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta) = Q$ ..... (i)

এবং $\cos2\beta = P - \cos2\alpha$

$\Rightarrow \cos2\alpha + \cos2\beta = P$

$\Rightarrow 2\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta) = P$ ..... (ii)

(i) ÷ (ii) করে পাই,

$$\frac{2\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}{2\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)} = \frac{Q}{P}$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{Q}{P}$$

$$\Rightarrow \tan^2(\alpha+\beta) = \frac{Q^2}{P^2} \quad \text{[বর্গ করে]}$$

$$\Rightarrow \sec^2(\alpha+\beta) - 1 = \frac{Q^2}{P^2} \quad [\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1]$$

$$\Rightarrow \sec^2(\alpha+\beta) = \frac{Q^2}{P^2} + 1$$

$$\Rightarrow \cos^2(\alpha+\beta) = \frac{P^2}{P^2+Q^2}$$

$$\therefore \cos(\alpha+\beta) = \pm\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$$ **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ১১** দৃশ্যকল্প-১: $P = \tan\theta\tan2\theta\tan4\theta$; যেখানে $\theta = 20°$

দৃশ্যকল্প-২: $\Delta ABC$ এ $A = 60°$

(ক) $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে, $\text{cosec}(-\theta) + \sec(-\theta)$ এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২৩]

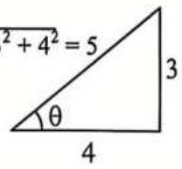
(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $p = \sqrt{3}$

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{A}{3}\cdot\sin\frac{2A}{3}\cdot\sin\frac{3A}{3}\cdot\sin\frac{4A}{3} = \frac{3}{16}$

**সমাধান:**

**ক** $\tan\theta = \frac{3}{4}$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$




অর্থাৎ, $\theta$ এর অবস্থান ৩য় চতুর্ভাগে

$\therefore \text{cosec}\theta = -\frac{5}{3}$ এবং $\sec\theta = -\frac{5}{4}$

[৩য় চর্তুভাগে $\text{cosec}\theta$ এবং $\sec\theta$ ঋণাত্মক]

এখানে, প্রদত্ত রাশি $= \text{cosec}(-\theta) + \sec(-\theta)$

$= -\text{cosec}\theta + \sec\theta$

$= -\left(-\frac{5}{3}\right) + \left(-\frac{5}{4}\right)$

$= \frac{5}{3} - \frac{5}{4} = \frac{20-15}{12} = \frac{5}{12}$ **(Ans.)**

**খ** $p = \tan\theta.\tan2\theta.\tan4\theta$

$= \tan20°.\tan40°.\tan80°$

$= \tan20°\tan(60°-20°)\tan(60°+20°)$

$= \tan20°\cdot\frac{\tan60°-\tan20°}{1+\tan60°\tan20°}\cdot\frac{\tan60°+\tan20°}{1-\tan60°\tan20°}$

$= \tan20°\cdot\frac{\sqrt{3}-\tan20°}{1+\sqrt{3}\tan20°}\cdot\frac{\sqrt{3}+\tan20°}{1-\sqrt{3}\tan20°}$

$= \tan20°\cdot\frac{3-\tan^2 20°}{1-3\tan^2 20°}$

$= \frac{3\tan20°-\tan^3 20°}{1-3\tan^2 20°}$

$= \tan(3\times20°) \quad \left[\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A} = \tan3A\right]$

$= \tan60°$

$= \sqrt{3}$

$\therefore p = \sqrt{3}$ **(Showed)**

**গ** দেওয়া আছে, $\Delta ABC$ এ $A = 60°$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \sin\frac{A}{3}\sin\frac{2A}{3}\sin\frac{3A}{3}\sin\frac{4A}{3}$

$= \sin20°\sin40°\sin60°\sin80°$

$= \frac{1}{2}\sin20°(2\sin80°\sin40°)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{2}\sin20°\{\cos(80°-40°)-\cos(80°+40°)\}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{2}\sin20°\{\cos40°-\cos120°\}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{2}\sin20°\left\{\cos40°-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\sin20°\cos40°+\frac{1}{2}\sin20°\right\}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left\{\frac{1}{2}\times2\sin20°\cos40°+\frac{1}{2}\sin20°\right\}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\frac{1}{2}(\sin60°-\sin20°)+\frac{1}{2}\sin20°\right\}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2\times2}-\frac{1}{2}\sin20°+\frac{1}{2}\sin20°\right\}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{3}{16} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sin\frac{A}{3}\sin\frac{2A}{3}\sin\frac{3A}{3}\sin\frac{4A}{3} = \frac{3}{16}$ **(Proved)**

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS

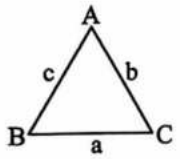


t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ১২**




**(ক)** দেখাও যে, $\sin\frac{\pi}{16}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ [ম. বো. ২৩]

**(খ)** $\angle B = 60°$ হলে দেখাও যে, $2\cos\frac{C-A}{2}=\frac{c+a}{b}$

[ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২]

**(গ)** ABC ত্রিভুজ হতে, $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C-2\cos A\cos B\cos C$ এর মান নির্ণয় কর। [ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সকল. বো. ১৮]

**সমাধান:**

**ক** L.H.S $=\sin\frac{\pi}{16}=\frac{1}{2}.2\sin\frac{\pi}{16}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2.2\sin^2\frac{\pi}{16}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{8}}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+2.\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

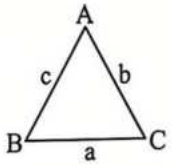
$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

= R.H.S **(Showed)**

**খ** $\Delta ABC$ ত্রিভুজে, BC = a, AC = b, AB = c

$\angle B = 60°$, $\angle A+\angle B+\angle C = 180°$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$




R.H.S $=\frac{c+a}{b}$

$=\frac{2R\sin C+2R\sin A}{2R\sin B}$

$=\frac{\sin C+\sin A}{\sin B}$

$=\frac{2\sin\frac{C+A}{2}.\cos\frac{C-A}{2}}{\sin B}$

$=2\frac{\sin\frac{120°}{2}.\cos\frac{C-A}{2}}{\sin 60°}$

[$\because A+C=180°-B=180°-60°=120°$]

$=2\frac{\sin 60°.\cos\frac{C-A}{2}}{\sin 60°}$

$=2\cos\frac{C-A}{2}$

= L.H.S **(Showed)**

**গ** ABC ত্রিভুজে, $A+B+C=\pi$

এখন, $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$

$=\frac{1}{2}(2\sin^2A+2\sin^2B)+\sin^2C$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2A+1-\cos 2B)+\sin^2C$

$=\frac{1}{2}\{2-(\cos 2A+\cos 2B)\}+\sin^2C$

$=\frac{1}{2}\{2-2\cos(A+B).\cos(A-B)\}+\sin^2C$

$=1-\cos(A+B).\cos(A-B)+\sin^2C$

$=1-\cos(\pi-C).\cos(A-B)+1-\cos^2C$

$=2+\cos C.\cos(A-B)-\cos^2C$

$=2+\cos C[\cos(A-B)-\cos C]$

$=2+\cos C[\cos(A-B)-\cos\{\pi-(A+B)\}]$

$=2+\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$

$=2+\cos C.2\cos A.\cos B$

$=2+2\cos A.\cos B.\cos C$

$\therefore \sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$

$=2+2\cos A.\cos B.\cos C$ ....(i)

প্রদত্ত রাশি $=\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C-2\cos A\cos B\cos C$

$=2+2\cos A\cos B\cos C-2\cos A.\cos B.\cos C$

[(i) নং হতে মান বসিয়ে]

= 2 **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৩** $\sin\theta=\frac{3}{5}$ এবং $A=\frac{\pi}{12}$

**(ক)** দেখাও যে, $\cos 75°=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৯]

**(খ)** $\frac{\cot\theta+\cos(-\theta)}{\operatorname{cosec}(-\theta)+\tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর; যখন $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ হয়। [ঢা. বো. ২২]

**(গ)** প্রমাণ কর যে, $\tan A.\tan 3A.\tan 5A.\tan 7A.\tan 11A = 1$ [ঢা. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** $\cos 75° = \cos(45°+30°)$

$=\cos 45°.\cos 30°-\sin 45°.\sin 30°$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

= R.H.S **(Showed)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



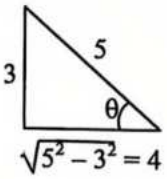
**খ** দেওয়া আছে, $\sin\theta = \frac{3}{5}$

এখন, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ বা ২য় চতুর্ভাগে $\operatorname{cosec}\theta$ ধনাত্মক

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3}$

আবার,

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ বা ২য় চর্তুভাগে $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ ঋণাত্মক।




$\cos\theta = -\frac{4}{5}$

$\tan\theta = -\frac{3}{4}$

$\therefore \cot\theta = -\frac{4}{3}$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{\cot\theta + \cos(-\theta)}{\operatorname{cosec}(-\theta) + \tan\theta}$

$= \frac{\cot\theta + \cos\theta}{-\operatorname{cosec}\theta + \tan\theta}$

$= \frac{-\frac{4}{3} - \frac{4}{5}}{-\frac{5}{3} - \frac{3}{4}}$

$= \frac{128}{145}$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $A = \frac{\pi}{12}$

L.H.S $= \tan A.\tan 3A.\tan 5A.\tan 7A.\tan 11A$

$= \tan\frac{\pi}{12}\cdot\tan\frac{3\pi}{12}.\tan\frac{5\pi}{12}\cdot\tan\frac{7\pi}{12}\cdot\tan\frac{11\pi}{12}$

$= \tan\frac{\pi}{12}\cdot\tan\frac{\pi}{4}.\tan\left(\frac{6\pi-\pi}{12}\right)\cdot\tan\left(\frac{6\pi+\pi}{12}\right)\cdot\tan\left(\frac{12\pi-\pi}{12}\right)$

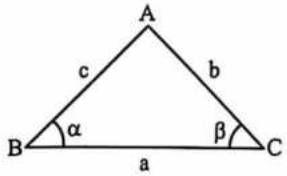
$= \tan\frac{\pi}{12}.1.\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right).\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right).\tan\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$

$= \tan\frac{\pi}{12}.1.\cot\frac{\pi}{12}.\left(-\cot\frac{\pi}{12}\right).\left(-\tan\frac{\pi}{12}\right)$

$= \tan^2\frac{\pi}{12}.\cot^2\frac{\pi}{12}$

$= \tan^2\frac{\pi}{12}.\frac{1}{\tan^2\frac{\pi}{12}} = 1 = \text{R.H.S}$ **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ১৪**




(ক) দেখাও যে, $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C}$ [ঢা. বো. ২২]

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos A}{\sin B\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B} = 2$ [ঢা. বো. ২২]

(গ) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ এবং $a = (\sqrt{3}+1)$ সে.মি. হলে, $\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** ত্রিভুজের সাইন সূত্রানুসারে,

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$\therefore \frac{b+c}{b-c} = \frac{2R\sin B + 2R\sin C}{2R\sin B - 2R\sin C}$

$= \frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C}$ **(Ans.)**

**খ** $\Delta ABC$ এ

$A + B + C = \pi$

L.H.S $= \frac{\cos A}{\sin B\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B}$

$= \frac{\sin A.\cos A + \sin B.\cos B + \sin C.\cos C}{\sin A.\sin B.\sin C}$

$= \frac{1}{\sin A.\sin B.\sin C}\times\frac{1}{2}(2\sin A.\cos A + 2\sin B.\cos B + 2\sin C.\cos C)$

$= \frac{1}{2\sin A.\sin B.\sin C}\times\{(\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C\}$

$= \frac{1}{2\sin A.\sin B.\sin C}\times\{2\sin(A+B).\cos(A-B) + 2\sin C.\cos C\}$

$= \frac{1}{2\sin A.\sin B.\sin C}\times[2\sin(\pi - C).\cos(A-B) + 2\sin C.\cos\{\pi-(A+B)\}]$

$= \frac{1}{2\sin A.\sin B.\sin C}\times[2\sin C\cos(A-B) - 2\sin C\cos(A+B)]$

$= \frac{1}{2\sin A.\sin B.\sin C}\times 2\sin C\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$

$= \frac{2\sin C.2\sin A.\sin B}{2\sin A.\sin B.\sin C}$

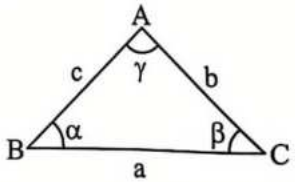
$= 2 = \text{R.H.S.}$ **(Proved)**

**গ** দেওয়া আছে, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $a = (\sqrt{3}+1)$ সে.মি.

ধরি, $\angle BAC = \gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

$= 180° - 105° = 75°$

$\Delta ABC$ এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে,




$\frac{c}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\gamma}$

$\Rightarrow c = \frac{a}{\sin\gamma}.\sin\beta$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sin 75°}.\sin 60°$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sqrt{6}$ সে. মি.

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



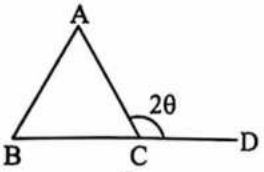
$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} ac \sin\alpha$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\sqrt{6} \cdot \sin 45°$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ বর্গ সে. মি. **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৫**




**(ক)** $a = \sqrt{3}+1, b = \sqrt{3}-1, C = 60°$ হলে $\Delta ABC$ এ c বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২]

**(খ)** $A + B = 120°$ হলে উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে,

$\sin^2(\theta+\alpha) + \sin^2(\theta-\alpha) - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$ [রা. বো. ২২]

**(গ)** উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,

$\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = -4\cos A.\sin B.\cos 2\theta$ [রা. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $a = \sqrt{3}+1, b = \sqrt{3}-1, C = 60°$

আমরা জানি, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\Rightarrow \cos 60° = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - c^2}{2(\sqrt{3}+1).(\sqrt{3}-1)}$

$[\because (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2]$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8-c^2}{4}$

$\Rightarrow c^2 = 6$

$\therefore c = \sqrt{6}$ একক **(Ans.)**

**খ** উদ্দীপক হতে, $A + B = 120°$

এবং $2\theta = A + B$

$\Rightarrow 2\theta = 120°$

$\Rightarrow \theta = 60°$

L.H.S $= \sin^2(\theta+\alpha) + \sin^2(\theta-\alpha) - \cos^2\alpha$

$= \frac{1}{2}\{2\sin^2(60°+\alpha) + 2\sin^2(60°-\alpha) - 2\cos^2\alpha\}$

$= \frac{1}{2}\{1 - \cos(120°+2\alpha) + 1 - \cos(120°-2\alpha) - 1 - \cos 2\alpha\}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\{\cos(120°+2\alpha) + \cos(120°-2\alpha)\} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.2\cos 120°.\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$

$= \frac{1}{2}$ = R.H.S **(Showed)**

**গ** উদ্দীপক হতে $C = 180° - 2\theta$

L.H.S $= \sin 2A - \sin 2B + \sin 2C$

$= 2\cos(A+B)\sin(A-B) + \sin 2C$

$= 2\cos(\pi - C)\sin(A-B) + \sin 2C$

$= -2\cos C \sin(A-B) + 2\sin C \cos C$

$= 2\cos C\{\sin C - \sin(A-B)\}$

$= 2\cos C[\sin\{\pi - (A+B)\} - \sin(A-B)]$

$= 2\cos C\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\}$

$= 2\cos C.2\cos A.\sin B$

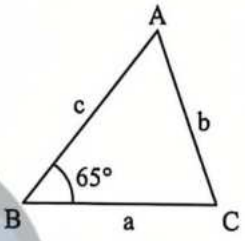
$= 4\cos A.\sin B.\cos C$

$= 4\cos A.\sin B.\cos(180° - 2\theta)$ $[\because C + 2\theta = 180°]$

$= 4\cos A.\sin B(-\cos 2\theta)$

$= -4\cos A.\sin B.\cos 2\theta$ = R.H.S. **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ১৬**




**(ক)** $\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta = 1$ হলে দেখাও যে,

$\sin\alpha \operatorname{cosec}\beta + \cos\alpha \sec\beta = 0$ [রা. বো. ২২]

**(খ)** $C = 75°$ হলে উদ্দীপক হতে দেখাও যে,

$\sec 2A - \sqrt{3}\operatorname{cosec} 2A = 4$ [রা. বো. ২২]

**(গ)** উদ্দীপক ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে,

$\frac{a^2}{bc}\sin(B-C) + \frac{b^2}{ca}\sin(C-A) + \frac{c^2}{ab}\sin(A-B) = 0$ [রা. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta = 1$

$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos 0°$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 0°$

$\therefore \beta = -\alpha$

L.H.S $= \sin\alpha.\operatorname{cosec}\beta + \cos\alpha.\sec\beta$

$= \sin\alpha.\frac{1}{\sin\beta} + \cos\alpha.\frac{1}{\cos\beta}$

$= \sin\alpha.\frac{1}{\sin(-\alpha)} + \cos\alpha.\frac{1}{\cos(-\alpha)}$ $[\because \beta = -\alpha]$

$= \sin\alpha.\frac{-1}{\sin\alpha} + \cos\alpha.\frac{1}{\cos\alpha}$

$= -1 + 1 = 0$ = R.H.S **(Showed)**

**খ** দেওয়া আছে,

$C = 75°, B = 65°$

$\therefore A = 180° - (B + C)$

$= 40°$

L.H.S $= \sec 2A - \sqrt{3}\operatorname{cosec} 2A$

$= \sec 80° - \sqrt{3}\operatorname{cosec} 80°$

$= \frac{1}{\cos 80°} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80°}$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$= \frac{\sin80° - \sqrt{3}\cos80°}{\sin80°.\cos80°}$$

$$= \frac{2 \times \left(\frac{1}{2}\sin80° - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos80°\right)}{\frac{1}{2} \times 2 \times \sin80°.\cos80°}$$

$$= \frac{2 \times (\cos60°\sin80° - \sin60°.\cos80°)}{\frac{1}{2} \times \sin160°}$$

$$= \frac{2 \times \sin(80° - 60°)}{\frac{1}{2}\sin(180 - 20°)}$$

$$= 4 \times \frac{\sin20°}{\sin20°}$$

$= 4 =$ R.H.S. **(Showed)**

**গ** ত্রিভুজের সাইন সূত্রানুসারে,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

L.H.S

$$= \frac{a^2}{bc}\sin(B - C) + \frac{b^2}{ca}\sin(C - A) + \frac{c^2}{ab}\sin(A - B)$$

$$= \frac{a}{bc}.2R\ \sin A.\sin(B - C) + \frac{b}{ca}2R\ \sin B \sin(C - A) + \frac{c}{ab}2R\ \sin C.\sin(A - B)$$

$$= \frac{a}{bc} \cdot 2R\sin\{\pi - (B + C)\}\ \sin(B - C) + \frac{b}{ca} \cdot 2R\sin\{\pi - (A + C)\}\ \sin(C - A) + \frac{c}{ab}2R\sin\{\pi - (A + B)\}.\sin(A - B)$$

$$= \frac{a}{bc} \times 2R\ \sin(B + C).\sin(B - C) + \frac{b}{ca}2R\ \sin(A + C) \sin(C - A) + \frac{c}{ab}2R\ \sin(A + B).\sin(A - B)$$

$$= \frac{2Ra}{bc}(\sin^2B - \sin^2C) + \frac{2Rb}{ca}(\sin^2C - \sin^2A) + \frac{2Rc}{ab}(\sin^2A - \sin^2B)$$ $[\sin(A+B).\sin(A-B) = \sin^2A - \sin^2B]$

$$= \frac{2Ra}{bc}\left(\frac{b^2}{4R^2} - \frac{c^2}{4R^2}\right) + \frac{2Rb}{ca}\left(\frac{c^2}{4R^2} - \frac{a^2}{4R^2}\right) + \frac{2Rc}{ab}\left(\frac{a^2}{4R^2} - \frac{b^2}{4R^2}\right)$$

$$= \frac{ab}{2Rc} - \frac{ac}{2Rb} + \frac{bc}{2Ra} - \frac{ab}{2Rc} + \frac{ca}{2Rb} - \frac{bc}{2Ra}$$

$= 0 =$ R.H.S. **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ১৭** **ABC একটি ত্রিভুজ এবং $f(x) = \sin x$**

**(ক) দেখাও যে, $f(A) = \sin B.\cos C + \cos B.\sin C$** [কু. বো. ২২]

**(খ) প্রমাণ কর যে, $c(\cos B - \cos A) = 2(a - b)\cos^2\frac{C}{2}$**

[কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩]

**(গ) প্রমাণ কর যে, $f(A + B - C) + f(B + C - A) + f(C + A - B) = 4\sin A.\sin B.\sin C$** [কু. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** এখানে, $\Delta ABC$ এ $A + B + C = \pi$

$f(x) = \sin x$

$\therefore f(A) = \sin A$

R.H.S $= \sin B.\cos C + \cos B.\sin C$

$= \sin(B + C)$

$= \sin(\pi - A)$

$= \sin A$

$= f(A) =$ L.H.S **(Showed)**

**খ** ABC ত্রিভুজে কোসাইন সূত্রানুসারে পাই,

$a = b\cos C + c\cos B$ এবং $b = c\cos A + a\cos C$

L.H.S $= c(\cos B - \cos A) = c\cos B - c\cos A$

$= a - b\cos C - (b - a\cos C)$

$= (a - b) + (a - b)\cos C = (a - b)(1 + \cos C)$

$= (a - b).2\cos^2\frac{C}{2}$

$= 2.(a - b).\cos^2\frac{C}{2}$

$=$ R.H.S **(Proved)**

**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

L.H.S $= f(A + B - C) + f(B + C - A) + f(C + A - B)$

$= \sin(A + B - C) + \sin(B + C - A) + \sin(C + A - B)$

$= \sin(\pi - 2C) + \sin(\pi - 2A) + \sin(\pi - 2B)$ $[\because \Delta ABC$ এ $A + B + C = \pi]$

$= \sin2C + \sin2A + \sin2B$

$= 2\sin\left(\frac{2C + 2A}{2}\right).\cos\left(\frac{2C - 2A}{2}\right) + \sin2B$

$= 2\sin(C + A).\cos(C - A) + \sin2B$

$= 2\sin(\pi - B).\cos(C - A) + 2\sin B.\cos B$

$= 2\sin B.\cos(C - A) + 2\sin B.\cos B$

$= 2\sin B\ [\cos B + \cos(C - A)]$

$= 2\sin B\ [\cos\{\pi - (C + A) + \cos(C - A)\}]$

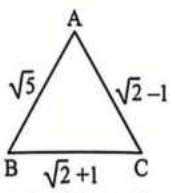
$= 2\sin B\ [\cos(C - A) - \cos(C + A)]$

$= 2\sin B.2\sin C.\sin A$

$= 4\sin A.\sin B.\sin C =$ R.H.S. **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ১৮** দৃশ্যকল্প-১: $\angle P + \angle Q = \angle R$

দৃশ্যকল্প-২:




**(ক) প্রমাণ কর যে, $\sin\theta + \sin(120° + \theta) + \sin(240° + \theta) = 0$** [য. বো. ২২]

**(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে দেখাও যে,**

$$\cos^2\frac{P}{3} + \cos^2\frac{Q}{3} + \cos^2\frac{R}{3} = 1 + 2\cos\frac{P}{3}\cos\frac{Q}{3}\cos\frac{R}{3}$$ [য. বো. ২২]

**(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সাহায্যে $\angle C$ এর মান নির্ণয় কর। অতঃপর দেখাও যে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $\frac{\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক।**

[য. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩; কু. বো. ১৯]

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধান:**

**ক** L.H.S = $\sin\theta + \sin(120° + \theta) + \sin(240° + \theta)$

$= \sin\theta + 2\sin\frac{240° + \theta + 120° + \theta}{2}\cos\frac{240° + \theta - 120° - \theta}{2}$

$\left[\because \sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}\right]$

$= \sin\theta + 2\sin(180° + \theta)\cos60°$

$= \sin\theta - \sin\theta$

$= 0 = $ R.H.S **(Proved)**

**খ** দেওয়া আছে, $\angle P + \angle Q = \angle R$

L.H.S $= \cos^2\frac{P}{3} + \cos^2\frac{Q}{3} + \cos^2\frac{R}{3}$

$= \frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{P}{3} + 2\cos^2\frac{Q}{3}\right) + \cos^2\frac{R}{3}$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2P}{3} + 1 + \cos\frac{2Q}{3}\right) + \cos^2\frac{R}{3}$

$= \frac{1}{2}\left(2 + \cos\frac{2P}{3} + \cos\frac{2Q}{3}\right) + \cos^2\frac{R}{3}$

$= \frac{1}{2}\left[2 + 2\cos\frac{P+Q}{3}\cos\frac{P-Q}{3}\right] + \cos^2\frac{R}{3}$

$= 1 + \cos\frac{R}{3}\cos\frac{P-Q}{3} + \cos^2\frac{R}{3}$

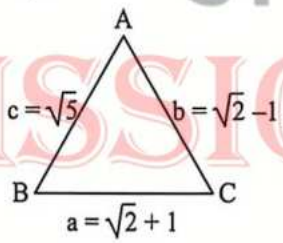
$= 1 + \cos\frac{R}{3}\left[\cos\frac{P-Q}{3} + \cos\frac{P+Q}{3}\right]$

$= 1 + 2\cos\frac{P}{3}\cos\frac{Q}{3}\cos\frac{R}{3} = $ R.H.S

**গ** দৃশ্যকল্প-২ হতে,

$a = \sqrt{2} + 1$, $b = \sqrt{2} - 1$ এবং $c = \sqrt{5}$

আমরা জানি,




$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$= \frac{(\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2 - 5}{2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$= \frac{2(2+1) - 5}{2(2-1)}$ $[\because (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2]$

$= \frac{6-5}{2}$

$\cos C = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos C = 60°$

$\therefore \angle C = 60°$

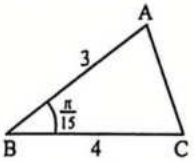
$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin60°$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{2}(2-1) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক। **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ১৯** $A + B + C = \pi$ এবং




(ক) প্রমাণ কর: $\tan35° + \tan10° + \tan35°\tan10° = 1$ [চ. বো. ২২]

(খ) প্রমাণ কর: $\cos^2A - \cos^2B + \cos^2C = 1 - 2\sin A.\cos B.\sin C$ [চ. বো. ২২]

(গ) ABC ত্রিভুজটি সমাধান কর। [চ. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** আমরা জানি, $\tan45° = 1$

$\Rightarrow \tan(35° + 10°) = 1$

$\Rightarrow \frac{\tan35° + \tan10°}{1 - \tan35°\tan10°} = 1$

$\Rightarrow \tan35° + \tan10° = 1 - \tan35°\tan10°$

$\therefore \tan35° + \tan10° + \tan35°\tan10° = 1$ **(Proved)**

**খ** দেওয়া আছে, $A + B + C = \pi$

L.H.S $= \cos^2A - \cos^2B + \cos^2C$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2A - 2\cos^2B) + \cos^2C$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos2A - 1 - \cos2B) + \cos^2C$

$= \frac{1}{2}(\cos2A - \cos2B) + \cos^2C$

$= \frac{1}{2}\{2\sin(A+B).\sin(B-A)\} + 1 - \sin^2C$

$= \sin(\pi - C).\sin(B-A) - \sin^2C + 1$

$= \sin C.\sin(B-A) - \sin^2C + 1$

$= 1 + \sin C\{\sin(B-A) - \sin C\}$

$= 1 + \sin C[\sin(B-A) - \sin\{\pi - (B+A)\}]$

$= 1 + \sin C.\{\sin(B-A) - \sin(B+A)\}$

$= 1 - \sin C\{\sin(B+A) - \sin(B-A)\}$

$= 1 - \sin C.2\cos B.\sin A$

$= 1 - 2\sin A.\cos B.\sin C = $ R.H.S **(Proved)**

**গ** দেওয়া আছে,

$\angle B = \frac{\pi}{15}$

$\Rightarrow B = \frac{180°}{15} = 12°$

$\therefore B = 12°$

এবং BC = a = 4, AB = c = 3 এবং AC = b = ?

আমরা জানি, $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$\Rightarrow b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B$

$= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4\cos12°$

$\Rightarrow b^2 = 1.524$

$\therefore b = \sqrt{1.524} = 1.23$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \sin C=\frac{c\sin B}{b}$$

$$=\frac{3\times \sin 12^\circ}{1.23}$$

$$\Rightarrow \sin C=0.5071$$

$$\therefore C=30.47\approx 30^\circ$$

$$\therefore A=180^\circ-(B+C)$$

$$=180^\circ-42^\circ$$

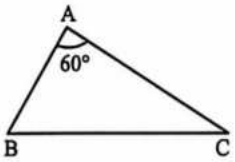
$$=138^\circ$$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $AC=b=1.23$

$A=138^\circ$ এবং $C=30^\circ$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২০** দৃশ্যকল্প-১: $M=\cos^2 5\alpha+\cos^2 5\beta-\sin^2 5\gamma+2\cos 5\alpha\cos 5\beta\cos 5\gamma$

দৃশ্যকল্প-২:




(ক) প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos 6x}}}=\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{3x}{2}$ [দি. বো. ২২ ; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $M=0$ যেখানে $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ [ব. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{b-c}{2a}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{B-C}{2}$ [ব. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** L.H.S $=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos 6x}}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2(1+\cos 2.3x)}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2.2\cos^2 3x}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2-2\cos 3x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\left(1-\cos 2.\frac{3x}{2}\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2.2\sin^2\frac{3x}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{3x}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{3x}{2}$$

= R.H.S **(Proved)**

**খ** দেওয়া আছে,

$M=\cos^2 5\alpha+\cos^2 5\beta-\sin^2 5\gamma+2\cos 5\alpha\cos 5\beta\cos 5\gamma$

যেখানে, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

এখন, $\cos^2 5\alpha+\cos^2 5\beta-\sin^2 5\gamma$

$$=\frac{1}{2}(2\cos^2 5\alpha+2\cos^2 5\beta)-\sin^2 5\gamma$$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos 10\alpha+1+\cos 10\beta)-\sin^2 5\gamma$$

$$=\frac{1}{2}(2+\cos 10\alpha+\cos 10\beta)-\sin^2 5\gamma$$

$$=\frac{1}{2}[2+2\cos(5\alpha+5\beta)\cos(5\alpha-5\beta)]-\sin^2 5\gamma$$

$$=1+\cos(5\alpha+5\beta)\cos(5\alpha-5\beta)-\sin^2 5\gamma$$

$$=\cos 5(\alpha+\beta)\cos(5\alpha-5\beta)+\cos^2 5\gamma$$

$$=\cos 5(\pi-\gamma)\cos(5\alpha-5\beta)+\cos^2 5\gamma \quad [\because \alpha+\beta+\gamma=\pi]$$

$$=\cos(5\pi-5\gamma)\cos(5\alpha-5\beta)+\cos^2 5\gamma$$

$$=-\cos 5\gamma\cos(5\alpha-5\beta)+\cos^2 5\gamma$$

$$=-\cos 5\gamma[\cos(5\alpha-5\beta)-\cos 5\gamma]$$

$$=-\cos 5\gamma[\cos(5\alpha-5\beta)-\cos\{5\pi-(5\alpha+5\beta)\}]$$

$$=-\cos 5\gamma[\cos(5\alpha-5\beta)+\cos(5\alpha+5\beta)]$$

$$=-2\cos 5\alpha\cos 5\beta\cos 5\gamma$$

এখন,

$M=\cos^2 5\alpha+\cos^2 5\beta-\sin^2 5\gamma+2\cos 5\alpha\cos 5\beta\cos 5\gamma$

$=-2\cos 5\alpha\cos 5\beta\cos 5\gamma+2\cos 5\alpha\cos 5\beta\cos 5\gamma=0$ **(Proved)**

**গ** ত্রিভুজের সাইন সূত্রানুসারে,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

দেওয়া আছে, $\angle A=60^\circ$

L.H.S $=\frac{b-c}{2a}$

$$=\frac{2R\sin B-2R\sin C}{2.2R\sin A}$$

$$=\frac{\sin B-\sin C}{2\sin A}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2.2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi-A}{2}\right)\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{2\cos 30^\circ} \quad [\because \Delta ABC \text{ এ } \angle A=60^\circ]$$

$$=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{B-C}{2}=\text{R.H.S}$$ **(Proved)**

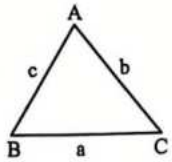


t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ২১** দৃশ্যকল্প-১:




দৃশ্যকল্প-২: $\sec\theta = \frac{m - n\cos\varphi}{m\cos\varphi - n}$, $m = \frac{P+Q}{2}$, $n = \frac{P-Q}{2}$

(ক) $\frac{\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\sin\theta}}$ এর মান নির্ণয় কর। [সি. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে দেখাও যে, $a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right) = (b+c)\sin\frac{A}{2}$

[সি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে প্রমাণ কর যে, $\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{P}} = \frac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{Q}}$ [সি. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** প্রদত্ত রাশি $= \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\sin\theta}}$

$= \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}}$

$= \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2}}$

$= \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}} = 1$ **(Ans.)**

**খ** দেখাতে হবে যে, $a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right) = (b+c)\sin\frac{A}{2}$

এখন, $\sin\left(\frac{A}{2}+B\right) = \frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$

R.H.S $= \frac{(b+c)}{a}\sin\frac{A}{2}$

$= \frac{b+c}{a}.\sin\frac{A}{2}$

$= \frac{2R\sin B + 2R\sin C}{2R\sin A}.\sin\frac{A}{2}$

$= \frac{\sin B + \sin C}{\sin A}.\sin\frac{A}{2}$

$= \frac{2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}}{\sin A}.\sin\frac{A}{2}$

$= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right).\cos\frac{B-C}{2}}{\sin A}.\sin\frac{A}{2}$

$= \frac{2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}.\sin\frac{A}{2}$

$= \cos\frac{B-C}{2}$

$= \cos\frac{C-B}{2}$

$= \cos\frac{\pi - A - B - B}{2}$ $[A+B+C=\pi]$

$= \cos\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{A+2B}{2}\right)\right\}$

$= \sin\left(\frac{A+2B}{2}\right)$

$= \sin\left(\frac{A}{2}+B\right)$ = L.H.S **(Showed)**

**গ** দেওয়া আছে, $m = \frac{P+Q}{2}$, $n = \frac{P-Q}{2}$

এবং $\sec\theta = \frac{m - n\cos\varphi}{m\cos\varphi - n}$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\frac{P+Q}{2} - \frac{P-Q}{2}\cos\varphi}{\frac{P+Q}{2}\cos\varphi - \frac{P-Q}{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \frac{P+Q-P\cos\varphi+Q\cos\varphi}{P\cos\varphi+Q\cos\varphi-P+Q}$

$\Rightarrow \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{P+Q-P\cos\varphi+Q\cos\varphi-P\cos\varphi-Q\cos\varphi+P-Q}{P+Q-P\cos\varphi+Q\cos\varphi+P\cos\varphi+Q\cos\varphi-P+Q}$

[বিয়োজন-যোজন]

$\Rightarrow \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2P-2P\cos\varphi}{2Q+2Q\cos\varphi}$

$\Rightarrow \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{2P(1-\cos\varphi)}{2Q(1+\cos\varphi)}$

$\Rightarrow \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{P.2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{Q.2\cos^2\frac{\varphi}{2}}$

$\Rightarrow \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{P}{Q}\tan^2\frac{\varphi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{P} = \frac{\tan^2\frac{\varphi}{2}}{Q}$

$\therefore \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{P}} = \frac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{Q}}$ **(Proved)**

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▸ ২২** (i) $T = \sec x + \tan x$

(ii) $M = \cos^3 x + \cos^3(60° - x) + \cos^3(60° + x)$

(ক) $3\tan\theta = 1$ হলে $\sin\left(\frac{\pi - 4\theta}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। [সি. বো. ২২]

(খ) (i) নং থেকে প্রমাণ কর যে, $T = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ [সি. বো. ২২]

(গ) (ii) নং থেকে দেখাও যে, $4M = (6\cos x - \cos 3x)$ [সি. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $3\tan\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{3}$

এখন, $\sin\left(\frac{\pi - 4\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \cos 2\theta$

$$= \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}}$$

$$= \frac{9 - 1}{9 + 1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \text{ (Ans.)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $T = \sec x + \tan x$

প্রমাণ করতে হবে যে,

$\therefore \sec x + \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

$T = \sec x + \tan x$

$$= \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{1 + \sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1 + \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan\frac{x}{2}} \left[\text{লব ও হর কে } \cos\tfrac{x}{2} \text{ দ্বারা ভাগ করে}\right]$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}.\tan\frac{x}{2}}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$\therefore T = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ **(Proved)**

**গ** দেওয়া আছে,

$M = \cos^3 x + \cos^3(60° - x) + \cos^3(60° + x)$

L.H.S = 4M

$= 4\cos^3 x + 4\cos^3(60° - x) + 4\cos^3(60° + x)$

$= 3\cos x + \cos 3x + 3\cos(60° - x)$

$+ \cos(180° - 3x) + 3\cos(60° + x) + \cos(180° + 3x)$

$[\because \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x]$

$= 3\cos x + \cos 3x + 3\cos(60° - x) - \cos 3x$

$+ 3\cos(60° + x) - \cos 3x$

$= 3\cos x + 3\{\cos(60° - x) + \cos(60° + x)\} - \cos 3x$

$= 3\cos x + 3 \times 2\cos 60°.\cos x - \cos 3x$

$= 3\cos x + 3 \times 2 \times \frac{1}{2}\cos x - \cos 3x$

$= 6\cos x - \cos 3x$

= R.H.S **(Showed)**

**প্রশ্ন ▸ ২৩** $p = \tan A\tan B$, $q = \tan C\tan D$,

$$r = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 1$$

(ক) দেখাও যে, $\sec\frac{5x}{2} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 10x}}}$ [ঢা. বো. ১৯]

(খ) $A = 20°$, $B = 2A$, $C = 3A$, $D = 4A$ হলে, দেখাও যে, $pq = 3$ [রা. বো. ১৯]

(গ) $\alpha + \beta + \gamma = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = r + 2$ [রা. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** R.H.S $= \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 10x}}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 10x)}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2.2\cos^2 5x}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2 + 2\cos 5x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2(1 + \cos 5x)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2.2\cos^2\frac{5x}{2}}}$$

$$= \frac{2}{2\cos\frac{5x}{2}}$$

$= \sec\frac{5x}{2}$ = L.H.S **(Showed)**

**খ** দেওয়া আছে, $p = \tan A\tan B$

$q = \tan C\tan D$

এবং $A = 20°$, $B = 2A$, $C = 3A$ ও $D = 4A$

L.H.S = tanA.tanB.tanC.tanD

$= \tan A.\tan 2A.\tan 3A.\tan 4A$

$= \tan 20°\tan 40°\tan 60°\tan 80°$

$= \sqrt{3}.\tan 20°.\tan(60° - 20°).\tan(60° + 20°)$ $[\tan 60° = \sqrt{3}]$

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$= \sqrt{3}\tan20^\circ \frac{\tan60^\circ - \tan20^\circ}{1+\tan60^\circ\tan20^\circ} \cdot \frac{\tan60^\circ + \tan20^\circ}{1-\tan60^\circ.\tan20^\circ}$$

$$= \sqrt{3}\tan20^\circ \frac{\sqrt{3}-\tan20^\circ}{1+\sqrt{3}\tan20^\circ} \cdot \frac{\sqrt{3}+\tan20^\circ}{1-\sqrt{3}\tan20^\circ}$$

$$= \sqrt{3}\tan20^\circ \frac{3-\tan^2 20^\circ}{1-3\tan^2 20^\circ}$$

$$= \sqrt{3}\frac{3\tan20^\circ - \tan^3 20^\circ}{1-3\tan^2 20^\circ}$$

$$= \sqrt{3}\tan(3\times 20^\circ)\left[\frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A} = \tan 3A\right]$$

$$= \sqrt{3}\times\sqrt{3} = 3$$

= R.H.S **(Showed)**

**গ** দেওয়া আছে, $\alpha+\beta+\gamma = 0$

এবং $r = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 1$

L.H.S = $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos 2\cdot\frac{\gamma}{2}$$

$$= 2\cos\left(\frac{-\gamma}{2}\right).\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \left(2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1\right)$$

$[1+\cos2A = 2\cos^2 A]$

$$= 2\cos\frac{\gamma}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 - 2\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

$$= 1 + 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= 1 + 2\cos\frac{\gamma}{2}\left\{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)\right\}$$

$$= 1 + 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 1 + 2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}$$

$$= 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$= 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 1 + 2$$

= r + 2 = R.H.S **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ২৪** দৃশ্যকল্প-১: $2P = \tan\frac{x+y}{2} + \tan\frac{x-y}{2}$

দৃশ্যকল্প-২: $f(\alpha) = \tan\alpha$ এবং $f(\alpha)+f(\beta) = y$

দৃশ্যকল্প-৩: $\sin x = a - \sin y$, $\cos x = b - \cos y$

(ক) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $P = \frac{\sin x}{\cos x + \cos y}$ [কু. বো. ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে $\frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{f(\beta)} = x$ এবং $\alpha+\beta = \gamma$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(x-y)f(\gamma) = xy$ [কু. বো. ১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-৩ থেকে প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{1}{2}(x-y) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2-b^2}$ [কু. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** দৃশ্যকল্প-১ হতে,

$$2P = \tan\frac{x+y}{2} + \tan\frac{x-y}{2}$$

$$\Rightarrow 2P = \frac{\sin\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}} + \frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\cos\frac{x-y}{2}}$$

$$\Rightarrow 2P = \frac{\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sin x}{\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$\therefore P = \frac{\sin x}{\cos x + \cos y}$$ **(Showed)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(\alpha) = \tan\alpha$

$\therefore f(\beta) = \tan\beta$

$\therefore f(\gamma) = \tan\gamma$

এবং $f(\alpha)+f(\beta) = y$

$\therefore \tan\alpha + \tan\beta = y$

এখানে, $\frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{f(\beta)} = x$ এবং $\alpha+\beta = \gamma$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} = x$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{\tan\alpha\tan\beta} = x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\tan\alpha\tan\beta} = x$$

$$\Rightarrow x\tan\alpha\tan\beta = y$$

$$\therefore \tan\alpha\tan\beta = \frac{y}{x}$$

আবার, $\alpha+\beta = \gamma$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \tan\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \tan\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1-\frac{y}{x}} = \tan\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{x-y} = f(\gamma)$$

$$\Rightarrow xy = (x-y)f(\gamma)$$

$\therefore (x-y)f(\gamma) = xy$ **(Proved)**

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** দৃশ্যকল্প-৩ হতে:

$\sin x = a - \sin y$

$\Rightarrow \sin x + \sin y = a$ .....(i)

এবং $\cos x = b - \cos y$

$\Rightarrow \cos x + \cos y = b$....(ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow$

$\sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x . \sin y + \cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x.\cos y = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 1 + 1 + 2(\cos x.\cos y + \sin x.\sin y) = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 2 + 2\cos(x - y) = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 2\{1 + \cos(x - y)\} = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 2 \times 2\cos^2\frac{x-y}{2} = a^2 + b^2$

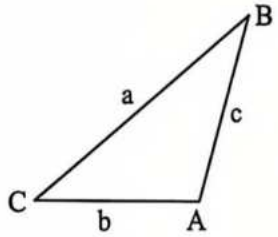
$\Rightarrow 4\left(1 - \sin^2\frac{x-y}{2}\right) = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 4\sin^2\frac{x-y}{2} = 4 - a^2 - b^2$

$\Rightarrow \sin^2\frac{x-y}{2} = \frac{1}{4}(4 - a^2 - b^2)$

$\therefore \sin\frac{1}{2}(x - y) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2 - b^2}$ **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ২৫**




**(ক) প্রমাণ কর: $\sin 78°19' \cos 18°19' - \sin 11°41' \sin 18°19' = \frac{\sqrt{3}}{2}$** [চ. বো. ১৯]

**(খ) $a = \sqrt{b^2 + bc + c^2}$ হলে ত্রিভুজটির সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের সমষ্টি নির্ণয় কর।** [চ. বো. ১৯]

**(গ) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $\frac{a-b}{c}\operatorname{cosec}\frac{A-B}{2} = \sec\frac{C}{2}$** [চ. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** L.H.S $= \sin 78°19' \cos 18°19' - \sin 11°41' \sin 18°19'$

$= \sin 78°19' \cos 18°19' - \sin(90° - 78°19') \sin 18°19'$

$= \sin 78°19' \cos 18°19' - \cos 78°19' \sin 18°19'$

$= \sin(78°19' - 18°19')$

$= \sin 60°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$=$ R.H.S **(Proved)**

**খ** দেওয়া আছে, $\Delta ABC$ এ,

$BC = a = \sqrt{b^2 + bc + c^2}$

$AB = c$

$AC = b$

এখন,

$a = \sqrt{b^2 + bc + c^2}$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + bc + c^2$

$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = -bc$

$\Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} = -1$

$\Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos A = \cos 120°$

$\therefore A = 120°$

$\therefore$ ত্রিভুজটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore$ ত্রিভুজটির সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের সমষ্টি,

$\angle B + \angle C = 180° - \angle A$

$= 180° - 120°$

$= 60°$ **(Ans.)**

**গ** ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, $A + B + C = 180°$

L.H.S $= \frac{a-b}{c}\operatorname{cosec}\frac{A-B}{2}$

$= \frac{2R\sin A - 2R\sin B}{2R\sin C} \times \operatorname{cosec}\frac{A-B}{2}$

$= \frac{\sin A - \sin B}{\sin C} \times \operatorname{cosec}\frac{A-B}{2}$

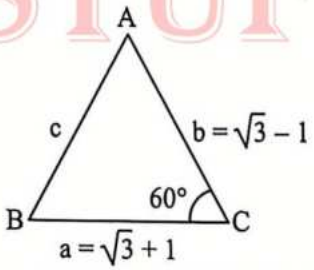
$= \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} \times \frac{1}{\sin\frac{A-B}{2}}$

$= \frac{\cos\left(\frac{180°}{2} - \frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2} \times \cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \times \sec\frac{C}{2}$

$= \sec\frac{C}{2} =$ R.H.S **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ২৬** দৃশ্যকল্প-১: $\Delta ABC$ এর $A = 75°$, $B - C = 15°$

দৃশ্যকল্প-২:




**(ক) $\cos 30°32' \cos 29°28' - \sin 149°28' \sin 29°28'$ এর মান নির্ণয় কর।** [য. বো. ১৯]

**(খ) দৃশ্যকল্প-১ অনুযায়ী দেখাও যে, $\cos\frac{C}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$**

**(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুযায়ী ত্রিভুজটির সমাধান কর।**

**সমাধান:**

**ক** প্রদত্ত রাশি

$= \cos 30°32' \cos 29°28' - \sin 149°28' \sin 29°28'$

$= \cos 30°32'.\cos 29°28' - \sin(180° - 30°32').\sin 29°28'$

$= \cos 30°32'.\cos 29°28' - \sin 30°32' \sin 29°28'$

$= \cos(30°32' + 29°28') = \cos 60° = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** দেওয়া আছে, $A = 75°$

$\therefore B + C = (180° - A)$

$\Rightarrow B + C = 105°$ ..... (i)

আবার,

$B - C = 15°$ ..... (ii)

(i) ও (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$2C = 90°$

$\therefore C = 45°$

$L.H.S = \cos\frac{C}{6} = \cos\frac{45°}{6}$

$= \cos\frac{15°}{2}$

$R.H.S = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos30°)}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2.2\cos^2 15°}}$ $[1+\cos2A = 2\cos^2 A]$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos15°}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2(1+\cos15°)}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2\times 2\cos^2\frac{15°}{2}}$

$= \frac{1}{2}\times 2\cos\frac{15°}{2}$

$= \cos\frac{15°}{2}$

$= L.H.S$ **(Showed)**

**গ** দৃশ্যকল্প-২ হতে, $a = \sqrt{3}+1$ ; $b = \sqrt{3}-1$ ; $\angle C = 60°$

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\Rightarrow \cos60° = \frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2-c^2}{2.(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$\Rightarrow \cos60° = \frac{2(3+1)-c^2}{2(3-1)}$ $[\because (a+b)^2+(a-b)^2 = 2a^2+2b^2]$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8-c^2}{4}$

$\Rightarrow c^2 = 6$

$\Rightarrow c = \sqrt{6}$

এখন, ত্রিভুজের সাইন সূত্রানুসারে,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \sin B = \frac{b\sin C}{c}$

$= \frac{(\sqrt{3}-1)\sin60°}{\sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\therefore B = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = 15°$

$\therefore A = 180° - (B + C)$

$= 180° - 75° = 105°$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $A = 105°$, $B = 15°$ এবং $c = \sqrt{6}$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২৭** $X = \sin\alpha - \cos\alpha$, $Y = \cos\beta - \sin\beta$, যেখানে $\alpha \neq \beta$, $P = \text{cosec}20°$, $Q = \sec20°$

(ক) $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3}$ হলে, $\cos3\theta$ এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ১৯]

(খ) $X = Y$ হলে, দেখাও যে, $2(\alpha+\beta) = \pi$ [দি. বো. ১৯]

(গ) প্রমাণ কর যে, $P + \sqrt{3}Q = 4\tan50°$ [দি. বো. ১৯]

সমাধান:

**ক** দেওয়া আছে, $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore \cos3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$= 4\times\frac{1}{27} - 3\times\frac{1}{3} = \frac{4}{27} - 1 = -\frac{23}{27}$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $X = \sin\alpha - \cos\alpha$

এবং $Y = \cos\beta - \sin\beta$

$X = Y$ হলে, $\sin\alpha - \cos\alpha = \cos\beta - \sin\beta$

$\Rightarrow \sin\alpha + \sin\beta = \cos\alpha + \cos\beta$

$\Rightarrow 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\Rightarrow \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\Rightarrow \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = 1$

$\Rightarrow \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore 2(\alpha+\beta) = \pi$ **(Showed)**

**গ** দেওয়া আছে, $P = \text{cosec}20°$ এবং $Q = \sec20°$

$L.H.S = P + \sqrt{3}Q$

$= \text{cosec}20° + \sqrt{3}\sec20°$

$= \frac{1}{\sin20°} + \frac{\sqrt{3}}{\cos20°}$

$= 2\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sin20°} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos20°}\right)$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$= 2\left(\frac{\sin30°}{\sin20°} + \frac{\cos30°}{\cos20°}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sin30°.\cos20° + \cos30.\sin20°}{\sin20°.\cos20°}\right)$$

$$= 2 \times 2 \times \frac{\sin(30° + 20°)}{2\sin20°.\cos20°}$$

$$= 4 \times \frac{\sin50°}{\sin40°}$$

$$= 4 \times \frac{\sin50°}{\sin(90° - 50°)}$$

$$= 4 \times \frac{\sin50°}{\cos50°}$$

$$= 4\tan50° = \text{R.H.S (Proved)}$$

**প্রশ্ন ▶ ২৮** দৃশ্যকল্প-১: $\sin\theta + \sin\phi = x$, $\cos\theta + \cos\phi = y$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \sin x$ একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন।

(ক) প্রমাণ কর যে, $\frac{\sqrt{3}}{\sin20°} - \frac{1}{\cos20°} = 4$ [সি. বো. ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{\theta - \varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{4 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

(গ) প্রমাণ কর যে, $\{f(x)\}^3 + \{f(x + 480°)\}^3 + \{f(x + 600°)\}^3 = -\frac{3}{4}f(3x)$

**সমাধান:**

**ক** L.H.S $= \frac{\sqrt{3}}{\sin20°} - \frac{1}{\cos20°}$

$$= 2\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin20°} - \frac{\frac{1}{2}}{\cos20°}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sin60°}{\sin20°} - \frac{\cos60°}{\cos20°}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sin60°.\cos20° - \cos60.\sin20°}{\sin20°.\cos20°}\right)$$

$$= 2 \times 2 \times \frac{\sin(60° - 20°)}{2\sin20°.\cos20°}$$

$$= 4 \times \frac{\sin40°}{\sin40°}$$

$$= 4 = \text{R.H.S (Proved)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $\sin\theta + \sin\varphi = x$

$$\therefore 2\sin\frac{\theta + \varphi}{2}\cos\frac{\theta - \varphi}{2} = x \quad \ldots\ldots \text{(i)}$$

এবং $\cos\theta + \cos\varphi = y$

$$\therefore 2\cos\frac{\theta + \varphi}{2}\cos\frac{\theta - \varphi}{2} = y \quad \ldots\ldots \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) নং বর্গ করে যোগ করি,

$$4\cos^2\frac{\theta - \varphi}{2}\left\{\sin^2\frac{\theta + \varphi}{2} + \cos^2\frac{\theta + \varphi}{2}\right\} = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\frac{\theta - \varphi}{2} = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\theta - \varphi}{2} = \frac{x^2 + y^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sec^2\frac{\theta - \varphi}{2}} = \frac{x^2 + y^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sec^2\frac{\theta - \varphi}{2} = \frac{4}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2\frac{\theta - \varphi}{2} = \frac{4}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{\theta - \varphi}{2} = \frac{4}{x^2 + y^2} - 1 = \frac{4 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore \tan\frac{\theta - \varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{4 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} \quad \text{(Proved)}$$

**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$$\therefore f(3x) = \sin3x$$

বামপক্ষ $= \{f(x)\}^3 + \{f(x + 480°)\}^3 + \{f(x + 600°)\}^3$

$$= (\sin x)^3 + \{\sin(x + 480°)\}^3 + \{\sin(x + 600°)\}^3$$

$$= \sin^3x + \{\sin(360° + x + 120°)\}^3 + \{\sin(360° + x + 240°)\}^3$$

$$= \sin^3x + \{\sin(x + 120°)\}^3 + \{\sin(x + 240°)\}^3$$

$$= \sin^3x + \sin^3(120° + x) + \sin^3(240° + x)$$

$$= \frac{1}{4}\{4\sin^3x + 4\sin^3(120° + x) + 4\sin^3(240° + x)\}$$

$$= \frac{1}{4}\{3\sin x - \sin3x + 3\sin(120° + x) - \sin3(120° + x) + 3\sin(240° + x) - \sin3(240° + x)\}$$

$$= \frac{1}{4}[3\sin x - \sin3x + 3\{\sin(120° + x) + \sin(240° + x)\} - \sin(360° + 3x) - \sin(720° + 3x)]$$

$$= \frac{1}{4}\left[3\sin x - \sin3x + 3.2\sin\frac{120° + x + 240° + x}{2}\cos\frac{240° + x - 120° - x}{2} - \sin3x - \sin3x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\ [3\sin x - \sin3x + 3.2\sin(180° + x)\cos60° - \sin3x - \sin3x]$$

$$= \frac{1}{4}\left[3\sin x - 3\sin3x - 3.2\sin x.\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}[3\sin x - 3\sin3x - 3\sin x]$$

$$= -\frac{3}{4}\sin3x$$

$$= -\frac{3}{4}f(3x)$$

= ডানপক্ষ

$$\therefore \{f(x)\}^3 + \{f(x + 480°)\}^3 + \{f(x + (600°))\}^3 = -\frac{3}{4}f(3x)$$

(Showed)

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ২৯** দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \cot x$.

দৃশ্যকল্প-২: $\sqrt{2}\cos A - \cos B = \cos^3 B$ এবং $\sqrt{2}\sin A + \sin^3 B = \sin B$

(ক) প্রমাণ কর যে, $\tan 70° = \tan 20° + 2\tan 50°$

(খ) $A + B + C = \pi$ এবং $f(A) + f(B) + f(C) = \sqrt{3}$ হলে, দেখাও যে, $A = B = C$

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec}(A - B) = \pm 3$

**সমাধান:**

**ক** $\tan 70° = \tan(50° + 20°)$

$$\Rightarrow \tan 70° = \frac{\tan 50° + \tan 20°}{1 - \tan 50° \tan 20°}$$

$$\Rightarrow \tan 70° - \tan 70° \tan 50° \tan 20° = \tan 50° + \tan 20°$$

$$\Rightarrow \tan 70° - \tan(90° - 20°) \tan 50° \tan 20° = \tan 50° + \tan 20°$$

$$\Rightarrow \tan 70° - \cot 20° \tan 50° \frac{1}{\cot 20°} = \tan 50° + \tan 20°$$

$$\Rightarrow \tan 70° - \tan 50° = \tan 50° + \tan 20°$$

$$\Rightarrow \tan 70° = \tan 20° + \tan 50° + \tan 50°$$

$\therefore \tan 70° = \tan 20° + 2\tan 50°$ **(Proved)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \cot x$

$\therefore f(A) = \cot A$

$\therefore f(B) = \cot B$

$\therefore f(C) = \cot C$

এবং $A + B + C = \pi$

$\therefore B + C = \pi - A$

$$\Rightarrow \cot(B + C) = \cot(\pi - A)$$

$$\Rightarrow \frac{\cot B \cot C - 1}{\cot B + \cot C} = -\cot A$$

$$\Rightarrow \cot B \cot C - 1 = -\cot A \cot B - \cot A \cot C$$

$\therefore \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$ ..... (i)

এখন, $f(A) + f(B) + f(C) = \sqrt{3}$ হলে,

$\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$

$\Rightarrow (\cot A + \cot B + \cot C)^2 = 3$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2\cot A \cot B + 2\cot B \cot C + 2\cot C \cot A = 3(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A)$ [(i) নং হতে]

$$\Rightarrow \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C - \cot A.\cot B - \cot B.\cot C - \cot C.\cot A = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\{2\cot^2 A + 2\cot^2 B + 2\cot^2 C - 2\cot A \cot B - 2\cot B \cot C - 2\cot C \cot A\} = 0$$

$$\Rightarrow (\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2 = 0$$

আমরা জানি, কতগুলো বর্গরাশির সমষ্টি শূন্য হলে, তাদের প্রত্যেকটির মান পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হয়।

$\cot A - \cot B = 0$; $\cot B - \cot C = 0$; $\cot C - \cot A = 0$;

$\Rightarrow \cot A = \cot B$ $\Rightarrow \cot B = \cot C$ $\Rightarrow \cot C = \cot A$

$\therefore A = B$ $\Rightarrow B = C$ $\Rightarrow C = A$

$\therefore A = B = C$ **(Showed)**

**গ** $\sqrt{2}\cos A - \cos B = \cos^3 B$

$\therefore \sqrt{2}\cos A = \cos B + \cos^3 B$ ..... (i)

এবং $\sqrt{2}\sin A + \sin^3 B = \sin B$

$\therefore \sqrt{2}\sin A = \sin B - \sin^3 B$ ..... (ii)

(i) ও (ii) কে বর্গ করে যোগ করে পাই,

$$2(\cos^2 A + \sin^2 A) = \cos^2 B + \sin^2 B + 2(\cos^4 B - \sin^4 B) + \cos^6 B + \sin^6 B$$

$$\Rightarrow 2 \times 1 = 1 + 2\{(\cos^2 B)^2 - (\sin^2 B)^2\} + (\cos^2 B)^3 + (\sin^2 B)^3$$

$$\Rightarrow 2 = 1 + 2(\cos^2 B + \sin^2 B)(\cos^2 B - \sin^2 B) + (\cos^2 B + \sin^2 B)^3 - 3\cos^2 B.\sin^2 B(\cos^2 B + \sin^2 B)$$

$$\Rightarrow 1 = 2 \times 1(\cos^2 B - \sin^2 B) + 1^3 - 3\cos^2 B.\sin^2 B$$

$$\Rightarrow 3\cos^2 B(1 - \cos^2 B) - 2(\cos^2 B - 1 + \cos^2 B) = 0$$

$$\Rightarrow 3\cos^2 B - 3\cos^4 B - 2\cos^2 B + 2 - 2\cos^2 B = 0$$

$$\Rightarrow 3\cos^4 B + \cos^2 B - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3\cos^4 B - 2\cos^2 B + 3\cos^2 B - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 B(3\cos^2 B - 2) + 1(3\cos^2 B - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (\cos^2 B + 1)(3\cos^2 B - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 3\cos^2 B - 2 = 0 \ [\because \cos^2 B + 1 \neq 0]$$

$$\Rightarrow 3\cos^2 B = 2$$

$$\Rightarrow \cos^2 B = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \cos B = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

এখন, $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$$= \cos B.\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin B - \sin^3 B) - \sin B \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos B + \cos^3 B)$$ [(i) ও (ii) থেকে পাই]

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos B \sin B - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos B \sin^3 B - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin B \cos^3 B - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos B \sin B$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos B \sin^3 B - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin B \cos^3 B$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin B \cos B(\sin^2 B + \cos^2 B)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin B \cos B \times 1$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos B\sqrt{1 - \cos^2 B}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{1 - \left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}$$ [cosB এর মান বসিয়ে]

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \pm\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sin(A - B) = \pm\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\operatorname{cosec}(A - B)} = \pm\frac{1}{3}$$

$\therefore \operatorname{cosec}(A - B) = \pm 3$ **(Proved)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

### ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং এদের মান নির্ণয় সংক্রান্ত

১। নিচের কোনটি সঠিক? [রা. বো. ২৩]

ক $\sin(-\theta) = \sin\theta$ খ $\tan(-\theta) = \tan\theta$

গ $\sec(-\theta) = \sec\theta$ ঘ $\operatorname{cosec}(-\theta) = \operatorname{cosec}\theta$

উত্তর: গ $\sec(-\theta) = \sec\theta$

ব্যাখ্যা: $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$, $\sec(-\theta) = \sec\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$

২। $\sec(270° + \theta)$ এর মান কোনটি? [চ. বো. ১৭]

ক $-\operatorname{cosec}\theta$ খ $-\sec\theta$

গ $\operatorname{cosec}\theta$ ঘ $\sec\theta$

উত্তর: গ $\operatorname{cosec}\theta$

ব্যাখ্যা: $\sec(3 \times 90° + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$
90° এর বিজোড় গুণিতক (3) বলে $\sec\theta$ হতে $\operatorname{cosec}\theta$ হবে এবং $(270 + \theta)$ কোণটি 4th Quadrant এ, যেখানে sec ধনাত্মক।

৩। $\sin(-3690°)$ এর মান কত? [ম. বো. ২৩]

ক 0 খ $-1$

গ 1 ঘ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

উত্তর: খ $-1$

ব্যাখ্যা: Using Calculator

৪। $\operatorname{cosec}(-2580°)$ এর মান কোনটি? [য. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২; ব. বো. ১৭]

ক $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ খ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

গ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ঘ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

উত্তর: খ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

ব্যাখ্যা: $\operatorname{cosec}(-2580°) = \frac{1}{\sin(-2580°)}$ Calculator দিয়ে মান বের করে Option Test করবে।

৫। $\tan\left(19\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ এর মান কত? [রা. বো. ২৩]

ক $\sqrt{3}$ খ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

গ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ $\frac{1}{2}$

উত্তর: ক $\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator

৬। $2\sin^2 75°$ এর মান কত? [রা. বো. ২৩]

ক $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ খ $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

গ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ঘ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

উত্তর: ঘ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator

৭। $2\sin^2 15°$ এর মান কত? [ব. বো. ২২, ১৭]

ক $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ খ $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

গ $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ঘ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

উত্তর: ক $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

ব্যাখ্যা: Calculator দিয়ে মান বের করে Option Test করবে।

৮। n একটি পূর্ণসংখ্যা হলে $\sin\left\{2n\pi + (-1)^{2n}\frac{\pi}{6}\right\}$ এর মান কত? [কু. বো. ২২]

ক $-\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{2}$

গ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

উত্তর: খ $\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা: $\sin\left\{2n\pi + (-1)^{2n}\frac{\pi}{6}\right\}$
$n = 0$ বসিয়ে পাই,
$\sin\left\{0 + (-1)^0\frac{\pi}{6}\right\} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

৯। যদি n এর মান জোড় হয় তবে $\cos\theta + \cos(\pi + \theta) + \cos(2\pi + \theta) + \cdots\cdots + \cos(n\pi + \theta) = ?$

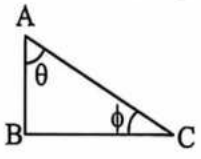
ক $\cos\theta$ খ $n\cos\theta$

গ 0 ঘ $\cos(n\pi + 0)$

উত্তর: ক $\cos\theta$

ব্যাখ্যা: $n = 2$ নিয়ে পাই, $\cos\theta + \cos(\pi + \theta) + \cos(2\pi + \theta) + \cos(3\pi + \theta) + \cos(4\pi + \theta) + \cdots\cdots$
$= \cos\theta - \cos\theta + \cos\theta + \cos\theta - \cos\theta + \cdots\cdots$
$= \cos\theta$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১০ ও ১১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




১০। $2AB = BC = x$ হলে, $\sin\theta = ?$

ক $\sin\phi$ খ $2\sin\phi$

গ $\frac{1}{2}\sin\phi$ ঘ $\frac{1}{4}\sin\phi$

উত্তর: খ $2\sin\phi$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: চিত্র হতে, $\sin\phi = \frac{AB}{AC}$ এবং $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$

$\therefore \sin\theta = \frac{2AB}{AC}$

$\Rightarrow \sin\theta = 2\sin\phi$

**১১। AB = 3, BC = 4 হলে, $\cos\theta + \cos\phi = ?$**

ক $\frac{7}{5}$ খ $\frac{5}{7}$

গ $\frac{8}{5}$ ঘ $\frac{5}{8}$

উত্তর: ক $\frac{7}{5}$

ব্যাখ্যা: $AC = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$\cos\theta + \cos\phi = \frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$

**১২। $\frac{\cot 54^\circ}{\tan 36^\circ} + \frac{\tan 20^\circ}{\cot 70^\circ}$ এর মান কত?** [সি. বো. ২২]

ক 0 খ 1

গ 2 ঘ 3

উত্তর: গ 2

ব্যাখ্যা: Calculator দিয়ে মান বের করে ফেল।

**১৩। $\cot\theta = \frac{3}{4}$ ও $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, $\sin\theta$ এর মান কত?** [সি. বো. ২৩]

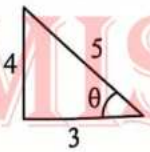
ক $\frac{4}{5}$ খ $\frac{5}{4}$

গ $-\frac{4}{5}$ ঘ $\frac{1}{5}$

উত্তর: গ $-\frac{4}{5}$

ব্যাখ্যা: $\cot\theta$ ধনাত্মক ও $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, $\sin\theta$ অবশ্যই ঋণাত্মক হবে।

$\sin\theta = -\frac{4}{5}$



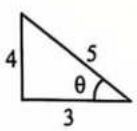

**১৪। $\cot\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে $\sec\theta$ এর মান কত?** [দি. বো. ২২]

ক $\frac{-5}{3}$ খ $\frac{-5}{4}$

গ $\frac{5}{4}$ ঘ $\frac{5}{3}$

উত্তর: ক $\frac{-5}{3}$

ব্যাখ্যা:




$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ব্যবধিতে $\sec\theta$ ঋণাত্মক

$\therefore \cot\theta = \frac{3}{4}$; চিত্র হতে, $\sec\theta = \frac{5}{3}$

কিন্তু $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ এই ব্যবধিতে $\sec\theta$ ঋণাত্মক বলে, Ans. $\frac{-5}{3}$

**১৫। $\sec\theta = \frac{13}{12}$ হলে $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ এর মান কোনটি?** [ব. বো. ১৯]

ক $\frac{5}{12}$ খ $\frac{5}{13}$

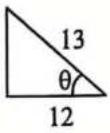
গ $\frac{13}{5}$ ঘ $\frac{12}{5}$

উত্তর: ঘ $\frac{12}{5}$

ব্যাখ্যা: $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$

$= \frac{12}{5}$

$\sqrt{13^2 - 12^2} = 5$




**১৬। $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\sin 3A =$ কত?** [ব. বো. ২৩]

ক 0 খ 1

গ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

উত্তর: খ 1

ব্যাখ্যা: $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A = 30^\circ$

$\therefore \sin 3A = \sin 90^\circ = 1$

**১৭। $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$ হলে, $\cos\theta$ এর মান কত?** [কু. বো. ২৩]

ক $\frac{9}{16}$ খ $\frac{7}{25}$

গ $\frac{24}{25}$ ঘ $\frac{25}{7}$

উত্তর: খ $\frac{7}{25}$

ব্যাখ্যা: $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$

$\therefore \theta = 2\tan^{-1}\frac{3}{4}$

$\therefore \cos\theta = \cos\left(2\tan^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{25}$ [Using Calculator]

**১৮। $\cos\theta = -\frac{12}{13}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে, $\tan\theta$ এর মান কত?** [কু. বো. ২৩]

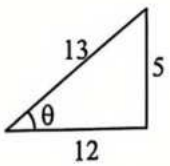
ক $\frac{-5}{12}$ খ $\frac{-12}{5}$

গ $\frac{5}{12}$ ঘ $\frac{12}{5}$

উত্তর: গ $\frac{5}{12}$

ব্যাখ্যা: ৩য় চতুর্ভাগে $\tan\theta$ ধনাত্মক।

$\therefore \tan\theta = \frac{5}{12}$




ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**১৯। θ সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan\theta = \frac{3}{4}$ হলে, $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ এর মান–**

ক 7 খ $\frac{1}{7}$

গ $-\frac{1}{7}$ ঘ $-7$

**উত্তর:** গ $-\frac{1}{7}$

**ব্যাখ্যা:** $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4} = 36.87°$

$\therefore \frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = -\frac{1}{7}$ ($\theta$ এর মান বসিয়ে) [Using Calculator]

**২০। $\tan2\theta - \tan\theta$ এর মান কোনটি?** [দি. বো. ১৯]

ক $\text{cosec}2\theta$ খ $\tan\theta\cos\theta$

গ $\sin2\theta$ ঘ $\tan\theta\sec2\theta$

**উত্তর:** ঘ $\tan\theta\sec2\theta$

**ব্যাখ্যা:** ধরি, $\theta = 30°$

$\tan60° - \tan30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

এখন, $\tan\theta\sec2\theta = \frac{\tan30°}{\cos60°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

**২১। $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ এর মান–** [ঢা. বো. ২২]

ক $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ খ $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

গ $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ঘ $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

**উত্তর:** ক $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

**ব্যাখ্যা:** $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.9238$ [Using Calculator in Radian Mode]

অপশন ক $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = 0.9238$

**২২। $\cos\left(7\frac{1}{2}\right)^\circ = ?$** [ঢা. বো. ১৭]

ক $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ খ $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

গ $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ ঘ $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

**উত্তর:** খ $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

**ব্যাখ্যা:** Calculator দিয়ে মান বের করে Option Test কর।

$\cos\left(7\frac{1}{2}\right)^\circ = \cos\left(\frac{15}{2}\right)^\circ = 0.993$

অপশন খ $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 0.993$

**২৩। $A = 60°, B = 45°$ হলে, $\cos(B - A)$ এর মান কোনটি?** [য. বো. ১৭]

ক $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ খ $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$

গ $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ ঘ $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

**উত্তর:** গ $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

**ব্যাখ্যা:** Calculator দিয়ে মান বের করে Option Test করবে।

**২৪। $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ এর মান কত?** [চ. বো. ২২]

ক $1-\sqrt{2}$ খ $-1+\sqrt{2}$

গ $1+\sqrt{2}$ ঘ $-1-\sqrt{2}$

**উত্তর:** খ $-1+\sqrt{2}$

**ব্যাখ্যা:** Calculator দিয়ে মান বের করে Option Test করবে।

**২৫। $\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{24}}$ এর মান কোনটি?** [ম. বো. ২৩]

ক $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ খ $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

গ $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ ঘ $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

**উত্তর:** ক $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

**ব্যাখ্যা:** $\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{24}} = 0.261$ [Using Calculator in Radian Mode]

অপশন ক $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 0.261$

**২৬। $0 < \theta < \pi$ হলে, $\frac{\sin\frac{\theta}{2} - \sqrt{1+\sin\theta}}{\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{1+\sin\theta}} = ?$**

ক $\tan\frac{\theta}{2}$ খ $\cot\frac{\theta}{2}$

গ $\tan\frac{\theta}{2} - 1$ ঘ 1

**উত্তর:** খ $\cot\frac{\theta}{2}$

**ব্যাখ্যা:** ধরি, $\theta = 60°$

$\frac{\sin30° - \sqrt{1+\sin60°}}{\cos30° - \sqrt{1+\sin60°}} = 1.732$ [Using Calculator]

অপশন খ $\cot30° = 1.732$

**২৭। $\sin65° + \cos65° = ?$** [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২]

ক $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos40°$ খ $\frac{1}{2}\sin20°$

গ $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin40°$ ঘ $\sqrt{2}\cos20°$

**উত্তর:** ঘ $\sqrt{2}\cos20°$

**ব্যাখ্যা:** Calculator দিয়ে মান বের করে Option Test কর।

$\sin65° + \cos65° = 1.3289$

অপশন ঘ $\sqrt{2}\cos20° = 1.3289$

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**২৮। $\sin\theta = \frac{1}{3}$ হলে, $\sin3\theta$ এর মান কত?** [কু. বো. ২৩]

ক $\frac{27}{31}$ খ $\frac{-23}{27}$
গ $\frac{23}{27}$ ঘ $\frac{9}{11}$

**উত্তর:** গ $\frac{23}{27}$

**ব্যাখ্যা:** $\sin\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore \theta = \sin^{-1}\frac{1}{3}$

$\sin3\theta = \sin\left(3\sin^{-1}\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{23}{27}$ [Using Calculator]

**২৯। $\tan\frac{\alpha}{2} = 7$ হলে, $4\sin\alpha - 3\cos\alpha = ?$** [ঢা. বো. ২২]

ক 5 খ 4
গ 3 ঘ 6

**উত্তর:** খ 4

**ব্যাখ্যা:** $\tan\frac{\alpha}{2} = 7 \therefore \alpha = 2\tan^{-1}7$

$\therefore 4\sin\alpha - 3\cos\alpha$
$= 4\sin(2\tan^{-1}7) - 3\cos(2\tan^{-1}7)$
$= 4$ [Using Calculator]

**৩০। $\sin(A - 30°) + \sin(150° + A)$ এর মান–**
[সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩]

ক $-\frac{1}{2}\cos A$ খ 0
গ $\cos A$ ঘ $\sin A$

**উত্তর:** খ 0

**ব্যাখ্যা:** $\sin(A - 30°) + \sin\{180° + (A - 30°)\}$
$= \sin(A - 30°) - \sin(A - 30°)$
$= 0$

**বিকল্প পদ্ধতি:** A এর একটি নির্দিষ্ট মান ধরে Option Test করবে।

**৩১। $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\tan(A + B) =$ কত?** [সি. বো. ১৯]

ক $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ খ $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$
গ $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ঘ $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

**উত্তর:** ঘ $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

**ব্যাখ্যা:** $A = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$

$B = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 35.264°$

$\tan(45° + 35.264°) = 5.8284$

অপশন ঘ $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 5.8284$ [Using Calculator]

**৩২। $P + Q = \frac{\pi}{4}$ হলে, $(1 + \tan P)(1 + \tan Q) = ?$**

ক 1 খ 3
গ 2 ঘ $-2$

**উত্তর:** গ 2

**ব্যাখ্যা:** ধরি, $P = \frac{\pi}{4} \therefore Q = 0$

$\therefore (1 + \tan P)(1 + \tan Q) = \left(1 + \tan\frac{p}{4}\right)(1 + \tan0) = 2$

**Note:** P ও Q এর এমন মান ধরতে হবে যেন $P + Q = \frac{\pi}{4}$ হয়।

**৩৩। $\sin^4\theta - \cos^4\theta$ সমান–** [ম. বো. ২২]

ক $1 + 2\sin^2\theta$ খ $1 + 2\cos^2\theta$
গ $2\sin^2\theta - 1$ ঘ $2\cos^2\theta - 1$

**উত্তর:** $2\sin^2\theta - 1$

**ব্যাখ্যা:** $\theta = 0°$ ধরে নাও।

$\sin^4 0° - \cos^4 0° = 0 - 1 = -1$

অপশন গ $2\sin^2\theta - 1 = 0 - 1 = -1$

**৩৪। যদি $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ হয় তবে, $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C + 2\sin A\sin B\sin C$ এর মান–**

ক 2 খ 0
গ 1 ঘ 3

**উত্তর:** গ 1

**ব্যাখ্যা:** $A + B + C = \frac{\pi}{2}$; ধরি, $A = B = C = 30°$

$\therefore \sin^2 30° + \sin^2 30° + \sin^2 30° + 2\sin30°\sin30°\sin30° = 1$
[Using Calculator]

**Note:** A, B ও C এর এমন মান ধরতে হবে যেন $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ হয়।

**৩৫। $A + B + C = n\pi$ হলে, $\tan A + \tan B + \tan C = ?$**

ক 0 খ $\frac{\pi}{4}$
গ $\tan(A + B + C)$ ঘ $\tan A\tan B\tan C$

**উত্তর:** ঘ $\tan A\tan B\tan C$

**ব্যাখ্যা:** $n = 1$ হলে, $A + B + C = \pi$

ধরি, $A = B = C = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \tan A + \tan B + \tan C = \tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3}$
$= 3\sqrt{3}$ [Using Calculator]

অপশন ঘ $\tan A\tan B\tan C = \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}$
$= 3\sqrt{3}$

**Note:** A, B ও C এর এমন মান ধরতে হবে যেন, $A + B + C = \pi$ হয়।

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৩৬। $A = 40°$ ও $B = 50°$ হলে– [য. বো. ১৯]

(i) $\cos 2A = \sin 10°$

(ii) $\sin(A - B) = \sin 10°$

(iii) $\cot(A + B) = \tan 0°$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ i ও iii

ব্যাখ্যা: Option গুলোতে A ও B এর মান বসিয়ে Calculator দিয়ে বামপক্ষ ও ডানপক্ষ মিলাও।

**Note:** (ii) নং এ $\sin(-10) \neq \sin 10°$, (ii) নং ভুল, তার মানে Ans. (i) ও (iii)

৩৭। $\cot\theta = \frac{4}{3}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে– [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ১৯]

(i) $\sin\theta = \frac{3}{5}$

(ii) $\cos^2\theta = \frac{16}{25}$

(iii) $\text{cosec}\theta.\sec\theta = \frac{25}{12}$

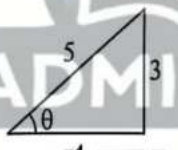
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ ii ও iii

ব্যাখ্যা: $\cot\theta = \frac{4}{3}$




(i) $\sin\theta = -\frac{3}{5}$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ এ $\sin\theta$ ঋণাত্মক

(ii) $\cos^2\theta = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

(iii) $\text{cosec}\theta.\sec\theta = \frac{-5}{3} \times \frac{-5}{4} = \frac{25}{12}$

৩৮। $\tan\theta = \sqrt{3}$ হলে– [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ১৯]

(i) $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$

(iii) $\tan 2\theta = -\sqrt{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: Calculator দিয়ে $\theta$ এর মান বের করে ওটা Option গুলোতে বসাও। $\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$

(i) $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\cos 120° = -\frac{1}{2}$

(iii) $\tan 120° = -\sqrt{3}$

## যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

৩৯। $\tan A = \frac{m+n}{m-n}$ এবং $\tan B = \frac{m-n}{m+n}$ হলে, $\tan(A - B)$ এর মান কত হবে?

ক অসঙ্গায়িত খ $2mn$

গ $4mn$ ঘ $\frac{2mn}{m^2 - n^2}$

উত্তর: ঘ $\frac{2mn}{m^2 - n^2}$

ব্যাখ্যা: $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

$$= \frac{\frac{m+n}{m-n} - \frac{m-n}{m+n}}{1 + \frac{m+n}{m-n} \times \frac{m-n}{m+n}}$$

$$= \frac{\frac{(m+n)^2 - (m-n)^2}{m^2 - n^2}}{2}$$

$$= \frac{4mn}{2(m^2 - n^2)}$$

$$= \frac{2mn}{m^2 - n^2}$$

৪০। $A + B = \frac{\pi}{4}$ হলে, $\cos^2 A - \cos^2 B$ এর মান কোনটি? [য. বো. ২৩]

ক $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(A - B)$ খ $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(B - A)$

গ $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(A - B)$ ঘ $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(B - A)$

উত্তর: খ $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(B - A)$

ব্যাখ্যা: $A + B = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \sin(A + B) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos^2 A - \cos^2 B$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 A - 2\cos^2 B)$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A - 1 - \cos 2B)$

$= \frac{1}{2}(\cos 2A - \cos 2B)$

$= \frac{1}{2} \times 2\sin\frac{2(A+B)}{2}\sin\frac{2(B-A)}{2}$

$= \sin(A + B)\sin(B - A)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(B - A)$

বিকল্প: A ও B এর মান ধরে $\cos^2 A - \cos^2 B$ এর মান বের করে Option Test করো।

ADMISSION STUFFS

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৪১। $A+B=\frac{\pi}{2}$ হলে, $\cos^2A-\cos^2B$ = কত? [ব. বো. ২২]

ক $\sin(A-B)$ খ $\sin(B-A)$
গ $\cos(A-B)$ ঘ 0

উত্তর: খ $\sin(B-A)$

ব্যাখ্যা: $\cos^2A-\cos^2B$
$=\sin(B+A)\sin(B-A)$
$=\sin(B-A)$ $[\sin(B+A)=\sin\frac{\pi}{2}=1]$

৪২। $A+B=\frac{\pi}{2}$ হলে, নিম্নের কোনটি সঠিক? [চ. বো. ২৩]

ক $\tan A=\tan B$ খ $\tan A=-\tan B$
গ $\tan A\tan B=-1$ ঘ $\tan A\tan B=1$

উত্তর: ঘ $\tan A\tan B=1$

ব্যাখ্যা: $\cos(A+B)=\cos\frac{\pi}{2}$
$\Rightarrow \cos A\cos B-\sin A\sin B=0$
$\Rightarrow \frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}=1$
$\therefore \tan A\tan B=1$

## দুইটি কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের যোগকে গুণ আকারে রূপান্তর সংক্রান্ত

৪৩। $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$ এর মান কত? [কু. বো. ১৯]

ক $\cot\alpha$ খ $\cot\beta$
গ $\tan\alpha$ ঘ $\tan\beta$

উত্তর: ক $\cot\alpha$

ব্যাখ্যা: $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$
$=\frac{2\cos\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\beta}=\cot\alpha$

৪৪। $\frac{\sin(45°+A)+\sin(45°-A)}{\cos(45°-A)-\cos(45°+A)}$ = কত? [ব. বো. ২২]

ক $\cot A$ খ $-1$
গ 1 ঘ $\tan A$

উত্তর: ক $\cot A$

ব্যাখ্যা: $\frac{\sin(45°+A)+\sin(45°-A)}{\cos(45°-A)-\cos(45°+A)}$
$=\frac{2\sin45°\cos A}{2\sin45°\sin A}=\cot A$

৪৫। $\Delta ABC$ এ, $\cos A=\sin B-\cos C$ হলে, $\angle A$ এর মান কোনটি? [য. বো. ২২]

ক $\frac{\pi}{4}$ খ $\frac{\pi}{3}$
গ $\frac{\pi}{6}$ ঘ $\frac{\pi}{2}$

উত্তর: ঘ $\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: $\cos A+\cos C=\sin B$
$\Rightarrow 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$
$\Rightarrow 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$
$\Rightarrow \cos\frac{A-C}{2}=\cos\frac{B}{2}$
$\therefore A=B+C$
$A+B+C=\pi$
$\Rightarrow A+A=\pi$
$\therefore A=\frac{\pi}{2}$

## গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

৪৬। $\frac{1-\tan25°}{1+\tan25°}$ এর মান নিম্নের কোনটি? [রা. বো. ২৩]

ক $\cot20°$ খ $\tan20°$
গ $\tan70°$ ঘ $\cot70°$

উত্তর: খ $\tan20°$

ব্যাখ্যা: $\frac{1-\tan25°}{1+\tan25°}$
$=\frac{\tan45°-\tan25°}{1+\tan45°.\tan25°}$
$=\tan(45°-25°)$
$=\tan20°$

বিকল্প পদ্ধতি: Calculator দিয়ে মান বের করে Option Test করবে।

৪৭। $\frac{1+\tan30°}{1-\tan30°}$ এর মান কোনটি? [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ১৯]

ক $\cos15°$ খ $\tan15°$
গ $\cos75°$ ঘ $\tan75°$

উত্তর: ঘ $\tan75°$

ব্যাখ্যা: $\frac{1+\tan30°}{1-\tan30°}$
$=\frac{\tan45°+\tan30°}{1-\tan45°.\tan30°}$
$=\tan(45°+30°)$
$=\tan75°$

বিকল্প পদ্ধতি: Calculator দিয়ে মান বের করে Option test করবে।

৪৮। $\tan4\theta$ এর মান নিচের কোনটি? [ম. বো. ২৩]

ক $\frac{2\tan2\theta}{1+\tan^22\theta}$ খ $\frac{2\tan2\theta}{1-\tan^22\theta}$
গ $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ ঘ $\frac{1-\tan^22\theta}{1+\tan^22\theta}$

উত্তর: খ $\frac{2\tan2\theta}{1-\tan^22\theta}$

ব্যাখ্যা: $\tan4\theta=\tan2.2\theta=\frac{2\tan2\theta}{1-\tan^22\theta}$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**৪৯। $\tan\theta = \frac{1}{2}$ হলে $\sin2\theta$ এর মান কত?** [ম. বো. ২২]

ক $\frac{3}{4}$ খ $\frac{4}{3}$

গ $\frac{5}{4}$ ঘ $\frac{4}{5}$

উত্তর: ঘ $\frac{4}{5}$

ব্যাখ্যা: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \sin2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ [Using Calculator]

অথবা, $\sin2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{4}{5}$

**৫০। $\tan\beta = \frac{q}{p}$ হলে, $\cos2\beta$ এর মান কত?** [কু. বো. ১৯]

ক $\frac{2pq}{p^2-q^2}$ খ $\frac{2pq}{p^2+q^2}$

গ $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ ঘ $\frac{p^2+q^2}{p^2-q^2}$

উত্তর: গ $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$

ব্যাখ্যা: $\cos2\beta = \frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta} = \frac{1-\frac{q^2}{p^2}}{1+\frac{q^2}{p^2}} = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$

**৫১। $\cos 2A = \frac{3}{5}$ হলে, sinA এর মান কত?** [চ. বো. ২২]

ক $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ খ $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

গ $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ ঘ $\frac{2}{\sqrt{5}}$

উত্তর: খ $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

ব্যাখ্যা: $2\sin^2A = 1 - \cos2A$

$\Rightarrow 2\sin^2A = 1 - \frac{3}{5}$

$\therefore \sin A = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৫২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\cot\theta = \frac{12}{5}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

**৫২। $\tan2\theta$ এর মান কত?** [ব. বো. ১৯]

ক $\frac{120}{119}$ খ $\frac{120}{169}$

গ $\frac{60}{119}$ ঘ $\frac{60}{169}$

উত্তর: ক $\frac{120}{119}$

ব্যাখ্যা: $\cot\theta = \frac{12}{5}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{5}{12}$

$\tan2\theta = \tan\left(2\tan^{-1}\frac{5}{12}\right) = \frac{120}{119}$ [Using Calculator]

**৫৩। $\sin10° = p$ হলে, $\sin20°$ এর মান কোনটি?**

[কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৫]

ক $2p$ খ $2p\sqrt{1-p^2}$

গ $2p\sqrt{p^2-1}$ ঘ $2\sqrt{1-p^2}$

উত্তর: খ $2p\sqrt{1-p^2}$

ব্যাখ্যা: $\sin20° = 2\sin10°\cos10°$ [$\sin2A = 2\sin A\cos A$]

$= 2\sin10° \times \sqrt{1-\sin^2 10°}$

$= 2p\sqrt{1-p^2}$

**৫৪। $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ = কত?** [চ. বো. ২০]

ক $\tan\frac{\theta}{2}$ খ $\cot\frac{\theta}{2}$

গ $\tan\theta$ ঘ $\cot\theta$

উত্তর: খ $\cot\frac{\theta}{2}$

ব্যাখ্যা: $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}$

$= \cot\frac{\theta}{2}$

**৫৫। $\frac{1-\cos2\theta+\sin2\theta}{1+\cos2\theta+\sin2\theta}$ এর মান কত?**

ক $\cot\theta$ খ $\tan\theta$

গ $\sin\theta+\cos\theta$ ঘ $\sin\theta-\cos\theta$

উত্তর: খ $\tan\theta$

ব্যাখ্যা: ধরি, $\theta = 30°$

$\frac{1-\cos2\theta+\sin2\theta}{1+\cos2\theta+\sin2\theta} = \frac{1-\cos60°+\sin60°}{1+\cos60°+\sin60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

অপশন খ $\tan30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [Using Calculator]

বিকল্প পদ্ধতি:

$\frac{1-\cos2\theta+\sin2\theta}{1+\cos2\theta+\sin2\theta} = \frac{2\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}$

$= \frac{2\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{2\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)}$

$= \tan\theta$

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৫৬। $\frac{2\tan(45^\circ+x)}{1+\tan^2(45^\circ+x)}$ = কত? [য. বো. ২৩]

ক $\cos2x$ খ $\sin2x$
গ $\cot2x$ ঘ $\tan2x$

উত্তর: ক $\cos2x$

ব্যাখ্যা: $\frac{2\tan(45^\circ+x)}{1+\tan^2(45^\circ+x)}$

$= \sin\{2(45^\circ+x)\}$ $\left[\sin2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}\right]$

$= \sin(90^\circ+2x)$

$= \cos2x$

বিকল্প পদ্ধতি: x এর একটি নির্দিষ্ট মান ধরে Option Test করবে।

৫৭। $\frac{\tan(x-y)+\tan y}{1-\tan(x-y)\tan y}$ = কত?

ক $-\tan x$ খ $\tan x$
গ $-\tan y$ ঘ $\tan y$

উত্তর: খ $\tan x$

ব্যাখ্যা: $\frac{\tan(x-y)+\tan y}{1-\tan(x-y)\tan y} = \tan(x-y+y) = \tan x$

৫৮। $\frac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$ এর মান কত?

[দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২২; য. বো. ১৭]

ক $\sin2x$ খ $-\cos2x$
গ $-\sin2x$ ঘ $\cos2x$

উত্তর: গ $-\sin2x$

ব্যাখ্যা: $\frac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

$= \cos 2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$

$= -\sin2x$

৫৯। নিচের কোন রাশিমালাটি $\sin3A$ কে $\sin A$ বা $\cos A$ বহুপদীরূপে প্রকাশ করে?

ক $3\cos A - 4\cos^3 A$ খ $3\sin A - 4\sin^3 A$
গ $4\cos^3 A - 3\cos A$ ঘ $4\sin^3 A - 3\sin A$

উত্তর: খ $3\sin A - 4\sin^3 A$

ব্যাখ্যা: সূত্র: $\sin3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

৬০। যদি $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ হয়, তবে $\cos3\theta$ এর মান– [সি. বো. ২২]

ক $\frac{1}{8}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$ খ $\frac{1}{3}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$
গ $\frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$ ঘ $\frac{3}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$

উত্তর: গ $\frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$

ব্যাখ্যা: ধরি, $a = 1$ ; $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right) = 1$

$\cos3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4-3 = 1$

অপশন গ $\frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right) = 1$ $[a=1]$

৬১। $\sin A = x$, $\cos A = y$, $\tan A = z$ হলে–

(i) $2xy = \frac{2z}{1-z^2}$

(ii) $y^2 - x^2 = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

(iii) $y^2 - x^2 = 1-2x^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $2xy = 2\sin A\cos A = \sin2A$

$= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \frac{2z}{1+z^2}$

(ii) $y^2 - x^2 = \cos^2 A - \sin^2 A$

$= \cos2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

(iii) $y^2 - x^2 = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos2A$

$= 1 - 2\sin^2 A = 1 - 2x^2$

৬২। $\cos2A$ = ? [য. বো. ২২]

(i) $-2\sin^2 A + 1$

(ii) $2\cos^2 A - 1$

(iii) $\frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: সূত্র: $1 + \cos2A = 2\cos^2 A$

$1 - \cos2A = 2\sin^2 A$

$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}$

৬৩। ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে– [য. বো. ২৩]

(i) $\cos2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

(ii) $\cos2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

(iii) $\cos2\theta = \frac{\cot^2\theta - 1}{\operatorname{cosec}^2\theta}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: (iii) $\cos2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$= \frac{1-\frac{1}{\cot^2\theta}}{1+\frac{1}{\cot^2\theta}}$

$= \frac{\cot^2\theta - 1}{\operatorname{cosec}^2\theta}$

৬৪। ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে– [ঢা. বো. ১৯]

(i) $\tan2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

(ii) $\sin2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(iii) $\cos2A = \frac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: সূত্র

৬৫। ত্রিকোণোমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে– [ব. বো. ২২]

(i) $\cos4A = \frac{1-\tan^2 2A}{1+\tan^2 2A}$

(ii) $\sin6A = 2\sin3A\cos3A$

(iii) $\tan8\alpha = \frac{2\tan4\alpha}{1-\tan^2 4\alpha}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $\cos2.2A = \frac{1-\tan^2 2A}{1+\tan^2 2A}$

(ii) $\sin2.3A = 2\sin3A.\cos3A$

(iii) $\tan2.4A = \frac{2\tan4A}{1-\tan^2 4A}$

৬৬। গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতি অনুপাত এর ক্ষেত্রে–

(i) $\cos2A = \sin^2 A - \cos^2 A$

(ii) $\sin3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(iii) $\cos2A = 2\cos^2 A - 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $\cos2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

(ii) $\sin3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(iii) $\cos2A = 2\cos^2 A - 1$

## ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি

৬৭। $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ হলে, sec (B + C) কোনটির সমান? [য. বো. ১৭]

ক secA খ – secA

গ – cosecA ঘ cosecA

উত্তর: ঘ cosecA

ব্যাখ্যা: $B+C=\frac{\pi}{2}-A$

$\sec(B+C) = \sec\left(\frac{\pi}{2}-A\right) = \operatorname{cosec} A$

$\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \operatorname{cosec}\theta\right]$

৬৮। $A+B+C=\frac{3\pi}{2}$ হলে, cosec(B + C) এর মান কোনটি? [রা. বো. ১৯]

ক – secA খ secA

গ – cosec ঘ cosecA

উত্তর: ক – secA

ব্যাখ্যা: $B+C=\frac{3\pi}{2}-A$

$\operatorname{cosec}(B+C) = \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}-A\right)$ ← ৩য় চতুর্ভাগ

$= -\sec A$

Note: 3rd Quadrant এ cosecθ negative এবং $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক (3) থাকায় cosecθ থেকে secθ হয়।

৬৯। $2\alpha+2\beta+2\gamma=\pi$ হলে, cosec(α + γ) এর মান কত? [কু. বো. ১৯]

ক – cosecβ খ cosecβ

গ – secβ ঘ secβ

উত্তর: ঘ secβ

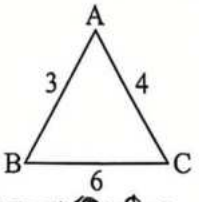
ব্যাখ্যা: $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ [2 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \alpha+\gamma=\frac{\pi}{2}-\beta$

$\operatorname{cosec}(\alpha+\gamma) = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \sec\beta$

## ত্রিভুজের সাইন সূত্র

❖ নিচের তথ্যের আলোকে ৭০ ও ৭১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




৭০। চিত্রের আলোকে কোন সম্পর্কটি সঠিক? [ব. বো. ২৩]

ক sinA = 2sinC খ 2sinA = sinC

গ 3sinA = 2sinC ঘ 2sinA = 3sinC

উত্তর: ক sinA = 2sinC

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: $a = 6, b = 4, c = 3$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\Rightarrow \frac{6}{\sin A} = \frac{3}{\sin C}$$
$$\therefore \sin A = 2\sin C$$

**৭১। cosB এর মান কত?** [চ. বো. ২৩]

ক $-\frac{11}{24}$ খ $\frac{11}{24}$

গ $\frac{29}{36}$ ঘ $\frac{43}{48}$

উত্তর: গ $\frac{29}{36}$

ব্যাখ্যা: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ca} = \frac{6^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 6 \times 3} = \frac{29}{36}$

**৭২। $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক?**

ক $\frac{1}{2R}$ খ $\frac{6\Delta}{2R}$

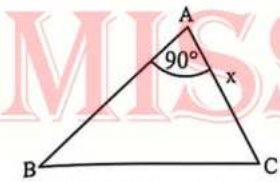
গ $\frac{6\Delta}{abc}$ ঘ $\frac{\Delta}{abc}$

উত্তর: ক $\frac{1}{2R}$

ব্যাখ্যা: ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$
$$\therefore \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}$$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৭৩ ও ৭৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




**৭৩। চিত্রে $B = 30°$ হলে $BC : CA : AB$ = কত?** [কু. বো. ১৭]

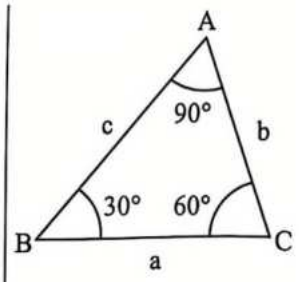
ক $1 : 2 : \sqrt{3}$ খ $2 : 1 : \sqrt{3}$

গ $\sqrt{3} : 1 : 2$ ঘ $1 : \sqrt{3} : 2$

উত্তর: খ $2 : 1 : \sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: $\angle C = 60°$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\Rightarrow \frac{BC}{\sin 90°} = \frac{AC}{\sin 30°} = \frac{AB}{\sin 60°}$$
$$\Rightarrow \frac{BC}{1} = \frac{CA}{\frac{1}{2}} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$




$$\Rightarrow BC : CA : AB = 1 : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 2 : 1 : \sqrt{3} \quad [2 \text{ দ্বারা গুণ করে}]$$

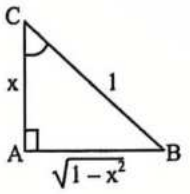
**৭৪। $\sin B = x$ হলে $\sin C$ এর মান কত?** [সি. বো. ১৭]

ক $x$ খ $\frac{1}{x}$

গ $\sqrt{x^2 - 1}$ ঘ $\sqrt{1 - x^2}$

উত্তর: ঘ $\sqrt{1 - x^2}$

ব্যাখ্যা: $\sin B = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{1}$




ভূমি, $AB = \sqrt{1 - x^2}$

$$\sin C = \frac{AB}{BC}$$
$$= \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$$
$$= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1}$$
$$= \sqrt{1 - x^2}$$

**৭৫। $\Delta ABC$ এর পরিব্যাসার্ধ 10 একক। যদি $c = 10\sqrt{3}$ একক হয়, তবে C কোণের মান নিচের কোনটি?** [চ. বো. ২২]

ক $60°$ খ $120°$

গ $30°$ ঘ $90°$

উত্তর: ক $60°$

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

এখন, $\frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\Rightarrow \frac{10\sqrt{3}}{\sin C} = 2 \times 10$$
$$\therefore C = 60°$$

**৭৬। $\Delta ABC$ এ, $\angle B = 60°$, $\angle C = 30°$ এবং $b = 3\sqrt{3}$ একক হলে, c এর দৈর্ঘ্য কত?** [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ১৭]

ক $\frac{1}{2}$ একক খ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ একক

গ $2\sqrt{3}$ একক ঘ 3 একক

উত্তর: ঘ 3 একক

ব্যাখ্যা: $\Delta ABC$ এর সাইন সূত্রানুসারে,

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\sin 60°} = \frac{c}{\sin 30°}$$
$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\frac{1}{2}}$$
$$\therefore c = 3$$

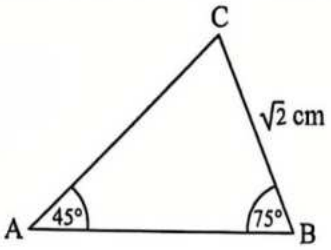
Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৭৭ ও ৭৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




৭৭। $\sin(B + C)$ এর মান কত? [রা. বো. ১৭]

ক $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ খ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

গ $-\sqrt{3}$ ঘ $\sqrt{2}$

উত্তর: খ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ব্যাখ্যা: $B + C = 180° - A$

$$\sin(B + C) = \sin(180° - 45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

৭৮। AB = কত সেমি? [রা. বো. ১৭]

ক $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ $\frac{2}{\sqrt{3}}$

গ $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ঘ $\sqrt{3}$

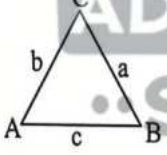
উত্তর: ঘ $\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: $AB = c$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\sin 60°} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45°}$$

$\therefore c = \sqrt{3}$ একক




৭৯। একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 cm, 8 cm এবং 10 cm। ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ কত? [ম. বো. ২৩]

ক 6 cm খ 7 cm

গ 8 cm ঘ 5 cm

উত্তর: ঘ 5 cm

ব্যাখ্যা: $a = 6, b = 8, c = 10$

এখানে, $6^2 + 8^2 = 100 = 10^2$

ত্রিভুজটি সমকোণী,

$$\therefore \text{পরিব্যাসার্ধ} = \frac{\text{অতিভুজ}}{2} = 5 \text{ cm}$$

## ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র

৮০। $\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রে $c^2 + a^2 - b^2 - ca = 0$ হলে, $\angle B$ এর পরিমাণ– [ম. বো. ২২]

ক 30° খ 45°

গ 60° ঘ 120°

উত্তর: গ 60°

ব্যাখ্যা: $c^2 + a^2 - b^2 = ca$

$$\Rightarrow \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{ca}{2ca} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{1}{2}$$

$\therefore B = 60°$

৮১। যদি ABC ত্রিভুজের বাহুদ্বয় BC = a, CA = b, AB = c হয় এবং $(b + c - a)(a + b + c) = (\sqrt{3} + 2)\,bc$ হয়, তবে A এর মান কত?

ক 60° খ 45°

গ 30° ঘ কোনোটিই নয়

উত্তর: গ 30°

ব্যাখ্যা: $(b + c - a)(a + b + c) = (\sqrt{3} + 2)bc$

$$\Rightarrow (b + c)^2 - a^2 = (\sqrt{3} + 2)bc$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc - a^2 = (\sqrt{3} + 2)bc$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}bc}{2bc}$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore A = 30°$

৮২। একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর পরিমাণ যথাক্রমে 4, 6 ও 8 একক হলে, স্থূলকোণটির পরিমাণ কত? [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২]

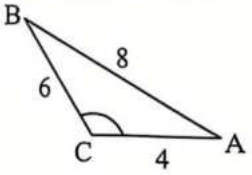
ক $\cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)$ খ $\cos^{-1}\left(\frac{5}{48}\right)$

গ $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$ ঘ $\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

উত্তর: গ $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

ব্যাখ্যা: $\cos C = \frac{4^2 + 6^2 - 8^2}{2 \times 4 \times 6}$

$$\therefore C = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$$




**Note:** যে বাহুটি বৃহত্তম, তার বিপরীত কোণ বৃহত্তম হবে।

৮৩। $\Delta ABC$ এ $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab$ হলে, $\angle C$ = কত? [চ. বো. ২৩]

ক 0° খ 45°

গ 90° ঘ 180°

উত্তর: ক 0°

ব্যাখ্যা: $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1$$

$$\Rightarrow \cos C = 1$$

$\therefore \angle C = 0°$

ADMISSION STUFFS

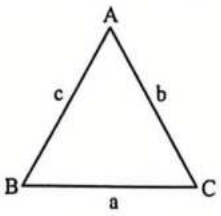
Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৮৪ ও ৮৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




৮৪। $\angle A = 60°$, $b = 2$ এবং $c = 4$ হলে, a-এর মান কত? [সি. বো. ২২]

ক $2\sqrt{2}$ খ $2\sqrt{3}$
গ $\sqrt{3}$ ঘ $\sqrt{6}$

উত্তর: খ $2\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: $\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$

$\Rightarrow \cos 60° = \frac{16 + 4 - a^2}{2 \times 2 \times 4}$

$\therefore a = 2\sqrt{3}$

৮৫। $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ হলে $a : b : c =$ কত? [সি. বো. ২২]

ক $2 : \sqrt{3} : 1$ খ $\sqrt{3} : 2 : 1$
গ $2 : 3 : 1$ ঘ $1 : \sqrt{3} : 2$

উত্তর: ঘ $1 : \sqrt{3} : 2$

ব্যাখ্যা: ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $180°$

$\therefore \angle A = 30°, \angle B = 60°, \angle C = 90°$

[$\because \angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$]

এখন, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

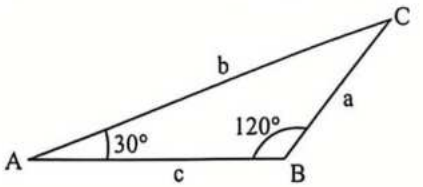
$\therefore a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$

$= 1 : \sqrt{3} : 2$ [2 দ্বারা গুণ করে]

## ত্রিভুজের বাহুর পরিমাপ; বাহুর পরিমাপের সাথে $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ এর সম্পর্ক এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৮৬ ও ৮৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




৮৬। $\frac{c + a}{b}$ এর মান কোনটি? [কু. বো. ১৭]

ক 2 খ $\frac{1}{2}$
গ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ঘ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

উত্তর: গ $\frac{2}{\sqrt{3}}$

ব্যাখ্যা: $\angle A = 30°$ ; $\angle B = 120°$ ; $\angle C = 30°$

$\frac{c + a}{b} = \frac{2R \sin C + 2R \sin A}{2R \sin B}$ ; $\left[\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\right]$

$= \frac{\sin C + \sin A}{\sin B}$

$= \frac{\sin 30° + \sin 30°}{\sin 120°}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}$

৮৭। $b = 3$ একক হলে $\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [কু. বো. ১৭]

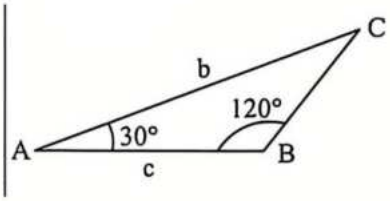
ক $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ খ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
গ $\frac{3}{4}$ ঘ $\frac{9}{2}$

উত্তর: ক $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

ব্যাখ্যা: $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \frac{3}{\sin 120°} = \frac{c}{\sin 30°}$

$\therefore c = \sqrt{3}$




$\Delta$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} bc \sin A$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3} \times \sin 30°$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4}$

৮৮। ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\Delta = ?$ [ঢা. বো. ২৩]

ক $\frac{abc}{4R}$ খ $\frac{4R}{abc}$
গ $\frac{abc}{R}$ ঘ $\frac{R}{abc}$

উত্তর: ক $\frac{abc}{4R}$

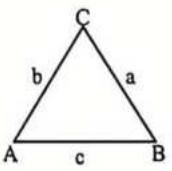
৮৯। যে কোনো ত্রিভুজের বাহু a, b, c এবং এর ক্ষেত্রফল $\Delta$ হলে, $\sin A =$ কত? [য. বো. ২২]

ক $\frac{2\Delta}{ca}$ খ $\frac{2\Delta}{bc}$
গ $\frac{2\Delta}{ab}$ ঘ $\frac{2\Delta}{abc}$

উত্তর: খ $\frac{2\Delta}{bc}$

ব্যাখ্যা: $\Delta = \frac{1}{2} \times bc \sin A$

$\therefore \sin A = \frac{2\Delta}{bc}$




Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**৯০। $a = 2, b = 1, \angle C = 60°$ হলে $\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল কত?**

[চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২]

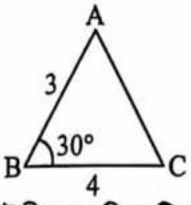
ক $\frac{\sqrt{3}}{4}$ খ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

গ $\frac{1}{2}$ ঘ $\sqrt{3}$

**উত্তর:** খ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**ব্যাখ্যা:** $\Delta ABC = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**৯১।**




**উদ্দীপকের ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?** [কু. বো. ২৩]

ক $6\sqrt{3}$ খ 6

গ $3\sqrt{3}$ ঘ 3

**উত্তর:** ঘ 3

**ব্যাখ্যা:** $\Delta ABC = \frac{1}{2} ca \sin B$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \sin 30° = 3$ বর্গএকক

**৯২। যে কোনো ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক?** [ম. বো. ২২]

ক $c = a\cos B + b\cos A$ খ $b = c\sin A + a\sin C$

গ $\Delta = \frac{1}{2} ab \cos C$ ঘ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2bc}$

**উত্তর:** ক $c = a\cos B + b\cos A$

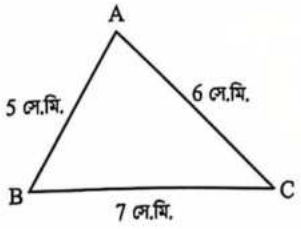
**ব্যাখ্যা:** সূত্র: $c = a\cos B + b\cos A$

$\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$

$b = c\cos A + a\cos C$

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

❖ **উদ্দীপকটির আলোকে ৯৩ ও ৯৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**




**৯৩। $\sin \frac{A}{2}$ = কত?** [সি. বো. ১৯]

ক $\sqrt{\frac{2}{5}}$ খ $-\sqrt{\frac{2}{5}}$

গ $\frac{2}{5}$ ঘ $-\frac{2}{5}$

**উত্তর:** ক $\sqrt{\frac{2}{5}}$

**ব্যাখ্যা:** $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\Rightarrow A = \cos^{-1}\left(\frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 6}\right) = 78.463°$

এখন, $\sin\left(\frac{A}{2}\right)$

$= \sin\left(\frac{78.463}{2}\right)$

$= 0.6325$

Option ক $\sqrt{\frac{2}{5}} = 0.6325$

**৯৪। $\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?**

[সি. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২]

ক $9\sqrt{6}$ খ $7\sqrt{6}$

গ $6\sqrt{6}$ ঘ $5\sqrt{6}$

**উত্তর:** গ $6\sqrt{6}$

**ব্যাখ্যা:** $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{9(9-7)(9-6)(9-5)}$

$= 6\sqrt{6}$ বর্গ সে.মি.

$s = \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{7+6+5}{2} = 9$

**৯৫। ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু $a = 3, b = 4$ এবং $c = 5$ হলে—**

[ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ১৭]

**(i) $5 = 4\cos A + 3\cos B$**

**(ii) $\cos \frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$**

**(iii) $\tan \frac{A-C}{2} = \frac{1}{4} \cot \frac{B}{2}$**

**নিচের কোনটি সঠিক?**

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** ক i ও ii

**ব্যাখ্যা:** (i) $c = a\cos B + b\cos A$

$\Rightarrow 5 = 3\cos B + 4\cos A$

(ii) $C = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{3^2 + 4^2 - 5^2}{2 \times 3 \times 4}\right)$

$= 90°$

$\therefore \cos \frac{C}{2} = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $A = \cos^{-1}\left(\frac{4^2 + 5^2 - 3^2}{2 \times 4 \times 5}\right) = 36.87°$

$B = 180 - (A + C)$

$= 53.13$

এখন A, B ও C কোণের মান সমীকরণে বসিয়ে বামপক্ষ ও ডানপক্ষ Test করো।

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS

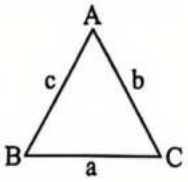


t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



◆ উদ্দীপকের আলোকে ৯৬ ও ৯৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




**৯৬। $\cos\frac{A}{2}$ = কত?** [ঢা. বো. ২৩]

ক $\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ খ $\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

গ $\sqrt{\frac{bc}{s(s-a)}}$ ঘ $\sqrt{\frac{bc}{(s-b)(s-c)}}$

**উত্তর:** ক $\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

**৯৭। উদ্দীপকে–**

(i) $b = c\cos A + a\cos C$

(ii) $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C$

(iii) $c = 2R\sin C$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** খ i ও iii

**ব্যাখ্যা:** $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

**৯৮। যে কোনো ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রে–** [ঢা. বো. ১৯]

(i) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

(ii) $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A$

(iii) $c - a\cos B = b\cos A$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** ঘ i, ii ও iii

**ব্যাখ্যা:** সূত্র

**৯৯। $\Delta ABC$ এর $a = 5$, $b = 4$ এবং $c = 3$ হলে–** [ব. বো. ২২]

(i) A কোণের মান 60°

(ii) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক

(iii) ত্রিভুজটি সমকোণী

নিচের কোনটি সঠিক?

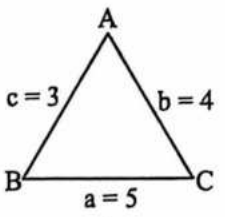
ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** গ ii ও iii

**ব্যাখ্যা:** (i) $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4^2+3^2-5^2}{2\times4\times3}$

$\therefore A = 90°$




(ii) $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = 6$ | $s = \frac{3+4+5}{2} = 6$

(iii) সমকোণী কারণ একটি কোণ 90°

**Or,** $3^2 + 4^2 = 5^2$ [পিথাগোরাস]

**১০০। $\Delta ABC$ এ $AB = 12$ সে.মি., $BC = 5$ সে.মি., $AC = 13$ সে.মি.** [রা. বো. ২৩]

(i) $\angle B = \frac{\pi}{2}$

(ii) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 30 বর্গ সে.মি.

(iii) ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের ব্যাস 13 সে.মি.

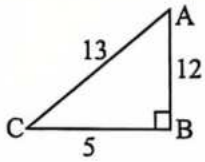
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** ঘ i, ii ও iii

**ব্যাখ্যা:** (i) $\angle B = 90° = \frac{\pi}{2}$




(ii) $\Delta ABC = \frac{1}{2}\times5\times12$

$= 30$ বর্গ সে.মি.

(iii) পরিবৃত্তের ব্যাস = অতিভুজ

$= 13$ সে.মি.

**১০১। একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3, 5, 7 একক হলে–** [রা. বো. ২২]

(i) ত্রিভুজটির পরিসীমা 15 একক

(ii) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ বর্গ একক

(iii) ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ 120°

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** খ i ও iii

**ব্যাখ্যা:** (i) পরিসীমা = বাহুগুলোর যোগফল = 15 একক

(ii) $s = \frac{a+b+c}{2} = 7.5$

$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{7.5(7.5-3)(7.5-5)(7.5-7)} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ বর্গএকক

(iii) বৃহত্তম কোণ $\theta$ হলে, $\cos\theta = \frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}$

$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{2}$ $\therefore \theta = 120°$

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## নিজেকে যাচাই করো

১। $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$ এর মান কত?

ক $\cot\alpha$ খ $\cot\beta$ গ $\tan\alpha$ ঘ $\tan\beta$

২। একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 cm, 8 cm এবং 10 cm। ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ কত?

ক 6 cm খ 7 cm গ 8 cm ঘ 5 cm

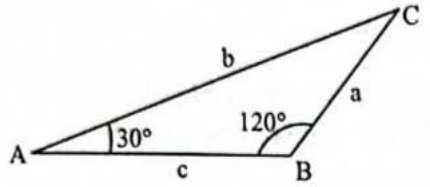
৩। $\tan A = \frac{m+n}{m-n}$ এবং $\tan B = \frac{m-n}{m+n}$ হলে, $\tan(A-B)$ এর মান কত হবে?

ক অসঙ্গায়িত খ $2mn$ গ $4mn$ ঘ $\frac{2mn}{m^2-n^2}$

৪। যদি $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ হয়, তবে $\cos3\theta$ এর মান-

ক $\frac{1}{8}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$ খ $\frac{1}{3}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$ গ $\frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$ ঘ $\frac{3}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৫ ও ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




৫। $\frac{c+a}{b}$ এর মান কোনটি?

ক 2 খ $\frac{1}{2}$ গ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ঘ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

৬। $b = 3$ একক হলে $\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

ক $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ খ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ গ $\frac{3}{4}$ ঘ $\frac{9}{2}$

৭। $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\sin3A =$ কত?

ক 0 খ 1 গ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

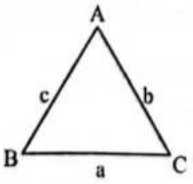
৮। $\Delta ABC$ এ, $\angle B = 60°$, $\angle C = 30°$ এবং $b = 3\sqrt{3}$ একক হলে, c এর দৈর্ঘ্য কত?

ক $\frac{1}{2}$ একক খ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ একক গ $2\sqrt{3}$ একক ঘ 3 একক

৯। $A+B+C = \frac{3\pi}{2}$ হলে, $\operatorname{cosec}(B+C)$ এর মান কোনটি?

ক $-\sec A$ খ $\sec A$ গ $-\operatorname{cosec}$ ঘ $\operatorname{cosec} A$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১০ ও ১১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




১০। $\angle A = 60°$, $b = 2$ এবং $c = 4$ হলে, a-এর মান কত?

ক $2\sqrt{2}$ খ $2\sqrt{3}$ গ $\sqrt{3}$ ঘ $\sqrt{6}$

১১। $\angle A : \angle B : \angle C = 1:2:3$ হলে $a:b:c =$ কত?

ক $2:\sqrt{3}:1$ খ $\sqrt{3}:2:1$ গ $2:3:1$ ঘ $1:\sqrt{3}:2$

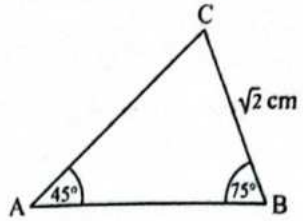
১২। n একটি পূর্ণসংখ্যা হলে $\sin\left\{2n\pi+(-1)^{2n}\frac{\pi}{6}\right\}$ এর মান কত?

ক $-\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{2}$ গ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

১৩। $\cos2A = \frac{3}{5}$ হলে, $\sin A$ এর মান কত?

ক $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ খ $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ গ $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ ঘ $\frac{2}{\sqrt{5}}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১৪ ও ১৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




১৪। $\sin(B+C)$ এর মান কত?

ক $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ খ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ গ $-\sqrt{3}$ ঘ $\sqrt{2}$

১৫। AB = কত সেমি?

ক $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ গ $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ঘ $\sqrt{3}$

১৬। $\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{24}}$ এর মান কোনটি?

ক $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ খ $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

গ $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ ঘ $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

১৭। যদি ABC ত্রিভুজের বাহুদ্বয় $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ হয় এবং $(b+c-a)(a+b+c) = (\sqrt{3}+2)bc$ হয়, তবে A এর মান কত?

ক 60° খ 45° গ 30° ঘ কোনোটিই নয়

১৮। $A+B = \frac{\pi}{2}$ হলে, নিম্নের কোনটি সঠিক?

ক $\tan A = \tan B$ খ $\tan A = -\tan B$ গ $\tan A\tan B = -1$ ঘ $\tan A\tan B = 1$

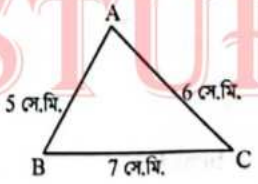
১৯। $\Delta ABC$ এ, $\cos A = \sin B - \cos C$ হলে, $\angle A$ এর মান কোনটি?

ক $\frac{\pi}{4}$ খ $\frac{\pi}{3}$ গ $\frac{\pi}{6}$ ঘ $\frac{\pi}{2}$

২০। $0 < \theta < \pi$ হলে, $\frac{\sin\frac{\theta}{2}-\sqrt{1+\sin\theta}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{1+\sin\theta}} = ?$

ক $\tan\frac{\theta}{2}$ খ $\cot\frac{\theta}{2}$ গ $\tan\frac{\theta}{2}-1$ ঘ 1

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ২১ ও ২২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:




২১। $\sin\frac{A}{2}$ = কত?

ক $\sqrt{\frac{2}{5}}$ খ $-\sqrt{\frac{2}{5}}$ গ $\frac{2}{5}$ ঘ $-\frac{2}{5}$

২২। $\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক $9\sqrt{6}$ খ $7\sqrt{6}$ গ $6\sqrt{6}$ ঘ $5\sqrt{6}$

২৩। $A+B = \frac{\pi}{2}$ হলে, $\cos^2A - \cos^2B =$ কত?

ক $\sin(A-B)$ খ $\sin(B-A)$ গ $\cos(A-B)$ ঘ 0

২৪। যদি n এর মান জোড় হয় তবে $\cos\theta + \cos(\pi+\theta) + \cos(2\pi+\theta) + \ldots\ldots + \cos(n\pi+\theta) = ?$

ক $\cos\theta$ খ $n\cos\theta$ গ 0 ঘ $\cos(n\pi+0)$

২৫। $\frac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$ এর মান কত?

ক $\sin2x$ খ $-\cos2x$ গ $-\sin2x$ ঘ $\cos2x$

| উত্তরপত্র | ১ | ক | ২ | খ | ৩ | ঘ | ৪ | গ | ৫ | গ | ৬ | ক | ৭ | খ | ৮ | খ | ৯ | ক | ১০ | খ | ১১ | ঘ | ১২ | খ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ১৩ | খ | ১৪ | খ | ১৫ | ঘ | ১৬ | ক | ১৭ | গ | ১৮ | ঘ | ১৯ | ঘ | ২০ | খ | ২১ | ক | ২২ | গ | ২৩ | খ | ২৪ | ক | ২৫ | গ |

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs

০৯

# অন্তরীকরণ
# Differentiation

## Board Questions Analysis

সৃজনশীল প্রশ্ন

| বোর্ড / সাল | ঢাকা | ময়মনসিংহ | রাজশাহী | কুমিল্লা | যশোর | চট্টগ্রাম | বরিশাল | সিলেট | দিনাজপুর |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ২০২৩ | ১ | ২ | ২ | ১ | ১ | ১ | ১ | ১ | ২ |
| ২০২২ | ১ | ২ | ১ | ২ | ১ | ১ | ২ | ১ | ২ |

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

| বোর্ড / সাল | ঢাকা | ময়মনসিংহ | রাজশাহী | কুমিল্লা | যশোর | চট্টগ্রাম | বরিশাল | সিলেট | দিনাজপুর |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ২০২৩ | ৪ | ৪ | ২ | ৩ | ২ | ২ | ৩ | ২ | ৪ |
| ২০২২ | ৫ | ৪ | ৫ | ৫ | ৪ | ৫ | ৪ | ৪ | ৫ |

## এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

❑ ফাংশনের লিমিটের প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:

(i) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$

(ii) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1$

(iii) $\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin^{-1}x}=1$

(iv) $\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan^{-1}x}=1$

(v) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

(vi) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

(vii) $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$

(viii) $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(ix) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

(x) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$

(xi) $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

❑ প্রয়োজনীয় ধারা:

(i) $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots$

(ii) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$

(iii) $e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$

(vi) $a^x=1+\frac{x}{1!}\ln a+\frac{x^2}{2!}(\ln a)^2+\frac{x^3}{3!}(\ln a)^3+\cdots\cdots$

(viii) $\log_e(1+x)$ বা $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots\cdots$

(x) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots$

❑ অন্তরীকরণের প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:

- মূল নিয়ম:

  $y=f(x)$ হলে, $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\{f(x)\}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

  যেকোন বিন্দুতে $x=a$ হলে, $f(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

- $\frac{d}{dx}(c)=0$ [যখন c ধ্রুবক]
- $\frac{d}{dx}\{cf(x)\}=c\frac{d}{dx}\{f(x)\}$
- $\frac{d}{dx}(cx^n)=c.\frac{d}{dx}(x^n)=cnx^{n-1}$

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



- $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\sin ax) = a\cos ax$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a\sin ax$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x.\tan x$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x.\cot x$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(e^{mx}) = me^{mx}$
- $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
- $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$
- $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$
- $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$
- $\frac{d}{dx}(u^v) = u^v\left[v\frac{d}{dx}(\ln u) + \ln u\frac{dv}{dx}\right]$
- $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$
- $\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{d}{dx}(u) - \frac{d}{dx}(v)$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$

❑ **পর্যায়ক্রমিক অন্তরজের প্রতীকসমূহ:**

(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = y_2$

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = y_3$

(iii) $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{d}{dx}(y) = 2yy_1, \frac{d(y_1^2)}{dx} = 2y_1\frac{d}{dx}(y_1) = 2y_1y_2$

(iv) $\frac{dy}{dx} = y_1, \frac{dy_1}{dx} = y_2, \frac{dy_2}{dx} = y_3$

❑ **স্পর্শক ও অভিলম্ব:**

(i) $y = f(x)$ বক্ররেখার $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল,
$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}$ এবং অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{1}{m}$ অর্থাৎ $-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}}$

(ii) $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $y = f(x)$ বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ,
$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}(x - x_1)$

(iii) $y = f(x)$ বক্ররেখার $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,
$(x - x_1) + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}(y - y_1) = 0$

❑ **কোনো ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন:**
যদি $a < x < b$ এর সকল x এর জন্য $f'(x) > 0$ হয়, তবে $y = f(x)$ ফাংশন, (a, b) ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান হবে। এবং $a < x < b$ এর সকল x এর জন্য $f'(x) < 0$ হয়, তবে $y = f(x)$ ফাংশন, (a, b) ব্যবধিত ক্রমহ্রাসমান হবে।

❑ **ফাংশনের গুরুমান (বৃহত্তম মান) ও লঘুমান (ক্ষুদ্রতম মান) নির্ণয়ের পদ্ধতি:**

(i) প্রদত্ত ফাংশনটিকে $f(x)$ ধরতে হবে।

(ii) $f'(x)$ নির্ণয় করতে হবে।

(iii) ফাংশনটির গুরুমান বা লঘুমানের জন্য $f'(x) = 0$ ধরে, x এর মান নির্ণয় করতে হবে।
ধরি, $x = a, b, c$

(iv) $x = a$ মানের জন্য $f''(a) > 0$ হলে, ফাংশনটির মান লঘুমান হবে এবং ফাংশনটির লঘুমান $= f(a)$

(v) $x = b$ মানের জন্য $f''(b) < 0$ হলে, ফাংশনটির মান গুরুমান হবে এবং ফাংশনটির গুরুমান $= f(b)$

(vi) $x = c$ মানের জন্য $f''(c) = 0$ হলে, $x = c$ এর জন্য ফাংশনটির inflection point পাওয়া যাবে এবং inflection point $(c, f(c))$

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

**প্রশ্ন ▶ ১** দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \sin x$

দৃশ্যকল্প-২: $x = \tan\sqrt{2y}$

(ক) x এর সাপেক্ষে $\log_x a$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $1 + 2g(x) + 3[1 - \{g(x)\}^2]$ এর $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে চরম মান নির্ণয় কর।

[ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২৩; দি. বো. ২৩; রা. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)^2 y_2 + 2(1 + x^2)xy_1 = 1$ [ঢা. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** ধরি, $y = \log_x a$

$= \log_x e \times \log_e a$

$= \frac{1}{\log_e x} \times \ln a$

$= \ln a \times \frac{1}{\ln x}$

$= \ln a\,(\ln x)^{-1}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = \ln a \frac{d}{dx}(\ln x)^{-1}$

$= \ln a(-1)(\ln x)^{(-1-1)} \frac{d}{dx}(\ln x)$

$= -\ln a(\ln x)^{-2} \times \frac{1}{x} = -\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $g(x) = \sin x$

মনে করি, $y = 1 + 2g(x) + 3[1 - \{g(x)\}^2]$

$= 1 + 2\sin x + 3[1 - \sin^2 x]$

$= 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1 + 2\sin x + 3\cos^2 x)$

$= 0 + 2\cos x + 3 \times 2\cos x(-\sin x)$

$= 2\cos x - 6\sin x\cos x$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(2\cos x - 6\sin x\cos x)$

$= 2(-\sin x) - 6\{\sin x(-\sin x) + \cos x\cos x\}$

$= -2\sin x - 6(\cos^2 x - \sin^2 x)$

চরমমানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 2\cos x - 6\sin x\cos x = 0$

$\Rightarrow 2\cos x(1 - 3\sin x) = 0$

হয়, $2\cos x = 0$ | অথবা, $1 - 3\sin x = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0$ | $\Rightarrow 1 = 3\sin x$

$\Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{2}$ | $\Rightarrow \sin x = \frac{1}{3}$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ | $\therefore x = \sin^{-1}\frac{1}{3}$

এখন, $x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = -2\sin\frac{\pi}{2} - 6\left\{\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}$

$= -2 - 6(0 - 1)$

$= -2 + 6$

$= 4 > 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ এর জন্য লঘুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ লঘুমান $= 1 + 2\sin\frac{\pi}{2} + 3\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2$

$= 1 + 2 + 0$

$= 3$ **(Ans.)**

আবার,

$x = \sin^{-1}\frac{1}{3}$ হলে,

$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{3}$

$\therefore \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$= \frac{8}{9}$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -2\sin x - 6(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= -2 \times \frac{1}{3} - 6 \times \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9}\right)$

$= -\frac{2}{3} - 6 \times \frac{7}{9} < 0$

$\therefore x = \sin^{-1}\frac{1}{3}$ এর জন্য গুরুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ গুরুমান $= 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$

$= 1 + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{8}{9}$

$= 1 + \frac{2}{3} + \frac{8}{3}$

$= \frac{13}{3}$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $x = \tan\sqrt{2y}$

$\Rightarrow \sqrt{2y} = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow 2y = (\tan^{-1}x)^2$

$\Rightarrow 2\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)^2$

$\Rightarrow 2y_1 = 2\tan^{-1}x.\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$

$\Rightarrow y_1 = \tan^{-1}x.\frac{1}{1 + x^2}$

$\Rightarrow (1 + x^2)y_1 = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow (1 + x^2)y_1 = \sqrt{2y}$

$\Rightarrow (1 + x^2)^2 y_1^2 = 2y$

$\Rightarrow (1 + x^2)^2.2y_1y_2 + y_1^2 \times 2(1 + x^2)^{2-1}(0 + 2x) = 2y_1$

$\therefore (1 + x^2)^2 y_2 + 2(1 + x^2)xy_1 = 1$ **(Proved)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ২** $f(x) = (ax)^n$ ; $g(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$

(ক) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩]

(খ) লিমিট এর সাহায্যে $f(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩]

(গ) $g(x)$ ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং বৃদ্ধি পায় তা নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১; য. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\sin\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sin\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}} \cdot \left(\cos\sqrt{x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}} \cdot \left(\cos\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}} \text{ (Ans.)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = (ax)^n = a^n x^n$

$$\therefore f(x+h) = a^n(x+h)^n$$

অন্তরজের মূল নিয়মানুযায়ী,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^n(x+h)^n - a^n x^n}{h}$$

$$= a^n \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= a^n \lim_{h\to 0}\frac{\left\{x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\}^n - x^n}{h}$$

$$= a^n x^n \lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^n - 1}{h}$$

$$= a^n x^n \lim_{h\to 0}\frac{\left\{1 + n\frac{h}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{h}{x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{h}{x}\right)^3 + \cdots\right\} - 1}{h}$$

$$= a^n x^n \lim_{h\to 0}\frac{h\left\{\frac{n}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\times\frac{h}{x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\times\frac{h^2}{x^3} + \cdots\right\}}{h}$$

$$= a^n x^n \lim_{h\to 0}\left\{\frac{n}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\times\frac{h}{x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\times\frac{h^2}{x^3} + \cdots\right\}$$

$$= a^n x^n\left(\frac{n}{x} + 0 + 0 + \cdots\right)$$

$$= na^n x^{n-1} \text{ (Ans.)}$$

**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$

$$\therefore g'(x) = -15 + 18x - 3x^2$$

যে সকল ব্যবধিতে $g(x)$ বৃদ্ধি প্রাপ্ত সেখানে $g'(x) > 0$

$$\Rightarrow -3x^2 + 18x - 15 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - x + 5 < 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5) < 0$$

Line test: −− | 1 | +− | 5 | ++

$\therefore$ অসমতাটি সত্য হবে যদি $1 < x < 5$ হয়।

অর্থাৎ, $1 < x < 5$ ব্যবধিতে $g(x)$ বৃদ্ধি প্রাপ্ত। **(Ans.)**

আবার, $g(x)$ হ্রাসপ্রাপ্ত হলে, $g'(x) < 0$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5) > 0$$

Line test: −− | 1 | +− | 5 | ++

$\therefore$ অসমতাটি সত্য হবে যদি $x < 1$ অথবা $x > 5$ হয়।

অর্থাৎ, $x < 1$ অথবা $x > 5$ ব্যবধিতে $g(x)$ হ্রাস প্রাপ্ত। **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৩** দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = 3x^2 + 2x + 7$

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = 54x - (2x-7)^3$

(ক) দেখাও যে, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x} = \frac{5}{2}$ [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২২, ১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $y = f(x)$ বক্ররেখার (2, 23) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে ফাংশনটির গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩,২১; ঢা. বো. ২১; ব. বো. ২২,১৯; কু. বো. ১৭]

**সমাধান:**

**ক** L.H.S $= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}\right)\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\right)}{x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+2x}\right)^2 - \left(\sqrt{1-3x}\right)^2}{x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+2x-1+3x}{x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5x}{x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}$$

$$= \frac{5}{2} = \text{R.H.S (Showed)}$$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** ধরি, $y = f(x) = 3x^2 + 2x + 7$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x + 2$

(2, 23) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,\,23)} = 6 \times 2 + 2 = 14$

(2, 23) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,\,23)} (x - x_1)$

$\Rightarrow y - 23 = 14(x - 2)$

$\Rightarrow y - 23 = 14x - 28$

$\Rightarrow 14x - y - 5 = 0$ **(Ans.)**

(2, 23) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$y - y_1 = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,23)}} (x - x_1)$

$\Rightarrow y - 23 = -\frac{1}{14}(x - 2)$

$\Rightarrow 14y - 322 = -x + 2$

$\Rightarrow x + 14y - 324 = 0$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = 54x - (2x - 7)^3$

$\therefore g'(x) = 54 - 3(2x - 7)^2 \times 2 = 54 - 6(2x - 7)^2$

$\therefore g''(x) = -6 \times 2(2x - 7) \times 2 = -24(2x - 7)$

গুরুমান ও লঘুমানের জন্য,

$g'(x) = 0$

$\Rightarrow 54 - 6(2x - 7)^2 = 0$

$\Rightarrow 6(2x - 7)^2 = 54$

$\Rightarrow (2x - 7)^2 = 9$

$\Rightarrow 2x - 7 = \pm 3$

| | |
|---|---|
| $\therefore 2x - 7 = 3$ | এবং $2x - 7 = -3$ |
| $\Rightarrow 2x = 10$ | $\Rightarrow 2x = 4$ |
| $\therefore x = 5$ | $\therefore x = 2$ |

$x = 2$ হলে, $g''(x) = -24(2 \times 2 - 7)$

$= -24(-3) = 72 > 0$

$\therefore x = 2$ এর জন্য $g(x)$ এর লঘুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ লঘুমান, $g(2) = 54 \times 2 - (2 \times 2 - 7)^3$

$= 135$ **(Ans.)**

আবার, $x = 5$ হলে, $g''(5) = -24(2 \times 5 - 7)$

$= -24 \times 3$

$= -72 < 0$

$\therefore x = 5$ এর জন্য $g(x)$ এর গুরুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ গুরুমান, $g(5) = 54 \times 5 - (2 \times 5 - 7)^3$

$= 243$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৪** $f(x) = a^{5x}$, $g(x) = \sqrt{\frac{x}{2a}} + \sqrt{\frac{y}{2a}} - 1$

**(ক)** $\lim_{x \to a} \frac{x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ এর মান নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১]

**(খ)** লিমিটের সাহায্যে $f(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩]

**(গ)** প্রমাণ কর যে, $g(x) = 0$ বক্ররেখার যেকোনো বিন্দুতে স্পর্শক দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশের যোগফল একটি ধ্রুবক।

[য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩; সকল বো. ১৮]

সমাধান:

**ক** $\lim_{x \to a} \frac{x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

$= \lim_{x \to a} \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 - \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

$= \lim_{\sqrt{x} \to \sqrt{a}} \frac{(\sqrt{x})^3 - (\sqrt{a})^3}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ $\left[\because x \to a, \sqrt{x} \to \sqrt{a}\right]$

$= 3.(\sqrt{a})^{3-1}$ $\left[\because \lim_{x \to p} \frac{x^n - p^n}{x - p} = np^{n-1}\right]$

$= 3(\sqrt{a})^2$

$= 3a$ (Ans.)

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = a^{5x}$

$\therefore f(x + h) = a^{5(x+h)}$

অন্তরজের মূল নিয়ম অনুযায়ী,

$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{a^{5(x+h)} - a^{5x}}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{a^{5x}(a^{5h} - 1)}{h}$

$= a^{5x} \lim_{h \to 0} \frac{\left\{1 + 5h\ln a + \frac{(5h\ln a)^2}{2!} + \frac{(5h\ln a)^3}{3!} + \cdots\right\} - 1}{h}$

$= a^{5x} \lim_{h \to 0} \frac{h\left\{5\ln a + \frac{h(5\ln a)^2}{2!} + \frac{h^2(5\ln a)^3}{3!} + \cdots\right\}}{h}$

$= a^{5x} \lim_{h \to 0} \left[5\ln a + \frac{h(5\ln a)^2}{2!} + \frac{h^2(5\ln a)^3}{3!} + \cdots\right]$

$= a^{5x}[5\ln a + 0 + 0 + \cdots]$

$= 5a^{5x}\ln a$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = \sqrt{\frac{x}{2a}} + \sqrt{\frac{y}{2a}} - 1$

আবার, বক্ররেখার সমীকরণ,

$g(x) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{2a}} + \sqrt{\frac{y}{2a}} - 1 = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{2a}} + \sqrt{\frac{y}{2a}} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2a}$ .....(i)

(i) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dx}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{2a})$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{d}{dx}\left(y^{\frac{1}{2}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \times \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

মনে করি, যেকোনো স্পর্শবিন্দু $(x_1, y_1)$

$\therefore (x_1, y_1)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$

এবং $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$

$\Rightarrow y - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$

$\Rightarrow \sqrt{x_1}\, y - \sqrt{x_1}\, y_1 = -\sqrt{y_1}\, x + x_1\sqrt{y_1}$

$\Rightarrow \sqrt{x_1}\, y + x\sqrt{y_1} = \sqrt{x_1}\, y_1 + x_1\sqrt{y_1}$

$\Rightarrow \frac{x\sqrt{y_1} + y\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}} = \frac{x_1\sqrt{y_1} + y_1\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}}$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x_1}} + \frac{y}{\sqrt{y_1}} = \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1}$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x_1}} + \frac{y}{\sqrt{y_1}} = \sqrt{2a}$ [$\because (x_1, y_1)$, i নং রেখার উপর অবস্থিত]

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x_1}.\sqrt{2a}} + \frac{y}{\sqrt{y_1}.\sqrt{2a}} = 1$

x অক্ষের খন্ডিতাংশ, $x = \sqrt{x_1}\sqrt{2a}$

y অক্ষের খন্ডিতাংশ, $y = \sqrt{y_1}\sqrt{2a}$

$\therefore$ স্পর্শক দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশের যোগফল,

$= \sqrt{2a}\sqrt{x_1} + \sqrt{2a}\sqrt{y_1}$

$= \sqrt{2a}(\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1})$

$= \sqrt{2a} \times \sqrt{2a}$

$= 2a$ **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ৫** $\varphi(x) = \frac{x\cos x}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

$g(x) = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

(ক) x এর সাপেক্ষে $\left(\cos^{-1}\sqrt{x}\right)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২৩]

(খ) $\varphi(x)$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর। [ব. বো. ২২]

(গ) $z = \{g(x)\}^m$ হলে, উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,

$(1 + x^2)\frac{d^2z}{dx^2} + x\frac{dz}{dx} - m^2z = 0$ [কু. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** x এর সাপেক্ষে $\cos^{-1}\sqrt{x}$ এর অন্তরজ

$= \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}\sqrt{x}\right)$

$= \frac{-1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= \frac{-1}{\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{-1}{2\sqrt{x(1 - x)}}$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে,

$\varphi(x) = \frac{x\cos x}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{x\cos x}{1 - \sin x}$

$\therefore \frac{d}{dx}\{\varphi(x)\} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x\cos x}{1 - \sin x}\right)$

$= \frac{(1 - \sin x)\frac{d}{dx}(x\cos x) - x\cos x\frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2}$

$= \frac{(1 - \sin x)\left(x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{dx}{dx}\right) - x\cos x(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$

$= \frac{(1 - \sin x)(-x\sin x + \cos x) + x\cos^2 x}{(1 - \sin x)^2}$

$= \frac{-x\sin x + \cos x + x\sin^2 x - \sin x\cos x + x\cos^2 x}{(1 - \sin x)^2}$

$= \frac{x - x\sin x + \cos x - \sin x\cos x}{(1 - \sin x)^2}$

$= \frac{x(1 - \sin x) + \cos x(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2}$

$= \frac{(1 - \sin x)(x + \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$

$\therefore \frac{d}{dx}\{\varphi(x)\} = \frac{x + \cos x}{1 - \sin x}$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

আবার, $z = \{g(x)\}^m$

$\Rightarrow z = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = m\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{m-1} \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = m\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{m-1} .\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2)\right)$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = m\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{m-1} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right)$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = m\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{m-1} . \frac{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{m\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\frac{dz}{dx} = m\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left\{\sqrt{1+x^2}\frac{dz}{dx}\right\} = m\frac{d}{dx}\left\{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m\right\}$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx}\left\{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right\} = m.m$

$\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{m-1} \cdot \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right) = m^2$

$\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{m-1} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right)$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{dz}{dx} = m^2$

$\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{m-1} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\Rightarrow (1+x^2)\frac{d^2z}{dx^2} + x\frac{dz}{dx} = m^2\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m$

$\therefore (1+x^2)\frac{d^2z}{dx^2} + x\frac{dz}{dx} - m^2z = 0$ **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ৬** দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$

দৃশ্যকল্প-২: $n\sin^{-1}x = \sin^{-1}y$

(ক) মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x^2-1}{3x^4+x^3-2x}$ [চ. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\{f(x)\}^{g(x)} + \{g(x)\}^{f(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 + n^2y = 0$ [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২৩; ঢা. বো. ২১, ১৯; চ. বো. ২১; সি. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x^2-1}{3x^4+x^3-2x}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4+3x^2-1}{x^4}}{\frac{3x^4+x^3-2x}{x^4}}$ [লব ও হরকে $x^4$ দ্বারা ভাগ করে]

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}} = \frac{1+\frac{3}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{3+\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}} = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = x$; $g(x) = \sin x$

ধরি, $y = \{f(x)\}^{g(x)} + \{g(x)\}^{f(x)}$

$= x^{\sin x} + (\sin x)^x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{\sin x}) + \frac{d}{dx}(\sin x)^x$

$= x^{\sin x}\left[(\sin x)\frac{d}{dx}\ln x + \ln x\frac{d}{dx}(\sin x)\right] +$

$(\sin x)^x\left[x\frac{d}{dx}(\ln\sin x) + \ln\sin x\frac{d}{dx}(x)\right]$

$\left[\because \frac{d}{dx}(u^v) = u^v\left\{v\frac{d}{dx}\ln u + \ln u\frac{d}{dx}v\right\}\right]$

$= x^{\sin x}\left[\frac{1}{x}\sin x + \ln x\cos x\right] + (\sin x)^x\left[x\frac{1}{\sin x}\cos x + \ln\sin x\right]$

$= x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x\ln x\right) + (\sin x)^x\{x\cot x + \ln(\sin x)\}$

**(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $n\sin^{-1}x = \sin^{-1}y$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\sin^{-1}y) = \frac{d}{dx}(n\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} . y_1 = n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow \frac{y_1^2}{1-y^2} = \frac{n^2}{1-x^2}$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = n^2(1-y^2)$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{(1-x^2).y_1^2\} = \frac{d}{dx}\{n^2(1-y^2)\}$

$\Rightarrow (1-x^2)(2y_1.y_2) + y_1^2(-2x) = n^2(0-2y.y_1)$

$\Rightarrow (1-x^2).2y_1.y_2 + y_1^2.(-2x) = -2n^2yy_1$

$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 = -n^2y$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 + n^2y = 0$ **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ৭** $f(x) = \sin x$ এবং $g(x, y) = y(x-3)(x-5) + x - 10$ দুটি ফাংশন।

(ক) মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos ax}$

[সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২৩; রা. বো. ২২; য. বো. ২১,১৭; সি. বো. ২১; চ. বো. ২১, ১৯; কু. বো. ১৭]

(খ) $y = f(f(x))$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\tan x + [1 - \{f(x)\}^2]\,y = 0$.

[সি. বো. ২৩]

(গ) $g(x, y) = 0$ বক্ররেখা যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে সে বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[দি. বো. ২২, ১৯ ; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২৩; ব. বো. ২৩, ২২; ম. বো. ২৩, ২২, ২১; য. বো. ২২; কু. বো. ১৯; ঢা. বো. ১৭ ]

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধানঃ**

**ক** $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos\left(2\times\frac{ax}{2}\right)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{ax}{2}}$

$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{ax}{2}}{\sin\frac{ax}{2}}\right)^2\cdot\frac{4}{a^2}$

$=\frac{2}{a^2}\left(\lim_{\frac{ax}{2}\to 0}\frac{\frac{ax}{2}}{\sin\frac{ax}{2}}\right)^2\left[\because x\to 0 \text{ হলে } \frac{ax}{2}\to 0\right]$

$=\frac{2}{a^2}.1^2$

$=\frac{2}{a^2}$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x)=\sin x$

আবার, $y=f\{f(x)\}$

$\Rightarrow y=\sin(\sin x)$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\{\sin(\sin x)\}$

$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\cos(\sin x).\cos x$

$\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}[\cos x.\cos(\sin x)]$

$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\cos x\frac{d}{dx}\{\cos(\sin x)\}+\cos(\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)$

$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\cos x\{-\sin(\sin x)\cos x\}+\cos(\sin x)(-\sin x)$

$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=-\cos^2x\sin(\sin x)-\frac{\sin x}{\cos x}\cos(\sin x).\cos x$

$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=-y\cos^2x-\tan x\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=-y(1-\sin^2x)-\frac{dy}{dx}\tan x$

$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=-y[1-\{f(x)\}^2]-\frac{dy}{dx}\tan x$

$\therefore\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\tan x+[1-\{f(x)\}^2]y=0$ **(Showed)**

**গ** দেওয়া আছে, $g(x,y)=y(x-3)(x-5)+x-10$

এবং $g(x,y)=0$

$\therefore y(x-3)(x-5)+x-10=0$ ..... (i)

বক্ররেখাটি x অক্ষকে ছেদ করে,

$\therefore$ (i) নং সমীকরণে $y=0$ বসিয়ে পাই,

$x-10=0$

$\therefore x=10$

অর্থাৎ, (i) নং বক্ররেখা x অক্ষকে (10, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, (i) নং হতে পাই,

$y(x^2-8x+15)+x-10=0$

$\therefore\frac{d}{dx}\{y(x^2-8x+15)\}+\frac{d}{dx}(x)-\frac{d}{dx}(10)=0$

$\Rightarrow y(2x-8)+(x^2-8x+15)\frac{dy}{dx}+1-0=0$

$\Rightarrow(x^2-8x+15)\frac{dy}{dx}=-1-y(2x-8)$

$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{-1-y(2x-8)}{x^2-8x+15}$

এখন, (10, 0) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{100-80+15}=\frac{-1}{35}$

$\therefore$ (10, 0) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y-0=-\frac{1}{35}(x-10)$

$\therefore x+35y-10=0$ **(Ans.)**

আবার, (10, 0) বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল, $=-\frac{1}{-\frac{1}{35}}=35$

$\therefore$ (10, 0) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ: $y-0=35(x-10)$

$\Rightarrow 35x-y-350=0$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৮** দৃশ্যকল্প-১: $f(x)=\sin x$

দৃশ্যকল্প-২: $x=\sin\left(\frac{1}{m}\ln y\right)$

(ক) $\lim_{x\to\infty}7^x\sin\frac{a}{7^x}$ এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সকল বো. ১৮]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে মূল নিয়মে $\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{f(2x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২৩,অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২; ব. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2-xy_1=m^2y$ [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২; রা. বো. ১৯; ব. বো. ১৯, ১৭]

**সমাধানঃ**

**ক** $\lim_{x\to\infty}7^x\sin\frac{a}{7^x}$

ধরি, $\frac{a}{7^x}=\theta\Rightarrow 7^x=\frac{a}{\theta}$

$x\to\infty$ হলে, $\theta\to 0$

$\therefore\lim_{x\to\infty}7^x\sin\frac{a}{7^x}=\lim_{\theta\to 0}\frac{a}{\theta}.\sin\theta=a\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=a.1=a$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

ধরি, $g(x) = \dfrac{f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{f(2x)} = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{\sin 2x} = \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot 2x$

$\therefore g(x + h) = \cot 2(x + h) = \cot(2x + 2h)$

অন্তরজের মূল নিয়ম অনুযায়ী,

$$\frac{d}{dx}\{g(x)\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cot(2x + 2h) - \cot 2x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\cos(2x + 2h)}{\sin(2x + 2h)} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(2x + 2h)\sin 2x - \cos 2x \sin(2x + 2h)}{h \sin(2x + 2h)\sin 2x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(2x - 2x - 2h)}{h \sin(2x + 2h)\sin 2x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin 2h}{h \sin(2x + 2h)\sin 2x}$$

$$= -2 \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin 2h}{2h}\right) \times \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sin(2x + 2h).\sin 2x}$$

$$= -2 \times 1 \times \frac{1}{\sin 2x.\sin 2x}$$

$$= -2\operatorname{cosec}^2 2x \text{ (Ans.)}$$

**গ** দেওয়া আছে, $x = \sin\left(\frac{1}{m} \ln y\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} \ln y = \sin^{-1} x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \ln y = m \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = m \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} y_1 = \frac{m}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{y_1^2}{y^2} = \frac{m^2}{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow (1 - x^2)y_1^2 = m^2 y^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{(1 - x^2)y_1^2\} = \frac{d}{dx}(m^2 y^2)$$

$$\Rightarrow (1 - x^2).2y_1 y_2 + y_1^2(0 - 2x) = m^2 . 2y . y_1$$

$\therefore (1 - x^2)y_2 - xy_1 = m^2 y$ **(Proved)**

**প্রশ্ন ▶ ৯** $f(x) = \sin x$ এবং $g(x) = \sqrt{x}$

**(ক)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - f(x)}{f'(x)}$ এর মান নির্ণয় কর। [ময়মনসিংহ বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১]

**(খ)** মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\dfrac{1}{f(3x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

[ময়মনসিংহ বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২]

**(গ)** দেখাও যে, $\dfrac{2\ln\{g(x)\}}{\{g(x)\}^2}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান $\dfrac{1}{e}$।

[ব. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২১; সকল বো. ১৮; সি. বো. ১৭]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - f(x)}{f'(x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1 + \sin\frac{\pi}{2}}$$

$$= 0 \text{ (Ans.)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

ধরি, $P(x) = \dfrac{1}{f(3x)}$

$$= \frac{1}{\sin 3x} = \operatorname{cosec} 3x$$

$\therefore P(x + h) = \operatorname{cosec}\{3(x + h)\} = \operatorname{cosec}(3x + 3h)$

অন্তরজের মূল নিয়মানুযায়ী আমরা পাই,

$$P'(x) = \frac{d}{dx} P(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{P(x + h) - P(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{cosec}(3x + 3h) - \operatorname{cosec} 3x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\sin(3x + 3h)} - \frac{1}{\sin 3x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin 3x - \sin(3x + 3h)}{\sin 3x \sin(3x + 3h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin 3x - \sin(3x + 3h)}{h \sin 3x \sin(3x + 3h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\frac{3x + (3x + 3h)}{2} \sin\frac{3x - (3x + 3h)}{2}}{h \sin 3x \sin(3x + 3h)}$$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$= 2\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(3x+\frac{3h}{2}\right)\sin\left(-\frac{3h}{2}\right)}{h\sin3x\sin(3x+3h)}$$

$$= -2\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(3x+\frac{3h}{2}\right)}{\sin3x\sin(3x+3h)}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{3h}{2}}{h}$$

$$= -2\times\frac{\cos(3x+0)}{\sin3x\sin(3x+0)}\times\lim_{\frac{3h}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{3h}{2}}{\frac{3h}{2}}\times\frac{3}{2}$$

$$\left[\because h\to 0 \text{ হলে, } \frac{3h}{2}\to 0\right]$$

$$= \frac{-\cos3x}{\sin3x\times\sin3x}\times 1\times 3$$

$$= -3\text{cosec}3x\cot3x \quad \textbf{(Ans.)}$$

**গ** দেওয়া আছে, $g(x)=\sqrt{x}$

ধরি, $y=\frac{2\ln\{g(x)\}}{\{g(x)\}^2}=\frac{2\ln\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}$

$$=\frac{2\ln x^{\frac{1}{2}}}{x}=\frac{2\times\frac{1}{2}\ln x}{x}=\frac{\ln x}{x}$$

$$y_1=\frac{x\frac{d}{dx}\ln x-\ln x\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$=\frac{x.\frac{1}{x}-\ln x.1}{x^2}$$

$$=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$y_2=\frac{x^2\frac{d}{dx}(1-\ln x)-(1-\ln x)\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$$

$$=\frac{x^2\left(0-\frac{1}{x}\right)-(1-\ln x).2x}{x^4}$$

$$=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}$$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $y_1=0$

$\Rightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0$

$\Rightarrow \ln x=1=\ln e$

$\Rightarrow x=e$

এখন, $x=e$ হলে,

$$y_2=\frac{-e-2e(1-\ln e)}{e^4}$$

$$=\frac{-e-0}{e^4}$$

$$=\frac{-1}{e^3}<0$$

$\therefore x=e$ এর জন্য y ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$ **(Showed)**

**প্রশ্ন ➤ ১০** $f(x)=e^x$

**(ক)** $f'(x)\log2x\, f(2x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২২]

**(খ)** মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $f(mx)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

[ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২১, ১৭]

**(গ)** $y=f(\sec^{-1}x)$ হলে দেখাও যে, $x^2(x^2-1)y_2+x(2x^2-1)y_1-y=0$

[ঢা. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $f(x)=e^x$

$\therefore f'(x)=\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$

$f(2x)=e^{2x}$

$\therefore f'(x)\log2x\, f(2x)$ এর অন্তরজ

$$\frac{d}{dx}[f'(x)\log2x\, f(2x)]$$

$$=\frac{d}{dx}(e^x.\log2x.e^{2x})$$

$$=\frac{d}{dx}(e^{3x}\log2x)$$

$$=\log2x.3.e^{3x}+e^{3x}\frac{2}{2x}$$

$$=e^{3x}\left(\frac{1}{x}+3\log2x\right) \quad \textbf{(Ans.)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $f(x)=e^x$

$\therefore f(mx)=e^{mx}$

ধরি, $g(x)=e^{mx}$

$\therefore g(x+h)=e^{m(x+h)}=e^{mx}.e^{mh}$

অন্তরজের মূল নিয়ম অনুসারে,

$$\frac{d}{dx}\{g(x)\}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^{mx})$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{m(x+h)}-e^{mx}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{mx}.e^{mh}-e^{mx}}{h}$$

$$=e^{mx}\lim_{h\to 0}\frac{e^{mh}-1}{h}$$

$$=e^{mx}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\left(1+mh+\frac{m^2h^2}{2!}+\frac{m^3h^3}{3!}+\cdots\right)-1\right\}$$

$$=e^{mx}\lim_{h\to 0}\left(m+\frac{m^2h}{2!}+\frac{m^3h^2}{3!}+\cdots\right)$$

$$=e^{mx}.m=me^{mx} \quad \textbf{(Ans.)}$$

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = e^x$, $f(\sec^{-1}x) = e^{\sec^{-1}x}$

$y = f(\sec^{-1}x)$ হলে, $y = e^{\sec^{-1}x}$

উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\sec^{-1}x})$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{\sec^{-1}x} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-1}\, y_1 = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow (x^2-1)y_1^2 = \frac{y^2}{x^2} \quad \cdots\cdots \text{(i)}$$

আবার, উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{(x^2-1)y_1^2\} = \frac{d}{dx}(y^2x^{-2})$$

$$\Rightarrow y_1^2\frac{d}{dx}(x^2-1) + (x^2-1)\frac{d}{dx}(y_1^2) = y^2\frac{d}{dx}(x^{-2}) + x^{-2}\frac{d}{dx}(y^2)$$

$$\Rightarrow y_1^2.2x + (x^2-1)2y_1y_2 = y^2(-2)\frac{1}{x^3} + \frac{2yy_1}{x^2}$$

$$\Rightarrow 2y_1^2x + (x^2-1)2y_1y_2 = (-2)\frac{1}{x}\cdot\frac{y^2}{x^2} + \frac{2yy_1}{x^2}$$

$$\Rightarrow 2y_1^2x + (x^2-1)2y_1y_2 = -\frac{2}{x}(x^2-1)y_1^2 + \frac{2yy_1}{x^2} \quad [\text{(i) হতে}]$$

$$\Rightarrow y_1x + (x^2-1)y_2 = -\frac{x^2-1}{x}y_1 + \frac{y}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^3y_1 + x^2(x^2-1)y_2 = -x^3y_1 + xy_1 + y$$

$$\Rightarrow x^3y_1 + x^2(x^2-1)y_2 + x^3y_1 - xy_1 - y = 0$$

$$\therefore x^2(x^2-1)y_2 + x(2x^2-1)y_1 - y = 0 \text{ (Showed)}$$

**প্রশ্ন ▶ ১১** $h(x) = \cos 3x$

$u = \tan^{-1}2x$

(ক) x এর সাপেক্ষে $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২৩]

(খ) মূল নিয়মে h(x) এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

[রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১; দি. বো. ১৯]

(গ) $\ln y = u$ হলে উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sec^2u.y_2 + 2y_1(2\tan u - 1) = 0$. [রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ১৭]

সমাধান:

**ক** ধরি, $y = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

আবার, ধরি, $x = \tan\theta$

$\therefore \theta = \tan^{-1}x$

$$\therefore y = \cos^{-1}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$= \cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1}x$$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x) = 2\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = 2\times\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \text{ (Ans.)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $h(x) = \cos 3x$

$\therefore h(x+t) = \cos 3(x+t) = \cos(3x+3t)$

অন্তরজের মূল নিয়মানুসারে,

$$\frac{d}{dx}\{h(x)\} = \lim_{t\to 0}\frac{h(x+t)-h(x)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\cos(3x+3t)-\cos 3x}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{2\sin\frac{3x+3t+3x}{2}\sin\frac{3x-3x-3t}{2}}{t}$$

$$= 2\lim_{t\to 0}\sin\left(\frac{6x+3t}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{-3t}{2}\right)}{t}$$

$$= 2\lim_{t\to 0}\sin\left(\frac{6x+3t}{2}\right)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\frac{3t}{2}}{\frac{3t}{2}}\cdot\frac{3}{2}$$

$$= 2\sin\left(\frac{6x+0}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\lim_{\frac{3t}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{3t}{2}}{\frac{3t}{2}}$$

$\left[\because t\to 0 \text{ হলে}, \frac{3t}{2}\to 0\right]$

$$= 2\sin 3x.\left(-\frac{3}{2}\right)\times 1$$

$$= -3\sin 3x \text{ (Ans.)}$$

**গ** দেওয়া আছে, $u = \tan^{-1}2x$

$\Rightarrow \tan u = 2x$

আবার, $\ln y = u$

$$\Rightarrow \ln y = \tan^{-1}2x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}2x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}.y_1 = \frac{1}{1+4x^2}\times 2$$

$$\Rightarrow (1+4x^2)y_1 = 2y$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(1+4x^2).y_1 = \frac{d}{dx}2y$$

$$\Rightarrow (1+4x^2)y_2 + y_1.8x = 2y_1$$

$$\Rightarrow \{1+(2x)^2\}y_2 + (8x-2)y_1 = 0$$

$$\Rightarrow (1+\tan^2u)y_2 + 2(2.2x-1)y_1 = 0$$

$$\therefore \sec^2u.y_2 + 2y_1(2\tan u - 1) = 0 \text{ (Proved)}$$

**প্রশ্ন ▶ ১২** $h(x) = \cos x$ এবং $p(x) = (x^2+1)\tan^{-1}x - x$.

(ক) x-এর সাপেক্ষে p(x) এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২]

(খ) প্রমাণ কর যে, $\lim_{x\to 0}\frac{h(0)-2h(x)+h(2x)}{x^2} = -1$ [কু. বো. ২২]

(গ) $\sqrt{3}h\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + 3h(x)$ এর চরম মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২]



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



সমাধান:

**ক** দেওয়া আছে,

$$p(x) = (x^2+1)\tan^{-1}x - x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{p(x)\} = \frac{d}{dx}\{(x^2+1)\tan^{-1}x\} - \frac{d}{dx}x$$

$$= (x^2+1)\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) + \tan^{-1}x\frac{d}{dx}(x^2+1) - 1$$

$$= (x^2+1)\frac{1}{1+x^2} + \tan^{-1}x.(2x) - 1$$

$$= 1 + 2x\tan^{-1}x - 1 = 2x\tan^{-1}x \text{ (Ans.)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $h(x) = \cos x$

$$\text{L.H.S} = \lim_{x\to 0}\frac{h(0) - 2h(x) + h(2x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 0 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 + \cos 2x - 2\cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x - 2\cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x(1-\cos x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x.2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= -4\lim_{x\to 0}\cos x.\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= -4.\cos 0.\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \times \frac{1}{4}$$

$$\left[\because x \to 0 \text{ হলে, } \frac{x}{2} \to 0\right]$$

$$= -4 \times 1 \times 1^2 \times \frac{1}{4} = -1 = \text{R.H.S (Proved)}$$

**গ** দেওয়া আছে, $h(x) = \cos x$

ধরি, $f(x) = \sqrt{3}h\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3h(x)$

$$= \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3\cos x$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{3}\sin x + 3\cos x$$

$$\therefore f'(x) = \sqrt{3}\cos x - 3\sin x$$

$$\therefore f''(x) = -\sqrt{3}\sin x - 3\cos x$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\cos x - 3\sin x = 0$$

$$\Rightarrow 3\sin x = \sqrt{3}\cos x$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan 30^\circ = \tan(180^\circ + 30^\circ)$$

$$\Rightarrow x = 30^\circ, 210^\circ, 0 < x < 360^\circ$$

$$f''(30^\circ) = -\sqrt{3}\sin 30^\circ - 3\cos 30^\circ$$

$$= -\sqrt{3} \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$= -2\sqrt{3} < 0$$

$\therefore x = 30^\circ$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান বিদ্যমান।

$\therefore f(x)$ এর গুরুমান, $f(30^\circ) = \sqrt{3}.\sin 30^\circ + 3\cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$ **(Ans.)**

আবার, $f''(210^\circ) = -\sqrt{3}\sin 210^\circ - 3\cos 210^\circ$

$$= -\sqrt{3}\sin(180^\circ + 30^\circ) - 3\cos(180^\circ + 30^\circ)$$

$$= -\sqrt{3}(-\sin 30^\circ) + 3\cos 30^\circ$$

$$= -\sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{3} > 0$$

$\therefore x = 210^\circ$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান বিদ্যমান।

$\therefore f(x)$ এর লঘুমান $= f(210^\circ)$

$$= \sqrt{3}\sin 210^\circ + 3\cos 210^\circ$$

$$= \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -2\sqrt{3} \text{ (Ans.)}$$

**প্রশ্ন ▶ ১৩** $g(x) = x$ এবং $y = x + \frac{1}{x}$

(ক) $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২]

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{d}{dx}\cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-g(x)}{1+g(x)}}\right\} = \frac{1}{2}(x-1)$ [কু. বো. ২২]

(গ) $y = \sqrt{4 + 3g(\sin x)}$ হলে, দেখাও যে, $2yy_2 + 2y_1^2 + y^2 - 4 = 0$ [কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১]

সমাধান:

**ক** দেওয়া আছে, $y = x + \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow y = x + x^{-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x + x^{-1})$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - 1.x^{-2}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(1 - x^{-2}) = 0 - (-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3} \text{ (Ans.)}$$

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** দেওয়া আছে, $g(x) = x$

ধরি,

$$y = \cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-g(x)}{1+g(x)}}\right\}$$

$$= \cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$$

$$= \cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right\} \quad \text{ধরি, } x = \cos\theta$$

$$= \cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}\right\}$$

$$= \cos^4\left\{\cot^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$= \cos^4\left\{\cot^{-1}\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$= \cos^4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \sin^4\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{2\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}^2$$

$$= \frac{1}{4}(1-\cos\theta)^2$$

$$= \frac{1}{4}(1-x)^2 \quad [\because \cos\theta = x]$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}(x-1)^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}\times 2(x-1).1 = \frac{1}{2}(x-1)$$ **(Proved)**

**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = x$

$\therefore g(\sin x) = \sin x$

এখানে, $y = \sqrt{4 + 3g(\sin x)}$

$\Rightarrow y^2 = 4 + 3\sin x$ ..... (i)

$$\therefore \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(4 + 3\sin x)$$

$\Rightarrow 2yy_1 = 0 + 3\cos x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(2y.y_1) = \frac{d}{dx}(3\cos x)$$

$\Rightarrow 2yy_2 + 2y_1^2 = -3\sin x$

$\Rightarrow 2yy_2 + 2y_1^2 = 4 - y^2$ $\quad [\text{(i) নং হতে, } -3\sin x = 4 - y^2]$

$\therefore 2yy_2 + 2y_1^2 + y^2 - 4 = 0$ **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ১৪** $x = \cos\alpha$ ; $f(x) = 2x$ ; $g(x) = \ln(x)$

**(ক)** t এর সাপেক্ষে $\frac{1+\sin t}{\sin t}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২২]

**(খ)** x এর সাপেক্ষে $e^{2g(x)} + (x^x)^x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২১;]

**(গ)** দেখাও যে, $f(x) + \frac{1}{f(x)}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

[চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ১৯; রা. বো. ১৭]

সমাধান:

**ক** ধরি, $y = \frac{1+\sin t}{\sin t}$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\sin t} + \frac{\sin t}{\sin t} = \operatorname{cosec} t + 1$$

t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\operatorname{cosec} t + 1)$$

$$= -\operatorname{cosec}(t)\cot(t)$$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $g(x) = \ln x$

ধরি, $y = e^{2g(x)} + (x^x)^x$

$$= e^{2\ln x} + x^{x^2} = e^{\ln x^2} + x^{x^2} = x^2 + x^{x^2}$$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + x^{x^2})$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}x^{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{du}{dx} \text{ ..... (i)}$$

যেখানে $u = x^{x^2}$

$\Rightarrow \ln u = \ln x^{x^2}$

$\Rightarrow \ln u = x^2 \ln x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{d}{dx}(x^2 \ln x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} = x^2.\frac{1}{x} + 2x\ln x = x + 2x\ln x$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u(x + 2x\ln x) = x^{x^2}(x + 2x\ln x)$$

(i) নং এ $\frac{du}{dx}$ এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = 2x + x^{x^2}(x + 2x\ln x)$$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = 2x$

ধরি, $y = f(x) + \frac{1}{f(x)} = 2x + \frac{1}{2x}$

$$\therefore y' = 2 - \frac{1}{2x^2}$$

এবং $y'' = 0 + \frac{2}{2x^3} = \frac{1}{x^3}$

চরম মানের জন্য $y' = 0$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore x = \pm\frac{1}{2}$$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$x = \frac{1}{2}$ হলে, $y'' = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 8 > 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ এর জন্য y এর লঘুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ y এর লঘুমান $= 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1 + 1 = 2$

$x = \frac{-1}{2}$ হলে, $y'' = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = -8 < 0$

$\therefore x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য y এর গুরুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ y এর গুরুমান $= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = -2$

$\therefore f(x) + \frac{1}{f(x)}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ১৫** দৃশ্যকল্প-১: $y = a\cot(\ln x)$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = a^2e^{mx} + b^2e^{-mx}$; a, b, m > 0

(ক) $7^{\cos^{-1}x}$ কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $x^2y_2 + xy_1 = 2y\,\text{cosec}^2(\ln x)$ [ব. বো. ২২]

(গ) f(x) এর চরম মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** মনে করি, $y = 7^{\cos^{-1}x}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(7^{\cos^{-1}x})$$

$$= 7^{\cos^{-1}x} \ln 7 \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 7^{\cos^{-1}x} \cdot \ln 7$$

$$= -\frac{7^{\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} \ln 7 \text{ (Ans.)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $y = a\cot(\ln x)$ ...(i)

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{d}{dx}\{\cot(\ln x)\}$$

$$\Rightarrow y_1 = -a\,\text{cosec}^2(\ln x)\frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$\Rightarrow y_1 = -\frac{a}{x}\,\text{cosec}^2(\ln x) \ldots\ldots (ii)$$

$$\Rightarrow xy_1 = -a\{1 + \cot^2(\ln x)\}$$

$$\Rightarrow xy_1 = -a\left\{1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2\right\} \text{ [(i) নং হতে]}$$

$$\Rightarrow xy_1 = -a - \frac{y^2}{a} \ldots\ldots (iii)$$

(iii) নং কে x এর সাপেক্ষে পুনরায় অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{d}{dx}(xy_1) = \frac{d}{dx}(-a) - \frac{1}{a}\frac{d}{dx}(y^2)$$

$$\Rightarrow xy_2 + y_1 = -\frac{1}{a}2yy_1$$

$$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 = -\frac{2y}{a}xy_1 \text{ [x দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে]}$$

$$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 = -\frac{2y}{a}x\left\{-\frac{a}{x}\,\text{cosec}^2(\ln x)\right\} \text{ [(ii) নং হতে]}$$

$\therefore x^2y_2 + xy_1 = 2y\,\text{cosec}^2(\ln x)$ **(Showed)**

**গ** $f(x) = a^2e^{mx} + b^2e^{-mx}$, a, b, m > 0

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}(a^2e^{mx} + b^2e^{-mx}) \text{ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]}$$

$$= a^2me^{mx} - b^2me^{-mx}$$

$$\therefore f''(x) = a^2m\frac{d}{dx}(e^{mx}) - b^2m\frac{d}{dx}(e^{-mx})$$

[আবার x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$$= a^2m.me^{mx} - b^2m(-me^{-mx})$$

$$= a^2m^2e^{mx} + b^2m^2e^{-mx}$$

ফাংশনটির লঘুমান ও গুরুমানের জন্য $f'(x) = 0$ হবে।

$$\Rightarrow a^2me^{mx} - b^2me^{-mx} = 0$$

$$\Rightarrow a^2me^{mx} = b^2me^{-mx}$$

$$\Rightarrow a^2e^{mx} = b^2\frac{1}{e^{mx}}$$

$$\Rightarrow (e^{mx})^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore e^{mx} = \frac{b}{a}$$

$e^{mx} = \frac{b}{a}$ হলে $f''(x) = a^2m^2e^{mx} + b^2me^2e^{-mx}$

$$= a^2m^2e^{mx} + b^2m^2\frac{1}{e^{mx}}$$

$$= a^2m^2\frac{b}{a} + b^2m^2\frac{1}{\frac{b}{a}}$$

$$= abm^2 + abm^2$$

$$= 2abm^2 > 0 \text{ কারণ, a, b, m} > 0$$

$\therefore e^{mx} = \frac{b}{a}$ হলে ফাংশনটির লঘুমান আছে।

$$\therefore f(x) = a^2e^{mx} + b^2e^{-mx}$$

$$= a^2e^{mx} + b^2\frac{1}{e^{mx}}$$

$$\therefore \text{লঘুমান} = a^2\frac{b}{a} + b^2\frac{1}{\frac{b}{a}} = ab + b^2\frac{a}{b} = ab + ab = 2ab$$

$\therefore$ চরমমান $= 2ab$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ১৬** (i) $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$.

(ii) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30$.

(ক) $g(x) = \ln x$ হলে $g''(x)$ এর মান নির্ণয় কর। [সি. বো. ২২]

(খ) উদ্দীপক (i) থেকে প্রমাণ কর যে, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ [সি. বো. ২২]

(গ) $f(x)$ এর চরম মান নির্ণয় কর।

[সি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২; কু. বো. ২১; ঢা. বো. ১৭]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $g(x) = \ln x$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow g'(x) = x^{-1}$$

$$\Rightarrow g''(x) = (-1)\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$ **(Ans.)**

**খ** উদ্দীপকে ১ হতে, $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$

উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)\}$$

$$\Rightarrow y_1 = -a\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x} + b\cdot\frac{1}{x}\cos(\ln x)$$

$$\Rightarrow xy_1 = -a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(xy_1) = \frac{d}{dx}\{-a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)\}$$

$$\Rightarrow xy_2 + y_1.1 = -\frac{1}{x}\{a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)\}$$

$$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 = -y.$$

$\therefore x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ **(Proved)**

**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30$

$\therefore f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$\therefore f''(x) = 12x - 6$

চরমমানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2, -1$$

$x = 2$ হলে, $f''(2) = 12\times2 - 6 = 18 > 0$

$\therefore x = 2$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ লঘুমান, $f(2) = 2\times2^3 - 3\times2^2 - 12\times2 + 30$

$= 10$ **(Ans.)**

আবার,

$x = -1$ হলে, $f''(-1) = 12(-1) - 6 = -18 < 0$

$\therefore x = -1$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ গুরুমান, $f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 30$

$= 37$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৭** $f(x) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$ ; $g(z) = z^3 - 3z^2 - 2z + 1$

(ক) $\frac{d}{dz}(\sin x^x)$ এর মান x এর মাধ্যমে প্রকাশ কর, যেখানে $z = \sin x$

(খ) $f(x) = 0$ হলে, দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

(গ) $y = g(x)$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলো অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে তাদের ভুজ নির্ণয় কর।

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $z = \sin x$

মনে করি, $y = z^x$

উভয়পক্ষে ln নিয়ে পাই, $\ln y = \ln z^x = x\ln z$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dz} = x.\frac{1}{z} + \ln z\frac{dx}{dz}$$ [z এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$$\Rightarrow \frac{dy}{dz} = xy.\frac{1}{z} + y.\ln z.\frac{1}{\frac{dz}{dx}} = x.\frac{z^x}{z} + z^x\ln z\frac{1}{\frac{d}{dx}(\sin x)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dz} = x.\frac{(\sin x)^x}{\sin x} + (\sin x)^x\ln(\sin x).\frac{1}{\cos x}$$

$$\therefore \frac{d}{dz}(z^x) = (\sin x)^x(x\operatorname{cosec} x + \sec x\ln(\sin x))$$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$

এখন, $f(x) = 0$ হলে,

$$x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$$

$$\Rightarrow x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x}$$

$$\Rightarrow x^2(1+y) = y^2(1+x)$$ [বর্গ করে]

$$\Rightarrow x^2 + x^2y = y^2 + xy^2$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = xy^2 - x^2y$$

$$\Rightarrow (x+y)(x-y) = xy(y-x)$$

$$\Rightarrow x + y = -xy$$

$$\Rightarrow y + xy = -x$$

$$\Rightarrow y(1+x) = -x$$

$$\Rightarrow y = \frac{-x}{1+x} = -1 + \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 + (-1)(1+x)^{-2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$ **(Showed)**

**গ** দেওয়া আছে $g(z) = z^3 - 3z^2 - 2z + 1$

$\therefore g(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

এখানে, $y = g(x)$

$$\Rightarrow y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 2$$

বক্ররেখাটির স্পর্শক উভয় অক্ষের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করলে, $\frac{dy}{dx} = \pm 1$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 2 = \pm 1$$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$3x^2 - 6x - 2 = 1$ হলে,

$3x^2 - 6x - 3 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 - 2x - 1) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1(-1)}}{2 \times 1}$

$= \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$

$= 1 \pm \sqrt{2}$

$3x^2 - 6x - 2 = -1$ হলে, $3x^2 - 6x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 3(-1)}}{2 \times 3}$

$= \frac{6 \pm \sqrt{36+12}}{6}$

$= 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভুজ: $x = 1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

**প্রশ্ন ▶ ১৮** $f(x) = e^x$; $q(x, y) = x^2 + px + y^2$

**(ক)** a এর মান কত হলে $y = ax(1 - x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে?

[ময়মনসিংহ বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১; সি. বো. ২১]

**(খ)** দেখাও যে, $q(x, y) = 0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x অক্ষের উপর লম্ব, সে সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$ এবং $(-p, 0)$.

[ব. বো. ২১]

**(গ)** $4f(x) + 9f(-x)$ এর লঘুমান কত? [ম. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ১৭]

সমাধান:

**ক** $y = ax(1 - x) = ax - ax^2$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx} = a(1 - 2x)$

মূল বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = a(1 - 2.0) = a$

যেহেতু, স্পর্শকটি x অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে,

$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan(\pm 60°) = \pm\sqrt{3}$

$\therefore a = \pm\sqrt{3}$ **(Ans.)**

**খ** প্রদত্ত বক্ররেখা, $q(x, y) = x^2 + px + y^2$

এবং $q(x, y) = 0$

$\therefore x^2 + px + y^2 = 0$ ..... (i)

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x + p + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x - p$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(2x + p)}{2y}$

$\therefore \frac{dx}{dy} = -\frac{2y}{(2x + p)}$

যেহেতু, স্পর্শকসমূহ x অক্ষের উপর লম্ব অতএব,

$\frac{dy}{dx} = \tan 90°$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\tan 90°}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \cot 90°$

$\therefore \frac{dx}{dy} = 0$

তাহলে, $-\frac{2y}{2x + p} = 0$

$\therefore y = 0$

$y = 0$ হলে, সমীকরণ (i) থেকে পাই,

$x^2 + px + 0^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + px = 0$

$\Rightarrow x(x + p) = 0$

$\therefore x = 0$ অথবা, $x = -p$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শবিন্দু দুটি $(0, 0), (-p, 0)$ **(Showed)**

**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = e^x$

ধরি, $g(x) = 4f(x) + 9f(-x) = 4e^x + 9e^{-x}$

$\therefore g'(x) = 4e^x - 9e^{-x}$

$\therefore g''(x) = 4e^x + 9e^{-x}$

লঘু ও গুরুমানের জন্য, $g'(x) = 0$

$\Rightarrow 4e^x - 9e^{-x} = 0$

$\Rightarrow 4e^x = 9e^{-x}$

$\Rightarrow \frac{e^x}{e^{-x}} = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow e^{2x} = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow e^x = \frac{3}{2}$

$\therefore x = \ln\frac{3}{2}$

$x = \ln\frac{3}{2}$ হলে, $g''\left(\ln\frac{3}{2}\right) = 4e^{\ln\frac{3}{2}} + 9e^{-\ln\frac{3}{2}}$

$= 4 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3}$

$= 12 > 0$

$\therefore x = \ln\frac{3}{2}$ এ $g(x)$ এর লঘুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ লঘুমান, $g\left(\ln\frac{3}{2}\right) = 4e^{\ln\frac{3}{2}} + 9e^{-\ln\frac{3}{2}}$

$= 4 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3}$

$= 12$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ১৯** $f(x) = \tan x$

**(ক)** $y = \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\right\}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২১]

**(খ)** মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $f(3x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

[রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১; সকল বো. ১৮]

**(গ)** $y = f(x) + \sqrt{f'(x)}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1 - \sin x)y_2 - y = 0$

[রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: সকল বো. ১৮]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $y = \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\right\}$

ধরি, $x = \cos\theta$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}x$

$\therefore y = \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right\}$

$= \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}\right\}$

$= \sin\left\{2\tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}\right\}$

$= \sin\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)$

$= \sin\theta$

$\Rightarrow y = \sin(\cos^{-1}x)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\sin(\cos^{-1}x)\}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(\cos^{-1}x).\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \tan x$

$\therefore f(3x) = \tan 3x$

ধরি, $g(x) = f(3x) = \tan 3x$

$\therefore g(x+h) = \tan(3x+3h)$

মূল নিয়মের সংজ্ঞানুসারে,

$\frac{d}{dx}g(x)$

$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\tan(3x+3h)-\tan 3x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(3x+3h)}{\cos(3x+3h)} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right]$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{\sin(3x+3h).\cos 3x - \cos(3x+3h).\sin 3x}{\cos(3x+3h).\cos 3x}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\frac{\sin(3x+3h-3x)}{\cos(3x+3h).\cos 3x}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin 3h}{h}.\frac{1}{\cos(3x+3h).\cos 3x}$

$= 3\lim_{3h\to 0}\frac{\sin 3h}{3h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(3x+3h).\cos 3x}$

[$\because h \to 0$ হলে, $3h \to 0$]

$= \frac{3}{\cos(3x+0).\cos 3x}$

$= \frac{3}{\cos^2 3x}$

$= 3\sec^2 3x$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = \tan x$

$\therefore f'(x) = \sec^2 x$

এবং $y = f(x) + \sqrt{f'(x)}$

$\Rightarrow y = \tan x + \sqrt{\sec^2 x} = \tan x + \sec x$

$\Rightarrow y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$ .....(i)

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x+1) - (\sin x+1)\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow y_1 = \frac{\cos x.\cos x + (\sin x+1)\sin x}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow y_1 = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{1-\sin^2 x}$

$\Rightarrow y_1 = \frac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{1-\sin x}$

$\Rightarrow y_1 = (1-\sin x)^{-1}$

আবার, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_2 = -1(1-\sin x)^{-2}(0-\cos x)$

$= \cos x(1-\sin x)^{-2}$

$= \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$

$\Rightarrow (1-\sin x)y_2 = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$

$\Rightarrow (1-\sin x)y_2 = y$

$\therefore (1-\sin x)y_2 - y = 0$ **(Proved)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ২০** $f(x) = \tan^{-1}x$ এবং $g(x) = 2x$, $h(x) = \frac{1}{2x}$ $[x \neq 0]$

**(ক)** $y = \text{cosec}^{-1}\frac{1+x^2}{2x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১]

**(খ)** $y = \tan\{mf(x)\}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = 2myy_1$ [রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২১]

**(গ)** $y = \left\{\frac{1}{2}g(x)\right\}^{\frac{1}{2h(x)}}$ হলে, $y_2$ নির্ণয় কর। [চ. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $y = \text{cosec}^{-1}\frac{1+x^2}{2x}$

$= \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

$\Rightarrow y = 2\tan^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x)$

$= 2 \times \frac{1}{1+x^2}$

$= \frac{2}{1+x^2}$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \tan^{-1}x$

এবং $y = \tan\{mf(x)\}$

$\Rightarrow y = \tan(m\tan^{-1}x)$

$\Rightarrow \tan^{-1}y = m\tan^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}y) = \frac{d}{dx}(m\tan^{-1}x)$

$\Rightarrow \frac{1}{1+y^2}.y_1 = m\frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$

আবার, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dx}\{(1+x^2)y_1\} = \frac{d}{dx}\{m(1+y^2)\}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_2 + y_1.2x = 2myy_1$

$\therefore (1+x^2)y_2 + 2xy_1 = 2myy_1$ **(Proved)**

**গ** $g(x) = 2x$, $h(x) = \frac{1}{2x}$, $\frac{1}{h(x)} = 2x$ $[x \neq 0]$

$y = \left\{\frac{1}{2}g(x)\right\}^{\frac{1}{2h(x)}} = \left\{\frac{1}{2}2x\right\}^{\frac{1}{2}2x}$

$= x^x$

$\Rightarrow \ln y = \ln(x^x)$ [উভয়পক্ষে ln নিয়ে পাই]

$\therefore \ln y = x\ln x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x\ln x)$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\frac{1}{x} + \ln x.1$

$\Rightarrow \frac{y_1}{y} = 1 + \ln x$

$\Rightarrow y_1 = y(1+\ln x)$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}[y(1+\ln x)]$

$\Rightarrow y_2 = (1+\ln x)\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(1+\ln x)$

$\Rightarrow y_2 = (1+\ln x)y_1 + y\frac{1}{x}$

$\Rightarrow y_2 = y(1+\ln x)^2 + y\frac{1}{x}$ $[\because y_1 = y(1+\ln x)]$

$\Rightarrow y_2 = y\left[(1+\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right]$

$\because y_2 = x^x\left[(1+\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right]$ $[\because y = x^x]$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২১** $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ যখন } x < 0 \\ x \text{ যখন } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$t = \tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x} + x^{\sin^{-1}x}$

**(ক)** x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ এর অন্তরজ নির্ণয় করো। [কু. বো. ২১]

**(খ)** দেখাও যে, $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন। [কু. বো. ২১]

**(গ)** $\frac{dt}{dx}$ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** ধরি, $y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$= \tan^{-1}1 + \tan^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}1) + \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$

$= 0 + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ যখন } x < 0 \\ x \text{ যখন } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

এখন,

$x = 0$ হলে, $f(x) = x$

$\therefore f(0) = 0$

$x < 0$ হলে, $f(x) = x^2$

$\therefore \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$

$1 \geq x \geq 0$ হলে,

$\therefore \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$ এবং $f(0) = 0$

$\therefore x = 0$ বিন্দুতে $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(x) = 0$

$\therefore$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন। **(Showed)**

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** ধরি, $u = \tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$

$= \tan^{-1}x\frac{2\times 2\sqrt{x}}{1-(2\sqrt{x})^2}$

$= 2\tan^{-1}2\sqrt{x}$

$\therefore \frac{du}{dx} = 2\times\frac{1}{1+(2\sqrt{x})^2}\times 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)}$

আবার,

ধরি,

$v = x^{\sin^{-1}x}$

$\Rightarrow lnv = lnx^{\sin^{-1}x}$

$\Rightarrow lnv = \sin^{-1}x\, lnx$

$\Rightarrow \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \sin^{-1}x\cdot\frac{1}{x} + lnx\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = v\left[\frac{1}{x}\sin^{-1}x + \frac{lnx}{\sqrt{1+x^2}}\right]$

$= x^{\sin^{-1}x}\left[\frac{1}{x}\sin^{-1}x + \frac{lnx}{\sqrt{1+x^2}}\right]$

$t = u + v$

$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

$= \frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)} + x^{\sin^{-1}x}\left[\frac{1}{x}\sin^{-1}x + \frac{lnx}{\sqrt{1+x^2}}\right]$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২২** $g(\theta) = \cos\theta$ এবং $y = 2x^2 + 3x + 5$ একটি বক্ররেখা।

**(ক)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan ax}{\sin bx}\right)$ এর মান নির্ণয় করো। [কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২১; রা. বো: ১৭]

**(খ)** উদ্দীপকে উল্লিখিত বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল, তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর। [কু. বো. ২১]

**(গ)** $u = g(x)\, e^x$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx} + 2u = 0$. [কু. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan ax}{ax}\cdot a}{\frac{\sin bx}{bx}\cdot b}$

$= \frac{a}{b}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}$

$= \frac{a}{b}\cdot 1$

$= \frac{a}{b}$ **(Ans.)**

**Note:** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax} = 1$

**খ** দেওয়া আছে, $y = 2x^2 + 3x + 5$....(i)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x + 3$

স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হলে, ঢাল = 0

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-3}{4}$

(i) নং সমীকরণে $x = \frac{-3}{4}$ বসিয়ে পাই,

$y = 2\times\left(\frac{-3}{4}\right)^2 + 3\times\left(\frac{-3}{4}\right) + 5$

$= \frac{31}{8}$

$\therefore$ স্থানাংক $\left(\frac{-3}{4}, \frac{31}{8}\right)$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $g(\theta) = \cos\theta$

$u = g(x).e^x = e^x\cos x$

$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x\cos x)$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(\cos x)$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x\cos x - e^x\sin x$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u - e^x\sin x$ .... (i) $[\because u = e^x\cos x]$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx} - \frac{d}{dx}(e^x\sin x)$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx} - (e^x\sin x + e^x\cos x)$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx} - e^x\sin x - u$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dx} - u - u \quad \left[\text{(i) নং হতে } \frac{du}{dx} - u = -e^x\sin x\right]$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx} + 2u = 0$ **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ২৩** $f(x) = log_5 x$ এবং $g(x) = \sec x$

**(ক)** $\frac{d}{dx}\{(x^x)^x\}$ নির্ণয় কর। [ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২১; কু. বো. ১৯]

**(খ)** মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে f(x) এর ১ম অন্তরজ নির্ণয় কর। [য. বো. ২১]

**(গ)** $\frac{1}{g(\sqrt{y})} = 2x$ হলে দেখাও যে, $(1-4x^2)y_2 - 4xy_1 - 8 = 0$.

[য. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২; সি. বো. ১৭]



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধান:**

**ক** ধরি, $y = (x^x)^x$

$\Rightarrow y = x^{x^2}$

$\Rightarrow \ln y = \ln x^{x^2}$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

$\Rightarrow \ln y = x^2 \ln x$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x^2 \ln x)$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + \ln x 2x = x + 2x\ln x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(x + 2x\ln x) = (x^x)^x .x(1 + 2\ln x)$

$= x^{x^2+1}.(1 + 2\ln x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{(x^x)^x\} = x^{x^2+1}.(1 + 2\ln x)$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \log_5 x = \frac{\ln x}{\ln 5} = \frac{1}{\ln 5}\ln x$

$\therefore f(x + h) = \frac{1}{\ln 5}\ln(x + h)$

মূলনিয়মের সংজ্ঞানুসারে,

$\frac{d}{dx} f(x)$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\ln 5}\ln(x + h) - \frac{1}{\ln 5}\ln x\right]$

$= \frac{1}{\ln 5}\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[\ln(x + h) - \ln x]$

$= \frac{1}{\ln 5}\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\ln\left(\frac{x + h}{x}\right)$

$= \frac{1}{\ln 5}\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$

$= \frac{1}{\ln 5}\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \ldots.\right\}$

$= \frac{1}{\ln 5}\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\cdot\frac{h}{x}\left\{1 - \frac{h}{2x} + \frac{h^2}{3x^2} - \ldots.\right\}$

$= \frac{1}{\ln 5}\lim_{h \to 0} \frac{1}{x}\left\{1 - \frac{h}{2x} + \frac{h^2}{3x^2} - \ldots.\right\}$

$= \frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{1}{x}\{1 - 0 + 0 - \ldots..\}$

$= \frac{1}{x\ln 5}$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = \sec x$

$\therefore g(\sqrt{y}) = \sec\sqrt{y}$

এখন, $\frac{1}{g(\sqrt{y})} = 2x$

$\Rightarrow \frac{1}{\sec\sqrt{y}} = 2x$

$\Rightarrow \cos\sqrt{y} = 2x$

$\Rightarrow \sqrt{y} = \cos^{-1}2x$

$\Rightarrow y = (\cos^{-1}2x)^2$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos^{-1}2x)^2$

$\Rightarrow y_1 = 2(\cos^{-1}2x).\frac{-2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

$\Rightarrow y_1 = -4 \cdot \frac{\cos^{-1}2x}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

$\Rightarrow y_1^2 = 16 \cdot \frac{(\cos^{-1}2x)^2}{1 - 4x^2}$

$\Rightarrow (1 - 4x^2)y_1^2 = 16y$ [$\because y = (\cos^{-1}2x)^2$]

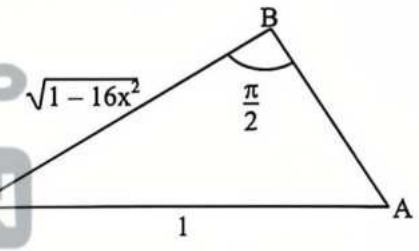
$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{(1 - 4x^2)y_1^2\} = \frac{d}{dx}(16y)$

$\Rightarrow (1 - 4x^2)2y_1y_2 + y_1^2(-8x) = 16y_1$

$\Rightarrow (1 - 4x^2)y_2 - 4xy_1 = 8$

$\therefore (1 - 4x^2)y_2 - 4xy_1 - 8 = 0$ **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ২৪** দৃশ্যকল্প-১:




দৃশ্যকল্প-২: $xy + y = \sin^{-1}\frac{y}{x}$

(ক) x এর সাপেক্ষে $x^{\cos^{-1}3x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [য. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-২ হতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [য. বো. ২১]

(গ) $h(x) = \frac{AB}{\log(AB)}$ এর চরম মান দৃশ্যকল্প-১ হতে নির্ণয় কর। [য. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** ধরি, $y = x^{\cos^{-1}3x}$

$\Rightarrow \ln y = \ln x^{\cos^{-1}3x}$

$\Rightarrow \ln y = \cos^{-1}3x \ln x$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(\cos^{-1}3x \ln x)$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos^{-1}3x \cdot \frac{1}{x} + \ln x.\frac{-1}{\sqrt{1 - 9x^2}} \times 3$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{1}{x}\cos^{-1}3x - \frac{3\ln x}{\sqrt{1 - 9x^2}}\right)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{\cos^{-1}3x}\left(\frac{1}{x}\cos^{-1}3x - \frac{3\ln x}{\sqrt{1 - 9x^2}}\right)$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** $xy + y = \sin^{-1}\frac{y}{x}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(xy) + \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{y}{x}\right)$

$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)$

$\Rightarrow y + (x+1)\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{x \cdot \frac{dy}{dx} - y \cdot \frac{dx}{dx}}{x^2}$

$\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}\right]$

$\Rightarrow y + (x+1)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-y^2}}\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)$

$\Rightarrow y + (x+1)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$

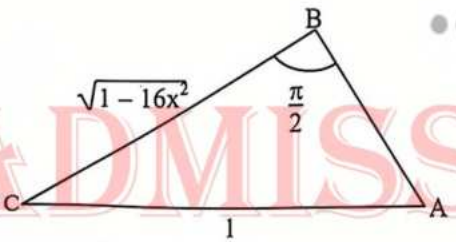
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{dy}{dx} - (x+1)\frac{dy}{dx} = y + \frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} - (x+1)\right]\frac{dy}{dx} = \frac{xy\sqrt{x^2-y^2}+y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$

$\Rightarrow \frac{1 - x\sqrt{x^2-y^2} - \sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{dy}{dx} = \frac{xy\sqrt{x^2-y^2}+y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy\sqrt{x^2-y^2}+y}{x\left(1 - x\sqrt{x^2-y^2} - \sqrt{x^2-y^2}\right)}$ **(Ans.)**

**গ**




এখানে, $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\Rightarrow AB^2 = 1 - 1 + 16x^2$

$\Rightarrow AB^2 = 16x^2$

$\Rightarrow AB = 4x$

এখন, $h(x) = \frac{AB}{\log(AB)} = \frac{4x}{\log(4x)}$

$\Rightarrow h'(x) = \frac{\log(4x)\frac{d}{dx}(4x) - 4x\frac{d}{dx}\{\log(4x)\}}{\{\log(4x)\}^2}$

$= \frac{4\log 4x - 4x.\frac{1}{4x}.4}{\{\log(4x)\}^2}$ [এক্ষেত্রে, log এর কোনো ভিত্তি দেওয়া না থাকলে তার ভিত্তি e ধরা হয়। অর্থাৎ log কে ln হিসেবে বিবেচনা করা হয়]

$= \frac{4\log 4x - 4}{(\log 4x)^2}$

আবার, $h''(x) = \frac{(\log 4x)^2\frac{d}{dx}(4\log 4x - 4) - (4\log 4x - 4)\frac{d}{dx}(\log 4x)^2}{(\log 4x)^4}$

$= \frac{(\log 4x)^2.\left(4.\frac{1}{4x}.4 - 0\right) - (4\log 4x - 4)\,2.\log 4x.\frac{1}{4x}.4}{(\log 4x)^4}$

$= \frac{(\log 4x)^2\left(\frac{4}{x}\right) - \frac{8\log 4x.(\log 4x - 1)}{x}}{(\log 4x)^4}$

$= \frac{4(\log 4x)^2 - 8(\log 4x)^2 + 8\log 4x}{x.(\log 4x)^4}$

$= \frac{4\log 4x - 8\log 4x + 8}{x(\log 4x)^3}$

$= \frac{8 - 4\log 4x}{x(\log 4x)^3}$

চরম মানের জন্য $h'(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{4\log 4x - 4}{(\log 4x)^2} = 0$

$\Rightarrow \log 4x = 1$

$\Rightarrow 4x = e$

$\therefore x = \frac{e}{4}$

$x = \frac{e}{4}$ এর জন্য, $h''\left(\frac{e}{4}\right) = \frac{8 - 4\log 4.\frac{e}{4}}{\frac{e}{4}\left(\log 4.\frac{e}{4}\right)^3} = \frac{16}{e} > 0$

$\therefore x = \frac{e}{4}$ বিন্দুতে ফাংশনটির লঘুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ ফাংশনটির লঘুমান $h\left(\frac{e}{4}\right) = \frac{4.\frac{e}{4}}{\log 4.\frac{e}{4}} = e$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২৫** $g(x) = \cos x$ এবং $h(y) = \sin y$

(ক) x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}(\sin e^x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২১]

(খ) $\{g(x)\}^y = \{h(y)\}^x$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

(গ) $0 < x < \pi$ ব্যবধিতে $g(2x) + h(x)$ এর লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর।

সমাধান:

**ক** ধরি, $y = \tan^{-1}(\sin e^x)$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan^{-1}(\sin e^x)$

$= \frac{1}{1+(\sin e^x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(\sin e^x)$

$= \frac{1}{1+(\sin e^x)^2} \cdot \cos e^x.e^x$

$= \frac{e^x \cos e^x}{1+(\sin e^x)^2}$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** দেওয়া আছে, $g(x) = \cos x$ এবং $h(y) = \sin y$

এখন, $\{g(x)\}^y = \{h(y)\}^x$

$\Rightarrow (\cos x)^y = (\sin y)^x$

$\Rightarrow \ln(\cos x)^y = \ln(\sin y)^x$ [উভয়পক্ষে $\ln$ নিয়ে পাই,]

$\Rightarrow y\ln\cos x = x\ln\sin y$

$\Rightarrow y\frac{d}{dx}(\ln\cos x) + \ln\cos x\frac{d}{dx}(y) = x\frac{d}{dx}(\ln\sin y) + \ln\sin y\frac{dx}{dx}$

$\Rightarrow y\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x) + (\ln\cos x)\frac{dy}{dx} = x\cdot\frac{1}{\sin y}(\cos y)\frac{dy}{dx} + \ln\sin y$

$\Rightarrow \left(\ln\cos x - x\frac{\cos y}{\sin y}\right)\frac{dy}{dx} = \ln\sin y + y\frac{\sin x}{\cos x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\ln\sin y + y\tan x}{\ln\cos x - x\cot y}$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে,

$g(x) = \cos x \therefore g(2x) = \cos 2x$

$h(y) = \sin y \therefore h(x) = \sin x$

ধরি,

$y = g(2x) + h(x)$

$\Rightarrow y = \cos 2x + \sin x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin 2x.2 + \cos x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2\sin 2x + \cos x$ ..... (i)

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -4\cos 2x - \sin x$ ..... (ii)

চরমানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

(i) নং হতে,

$-2\sin 2x + \cos x = 0$

$\Rightarrow -2\times 2\sin x\cos x + \cos x = 0$

$\Rightarrow \cos x(1 - 4\sin x) = 0$

হয়, $\cos x = 0$ অথবা, $1 - 4\sin x = 0$

$\Rightarrow x = \cos^{-1}0$ $\Rightarrow \sin x = \frac{1}{4}$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}; 0 < x < \pi$ ব্যবধিতে $\Rightarrow x = \sin^{-1}\frac{1}{4}$

এখন,

$x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = -4\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{2}$

$= -4(-1) - 1$

$= 3 > 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ এর জন্য লঘুমান পাওয়া যাবে।

$\therefore$ লঘুমান $y = \cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{2} = -1 + 1 = 0$ **(Ans.)**

আবার, $x = \sin^{-1}\frac{1}{4}$ বা $\sin x = \frac{1}{4}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = -4\cos 2x - \sin x$

$= -4(1 - 2\sin^2 x) - \sin x$

$= -4 + 8\times\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}$

$= -\frac{15}{4} < 0$

$\therefore \sin x = \frac{1}{4}$ এর জন্য গুরুমান পাওয়া যাবে।

$\therefore$ গুরুমান $y = \cos 2x + \sin x$

$= 1 - 2\sin^2 x + \sin x$

$= 1 - 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}$

$= \frac{9}{8}$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২৬** $f(x) = (x+2)(x-2)$; $h(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$

$t = x^x\ln x$

**(ক)** $\frac{dt}{dx}$ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২১]

**(খ)** x অক্ষের ধনাত্মক দিক এবং f(x) এর ছেদবিন্দুতে f(x) এর স্পর্শকের সমীকরণ বের কর।

**(গ)** h(x) এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $t = x^x\ln x$

$\ln t = \ln(x^x\ln x)$

$= \ln x^x + \ln(\ln x)$

$= x\ln x + \ln(\ln x)$

$\therefore$ উভয়পক্ষে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dx}\ln t = \frac{d}{dx}(x\ln x) + \frac{d}{dx}\ln(\ln x)$

$\Rightarrow \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{dx} = x\frac{d}{dx}\ln x + \ln x\frac{dx}{dx} + \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{x}{x} + \ln x + \frac{1}{x\ln x}$

$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = x^x\ln x\left[1 + \ln x + \frac{1}{x\ln x}\right]$

$= x^x\left[(1 + \ln x)\ln x + \frac{\ln x}{x\ln x}\right]$

$= x^x\left[\frac{1}{x} + (1 + \ln x)\ln x\right]$ **(Ans.)**

**খ** $f(x) = (x+2)(x-2)$

$= x^2 - 4$

$f'(x) = 2x$

ধরি, $y = (x+2)(x-2)$

x অক্ষের উপর $y = 0$

$\therefore (x+2)(x-2) = 0$

$\therefore x = -2, 2$

f(x) বক্ররেখা ও x অক্ষের ধনাত্মক দিকের ছেদবিন্দু (2, 0)

(2, 0) বিন্দুতে $f'(x) = 2\times 2 = 4$

$\therefore (x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$

$\therefore$ (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ:

$y - 0 = 4(x - 2)$

$\Rightarrow y = 4x - 8$

$\Rightarrow 4x - y - 8 = 0$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** দেওয়া আছে, $h(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$

$\therefore h'(x) = 6x^2 - 42x + 36$

$\therefore h''(x) = 12x - 42$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য,

$h'(x) = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 42x + 36 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x - x + 6 = 0$

$\Rightarrow (x - 6)(x - 1) = 0$

হয়, $x = 6$ অথবা, $x - 1 = 0$

$\therefore x = 6$ $\therefore x = 1$

এখন, $x = 1$ হলে, $h''(1) = 12 \times 1 - 42 = -30 < 0$

$\therefore x = 1$ এর জন্য $h(x)$ ফাংশনটির গুরুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ ফাংশনটির গুরুমান,

$h(1) = 2 \times 1^3 - 21 \times 1^2 + 36 \times 1 - 20$

$= -3$ **(Ans.)**

আবার, $x = 6$ হলে, $h''(6) = 12 \times 6 - 42 = 30 > 0$

$\therefore x = 6$ এর জন্য $h(x)$ এর লঘুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ ফাংশনটির লঘুমান,

$h(6) = 2 \times 6^3 - 21 \times 6^2 + 36 \times 6 - 20$

$= -128$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২৭** $f(x) = \ln px$ এবং $g(x) = \ln\sqrt[3]{x}$ দুটি ফাংশন।

**(ক)** $\lim_{x \to 0} \frac{2e^{-\sin x} - 2}{\sin x}$ এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২২]

**(খ)** $p = 3$ হলে মূল নিয়মে $f(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

[সি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২৩]

**(গ)** অন্তর্ভুক্ত চলরাশির সাপেক্ষে $g\left(\frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}\right)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

[সি. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** $\lim_{x \to 0} \frac{2e^{-\sin x} - 2}{\sin x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2(e^{-\sin x} - 1)}{\sin x}$

$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\sin x} - 1}{\sin x}$

$= -2 \lim_{-\sin x \to 0} \frac{e^{-\sin x} - 1}{-\sin x}$ $[x \to 0$ হলে, $-\sin x \to 0]$

$= -2 \times 1$ $\left[\because \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\right]$

$= -2$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \ln px$

$p = 3$ হলে, $f(x) = \ln 3x$

$\therefore f(x + h) = \ln 3(x + h) = \ln(3x + 3h)$

অন্তরজের মূল নিয়মানুসারে,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(3x + 3h) - \ln 3x}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{3x + 3h}{3x}\right)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \ldots.\right\}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{x}\left\{1 - \frac{h}{2x} + \frac{h^2}{3x^2} - \ldots.\right\}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x}\left\{1 - \frac{h}{2x} + \frac{h^2}{3x^2} - \ldots.\right\}$

$= \frac{1}{x}.(1 - 0 + 0 - \ldots.)$

$= \frac{1}{x}$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = \ln\sqrt[3]{x} = \ln x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ln x$

$\therefore g\left(\frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}\right)$

$= \frac{1}{3}\ln\frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}$

$= \frac{1}{3}\ln\tan^2\frac{\varphi}{2} = \frac{2}{3}\ln\left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)$

অন্তর্ভুক্ত চলরাশি $\varphi$ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{d\varphi}\left\{g\left(\frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}\right)\right\} = \frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{2}{3}\ln\left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)\right\}$

$= \frac{2}{3}\cot\frac{\varphi}{2} \cdot \sec^2\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \times \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$

$= \frac{1}{3}\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$

$= \frac{2}{3.2\sin\frac{\varphi}{2}.\cos\frac{\varphi}{2}}$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{2}{3}\operatorname{cosec}\varphi$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ২৮** দৃশ্যকল্প-১: $y = ax^2 + \frac{b}{\sqrt{x}}$

দৃশ্যকল্প-২: দুটি সংখ্যার যোগফল 12; এদের একটি সংখ্যার ঘন এর সাথে অপর সংখ্যার গুণফল গরিষ্ঠ।

(ক) দেখাও যে, $x^3 - 3x^2 + 10x$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন। [দি. বো. ২১]

(খ) প্রমাণ কর যে, $2x^2y_2 - xy_1 = 2y$ [দি. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত সংখ্যা দুটি নির্ণয় কর। [দি. বো. ২১]

সমাধান:

**ক** প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 10x$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x + 10$

$= 3(x^2 - 2x + 1) + 7$

$= 3(x-1)^2 + 7 > 0 \quad [\because (x-1)^2 \geq 0]$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান। **(Showed)**

**খ** দেওয়া আছে, $y = ax^2 + \frac{b}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow y = ax^2 + \frac{b}{x^{\frac{1}{2}}}$

$\Rightarrow y = ax^2 + bx^{-\frac{1}{2}}$ ..... (i)

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(ax^2) + \frac{d}{dx}\left(bx^{-\frac{1}{2}}\right)$

$\Rightarrow y_1 = 2ax + \left(-\frac{1}{2}\right)bx^{-\frac{1}{2}-1}$

$\Rightarrow y_1 = 2ax - \frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}$

x এর সাপেক্ষে পুনরায় অন্তরীকরণ করে পাই,

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}(2ax) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}\right)$

$\Rightarrow y_2 = 2a.1 - \frac{1}{2}b\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}-1}$

$\therefore y_2 = 2a + \frac{3}{4}bx^{-\frac{5}{2}}$

L.H.S $= 2x^2y_2 - xy_1$

$= 2x^2\left(2a + \frac{3}{4}bx^{-\frac{5}{2}}\right) - x\left(2ax - \frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}\right)$

$= 4ax^2 + \frac{3}{2}bx^{-\frac{1}{2}} - 2ax^2 + \frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}}$

$= 2ax^2 + 2bx^{-\frac{1}{2}}$

$= 2\left(ax^2 + bx^{-\frac{1}{2}}\right)$

$= 2y$

= R.H.S **(Proved)**

**গ** মনে করি, সংখ্যাদ্বয় x এবং y

$\therefore x + y = 12$

$\Rightarrow y = 12 - x$ ..... (i)

ধরি, $f(x) = x^3y$

$= x^3(12 - x)$

$= 12x^3 - x^4$

$\therefore f'(x) = 36x^2 - 4x^3$

$\therefore f''(x) = 72x - 12x^2$

চরমমানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 36x^2 - 4x^3 = 0$

$\Rightarrow 4x^2(9 - x) = 0$

$\Rightarrow 9 - x = 0 \quad [\because x \neq 0]$

$\therefore x = 9$

$\therefore x = 9$ এর জন্য $f(x)$ এর গরিষ্ঠমান পাওয়া যায়। [দেওয়া আছে]

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, $y = 12 - 9$

$= 3$

$\therefore$ সংখ্যাদ্বয় 9 এবং 3 **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২৯** $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$; $p(u) = u^4 - \frac{2}{3}u^3 - 2u^2 + 2u$

(ক) $f(ax)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ১৯]

(খ) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2f(x) - g(2x)}{1 + f(2x)}$ [ঢা. বো. ১৯]

(গ) $(-1, 2)$ ব্যবধিতে $p(x)$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ১৯]

সমাধান:

**ক** উদ্দীপক হতে পাই, $f(x) = \cos x$

$f(ax) = \cos ax$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{f(ax)\} = \frac{d}{dx}(\cos ax) = -\sin ax \frac{d}{dx}(ax) = -a\sin ax$ **(Ans.)**

**খ** উদ্দীপক হতে পাই, $f(x) = \cos x$ এবং $g(x) = \sin x$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2f(x) - g(2x)}{1 + f(2x)}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - \sin 2x}{1 + \cos 2x}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - 2\sin x \cos x}{2\cos^2 x}$

$[\because 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x;\ \sin 2x = 2\sin x.\cos x]$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

$= \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{1 + \sin \frac{\pi}{2}}$

$= \frac{0}{1 + 1} = 0$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** $p(u) = u^4 - \frac{2}{3}u^3 - 2u^2 + 2u$

$\therefore p(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2x$

$\therefore p'(x) = 4x^3 - 2x^2 - 4x + 2$

এবং $p''(x) = 12x^2 - 4x - 4$

$\therefore$ চরমমানের জন্য $p'(x) = 0$ হবে।

$\Rightarrow 4x^3 - 2x^2 - 4x + 2 = 0$

$\Rightarrow 2x^2(2x-1) - 2(2x-1) = 0$

$\Rightarrow (2x-1)(2x^2-2) = 0$

$\Rightarrow (2x-1)(x^2-1) = 0$

হয়, $2x - 1 = 0$ অথবা, $x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x = 1$ $\Rightarrow x^2 = 1$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ $\therefore x = \pm 1$

$\therefore x = \frac{1}{2}, x = \pm 1$

$\therefore$ প্রদত্ত $(-1, 2)$ ব্যবধিতে $x$ এর মান $\frac{1}{2}$ এবং $1$

এখন, $x = \frac{1}{2}$ হলে, $p''\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \times \frac{1}{4} - 4 \times \frac{1}{2} - 4$

$= 3 - 2 - 4$

$= -3 < 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ এর জন্য ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{16} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{8} - 2 \times \frac{1}{4} + 1$

$= \frac{1}{16} - \frac{1}{12} - \frac{1}{2} + 1$

$= \frac{23}{48}$

আবার, $x = 1$ হলে, $p''(1) = 12 - 4 - 4 = 4 > 0$

$\therefore x = 1$ এর জন্য ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= 1 - \frac{2}{3} - 2 + 2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $\frac{23}{48}$; সর্বনিম্ন মান $\frac{1}{3}$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৩০** $y = 2^x \ln \frac{1}{1-x}$; $f(x) = x^{\tan^{-1}x}$, $g(x) = \log_x a$

**(ক)** দেখাও যে, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1+x}} = -2$ [রা. বো. ১৯]

**(খ)** $x$ এর সাপেক্ষে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [রা. বো. ১৯]

**(গ)** $f(x)$ এবং $g(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [য. বো. ১৭]

**সমাধান:**

**ক** L.H.S. $= \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1+x}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{1+x})}{(1-\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})}$

[লব ও হরকে $1+\sqrt{1+x}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{1+x})}{1^2-(\sqrt{1+x})^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{1+x})}{1-(1+x)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{1+x})}{1-1-x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{1+x})}{-x}$

$= -\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1+x})$

$= -(1+1) = -2 =$ R.H.S **(Proved)**

**খ** দেওয়া আছে,

$y = 2^x \ln \frac{1}{1-x}$

$= 2^x \ln(1-x)^{-1}$

$= -2^x \ln(1-x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{-2^x \ln(1-x)\}$

$= -\left[2^x \frac{d}{dx}\ln(1-x) + \ln(1-x)\frac{d}{dx}2^x\right]$

$= -\left[2^x \frac{1}{1-x}(-1) + \ln(1-x)2^x \ln 2\right]$

$= \frac{2^x}{1-x} - \ln(1-x)2^x \ln 2$

$= \frac{2^x}{1-x} + 2^x \ln 2\{-1\ln(1-x)\}$

$= \frac{2^x}{1-x} + 2^x \ln 2 \ln(1-x)^{-1}$

$= \frac{2^x}{1-x} + 2^x \ln 2 . \ln \frac{1}{1-x}$ **(Ans.)**

**গ** ধরি, $y = f(x) = x^{\tan^{-1}x}$

$\Rightarrow \ln y = \ln x^{\tan^{-1}x}$

$\Rightarrow \ln y = (\tan^{-1}x)(\ln x)$

$x$ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\{(\tan^{-1}x)(\ln x)\}$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \tan^{-1}x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \tan^{-1}x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{\tan^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{1+x^2}\right)$

$\therefore \frac{d}{dx}(x^{\tan^{-1}x}) = x^{\tan^{-1}x}\left(\frac{\tan^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{1+x^2}\right)$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



আবার, ধরি, $y = g(x) = l\log_x a$

$\Rightarrow y = \log_e a \times \log_x e$

$\Rightarrow y = l\text{na}\,\frac{1}{l\text{nx}} = l\text{na}(l\text{nx})^{-1}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = l\text{na}\,\frac{d}{dx}(l\text{nx})^{-1}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = l\text{na}(-1)(l\text{nx})^{-2}.\frac{1}{x}$

$\therefore \frac{d}{dx}(l\log_x a) = \frac{-l\text{na}}{x(l\text{nx})^2}$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৩১** দৃশ্যকল্প-১: $u = \sin^{-1}x + 2$ এবং $v = \frac{1-y}{1+y}$

দৃশ্যকল্প-২: $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ।

(ক) $\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{x}}$ এর মান নির্ণয় কর। [ব. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে, $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$ হলে, x ও y এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে, বক্ররেখাটির উপর যেসব বিন্দুতে স্পর্শক $y = 0$ রেখার সমান্তরাল সেসব বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:

**ক** $\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{x}}$

$= \lim_{x\to 0}\left\{(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right\}^{12}$

$= \left\{\lim_{4x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right\}^{12}$ [$x \to 0$ হলে $4x \to 0$ হবে]

$= e^{12}$ $\left\{\because \lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e\right\}$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $u = \sin^{-1}x + 2$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

এবং $v = \frac{1-y}{1+y}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dy} = \frac{(1+y)(-1)-(1-y)}{(1+y)^2}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dy} = \frac{-2}{y^2+2y+1}$

এখানে, $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2}{y^2+2y+1}$

$\Rightarrow -2\sqrt{1-x^2} = y^2+2y+1$

$\Rightarrow \left(-2\sqrt{1-x^2}\right)^2 = (y^2+2y+1)^2$

$\Rightarrow 4(1-x^2) = y^4+4y^2+1+4y^3+4y+2y^2$

$\Rightarrow 4-4x^2 = y^4+4y^3+6y^2+4y+1$

$\therefore 4x^2 = 3-y^4-4y^3-6y^2-4y$

$\therefore$ এটিই x ও y এর মধ্যে নির্ণেয় সম্পর্ক।

**গ** $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$

$y = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার ঢাল $= 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + x - 3x - 3 = 0$

$\Rightarrow x(x+1) - 3(x+1) = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-3) = 0$

$\therefore x = -1, 3$

$x = -1$ হলে, $y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 15$

$= -1 - 3 + 9 + 15$

$= 24 - 4$

$= 20$

$x = 3$ হলে, $y = 3^3 - 3\times 3^2 - 9\times 3 + 15$

$= 27 - 27 - 27 + 15$

$= -12$

$\therefore$ বক্ররেখাটির উপর $(-1, 20)$ ও $(3, -12)$ বিন্দুতে স্পর্শক $y = 0$ রেখার সমান্তরাল বা স্পর্শকের ঢাল শূন্য।

$\therefore (-1, 20)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 20 = 0(x+1)$

$\Rightarrow y - 20 = 0$

এবং $(3, -12)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y + 12 = 0(x-3)$

$\Rightarrow y + 12 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ: $y - 20 = 0$ এবং $y + 12 = 0$

**প্রশ্ন ▶ ৩২** $g(x) = \tan x$, $h(x) = \sin x$

(ক) $\theta$ এর সাপেক্ষে $\theta^\circ \sin\theta^\circ$ এর অন্তরজ বের কর। [রা. বো., কু. বো., চ. বো., ব. বো ১৮]

(খ) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-h(x)}{\{h(x)\}^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left\{\frac{1}{h\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right\}^3 - \{g(\theta)\}^3}{g(\theta)}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

**ক** মনে করি, $y = \theta^\circ \sin\theta^\circ$

$= \frac{\pi\theta}{180}\sin\frac{\pi\theta}{180}$ $\left[\because 1^\circ = \frac{\pi}{180}, \therefore \theta^\circ = \frac{\theta\pi}{180}\right]$

$= \frac{\pi}{180}\left(\theta\sin\frac{\pi\theta}{180}\right)$

উভয় পক্ষকে $\theta$ এর সাপেক্ষে অন্তরজ করে,

$\frac{d}{d\theta}(y) = \frac{\pi}{180}\left\{\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\frac{\pi\theta}{180}\right) + \sin\frac{\pi\theta}{180}\frac{d}{d\theta}(\theta)\right\}$

$= \frac{\pi}{180}\left\{\theta\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi\theta}{180} + \sin\frac{\pi\theta}{180}1\right\}$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-h(x)}{\{h(x)\}^3}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\sin^3 x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x.\sin^2 x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}$ $\left[\because \sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x.4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos x.\cos^2\frac{x}{2}}$

$=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

**গ** $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left\{\frac{1}{h\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right\}^3-\{g(\theta)\}^3}{g(\theta)}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left\{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right\}^3-(\tan\theta)^3}{\tan\theta}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^3\theta}-\tan^3\theta}{\tan\theta}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^3\theta}-\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3\theta}{\cos^3\theta.\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3\theta}{\cos^2\theta\sin\theta}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{(1-\sin^2\theta)(\sin\theta)}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)\sin\theta}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{\sin\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{1+1+1^2}{1(1+1)}$

$=\frac{3}{2}$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৩৩** $f(x)=e^x$, $g(x)=\cos x$

(ক) $y=\sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2=y(2y^2-1)$. [ঢা. বো. ১৭]

(খ) $y=f(x)g(x)$ এর অন্তরজ মূল নিয়মে নির্ণয় কর।

(গ) x এর প্রেক্ষিতে $\frac{g(x)-g(2x)}{1-g(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $y=\sec x$

$\therefore y_1=\sec x\tan x$

$=y\tan x$

$\therefore y_2=y_1\tan x+y\sec^2 x$

$=y\tan^2 x+y\sec^2 x$ $[y_1=y\tan x]$

$=y(\tan^2 x+\sec^2 x)$

$=y(\sec^2 x-1+\sec^2 x)$ $[\because \tan^2 x=\sec^2 x-1]$

$=y(2\sec^2 x-1)$

$\therefore y_2=y(2y^2-1)$ **(Proved)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x)=e^x$ এবং $g(x)=\cos x$

$y=f(x)g(x)$

ধরি, $P(x)=y=f(x).g(x)$

$\therefore P(x)=e^x.\cos x$

সংজ্ঞানুসারে,

$\frac{d}{dx}\{P(x)\}=\lim_{h\to 0}\frac{P(x+h)-P(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}.\cos(x+h)-e^x.\cos x}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{e^x.e^h\cos(x+h)-e^x.\cos x}{h}$

$=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h\cos(x+h)-\cos x}{h}$

$=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h\{\cos(x+h)-\cos x\}+e^h.\cos x-\cos x}{h}$

$=e^x\lim_{h\to 0}\left[\frac{e^h\{\cos(x+h)-\cos x\}}{h}+\frac{\cos x(e^h-1)}{h}\right]$

$=e^x\left[\lim_{h\to 0}\frac{e^h.2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x-x-h}{2}}{h}+\cos x.1\right]$

$=e^x\left[\lim_{h\to 0}e^h.2\sin\frac{2x+h}{2}.\frac{\sin\frac{-h}{2}}{h}+\cos x.1\right]$

$=e^x.\left[e^0.2\sin x\times\left(\frac{-1}{2}\right)+\cos x\right]$

$=e^x(-\sin x+\cos x)$

$=e^x(\cos x-\sin x)$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = \cos x$

$\therefore g(2x) = \cos 2x$

ধরি, $y = \frac{g(x) - g(2x)}{1 - g(x)}$

$= \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$

$= \frac{\cos x - (2\cos^2 x - 1)}{1 - \cos x}$

$= \frac{\cos x - 2\cos^2 x + 1}{1 - \cos x}$

$= \frac{-2\cos^2 x - \cos x + 2\cos x + 1}{1 - \cos x}$

$= \frac{-\cos x(2\cos x + 1) + 1(2\cos x + 1)}{1 - \cos x}$

$= \frac{(1 - \cos x)(2\cos x + 1)}{1 - \cos x}$

$= 2\cos x + 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\cos x + 1)$

$= 2\frac{d}{dx}(\cos x) + \frac{d}{dx}(1)$

$= 2(-\sin x) + 0$

$= -2\sin x$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৩৪** $y = \frac{x^2}{x - 2}$

**(ক) মান নির্ণয় কর:** $\lim_{x \to 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$ [রা. বো. ১৭]

**(খ)** $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$ **ফাংশনের সন্ধিবিন্দুগুলি নির্ণয় কর।**

**(গ)** $y_1 - 2(x - 2)y_2 + 4 = 0$ **হলে, x = ?**

**সমাধান:**

**ক** $\lim_{x \to 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{(3 - \sqrt{x^2 + 5})(3 + \sqrt{x^2 + 5})}$

[লব ও হরকে $3 + \sqrt{x^2 + 5}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \lim_{x \to 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{3^2 - (\sqrt{x^2 + 5})^2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{9 - (x^2 + 5)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{9 - x^2 - 5}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{(4 - x^2)}$

$= \lim_{x \to 2} (3 + \sqrt{x^2 + 5})$

$= 3 + \sqrt{2^2 + 5}$

$= 3 + 3 = 6$ **(Ans.)**

**খ** $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$

$f'(x) = 12x^2 - 18x + 6$

সন্ধিবিন্দু বা চরমবিন্দুর জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore 12x^2 - 18x + 6 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - x + 1 = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(2x - 1) = 0$

$\therefore x = 1, \frac{1}{2}$

$x = 1$ হলে, $f(1) = 4 \times 1^3 - 9 \times 1^2 + 6 \times 1 = 1$

$x = \frac{1}{2}$ হলে, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ সন্ধি বিন্দুগুলি $(1, 1)$ এবং $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

**Note:** সন্ধি বিন্দু বা চরম বিন্দু হলো ঐ বিন্দু যেখানে গুরুমান বা লঘুমান বিদ্যমান।

**গ** দেওয়া আছে, $y = \frac{x^2}{x - 2}$

$\therefore y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x - 2}\right) = \frac{(x - 2)\frac{d}{dx}(x^2) - x^2\frac{d}{dx}(x - 2)}{(x - 2)^2}$

$= \frac{(x - 2).2x - x^2.1}{(x - 2)^2}$

$= \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x - 2)^2}$

$= \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2}$

$\therefore y_1 = \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}$

$\therefore y_2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4}\right)$

$\Rightarrow y_2 = \frac{(x^2 - 4x + 4)\frac{d}{dx}(x^2 - 4x) - (x^2 - 4x)\frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 4)}{(x^2 - 4x + 4)^2}$

$= \frac{(x^2 - 4x + 4)(2x - 4) - (x^2 - 4x)(2x - 4)}{\{(x - 2)^2\}^2}$

$= \frac{(2x - 4)(x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x)}{(x - 2)^4}$

$= \frac{2(x - 2) \times 4}{(x - 2)^4}$

$= \frac{8}{(x - 2)^3}$

দেওয়া আছে,

$y_1 - 2(x - 2)y_2 + 4 = 0$

$\Rightarrow \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2} - \frac{16}{(x - 2)^2} + 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 16 + 4(x - 2)^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 - 20 + 4(x - 2)^2 = 0$

$\Rightarrow (x - 2)^2 + 4(x - 2)^2 = 20$

$\Rightarrow 5(x - 2)^2 = 20$

$\Rightarrow (x - 2)^2 = 4$

$\Rightarrow x - 2 = \pm 2$

$\therefore x = 0, 4$ **(Ans.)**



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ৩৫** $y = (x)^{\frac{1}{x}}$ এবং $L = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

**(ক)** $\lim_{\theta \to 0} \frac{\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\theta^2}$ এর মান নির্ণয় কর। [সি. বো. ১৭]

**(খ)** y এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।

**(গ)** L এর মান নির্ণয় কর।

**সমাধান:**

**ক** $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta - \sin\theta}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta\left(1 - \frac{\sin\theta}{\tan\theta}\right)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta\left(1 - \frac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta(1 - \cos\theta)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^2} \quad [1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta]$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \left\{\frac{\tan\theta}{\theta}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2 \frac{\theta}{2}\right\}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} \lim_{\frac{\theta}{2} \to 0}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2 \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{2}$$

$= 1 \times 1 \times 0 = 0$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে,

$$y = (x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{x}\ln x$$

$$\Rightarrow \ln y = x^{-1}\ln x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x^{-1} \cdot \frac{1}{x} + \ln x.(-1)x^{-2}$$

$$\Rightarrow y^{-1}.\frac{dy}{dx} = x^{-2} - x^{-2}\ln x = x^{-2}(1 - \ln x) \quad \ldots\ldots (i)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = yx^{-2}(1 - \ln x)$$

আবার, (i) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$$y^{-1}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}.(-1)y^{-2}.\frac{dy}{dx} = x^{-2}\left(-\frac{1}{x}\right) + (1 - \ln x)(-2)x^{-3}$$

$$\Rightarrow y^{-1}\frac{d^2y}{dx^2} - y^{-2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -x^{-3} - 2x^{-3}(1 - \ln x)$$

$$\Rightarrow y^{-1}\frac{d^2y}{dx^2} - y^{-2}\{y^2x^{-4}(1 - \ln x)^2\} = -x^{-3}\{1 + 2(1 - \ln x)\}$$

$$\Rightarrow y^{-1}\frac{d^2y}{dx^2} - x^{-4}(1 - \ln x)^2 = -x^{-3}\{1 + 2(1 - \ln x)\}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = y[x^{-4}(1 - \ln x)^2 - x^{-3}\{1 + 2(1 - \ln x)\}]$$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য,

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow yx^{-2}(1 - \ln x) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \ln x = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = 1 = \ln e$$

$$\therefore x = e$$

$x = e$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = x^{\frac{1}{x}}[x^{-4}(1 - \ln x)^2 - x^{-3}\{1 + 2(1 - \ln x)\}]$

$$= e^{\frac{1}{e}}[e^{-4}(1 - \ln e)^2 - e^{-3}\{1 + 2(1 - \ln e)\}]$$

$$= e^{\frac{1}{e}}[0 - e^{-3}(1 - 2 \times 0)]$$

$$= -e^{-3}e^{\frac{1}{e}} < 0$$

$\therefore x = e$ এর জন্য সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে।

সর্বোচ্চ মান $y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{e}}$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $L = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3}.\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \cdot \left(\frac{\sin x - \sin x\cos x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x} \cdot \frac{4\sin^3\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^3.8}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \times \frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x} \times \left(\lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^3$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 0^\circ}{\cos 0^\circ} \times 1$$

$$= \frac{1}{2}$$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**বিকল্প পদ্ধতি:** দেওয়া আছে, $L = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\cdot\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\cdot\left(\frac{\sin x - \sin x\cos x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

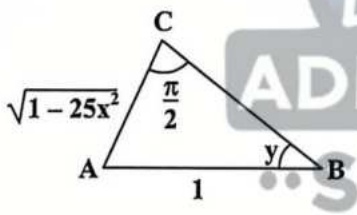
$$= 1\times 1.\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}\times 2}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৩৬**




(ক) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^x$ নির্ণয় কর।

(খ) $g(x) = \frac{BC}{\log_5(BC)}$ এর লঘু বা গুরুমান নির্ণয় কর।

(গ) cosecy = P হলে, দেখাও যে, $25y_1 + 75xy_2 + (25x^2-1)y_3 = 0$, যেখানে P, x এর ফাংশন।

**সমাধান:**

**ক** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2-1}{x-2}\right)^x$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x-2}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x-2}\right)^{x-2}}{\left(1-\frac{1}{x-2}\right)^2}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x-2}\right)^{x-2}}{(1-0)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{e}}{1}$$

$$= \frac{1}{e}$$ **(Ans.)** $\left[\because \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}\right]$

**খ** ABC সমকোণী ত্রিভুজে,

$AC^2 + BC^2 = AB^2$

$\Rightarrow BC^2 = AB^2 - AC^2$

$\Rightarrow BC^2 = 1 - 1 + 25x^2$

$\Rightarrow BC^2 = 25x^2$

$\Rightarrow BC = 5x$

দেওয়া আছে,

$$g(x) = \frac{BC}{\log_5 BC} = \frac{5x}{\log_5 5x} = \frac{5x.\ln 5}{\ln 5x}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{\ln(5x)5\ln 5 - 5x(\ln 5)\times\frac{1}{5x}\times 5}{(\ln 5x)^2}$$

$$= \frac{5(\ln 5).\ln 5x - 5\ln 5}{(\ln 5x)^2}$$

$$\Rightarrow g''(x) = \frac{(\ln 5x)^2\left\{5\ln 5\times\frac{1}{5x}\times 5 - 0\right\} - (5\ln 5.\ln 5x - 5\ln 5).2(\ln 5x)\frac{1}{x}}{\{(\ln 5x)^2\}^2}$$

$$= \frac{(\ln 5x)^2\frac{5}{x}\ln 5 - 10\ln 5(\ln 5x - 1)\times\frac{1}{x}\ln 5x}{(\ln 5x)^4}$$

গুরুমান ও লঘুমানের জন্য,

$g'(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{5\ln 5.\ln 5x - 5\ln 5}{(\ln 5x)^2} = 0$$

$\Rightarrow 5\ln 5(\ln 5x - 1) = 0$

$\Rightarrow 5x = e$

$\therefore x = \frac{1}{5}e$

$x = \frac{1}{5}e$ হলে,

$$g''\left(\frac{1}{5}e\right) = \frac{1\times 5\frac{5}{e}.\ln 5 - 10\ln 5(1-1)\frac{5}{e}}{1} = \frac{25}{e}\ln 5 > 0$$

$\therefore x = \frac{e}{5}$ এর জন্য g(x) এর লঘুমান বিদ্যামান

লঘুমান, $g\left(\frac{e}{5}\right) = \frac{5\times\frac{e}{5}\ln 5}{1} = e\ln 5$

$\therefore$ নির্ণেয় লঘুমান $e\ln 5$ **(Ans.)**

**গ** চিত্র হতে, $\text{cosec}\,y = \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}$

দেওয়া আছে, cosecy = p

$$\therefore p = \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}$$

এখন, $\sin y = \sqrt{1-25x^2}$

$\Rightarrow y = \sin^{-1}\sqrt{1-25x^2}$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{\sqrt{1-1+25x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-25x^2}}(-50x)$$

[x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{5x} \cdot \frac{-25x}{\sqrt{1-25x^2}}$

$\Rightarrow y_1 = \frac{-5}{\sqrt{1-25x^2}}$

$\Rightarrow y_1^2 = \frac{25}{1-25x^2}$

$\Rightarrow (1-25x^2)y_1^2 = 25$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{(1-25x^2)y_1^2\} = \frac{d}{dx}(25)$

$\Rightarrow (1-25x^2)2y_1y_2 + y_1^2(-50x) = 0$

$\Rightarrow (1-25x^2)y_2 - 25xy_1 = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(1-25x^2)y_2 - \frac{d}{dx}(25xy_1) = 0$ [পুনরায় অন্তরীকরণ করে]

$\Rightarrow (1-25x^2)\frac{d}{dx}(y_2) + y_2\frac{d}{dx}(1-25x^2) - 25(xy_2 + y_1) = 0$

$\Rightarrow (1-25x^2)y_3 + y_2(0-50x) - 25xy_2 - 25y_1 = 0$

$\Rightarrow (1-25x^2)y_3 - 75xy_2 - 25y_1 = 0$

$\Rightarrow 25y_1 + 75xy_2 - (1-25x^2)y_3 = 0$

$\Rightarrow 25y_1 + 75xy_2 + (25x^2 - 1)y_3 = 0$ **(Showed)**

**প্রশ্ন ▶ ৩৭** $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $g(x) = \frac{1}{\tan x}$, $h(x) = \sqrt{a + bcosx}$

**(ক)** $\lim_{x\to 0}(\text{cosec}x - \cot x)$ এর মান নির্ণয় কর। [ব. বো. ১৭]

**(খ)** মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [রা. বো. ১৭]

**(গ)** $y = h(x)$ হলে, দেখাও যে, $2y.\frac{d^2y}{dx^2} + 2.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a$ [য. বো. ১৭]

**সমাধান:**

**ক** $\lim_{x\to 0}(\text{cosec}x - \cot x)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$= \lim_{x\to 0}\tan\frac{x}{2}$

$= \tan\frac{0}{2}$

$= \tan 0$

$= 0$ **(Ans.)**

**খ** ধরি, $M(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\tan x}} = \sec x$

আমরা জানি,

$\frac{d}{dx}\{M(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{M(x+h) - M(x)}{h}$

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}\right]$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos x\cos(x+h)}\right\}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{x+x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h\cos x.\cos(x+h)}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h\cos x.\cos(x+h)}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}}{h} \times \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x.\cos(x+h)}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \frac{\sin\left(x+\frac{0}{2}\right)}{\cos x.\cos(x+0)}$

$= \lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \frac{\sin x}{\cos x.\cos x}$ $\left[h \to 0 \text{ হলে } \frac{h}{2} \to 0\right]$

$= 1 \times \frac{\sin x}{\cos x\cos x}$

$= \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \tan x.\sec x$

$= \sec x\tan x$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $y = h(x)$

$\Rightarrow y = \sqrt{a + bcosx}$

$\Rightarrow y^2 = a + bcosx$

$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -b\sin x$ [উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$\Rightarrow 2\left\{y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}.\frac{dy}{dx}\right\} = -b\frac{d}{dx}(\sin x)$ [পুনরায় অন্তরীকরণ করে]

$\Rightarrow 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -b\cos x$

$\Rightarrow 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b\cos x = 0$

$\Rightarrow 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 - a = 0$ [$\because y^2 = a + bcosx$]

$\therefore 2y.\frac{d^2y}{dx^2} + 2.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a$ **(Showed)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

### বীজগাণিতিক রাশির লিমিট

১। $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}$ = কত? [য. বো. ২৩]

ক $\frac{1}{e}$ খ e

গ $e^5$ ঘ ∞

উত্তর: খ e

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}$

$=e.1^2=e$

২। $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$ এর মান কোনটি? [সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ১৯]

ক ∞ খ 0

গ $\frac{9}{2}$ ঘ 6

উত্তর: গ $\frac{9}{2}$

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{x^2+3x+9}{x+3}=\frac{9}{2}$

বিকল্প পদ্ধতি:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{x^3-27}{x-3}}{\frac{x^2-9}{x-3}}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\frac{x^3-(3)^3}{x-3}}{\frac{x^2-(3)^2}{x-3}}$$

$$=\frac{3\times(3)^{3-1}}{2\times(3)^{2-1}}$$

$$=\frac{27}{6}$$

$$=\frac{9}{2}$$

৩। $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{2x^2-4x+2}$ এর মান কত?

[ব. বো. ২৩: অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২৩; দি. বো. ২১, ১৭; ঢা. বো. ২২]

ক 0 খ ∞

গ $\frac{1}{2}$ ঘ 1

উত্তর: ঘ 1

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}$

$=\frac{2+0+0}{2-0+0}$

$=1$

**Shortcut:** $\frac{\text{সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ}}{\text{সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ}}=\frac{2}{2}=1$

৪। $\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+3x+4}}$ এর মান কত? [ঢা. বো. ২২]

ক $-\infty$ খ $-1$

গ 1 ঘ 4

উত্তর: খ $-1$

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}$

$=-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{\infty}+\frac{4}{\infty}}}$ $\left[\because\frac{\text{something}}{\infty}=0\right]$

$=-1$

৫। $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}=?$ [রা. বো. ২১]

ক 0 খ 1

গ e ঘ $e^2$

উত্তর: গ e

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}$ | $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$=e$

৬। $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{5x^2-6}$ = কত? [দি. বো. ২১]

ক $\frac{1}{5}$ খ $\frac{2}{5}$

গ $-\frac{1}{6}$ ঘ 0

উত্তর: ঘ 0

ব্যাখ্যা: $\frac{\text{সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ}}{\text{সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ}}=\frac{0}{5}=0$

৭। $\lim_{x\to\infty}x\sin\left(\frac{2}{x}\right)=?$ [ম. বো. ২১]

ক ∞ খ 0

গ $\frac{1}{2}$ ঘ 2

উত্তর: ঘ 2

ADMISSION STUFFS

ADMISSION STUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{2}{x}$ | ধরি, $\frac{2}{x} = h$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \times \sinh$ | $x \to \infty$ হলে, $h \to 0$

$= 2 \lim_{h\to 0} \frac{\sinh}{h} = 2$

**Or,** Using Calculator in Radian Mode

৮। f(x) ফাংশন x = b বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হলে– [ব. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ১৭]

(i) f(b) সংজ্ঞায়িত হয়

(ii) $\lim_{x\to b} f(x)$ বিদ্যমান থাকে না

(iii) $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$ হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) সঠিক।

(ii) বিদ্যমান থাকে।

(iii) সঠিক।

৯। যদি $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ হয়– [ম. বো. ২১]

(i) $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = l - m$

(ii) $\lim_{x\to a} g(x)\, f(x) = ml$

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{l}{m}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = l - m$

(ii) $\lim_{x\to a} g(x)\, f(x) = \lim_{x\to a} g(x) . \lim_{x\to a} f(x) = ml$

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to a} g(x)}{\lim_{x\to a} f(x)} = \frac{m}{l}$

১০। নিচের কোনটি অসীম লিমিট? [কু. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ১৭]

ক $\lim_{x\to 0} \frac{2}{5x^3}$ খ $\lim_{x\to 0} e^{-3x}$

গ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{4^x}$ ঘ $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{5x^4}$

উত্তর: ক $\lim_{x\to 0} \frac{2}{5x^3}$

ব্যাখ্যা: Limit এর মান বসিয়ে দেখি ∞ আসে কিনা।

$\lim_{x\to 0} \frac{2}{5x^3} = \frac{2}{5} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}$

$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{0}$

$= \infty$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$X, Y \subset \mathbb{R}$ এবং $f: x \to Y$ যেখানে $f(x) = \frac{2x-3}{4x+5}$

১১। $\lim_{x\to\infty} f(x)$ এর মান কত? [দি. বো. ১৯]

ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{3}{5}$

গ $-\frac{1}{2}$ ঘ $-\frac{3}{5}$

উত্তর: ক $\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা: **Shortcut:** $\frac{\text{সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ}}{\text{সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

## ত্রিকোণমিতিক রাশির লিমিট

১২। $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}\frac{x}{2}}{3x}$ = কত? [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২, ২১; ঢা. বো. ২১; য. বো. ২১; চ. বো. ২১]

ক $\frac{1}{6}$ খ $\frac{1}{3}$

গ $\frac{1}{2}$ ঘ $\frac{3}{2}$

উত্তর: ক $\frac{1}{6}$

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}\frac{x}{2}}{3x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}\frac{x}{2}}{6\frac{x}{2}} = \frac{1}{6} \lim_{\frac{x}{2}\to 0} \left(\frac{\tan^{-1}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$

**Shortcut:** $\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$

১৩। $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ এর মান কত? [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১]

ক 2 খ $\frac{1}{2}$

গ $\frac{1}{4}$ ঘ $-\frac{1}{2}$

উত্তর: খ $\frac{1}{2}$

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \times \frac{1}{2} = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

১৪। $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x}$ এর মান নিচের কোনটি? [ম. বো. ২৩]

ক 0 খ 1

গ $-1$ ঘ $\frac{1}{2}$

উত্তর: ঘ $\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{2}$

বিকল্প পদ্ধতি:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

১৫। $\lim_{x\to 0}\frac{\tan bx}{\sin ax}$ এর মান কত? [চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ১৯]

ক $\frac{a}{b}$ খ $ab$

গ $\frac{b}{a}$ ঘ $ab^2$

উত্তর: গ $\frac{b}{a}$

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan bx}{\sin ax}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan bx}{bx}\times b}{\frac{\sin ax}{ax}\times a}$

$= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\tan bx}{bx}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}\cdot\frac{b}{a}$

$= \frac{b}{a}$

১৬। $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ এর মান কত? [সি. বো. ২২]

ক $\frac{1}{2}$ খ $-2$

গ 2 ঘ 1

উত্তর: ঘ 1

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x})(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\sin x})^2-(\sqrt{1-\sin x})^2}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$

$= 2\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}$

$= 2\times 1\times\frac{1}{1+1}$

$= 1$

বিকল্প পদ্ধতি:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\sin x}}(\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{1-\sin x}}(-\cos x)}{1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+0}}\times 1+\frac{1}{2\sqrt{1-0}}\times 1}{1} = 1$$

**Or,** Using Calculator in Radian Mode

১৭। $\lim_{x\to 0}\frac{x(\sin 2x+\sin 3x)}{\sin x}$ এর মান- [ম. বো. ২২]

ক $-2$ খ $-1$

গ 0 ঘ 1

উত্তর: গ 0

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to 0}\frac{x(\sin 2x+\sin 3x)}{\sin x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}(\sin 2x+\sin 3x)$

$= 1\times(0+0)$

$= 0$

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



১৮। $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} =$ কত? [ঢা. বো. ২১]

ক $-2$ খ $0$

গ $2$ ঘ $\infty$

উত্তর: ক $-2$

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$

$= \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos x}{\cos x}$

$= \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} 2\sin x$

$= 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$= -2$

**Or,** Using Calculator in Radian Mode

১৯। $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ এর মান কত? [কু. বো. ২১]

ক $2\sqrt{2}$ খ $\sqrt{2}$

গ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ঘ $0$

উত্তর: খ $\sqrt{2}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator in Radian Mode

**Or,** $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}$

$= \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{2}\sin x}{x}$

$= \sqrt{2}.\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}$

$= \sqrt{2} \times 1$

$= \sqrt{2}$

২০। $\lim_{x\to0} \frac{\tan^{-1}2x}{3x}$ এর মান কত? [সি. বো. ২১]

ক $-\frac{3}{2}$ খ $-\frac{2}{3}$

গ $\frac{2}{3}$ ঘ $\frac{3}{2}$

উত্তর: গ $\frac{2}{3}$

ব্যাখ্যা: **Shortcut:** $\frac{2}{3}$

বিকল্প পদ্ধতি: $\lim_{x\to0} \frac{\tan^{-1}2x}{3x}$

$= \lim_{x\to0} \frac{\tan^{-1}2x}{2x} \cdot \frac{2}{3}$

$= 1 \times \frac{2}{3}$

$= \frac{2}{3}$

২১। $\lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{x\cos 3x}$ এর মান– [ঢা. বো. ১৯]

ক $3$ খ $2$

গ $\frac{2}{3}$ ঘ $\frac{1}{2}$

উত্তর: খ $2$

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{x\cos 3x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{2x\cos 3x} \times 2$

$= 2.\lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x\to0} \frac{1}{\cos 3x}$

$= 2$

২২। $\lim_{x\to0} \frac{\sin 2x^\circ}{x}$ এর মান কোনটি? [রা. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২১]

ক $\frac{\pi}{180}$ খ $\frac{\pi}{90}$

গ $\frac{\pi}{2}$ ঘ $\frac{90}{\pi}$

উত্তর: খ $\frac{\pi}{90}$

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to0} \frac{\sin\left(2 \times \frac{x\pi}{180}\right)}{x}$

$= \lim_{x\to0} \frac{\sin \frac{2\pi x}{180}}{\frac{2\pi x}{180} \times \frac{180}{2\pi}}$

$= \frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ Radian

**Or,** Using Calculator in Radian Mode

২৩। $\lim_{x\to0} \frac{\sin mx}{x} =$ কত? [সি. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ১৯; চ. বো. ১৭]

ক $0$ খ $\infty$

গ $m$ ঘ $\frac{1}{m}$

উত্তর: গ $m$

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to0} \frac{\sin mx}{x} = \lim_{mx\to0} \frac{\sin mx}{mx} \times m = m$

## সূচক, লগারিদম ও ধারার লিমিট

২৪। $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1-3x)}{3x} =$ কত? [চ. বো. ২৩]

ক $1$ খ $\frac{1}{3}$

গ $-1$ ঘ $-3$

উত্তর: গ $-1$

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to0} \frac{\frac{-3}{1-3x}}{3}$ [L' Hôpital's Rule]

$= \frac{-3}{3} = -1$

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



২৫। $\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}+7^{n+1}}{5^n-7^n}$ এর মান নিচের কোনটি? [রা. বো. ২২]

ক $-7$ খ $-5$
গ 5 ঘ 7

উত্তর: ক $-7$

ব্যাখ্যা: $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n\times 5+7^n\times 7}{5^n-7^n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{7^n\left(5\times\frac{5^n}{7^n}+7\right)}{7^n\left(\frac{5^n}{7^n}-1\right)}$

$= \lim_{\left(\frac{5}{7}\right)^n\to 0} \frac{5\times\left(\frac{5}{7}\right)^n+7}{\left(\frac{5}{7}\right)^n-1}$

$= \frac{7}{-1} = -7$

$n\to\infty$ হলে $\left(\frac{5}{7}\right)^n\to 0$ হবে

২৬। $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} =$ কত? [ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২]

ক $-1$ খ 0
গ 1 ঘ $\frac{1}{2}$

উত্তর: গ 1

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ [Using L' Hôpital's Rule]

২৭। $\lim_{x\to 0} 2\ln(1+x)-\ln(1-x)$ এর মান– [ম. বো. ২২]

ক 0 খ 1
গ 2 ঘ $\infty$

উত্তর: ক 0

ব্যাখ্যা: xএর মান বসিয়ে, $2\ln(1+0)-\ln(1-0)$

$= 2\times 0-0 = 0$

২৮। $\lim_{x\to\infty} \frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}$ এর মান কোনটি? [এইচএসসি পরীক্ষা, '১৮]

ক $-5$ খ $-2$
গ 1 ঘ 5

উত্তর: গ 1

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to\infty} \frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5^x-\frac{1}{5^x}}{5^x+\frac{1}{5^x}}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{5^x\left\{1-\left(\frac{1}{5^x}\right)^2\right\}}{5^x\left\{1+\left(\frac{1}{5^x}\right)^2\right\}}$

$= 1$

২৯। $\lim_{x\to\infty} \frac{3^{x+1}-3^{-x}}{4.3^x+3^{-x}}$ এর মান কত? [সি. বো. ১৭]

ক $\frac{1}{4}$ খ $\frac{3}{4}$
গ 1 ঘ $\infty$

উত্তর: খ $\frac{3}{4}$

ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x.3-3^{-x}}{4.3^x+3^{-x}}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{3^x.3-\frac{1}{3^x}}{4.3^x+\frac{1}{3^x}}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{3^x\left(3-\frac{1}{(3^x)^2}\right)}{3^x\left(4+\frac{1}{(3^x)^2}\right)}$

$= \frac{3-0}{4+0} = \frac{3}{4}$

## সূত্রের সাহায্যে অন্তরক সহগ নির্ণয়

৩০। $\frac{d}{dx}(3^x) =$ কত? [ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২; ঢা. বো. ২১, ১৯; ব. বো. ২১; দি. বো. ২১; চ. বো. ১৭]

ক $x3^{x-1}$ খ $3^x$
গ $3\ln x$ ঘ $3^x\ln 3$

উত্তর: ঘ $3^x\ln 3$

ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\ln a$

$\therefore \frac{d}{dx}(3^x) = 3^x\ln 3$

৩১। $\frac{d}{dx}(\log_a 2x) =$ কত? [কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২, ২১]

ক $\frac{1}{x}$ খ $\frac{1}{x}\log_e a$
গ $\frac{1}{x}\log_a e$ ঘ $\frac{1}{2x}\log a$

উত্তর: গ $\frac{1}{x}\log_a e$

ব্যাখ্যা: $\log_a 2x = \frac{\ln 2x}{\ln a}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln a}\times\frac{2}{2x} = \frac{1}{x\ln a} = \frac{1}{x}\log_a e$

৩২। $y^2 = x$ হলে $y_1$ নিচের কোনটি? [কু. বো. ২২]

ক $2y$ খ $2x$
গ $2\sqrt{x}$ ঘ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

উত্তর: ঘ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ব্যাখ্যা: $y^2 = x$

$\Rightarrow y = \sqrt{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৩৩। $\sec^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ এর অন্তরক সহগ কত? [চ. বো. ২২]

ক $\frac{1}{(x\sqrt{x^2-1})}$ খ $\frac{-2}{(\sqrt{1-x^2})}$

গ $\frac{1}{(1+x^2)}$ ঘ $\frac{2}{(1+x^2)}$

উত্তর: ঘ $\frac{2}{(1+x^2)}$

ব্যাখ্যা: $\sec^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\tan^{-1}x$

$\frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x) = \frac{2}{1+x^2}$

৩৪। $f(x) = 5$ হলে $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = ?$ [চ. বো. ২২]

ক $-1$ খ $0$

গ $1$ ঘ $\infty$

উত্তর: খ $0$

ব্যাখ্যা: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = \frac{d}{dx}\{f(x)\}$

এখন, $f(x) = 5$

$\therefore f'(x) = 0$

৩৫। দূরত্ব $s = 5t^3 - 9t^2 + 3t + 2$ হলে $t = 4$ s সময় পর বেগ কত একক হবে? [সি. বো. ২২]

ক 71 খ 171

গ 243 ঘ 343

উত্তর: খ 171

ব্যাখ্যা: $v = \frac{ds}{dt} = 15t^2 - 18t + 3$

4s পর $v = 15 \times 4^2 - 18 \times 4 + 3 = 171$

৩৬। $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x)$ এর মান কোনটি? [দি. বো. ২২]

ক $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ খ $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

গ $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ ঘ $\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

উত্তর: খ $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

ব্যাখ্যা: $\text{cosec}^{-1}x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

৩৭। $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ এবং $g(x) = \sin^{-1}(\sin\sqrt{x})$ হলে– [দি. বো. ২২]

(i) $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

(ii) $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(iii) $f(1) = \frac{\pi}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ i ও iii

ব্যাখ্যা: $f(x) = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = 2\tan^{-1}x$

(i) $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

(ii) $g(x) = \sin^{-1}(\sin\sqrt{x}) = \sqrt{x}$

$\therefore g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(iii) $f(x) = 2\tan^{-1}x$

$\therefore f(1) = 2\tan^{-1}1 = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

৩৮। $\frac{d}{dx}(x^{-9}) =$ কত? [ঢা. বো. ২১]

ক $-9x^8$ খ $-\frac{1}{9}x^{10}$

গ $-9x^{-10}$ ঘ $-\frac{1}{8}x^8$

উত্তর: গ $-9x^{-10}$

ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}(x^{-9}) = -9x^{-10}$

৩৯। $\frac{d}{dx}(a^{10})$ এর মান কোনটি? [য. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ১৭]

ক 0 খ $a^{10}$

গ $10a^9$ ঘ $a^{10}\ln a$

উত্তর: ক 0

ব্যাখ্যা: $a^{10}$ হল ধ্রুবক।

$\therefore \frac{d}{dx}(a^{10}) = 0$

৪০। $y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [ঢা. বো. ১৯]

ক $\frac{1}{1+x^2}$ খ $-\frac{1}{1+x^2}$

গ $\frac{1}{1+x}$ ঘ $-\frac{1}{1+x}$

উত্তর: ক $\frac{1}{1+x^2}$

ব্যাখ্যা: $y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1}1 + \tan^{-1}x$

$= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

৪১। $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x+\cos x}\right) = ?$ [ব. বো. ১৭]

ক 1 খ 0

গ $2\sin 2x$ ঘ $2\cos 2x$

উত্তর: খ 0

ব্যাখ্যা: $\sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{\cos^2x + \sin^2x + 2\sin x.\cos x}$

$= \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}$

$= \sin x + \cos x$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\right) = \frac{d}{dx}(1) = 0$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## চেইন রুল সংক্রান্ত

৪২। $\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{2x-3}}\right)$ = কত? [ঢা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৭; চ. বো. ১৯]

ক $\sqrt{2}\left(e^{\sqrt{2x-3}}\right)$ খ $\frac{\left(e^{\sqrt{2x-3}}\right)}{\sqrt{2}}$

গ $\frac{e^{\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{2x}}$ ঘ $\frac{\sqrt{2}\left(e^{\sqrt{2x-3}}\right)}{\sqrt{x}}$

উত্তর: গ $\frac{e^{\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{2x}}$

ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}e^{\sqrt{2x-3}} = e^{\sqrt{2x-3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2$

$= \frac{e^{\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{2x}}$

৪৩। $f(1) = 6, f'(1) = 3$ হলে, $x = 0$ বিন্দুতে $\frac{d}{dx}\{\log f(e^x)\}$ এর মান কোনটি? [ঢা. বো. ২৩]

ক 2 খ 1

গ $\frac{1}{2}$ ঘ 0

উত্তর: গ $\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}\log\{f(e^x)\} = \frac{1}{f(e^x)}f'(e^x)$

$x = 0$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(e^0)}f'(e^0) = \frac{1}{f(1)}f'(1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

৪৪। $\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$ এর মান কোনটি? [দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ১৯]

ক $-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ খ $-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$

গ $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ ঘ $\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$

উত্তর: গ $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$

ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$

$= -\sin\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$

$= -\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}(x^{-1})$

$= -\sin\frac{1}{x}\cdot(-1)x^{-1-1}$

$= \sin\frac{1}{x}\cdot x^{-2}$

$= \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}$

$= \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$

৪৫। $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ হলে, $f'(x)$ এর মান কত? [ম. বো. ২৩]

ক $2\tan\frac{x}{2}$ খ $\sec^2\frac{x}{2}$

গ $\tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}$ ঘ $2\tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}$

উত্তর: গ $\tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}$

ব্যাখ্যা: $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$= \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \tan^2\frac{x}{2}$

$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\tan^2\frac{x}{2}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left\{\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\right\}$

$= 2\tan\frac{x}{2}\frac{d}{dx}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

$= 2\tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)$

$= 2\tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$= \tan\frac{x}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2}$

৪৬। $\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(e^x)\}$ = কত? [ঢা. বো. ২৩]

ক $\frac{e^x}{1+e^{x^2}}$ খ $\frac{1}{1+e^x}$

গ $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ ঘ $\frac{1}{1+e^{x^2}}$

উত্তর: গ $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$

ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(e^x) = \frac{1}{1+(e^x)^2}e^x = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

৪৭। $y = \tan^{-1}\frac{4x}{1-4x^2}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ = কত? [ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১; দি. বো. ১৯]

ক $\frac{2}{1+4x^2}$ খ $\frac{2}{1-4x^2}$

গ $\frac{4}{1-4x^2}$ ঘ $\frac{4}{1+4x^2}$

উত্তর: ঘ $\frac{4}{1+4x^2}$

ব্যাখ্যা: $y = \tan^{-1}\frac{2.2x}{1-(2x)^2} = 2\tan^{-1}2x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{1+(2x)^2}\frac{d}{dx}(2x) = \frac{4}{1+4x^2}$

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৪৮। $\sin^{-1}2x$ এর অন্তরজ কত? [দ. বো. ২৩]

ⓚ $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ ⓛ $\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

ⓜ $\frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$ ⓝ $\frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}}$

উত্তর: ⓚ $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}2x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\frac{d}{dx}(2x)$

$= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

৪৯। x-এর সাপেক্ষে $e^{\sin^2 x}$ এর অন্তরজ কোনটি? [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ১৭]

ⓚ $e^{\sin^2 x}.\sin 2x$ ⓛ $2e^{\sin^2 x}.\sin x$

ⓜ $-e^{\sin^2 x}.\sin 2x$ ⓝ $e^{\sin^2 x}$

উত্তর: ⓚ $e^{\sin^2 x}.\sin 2x$

ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}(e^{\sin^2 x})$

$= e^{\sin^2 x}.2\sin x.\cos x$

$= e^{\sin^2 x}.\sin 2x$

৫০। $y = \sin^2 x^2$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [য. বো. ২২]

ⓚ $2\sin x^2$ ⓛ $2x\sin x^2$

ⓜ $2x\sin 2x^2$ ⓝ $2x^2\sin 2x^2$

উত্তর: ⓜ $2x\sin 2x^2$

ব্যাখ্যা: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x^2)^2 = 2\sin x^2.\cos x^2.2x$

$= 2x.\sin 2x^2$ [$\because 2\sin\theta.\cos\theta = \sin 2\theta$]

৫১। $y = (x^2+1)\tan^{-1}x - x$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [য. বো. ২২]

ⓚ $2\tan^{-1}x$ ⓛ $2x\tan^{-1}x$

ⓜ $x\tan^{-1}x$ ⓝ $\frac{2x}{1+x^2}$

উত্তর: ⓛ $2x\tan^{-1}x$

ব্যাখ্যা: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{(x^2+1)\tan^{-1}x - x\}$

$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)\frac{1}{(1+x^2)} + \tan^{-1}x\,(2x+0) - 1$

$= 1 + 2x\tan^{-1}x - 1$

$= 2x\tan^{-1}x$

৫২। $y = \sqrt{\sec 2x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ কোনটি? [ব. বো. ২২]

ⓚ $y\tan 2x$ ⓛ $2\tan 2x$

ⓜ $\frac{\tan 2x}{2}$ ⓝ $y\cot 2x$

উত্তর: ⓚ $y\tan 2x$

ব্যাখ্যা: $y = \sqrt{\sec 2x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\sec 2x}}\frac{d}{dx}(\sec 2x)$

$= \frac{1\times \sec 2x\tan 2x\times 2}{2\sqrt{\sec 2x}}$

$= \tan 2x.\sqrt{\sec 2x}\ [y = \sqrt{\sec 2x}]$

$= y\tan 2x$

৫৩। $\frac{d}{dx}\cot(2\sqrt{x}) =$ কত? [ঢা. বো. ২১]

ⓚ $\frac{-\operatorname{cosec}^2(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ ⓛ $\frac{-\operatorname{cosec}^2(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

ⓜ $-\operatorname{cosec}^2(2\sqrt{x})$ ⓝ $\frac{\operatorname{cosec}^2(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

উত্তর: ⓛ $\frac{-\operatorname{cosec}^2(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}(\cot(2\sqrt{x}))$

$= -\operatorname{cosec}^2(2\sqrt{x})\frac{d}{dx}(2\sqrt{x})$

$= -\operatorname{cosec}^2(2\sqrt{x})\,2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\operatorname{cosec}^2(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

৫৪। $\cos\sqrt{x}$ এর অন্তরক সহগ কোনটি? [কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৭]

ⓚ $-\sin\sqrt{x}$ ⓛ $-\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

ⓜ $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ⓝ $-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

উত্তর: ⓝ $-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

ব্যাখ্যা: $y = \cos\sqrt{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin\sqrt{x}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

৫৫। $\frac{d}{dx}(\cos 7x°) =$ কত? [য. বো. ২১]

ⓚ $\sin 7x°$ ⓛ $-7\sin 7x°$

ⓜ $-\frac{7\pi}{180}\sin 7x°$ ⓝ $\frac{7\pi}{180}\sin 7x°$

উত্তর: ⓜ $-\frac{7\pi}{180}\sin 7x°$

ব্যাখ্যা: $1° = \frac{\pi}{180}$ Radian

$x° = \frac{\pi x}{180}$ Radian

$\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{7\pi x}{180}\right) = -\frac{7\pi}{180}\sin\frac{7\pi x}{180}$

$= -\frac{7\pi}{180}\sin 7x°$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৫৬। x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}3x$ এর অন্তরজ– [চ. বো. ২১]

ⓚ $\frac{1}{1+3x^2}$ ⓛ $\frac{3}{1+3x^2}$

ⓜ $\frac{1}{1+9x^2}$ ⓝ $\frac{3}{1+9x^2}$

উত্তর: ⓝ $\frac{3}{1+9x^2}$

ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}3x)$

$= \frac{1}{1+(3x)^2} \times \frac{d}{dx}(3x)$

$= \frac{3}{1+9x^2}$

৫৭। x-এর সাপেক্ষে $\ln ax$-এর অন্তরজ– [চ. বো. ২১]

ⓚ $\frac{a}{x}$ ⓛ $\frac{x}{a}$

ⓜ $\frac{1}{x}$ ⓝ $\frac{1}{ax}$

উত্তর: ⓜ $\frac{1}{x}$

ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}(\ln ax)$

$= \frac{1}{ax} \times a = \frac{1}{x}$

৫৮। $y = e^{-\frac{3}{2}x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ = কত? [চ. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১]

ⓚ $-\frac{3}{2}e^{-\frac{3x}{2}}$ ⓛ $\frac{3}{2}e^{-\frac{3x}{2}}$

ⓜ $\frac{2}{3}e^{-\frac{3x}{2}}$ ⓝ $-\frac{2}{3}e^{-\frac{3x}{2}}$

উত্তর: ⓚ $-\frac{3}{2}e^{-\frac{3x}{2}}$

ব্যাখ্যা: $y = e^{-\frac{3x}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = e^{-\frac{3x}{2}} \times \left(-\frac{3}{2}\right)$

$= -\frac{3}{2}e^{-\frac{3x}{2}}$

৫৯। $y = \sin\sqrt{x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [য. বো. ১৯]

ⓚ $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ ⓛ $\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

ⓜ $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ⓝ $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

উত্তর: ⓚ $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

ব্যাখ্যা: $\frac{dy}{dx} = \cos\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

৬০। $f(x) = \ln(\ln 2x)$ হলে $f'(x)$ = কত? [ব. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২১]

ⓚ $\frac{1}{\ln 2x}$ ⓛ $\frac{1}{2x}$

ⓜ $\frac{1}{x\ln 2x}$ ⓝ $\frac{1}{2x\ln 2x}$

উত্তর: ⓜ $\frac{1}{x\ln 2x}$

ব্যাখ্যা: $f(x) = \ln(\ln 2x)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln 2x} \times \frac{1}{2x} \times 2 = \frac{1}{x\ln 2x}$

৬১। যদি $f(x) = \sin x$ হয় তবে $f(\cos^{-1}x)$ এর অন্তরজ কোনটি? [ব. বো. ১৯]

ⓚ $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ ⓛ $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

ⓜ $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ⓝ $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

উত্তর: ⓝ $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

ব্যাখ্যা: $f(x) = \sin x$

$f(\cos^{-1}x) = \sin(\cos^{-1}x)$

$\therefore f'(\cos^{-1}x) = \cos\cos^{-1}x.\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

## $a^u$ বা $u^v$ আকারের ফাংশনের অন্তরক সহগ

৬২। $\frac{d}{dx}(x^{2x})$ = কত? [য. বো. ২৩]

ⓚ $2x.x^{2x-1}$ ⓛ $\frac{x^{2x}+1}{2x+1}$

ⓜ $x^x(1+\ln 2x)$ ⓝ $x^{2x}(2+2\ln x)$

উত্তর: ⓝ $x^{2x}(2+2\ln x)$

ব্যাখ্যা: $x^{2x} = e^{\ln x^{2x}}$ [$\because e^{\ln a} = a$]

$x^{2x} = e^{2x\ln x}$

$\therefore \frac{d}{dx}\{e^{2x\ln(x)}\}$

$= e^{2x\ln(x)} \frac{d}{dx}\{2x\ln(x)\}$

$= e^{2x\ln(x)}\left\{2\ln(x) + 2x.\frac{1}{x}\right\}$

$= e^{2x\ln(x)}(2+2\ln x)$

$= x^{2x}(2+2\ln x)$

৬৩। $y = x^{-\frac{1}{x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ = ? [সি. বো. ২৩]

ⓚ $x^{-2-\frac{1}{x}}(1-\ln x)$ ⓛ $x^{\frac{1}{x}+2}(\ln x - 1)$

ⓜ $x^{-2+\frac{1}{x}}(1-\ln x)$ ⓝ $x^{-2-\frac{1}{x}}(\ln x - 1)$

উত্তর: ⓝ $x^{-2-\frac{1}{x}}(\ln x - 1)$

ADMISSION STUFFS
ADMISSIONSTUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: $y = x^{-\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow \ln y = -\frac{1}{x}\ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\left[\ln x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\ln x)\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\left[\ln x.(-1)x^{-2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\left[-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ln x\right]$

$= y\left[\frac{1}{x^2}\ln x - \frac{1}{x^2}\right]$

$= y\frac{1}{x^2}(\ln x - 1)$

$= x^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}(\ln x - 1)$

$= x^{-2-\frac{1}{x}}(\ln x - 1)$

**৬৪। $y = \ln e^{x^2}$ হলে $y_2 = ?$** [রা. বো. ২৩]

ক) $2x$ খ) $e^{x^2}\ln e^{x^2}$

গ) $2$ ঘ) $e^{x^2}$

উত্তর: গ) $2$

ব্যাখ্যা: $y = \ln e^{x^2} = x^2.1$ $[\because \ln e = 1]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y_1 = 2x$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(y_1) = y_2 = 2$

**৬৫। $\frac{d}{dx}(x^{x^2}) = ?$** [ম. বো. ২১]

ক) $x^{x^2}2(1 + \ln x)$ খ) $x^{x^2}2x(1 + \ln x)$

গ) $x^{x^2}(x + 2x\ln x)$ ঘ) $x^{x^2-1}\cdot 2x$

উত্তর: গ) $x^{x^2}(x + 2x\ln x)$

ব্যাখ্যা: $x^{x^2} = e^{\ln x^{x^2}}$

$= e^{x^2\ln x}\left(\ln x.2x + x^2.\frac{1}{x}\right)$

$= e^{x^2\ln x}(2x\ln x + x)$

$= x^{x^2}(x + 2x\ln x)$

## পর্যায়ক্রমিক অন্তরজ

**৬৬। যদি $y = \sec x$ হয় তবে $y_2 + y$ এর মান কোনটি?** [কু. বো. ২৩]

ক) $2$ খ) $2y$

গ) $2y^2$ ঘ) $2y^3$

উত্তর: ঘ) $2y^3$

ব্যাখ্যা: $y = \sec x$

$\Rightarrow y_1 = \sec x\tan x$ $\left[\because \frac{dy}{dx} = y_1\right]$

$\Rightarrow y_2 = \sec x.\sec^2 x + \tan x.\sec x.\tan x$

$= \sec^3 x + \tan^2 x.\sec x$

$= \sec^3 x + \sec x(\sec^2 x - 1)$

$= y^3 + y(y^2 - 1)$

$\Rightarrow y_2 = 2y^3 - y$

$\Rightarrow y_2 + y = 2y^3$

**৬৭। $\cos(ax + b)$ এর n-তম অন্তরক সহগ কত?**
[চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৯]

ক) $(-1)^n a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

খ) $a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

গ) $\cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

ঘ) $a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

উত্তর: ঘ) $a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

ব্যাখ্যা: $y = \cos(ax + b)$

$y_1 = -\sin(ax + b).a$

$= -a\sin(ax + b)$

$= a\cos\left\{\frac{\pi}{2} + (ax + b)\right\}$

$y_2 = -a.a\cos(ax + b)$

$= -a^2\cos(ax + b)$

$= a^2\cos\left\{2\times\frac{\pi}{2} + (ax + b)\right\}$

$\therefore y_n = a^n\cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$ [মনে রেখো]

**৬৮। $y = \frac{2}{3x}$ হলে, $y_3$ = কত?** [ব. বো. ২২]

ক) $-\frac{4}{x^4}$ খ) $\frac{4}{x^4}$

গ) $4x^4$ ঘ) $-4x^4$

উত্তর: ক) $-\frac{4}{x^4}$

ব্যাখ্যা: $y = \frac{2}{3x}$

$y = \frac{2}{3}x^{-1}$

$y_1 = -\frac{2}{3}x^{-2}$

$y_2 = -\frac{2}{3}\times(-2)x^{-3}$

$y_3 = -\frac{2}{3}\times(-2)(-3)\times x^{-4} = -\frac{4}{x^4}$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৬৯। $\frac{d^n}{dx^n}(\sin 2x) = ?$ [সি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২১]

ক $2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)$ খ $\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)$

গ $2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} - 2x\right)$ ঘ $\sin\left(\frac{n\pi}{2} - 2x\right)$

উত্তর: ক $2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)$

ব্যাখ্যা: $y = \sin 2x$

$\Rightarrow y_1 = 2\cos 2x = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$

$\Rightarrow y_2 = 2(-\sin 2x).2$

$= -2^2.\sin 2x$

$= 2^2 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} + 2x\right)$

$\Rightarrow y_n = 2^n \sin\left(n\frac{\pi}{2} + 2x\right)$

সূত্র: $\sin(ax + b)$ এর n তম অন্তরজ $= a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৭০ ও ৭১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = \ln(1 - x)$ এবং $g(x) = \tan x^2$

৭০। $g(x)$ এর অন্তরজ কোনটি? [কু. বো. ২২]

ক $\sec^2 x^2$ খ $2x \sec x^2$

গ $2x \sec^2 x^2$ ঘ $2 \tan x \sec^2 x$

উত্তর: গ $2x \sec^2 x^2$

ব্যাখ্যা: $g(x) = \tan x^2$

$\Rightarrow g'(x) = \sec^2 x^2 \times 2x = 2x \sec^2 x^2$

৭১। $f''(2)$ এর মান কত? [কু. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২১]

ক $-2$ খ $-1$

গ $1$ ঘ $2$

উত্তর: খ $-1$

ব্যাখ্যা: $f(x) = \ln(1 - x)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x} \times (-1)$

$= (-1)(1 - x)^{-1}$

$\therefore f''(x) = (-1)(-1)(1 - x)^{-2}.(-1)$

$= -(1 - x)^{-2}$

$= -\frac{1}{(1-x)^2}$

$\therefore f''(2) = \frac{-1}{(1-2)^2} = -1$

৭২। $\frac{d^{10}}{dx^{10}}(x^{10})$ এর মান কত? [রা. বো. ২১]

ক $10!$ খ $10!.x$

গ $10!.x^2$ ঘ $0$

উত্তর: ক $10!$

ব্যাখ্যা: $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$

$\therefore \frac{d^{10}}{dx^{10}}(x^{10}) = 10!$

৭৩। $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ হলে, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ কত? [ব. বো. ২১]

ক $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$ খ $\frac{-1}{4\sqrt{2}}$

গ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ঘ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

উত্তর: খ $\frac{-1}{4\sqrt{2}}$

ব্যাখ্যা: $f(x) = \sin\frac{x}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}$

$\therefore f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} \times \sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$

৭৪। $\frac{d^7}{dx^7}(5x^6)$ এর মান কত? [দি. বো. ২১]

ক $6!$ খ $7!$

গ $0$ ঘ $30$

উত্তর: গ $0$

ব্যাখ্যা: x এর সর্বোচ্চ ঘাতের চেয়ে বেশি বার অন্তরীকরণ করায় এর মান শূন্য।

৭৫। $y = \sin 2x$ হলে– [কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২]

(i) $y_1 = 2\cos 2x$

(ii) $y_2 + 4y = 0$

(iii) $y_3 - 4y_1 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: i) $y = \sin 2x$

$\Rightarrow y_1 = 2\cos 2x$

ii) $y_2 = -4\sin 2x$

$y_2 + 4y = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$

iii) $y_3 = -8\cos 2x$

$y_3 - 4y_1 = -8\cos 2x - 8\cos 2x = -16\cos 2x$

৭৬। $y = ne^{-nx}$ হলে $y_3$ কোনটি? [কু. বো. ১৯]

ক $-n^4e^{-nx}$ খ $-n^3e^{-nx}$

গ $n^4e^{-nx}$ ঘ $ne^{-nx}$

উত্তর: ক $-n^4e^{-nx}$

ব্যাখ্যা: $y = ne^{-nx}$

$\Rightarrow y_1 = -n^2e^{-nx}$

$\Rightarrow y_2 = n^3e^{-nx}$

$\Rightarrow y_3 = -n^4e^{-nx}$

ADMISSION STUFFS

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৭৭। $y = \frac{1}{x}$ হলে, $y_3$ = কত? [সি. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ১৯]

ক $-\frac{6}{x^4}$ খ $\frac{6}{x^4}$

গ $6x^4$ ঘ $-6x^4$

উত্তর: ক $-\frac{6}{x^4}$

ব্যাখ্যা: $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\Rightarrow y_1 = (-1)x^{-2}; y_2 = (-1)(-2)x^{-3} = 2x^{-3}$

$\Rightarrow y_3 = 2(-3)x^{-4} = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$

৭৮। $y = e^{-x}$ হলে $y_5$ কোনটি? [সকল বো. ১৮]

ক $-e^{-x}$ খ $e^{-x}$

গ $-5e^{-x}$ ঘ $5e^{-x}$

উত্তর: ক $-e^{-x}$

ব্যাখ্যা: $y = e^{-x}$

$\Rightarrow y_1 = -e^{-x}$

$\Rightarrow y_2 = e^{-x}$

$\Rightarrow y_3 = -e^{-x}$

$\Rightarrow y_4 = e^{-x}$

$\Rightarrow y_5 = -e^{-x}$

৭৯। $\frac{d^n}{dx^n}(x^n)$ এর মান কোনটি? [দি. বো. ১৭]

ক n! খ x

গ 1 ঘ 0

উত্তর: ক n!

ব্যাখ্যা: $y = x^n$

$\Rightarrow y_1 = nx^{n-1}$

$\Rightarrow y_2 = n(n-1)x^{n-2}$

$\Rightarrow y_3 = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$x^n$ এর n তম অন্তরজ $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$

## পরামিতিক ফাংশন ও অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরজ

৮০। $x^y = e^{x+y}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [কু. বো. ২৩]

ক $\frac{x-y}{x(1-\ln x)}$ খ $\frac{x-y}{x(\ln x-1)}$

গ $\frac{y-x}{x(\ln x-1)}$ ঘ $\frac{x-y}{\ln x-1}$

উত্তর: খ $\frac{x-y}{x(\ln x-1)}$

ব্যাখ্যা: $x^y = e^{x+y}$

$\Rightarrow \ln x^y = \ln e^{x+y}$

$\Rightarrow y\ln x = (x+y)\ln e$

$\Rightarrow y\ln x = (x+y)1$

$\Rightarrow y.\frac{1}{x} + \ln x.\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow (\ln x - 1)\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x} = \frac{x-y}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x(\ln x-1)}$

৮১। $e^{xy+3} = 2$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [দি. বো. ২৩]

ক $-\frac{y}{x}$ খ $-\frac{x}{y}$

গ $\frac{\ln 2}{x}$ ঘ $\frac{\ln 2}{xy}$

উত্তর: ক $-\frac{y}{x}$

ব্যাখ্যা: $e^{xy+3} = 2$

$\Rightarrow \ln e^{(xy+3)} = \ln 2$

$\Rightarrow (xy+3) = \ln 2 \quad [\because \ln e = 1]$

$x\frac{dy}{dx} + y.1 + 0 = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

৮২। $x^y = y^x$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [রা. বো. ২২]

ক $\frac{x(y\ln y - y)}{y(x\ln y - x)}$ খ $\frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$

গ $\frac{y(x\ln y + y)}{x(y\ln x + x)}$ ঘ $\frac{x(y\ln x - y)}{y(x\ln y - x)}$

উত্তর: খ $\frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$

ব্যাখ্যা: $x^y = y^x$

$\Rightarrow \ln x^y = \ln y^x$

$\Rightarrow y\ln x = x\ln y$

$\Rightarrow y \times \frac{1}{x} + \ln x \times \frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \ln y.$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\ln x - \frac{x}{y}\right) = \ln y - \frac{y}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{y\ln x - x}{y}\right) = \frac{x\ln y - y}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\ln y - y}{x} \times \frac{y}{y\ln x - x} = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$

৮৩। $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [রা. বো. ২২]

ক 2 খ $\sqrt{2}$

গ 0 ঘ 1

উত্তর: ঘ 1

ব্যাখ্যা: $y = \tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2} = 2\tan^{-1}t$

$x = \sin^{-1}\frac{2t}{1+t^2} = 2\tan^{-1}t$

$\therefore y = x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 1$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৮৪। যদি $x = a(\theta - \sin\theta)$ এবং $y = a(1 + \cos\theta)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [ব. বো. ২১]

ক $-\cot\frac{\theta}{2}$ খ $-\sin\theta$

গ $1 - \cos\theta$ ঘ $-\tan\frac{\theta}{2}$

উত্তর: ক $-\cot\frac{\theta}{2}$

ব্যাখ্যা: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\{a(1 + \cos\theta)\}$

$= -a\sin\theta$

আবার, $\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\{a(\theta - \sin\theta)\}$

$= a(1 - \cos\theta)$

$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{a(1 - \cos\theta)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-a\sin\theta}{a(1 - \cos\theta)}$

$= \frac{-a.2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{a.2\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$= -\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

$= -\cot\frac{\theta}{2}$

৮৫। $x^3 + x^2y + xy^2 = 0$ একটি– [ব. বো. ১৭]

ক ব্যক্ত ফাংশন খ অব্যক্ত ফাংশন

গ পরামিতিক ফাংশন ঘ সংযোজিত ফাংশন

উত্তর: খ অব্যক্ত ফাংশন

ব্যাখ্যা: অব্যক্ত ফাংশন: যে ফাংশন এ y কে x এর মাধ্যমে বা x কে y এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় না। তাকে অব্যক্ত ফাংশন বলে। অব্যক্ত ফাংশনকে $f(x, y) = 0$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

## স্পর্শক, স্পর্শকের ঢাল ও অভিলম্ব সংক্রান্ত

৮৬। $y = \frac{1}{x^3}$ বক্ররেখার $(-1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত? [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩; দি. বো. ২৩; য. বো. ২১; চ. বো. ২১, ১৯; ব. বো. ২১, ১৯; ম. বো. ২১]

ক $-3$ খ $-1$

গ $1$ ঘ $3$

উত্তর: ক $-3$

ব্যাখ্যা: $y = x^{-3}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -3.x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$

$\therefore (-1, -1)$ বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{(-1)^4} = -3$

৮৭। মূলবিন্দুতে $y = \sin^{-1}\frac{x}{3}$ এর স্পর্শকের সমীকরণ নিচের কোনটি? [রা. বো. ২২]

ক $x - 3y = 0$ খ $x + 3y = 0$

গ $3x + y = 0$ ঘ $3x - y = 0$

উত্তর: ক $x - 3y = 0$

ব্যাখ্যা: $y = \sin^{-1}\frac{x}{3}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}} \times \frac{1}{3}$

মূলবিন্দুতে ঢাল, $\frac{dy}{dx}_{|(0,0)} = \frac{1}{\sqrt{1-0}} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

মূলবিন্দুগামী যেকোনো রেখার সমীকরণ,

$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 0)$

$\Rightarrow 3y = x$

$\Rightarrow x - 3y = 0$

৮৮। $y = x^3 - 8x^2 + 7$ বক্ররেখার $(1, 1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ কোনটি? [রা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২১; দি. বো. ১৯]

ক $13x - y + 12 = 0$ খ $13x + y + 12 = 0$

গ $x + 13y + 12 = 0$ ঘ $x - 13y + 12 = 0$

উত্তর: ঘ $x - 13y + 12 = 0$

ব্যাখ্যা: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 16x$

$(1, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= 3 \times (1)^2 - 16 \times (1) = -13$

$\therefore$ অভিলম্বের ঢাল $= \frac{-1}{-13} = \frac{1}{13}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$y - 1 = \frac{1}{13}(x - 1)$

$\Rightarrow 13y - 13 = x - 1$

$\Rightarrow x - 1 - 13y + 13 = 0$

$\therefore x - 13y + 12 = 0$

৮৯। $y = lnx$ বক্ররেখাটির $x = 1$ বিন্দুতে ঢাল– [ম. বো. ২২]

ক 1 খ 2

গ 3 ঘ 4

উত্তর: ক 1

ব্যাখ্যা: $y = lnx$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$\therefore x = 1$ বিন্দুতে ঢাল, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1} = 1$

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**৯০। A(– 1, 0) বিন্দুটি $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ বক্ররেখার উপর হলে–**
[চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২]

**(i) A বিন্দুতে ঢাল = 8**
**(ii) A বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $8x - y + 8 = 0$**
**(iii) A বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $x - 8y - 1 = 0$**
**নিচের কোনটি সঠিক?**

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** ক i ও ii

**ব্যাখ্যা:** $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 1$

(i) $(-1, 0)$ বিন্দুতে ঢাল বা $\frac{dy}{dx} = 3(-1)^2 - 6(-1) - 1 = 8$

(ii) $y - 0 = 8(x + 1) \therefore 8x - y + 8 = 0$

(iii) আবার, অভিলম্ব এর ঢাল $= \frac{-1}{\text{স্পর্শকের ঢাল}} = -\frac{1}{8}$

$\therefore y - 0 = -\frac{1}{8}(x + 1)$

$\Rightarrow x + 8y + 1 = 0$

**৯১। $y = x \ln x$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল তার ভুজ কত?**
[দি. বো. ২১]

ক e খ $-e$
গ $\frac{1}{e}$ ঘ $-\frac{1}{e}$

**উত্তর:** গ $\frac{1}{e}$

**ব্যাখ্যা:** $\frac{dy}{dx} = x \times \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x$

যেকোনো রেখা x অক্ষের সমান্তরাল হলে, ঢাল = 0

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \ln x = -1 \therefore x = \frac{1}{e}$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৯২ ও ৯৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$y = 3x(x - 2)$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ

**৯২। বক্ররেখাটির (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত?**
[রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২; সকল বো. ১৮]

ক –12 খ – 6
গ 6 ঘ 12

**উত্তর:** গ 6

**ব্যাখ্যা:** $y = 3x^2 - 6x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x - 6$

(2, 0) বিন্দুতে ঢাল $= 6 \times 2 - 6 = 6$

**৯৩। মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি?**
[রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: সকল বো. ১৮]

ক $y + 6x = 0$ খ $y - 6x = 0$
গ $x + 6y = 0$ ঘ $x - 6y = 0$

**উত্তর:** ক $y + 6x = 0$

**ব্যাখ্যা:** স্পর্শকের ঢাল $= \frac{dy}{dx} = 6x - 6 = 6 \times 0 - 6 = -6$

$-6$ ঢাল বিশিষ্ট (0, 0) বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ,
$y - 0 = -6(x - 0) \therefore y + 6x = 0$

**৯৪। 'b' এর মান কত হলে $y = bx(1 - bx)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে?**
[য. বো. ১৯]

ক $-\sqrt{3}$ খ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
গ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ঘ $\sqrt{3}$

**উত্তর:** ঘ $\sqrt{3}$

**ব্যাখ্যা:** $y = bx - b^2x^2$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = b - 2b^2x$

মূলবিন্দু (0, 0) তে ঢাল $\frac{dy}{dx} = b - 2b^2 \times 0 = b$

আবার, ঢাল $= \tan\theta = \tan 60°$

$\Rightarrow b = \sqrt{3}$

**৯৫। $y = 2x^2 + 3x + 5$ বক্ররেখার (0, 1) বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল কত?**
[সি. বো. ১৯]

ক $-3$ খ $-\frac{1}{3}$
গ $\frac{1}{3}$ ঘ 3

**উত্তর:** খ $-\frac{1}{3}$

**ব্যাখ্যা:** $\frac{dy}{dx} = 4x + 3$

(0, 1) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $\frac{dy}{dx} = 4 \times 0 + 3 = 3$

$\therefore$ অভিলম্বের ঢাল $= \frac{-1}{3}$

## চরমমান, ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান সম্পর্কিত

**৯৬। $f(x) = x(2a - x)$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি?**
[ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১]

ক a খ 2a
গ $a^2$ ঘ $2a^2$

**উত্তর:** গ $a^2$

**ব্যাখ্যা:** $f(x) = x(2a - x)$

$f(x) = 2ax - x^2$ ..... (i)

$f'(x) = 2a - 2x$

$f''(x) = -2 < 0$

সর্বোচ্চ মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 2a - 2x = 0$

$\Rightarrow 2a = 2x$

$\Rightarrow x = a$

সর্বোচ্চ মান, $f(a) = 2.a.a - a^2$

$= 2a^2 - a^2$

$= a^2$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**৯৭। $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন ক্রমবর্ধমান হবে যদি–** [য. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২১; দি. বো. ২১]

ক $f'(a) = 0$ খ $f'(a) < 0$

গ $f'(a) \neq 0$ ঘ $f'(a) > 0$

**উত্তর:** ঘ $f'(a) > 0$

**ব্যাখ্যা:** $f'(a) > 0$, অর্থাৎ ঢালের মান ধনাত্মক হতে হবে।

**৯৮। $f(x) = x^2 - 2x$ ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান হওয়ার শর্ত–** [সি. বো. ২২]

ক $x > 1$ খ $x > 2$

গ $x < 1$ ঘ $x < 2$

**উত্তর:** গ $x < 1$

**ব্যাখ্যা:** $f(x) = x^2 - 2x$

$f'(x) = 2x - 2$

ক্রমহ্রাসমান হওয়ার জন্য, $f'(x) < 0$

$\Rightarrow 2x - 2 < 0$

$\Rightarrow 2x < 2$

$\Rightarrow x < 1$

**৯৯। $f(x) = 2x^2 - x + 3$ হলে–** [দি. বো. ২২]

(i) (1, 4) বিন্দুতে ফাংশনটির স্পর্শকের ঢাল 3

(ii) $x < \frac{1}{4}$ এর জন্য ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান

(iii) $x = \frac{1}{4}$ এর জন্য ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** ক i ও ii

**ব্যাখ্যা:** $f(x) = 2x^2 - x + 3$

$f'(x) = 4x - 1$

(i) (1, 4) বিন্দুতে ঢাল $f'(x) = 4 \times 1 - 1 = 3$

(ii) ক্রমহ্রাসমান হওয়ার জন্য,

$f'(x) < 0$

$\Rightarrow 4x - 1 < 0$

$\therefore x < \frac{1}{4}$

(iii) সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের জন্য

$f'(x) = 0$

$\Rightarrow 4x - 1 = 0$

$\therefore x = \frac{1}{4}$

আবার, $f''(x) = 4$

যেহেতু $f''(x) > 0$

$\therefore x = \frac{1}{4}$ এর জন্য সর্বনিম্ন মান / লঘুমান আছে।

**১০০। $x$ এর মান কত হলে $\frac{x}{\ln x}$ এর মান ক্ষুদ্রতম হবে?** [ব. বো. ২১]

ক $\frac{1}{e}$ খ $e$

গ $-\frac{1}{e}$ ঘ $-e$

**উত্তর:** খ $e$

**ব্যাখ্যা:** $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

ক্ষুদ্রতম মানের জন্য $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\ln x \frac{d}{dx}(x) - x \cdot \frac{d}{dx}(\ln x)}{(\ln x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0$$

$\Rightarrow \ln x = 1$

$\Rightarrow \ln x = \ln e$

$\Rightarrow x = e$

**বিকল্প পদ্ধতি:**

মনে রেখো:

(i) $\frac{x}{\ln x}$ এর মান ক্ষুদ্রতম হবে যদি $x = e$ এবং ক্ষুদ্রতম মান $= e$

(ii) $\frac{\ln x}{x}$ এর মান বৃহত্তম হবে যদি, $x = \frac{1}{e}$ হয় এবং বৃহত্তম মান $= \frac{1}{e}$

**১০১। $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায়?** [ব. বো. ২১]

ক $x > 1$ খ $x < 2$

গ $x > 3$ ঘ $2 < x < 3$

**উত্তর:** ঘ $2 < x < 3$

**ব্যাখ্যা:** $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6)$

$= 6(x^2 - 3x - 2x + 6)$

$= 6\{x(x - 3) - 2(x - 3)\}$

$= 6(x - 2)(x - 3)$

$f'(x) = 0$ হলে, $x = 2$ এবং $x = 3$ হয়

যে মানের জন্য $f'(x) < 0$ হবে। সেটাই উত্তর।

$\Rightarrow (x - 2)(x - 3) < 0$

ব্যবধি: $x < 2$, $2 < x < 3$, $x > 3$

$\Rightarrow x - 2 > 0$ এবং $x - 3 < 0$ হলে $f'(x) < 0$ হয়।

$\therefore 2 < x < 3$ ব্যবধিতে ফাংশনটি হ্রাস পায়।

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**১০২। $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ হলে–** [সি. বো. ২১]

(i) $x < -1$ এর জন্য $f(x)$ একটি ক্রমহ্রাসমান ফাংশন

(ii) $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান 6

(iii) $f''(0) = -2$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii　　খ ii ও iii

গ i ও iii　　ঘ i, ii ও iii

**উত্তর:** সঠিক উত্তর নেই

**ব্যাখ্যা:** $f(x) = -x^2 - 2x + 5$

$\therefore f'(x) = -2x - 2$

$= -2(x + 1)$ এবং $f''(x) = -2$

(i) ক্রমহ্রাসমান হতে হলে, $f'(x) < 0$

কিন্তু $x < -1$ এর জন্য $x + 1 < 0$ কাজেই $f'(x) > 0$

$\therefore x < -1$ ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান

(i) নং সঠিক নয়

(ii) $f''(x) = -2$

সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore x = -1$

$\therefore f''(-1) = -2 < 0$

$x = -1$ বিন্দুতে সর্বোচ্চ মান আছে

সর্বোচ্চ মান $= -x^2 - 2x + 5$

$= -(-1)^2 - 2(-1) + 5$

$= 6$

(ii) নং সঠিক নয়

(iii) $f''(x) = -2$

$\therefore f''(0) = -2$

(iii) নং সঠিক

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১০৩ ও ১০৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = x^2 - x$

**১০৩। ফাংশনটির কোন বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল?** [কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ১৯]

ক $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$　　খ $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

গ $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$　　ঘ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

**উত্তর:** গ $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$

**ব্যাখ্যা:** $y = f(x) = x^2 - x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - 1$

স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হলে ঢাল $= 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - 1 = 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ হলে $y = x^2 - x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$\therefore$ বিন্দু $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

**১০৪। ফাংশনটির চরম মান কত?** [কু. বো. ২১]

ক $-\frac{1}{4}$　　খ $-\frac{1}{2}$

গ 0　　ঘ $\frac{1}{2}$

**উত্তর:** ক $-\frac{1}{4}$

**ব্যাখ্যা:** $\frac{dy}{dx} = 2x - 1 = f'(x)$

$\therefore f''(x) = 2$

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0 \therefore x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ এ ফাংশনটির চরম মান বিদ্যমান

$\therefore$ চরম মান $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

**১০৫। $y = 4e^x + e^{-x}$ এর লঘুমান কত?** [দি. বো. ১৯]

ক $-4$　　খ 3

গ 4　　ঘ 5

**উত্তর:** গ 4

**ব্যাখ্যা:** $y = 4e^x + e^{-x}$

$\Rightarrow y_1 = 4e^x - e^{-x}$

$\Rightarrow y_2 = 4e^x + e^{-x}$

চরম মানের জন্য, $y_1 = 0$

$\Rightarrow 4e^x = e^{-x} \Rightarrow 4e^x = \frac{1}{e^x}$

$\therefore e^x = \frac{1}{2}$　　[x বাস্তব সংখ্যা হলে, $e^x$ সর্বদা ধনাত্মক]

এখন, $e^x = \frac{1}{2}$ হলে, $y_2 = 4 > 0$ ; লঘুমান বিদ্যমান।

$\therefore e^x = \frac{1}{2}$ এর জন্য লঘুমান $y = 4 \times \frac{1}{2} + 2 = 4$

**১০৬। x-এর কোন মানের জন্য $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$ এর চরম মান পাওয়া যাবে?** [রা বো. ১৭]

ক $-2, -3$　　খ $-2, 3$

গ $2, -3$　　ঘ $2, 3$

**উত্তর:** ঘ 2, 3

**ব্যাখ্যা:** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$

$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{5}{2} \times 2x + 6$

$= x^2 - 5x + 6$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

$\Rightarrow x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$

$\therefore x = 3, 2$

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## নিজেকে যাচাই করো

১। $\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}+7^{n+1}}{5^n-7^n}$ এর মান নিচের কোনটি?

ক $-7$ খ $-5$ গ $5$ ঘ $7$

২। $y = x^{-\frac{1}{x}}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

ক $x^{-2-\frac{1}{x}}(1-\ln x)$ খ $x^{\frac{1}{x}+2}(\ln x-1)$

গ $x^{-2+\frac{1}{x}}(1-\ln x)$ ঘ $x^{-2-\frac{1}{x}}(\ln x-1)$

৩। $x^y = y^x$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

ক $\frac{x(y\ln y-y)}{y(x\ln y-x)}$ খ $\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$ গ $\frac{y(x\ln y+y)}{x(y\ln x+x)}$ ঘ $\frac{x(y\ln x-y)}{y(x\ln y-x)}$

৪। $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন ক্রমবর্ধমান হবে যদি–

ক $f'(a) = 0$ খ $f'(a) < 0$ গ $f'(a) \neq 0$ ঘ $f'(a) > 0$

৫। $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$ এর মান কোনটি?

ক $\infty$ খ $0$ গ $\frac{9}{2}$ ঘ $6$

৬। $y = (x^2+1)\tan^{-1}x - x$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

ক $2\tan^{-1}x$ খ $2x\tan^{-1}x$ গ $x\tan^{-1}x$ ঘ $\frac{2x}{1+x^2}$

৭। $x^y = e^{x+y}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

ক $\frac{x-y}{x(1-\ln x)}$ খ $\frac{x-y}{x(\ln x-1)}$ গ $\frac{y-x}{x(\ln x-1)}$ ঘ $\frac{x-y}{\ln x-1}$

৮। $\frac{d^n}{dx^n}(\sin 2x) = ?$

ক $2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}+2x\right)$ খ $\sin\left(\frac{n\pi}{2}+2x\right)$

গ $2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}-2x\right)$ ঘ $\sin\left(\frac{n\pi}{2}-2x\right)$

৯। $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায়?

ক $x > 1$ খ $x < 2$ গ $x > 3$ ঘ $2 < x < 3$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১০ ও ১১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y = 3x(x-2)$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ

১০। বক্ররেখাটির $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত?

ক $-12$ খ $-6$ গ $6$ ঘ $12$

১১। মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি?

ক $y + 6x = 0$ খ $y - 6x = 0$ গ $x + 6y = 0$ ঘ $x - 6y = 0$

১২। $y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

ক $\frac{1}{1+x^2}$ খ $-\frac{1}{1+x^2}$ গ $\frac{1}{1+x}$ ঘ $-\frac{1}{1+x}$

১৩। $\frac{d^n}{dx^n}(x^n)$ এর মান কোনটি?

ক $n!$ খ $x$ গ $1$ ঘ $0$

১৪। $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x^\circ}{x}$ এর মান কোনটি?

ক $\frac{\pi}{180}$ খ $\frac{\pi}{90}$ গ $\frac{\pi}{2}$ ঘ $\frac{90}{\pi}$

১৫। $\lim_{x\to\infty} \frac{3^{x+1}-3^{-x}}{4.3^x+3^{-x}}$ এর মান কত?

ক $\frac{1}{4}$ খ $\frac{3}{4}$ গ $1$ ঘ $\infty$

১৬। $A(-1, 0)$ বিন্দুটি $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ বক্ররেখার উপর হলে–

(i) A বিন্দুতে ঢাল $= 8$

(ii) A বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $8x - y + 8 = 0$

(iii) A বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $x - 8y - 1 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১৭। $f(1) = 6, f'(1) = 3$ হলে, $x = 0$ বিন্দুতে $\frac{d}{dx}\{\log f(e^x)\}$ এর মান কোনটি?

ক $2$ খ $1$ গ $\frac{1}{2}$ ঘ $0$

১৮। $\cos(ax + b)$ এর n-তম অন্তরক সহগ কত?

ক $(-1)^n a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$ খ $a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$

গ $\cos\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$ ঘ $a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$

১৯। $f(x) = 2x^2 - x + 3$ হলে–

(i) $(1, 4)$ বিন্দুতে ফাংশনটির স্পর্শকের ঢাল 3

(ii) $x < \frac{1}{4}$ এর জন্য ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান

(iii) $x = \frac{1}{4}$ এর জন্য ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

২০। যদি $x = a(\theta - \sin\theta)$ এবং $y = a(1 + \cos\theta)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি?

ক $-\cot\frac{\theta}{2}$ খ $-\sin\theta$ গ $1 - \cos\theta$ ঘ $-\tan\frac{\theta}{2}$

২১। $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x+\cos x}\right) = ?$

ক $1$ খ $0$ গ $2\sin 2x$ ঘ $2\cos 2x$

২২। $f(x)$ ফাংশনে $x = b$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হলে–

(i) $f(b)$ সংজ্ঞায়িত হয় (ii) $\lim_{x\to b} f(x)$ বিদ্যমান থাকে না

(iii) $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$ হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

২৩। $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}\frac{x}{2}}{3x} =$ কত?

ক $\frac{1}{6}$ খ $\frac{1}{3}$ গ $\frac{1}{2}$ ঘ $\frac{3}{2}$

২৪। $y = \frac{1}{x^3}$ বক্ররেখার $(-1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত?

ক $-3$ খ $-1$ গ $1$ ঘ $3$

২৫। $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+1}{2x^2-4x+2}$ এর মান কত?

ক $0$ খ $\infty$ গ $\frac{1}{2}$ ঘ $1$

| উত্তরপত্র | ১ | ক | ২ | ঘ | ৩ | খ | ৪ | ঘ | ৫ | গ | ৬ | খ | ৭ | খ | ৮ | ক | ৯ | ঘ | ১০ | গ | ১১ | ক | ১২ | ক |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ১৩ | ক | ১৪ | খ | ১৫ | খ | ১৬ | ক | ১৭ | গ | ১৮ | ঘ | ১৯ | ক | ২০ | ক | ২১ | খ | ২২ | খ | ২৩ | ক | ২৪ | ক | ২৫ | ঘ |

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs

# ১০ যোগজীকরণ
# Integration

## Board Questions Analysis

সৃজনশীল প্রশ্ন:

| বোর্ড / সাল | ঢাকা | ময়মনসিংহ | রাজশাহী | কুমিল্লা | যশোর | চট্টগ্রাম | বরিশাল | সিলেট | দিনাজপুর |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ২০২৩ | ১ | ১ | ১ | ১ | ২ | ২ | ২ | ১ | ১ |
| ২০২২ | ১ | ১ | ১ | ১ | ২ | ২ | ১ | ১ | ১ |

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

| বোর্ড / সাল | ঢাকা | ময়মনসিংহ | রাজশাহী | কুমিল্লা | যশোর | চট্টগ্রাম | বরিশাল | সিলেট | দিনাজপুর |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ২০২৩ | ৩ | ৬ | ৪ | ৩ | ৩ | ৫ | ২ | ৩ | ৪ |
| ২০২২ | ৪ | ৪ | ৫ | ৩ | ৪ | ৪ | ৪ | ৪ | ৩ |

## এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

❑ মৌলিক যোগজীকরণের প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:

(i) $\int \{f(x) \pm \varphi(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$

(ii) $\int c\, f(x)dx = c\int f(x)dx$

(iii) $\int dx = x + c$

(iv) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ [যখন $n \neq -1$]

(v) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

(vi) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$

(vii) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

(viii) $\int e^{mx} dx = \frac{1}{m} e^{mx} + c$ এবং $\int e^x dx = e^x + c$

(ix) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ এবং $\int a^{mx} dx = \frac{a^{mx}}{m \ln a} + c$

(x) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$ এবং $\int \sin mx\, dx = -\frac{\cos mx}{m} + c$

(xi) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$ এবং $\int \cos mx\, dx = \frac{\sin mx}{m} + c$

(xii) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$ এবং $\int \sec^2 mx\, dx = \frac{\tan mx}{m} + c$

(xiii) $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$ এবং $\int \operatorname{cosec}^2 mx\, dx = -\frac{\cot mx}{m} + c$

(xiv) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$ এবং $\int \operatorname{cosec} mx \cot mx\, dx = -\frac{\operatorname{cosec} mx}{m} + c$

(xv) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$ এবং $\int \sec mx \tan mx\, dx = \frac{\sec mx}{m} + c$

(xvi) $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$

(xvii) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = -\ln|\operatorname{cosec} x + \cot x| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

(xviii) $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$

(xix) $\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + c = -\ln|\operatorname{cosec} x| + c$

❑ প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজীকরণের প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + c$

(ii) $\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \cos^{-1}x + c$

(iii) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + c$

(iv) $\int -\frac{dx}{1+x^2} = \cot^{-1}x + c$

(v) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x + c$

(vi) $\int -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{cosec}^{-1}x + c$

ADMISSION STUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



(vii) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

(viii) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

(ix) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

(x) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

(xi) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

(xii) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

(xiii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

(xiv) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + c$

(xv) $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

(xvi) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

❑ **অংশায়ন পদ্ধতিতে যোগজীকরণের প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:**

(i) $\int uv\, dx = u\int v dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v dx\right\}dx$

(ii) $\int e^{ax}\{af(x) + f'(x)\}\, dx = e^{ax}f(x) + c$

$a = 1$ হলে, $\int e^{x}\{f(x) + f'(x)\}\, dx = e^{x}f(x) + c$

(iii) $\int e^{ax}\sin(bx+c)\, dx$

$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\sin(bx+c) - b\cos(bx+c)\} + C$

(iv) $\int e^{ax}\cos(bx+c)\, dx$

$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\cos(bx+c) + b\sin(bx+c)\} + C$

(vi) $\int \ln x\, dx = x\ln x - x + c$

❑ **নির্দিষ্ট যোগজের প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:**

(i) $\int_a^b f'(x)\, dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$

(ii) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x) dx$

(iii) $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx$

(iv) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

যেখানে, $a < c < b$

(v) $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\, dx & ; \text{যখন } f(-x) = f(x) \\ 0 & ; \text{যখন } f(-x) = -f(x) \end{cases}$

## HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

**প্রশ্ন ▶ ১** দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + y^2 = 4$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = (\sin^{-1}x)$

(ক) $\int \frac{1}{a^2+4x^2} dx$ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $\int x f(x)\, dx$ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৩]

(গ) সমাকলন পদ্ধতিতে দৃশ্যকল্প-১ ও $x + y = 2$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** $\int \frac{1}{a^2+4x^2} dx$

$= \int \frac{1}{4\left(\frac{a^2}{4}+x^2\right)} dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2} dx$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{a}{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\frac{a}{2}} + c$

$= \frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{2x}{a} + c$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin^{-1}x$

$\therefore \int xf(x)\, dx$

$= \int x\sin^{-1}x\, dx$

$= \sin^{-1}x\int x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\sin^{-1}x\int x dx\right\}dx$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{x^2}{2}dx$ $\Big|$ ধরি, $x = \sin\theta$ $\Rightarrow dx = \cos\theta\, d\theta$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \int\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cdot\frac{\sin^2\theta}{2}\cos\theta\, d\theta$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \int\frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}\cos\theta\, d\theta$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{4}\int 2\sin^2\theta\, d\theta$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{4}\int(1-\cos2\theta)\, d\theta$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{4}\left(\theta - \frac{\sin2\theta}{2}\right) + c$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\times\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2} + c$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} + c$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{4}\sin^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + c$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** প্রদত্ত রেখা $x + y = 2$

$\Rightarrow y = 2 - x$ ..... (i)

দৃশ্যকল্প-১ হতে,

$x^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow y^2 = 4 - x^2$ ..... (ii)

$\Rightarrow (2 - x)^2 = 4 - x^2$ [y এর মান বসিয়ে]

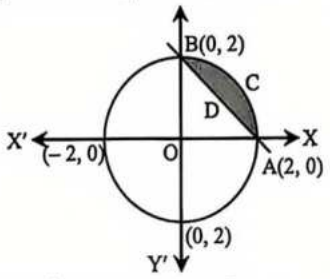
$\Rightarrow 4 - 4x + x^2 = 4 - x^2$

$\Rightarrow 2x^2 - 4x = 0$

$\Rightarrow 2x(x - 2) = 0$

$\therefore x = 0; x = 2$ এবং $y = 2; y = 0$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখা বৃত্তটিকে ১ম চতুর্ভাগে ছেদ করে।




(ii) নং হতে ১ম চতুর্ভাগের জন্য বৃত্তের সমীকরণ, $y = \sqrt{4 - x^2}$ [$\because$ ১ম চতুর্ভাগে y ধনাত্মক]

এখন,

ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল = বৃত্ত দ্বারা ১ম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রফল – রেখা দ্বারা ১ম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রফল।

$$= \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx - \int_0^2 (2 - x)\, dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{2^2 - x^2}\, dx - \int_0^2 (2 - x)\, dx$$

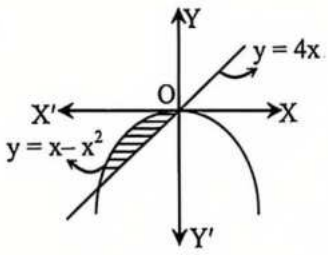
$$= \left[\frac{x\sqrt{2^2 - x^2}}{2} + \frac{2^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 - \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$\left[\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c\right]$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{2^2 - 2^2}}{2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{2}{2} - 0 - \frac{4}{2}\sin^{-1}0\right] - \left[2 \times 2 - \frac{2^2}{2} - 0 + 0\right]$$

$= 2\sin^{-1}1 - (4 - 2) = 2 \times \frac{\pi}{2} - 2 = \pi - 2$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২** দৃশ্যকল্প-১:




দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}$

**(ক)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\, \sin^3 x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২৩]

**(খ)** দৃশ্যকল্প-২ হতে $\int f(x)\, dx$ নির্ণয়।

[রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৭; ব. বো. ২৩]

**(গ)** দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত চিত্রের ছায়াবৃত্ত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [রা. বো. ২৩]

সমাধান:

**ক** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin^3 x\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin^2 x.\sin x\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}(1 - \cos^2 x)\sin x\, dx$

ধরি, $z = \cos x$

$\therefore dz = -\sin x\, dx$

| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| z | 1 | 0 |

$= -\int_1^0 \sqrt{z}(1 - z^2)\, dz$

$= \int_0^1 (\sqrt{z} - \sqrt{z}.z^2)\, dz$

$= \int_0^1 \left(z^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}+2}\right) dz$

$= \int_0^1 \left(z^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{5}{2}}\right) dz$

$= \left[\frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 - \left[\frac{z^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}\right]_0^1$

$= \left[\frac{1}{\frac{3}{2}} - 0\right] - \left[\frac{1}{\frac{7}{2}} - 0\right]$

$= \frac{2}{3} - \frac{2}{7}$

$= \frac{8}{21}$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}$

ধরি, $\frac{x}{(x+1)^2(x+2)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2}$ ..... (i)

উভয়পক্ষকে $(x + 1)^2(x + 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x = A(x + 1)(x + 2) + B(x + 2) + C(x + 1)^2$ ..... (ii)

(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$-1 = 0 + B(-1 + 2) + 0$

$\Rightarrow -1 = B$

$\therefore B = -1$

(ii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$-2 = 0 + 0 + C(-2 + 1)^2$

$\Rightarrow -2 = C$

$\therefore C = -2$

(ii) নং সমীকরণের উভয়পক্ষ হতে $x^2$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + C = 0$

$\Rightarrow A - 2 = 0$

$\therefore A = 2$

(i) নং এ A, B ও C এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+2}$$

$\therefore \int f(x)\, dx$

$= \int \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}\, dx$

$= \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+2}\right) dx$

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$= 2\int\frac{1}{x+1}dx - 2\int\frac{1}{x+2}dx - \int(x+1)^{-2}dx$$

$$= 2\ln|x+1| - 2\ln|x+2| - \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$$= 2\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| - \frac{(x+1)^{-1}}{-1}$$

$$= 2\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + \frac{1}{x+1} + c \text{ (Ans.)}$$

**গ** এখানে, সরলরেখা, $y = 4x$ ..... (i)

বক্ররেখা, $y = x - x^2$ ..... (ii)

(i) নং ও (ii) নং হতে পাই,

$\Rightarrow x^2 + 4x - x = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3x = 0$

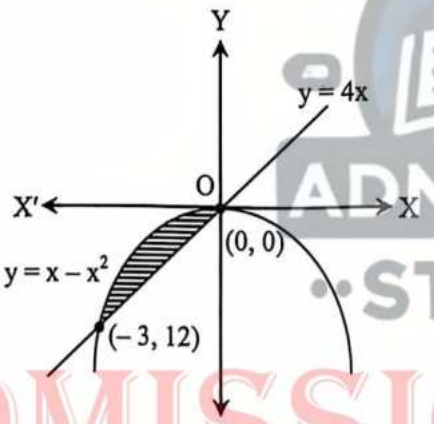
$\Rightarrow x(x+3) = 0$

$\therefore x = 0, -3$

$x = 0$ হলে, (i) নং হতে পাই, $y = 4 \times 0 \Rightarrow y = 0$

$x = -3$ হলে, (i) নং হতে পাই, $y = 4 \times (-3) \Rightarrow y = -12$

$\therefore$ (i) নং ও (ii) নং পরস্পর (0, 0) এবং (– 3, – 12) বিন্দুতে ছেদ করে।




এখন, (i) নং হতে, $y = 4x = y_1$ (ধরি)

(ii) নং হতে, $y = x - x^2 = y_2$ (ধরি)

চিত্রের ছায়াবৃত্ত অংশের ক্ষেত্রফল $= \int_0^{-3}(y_1 - y_2)\,dx$

$$= \int_0^{-3}(4x - x + x^2)dx$$

$$= \int_0^{-3}(3x + x^2)\,dx$$

$$= 3\times\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{-3} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{-3}$$

$$= 3\times\frac{9}{2} + \frac{(-27)}{3}$$

$$= \frac{27}{2} - 9$$

$$= \frac{27-18}{2}$$

$$= \frac{9}{2} \text{ বর্গ একক (Ans.)}$$

**প্রশ্ন ➤ ৩** দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{1}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 = 64$ ; $y = 5$

(ক) $\int \sin 9x \sin 11x\,dx$ নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ ব্যবহার করে $\int_0^4 f(x)\,dx$ নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর বৃত্ত ও সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩]

সমাধান:

**ক** $\int \sin 9x \sin 11x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int 2\sin 11x \sin 9x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\{\cos(11x - 9x) - \cos(11x + 9x)\}\,dx$$

$[2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$$= \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 20x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 20x}{20}\right) + c$$

$$= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 20x}{40} + c \text{ (Ans.)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\therefore \int_0^4 f(x)\,dx$

$$= \int_0^4 \frac{1}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

ধরি, $x = 2\tan\theta$

$\Rightarrow dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$

| x | 0 | 4 |
|---|---|---|
| θ | 0 | $\tan^{-1}2$ |

$$= \int_0^{\tan^{-1}2} \frac{2\sec^2\theta}{(4+4\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}d\theta$$

$$= \int_0^{\tan^{-1}2} \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{\left(\sqrt{4\sec^2\theta}\right)^3}$$

$$= \int_0^{\tan^{-1}2} \frac{2\sec^2\theta}{8\sec^3\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\tan^{-1}2} \frac{1}{4\sec\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\tan^{-1}2} \cos\theta\,d\theta$$

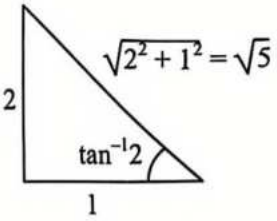
$$= \frac{1}{4}\left[\sin\theta\right]_0^{\tan^{-1}2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sin(\tan^{-1}2) - 0\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \text{ (Ans.)}$$




ADMISSION STUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs

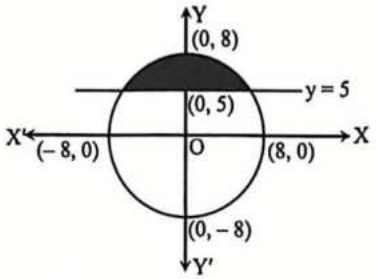


**গ** প্রদত্ত বৃত্ত, $x^2 + y^2 = 64$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 8^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{8^2 - y^2}$ ..... (i)

এবং প্রদত্ত সরলরেখা, $y = 5$ ..... (ii)




(i) নং ও (ii) নং দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল,

$= 2\int_5^8 x\,dy$

$= 2\int_5^8 \sqrt{64 - y^2}\,dy$

ধরি, $y = 8\sin\theta$

$\therefore dy = 8\cos\theta\,d\theta$

| y | 5 | 8 |
|---|---|---|
| θ | $\sin^{-1}\frac{5}{8}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

$= 2\int_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{64 - 64\sin^2\theta}\ 8\cos\theta\,d\theta$

$= 2 \times 8 \times 8\int_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\theta}\ .\ \cos\theta\,d\theta$

$= 128\int_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2\theta}\ .\cos\theta\,d\theta$

$= 128\int_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$

$= 64\int_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\,d\theta$

$= 64\int_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos2\theta)\,d\theta$

$= 64\left[\theta + \frac{\sin2\theta}{2}\right]_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 64\left[\theta + \frac{2\sin\theta.\cos\theta}{2}\right]_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 64\left[\theta + \sin\theta\ .\ \cos\theta\right]_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 64\left[\theta + \sin\theta\sqrt{1 - \sin^2\theta}\right]_{\sin^{-1}\frac{5}{8}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 64\left[\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\sqrt{1 - \sin^2\frac{\pi}{2}} - \sin^{-1}\frac{5}{8} - \sin\sin^{-1}\frac{5}{8}\sqrt{1 - \left(\sin\sin^{-1}\frac{5}{8}\right)^2}\right]$

$= 64\left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{5}{8} - \frac{5}{8}\sqrt{1 - \frac{25}{64}}\right]$

$= 64\left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{5}{8} - \frac{5}{8}\sqrt{\frac{64 - 25}{64}}\right]$

$= 64\left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{5}{8} - \frac{5}{8} \times \frac{\sqrt{39}}{8}\right]$

$= 32\pi - 64\sin^{-1}\frac{5}{8} - 5\sqrt{39}$ বর্গ একক **(Ans.)**

**অথবা,**

ক্ষেত্রফল $= 2\int_5^8 x\,dy$

$= 2\int_5^8 \sqrt{8^2 - y^2}\,dy$

$= 2\left[\frac{y\sqrt{8^2 - y^2}}{2} + \frac{8^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{8}\right]_5^8$

$= 2\left[\frac{8\sqrt{8^2 - 8^2}}{2} + \frac{64}{2}\sin^{-1}\frac{8}{8} - \frac{5\sqrt{8^2 - 5^2}}{2} - \frac{8^2}{2}\sin^{-1}\frac{5}{8}\right]$

$= 2\left[\frac{64}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{64}{2}\sin^{-1}\frac{5}{8} - \frac{5\sqrt{39}}{2}\right]$

$= 32\pi - 64\sin^{-1}\frac{5}{8} - 5\sqrt{39}$ বর্গ একক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৪** $f(x) = \sin x$

$h(x) = (1 - x)(x^2 + 4)$

$g(x) = e^x$

(ক) $\int (4 - 3x)^{\frac{3}{2}}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২৩]

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\}^2 f(3x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২৩]

(গ) $\int \frac{g(2x)}{\{g(x) - 1\}\{g(2x) + 1\}}\,dx$ নির্ণয় কর।

[সি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** $\int (4 - 3x)^{\frac{3}{2}}\,dx$

$= \frac{(4 - 3x)^{\frac{3}{2}+1}}{-3\left(\frac{3}{2} + 1\right)} + c$

$= \frac{(4 - 3x)^{\frac{3}{2}+1}}{-3 \times \frac{5}{2}} + c$

$= -\frac{2}{15}(4 - 3x)^{\frac{5}{2}} + c$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\therefore f(3x) = \sin 3x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\}^2 f(3x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x \sin 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)\sin 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3x - \sin 3x\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\cos 2x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin 3x\cos 2x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\,dx - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\sin(3x+2x) + \sin(3x-2x)\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\,dx - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 5x + \sin x)\,dx$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\left[\frac{\cos 5x}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{6}(0-1) + \frac{1}{20}(0-1) + \frac{1}{4}(0-1)$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{20} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{10-3-15}{60}$$

$$= \frac{-8}{60} = -\frac{2}{15}$$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = e^x$

$\therefore g(2x) = e^{2x}$

$$\therefore \int \frac{g(2x)}{\{g(x)-1\}\{g(2x)+1\}}\,dx$$

$$= \int \frac{e^{2x}}{(e^x-1)(e^{2x}+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{e^x.e^x}{(e^x-1)\{(e^x)^2+1\}}\,dx \quad \Big| \begin{array}{l}\text{ধরি, } e^x = z \\ \therefore e^x\,dx = dz\end{array}$$

$$= \int \frac{z}{(z-1)(z^2+1)}\,dz$$

ধরি, $\frac{z}{(z-1)(z^2+1)} \equiv \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2+1}$ .... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(z-1)(z^2+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$z \equiv A(z^2+1) + (Bz+C)(z-1)$ ..... (ii)

(ii) নং এ $z = 1$ বসিয়ে পাই,

$1 = 2A$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$

(ii) নং এর উভয়পক্ষ হতে $z^2$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + B = 0$

$\therefore B = -\frac{1}{2}$

(ii) নং এর উভয়পক্ষ হতে ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই,

$A - C = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} - C = 0$

$\therefore C = \frac{1}{2}$

(i) নং এ A, B ও C এর মান বসিয়ে পাই,

$$\therefore \frac{z}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{1}{2(z-1)} + \frac{-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}}{(z^2+1)}$$

$$= \frac{1}{2(z-1)} + \frac{1-z}{2(z^2+1)}$$

$$\therefore \int \frac{z}{(z-1)(z^2+1)}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1}\,dz + \frac{1}{2}\int \frac{1-z}{z^2+1}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1}\,dz + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2+1^2}\,dz - \frac{1}{2\times 2}\int \frac{2z}{z^2+1}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\ln|z-1| + \frac{1}{2}\tan^{-1}z - \frac{1}{4}\ln|z^2+1| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{4}\ln|e^{2x}+1| + \frac{1}{2}\tan^{-1}e^x + c$$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৫** $P(x) = \cos x$, $Q(x, y) = x^2 + y^2 - 25$, $L = x - 3$

(ক) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ এর যোগজ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২৩]

(খ) উদ্দীপকের আলোকে $\int \frac{d\theta}{1-\left\{P\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}}$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২৩]

(গ) উদ্দীপকের আলোকে $Q(x, y) = 0$ এবং $L = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২২, ১৯]

সমাধান:

**ক** $$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}}$$

$$= \int \frac{e^x\,dx}{1+(e^x)^2} \quad [e^x \text{ দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে}] \quad \Big| \begin{array}{l}\text{ধরি, } e^x = z \\ \Rightarrow e^x\,dx = dz\end{array}$$

$$= \int \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \tan^{-1}z + c$$

$$= \tan^{-1}e^x + c$$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS
ADMISSIONSTUFFS

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** দেওয়া আছে, $P(x) = \cos x$

$\therefore P\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$

$\therefore \int \frac{d\theta}{1-\left\{P\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}}$

$= \int \frac{d\theta}{1-\sin\theta}$

$= \int \frac{1+\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} d\theta$

$= \int \frac{(1+\sin\theta)\, d\theta}{1-\sin^2\theta}$

$= \int \frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} d\theta$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right) d\theta$

$= \int \left(\sec^2\theta + \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) d\theta$

$= \int (\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta)\, d\theta$

$= \int \sec^2\theta\, d\theta + \int \sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$= \tan\theta + \sec\theta + c$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $Q(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ এবং $L = x - 3$

এখানে, $Q(x, y) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 25 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 25$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 5^2$ ..... (i)

এবং $L = 0$

$\Rightarrow x - 3 = 0$

$\Rightarrow x = 3$ ..... (ii)

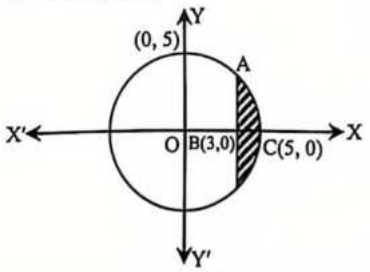
(i) নং হতে পাই,

$y^2 = 25 - x^2$

$\therefore y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

প্রথম চতুর্ভাগে y ধনাত্মক অর্থাৎ $y = \sqrt{25 - x^2}$

এখানে, B(3, 0) এবং C(5, 0)




(i) নং বৃত্ত ও (ii) নং সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$= 2 \times$ ABC অংশের ক্ষেত্রফল

$= 2\int_3^5 y\, dx$

$= 2\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}\, dx$

ধরি, $x = 5\sin\theta$

$\therefore dx = 5\cos\theta\, d\theta$

| x | 3 | 5 |
|---|---|---|
| $\theta$ | $\sin^{-1}\frac{3}{5}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

$= 2\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25 - 25\sin^2\theta}\, 5\cos\theta\, d\theta$

$= 10\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25(1 - \sin^2\theta)}\, .\cos\theta\, d\theta$

$= 10\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25\cos^2\theta}\, \cos\theta\, d\theta$

$= 10\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} 5\cos\theta.\cos\theta\, d\theta$

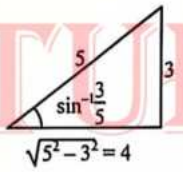
$= 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\, d\theta$

$= 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$

$= 25\left\{[\theta]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$

$= 25\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{3}{5}\right) + 25\left[\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2}\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} + 25\left[0 - \sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\right]$




$= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 25 \times \frac{3}{5}\cos\left(\cos^{-1}\frac{4}{5}\right)$

$= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 5 \times 3 \times \frac{4}{5}$

$= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 12$ বর্গ একক **(Ans.)**

অথবা,

ক্ষেত্রফল $= 2\int_3^5 \sqrt{5^2 - x^2}\, dx$

$= 2\left[\frac{x\sqrt{5^2 - x^2}}{2} + \frac{5^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}\right]_3^5$

$= 2\left[\frac{5\sqrt{5^2 - 5^2}}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{5}{5} - \frac{3\sqrt{5^2 - 3^2}}{2} - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}\right]$

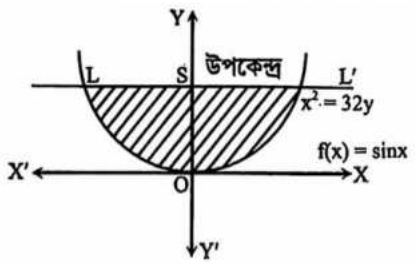
$= \frac{25}{2}\pi - 12 - 25\sin^{-1}\frac{3}{5}$ বর্গ একক **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ৬**




(ক) $\int \frac{1}{e^{-x}+1}\,dx$ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২]

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{[\{f(x)\}^2-16]\{f(x)-3\}}\,dx$ নির্ণয় কর।

[চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২]

(গ) উদ্দীপকে উল্লিখিত পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** $\int \frac{1}{e^{-x}+1}\,dx$

$= \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

$= \ln|1+e^x| + c$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\therefore f'(x) = \cos x$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{[\{f(x)\}^2-16]\{f(x)-3\}}\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{(\sin^2 x-16)(\sin x-3)}$

ধরি, $z = \sin x$

$\therefore dz = \cos x\,dx$

| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| z | 0 | 1 |

$= \int_0^1 \frac{dz}{(z^2-4^2)(z-3)}$

$= \int_0^1 \frac{dz}{(z+4)(z-4)(z-3)}$

ধরি, $\frac{1}{(z+4)(z-4)(z-3)} \equiv \frac{A}{z+4} + \frac{B}{z-4} + \frac{C}{z-3}$ .... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(z+4)(z-4)(z-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$1 \equiv A(z-4)(z-3) + B(z+4)(z-3) + C(z+4)(z-4)$ ... (ii)

(ii) নং এ $z = -4$ বসিয়ে পাই,

$1 = A.(-8)\times(-7) + 0 + 0$

$\Rightarrow 1 = 56A$

$\therefore A = \frac{1}{56}$

(ii) নং এ $z = 4$ বসিয়ে পাই,

$1 = 0 + B\times 8\times 1 + 0$

$\Rightarrow 1 = 8B$

$\therefore B = \frac{1}{8}$

(ii) নং এ $z = 3$ বসিয়ে পাই,

$1 = 0 + 0 + C.7(-1)$

$\Rightarrow 1 = -7C$

$\therefore C = -\frac{1}{7}$

(i) নং এ A, B ও C এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{1}{(z+4)(z-4)(z-3)} = \frac{1}{56(z+4)} + \frac{1}{8(z-4)} - \frac{1}{7(z-3)}$

$\therefore \int_0^1 \frac{dz}{(z+4)(z-4)(z-3)}$

$= \int_0^1 \left[\frac{1}{56(z+4)} + \frac{1}{8(z-4)} - \frac{1}{7(z-3)}\right] dz$

$= \frac{1}{56}\int_0^1 \frac{1}{z+4}\,dz + \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{1}{z-4}\,dz - \frac{1}{7}\int_0^1 \frac{1}{z-3}\,dz$

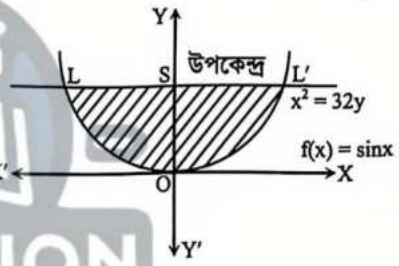
$= \frac{1}{56}[\ln|z+4|]_0^1 + \frac{1}{8}[\ln|z-4|]_0^1 - \frac{1}{7}[\ln|z-3|]_0^1$

$= \frac{1}{56}[\ln 5 - \ln 4] + \frac{1}{8}[\ln|-3| - \ln|-4|] - \frac{1}{7}[\ln|-2| - \ln|-3|]$

$= \frac{1}{56}\ln\frac{5}{4} + \frac{1}{8}\ln\frac{3}{4} - \frac{1}{7}\ln\frac{2}{3}$ **(Ans.)**

**গ** এখানে, পরাবৃত্তের সমীকরণ, $x^2 = 32y$ ..... (i)

$\Rightarrow x^2 = 4\times 8y$




পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $y = 8$ .... (ii)

(i) নং এ $y = 8$ বসিয়ে পাই, $x^2 = 32\times 8$

$\Rightarrow x^2 = 256$

$\therefore x = \pm 16$

$\therefore$ (i) নং ও (ii) নং রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুদ্বয়,

$L'(16, 8)$ ; $L(-16, 8)$

(i) নং হতে পাই,

$32y = x^2$

$\therefore y = \frac{x^2}{32} = y_1$ (ধরি)

(ii) নং হতে পাই, $y = 8 = y_2$ (ধরি)

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল,

$= 2\int_0^{16} (y_2 - y_1)\,dx$

$= 2\int_0^{16} \left(8 - \frac{x^2}{32}\right) dx$

$= 2\left[8x - \frac{x^3}{3\times 32}\right]_0^{16}$

$= 2\left[8\times 16 - \frac{(16)^3}{3\times 32}\right]$

$= \frac{512}{3}$ বর্গ একক **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ৭** দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \cos x$

দৃশ্যকল্প-২: $g(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$

(ক) $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-36}}$ নির্ণয় কর। [ম. বো. ২১]

(খ) দৃশ্যকল্প-২ এর সাহায্যে $\int_0^{\ln 2} g(e^x)\,dx$ নির্ণয় কর। [য. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $\int \{f(x)\}^3\,dx + \int \sqrt{1-\{f(x)\}^2}\,\ln\{f(x)\}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [চ. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-36}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{25\left(x^2-\frac{36}{25}\right)}}$

$= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2}}$

$= \frac{1}{5}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2}\right| + c$

$\left[\because \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c\right]$

$= \frac{1}{5}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{36}{25}}\right| + c$ **(Ans.)**

**খ** দৃশ্যকল্প-১ এ, $g(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$

$\therefore g(e^x) = \frac{(e^x)^2}{\{1+(e^x)^2\}^2} = \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$

$\therefore \int_0^{\ln 2} g(e^x)\,dx$

$= \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}\,dx$

ধরি, $1+e^{2x} = z$

$\Rightarrow 2e^{2x}\,dx = dz$

| x | ln2 | 0 |
|---|---|---|
| z | 5 | 2 |

$= \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{dz}{z^2}$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{z}\right]_2^5$

$= -\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{3}{20}$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$

$\therefore \int \{f(x)\}^3\,dx + \int \sqrt{1-\{f(x)\}^2}\,\ln\{f(x)\}\,dx$

$= \int \cos^3 x\,dx + \int \sqrt{1-\cos^2 x}\,\ln(\cos x)\,dx$

$= \frac{1}{4}\int 4\cos^3 x\,dx + \int \sin x \ln(\cos x)\,dx$

ধরি, $\cos x = z$

$\Rightarrow -\sin x\,dx = dz$

$= \frac{1}{4}\int (3\cos x + \cos 3x)\,dx + \int(-\ln z)\,dz$

$= \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{4}\frac{\sin 3x}{3} - \left[\ln z\int dz - \int\left\{\frac{d}{dx}(\ln z)\int dz\right\}dz\right]$

$= \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x - \left[z\ln z - \int \frac{1}{z}.z\,dz\right]$

$= \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x - \left[z\ln z - \int dz\right]$

$= \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x - [z\ln z - z] + c$

$= \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x - [\cos x \ln(\cos x) - \cos x] + c$

$= \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x - \cos x\{\ln(\cos x) - 1\} + c$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৮** $y = f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = e^x$

(ক) x অক্ষের সাথে $y = \sin x$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ যেকোনো একটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি. বো. ২৩]

(খ) $\int \frac{e^{a\tan^{-1}\{f(x)\}^2}}{1+\{f(x)^2\}^2}\,dx$ নির্ণয় কর।

(গ) $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln|g(x)|\,\sin^2 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [সি. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** $y = \sin x$ .... (i)

(i) নং ও x অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ একটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

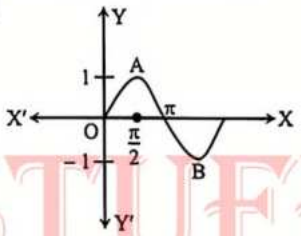
$= \int_0^{\pi} \sin x\,dx$

$= -[\cos x]_0^{\pi}$

$= -(\cos\pi - \cos 0)$

$= -(-1-1)$

$= 2$ বর্গ একক **(Ans.)**




**খ** দেওয়া আছে, $y = f(x) = \sqrt{x}$

ধরি, $I = \int \frac{e^{a\tan^{-1}\{f(x)\}^2}}{1+\{f(x)^2\}^2}\,dx$

$= \int \frac{e^{a\tan^{-1}(\sqrt{x})^2}}{1+\left\{(\sqrt{x})^2\right\}^2}$

$= \int \frac{e^{a\tan^{-1}x}}{(1+x^2)}\,dx$

ধরি, $a\tan^{-1}x = z$

$\therefore \frac{a}{1+x^2}\,dx = dz$

$= \frac{1}{a}\int e^z dz$

$= \frac{1}{a}e^z + c$

$= \frac{1}{a}e^{a\tan^{-1}x} + c$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = e^x$

ধরি, $I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln|g(x)| \sin^2 x\, dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln|e^x| \sin^2 x\, dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin^2 x\, dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} x.2\sin^2 x\, dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} x(1-\cos 2x)\, dx$

$= \frac{1}{4}\left[\int_0^{\pi} x\, dx - \int_0^{\pi} x\cos 2x\, dx\right]$

এখন, $\int x\cos 2x\, dx$

$= x\int \cos 2x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int \cos 2x\, dx\right\} dx$

$= \frac{x}{2}\sin 2x - \int \frac{\sin 2x}{2} dx$

$= \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{2\times 2}\cos 2x + c$

$= \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$

$\therefore I = \frac{1}{4}\left[\int_0^{\pi} x\, dx - \left\{\left(\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right)\right\}_0^{\pi}\right]$

$= \frac{1}{4}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{4}[\cos 2x]_0^{\pi}\right\}$

$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\pi^2}{2} - 0\right) - (0-0) - \frac{1}{4}(1-1)\right]$

$= \frac{\pi^2}{8}$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৯** $g(x) = \cot^{-1}(x-1)$, $f(x) = x$; $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15$

**(ক)** $\int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২৩]

**(খ)** $\int f(x)\, g(x)\, dx$ নির্ণয় কর। [ম. বো. ২১]

**(গ)** $f(x, y) = 0$ এবং x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল বের কর। [ব. বো. ২৩]

**সমাধান:**

**ক** $\int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{(\cos x + \sin x) + (\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x} dx$

$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln|\cos x + \sin x| + c$ **(Ans.)**

$\left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c\right]$

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = x$ এবং $g(x) = \cot^{-1}(x-1)$

$\int f(x)\, g(x)\, dx$

$= \int x\cot^{-1}(x-1)\, dx$

$= \cot^{-1}(x-1)\int x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\cot^{-1}(x-1)\int x\, dx\right\} dx$

$= \cot^{-1}(x-1)\cdot\frac{x^2}{2} - \int\left\{\frac{-1}{1+(x-1)^2}\cdot\frac{x^2}{2}\right\} dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}(x-1) + \int \frac{1}{1+x^2-2x+1}\cdot\frac{x^2}{2} dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}(x-1) + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2-2x+2} dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}(x-1) + \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-2x+2)+2x-2}{x^2-2x+2} dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}(x-1) + \frac{1}{2}\int\left(1 + \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\right) dx$

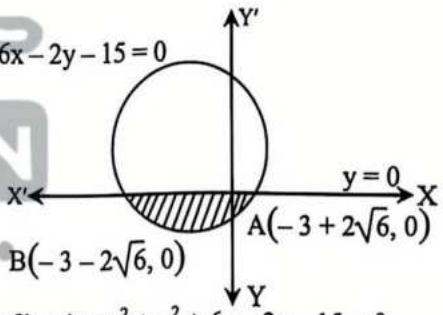
$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}(x-1) + \frac{1}{2}[x + \ln|x^2-2x+2|] + c$

$\left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c\right]$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}(x-1) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + c$ **(Ans.)**

**গ**

$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$




দেওয়া আছে, $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 25$

$\Rightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = 5^2$ ..... (i)

x অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$

বৃত্তটি x অক্ষকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

(i) নং সমীকরণে $y = 0$ বসিয়ে পাই,

$(x+3)^2 + 1 = 25$

$\Rightarrow (x+3)^2 = 24$

$\Rightarrow x + 3 = \pm 2\sqrt{6}$

$\therefore x = -3 \pm 2\sqrt{6}$

$\therefore A(-3+2\sqrt{6}, 0)$ এবং $B(-3-2\sqrt{6}, 0)$

(i) নং হতে পাই, $(y-1)^2 = 5^2 - (x+3)^2$

$\Rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{5^2-(x+3)^2}$

$\Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{5^2-(x+3)^2}$

x অক্ষের নিচে ক্ষুদ্রতর অংশে y ঋণাত্মক

অর্থাৎ $y = 1 - \sqrt{5^2-(x+3)^2}$

$\therefore$ (i) নং বৃত্ত এবং x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল,

$= \int_{-3-2\sqrt{6}}^{-3+2\sqrt{6}} (y_1 - y_2)\, dx$

$= \int_{-3-2\sqrt{6}}^{-3+2\sqrt{6}} \left[0 - 1 + \sqrt{5^2-(x+3)^2}\right] dx$

ADMISSION STUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ধরি, $z = x + 3$

$dz = dx$

| x | $-3-2\sqrt{6}$ | $-3+2\sqrt{6}$ |
|---|---|---|
| z | $-2\sqrt{6}$ | $2\sqrt{6}$ |

$$= \int_{-2\sqrt{6}}^{2\sqrt{6}} \left[-1+\sqrt{5^2-z^2}\right] dz$$

$$= -[z]_{-2\sqrt{6}}^{2\sqrt{6}} + \left[\frac{z\sqrt{5^2-z^2}}{2} + \frac{5^2}{2}\sin^{-1}\frac{z}{5}\right]_{-2\sqrt{6}}^{2\sqrt{6}}$$

$$= -\left(2\sqrt{6}+2\sqrt{6}\right) + \frac{2\sqrt{6}\sqrt{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{2\sqrt{6}\sqrt{5^2-\left(-2\sqrt{6}\right)^2}}{2} - \frac{25}{2}\sin^{-1}\left(\frac{-2\sqrt{6}}{5}\right)$$

$$= -4\sqrt{6} + 2\times\frac{2\sqrt{6}\sqrt{25-24}}{2} + \left(2\times\frac{25}{2}\right)\sin^{-1}\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$= -4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 25\sin^{-1}\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$= 25\sin^{-1}\frac{2\sqrt{6}}{5} - 2\sqrt{6} \text{ বর্গএকক (Ans.)}$$

**প্রশ্ন ▶ ১০** $f(x) = \sin x$

$g(x, y) = 25x^2 + 36y^2 - 900$

**(ক)** $\int \tan^{-1}x\, dx$ নির্ণয় কর। [ম. বো. ২৩]

**(খ)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{9-\{f(x)\}^2} dx$ নির্ণয় কর। [ম. বো. ২৩]

**(গ)** $g(x, y) = 0$ বক্ররেখা এবং $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩; ঢা. বো. ২১; চ. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** $\int \tan^{-1}x\, dx = \tan^{-1}x \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx}\tan^{-1}x \int dx\right\} dx$

$$= x\tan^{-1}x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c \text{ (Ans.)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{9-\{f(x)\}^2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{9-\sin^2 x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dz}{3^2-z^2}$$

$$= \frac{1}{2\times 3}\left[\ln\left|\frac{3+z}{3-z}\right|\right]_0^1$$

ধরি, $\sin x = z$

$\Rightarrow \cos x\, dx = dz$

| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| z | 0 | 1 |

$$\left[\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\ln\frac{4}{2} - \ln\frac{3}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{6}[\ln 2 - \ln 1]$$

$$= \frac{1}{6}[\ln 2 - 0]$$

$$= \frac{1}{6}\ln 2 \text{ (Ans.)}$$

**গ** দেওয়া আছে, $g(x, y) = 25x^2 + 36y^2 - 900$

আবার, $g(x, y) = 0$

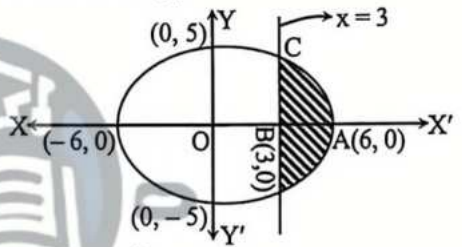
$\Rightarrow 25x^2 + 36y^2 - 900 = 0$

$\Rightarrow 25x^2 + 36y^2 = 900$ .....(i)

$\Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

এবং $x = 3$ .....(ii)




(i) নং হতে পাই,

$36y^2 = 900 - 25x^2$

$\Rightarrow 36y^2 = 25(36 - x^2)$

$\Rightarrow y^2 = \frac{25}{36}(36 - x^2)$

$\therefore y = \pm\frac{5}{6}\sqrt{36-x^2}$

প্রথম চতুর্ভাগে y ধনাত্মক অর্থাৎ $y = \frac{5}{6}\sqrt{36-x^2}$

চিত্র হতে B(3, 0) এবং A(6, 0)

(i) নং ও (ii) নং দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল

= 2 × ABC অংশের ক্ষেত্রফল,

$$= 2\int_3^6 \frac{5}{6}\sqrt{36-x^2} dx$$

$$= \frac{5}{3}\int_3^6 \sqrt{6^2-x^2} dx$$

$$= \frac{5}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{36-36\sin^2\theta}\,.6\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{5}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{36\cos^2\theta}\,.6\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{5}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 36\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 60\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$

ধরি, $x = 6\sin\theta$

$\Rightarrow dx = 6\cos\theta\, d\theta$

| x | θ |
|---|---|
| 3 | $\frac{\pi}{6}$ |
| 6 | $\frac{\pi}{2}$ |

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$= 30\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\, d\theta$

$= 30\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos2\theta)\, d\theta$

$= 30\left[\theta + \frac{\sin2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 30\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

$= 30\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

$= 30\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$= 10\pi - \frac{15\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১১** দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \sin x$
দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = e^x$

(ক) $h(x) = \tan x$ হলে, $\int \frac{h'(x)}{\{1+h(x)\}^2}\, dx$ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২]

(খ) $\int g(x)\, f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx$ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২২]

(গ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, f(2x)\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২২]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $h(x) = \tan x$

প্রদত্ত রাশি $= \int \frac{h'(x)}{\{1+h(x)\}^2} dx$

$= \int \frac{dz}{z^2}$ | ধরি, $z = 1 + h(x)$ $\therefore dz = h'(x).dx$

$= \int z^{-2}\, dz = \frac{z^{-2+1}}{-2+1} + c$

$= -\frac{1}{z} + c = \frac{-1}{1+h(x)} + c$

$= \frac{-1}{1+\tan x} + c$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $g(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

ধরি,

$I = \int g(x)\, f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx$

$= \int e^x \cos x\, dx$

$= \cos x \int e^x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\cos x)\int e^x\, dx\right\} dx$

$= \cos x.e^x - \int (-\sin x)\, e^x\, dx$

$= e^x\cos x + \int \sin x\, e^x\, dx$

$= e^x\cos x + \sin x \int e^x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\sin x)\int e^x\, dx\right\} dx$

$\Rightarrow I = e^x\cos x + e^x\sin x - \int \cos x\, e^x\, dx + c'$

$\Rightarrow I = e^x\cos x + e^x\sin x - I + c' \left[\because I = \int e^x \cos x\, dx\right]$

$\Rightarrow 2I = e^x(\cos x + \sin x) + c'$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + c'$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\therefore f(2x) = \sin 2x$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, f(2x)\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x \sin 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos(2x-x) - \cos(2x+x)\}\, dx$

$[2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos 3x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left[\sin x - \frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3}\right) - \left(\sin 0 - \frac{\sin(3\times 0)}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{-1}{3} - 0 + 0\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১২** দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \cos x$, $h(x) = x^4$

দৃশ্যকল্প-২: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ একটি উপবৃত্ত এবং $x^2 + y^2 = 9$ একটি বৃত্ত।

(ক) $\int e^{\ln(\ln x)}\, dx$ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: সকল বো. ১৮; ঢা. বো. ১৭]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)\}^2\, dx + \int_0^1 \frac{x}{1+h(x)}\, dx$ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর উপবৃত্ত এবং বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ১ম চতুর্ভাগের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২]

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধানঃ**

**ক** $\int e^{\ln(\ln x)}\,dx$

$= \int \ln x\,dx$

$= \ln x \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int dx\right\} dx$

$= x\ln x - \int \frac{1}{x}.x\,dx$

$= x\ln x - \int dx$

$= x\ln x - x + c$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $g(x) = \cos x$ এবং $h(x) = x^4$

প্রদত্ত রাশি $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)\}^2\,dx + \int_0^1 \frac{x}{1+h(x)}\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2\,dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

ধরি, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2\,dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

$= I_1 + I_2$

$\therefore I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - 0\right]$

$= \frac{\pi}{4}$

$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+z^2}\,dz$

$= \frac{1}{2}[\tan^{-1} z]_0^1$

$= \frac{1}{2}(\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

ধরি, $z = x^2$

$\Rightarrow dz = 2x\,dx$

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| z | 0 | 1 |

$\therefore I = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$ **(Ans.)**

**গ** প্রদত্ত উপবৃত্ত, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16}$

$\Rightarrow y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)$

$\Rightarrow y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2)$

$\therefore y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$ .... (i)

$= \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$

$= y_1$ (ধরি)

এবং বৃত্ত $x^2 + y^2 = 9$

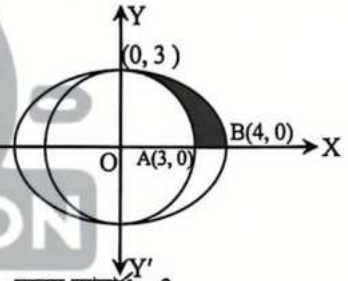
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2$

$\Rightarrow y^2 = 9 - x^2$

$\therefore y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ .... (ii)

$= \sqrt{9 - x^2}$ [১ম চতুর্ভাগে y ধনাত্মক]

$= y_2$ (ধরি)




চিত্রে, OA = বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 3

$\therefore$ A(3, 0)

উপবৃত্তের সমীকরণে $y = 0$ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2}{16} + \frac{0}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{16} = 1$

$\Rightarrow x^2 = 16$

$\therefore x = \pm 4$

উপবৃত্তটি ধনাত্মক দিকে (4, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ B(4, 0)

(i) নং ও (ii) নং দ্বারা প্রথম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$= \int_0^4 y_1\,dx - \int_0^3 y_2\,dx$

$= \int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\,dx - \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$

$= \frac{3}{4}\int_0^4 \sqrt{4^2 - x^2}\,dx - \int_0^3 \sqrt{3^2 - x^2}\,dx$

$= \frac{3}{4}\left[\frac{x\sqrt{4^2 - x^2}}{2} + \frac{4^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_0^4 - \left[\frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2} + \frac{3^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_0^3$

$\left[\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c\right]$

$= \frac{3}{4}[(0 + 8\sin^{-1}1) - (0 + 0)] - \left[\left(0 + \frac{9}{2}\sin^{-1}1\right) - (0 + 0)\right]$

$= \frac{3}{4}\times 8\times\frac{\pi}{2} - \left(\frac{9}{2}\times\frac{\pi}{2}\right) = 3\pi - \frac{9\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ বর্গ একক। **(Ans.)**



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ১৩** দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \cot^{-1}x$
দৃশ্যকল্প-২: $y^2 = 2x$

(ক) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$ নির্ণয় কর। [য. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে $\int_1^{\sqrt{3}} x\,g(x)\,dx$ নির্ণয় কর।
[য. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সি. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এবং $x = 3y$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২২; রা. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{3\left(\frac{5}{3}-x^2\right)}}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^2 - x^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1}\frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}} + c$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right) + c$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $g(x) = \cot^{-1}x$

$\therefore \int_1^{\sqrt{3}} x g(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} x\cot^{-1}x\,dx$

এখন, $\int x\cot^{-1}x\,dx$

$= \cot^{-1}x \int x\,dx - \int \left\{\frac{d}{dx}\cot^{-1}x \int x\,dx\right\} dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}x + \int \frac{x^2}{2(1+x^2)}\,dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}x + \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}x + \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cot^{-1}x + c$

$\therefore \int_1^{\sqrt{3}} x\cot^{-1}x\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[x^2\cot^{-1}x + x + \cot^{-1}x\right]_1^{\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{2}\left[3\cot^{-1}\sqrt{3} + \sqrt{3} + \cot^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}1 - 1 - \cot^{-1}1\right]$

$= \frac{1}{2}\left[3 \times \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} - 1 - \frac{\pi}{4}\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1 + \frac{\pi}{6}\right)$ **(Ans.)**

**গ** প্রদত্ত রেখা, $x = 3y$ ..... (i)

দৃশ্যকল্প-২ হতে, $y^2 = 2x$ ..... (ii)

$\Rightarrow y^2 = 6y$

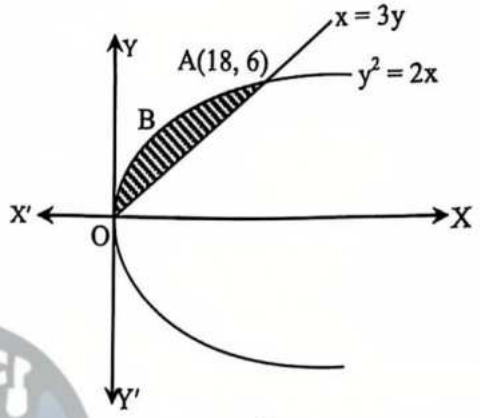
$\Rightarrow y^2 - 6y = 0$

$\Rightarrow y(y-6) = 0$

$\therefore y = 0, 6$

$y = 0$ হলে, $x = 0$

$y = 6$ হলে, $x = 18$




(i) নং ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দু O(0, 0) এবং A(18, 6)

এখন, (ii) নং হতে, $y = \sqrt{2}\sqrt{x} = y_1$ (ধরি)

(i) নং হতে, $y = \frac{x}{3} = y_2$ (ধরি)

(i) নং ও (ii) নং দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$= \int_0^{18} (y_1 - y_2)\,dx$

$= \int_0^{18} \left(\sqrt{2}\sqrt{x} - \frac{x}{3}\right) dx$

$= \sqrt{2}\int_0^{18} \sqrt{x}\,dx - \frac{1}{3}\int_0^{18} x\,dx$

$= \sqrt{2}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{18} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{18}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}(18)^{\frac{3}{2}} - 0 - \frac{1}{6} \times (18)^2 + 0$

$= 18$ বর্গ একক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৪** $g(x, y) = 16x^2 + 25y^2 - 400$
$f(z) = z\ln z$

(ক) $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt{1-\cot^2 x}}\,dx$ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২২]

(খ) $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩]

(গ) $g(x, y) = 0$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের অর্ধাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [চ. বো. ২২]

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**সমাধান:**

**ক** $\int \frac{\text{cosec}^2 x}{\sqrt{1-\cot^2 x}}\,dx$

ধরি, $\cot x = z$
$\Rightarrow -\text{cosec}^2 x\,dx = dz$
$\therefore \text{cosec}^2 x\,dx = -dz$

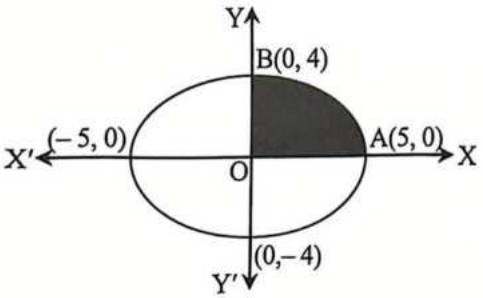
$= -\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$
$= -\sin^{-1} z + c$
$= -\sin^{-1}(\cot x) + c$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে,
$f(z) = z\ln z$
$\therefore f(x) = x\ln x$
$\therefore \int f(x)\,dx = \int x\ln x\,dx$

$= \ln x \int x\,dx - \int \left\{\frac{d}{dx}\ln x \int x\,dx\right\} dx$
$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx$
$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$
$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$

$\therefore \int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^{\sqrt{e}}$
$= \frac{1}{2}\left[x^2\ln x - \frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}}$
$= \frac{1}{2}\left[e\ln\sqrt{e} - \frac{e}{2} - \ln 1 + \frac{1}{2}\right]$
$= \frac{1}{2}\left(e\ln e^{\frac{1}{2}} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\ln e - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\right)$
$= \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $g(x, y) = 16x^2 + 25y^2 - 400$
এখানে, $g(x, y) = 0$




$\Rightarrow 16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$
$\Rightarrow 25y^2 = 400 - 16x^2 = 16(25 - x^2)$
$\therefore y = \pm\frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$

বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের অর্ধাংশের ক্ষেত্রফল,
$= 2 \times$ OAB অংশের ক্ষেত্রফল
$= 2\int_0^5 y\,dx$
$= 2\int_0^5 \frac{4}{5}\sqrt{5^2 - x^2}\,dx$ [$\because$ x অক্ষের উপরিভাগের জন্য ধনাত্মক]

$= \frac{8}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5^2 - 5^2\sin^2\theta}\,5\cos\theta\,d\theta$
$= \frac{8}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5^2(1 - \sin^2\theta)}\,5\cos\theta\,d\theta$
$= \frac{8}{5}\times 25\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cos\theta\,d\theta$
$= 40\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$
$= 20\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\,d\theta$
$= 20\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)\,d\theta$
$= 20\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$= 20 \times \frac{\pi}{2}$
$= 10\pi$ বর্গ একক **(Ans.)**

ধরি, $x = 5\sin\theta$
$dx = 5\cos\theta\,d\theta$

| x | 0 | 5 |
|---|---|---|
| θ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |

অথবা, ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^5 y\,dx$
$= 2\int_0^5 \frac{4}{5}\sqrt{5^2 - x^2}\,dx$
$= \frac{8}{5}\left[\frac{x\sqrt{5^2 - x^2}}{2} + \frac{5^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}\right]_0^5$
$= \frac{8}{5}\left[\frac{5\sqrt{5^2 - 5^2}}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{5}{5} - 0\right]$
$= \frac{8}{5}\times\frac{25}{2}\times\sin^{-1}1$
$= 20 \times \frac{\pi}{2}$
$= 10\,\pi$ বর্গএকক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৫** $P = (x-4)^2(x-3)$ এবং $f(x) = 2x + 5$

(ক) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২২]

(খ) $\int \frac{x}{P}\,dx$ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২২]

(গ) $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{f(x)}}$ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২১]



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



সমাধানঃ

**ক** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

$= \int \frac{1}{\sqrt{4\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}}dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2}}dx$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{1}{2}} + c$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(2x) + c$ **(Ans.)**

**খ** ধরি, $\frac{x}{(x-4)^2(x-3)} \equiv \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{x-3}$ ..... (i)

উভয়পক্ষে $(x-4)^2(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x \equiv A(x-4)(x-3) + B(x-3) + C(x-4)^2$ ..... (ii)

(ii) নং সমীকরণে $x = 3$ বসিয়ে পাই, $3 = C(-1)^2$

$\Rightarrow C = 3$

(ii) নং সমীকরণে $x = 4$ বসিয়ে পাই, $4 = B(1)$

$\Rightarrow B = 4$

(ii) নং সমীকরণে $x^2$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $0 = A + C$

$A = -C = -3$

$\therefore \frac{x}{(x-4)^2(x-3)} = \frac{-3}{x-4} + \frac{4}{(x-4)^2} + \frac{3}{x-3}$

$\therefore \int \frac{x}{(x-4)^2(x-3)}dx = \int \frac{-3}{x-4}dx + \int \frac{4}{(x-4)^2}dx + \int \frac{3}{x-3}dx$

$= -3\ln|x-4| + 4\int (x-4)^{-2}dx + 3\ln|x-3| + c$

$= 3\ln\left|\frac{x-3}{x-4}\right| + 4\frac{(x-4)^{-2+1}}{-2+1} + c$

$= 3\ln\left|\frac{x-3}{x-4}\right| - \frac{4}{x-4} + c$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = 2x + 5$

$\therefore \int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{f(x)}}$

$= \int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{2x+5}}$

ধরি, $2x + 5 = z^2$

$\Rightarrow 2dx = 2z\,dz$

$\Rightarrow dx = z\,dz$

আবার, $2x = z^2 - 5$

$2x + 1 = z^2 - 4$

$= \int \frac{z\,dz}{(z^2-4)\sqrt{z^2}}$

$= \int \frac{dz}{z^2-2^2}$

$= \frac{1}{2\times 2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + c$

$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2x+5}-2}{\sqrt{2x+5}+2}\right| + c$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৬** $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+4)(x-1)}$ এবং $g(x) = x^2$ দুটি ফাংশন।

(ক) $\int \ln(1+x)\,dx$ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২৩]

(খ) $\int f(x)\,dx$ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্নঃ ব. বো. ২২; সি. বো. ২২]

(গ) $y = 4g(x)$ ও $y = 2x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [দি. বো. ২২]

সমাধানঃ

**ক** $\int \ln(1+x)\,dx$

$= \ln(1+x)\int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\ln(1+x)\int dx\right\}dx$

$= x\ln(1+x) - \int \frac{1}{1+x}x\,dx$

$= x\ln(1+x) - \int \frac{(1+x)-1}{1+x}dx$

$= x\ln(1+x) - \int\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx$

$= x\ln(1+x) + \ln(1+x) - x + c$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+4)(x-1)}$

$\therefore \int f(x)\,dx = \int \frac{2x+1}{(x^2+4)(x-1)}dx$

ধরি, $\frac{2x+1}{(x^2+4)(x-1)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-1}$ ..... (i)

উভয়পক্ষকে $(x^2+4)(x-1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$2x + 1 \equiv (Ax+B)(x-1) + C(x^2+4)$ .... (ii)

(ii) নং সমীকরণে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$2\times 1 + 1 = 0 + C(1^2+4)$

$\Rightarrow 3 = 5C$

$\therefore C = \frac{3}{5}$

এখন, (ii) নং সমীকরণের $x^2$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + C = 0$

$\Rightarrow A + \frac{3}{5} = 0$

$\therefore A = -\frac{3}{5}$

x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$B - A = 2$

$\Rightarrow B + \frac{3}{5} = 2$

$\Rightarrow B = 2 - \frac{3}{5}$

$\therefore B = \frac{7}{5}$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\therefore \frac{2x+1}{(x^2+4)(x-1)} = \frac{-\frac{3x}{5}+\frac{7}{5}}{x^2+4} + \frac{\frac{3}{5}}{x-1}$

$= \frac{3}{5(x-1)} - \frac{3x-7}{5(x^2+4)}$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$\therefore \int \frac{2x+1}{(x^2+4)(x-1)}\,dx$$

$$= \int \frac{3}{5(x-1)}\,dx - \int \frac{3x-7}{5(x^2+4)}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{3}{5}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx + \frac{7}{5}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\ln|x-1| - \left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \frac{7}{5}\int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\ln|x-1| - \frac{3}{10}\ln|x^2+4| + \left(\frac{7}{5}\times\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

$$= \frac{3}{5}\ln|x-1| - \frac{3}{10}\ln|x^2+4| + \frac{7}{10}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c \text{ (Ans.)}$$

**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = x^2$

এবং $y = 4g(x)$

$\therefore y = 4x^2$ ..... (i)

এবং $y = 2x$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণে $y = 2x$ বসিয়ে পাই,

$2x = 4x^2$

$\Rightarrow 2x^2 - x = 0$

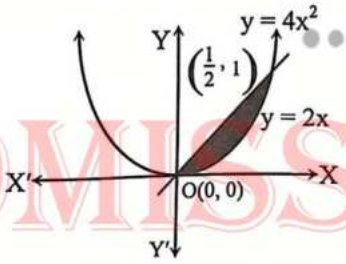
$\Rightarrow x(2x-1) = 0$

$\therefore x = 0, x = \frac{1}{2}$

(ii) নং হতে,

$x = 0$ হলে, $y = 0$

$x = \frac{1}{2}$ হলে, $y = 1$




$\therefore$ (i) নং ও (ii) নং দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 4x^2)\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx - 4\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} - 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{2}\left(\frac{1}{2^2} - 0\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2^3} - 0\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \left(\frac{4}{3}\times\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{3-2}{12}$$

$$= \frac{1}{12}$$ বর্গএকক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৭** $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 36$, $g(x) = \cos x$

**(ক)** $\int \sin^{-1}x\,dx$ নির্ণয় কর। [ম. বো. ২২]

**(খ)** $\int_1^5 \frac{1}{x}\sqrt{1 - \{g(\ln x)\}^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[ম. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৯]

**(গ)** $f(x, y) = 0$ কণিক দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[ম. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২; ব. বো. ২১; ঢা. বো. ১৯]

**সমাধান:**

**ক** $\int \sin^{-1}x\,dx$

$$= \sin^{-1}x\int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\sin^{-1}x\int dx\right\}dx$$

$$= x\sin^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$= x\sin^{-1}x + \sqrt{z} + c$$

$$= x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c \text{ (Ans.)}$$

ধরি, $1 - x^2 = z$

$\Rightarrow -2x\,dx = dz$

$\therefore -x\,dx = \frac{1}{2}dz$

**খ** দেওয়া আছে, $g(x) = \cos x$

$\therefore g(\ln x) = \cos(\ln x)$

$$\int_1^5 \frac{1}{x}\sqrt{1 - \{g(\ln x)\}^2}\,dx$$

$$= \int_1^5 \frac{1}{x}\sqrt{1 - \{\cos(\ln x)\}^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\ln 5} \sqrt{1 - \cos^2 z}\,dz$$

$$= \int_0^{\ln 5} \sin z\,dz$$

$$= -\left[\cos z\right]_0^{\ln 5}$$

$$= -\cos(\ln 5) + \cos 0$$

$$= -\cos(\ln 5) + 1$$

$$= 1 - \cos(\ln 5) \text{ (Ans.)}$$

ধরি, $\ln x = z$

$\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dz$

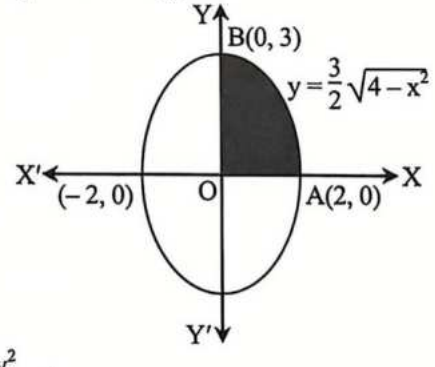
| x | 1 | 5 |
|---|---|---|
| z | 0 | ln5 |

**গ** দেওয়া আছে, $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 36$

এবং $f(x, y) = 0$

$\Rightarrow 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

$\Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 36$ ..... (i)




$\Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



(i) নং হতে পাই,

$4y^2 = 36 - 9x^2$

$\Rightarrow 4y^2 = 9(4 - x^2)$

$\Rightarrow y^2 = \frac{9}{4}(4 - x^2)$

$\therefore y = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$

x অক্ষের ছেদবিন্দুতে কোটি অর্থাৎ, $y = 0$

(i) নং এ $y = 0$ বসিয়ে পাই,

$9x^2 + 4 \times 0 = 36$

$\Rightarrow x^2 = 4$

$\therefore x = \pm 2$

(i) নং উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$= 4 \times$ OAB অংশের ক্ষেত্রফল

$= 4\int_0^2 y\,dx$

$= 4\int_0^2 \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}\,dx$ [$\because$ প্রথম চতুর্ভাগে y ধনাত্মক]

$= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2\theta}\, 2\cos\theta\,d\theta$

ধরি, $x = 2\sin\theta$

$\therefore dx = 2\cos\theta\,d\theta$

| x | 0 | 2 |
|---|---|---|
| θ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |

$= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta.2\cos\theta\,d\theta$

$= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta\,d\theta$

$= 6 \times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\,d\theta$

$= 6 \times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)\,d\theta$

$= 12\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 12\left\{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - (0 + 0)\right\}$

$= 12 \times \frac{\pi}{2} + 12 \times 0 = 6\pi$ বর্গএকক **(Ans.)**

**অথবা,**

ক্ষেত্রফল $= 4\int_0^2 y\,dx$

$= 4\int_0^2 \frac{3}{2}\sqrt{2^2 - x^2}\,dx$ [১ম চতুর্ভাগে y ধনাত্মক]

$= 4 \times \frac{3}{2}\left[\frac{x\sqrt{2^2 - x^2}}{2} + \frac{2^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$

$= 6\left[\frac{2\sqrt{2^2 - 2^2}}{2} + 2\sin^{-1}\frac{2}{2} - 0 - 0\right]$

$= 6 \times 2 \times \frac{\pi}{2}$

$= 6\pi$ বর্গ একক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৮** দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \sin x$

দৃশ্যকল্প-২: $y^2 = 12x$

(ক) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২১]

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g'(x)\,dx}{\{1 + g(x)\}\{2 + g(x)\}}$ এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$

$= \int_1^{e^3} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \ln x}\,dx$

$= [\ln(1 + \ln x)]_1^{e^3}$ $\left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x)) + c\right]$

$= \ln(1 + \ln e^3) - \ln(1 + \ln 1)$

$= \ln(1 + 3) - \ln(1 + 0)$

$= \ln 4 - \ln 1$

$= \ln 4 - 0$

$= \ln 4$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $g(x) = \sin x$

$g'(x) = \cos x$

প্রদত্ত রাশি,

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g'(x)\,dx}{\{1 + g(x)\}\{2 + g(x)\}}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{(1 + \sin x)(2 + \sin x)}$

$= \int_1^2 \frac{dz}{z(1 + z)}$

ধরি, $1 + \sin x = z$

$\Rightarrow \cos x\,dx = dz$

| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| z | 1 | 2 |

$= \int_1^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{1 + z}\right)dz$

$= \int_1^2 \frac{1}{z}\,dz - \int_1^2 \frac{1}{1 + z}\,dz$

$= [\ln z]_1^2 - [\ln(1 + z)]_1^2$

$= (\ln 2 - \ln 1) - (\ln 3 - \ln 2)$

$= \ln 2 - 0 - \ln 3 + \ln 2$

$= 2\ln 2 - \ln 3$

$= \ln 2^2 - \ln 3$

$= \ln 4 - \ln 3$

$= \ln\frac{4}{3}$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs

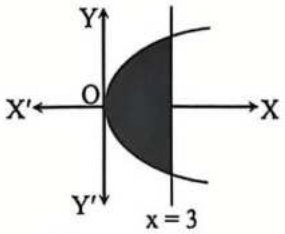


**গ** দৃশ্যকল্প-২ হতে,

$y^2 = 12x$

$\Rightarrow y^2 = 4 \times 3x$

$\Rightarrow y = 2\sqrt{3}\sqrt{x}$




এর উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ: $x = 3$

$\therefore$ আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^3 y\,dx$

$= 2\int_0^3 2\sqrt{3}\sqrt{x}\,dx$

$= 4\sqrt{3}\int_0^3 \sqrt{x}\,dx$

$= 4\sqrt{3}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^3$

$= 4\sqrt{3}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^3$

$= 4\sqrt{3} \times \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$

$= 4\sqrt{3} \times \frac{2}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} - 0\right)$

$= \frac{8}{3} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}}$

$= 24$ বর্গ একক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ১৯** দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \tan x$

দৃশ্যকল্প-২: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 225$

**(ক)** $\int \ln x^3\,dx$ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২১]

**(খ)** যোগজ নির্ণয় কর: $\int \frac{dx}{5 + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ [ঢা. বো. ২১]

**(গ)** $g(x, y) = 0$ দ্বারা x অক্ষের উপরিভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ম. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** $\int \ln x^3\,dx$

$= 3\int \ln x\,dx$

$= 3\left[\ln x \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx}\ln x \int dx\right\} dx\right]$

$= 3\left[x\ln x - \int \frac{1}{x} x\,dx\right]$

$= 3\left[x\ln x - \int dx\right]$

$= 3x\ln x - 3x + c$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \tan x$

প্রদত্ত রাশি $= \int \frac{dx}{5 + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

$= \int \frac{dx}{5 + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

$= \int \frac{dx}{5 + \cot x}$

$= \int \frac{1}{5 + \frac{\cos x}{\sin x}} dx$

$= \int \frac{\sin x}{5\sin x + \cos x} dx$

ধরি, $\sin x = m(5\sin x + \cos x) + n\frac{d}{dx}(5\sin x + \cos x)$

$= 5m \sin x + m\cos x + n(5\cos x - \sin x)$

$= 5m \sin x + m\cos x + 5n\cos x - n\sin x$

$\therefore \sin x = (5m - n)\sin x + (m + 5n)\cos x$

উভয়পক্ষ হতে $\sin x$ ও $\cos x$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$5m - n = 1$ ..... (i)

$m + 5n = 0$ ..... (ii)

এখন, (i) $\times 5 \Rightarrow 25m - 5n = 5$

(ii) $\times 1 \Rightarrow \quad m + 5n = 0$

(+) করে, $26m = 5$

$\Rightarrow m = \frac{5}{26}$

(ii) নং এ m এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{5}{26} + 5n = 0$

$\Rightarrow 5n = -\frac{5}{26}$

$\therefore n = -\frac{1}{26}$

$\therefore \int \frac{\sin x}{5\sin x + \cos x} dx$

$= \int \frac{\frac{5}{26}(5\sin x + \cos x) - \frac{1}{26}(5\cos x - \sin x)}{5\sin x + \cos x} dx$

$= \frac{5}{26}\int dx - \frac{1}{26}\int \frac{5\cos x - \sin x}{5\sin x + \cos x} dx$

$= \frac{5}{26}x - \frac{1}{26}\ln|5\sin x + \cos x| + c$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** দেওয়া আছে, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 225$

এখন, $g(x, y) = 0$

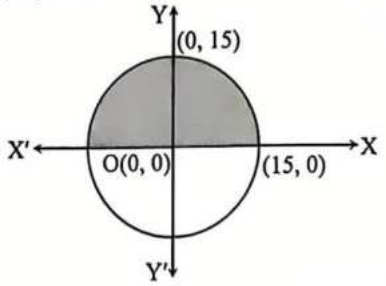
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 225 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 225$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = (15)^2$

$\Rightarrow y^2 = (15)^2 - x^2$

$\Rightarrow y = \sqrt{(15)^2 - x^2}$




∴ আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$= 2\int_0^{15} y\,dx$

$= 2\int_0^{15} \sqrt{(15)^2 - x^2}\,dx$

ধরি, $x = 15\sin\theta$

$\Rightarrow dx = 15\cos\theta\,d\theta$

| x | 0 | 15 |
|---|---|---|
| θ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(15)^2 - (15)^2\sin^2\theta}\,.15\cos\theta\,d\theta$

$= 30 \times 15\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\theta}\,.\cos\theta\,d\theta$

$= 450\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta.\cos\theta\,d\theta$

$= 225\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\,d\theta$

$= 225\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos2\theta)\,d\theta$

$= 225\left[\theta + \frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 225\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - \left(0 + \frac{0}{2}\right)\right]$

$= 225\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right)$

$= \frac{225\pi}{2}$ বর্গ একক **(Ans.)**

**অথবা,** ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^{15} y\,dx$

$= 2\int_0^{15} \sqrt{(15)^2 - x^2}\,dx$

$= 2\left[\frac{x\sqrt{15^2 - x^2}}{2} + \frac{15^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{15}\right]_0^{15}$

$= 2\left[\frac{15\sqrt{15^2 - 15^2}}{2} + \frac{15^2}{2}\sin^{-1}\frac{15}{15} - 0 - 0\right]$

$= 2 \times \frac{225}{2}\sin^{-1}1$

$= \frac{225\pi}{2}$ বর্গ একক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২০** $f(x) = x^2$

**(ক)** $\int \frac{5e^{2x}}{1 + e^{4x}}\,dx$ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২১]

**(খ)** $\int\left[\frac{1 + \{f(x)\}^2}{1 + f(x)} + \frac{1}{f(x) + \sqrt{f(x)} + 1}\right]dx$ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২১]

**(গ)** $\int_1^2\left[\sqrt{f(x)}e^{f(x)} + \frac{\{f(x) - 1\}^2}{f(x)}\right]dx$ এর মান নির্ণয় কর। [রা. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** $\int \frac{5e^{2x}}{1 + e^{4x}}\,dx$

ধরি, $z = e^{2x}$

$\Rightarrow dz = 2e^{2x}\,dx$

$= \int \frac{5e^{2x}}{1 + (e^{2x})^2}\,dx$

$= \frac{5}{2}\int \frac{2e^{2x}\,dx}{1 + (e^{2x})^2}$

$= \frac{5}{2}\int \frac{dz}{1 + z^2}$

$= \frac{5}{2}\tan^{-1}z + c$

$= \frac{5}{2}\tan^{-1}e^{2x} + c$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = x^2$

$\therefore \int\left[\frac{1 + \{f(x)\}^2}{1 + f(x)} + \frac{1}{f(x) + \sqrt{f(x)} + 1}\right]dx$

$= \int\left[\frac{1 + x^4}{1 + x^2} + \frac{1}{x^2 + x + 1}\right]dx$

$= \int \frac{1 + x^4 + 1 - 1}{1 + x^2}\,dx + \int \frac{1}{x^2 + 2.x\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4}}\,dx$

$= \int \frac{2 + x^4 - 1}{1 + x^2}\,dx + \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx$

$= \int \frac{2}{1 + x^2}\,dx + \int \frac{(x^2)^2 - 1^2}{1 + x^2}\,dx + \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$

$= 2.\tan^{-1}x + \int \frac{(1 + x^2)(x^2 - 1)}{(1 + x^2)}\,dx + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= 2\tan^{-1}x + \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + c$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = x^2$

$\therefore \int_1^2\left[\sqrt{f(x)}e^{f(x)} + \frac{\{f(x) - 1\}^2}{f(x)}\right]dx$

$= \int_1^2\left[\sqrt{x^2}\,.\,e^{x^2} + \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2}\right]dx$

$= \int_1^2 xe^{x^2}\,dx + \int_1^2 \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2}\,dx$

$= \int_1^4 \frac{1}{2}e^z\,dz + \int_1^2\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\left[e^z\right]_1^4 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x}\right]_1^2$

ধরি, $x^2 = z$

$\Rightarrow 2xdx = dz$

$\therefore xdx = \frac{1}{2}dz$

| x | 1 | 2 |
|---|---|---|
| z | 1 | 4 |

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$= \frac{1}{2}(e^4 - e^1) + \left[\left(\frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 - 1\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}(e^4 - e) + \frac{16 - 24 - 3}{6} - \frac{1 - 6 - 3}{3}$$
$$= \frac{1}{2}(e^4 - e) + \left(\frac{-11}{6}\right) + \frac{8}{3}$$
$$= \frac{1}{2}(e^4 - e) + \frac{8}{3} - \frac{11}{6}$$
$$= \frac{1}{2}(e^4 - e) + \frac{16 - 11}{6}$$
$$= \frac{1}{2}(e^4 - e) + \frac{5}{6} \text{ (Ans.)}$$

**প্রশ্ন ▶ ২১** $f(x) = \sin x - \cos x$; $g(x) = x^4$

**(ক)** $\int \{f(x)\}^2 dx$ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২১]

**(খ)** $\int \frac{1 - f(x)}{1 + f(x)} dx$ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২১]

**(গ)** প্রমাণ কর, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(\cos\theta) d\theta = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$ [রা. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x - \cos x$

$\therefore \int \{f(x)\}^2 dx$
$= \int (\sin x - \cos x)^2 dx$
$= \int (\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x) dx$
$= \int (1 - \sin 2x) dx$
$= \int dx - \int \sin 2x \, dx$
$= x + \frac{\cos 2x}{2} + c$ (Ans.)

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x - \cos x$

ধরি, $I = \int \frac{1 - f(x)}{1 + f(x)} dx$
$= \int \frac{1 - (\sin x - \cos x)}{1 + (\sin x - \cos x)} dx$
$= \int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx$
$= \int \frac{-1(1 + \sin x - \cos x) + 2}{1 + \sin x - \cos x} dx$
$= -\int dx + 2\int \frac{1}{1 + \sin x - \cos x} dx$

$I = -x + 2I_1$ ..... (i)

যেখানে, $I_1 = \int \frac{1}{1 + \sin x - \cos x} dx$
$= \int \frac{1}{1 + \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} - \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}} dx$
$= \int \frac{1 + \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2} - 1 + \tan^2\frac{x}{2}} dx$
$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2}} dx$

ধরি, $\tan\frac{x}{2} = z$
$\Rightarrow \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} dx = dz$
$\Rightarrow \sec^2\frac{x}{2} dx = 2 dz$

$= \int \frac{2dz}{2z^2 + 2z}$
$= \int \frac{1}{z(z+1)} dz$
$= \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) dz$
$= \ln z - \ln(z+1) + c$
$= \ln \frac{z}{z+1} + c$
$= \ln \frac{\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan\frac{x}{2}} + c$

$\therefore I = -x + 2\ln \frac{\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan\frac{x}{2}} + c$ (Ans.) [i থেকে]

**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = x^4$

$\therefore g(\cos\theta) = \cos^4\theta$

এখন, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(\cos\theta) d\theta$
$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4\theta \, d\theta$
$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2\theta)^2 d\theta$
$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta)^2 d\theta$
$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta$
$= \frac{1}{4}\left[\theta + 2\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4 \times 2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2 2\theta \, d\theta$
$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right) - 0\right] + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4\theta) d\theta$
$= \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left[\theta + \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$
$= \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi}{4}\right) - 0\right]$
$= \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{32} + 0$
$= \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$ (Proved)

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ২২** দৃশ্যকল্প-১: $h(\theta) = \tan^{-1}\theta$
দৃশ্যকল্প-২: $y = \cos x$

(ক) $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx$ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২১]

(খ) $\int x h(x)\, dx$ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২১]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত ফাংশনটি দ্বারা x অক্ষের সাথে আবদ্ধ একটি চাপের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৯]

সমাধান:

**ক** $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx$

$= \int \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x.\cos x}\, dx$

$= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\, dx$

$= \int |(\cos x - \sin x)|\, dx$

$= |\sin x + \cos x| + c$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $h(\theta) = \tan^{-1}\theta$

$\therefore h(x) = \tan^{-1}x$

প্রদত্ত রাশি $= \int x h(x)\, dx$

$= \int x\tan^{-1}x\, dx$

$= \tan^{-1}x \int x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}\tan^{-1}x \int x\, dx\right\} dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \int \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{2}\, dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\, dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$

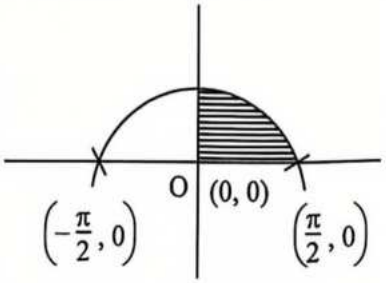
$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$

$= \frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + c$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $y = \cos x$

একটি চাপ দ্বারা x-অক্ষের সাথে আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল




$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\, dx$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$

$= 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

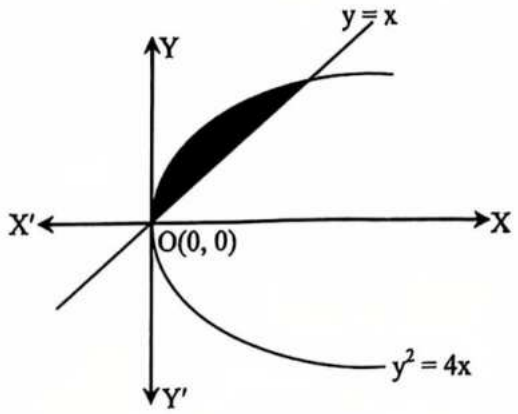
$= 2\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right]$

$= 2(1 - 0)$

$= 2$ বর্গ একক

$\therefore$ নির্ণেয় আবদ্ধ চাপের ক্ষেত্রফল 2 বর্গ একক।

**প্রশ্ন ▶ ২৩** $f(x) = e^x$ এবং চিত্র:




(ক) $\int \sqrt{1 + \sec x}\, dx = ?$

(খ) $\int_0^3 \frac{x f(x)}{(1+x)^2}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ১৭]

(গ) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[কু. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২১; চ. বো. ১৯]

সমাধান:

**ক** $\int \sqrt{1 + \sec x}\, dx$

$= \int \sqrt{1 + \frac{1}{\cos x}}\, dx$

$= \int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\cos x}}\, dx$

$= \int \frac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{x}{2}}}\, dx$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\int \frac{\cos\frac{x}{2}\, dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sin^2\frac{x}{2}}}$

ধরি, $\sin\frac{x}{2} = z$

$\Rightarrow \cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\, dx = dz$

$\Rightarrow \cos\frac{x}{2}\, dx = 2dz$

$= 2\int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - z^2}}$

$= 2\sin^{-1}\left(\frac{z}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + c$

$= 2\sin^{-1}\left(\sqrt{2}z\right) + c$

$= 2\sin^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right) + c$ **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS
ADMISSIONSTUFFS


t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = e^x$

$$\therefore \int_0^3 \frac{xf(x)}{(1+x)^2}\,dx$$

$$= \int_0^3 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx$$

$$= \int_0^3 e^x \frac{x}{(1+x)^2}\,dx$$

$$= \int_0^3 e^x \frac{1+x-1}{(1+x)^2}\,dx$$

ধরি, $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$$= \int_0^3 e^x \left\{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right\} dx$$

$$= \left[e^x \frac{1}{1+x}\right]_0^3 \quad \left[\int e^x \{f(x) + f'(x)\}\,dx = e^x f(x) + c\right]$$

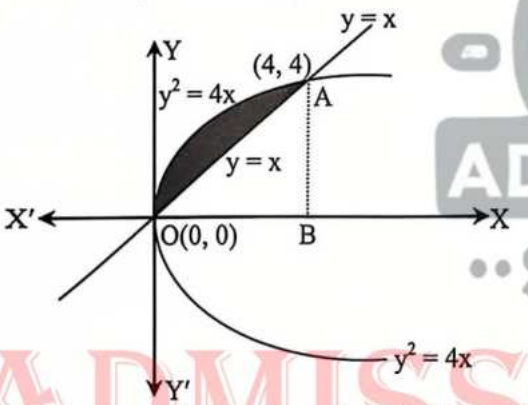
$$= \frac{e^3}{1+3} - \frac{e^0}{1+0}$$

$$= \frac{e^3}{4} - 1$$

$$= \frac{1}{4}(e^3 - 4)$$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $y = x$ ..... (i)

এবং $y^2 = 4x$ ..... (ii)




$\Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$

$\therefore x = 0, x = 4$

এবং $y = x = y_1$ (ধরি)

এবং $y^2 = 4x \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$

ধরি, $y_2 = 2\sqrt{x}$ [১ম চতুর্ভাগে y ধনাত্মক]

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল,

$$= \int_0^4 (y_2 - y_1)\,dx$$

$$= \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - x\right) dx$$

$$= \left[2 \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{4}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \left(\frac{4}{3} \times 4^{\frac{3}{2}} - \frac{4^2}{2}\right) - 0$$

$$= \frac{4}{3} \times 4^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{2} = \frac{8}{3}$$ বর্গএকক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২৪** $f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$

$g(x) = 2x^2 + 2y^2$

(ক) $\int xe^{2x^2}\,dx$ নির্ণয় কর। [য. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১]

(খ) $\int f(x)\,dx$ নির্ণয় কর। [রা. বো. ১৯]

(গ) নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে $g(x) = 72$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য. বো. ২১]

সমাধান:

**ক** $\int xe^{2x^2}\,dx$

ধরি, $2x^2 = z$

$\Rightarrow 4x\,dx = dz$

$\Rightarrow x\,dx = \frac{1}{4}dz$

$$= \int e^z \frac{1}{4}\,dz$$

$$= \frac{1}{4}\int e^z\,dz$$

$$= \frac{1}{4}e^z + c$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x^2} + c$$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$

প্রদত্ত রাশি $= \int f(x)\,dx$

$$= \int \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{x(x-1)}\right\} dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{x(-1)}\right\} dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right\} dx$$

$$= \int \frac{1}{x(x-1)}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx - \int x^{-2}\,dx$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x| - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x| + \frac{1}{x} + c$$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = 2x^2 + 2y^2$

এবং $g(x) = 72$

$\therefore 2x^2 + 2y^2 = 72$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 36$

$\Rightarrow y^2 = 36 - x^2$

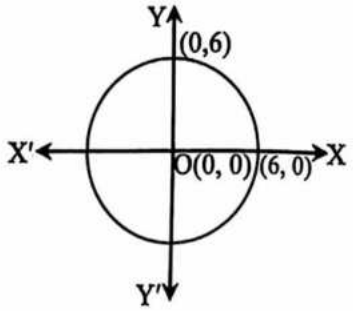
$\Rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$ [১ম চতুর্ভাগে y ধনাত্মক]

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs






বৃত্তটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$= 4\int_0^6 y\,dx$

$= 4\int_0^6 \sqrt{36-x^2}\,dx$

ধরি, $x = 6\sin\theta$
$\Rightarrow dx = 6\cos\theta\,d\theta$

| x | 0 | 6 |
|---|---|---|
| θ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{36-36\sin^2\theta}\,.6\cos\theta\,d\theta$

$= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sqrt{1-\sin^2\theta}\,.\cos\theta\,d\theta$

$= 72\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta.\cos\theta\,d\theta$

$= 72\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\,d\theta$

$= 72\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos2\theta)\,d\theta$

$= 72\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 72\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-0\right]$

$= 72\left(\frac{\pi}{2}+0-0\right)$

$= 36\pi$ বর্গএকক **(Ans.)**

অথবা, ক্ষেত্রফল $= 4\int_0^6 y\,dx$

$= 4\int_0^6 \sqrt{36-x^2}\,dx$

$= 4\int_0^6 \sqrt{6^2-x^2}\,dx$

$= 4\left[\frac{x\sqrt{6^2-x^2}}{2}+\frac{6^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{6}\right]_0^6$

$= 4\left[\frac{6\sqrt{6^2-6^2}}{2}+\frac{6^2}{2}\sin^{-1}\frac{6}{6}-0-0\right]$

$= 4\left(\frac{36}{2}\sin^{-1}1\right)$

$= 4\times 18\times\frac{\pi}{2}$

$= 36\pi$ বর্গ একক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২৫** দৃশ্যকল্প: $f(x) = x^2\sqrt{16-x^2}$, $g(x) = y^2 - 8x$ এবং $h(x) = x^2 - 8y$

(ক) $\int x\ln2x\,dx$ নির্ণয় কর। [য. বো. ২১]

(খ) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ এর নির্ণয় কর। [য. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১]

(গ) $g(x) = 0$ এবং $h(x) = 0$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য. বো. ২১]

সমাধান:

**ক** $\int x\ln2x\,dx$

$= \ln2x\int x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\ln2x\int x\,dx\right\}dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln2x - \int\left(\frac{1}{2x}\times 2\times\frac{x^2}{2}\right)dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln2x - \frac{1}{2}\int x\,dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln2x - \frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2} + c$

$= \frac{x^2}{2}\ln2x - \frac{x^2}{4} + c$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = x^2\sqrt{16-x^2}$

$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

$= \int_{-2}^{2} x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$

ধরি, $x = 4\sin\theta$
$\Rightarrow dx = 4\cos\theta\,d\theta$

| x | −2 | 2 |
|---|---|---|
| θ | $-\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 16\sin^2\theta\sqrt{16-16\sin^2\theta}\,.4\cos\theta\,d\theta$

$= 16\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta\sqrt{16(1-\sin^2\theta)}\,.4\cos\theta\,d\theta$

$= 16\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta.4.\cos\theta.4\cos\theta\,d\theta$

$= 16\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4\times 4\sin^2\theta.\cos^2\theta\,d\theta$

$= 64\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2\sin\theta.\cos\theta)^2\,d\theta$

$= 64\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2\theta\,d\theta$

$= 32\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2\sin^2 2\theta\,d\theta$

$= 32\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos4\theta)\,d\theta$

$= 32\left[\theta-\frac{\sin4\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$= 32\left[\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{4}\right) - \left(\frac{-\pi}{6} - \frac{\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)}{4}\right)\right]$$

$$= 32\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{4} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{4}\right)$$

$$= 32\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2}\right)$$

$$= 32\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)$$

$$= 32\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $h(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 8y = 0$

$\Rightarrow y = \frac{x^2}{8}$ ..... (i)

আবার, $g(x) = 0$

$\Rightarrow y^2 - 8x = 0$

$\Rightarrow y = \sqrt{8x}$ ..... (ii)

$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{8}\right)^2 = 8x$ [(i) নং হতে মান বসিয়ে বর্গ করে]

$\Rightarrow x^4 = 8^3x$

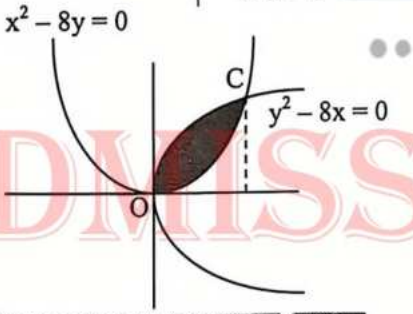
$\Rightarrow x(x^3 - 8^3) = 0$

হয়, $x = 0$

অথবা, $x^3 - 8^3 = 0$

$\Rightarrow x^3 = 8^3$

$\therefore x = 8$




$\therefore$ (i) ও (ii) নং রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$$= \int_0^8 \left(\sqrt{8x} - \frac{x^2}{8}\right) dx$$

$$= \int_0^8 \sqrt{8x}\, dx - \int_0^8 \frac{x^2}{8} dx$$

$$= \sqrt{8}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{8}\int_0^8 x^2 dx$$

$$= \sqrt{8}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^8 - \frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^8$$

$$= \sqrt{8}\left[\frac{2}{3} \times 8^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{1}{8} \times \frac{8^3}{3}$$

$$= \frac{128}{3} - \frac{64}{3}$$

$$= \frac{64}{3}$$ বর্গএকক **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ২৬** $f(x) = x\sin^{-1}x^2$; $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

(ক) সমাকলন কর: $\int 5\cos 4x \sin 3x\, dx$ [চ. বো. ২১]

(খ) যোগজ নির্ণয় কর: $\int f(x)\, dx$ [চ. বো. ২১]

(গ) $\int g(x)\, dx$ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২১]

সমাধান:

**ক** $\int 5\cos 4x \sin 3x\, dx = \frac{5}{2}\int 2\cos 4x \sin 3x\, dx$

$$= \frac{5}{2}\int \{\sin(4x + 3x) - \sin(4x - 3x)\}\, dx$$

$$= \frac{5}{2}\int (\sin 7x - \sin x)\, dx$$

$$= \frac{5}{2}\left(-\frac{\cos 7x}{7} + \cos x\right) + c$$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = x\sin^{-1}x^2$

$\therefore \int f(x)\, dx$

$= \int x\sin^{-1}x^2\, dx$

$= \sin^{-1}x^2 \int x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}\sin^{-1}x^2 \int x\, dx\right\} dx$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x^2 - \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} 2x \frac{x^2}{2} dx$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x^2 - \int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^4}} dx$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x^2 + \frac{1}{4}\int \frac{-4x^3}{\sqrt{1 - x^4}} dx$ | ধরি, $1 - x^4 = z$ $\Rightarrow -4x^3\, dx = dz$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x^2 + \frac{1}{4}\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x^2 + \frac{1}{4} \times 2\sqrt{z} + c$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^4} + c$ **(Ans.)**

বিকল্প পদ্ধতি:

দেওয়া আছে, $f(x) = x\sin^{-1}x^2$

$\therefore \int f(x)\, dx$

$= \int x\sin^{-1}x^2\, dx$ | ধরি, $x^2 = z$ $\Rightarrow 2x\, dx = dz$ $\Rightarrow x\, dx = \frac{1}{2} dz$

$= \int \frac{1}{2}\sin^{-1}z\, dz$

$= \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}z \int dz - \int \left\{\frac{d}{dz}(\sin^{-1}z) \int dz\right\} dz\right]$

$= \frac{1}{2}\left[z\sin^{-1}z - \int \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} dz\right]$

$= \frac{1}{2}\left[z\sin^{-1}z + \frac{1}{2}\int \frac{(-2z)}{\sqrt{1 - z^2}} dz\right]$

$= \frac{1}{2}\left[z\sin^{-1}z + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{1 - z^2}\right]$ $\left[\because \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c\right]$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^4} + c$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

$$\int g(x)\,dx$$

$$= \int \frac{x^2}{x^2-4}\,dx$$

$$= \int \frac{(x^2-4)+4}{x^2-4}\,dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{4}{x^2-4}\right) dx$$

$$= x + 4\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$$

$$= x + 4\int \frac{1}{x^2-2^2}\,dx$$

$$= x + 4 \times \frac{1}{2\times 2} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$$

$$= x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c \text{ (Ans.)}$$

**প্রশ্ন ▶ ২৭** $f(x) = \sin x$; $g(x) = \cos x$

**(ক)** সমাকলন কর: $\int \frac{dx}{4g(\cos^{-1}x^2)+9}$ [ঢা. বো. ১৯]

**(খ)** $\int \frac{d\theta}{1+3\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^2}$ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২১]

**(গ)** দেখাও যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{1 + f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}^2 . f(x)\,dx = \frac{7}{3}$ [ব. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** দেওয়া আছে, $g(x) = \cos x$

প্রদত্ত রাশি $= \int \frac{dx}{4g(\cos^{-1}x^2)+9}$

$$= \int \frac{dx}{4\cos(\cos^{-1}x^2)+9}$$

$$= \int \frac{dx}{4x^2+9}$$

$$= \int \frac{1}{4\left(x^2+\frac{9}{4}\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{2}} \tan^{-1}\frac{x}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{12}\tan^{-1}\frac{2x}{3} + c$$

$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{2x}{3} + c \text{ (Ans.)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

প্রদত্ত রাশি,

$$\int \frac{d\theta}{1+3\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^2}$$

$$= \int \frac{d\theta}{1+3\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^2}$$

$$= \int \frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta}$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta+3}\,d\theta \quad [\cos^2\theta \text{ দ্বারা হর ও লবকে ভাগ করে}]$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta+3}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{4+\tan^2\theta}\,d\theta$$

ধরি, $\tan\theta = z$
$\Rightarrow \sec^2\theta\,d\theta = dz$

$$= \int \frac{dz}{4+z^2}$$

$$= \int \frac{1}{2^2+z^2}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{2}\right) + c \text{ (Ans.)}$$

**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

L.H.S,

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{1 + f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}^2 . f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}^2 . \sin x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^2 . \sin x\,dx$$

ধরি, $1 + \cos x = z$
$\Rightarrow -\sin x\,dx = dz$
$\Rightarrow \sin x\,dx = -dz$

| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| z | 2 | 1 |

$$= -\int_2^1 z^2 . dz$$

$$= \int_1^2 z^2\,dz$$

$$= \left[\frac{z^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{7}{3}$$

= R.H.S (Showed)

ADMISSION STUFFS

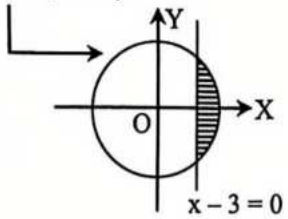
Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ২৮** $P(x) = \cos x,\ x^2 + y^2 = 25$




(ক) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos 2x}$ এর মান নির্ণয় কর। [চ. বো. ২১]

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 P(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [চ. বো. ২১]

(গ) চিত্রে চিহ্নিত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**সমাধান:**

**ক** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$

$= \frac{1}{2}[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2}\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right)$

$= \frac{1}{2}(1-0)$

$= \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $P(x) = \cos x$

$\int x^2 P(x)\,dx$

$= \int x^2 \cos x\,dx$

$= x^2\int \cos x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x^2)\int \cos x\,dx\right\}dx$

$= x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx$

$= x^2\sin x - 2\left[x\int \sin x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int \sin x\,dx\right\}dx\right]$

$= x^2\sin x - 2\left[-x\cos x - \int(-\cos x)\,dx\right]$

$= x^2\sin x - 2[-x\cos x + \sin x] + c$

$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 P(x)\,dx$

$= [x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi}{2} + 2\times\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 2\sin\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0$

$= \left(\frac{\pi^2}{4}\times 1 + 2\times\frac{\pi}{2}\times 0 - 2\times 1\right)$

$= \frac{\pi^2}{4} + 0 - 2$

$= \frac{\pi^2}{4} - 2$ **(Ans.)**

**গ** এখানে, $x^2 + y^2 = 25$ ..... (i)

এবং $x - 3 = 0$ ..... (ii)

$\therefore x = 3$

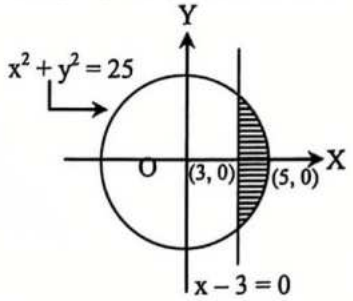
(i) নং এ $y = 0$ বসিয়ে পাই,

$x^2 + 0 = 25$

$\Rightarrow x^2 = 25$

$\therefore x = \pm 5$

বৃত্তটি x অক্ষকে (5, 0) ও (– 5, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।




(i) নং হতে পাই,

$y^2 = 25 - x^2$

$\Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$ [x অক্ষের উপরে y ধনাত্মক]

(i) নং ও (ii) নং দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতম অংশের ক্ষেত্রফল

$= 2\int_3^5 y\,dx$

$= 2\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}\,dx$

$= 2\int_3^5 \sqrt{5^2 - x^2}\,dx$

$= 2\left[\frac{x\sqrt{5^2 - x^2}}{2} + \frac{5^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}\right]_3^5$

$= 2\left[\left\{0 + \frac{25}{2}\sin^{-1}(1)\right\} - \left\{\frac{3\sqrt{5^2 - 3^2}}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}\right\}\right]$

$= \left(\frac{25\pi}{2} - 12 - 25\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$

$= \left(\frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 12\right)$ বর্গ একক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল: $\left(\frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 12\right)$ বর্গ একক

**প্রশ্ন ▶ ২৯** $f(x) = 3 - 2x,\ g(x) = 3 + 4x - 4x^2,\ h(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$

(ক) $\int \sin^{11} x\cos x\,dx$ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১]

(খ) $\int \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}\,dx$ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২১]

(গ) প্রমাণ কর যে, $\int h(x)\,dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$ [সি. বো. ২১]

**সমাধান:**

**ক** $\int \sin^{11} x\cos x\,dx$

$= \int z^{11}\,dz$

$= \frac{z^{12}}{12} + c$

$= \frac{1}{12}(\sin x)^{12} + c$ **(Ans.)**

ধরি, $\sin x = z$

$\Rightarrow \cos x\,dx = dz$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = 3 - 2x$; $g(x) = 3 + 4x - 4x^2$

$$\int \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}\,dx$$

$$= \int \frac{3-2x}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{4}(4-8x)+2}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{4-8x}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\times 2\sqrt{3+4x-4x^2} + 2\int \frac{1}{\sqrt{3-4(x^2-x)}}\,dx$$

$$\left[\because \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + c\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3+4x-4x^2} + 2\int \frac{1}{\sqrt{3-4\left(x^2-2.x.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3+4x-4x^2} + 2\int \frac{1}{\sqrt{4-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3+4x-4x^2} + 2\times\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3+4x-4x^2} + \sin^{-1}\left(x-\frac{1}{2}\right) + c \text{ (Ans.)}$$

**গ** দেওয়া আছে,

$h(x) = \sqrt{a^2-x^2}$

$$\therefore \int h(x)\,dx$$

$$= \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

ধরি, $x = a\sin\theta$
$\Rightarrow dx = a\cos\theta\,d\theta$
$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

$$= \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\,.a\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int a^2\sqrt{1-\sin^2\theta}\,.\cos\theta\,d\theta$$

$$= a^2\int \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int 2\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{\sin2\theta}{2}\right] + c$$

$$= \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{2}.\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2} + c$$

$$= \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{2}\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} + c$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\sin\sin^{-1}\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\sin\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}.\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + c$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2} + c$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c$$

$$= \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c \text{ (Proved)}$$

**প্রশ্ন ▶ ৩০** $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x-\cos x}$

$g(x) = \dfrac{2+x}{1+x^2}$

(ক) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২১]

(খ) x এর সাপেক্ষে $f(x)$ এর সমাকলন কর। [দি. বো. ২১]

(গ) 0 থেকে 1 সীমার মধ্যে $\int g(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২১]

সমাধান:

**ক** প্রদত্ত রাশি $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

$$= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos0\right)$$

$$= -(0-1)$$

$$= 1 \text{ (Ans.)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x-\cos x}$

$$\int f(x)\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1+\sin x-\cos x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1+\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}\,dx$$

$$= \int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}-1+\tan^2\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}}\,dx$$

ধরি, $\tan\frac{x}{2} = z$
$\Rightarrow \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = dz$
$\Rightarrow \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,dz$

$$= \int \frac{2dz}{2z^2+2z}$$

$$= \int \frac{1}{z(z+1)}\,dz$$

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$= \int \left\{ \frac{1}{z.(0+1)} + \frac{1}{(z+1)(-1)} \right\} dz$$

$$= \int \frac{1}{z} dz - \int \frac{1}{z+1} dz$$

$$= \ln|z| - \ln|z+1| + c$$

$$= \ln\left|\frac{z}{z+1}\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+1}\right| + c \text{ (Ans.)}$$

**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{2+x}{1+x^2}$

$$\int_0^1 g(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2+x}{1+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= 2[\tan^{-1}x]_0^1 + \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1 \quad \left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c\right]$$

$$= 2(\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0) + \frac{1}{2}[\ln 2 - \ln 1]$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + \frac{1}{2}(\ln 2 - 0)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 \text{ (Ans.)}$$

**প্রশ্ন ▶ ৩১** $f(x) = \sin x$; $h(x) = \frac{1}{x(x-1)^2(x^2+1)}$

**(ক)** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২১]

**(খ)** সমাকলন কর: $\int h(x)\,dx$ [দি. বো. ২১]

**(গ)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(2x)}{\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}^4 + \{f(x)\}^4} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

**সমাধান:**

**ক** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= [\sin^{-1}x]_0^1$$

$$= (\sin^{-1}1 - \sin^{-1}0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{ (Ans.)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $h(x) = \frac{1}{x(x-1)^2(x^2+1)}$

ধরি, $\frac{1}{x(x-1)^2(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$ ..... (i)

$$\Rightarrow 1 \equiv A(x-1)^2(x^2+1) + Bx(x-1)(x^2+1) + Cx(x^2+1) + (Dx+E)x(x-1)^2$$

$$\Rightarrow 1 \equiv A(x^2-2x+1)(x^2+1) + B(x^2-x)(x^2+1) + C(x^3+x) + (Dx+E)(x^3-2x^2+x) \text{ ..... (ii)}$$

(ii) নং এ $x = 0$ বসিয়ে,

$1 = A.1.1 + 0 + 0 + 0$

$\Rightarrow A = 1$

(ii) নং এ $x = 1$ বসিয়ে,

$1 = 0 + 0 + C.2 + 0$

$\Rightarrow C = \frac{1}{2}$

(ii) নং এ $x^4$, $x^3$, $x^2$ ও $x$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + B + D$ ..... (iii)

$0 = -2A - B + C - 2D + E$ ..... (iv)

$0 = 2A + B + D - 2E$ ..... (v)

এবং $0 = -2A - B + C + E$ ..... (vi)

(v) নং এ $A + B + D = 0$ বসিয়ে,

$0 = A + 0 - 2E$

$\Rightarrow 2E = A$

$\Rightarrow E = \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ [$\because A = 1$]

(vi) নং এ A, C, E এর মান বসিয়ে,

$0 = -2 \times 1 - B + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow B = -2 + 1 = -1$

(v)নং এ A, B, E এর মান বসিয়ে,

$0 = 2 \times 1 - 1 + D - 2 \times \frac{1}{2}$

$0 = 2 - 1 + D - 1$

$\Rightarrow D = 0$

$\therefore A = 1, B = -1, C = \frac{1}{2}, D = 0$ এবং $E = \frac{1}{2}$

$$\therefore h(x) = \frac{1}{x(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

[(i) এ মান বসিয়ে]

$$\therefore \int h(x)\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{2(x-1)^2} + \int \frac{dx}{2(x^2+1)}$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c \text{ (Ans.)}$$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\therefore f(2x) = \sin 2x$

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(2x)}{\left\{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}^4 + \{f(x)\}^4} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{(\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x)} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}(1 + \cos^2 2x)} dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} dx$$

ধরি, $z = \cos 2x$

$\Rightarrow dz = -2\sin 2x\, dx$

| x | $\frac{\pi}{4}$ | 0 |
|---|---|---|
| z | 0 | 1 |

$$= 2\left(-\frac{1}{2}\right)\int_1^0 \frac{1}{1 + z^2} dz$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1 + z^2} dz$$

$$= [\tan^{-1} z]_0^1$$

$$= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0$$

$$= \frac{\pi}{4} \text{ (Ans.)}$$

**প্রশ্ন ▶ ৩২** দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x + 1$, $g(x) = x - 1$, $h(x) = x^2 + 9$

দৃশ্যকল্প-২: $2x^2 + 2y^2 = 64$

**(ক)** $\int_1^2 x^3 e^{x^4} dx$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৯]

**(খ)** $\int \left\{\frac{f(x)}{g(x)\, h(x)} + \sqrt[3]{x}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

[কু. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১]

**(গ)** দৃশ্যকল্প-২ দ্বারা প্রথম চতুর্ভাগের আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ১৭]

সমাধান:

**ক** $\int_1^2 x^3 e^{x^4} dx$

$$= \frac{1}{4}\int_1^2 4x^3 e^{x^4} dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^{16} e^z dz$$

$$= \frac{1}{4}[e^z]_1^{16}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{16} - e) \text{ (Ans.)}$$

ধরি, $x^4 = z$

$\Rightarrow 4x^3 dx = dz$

| x | 1 | 2 |
|---|---|---|
| z | 1 | 16 |

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = x + 1$, $g(x) = x - 1$

এবং $h(x) = x^2 + 9$

প্রদত্ত রাশি $= \int \left\{\frac{f(x)}{g(x)\, h(x)} + \sqrt[3]{x}\right\} dx$

$$= \int \left\{\frac{x + 1}{(x - 1)(x^2 + 9)} + \sqrt[3]{x}\right\} dx$$

$$= \int \frac{(x - 1) + 2}{(x - 1)(x^2 + 9)} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2 + 9} dx + 2\int \frac{1}{(x - 1)(x^2 + 9)} dx + \frac{x^{\frac{1}{3} + 1}}{\frac{1}{3} + 1}$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 2I_1$$

যেখানে, $I_1 = \frac{1}{(x - 1)(x^2 + 9)} dx$

ধরি, $\frac{1}{(x - 1)(x^2 + 9)} \equiv \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 9}$

$\Rightarrow 1 \equiv A(x^2 + 9) + (Bx + C)(x - 1)$ ..... (i)

[উভয়পক্ষে $(x - 1)(x^2 + 9)$ দ্বারা গুণ করে]

(i) নং সমীকরণে, $x = 1$ বসিয়ে,

$1 = A(1 + 9) + 0$

$\therefore A = \frac{1}{10}$

(i) নং সমীকরণে $x^2$ এর সহগ সমীকৃত করে,

$A + B = 0$

$\therefore B = -\frac{1}{10}$

(i) নং সমীকরণে x এর সহগ সমীকৃত করে,

$C - B = 0$

$C = -\frac{1}{10}$

$$\therefore \frac{1}{(x - 1)(x^2 + 9)} = \frac{1}{10(x - 1)} + \frac{-\frac{1}{10}x - \frac{1}{10}}{x^2 + 9}$$

$$= \frac{1}{10(x - 1)} - \frac{(x + 1)}{10(x^2 + 9)}$$

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$\therefore \int \frac{1}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{10}\int \frac{x+1}{x^2+9}\,dx$$

$$= \frac{1}{10}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\int \frac{x}{x^2+9}\,dx - \frac{1}{10}\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

$$= \frac{1}{10}\ln|x-1| - \frac{1}{20}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - \frac{1}{10\times 3}\tan^{-1}\frac{x}{3}$$

$$\therefore I_1 = \frac{1}{10}\ln|x-1| - \frac{1}{20}\ln|x^2+9| - \frac{1}{30}\tan^{-1}\frac{x}{3} + c$$

$$\therefore \int \left(\frac{f(x)}{g(x)h(x)} + \sqrt[3]{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 2I_1$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln|x^2+9| - \frac{1}{15}\tan^{-1}\frac{x}{3} + c$$

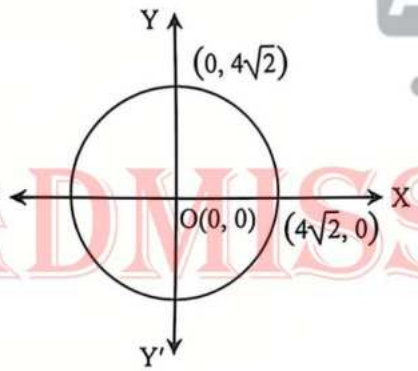
$$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{15}\tan^{-1}\frac{x}{3} + \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln|x^2+9| + c$$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $2x^2 + 2y^2 = 64$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 32$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2$

$\therefore$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে।




আবার,

$x^2 + y^2 = 32$

$\Rightarrow y^2 = 32 - x^2$

$\Rightarrow y = \sqrt{32 - x^2}$

বৃত্ত দ্বারা প্রথম চতুর্ভাগের আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^{4\sqrt{2}} y\,dx$$

$$= \int_0^{4\sqrt{2}} \sqrt{32 - x^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{32 - (4\sqrt{2}\sin\theta)^2}.4\sqrt{2}\cos\theta d\theta$$

ধরি, $x = 4\sqrt{2}\sin\theta$

$\therefore dx = 4\sqrt{2}\cos\theta d\theta$

$x = 0$ হলে, $\theta = 0$

$x = 4\sqrt{2}$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{32(1 - \sin^2\theta)}.4\sqrt{2}\cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{32\cos^2\theta}.4\sqrt{2}\cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sqrt{2}\cos\theta.4\sqrt{2}\cos\theta.d\theta$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta d\theta$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)d\theta$$

$$= 16\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 16\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right)$$

$$= 8\pi$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $8\pi$ বর্গ একক।

**প্রশ্ন ▶ ৩৩** $g(x) = \sin x$; $y = x^2$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ

(ক) $\int x\ln x^2\,dx$ নির্ণয় কর। [রা. বো. ১৯]

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)\}^5\{\sqrt{1 - \{g(x)\}^2}\}^4\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) উদ্দীপকের বক্ররেখা এবং $x - y + 6 = 0$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**সমাধান:**

**ক** $\int x\ln x^2\,dx$

$$= \int 2x\ln x\,dx$$

$$= 2\left[\ln x\int x\,dx - \int \frac{d}{dx}\ln x\int x\,dx\right]dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}\,dx\right]$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{2}x\,dx\right]$$

$$= x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + c$$ **(Ans.)**

**বিকল্প পদ্ধতি:**

$$\int x\ln x^2\,dx$$

ধরি, $z = x^2$

$\Rightarrow dz = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int 2x\ln x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \ln z\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln z\int dz - \int\left\{\frac{d}{dx}\ln z\int dz\right\}dz\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[z\ln z - \int dz\right]$$

$$= \frac{1}{2}(x^2\ln x^2 - x^2) + c$$

$$= x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + c$$ **(Ans.)**

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**খ** দেওয়া আছে, $g(x) = \sin x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)\}^5 \left\{\sqrt{1-\{g(x)\}^2}\right\}^4 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \left\{\sqrt{1-\sin^2 x}\right\}^4 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x (\cos x)^4 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^4 x . \sin x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)^2 \cos^4 x \sin x \, dx$$

ধরি, $z = \cos x$

$\therefore dz = -\sin x \, dx$

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| z | 1 | 0 |

$$= -\int_1^0 (1-z^2)^2 z^4 \, dz$$

$$= \int_0^1 (1-z^2)^2 z^4 \, dz$$

$$= \int_0^1 (1-2z^2+z^4) z^4 \, dz$$

$$= \int_0^1 (z^4 - 2z^6 + z^8) \, dz$$

$$= \left[\frac{z^5}{5}\right]_0^1 - 2\left[\frac{z^7}{7}\right]_0^1 + \left[\frac{z^9}{9}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{5} - \left(2 \times \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{8}{315} \text{ (Ans.)}$$

**গ** সরলরেখার সমীকরণ, $x - y + 6 = 0$

$$\Rightarrow y = x + 6$$

বক্ররেখার সমীকরণ,

$y = x^2$

$\Rightarrow x^2 = x + 6$

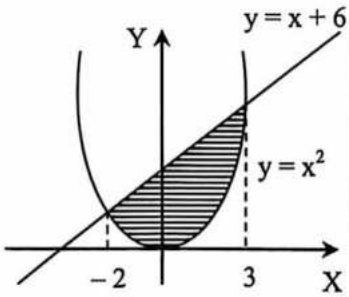
$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 3x - 6 = 0$

$\Rightarrow x(x+2) - 3(x+2) = 0$

$\Rightarrow (x+2)(x-3) = 0$

$\therefore x = -2, 3$




$\therefore$ বক্ররেখা এবং সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_{-2}^{3} (x + 6 - x^2) \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3}$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 18 - \frac{27}{3}\right) - \left(\frac{4}{2} - 12 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 9\right) - \left(\frac{12 - 72 + 16}{6}\right)$$

$$= \frac{27}{2} + \frac{22}{3}$$

$$= \frac{125}{6} \text{ বর্গ একক (Ans.)}$$

**প্রশ্ন ▶ ৩৪** $f(x) = x$ ..... (i)

$g(x) = \cos^{-1} x^2$ ..... (ii)

**(ক)** $\int (\cot^2 7x + \sec^2 9x) \, dx$ নির্ণয় কর। [চ. বো. ১৯]

**(খ)** যোগজ নির্ণয় কর: $\int f(x) \, g(x) \, dx$ [চ. বো. ১৯]

**(গ)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

**সমাধান:**

**ক** $\int (\cot^2 7x + \sec^2 9x) \, dx$

$$= \int \{(\operatorname{cosec}^2 7x - 1) + \sec^2 9x\} \, dx$$

$$= \int \operatorname{cosec}^2 7x \, dx + \int \sec^2 9x \, dx - \int 1 \, dx$$

$$= -\frac{\cot 7x}{7} + \frac{\tan 9x}{9} - x + c$$

$$= \frac{\tan 9x}{9} - \frac{\cot 7x}{7} - x + c \text{ (Ans.)}$$

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = x$ এবং $g(x) = \cos^{-1} x^2$

$$\int f(x) \, g(x) \, dx$$

$$= \int x \cos^{-1} x^2 \, dx$$

$$= \cos^{-1} x^2 \int x \, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x^2) \int x \, dx\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cos^{-1} x^2 + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} . 2x . \frac{x^2}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cos^{-1} x^2 + \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cos^{-1} x^2 - \frac{1}{4} \int \frac{-4x^3}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$$

ধরি, $z = 1 - x^4$

$\therefore dz = -4x^3 \, dx$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cos^{-1} x^2 - \frac{1}{4} \int \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cos^{-1} x^2 - \frac{1}{4} \times 2\sqrt{z} + c$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cos^{-1} x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cos^{-1} x^2 - \sqrt{1-x^4}\right) + c \text{ (Ans.)}$$

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**গ** ধরি, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx$ ..... (i)

$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}\,dx$

$\left[\because \int_0^a dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right]$

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$ ..... (ii)

$\therefore I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$ [(i)নং ও (ii) নং যোগ করে]

$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

$\therefore I = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৩৫** $P(x) = \frac{x^2}{x^4-1}$

$f(x) = x + 6$

$g(x) = x^2$

**(ক)** $\int \frac{\tan(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ নির্ণয় কর।

**(খ)** $\int P(x)\,dx$ নির্ণয় কর।

**(গ)** $\int \frac{x\,dx}{f(x)\{g(x)+4\}}$ এর মান নির্ণয় কর। [দি. বো. ১৮]

**সমাধানঃ**

**ক** ধরি, $I = \int \frac{\tan(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$\therefore I = \int \tan z\,dz$

$= \ln\sec z + c$

$= \ln\sec(\sin^{-1}x) + c$

ধরি, $\sin^{-1}x = z$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = dz$

**খ** দেওয়া আছে, $P(x) = \frac{x^2}{x^4-1}$

$\therefore \int P(x)\,dx = \int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$

$= \int \frac{x^2-1+1}{x^4-1}\,dx$

$= \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^4-1}\,dx$

$= \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)}\,dx$

$= \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\int \left\{\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}\right\}dx$

$= \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-1^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}$

$= \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2\times1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$

**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = x + 6$

$g(x) = x^2$

$\therefore \int \frac{x\,dx}{f(x)\{g(x)+4\}} = \int \frac{x\,dx}{(x+6)(x^2+4)}$ ..... (i)

ধরি, $\frac{x}{(x+6)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x+6} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$ ..... (ii)

$\therefore x \equiv A(x^2+4) + (Bx+C)(x+6)$ ..... (iii)

(iii) নং এ $x = -6$ বসিয়ে পাই,

$-6 = A\{(-6)^2+4\} + (Bx+C)(-6+6)$

$\Rightarrow -6 = A(36+4) + 0$

$\Rightarrow 40A = -6$

$\therefore A = \frac{-6}{40} = \frac{-3}{20}$

(iii) নং এর $x^2$ ও $x$ এর সহগ সমীকৃত করে,

$A + B = 0$

$\therefore B = -A = \frac{3}{20}$

এবং $6B + C = 1$

$\Rightarrow C = 1 - 6B$

$\therefore C = 1 - 6\times\frac{3}{20} = \frac{1}{10}$

(ii) নং এ A, B ও C-এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{x}{(x+6)(x^2+4)} = \frac{\frac{-3}{20}}{x+6} + \frac{\frac{3x}{20}+\frac{1}{10}}{x^2+4}$

$= \frac{-3}{20(x+6)} + \frac{3x}{20(x^2+4)} + \frac{1}{10(x^2+4)}$

$\therefore \int \frac{x\,dx}{f(x)\{g(x)+4\}}$

$= \int \frac{x\,dx}{(x+6)(x^2+4)}$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



$$= \int\left\{\frac{-3}{20(x+6)} + \frac{3x}{20(x^2+4)} + \frac{1}{10(x^2+4)}\right\} dx$$

$$= \frac{-3}{20}\int\frac{dx}{x+6} + \frac{3}{2\times 20}\int\frac{2x}{x^2+4}dx + \frac{1}{10}\int\frac{dx}{x^2+2^2}$$

$$= \frac{-3}{20}\ln|x+6| + \frac{3}{40}\ln|x^2+4| + \left(\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

$$\left[\because \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c\right]$$

$$= \frac{1}{40}\left\{3\ln|x^2+4| + 2\tan^{-1}\frac{x}{2} - 6\ln|x+6| + c\right\}$$

**প্রশ্ন ▶ ৩৬** $f(x) = \cot x$

$g(x, y) = y^2 - x + 2$

**(ক)** $\int e^x(\tan x - \ln\cos x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

**(খ)** $\int\frac{1}{1+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$ এর মান নির্ণয় কর।

**(গ)** $g(x, y) = 0$ বক্ররেখা এবং $x - 2y - 2 = 0$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**সমাধান:**

**ক** ধরি, $I = \int e^x(\tan x - \ln\cos x)\,dx$

$$= \int e^x\tan x\,dx - \int e^x\ln\cos x\,dx$$

$$= \int e^x\tan x\,dx - \left[\ln\cos x\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\ln\cos x)\int e^x dx\right\}dx\right]$$

$$= \int e^x\tan x\,dx - \ln\cos x.e^x + \int\frac{1}{\cos x}(-\sin x).e^x dx$$

$$= \int e^x\tan x\,dx - e^x\ln\cos x - \int e^x\tan x\,dx$$

$$= -e^x\ln\cos x + c$$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \cot x$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \tan x$$

$$\int\frac{1}{1+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$$

$$= \int\frac{1}{1+\tan x}dx$$

$$= \int\frac{1}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}dx$$

$$= \int\frac{\cos x\,dx}{\cos x+\sin x}$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{(\cos x+\sin x)+(\cos x-\sin x)}{\cos x+\sin x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x| + c$$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $g(x, y) = 0$

$$\Rightarrow y^2 - x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = x - 2 \quad \ldots\ldots (i)$$

ধরি, $y_1 = \sqrt{x-2}$

এবং $x - 2y - 2 = 0$

$$\Rightarrow x = 2y + 2 \quad \ldots\ldots (ii)$$

এখন, (i) নং ও (ii) নং হতে পাই,

$$y^2 = 2y + 2 - 2$$

$$\Rightarrow y^2 = 2y$$

$$\Rightarrow y^2 - 2y = 0$$

$$\Rightarrow y(y-2) = 0$$

$\therefore y = 0$ | অথবা, $y - 2 = 0$

$\therefore y = 2$

$y = 0$ হলে, (ii) নং হতে,

$$x = 2\times 0 + 2 = 2$$

$\therefore x = 2$

$y = 2$ হলে, (ii) নং হতে,

$$x = 2\times 2 + 2 = 6$$

$\therefore x = 6$

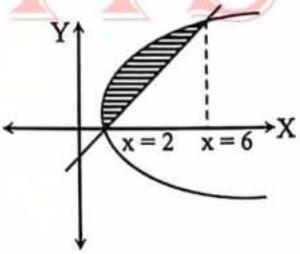
আবার, (ii) নং হতে,

$$2y = x - 2$$

ধরি, $y_2 = \frac{x}{2} - 1$

এখন, প্রদত্ত বক্ররেখা এবং সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতম অংশের ক্ষেত্রফল

$$= \int_2^6 (y_1 - y_2)\,dx$$




$$= \int_2^6\left(\sqrt{x-2} - \frac{x}{2} + 1\right)dx$$

$$= \left[\frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4} + x\right]_2^6$$

$$= \left[\frac{2}{3}(6-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{6^2}{4} + 6 - \frac{2}{3}(2-2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2^2}{4} - 2\right]$$

$$= \frac{2}{3}\times 4^{\frac{3}{2}} - 9 + 6 - \frac{2}{3}\times 0 + 1 - 2$$

$$= \frac{2}{3}\times 8 - 4$$

$$= \frac{4}{3}$$ বর্গ একক **(Ans.)**

ADMISSION STUFFS



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**প্রশ্ন ▶ ৩৭** $f(x) = \cot x$ একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন।
$L(x) = x + 1$ এবং $g(x) = x^2 - 1$

**(ক)** $\int_1^5 G(x)\,dx = 3$ হলে, $\int_0^2 G(2x+1)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

**(খ)** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1-\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

**(গ)** উদ্দীপকের আলোকে $L(x)$ এবং $g(x)$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**সমাধানঃ**

**ক** দেওয়া আছে, $\int_1^5 G(x)\,dx = 3$

$\therefore \int_1^5 G(y)\,dy = 3$

এখন, $\int_0^2 G(2x+1)\,dx$

$= \int_1^5 G(y)\frac{dy}{2}$

$= \frac{1}{2}\int_1^5 G(y)dy$

$= \frac{1}{2} \times 3$

$= \frac{3}{2}$

ধরি, $y = 2x + 1$
$\therefore dy = 2dx$
$\Rightarrow dx = \frac{dy}{2}$
$x = 0$ হলে, $y = 1$
$x = 2$ হলে, $y = (2 \times 2) + 1 = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় মানঃ $\frac{3}{2}$

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = \cot x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \tan x$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1-\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}^2} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1-\tan^2 x}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x\,dx}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(1+\cos 2x)dx}{\cos 2x}$

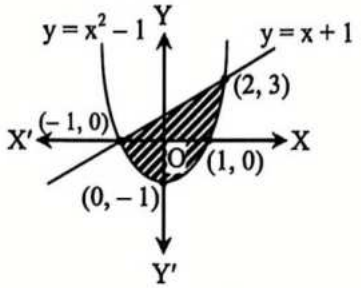
$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sec 2x + 1)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln|\sec 2x + \tan 2x| + x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\sec\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3}\right| + \frac{\pi}{6} - 0\right\}$

$= \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{12}$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = x^2 - 1$ এবং $L(x) = x + 1$
অর্থাৎ, $y = x^2 - 1$ (বক্ররেখা)
$y = x + 1$ (প্রদত্ত রেখা)
এবং $y = 0$ ($x$ অক্ষের সমীকরণ)




$y = x^2 - 1$ এবং $y = x + 1$ হতে পাই,

$x + 1 = x^2 - 1$
$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$
$\Rightarrow x^2 + x - 2x - 2 = 0$
$\Rightarrow x(x+1) - 2(x+1) = 0$
$\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$

আবার, $y = x^2 - 1$ এবং $y = 0$ হতে পাই,
$x^2 - 1 = 0$
$\Rightarrow x^2 = 1$
$\therefore x = -1, 1$

$\therefore x = -1, 2$
$\therefore y = -1 + 1 = 0$ এবং $y = 2 + 1 = 3$
$\therefore$ আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ($x$ অক্ষের উপরের অংশের)

$= \int_{-1}^2 y_2\,dx - \int_1^2 y_1\,dx$

$= \int_{-1}^2 (x+1)\,dx - \int_1^2 (x^2-1)\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^2 - \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2$

$= \left[\frac{2^2}{2} + 2 - \frac{1}{2} + 1\right] - \left[\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right]$

$= \frac{9}{2} - \frac{4}{3}$ বর্গ একক

আবার, আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ($x$ অক্ষের নিচের অংশের জন্য)

$= \int_{-1}^1 y_1\,dx$

$= \int_{-1}^1 (x^2-1)\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^1$

$= \left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(-\frac{1}{3} - (-1)\right)$

$= -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}$

$= \frac{-4}{3}$

$= \frac{4}{3}$ বর্গ একক [$\because$ ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হতে পারে না]

$\therefore$ মোট আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{9}{2} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$

$= \frac{9}{2}$ বর্গ একক

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## HSC পরীক্ষার্থীদের জন্য বাছাইকৃত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

### বীজগাণিতিক ফাংশনের যোগজ নির্ণয়

১। $\int \frac{1}{x^2} dx =$ কত? $x \neq 0$ [চ. বো. ২৩]

ক $-\frac{1}{3x^3} + c$ খ $-\frac{1}{x} + c$

গ $\frac{1}{3x^3} + c$ ঘ $\frac{1}{x} + c$

উত্তর: খ $-\frac{1}{x} + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{x} + c$

**Note:** $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

২। $\int x^{-9} dx =$ কত? [য. বো. ২২]

ক $-9x^{-8} + c$ খ $-9x^{-10} + c$

গ $-\frac{1}{10} x^{-10} + c$ ঘ $-\frac{x^{-8}}{8} + c$

উত্তর: ঘ $-\frac{x^{-8}}{8} + c$

ব্যাখ্যা: $\int x^{-9} dx = \frac{x^{-9+1}}{-9+1} + c = -\frac{x^{-8}}{8} + c$

৩। $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ সমান– [চ. বো. ২১]

ক $-\frac{1}{3} x^{\frac{4}{3}} + c$ খ $\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + c$

গ $\frac{3}{2} x^{\frac{-3}{2}} + c$ ঘ $\frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}} + c$

উত্তর: খ $\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + c$

৪। $\int \sqrt{2-3x} dx =$ কত? [ব. বো. ২১]

ক $-\frac{2}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}} + c$ খ $-\frac{1}{6}(2-3x)^{-\frac{1}{2}} + c$

গ $-(2-3x)^{\frac{3}{2}} + c$ ঘ $-3(2-3x)^{-\frac{1}{2}} + c$

উত্তর: ক $-\frac{2}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}} + c$

ব্যাখ্যা: $\int \sqrt{2-3x} dx = \int (2-3x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(2-3x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \times \left(\frac{1}{-3}\right) + c$

$= -\frac{2}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}} + c$

৫। $\int_{-1}^{1} x^2 dx$ এর মান কত? [ম. বো. ২৩]

ক 0 খ $-\frac{2}{3}$

গ $\frac{2}{3}$ ঘ $\frac{3}{2}$

উত্তর: গ $\frac{2}{3}$

ব্যাখ্যা: $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3}$

অথবা, Using Calculator

৬। $\int e^{-5x} dx = ?$ [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: য. বো. ২৩; রা. বো. ১৯; চ. বো. ১৭]

ক $\frac{e^{-5x}}{5} + c$ খ $-\frac{e^{-5x}}{5} + c$

গ $5e^{-5x} + c$ ঘ $-5e^{-5x} + c$

উত্তর: খ $-\frac{e^{-5x}}{5} + c$

ব্যাখ্যা: $\int e^{-5x} dx = \frac{e^{-5x}}{-5} + c = -\frac{e^{-5x}}{5} + c$

**Note:** $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$

৭। $\int_0^1 e^{-2x} dx$ এর মান কোনটি? [ঢা. বো. ২১]

ক $2(1-e^{-2})$ খ $2(e^{-2}-1)$

গ $\frac{1}{2}(e^{-2}-1)$ ঘ $\frac{1}{2}(1-e^{-2})$

উত্তর: ঘ $\frac{1}{2}(1-e^{-2})$

ব্যাখ্যা: $\int_0^1 e^{-2x} dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1$

$= -\frac{1}{2}(e^{-2}-e^0)$

$= -\frac{1}{2}(e^{-2}-1)$

$= \frac{1}{2}(1-e^{-2})$

অথবা, Using Calculator and then Option Test

৮। $\int 10^{5x} dx =$ কত? [ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২১]

ক $\frac{10^{5x}}{\ln 10} + c$ খ $\frac{10^{5x}}{5 \ln 10} + c$

গ $5.10^{5x} \ln 10 + c$ ঘ $10^{5x} \ln 10 + c$

উত্তর: খ $\frac{10^{5x}}{5 \ln 10} + c$

ব্যাখ্যা: $\int 10^{5x} dx = \frac{10^{5x}}{\ln 10} \times \frac{1}{5} + c = \frac{10^{5x}}{5 \ln 10} + c$

**Note:** $\int a^{bx} dx = \frac{a^{bx}}{\ln a} \cdot \frac{1}{b} + c$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৯। যদি $\int P^x\,dx = F(x) + C$ হয়, তবে F(x) এর মান কোনটি? [ঢা. বো. ২৩]

ক $\frac{P^x}{\ln P}$ খ $P^x \log_e P$

গ $xP^{x-1}$ ঘ $\frac{P^{x+1}}{x+1}$

উত্তর: ক $\frac{P^x}{\ln P}$

ব্যাখ্যা: $\int P^x\,dx = \frac{P^x}{\ln P} + c = \frac{P^x}{\log_e P} + c$

$\therefore F(x) = \frac{P^x}{\log_e P} + c$

**Note:** $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

১০। $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$ এর মান কত? [ম. বো. ২৩]

ক 1 খ $-1$

গ e ঘ 0

উত্তর: ক 1

ব্যাখ্যা: $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

অথবা, Using Calculator

১১। $\int_1^2 e^{2x+5}\,dx = ?$ [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ১৯]

ক $\frac{1}{2}(e^7 - e^9)$ খ $2(e^9 - e^7)$

গ $\frac{1}{2}(e^9 - e^7)$ ঘ $2(e^9 + e^7)$

উত্তর: গ $\frac{1}{2}(e^9 - e^7)$

ব্যাখ্যা: $\int_1^2 e^{2x+5}\,dx$

$= \left[\frac{e^{2x+5}}{2}\right]_1^2$

$= \frac{1}{2}(e^9 - e^7)$

১২। $\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = ?$ [সি. বো. ২৩]

ক $1 - \ln 2$ খ $\ln 2$

গ $\ln 2 - 1$ ঘ $-\ln 2$

উত্তর: ক $1 - \ln 2$

ব্যাখ্যা: $\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{1+x-1}{1+x}$

$= \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$

$= [x]_0^1 - [\ln(1+x)]_0^1$

$= 1 - \ln 2$

অথবা, $\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = 0.3$

অপশন ক, $1 - \ln 2 = 0.3$ [Using Calculator]

১৩। $\frac{d}{dx}(\ln x)$ এর যোগজ– [ম. বো. ২২]

ক $-\frac{1}{x} + c$ খ $-\ln x + c$

গ $\frac{1}{x} + c$ ঘ $\ln x + c$

উত্তর: ঘ $\ln x + c$

ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

$\therefore \int \frac{d}{dx}(\ln x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$

১৪। x এর সাপেক্ষে নিচের কোন যোগজের মান $x - \ln x^2 + c$?

ক $\frac{1}{1-x^2}$ খ $\frac{1-2x}{x^2}$

গ $\frac{x-2}{x}$ ঘ $1 - \frac{2}{x^2}$

উত্তর: গ $\frac{x-2}{x}$

ব্যাখ্যা: যেহেতু অন্তরীকরণ যোগজীকরণের বিপরীত প্রক্রিয়া।

$\therefore x - \ln x^2 + c$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে মূল রাশিটি পাওয়া যাবে।

$\frac{d}{dx}(x - \ln x^2 + c) = 1 - \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{x-2}{x}$

১৫। $\int \frac{dx}{2-3x}$ এর মান কোনটি? [সি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২২]

ক $-\frac{\ln(2-3x)}{3} + c$ খ $\frac{\ln(2-3x)}{3} + c$

গ $-\ln(2-3x) + c$ ঘ $\ln(2-3x) + c$

উত্তর: ক $-\frac{\ln(2-3x)}{3} + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{dx}{2-3x} = \int -\frac{1}{3} \times \frac{-3}{2-3x}\,dx$

$= -\frac{\ln(2-3x)}{3} + c$

**Note:** $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



১৬। যদি $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln P$ হয়, তবে P এর মান কত? [দি. বো. ২১]

ক 3 খ 9
গ 10 ঘ 81

উত্তর: ক 3

ব্যাখ্যা: $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{2}{2x-1}dx$

$= \frac{1}{2}[\ln|2x-1|]_1^5$

$= \frac{1}{2}(\ln 9 - \ln 1)$

$= \ln 9^{\frac{1}{2}}$

$= \ln 3$

$\therefore P = 3$

অথবা, $\int_1^5 \frac{1}{2x-1}dx = 1.09$

এখন, $\ln 3 = 1.09 \therefore P = 3$ [Using Calculator]

১৭। $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx$ এর মান কোনটি? [কু. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১]

ক $2\ln 2 + 1$ খ $2\ln 2 - 1$
গ $\ln 2 + 1$ ঘ $\ln 2 - 2$

উত্তর: খ $2\ln 2 - 1$

ব্যাখ্যা: $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx$

$= \int_0^1 \frac{2-(1+x)}{1+x}$

$= \int_0^1 \left[\frac{2}{1+x} - 1\right]dx$

$= [2\ln|1+x| - x]_0^1$

$= 2\ln 2 - 1 - 0$

$= 2\ln 2 - 1$

অথবা, $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx = 0.386$

অপশন খ $2\ln 2 - 1 = 0.386$ [Using Calculator]

১৮। $\int \frac{1}{3\sqrt{x}}dx =$ কত? [কু. বো. ২২]

ক $-\frac{2}{3}\sqrt{x} + c$ খ $\frac{3}{2}\sqrt{x} + c$
গ $\frac{2}{3}\sqrt{x} + c$ ঘ $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x} + c$

উত্তর: গ $\frac{2}{3}\sqrt{x} + c$

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{x} + c$

$= \frac{2}{3}\sqrt{x} + c$

১৯। $f(x) = 2x$ হলে– [রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২২, ১৭]

(i) $\int \frac{dx}{f(x)} = \frac{1}{2}\ln x + c$

(ii) $\int e^{f(x)}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

(iii) $\int_0^1 f(x)dx = 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\ln x + c$

(ii) $\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$

(iii) Using Calculator

অথবা, $\int_0^1 2x\,dx = [x^2]_0^1 = 1$ [Using Calculator]

২০। যদি $\int \varphi(x)dx = \ln(\ln x) + c$ হয়, যেখানে c একটি ধ্রুবক, তবে $\varphi(x) = ?$

ক $x\ln(\ln x) + x$ খ $\frac{x}{\ln x}$
গ $\frac{1}{x\ln x}$ ঘ $x\ln x$

উত্তর: গ $\frac{1}{x\ln x}$

ব্যাখ্যা: যেহেতু অন্তরীকরণ যোগজীকরণের বিপরীত প্রক্রিয়া।

$\therefore \ln(\ln x) + c$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে মূল রাশিটি পাওয়া যাবে।

$\frac{d}{dx}(\ln(\ln x) + c) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x}$

## ত্রিকোণমিতিক ও বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের যোগজ

২১। $\int \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sqrt{1+\sin 4x}}dx = ?$

ক 0 খ $1 + c$
গ $x + c$ ঘ $\sin x - \cos x + c$

উত্তর: গ $x + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sqrt{1+\sin 4x}}dx$

$= \int \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sqrt{\sin^2 2x + \cos^2 2x + 2\sin 2x \cos 2x}}dx$

$= \int \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}dx$

$= \int 1\,dx$

$= x + c$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**২২।** $\int \sin\left(10-\frac{x}{5}\right) dx =$ কত? [ঢা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ১৯]

ক $5\cos\left(10-\frac{x}{5}\right)+c$ খ $-5\cos\left(10-\frac{x}{5}\right)+c$

গ $-\frac{1}{5}\cos\left(10-\frac{x}{5}\right)+c$ ঘ $-\frac{1}{5}\cos\left(10-\frac{x}{5}\right)+c$

**উত্তর:** ক $5\cos\left(10-\frac{x}{5}\right)+c$

**ব্যাখ্যা:** $\int \sin\left(10-\frac{x}{5}\right) dx = \frac{-\cos\left(10-\frac{x}{5}\right)}{-\frac{1}{5}} + c$

$= 5\cos\left(10-\frac{x}{5}\right)+c$

**Note:** $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a}+c$

**২৩।** $\int \sin x^\circ\, dx =$ কত? [ঢা. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২১]

ক $\cos x^\circ + c$ খ $-\cos x^\circ + c$

গ $-\frac{180}{\pi}\cos x^\circ + c$ ঘ $\frac{180}{\pi}\cos x^\circ + c$

**উত্তর:** গ $-\frac{180}{\pi}\cos x^\circ + c$

**ব্যাখ্যা:** $\int \sin\frac{x\pi}{180} dx \quad \left[1^\circ = \frac{\pi}{180}\right]$

$= \frac{-\cos\frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi}{180}} = -\frac{180}{\pi}\cos x^\circ + c$

**Note:** $\int \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a}+c$

**২৪।** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx$ এর মান কত?

[ঢা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২৩; চ. বো. ২১]

ক $-1$ খ $-\frac{1}{2}$

গ $\frac{1}{2}$ ঘ $1$

**উত্তর:** গ $\frac{1}{2}$

**ব্যাখ্যা:** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2}\left(\sin 2\times\frac{\pi}{4} - 0\right)$

$= \frac{1}{2}$

**অথবা,** Using Calculator in Radian Mode

**২৫।** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2} dx$ এর মান কত? [সি. বো. ২১]

ক 2 খ $-\frac{1}{2}$

গ $\frac{1}{2}$ ঘ 2

**উত্তর:** ঘ 2

**ব্যাখ্যা:** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2} dx = \left[\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2\left[\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0^\circ\right]$

$= 2$

**২৬।** $\int \operatorname{cosec} x\, dx$ এর মান কোনটি? [সি. বো. ১৭]

ক $\ln|\sin x| + c$ খ $\ln|\sec x| + c$

গ $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$ ঘ $\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right| + c$

**উত্তর:** গ $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

**ব্যাখ্যা:** $\int \operatorname{cosec} x\, dx$

$= \int \frac{1}{\sin x} dx$

$= \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx$

$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} dx$ [লব ও হর এ $\cos^2\frac{x}{2}$ দ্বারা ভাগ করে]

$= \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} dx$

$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

**Note:** সূত্র

(i) $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c$

(ii) $\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + c$

(iii) $\int \sec x\, dx = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$

ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



২৭। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1+\sin 2x)}\, dx = ?$ [ঢা. বো. ২৩]

ক $-2$ খ $0$

গ $1$ ঘ $2$

উত্তর: ঘ $2$

ব্যাখ্যা: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin x + \cos x)}\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\, dx$

$= [-\cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + \cos 0° - \sin 0°$

$= -0 + 1 + 1 - 0$

$= 2$

অথবা, Using Calculator in Radian Mode

২৮। যদি $\int \text{cosec}^2(5-8x)\, dx = a\cot(5-8x) + c$ হয়, তবে a এর মান কোনটি? [ঢা. বো. ২৩]

ক $-8$ খ $-\frac{1}{8}$

গ $\frac{1}{8}$ ঘ $8$

উত্তর: গ $\frac{1}{8}$

ব্যাখ্যা: $\int \text{cosec}^2(5-8x)\, dx$

$= -\frac{\cot(5-8x)}{-8} + c$

$= \frac{1}{8}\cot(5-8x) + c$

$\therefore a = \frac{1}{8}$

**Note:** $\int \text{cosec}^2(ax+b)\, dx = -\frac{\cot(ax+b)}{a} + c$

২৯। $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta = ?$ [ঢা. বো. ২২]

ক $\frac{1}{2}\ln 2$ খ $\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$

গ $\ln(\sqrt{2}+1)$ ঘ $\ln(\sqrt{2}-1)$

উত্তর: গ $\ln(\sqrt{2}+1)$

ব্যাখ্যা: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta = [\ln|\tan\theta + \sec\theta|]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \ln\left(\tan\frac{\pi}{4} + \sec\frac{\pi}{4}\right) - \ln 1$

$= \ln(\sqrt{2}+1)$

অথবা, Calculator দিয়ে মান নির্ণয় করে Option Test করো [Radian Mode]

৩০। $F(x) = \text{cosec}x$ হলে– [য. বো. ২১]

(i) $\int F(x)\, dx = \ln|\text{cosec}x + \cot x| + c$

(ii) $\int F(x)\, dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

(iii) $\int F(x)\, dx = -\ln|\text{cosec}x + \cot x| + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) ভুল

(iii) $\int \text{cosec}x\, dx$

$= \int \frac{\text{cosec}x(\text{cosec}x + \cot x)}{\text{cosec}x + \cot x}\, dx$

$= -\int \frac{-\text{cosec}^2 x - \text{cosec}x\cot x}{\text{cosec}x + \cot x}\, dx$

$= -\int \frac{d(\text{cosec}x + \cot x)}{\text{cosec}x + \cot x}\, dx$

$= -\ln|\text{cosec}x + \cot x| + c$ [$\because$ (iii) নং সঠিক]

$= -\ln\left|\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right| + c$

$= -\ln\left|\frac{1+\cos 2.\frac{x}{2}}{\sin 2.\frac{x}{2}}\right| + c$

$= -\ln\left|\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right| + c$

$= -\ln\left|\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| + c$

$= \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| + c$

$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$ [(ii) সঠিক]

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৩১। $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin^2 x$ হলে–

[সি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ১৭]

(i) $g'(x) = f(x)$ হবে

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx = 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii  খ i ও iii

গ ii ও iii  ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $g(x) = \sin^2 x$

$\therefore g'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x = f(x)$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x.\cos x}{\sin^2 x}$

$= \lim_{x \to 0} 2.\cot x$

$= \infty$

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos\pi}{2} + \frac{\cos 0}{2}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

৩২। $f(\theta) = \cos 2\theta$ হলে–

[সি. বো. ২১]

(i) $\int f(\theta)\, d\theta = \frac{\sin 2\theta}{2} + c$

(ii) $\int \sqrt{1 - f(\theta)}\, d\theta = -\sqrt{2}\cos\theta + c$

(iii) $\int \sqrt{1 + f(\theta)}\, d\theta = \sqrt{2}\sin\theta + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii  খ i ও iii

গ ii ও iii  ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $\int \cos 2\theta\, d\theta = \frac{\sin 2\theta}{2} + c$

(ii) $\int \sqrt{1 - \cos 2\theta}\, d\theta = \int \sqrt{2}\sin\theta\, d\theta = -\sqrt{2}\cos\theta + c$

(iii) $\int \sqrt{1 + \cos 2\theta}\, d\theta = \int \sqrt{2}\cos\theta\, d\theta = \sqrt{2}\sin\theta + c$

৩৩। $\int \frac{dx}{1 - \cos x} = f(x) + c$ হলে $f(x)$ এর মান কোনটি?

[সি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ১৯; সকল বো. ১৮]

ক $-\cot\frac{x}{2}$  খ $2\cot\frac{x}{2}$

গ $2\cot\frac{x}{2}$  ঘ $\cot\frac{x}{2}$

উত্তর: ক $-\cot\frac{x}{2}$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$

$= \int \frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}}$

$= \frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}\, dx$

$= -\frac{1}{2} \times \frac{\cot\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}$

$= -\cot\frac{x}{2} + c$

$\therefore f(x) = -\cot\frac{x}{2}$

৩৪। $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \cos 2x}$ এর মান কত?

[ম. বো. ২১]

ক 0  খ $\frac{1}{2}$

গ 1  ঘ $\frac{3}{2}$

উত্তর: খ $\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \cos 2x}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x}$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$

$= \frac{1}{2}[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2}\left[\tan\frac{\pi}{4} - 0\right]$

$= \frac{1}{2}$

অথবা, Using Calculator in Radian Mode

৩৫। $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ এর মান–

[য. বো. ১৯]

ক $\cos^{-1}x$  খ $\sec^{-1}x$

গ $\sin^{-1}x$  ঘ $\operatorname{cosec}^{-1}x$

উত্তর: খ $\sec^{-1}x$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \sec^{-1}x + c$ [সূত্র]

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৩৬। (i) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$ [দি. বো. ১৭]

(ii) $\int \sec^2 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}x + c$

(iii) $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a} = \frac{1}{x\log_e a} = \frac{1}{x}\log_a e$

(ii) $\int \sec^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + c = 2\tan\frac{x}{2} + c$

(iii) $\int_a^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}$

## প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ

### (i) ত্রিকোণমিতি ও বিপরীত ত্রিকোণমিতি ফাংশন

৩৭। $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos x\,dx =$ কত? [চ. বো. ২৩]

ক $-\frac{5}{24}$ খ $-\frac{1}{24}$

গ $\frac{1}{24}$ ঘ $\frac{5}{24}$

উত্তর: গ $\frac{1}{24}$

ব্যাখ্যা: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos x\,dx = \frac{1}{24}$

[Using Calculator in Radian Mode]

৩৮। $\int \sin^4 x \cos x\,dx = f(x) + c$, যেখানে c একটি ধ্রুবক হলে $f(x) = ?$ [চ. বো. ১৯]

ক $\frac{1}{5}\cos^5 x$ খ $\frac{1}{5}\sin^5 x$

গ $\frac{-\sin^5 x \cos^2 x}{10}$ ঘ $-\frac{1}{5}\cos^5 x$

উত্তর: খ $\frac{1}{5}\sin^5 x$

ব্যাখ্যা: $\int \sin^4 x \cos x\,dx$

$= \int z^4\,dz = \frac{z^5}{5} + c = \frac{1}{5}\sin^5 x + c$

ধরি, $\sin x = z$

$\Rightarrow \cos x\,dx = dz$

৩৯। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\theta \cos\theta\,d\theta$ এর মান– [য. বো. ২২]

ক $\frac{1}{9}$ খ $\frac{1}{8}$

গ $\frac{1}{7}$ ঘ 0

উত্তর: ক $\frac{1}{9}$

ব্যাখ্যা: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\theta \cos\theta\,d\theta$

ধরি, $\sin\theta = z$

$\Rightarrow \cos\theta\,d\theta = dz$

| $\theta$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| z | 0 | 1 |

$\therefore \int_0^1 z^8\,dz = \left[\frac{z^9}{9}\right]_0^1$

$= \frac{1}{9}$

অথবা, Using Calculator in radian mode

৪০। $\int \frac{\tan(\ln x)}{x}\,dx =$ কত? [কু. বো. ২১]

ক $\ln(\sec^2 x) + c$ খ $\ln\sec(\ln x) + c$

গ $\ln(\sec x) + c$ ঘ $\ln(\tan^2 x) + c$

উত্তর: খ $\ln\sec(\ln x) + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{\tan(\ln x)}{x}\,dx$

$= \int \tan z\,dz$

$= \ln\sec z + c$

$= \ln\{\sec(\ln x)\} + c$

ধরি, $\ln x = z$

$\Rightarrow \frac{1}{x}\,dx = dz$

**Note:** $\int \tan x\,dx = \ln\sec x + c$

৪১। $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx =$ কোনটি?

ক $\cos x + c$ খ $e^{\cos x} + c$

গ $\sin x + c$ ঘ $e^{\sin x} + c$

উত্তর: ঘ $e^{\sin x} + c$

ব্যাখ্যা: $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$

$= \int e^z\,dz$

$= e^z + c$

$= e^{\sin x} + c$

ধরি, $\sin x = z$

$\therefore \cos x\,dx = dz$

৪২। $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} p}{\sqrt{1-p^2}}\,dp$ এর মান কত? [রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২১]

ক $\frac{\pi}{2}$ খ $\frac{\pi^2}{2}$

গ $\frac{\pi^2}{4}$ ঘ $\frac{\pi^2}{8}$

উত্তর: ঘ $\frac{\pi^2}{8}$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: $\int \frac{\sin^{-1}p}{\sqrt{1-p^2}}\,dp$

ধরি, $\sin^{-1}p = z$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\,dp = dz$

$= \int z\,dz = \frac{z^2}{2} + c = \frac{1}{2}(\sin^{-1}p)^2 + c$

$\therefore \int_0^1 \frac{\sin^{-1}p}{\sqrt{1-p^2}}\,dp = \left[\frac{1}{2}(\sin^{-1}p)^2\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}(\sin^{-1}1)^2$

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

$= \frac{\pi^2}{8}$

৪৩। $\int \frac{1+\tan^2 x}{(1-\tan x)^2}\,dx$ এর মান কোনটি? [দি. বো. ২৩]

ক $\frac{-1}{1+\tan x} + c$ খ $\frac{-1}{1-\tan x} + c$

গ $\frac{1}{1-\tan x} + c$ ঘ $\frac{1}{1+\tan x} + c$

উত্তর: গ $\frac{1}{1-\tan x} + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{1+\tan^2 x}{(1-\tan x)^2}\,dx$

ধরি, $1 - \tan x = z$

$\Rightarrow -\sec^2 x\,dx = dz$

$= \int \frac{\sec^2 x}{(1-\tan x)^2}\,dx$

$= -\int \frac{dz}{z^2}$

$= -\frac{z^{-2+1}}{-2+1} + c$

$= \frac{1}{z} + c = \frac{1}{1-\tan x} + c$

৪৪। $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}\,dx =$ কত? [ব. বো. ১৯]

ক $\frac{1}{2}\sec 2x + c$ খ $2\sec 2x + c$

গ $\frac{1}{2}\operatorname{cosec} 2x + c$ ঘ $2\operatorname{cosec} 2x + c$

উত্তর: ক $\frac{1}{2}\sec 2x + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}\,dx$

ধরি, $\cos 2x = z$

$\Rightarrow -2\sin 2x\,dx = dz$

$\Rightarrow \sin 2x\,dx = -\frac{dz}{2}$

$= \int -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{2}$

$= -\frac{1}{2}\int z^{-2}\,dz$

$= -\frac{1}{2} \times \frac{z^{-2+1}}{-2+1}$

$= \frac{1}{2z} + c$

$= \frac{1}{2\cos 2x} + c$

$= \frac{1}{2}\sec 2x + c$

৪৫। $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx =$ কত? [য. বো. ২১]

ক $\frac{\pi}{2}$ খ $\frac{\pi}{4}$

গ $\frac{\pi}{6}$ ঘ $\frac{2\pi}{3}$

উত্তর: ক $\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

ধরি, $\cos x = z$

$\therefore -\sin x\,dx = dz$

| x | 0 | π |
|---|---|---|
| z | 1 | −1 |

$= -\int_1^{-1} \frac{dz}{1+z^2}$

$= -[\tan^{-1}z]_1^{-1}$

$= -[\tan^{-1}(-1) - \tan^{-1}1]$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\pi}{2}$

অথবা, Using Calculator in Radian Mode

৪৬। $\int_0^1 \frac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ এর মান কত? [চ. বো. ১৯]

ক $\frac{\pi^2}{8}$ খ $\frac{\pi}{2}$

গ $\frac{\pi}{8}$ ঘ $\frac{\pi}{4}$

উত্তর: ক $\frac{\pi^2}{8}$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{\cos^{-1}x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

ধরি, $\cos^{-1}x = z$

$\Rightarrow \frac{-1\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = dz$

$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -dz$

$= -\int z\,dz$

$= -\frac{z^2}{2} + c$

$\therefore \int_0^1 \frac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[-\frac{1}{2}(\cos^{-1}x)^2\right]_0^1$

$= -\frac{1}{2}\{(\cos^{-1}1)^2 - (\cos^{-1}0)^2\}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

$= \frac{\pi^2}{8}$

৪৭। $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin^2 x$, x এর প্রেক্ষিতে $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ কোনটি? [কু. বো. ১৭]

ক $2\ln|1+\cos 2x| + c$ খ $-\ln|1-\cos 2x| + c$

গ $\ln|1+\cos 2x| + c$ ঘ $\ln|1-\cos 2x| + c$

উত্তর: ঘ $\ln|1-\cos 2x| + c$



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}\times 2\sin^2 x}\,dx$

$= \int \frac{2\sin 2x\,dx}{1-\cos 2x}$

$= \int \frac{dz}{z} = \ln z + c$

$= \ln|1-\cos 2x| + c$

ধরি, $1-\cos 2x = z$

$\Rightarrow 0 + 2\sin 2x\,dx = dz$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৪৮ ও ৪৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = \cot^2 x$ এবং $g(x) = \operatorname{cosec}^2 x$

**৪৮। $\int f(x)\,dx$ এর যোজিত ফল কোনটি?**

ক $\operatorname{cosec}^2 x + c$ খ $\cot^3 x + c$

গ $-\cot x - x + c$ ঘ $\cot x - x + c$

উত্তর: গ $-\cot x - x + c$

ব্যাখ্যা: $\int f(x)\,dx = \int \cot^2 x\,dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx = -\cot x - x + c$

**৪৯। $\int f(x)\,g(x)\,dx = ?$**

ক $\cot^3 x + c$ খ $\operatorname{cosec}^3 x + c$

গ $-\frac{1}{3}\cot^3 x + c$ ঘ $-\frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + c$

উত্তর: গ $-\frac{1}{3}\cot^3 x + c$

ব্যাখ্যা: $\int \cot^2 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx$

$= -\int z^2\,dz$

$= -\frac{z^3}{3} + c = -\frac{1}{3}\cot^3 x + c$

ধরি, $z = \cot x$

$\therefore dz = -\operatorname{cosec}^2 x\,dx$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -dz$

**৫০। $\int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ = কত?** [সি. বো. ২২]

ক $\frac{-2}{\sqrt{\sin x}} + c$ খ $\frac{-1}{2\sqrt{\sin x}} + c$

গ $\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} + c$ ঘ $2\sqrt{\sin x} + c$

উত্তর: ক $\frac{-2}{\sqrt{\sin x}} + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{\cot x\,dx}{\sqrt{\sin x}}$

$= \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x\sqrt{\sin x}}$

$= \int \frac{dz}{z\sqrt{z}} = \int z^{-\frac{3}{2}}\,dz = \frac{z^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c$

$= -2\times z^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{-2}{\sqrt{z}} + c = \frac{-2}{\sqrt{\sin x}} + c$

ধরি, $\sin x = z$

$\Rightarrow \cos x\,dx = dz$

**৫১। $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}\,dx$ এর মান কোনটি?**

ক $\sin(xe^x) + c$ খ $\cos(xe^x) + c$

গ $\tan(xe^x) + c$ ঘ $\cos^2(xe^x) + c$

উত্তর: গ $\tan(xe^x) + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}\,dx$

$= \int \frac{dz}{\cos^2 z}$

$= \int \sec^2 z\,dz$

$= \tan z + c$

$= \tan(xe^x) + c$

ধরি, $xe^x = z$

$\Rightarrow (e^x + xe^x)\,dx = dz$

$\therefore e^x(1+x)\,dx = dz$

**৫২। $\int \frac{\tan x}{\ln\cos x}\,dx$ এর মান কত?**

ক $\ln|\ln\cos x| + c$ খ $-\ln|\cos x| + c$

গ $-\ln|\ln\cos x| + c$ ঘ $|\ln\cos x| + c$

উত্তর: গ $-\ln|\ln\cos x| + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{\tan x}{\ln\cos x}\,dx$

$= -\int \frac{dz}{z}$

$= -\ln(z) + c$

$= -\ln|\ln\cos x| + c$

ধরি, $\ln(\cos x) = z$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos x}(-\sin x)\,dx = dz$

$\Rightarrow -\tan x\,dx = dz$

**৫৩। $I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ হলে, I এর মান কোনটি?**

[রা. বো. ১৯; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২২]

ক $-2\sqrt{\cos x} + c$ খ $2\sqrt{\sin x} + c$

গ $2\cos x + c$ ঘ $-2\sin x + c$

উত্তর: খ $2\sqrt{\sin x} + c$

ব্যাখ্যা: $I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = 2\sqrt{\sin x} + c$

**Note:** $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

**৫৪। $\int \frac{1}{\cos^2 p\sqrt{\tan p}}\,dp = ?$** [রা. বো. ২১]

ক $\sqrt{\tan p} + c$ খ $\sqrt{\cot p} + c$

গ $2\sqrt{\tan p} + c$ ঘ $2\sqrt{\cot p} + c$

উত্তর: গ $2\sqrt{\tan p} + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{dp}{\cos^2 p\sqrt{\tan p}}$

$= \int \frac{\sec^2 p\,dp}{\sqrt{\tan p}}$

$= 2\sqrt{\tan p} + c$

**Note:** $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৫৫ ও ৫৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = \cot x,\ g(x) = \text{cosec}^2 x$

৫৫। $\int f(x)\,dx =$ কত? [ঢা. বো. ২১]

ক $\text{cosec}^2 x + c$ খ $-\text{cosec}^2 x + c$

গ $\ln|\text{cosec}x| + c$ ঘ $\ln|\sin x| + c$

উত্তর: ঘ $\ln|\sin x| + c$

ব্যাখ্যা: $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$ ← সূত্র

৫৬। (i) $\int g\left(\frac{x}{2}\right)dx = -2\cot\frac{x}{2} + c$ [ঢা. বো. ২১]

(ii) $\frac{d}{dx}\left\{f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right\} = 2\sec^2 2x$

(iii) $\int f(x)\,g(x)\,dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $\int \text{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{-\cot\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + c$

$= -2\cot\frac{x}{2} + c$

(ii) $\frac{d}{dx}\left\{\cot\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right\} = \frac{d}{dx}(\tan 2x)$

$= 2\sec^2 2x$

(iii) $\int \cot x \text{cosec}^2 x\,dx$

ধরি, $\cot x = z$

$\Rightarrow -\text{cosec}^2 x\,dx = dz$

$\therefore \text{cosec}^2 x\,dx = -dz$

$= -\int z\,dz = -\frac{z^2}{2} + c$

$= -\frac{1}{2}\cot^2 x + c$

৫৭। $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$ এর মান কত? [ম. বো. ২৩]

ক $\sin x + c$ খ $\cos x + c$

গ $\ln\sin x + c$ ঘ $\ln\cos x + c$

উত্তর: গ $\ln\sin x + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x| + c$

**Note:** $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$

## (ii) বীজগাণিতিক ফাংশন

৫৮। $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ এর মান কোনটি? [রা. বো. ২২]

ক $2e^{-1}$ খ $2(e-1)$

গ $\frac{2}{e} - 1$ ঘ $1 - \frac{1}{e}$

উত্তর: খ $2(e-1)$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$

ধরি, $e^{\sqrt{x}} = z$

$\Rightarrow e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dz$

$\Rightarrow \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} = 2dz$

$= \int 2dz$

$= 2z + c$

$= 2e^{\sqrt{x}} + c$

$\therefore \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left[2e^{\sqrt{x}}\right]_0^1 = 2e^1 - 2e^0 = 2(e-1)$

৫৯। $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}}$ এর মান কোনটি? [রা. বো. ২২]

ক $\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - 2(1-x)^{\frac{1}{2}} + c$ খ $-\frac{2}{3}(\sqrt{1-x})(x+2) + c$

গ $\frac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}} + c$ ঘ $\frac{2}{3}(\sqrt{1-x})(x+2) + c$

উত্তর: ক $\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - 2(1-x)^{\frac{1}{2}} + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}}$

ধরি, $1 - x = z^2$

$\Rightarrow x = 1 - z^2$

$\therefore dx = -2zdz$

$= \int \frac{(1-z^2)(-2zdz)}{z}$

$= -2\int (1-z^2)dz$

$= -2\left[z - \frac{z^3}{3}\right] + c$

$= \frac{2}{3}z^3 - 2z + c$

$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x}\right)^3 - 2\left(\sqrt{1-x}\right) + c$

$= \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - 2(1-x)^{\frac{1}{2}} + c$

৬০। $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$ এর মান কত? [রা. বো. ১৭]

ক $\ln\frac{8}{3}$ খ $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$

গ $\frac{1}{2}\ln 24$ ঘ $\ln 24$

উত্তর: খ $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$

$= \frac{1}{2}\int_3^8 \frac{dz}{z}$

$= \left[\frac{1}{2} \ln z\right]_3^8$

$= \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 3)$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$

ধরি, $x^2 - 1 = z$

$\Rightarrow 2x\,dx = dz$

$\therefore x\,dx = \frac{1}{2}dz$

| x | 2 | 3 |
|---|---|---|
| z | 3 | 8 |

**অথবা,** Using Calculator

$\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx = 0.49$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3} = 0.49$

**৬১। $I = \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ হলে, I এর মান কত?** [ঢা. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: সকল বো. ১৮]

ক e

খ e + 1

গ ln e −1

ঘ ln2

**উত্তর:** ঘ ln2

ব্যাখ্যা: $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

$= \int_1^e \frac{\frac{1}{x}}{(1+\ln x)}dx$

$= [\ln|1+\ln x|]_1^e$

$= \ln(1+\ln e) - \ln(1+\ln 1)$

$= \ln(1+1)$

$= \ln 2$

**অথবা,** Calculator দিয়ে মান নির্ণয় করে Option Test করো।

$I = \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)} = 0.693$

অপশন ঘ $\ln 2 = 0.693$

**৬২। $\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x-1}dx$ এর মান কত?** [ব. বো. ২৩]

ক $2\ln 2$

খ $2(\ln 2)^2$

গ $\frac{1}{2}\ln 2$

ঘ $\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

**উত্তর:** ঘ $\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{\ln(x-1)}{x-1}dx$

$= \int z\,dz$

$= \frac{z^2}{2}$

$= \frac{1}{2}(\ln|x-1|)^2$

$\therefore \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x-1}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln|x-1|)^2\right]_2^3$

$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$

$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

ধরি, $\ln(x-1) = z$

$\therefore \frac{1}{x-1}dx = dz$

ব্যাখ্যা: $\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x-1}dx = 0.24$

অপশন ঘ $\frac{1}{2}(\ln 2)^2 = 0.24$ [Using Calculator]

**৬৩। $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+2}dx$ = কত?** [চ. বো. ২৩]

ক $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

খ $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

গ $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

ঘ $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

**উত্তর:** ক $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{x^2}{x^3+2}dx$

$= \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z}$

$= \frac{1}{3}\ln|z| + c$

$= \frac{1}{3}[\ln(x^3+2)]$

$\therefore \int_0^1 \frac{x^2}{x^3+2}dx$

$= \frac{1}{3}[\ln|x^3+2|]_0^1$

$= \frac{1}{3}(\ln 3 - \ln 2)$

$= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

ধরি, $x^3 + 2 = z$

$\Rightarrow 3x^2\,dx = dz$

**অথবা,** $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+2}dx = 0.135$

অপশন ক $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0.135$ [Using Calculator]

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**৬৪। $\int \frac{\ln x^2}{x} dx = ?$** [ম. বো. ২১]

ক $2(\ln x)^2 + c$ খ $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$

গ $\ln x + c$ ঘ $(\ln x)^2 + c$

**উত্তর:** ঘ $(\ln x)^2 + c$

**ব্যাখ্যা:** $\int \frac{\ln x^2}{x} dx = \int \frac{2\ln x}{x} dx$

$= 2\int z dz = 2 \times \frac{z^2}{2} + c = z^2 + c$

$= (\ln x)^2 + c$

ধরি, $\ln x = z$

$\Rightarrow \frac{1}{x} dx = dz$

**৬৫। f(x) ধ্রুবক না হলে, $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ এর সমান কোনটি?**

[য. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২১]

ক $f'(x) + c$ খ $f(x) + c$

গ $\ln|x| + c$ ঘ $\ln|f(x)| + c$

**উত্তর:** ঘ $\ln|f(x)| + c$

**ব্যাখ্যা:** $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

**৬৬। $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} dx$ এর মান–**

[রা. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: দি. বো. ২৩; কু. বো. ২১; ঢা. বো. ১৯]

ক $\ln 2$ খ $\ln \frac{1}{2}$

গ $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$ ঘ $\frac{1}{2}\ln 2$

**উত্তর:** ঘ $\frac{1}{2}\ln 2$

**ব্যাখ্যা:** $\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{1+x^2} dx$

$= \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_1^{\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{2}[\ln 4 - \ln 2]$

$= \frac{1}{2}\ln 2$

**অথবা,** Using Calculator and Option test করো।

**৬৭। $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$ = কত?** [চ. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২৩; ব. বো. ১৭]

ক $\ln\frac{2}{3}$ খ 2

গ $\ln\frac{3}{2}$ ঘ 3

**উত্তর:** গ $\ln\frac{3}{2}$

**ব্যাখ্যা:** $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$

$\therefore \int_2^3 \frac{1}{z} dz$

$= [\ln z]_2^3$

$= \ln 3 - \ln 2$

$= \ln\frac{3}{2}$

ধরি, $1 + e^x = z$

$\Rightarrow e^x dx = dz$

| x | 0 | ln2 |
|---|---|---|
| z | 2 | 3 |

**Or,** Using Calculator $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx = 0.405 = \ln\frac{3}{2}$

**৬৮। $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx$ = কত?** [কু. বো. ২১]

ক $\frac{1}{2}f(x) + c$ খ $\sqrt{f(x)} + c$

গ $2f(x) + c$ ঘ $2\sqrt{f(x)} + c$

**উত্তর:** ঘ $2\sqrt{f(x)} + c$

**ব্যাখ্যা:** $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

**৬৯। $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = f(x) + c$ হলে, f(x) = কত?**

[দি. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২]

ক $\sin^{-1}x$ খ $\cos^{-1}x$

গ $\ln(\sqrt{1-x^2})$ ঘ $-\sqrt{1-x^2}$

**উত্তর:** ঘ $-\sqrt{1-x^2}$

**ব্যাখ্যা:** $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= -\frac{1}{2} \times 2\sqrt{1-x^2}$

$= -\sqrt{1-x^2}$

**৭০। $\int_0^1 xe^{x^2} dx$ এর মান–** [ম. বো. ২১]

ক $1 - \frac{2}{e}$ খ 1

গ $\frac{1}{2}(e-1)$ ঘ $\frac{1}{4}e$

**উত্তর:** গ $\frac{1}{2}(e-1)$

**ব্যাখ্যা:** $\int xe^{x^2} dx$

$= \int e^z \frac{dz}{2}$

$= \frac{1}{2}e^z + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

$\therefore \int_0^1 xe^{x^2} = \frac{1}{2}[e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$

ধরি, $x^2 = z$

$\Rightarrow 2x\,dx = dz$

$\Rightarrow x\,dx = \frac{dz}{2}$

**অথবা,** $\int_0^1 xe^{x^2} dx = 0.859$

অপশন গ $\frac{1}{2}(e-1) = 0.859$ [Using Calculator]

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৭১। $f(x) = \sqrt{x}$ হলে– [য. বো. ২২]

(i) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(ii) $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}$

(iii) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\tan x} + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + c$

(ii) Using Calculator

(iii) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{\tan x}}$

$= \int \frac{dz}{\sqrt{z}}$

$= \sqrt{z} + c$

$= 2\sqrt{\tan x} + c$

ধরি, $\tan x = z$

$\Rightarrow \sec^2 x\,dx = dz$

$\int \frac{dx}{a^2 \pm x^2}$ বা $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$ বা $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ বা $\int \sqrt{a^2 \pm x^2}\,dx$ আকারের যোগজ

৭২। $\int_0^1 \frac{4\,dx}{1+x^2} =$ কত? [য. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২২; ম. বো. ২২]

ক $4\ln 2$ খ $\ln 2$

গ $\pi$ ঘ $\frac{\pi}{4}$

উত্তর: গ $\pi$

ব্যাখ্যা: $\int_0^1 \frac{4\,dx}{1+x^2}$

$= 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$= 4[\tan^{-1}x]_0^1$

$= 4\tan^{-1}1 - 0$

$= 4 \times \frac{\pi}{4}$

$= \pi$

অথবা, Using Calculator

৭৩। $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\,dx = ?$ [রা. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২১, ১৭]

ক $\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$ খ $\frac{1}{\sqrt{5}}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$

গ $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$ ঘ $\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$

উত্তর: ক $\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}}\,dx$

$= \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$

**Note:** $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

৭৪। $\int \frac{1}{\sqrt{18-2x^2}}\,dx =$ কত? [ব. বো. ২২; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২১]

ক $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$ খ $\frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{3} + c$

গ $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + c$ ঘ $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$

উত্তর: ক $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{dx}{\sqrt{18-2x^2}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{2(9-x^2)}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$

অথবা, $\int \frac{dx}{\sqrt{18-2x^2}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{18})^2 - (\sqrt{2}x)^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sin^{-1}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{18}} + c$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$

**Note:** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

৭৫। $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = ?$ [য. বো. ২২]

ক $\frac{\pi}{2}$ খ $-\frac{\pi}{2}$

গ $\pi$ ঘ $-\pi$

উত্তর: ক $\frac{\pi}{2}$

Rhombus Publications

ADMISSION STUFFS

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2-1}}$

$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)}}$

$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

$= \left[\sin^{-1}\frac{x-1}{1}\right]_0^1$

$= 0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$= \frac{\pi}{2}$

**অথবা,** Using Calculator use limit: 0.001 for 0, 1.001 for 1

৭৬। $\int \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}} =$ কত? [কু বো. ২১]

ক $\frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{5x}{4}+c$ খ $\frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{4x}{5}+c$

গ $\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{5x}{4}+c$ ঘ $\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{5}+c$

উত্তর: ক $\frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{5x}{4}+c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{4^2-(5x)^2}} = \frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{5x}{4}+c$

**Note:** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

৭৭। $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = k\cot^{-1}\frac{a}{x}+c$ হলে, $k=?$ [ব. বো. ২১]

ক $-a$ খ $-\frac{1}{a}$

গ $\frac{1}{a}$ ঘ $a$

উত্তর: গ $\frac{1}{a}$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$

$= \frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{a}{x}+c$

$\therefore k = \frac{1}{a}$

**Note:** $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$

৭৮। $\int \frac{1}{9+x^2}dx$ এর মান কত? [ম. বো. ২৩]

ক $\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}+c$ খ $\frac{-1}{3}\tan\frac{x}{3}+c$

গ $\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{3}{x}+c$ ঘ $\tan^{-1}\frac{x}{3}+c$

উত্তর: ক $\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}+c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{1}{3^2+x^2}dx = \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}+c$

৭৯। $\int \frac{4x^3}{1+x^8}dx = f(x)+c$ হলে $f(x)$ এর মান কত? [দি. বো. ২১]

ক $\frac{1}{1+x^2}$ খ $\sin^{-1}x^3$

গ $\tan^{-1}x^4$ ঘ $\tan^{-1}x^3$

উত্তর: গ $\tan^{-1}x^4$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{4x^3}{1+x^8}dx$

$= \int \frac{4x^3\,dx}{1+(x^4)^2}$

$= \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1}z+c$

$= \tan^{-1}x^4+c$

ধরি, $x^4 = z$

$\Rightarrow 4x^3dx = dz$

৮০। $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = ?$ [দি. বো. ২৩]

ক $\frac{\pi}{2}$ খ $-\frac{\pi}{2}$

গ $\pi$ ঘ $-\pi$

উত্তর: ক $\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

$= \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-4+4x-x^2}}$

$= \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-(4-4x+x^2)}}$

$= \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}}$

$= \left[\sin^{-1}\frac{x-2}{2}\right]_0^2$

$= \sin^{-1}0 - \sin^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2}$

**অথবা,** Using Calculator

limit:

$0 \to 0.001$

$2 \to 2.001$

$1.54 \simeq \frac{\pi}{2}$

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৮১। $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+4x+1}}$ এর মান কোনটি?

ক $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)\right\}+c$

খ $\frac{1}{5}\sin^{-1}x+c$

গ $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}(x+1)+c$

ঘ $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}(x-1)+c$

উত্তর: ক $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)\right\}+c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+4x+1}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+\frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{-1-x^2+2x+\frac{1}{2}+1}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{2}-(x^2-2x+1)}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-(x-1)^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)+c$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)\right\}+c$

**Note:** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

৮২। $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$ = কত? [সি. বো. ১৯]

ক $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}+c$ খ $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}-\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}+c$

গ $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}+c$ ঘ $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}-\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}+c$

উত্তর: ক $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}+c$

ব্যাখ্যা: $\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}+c$

**Note:** $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

৮৩। $\int \frac{x^2}{x^2-4}\,dx$ এর মান কত? [য. বো. ২১]

ক $\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$ খ $\frac{1}{x}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

গ $x-\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$ ঘ $x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

উত্তর: ঘ $x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

ব্যাখ্যা: $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-4} = \int \frac{x^2-4+4}{x^2-4}\,dx$

$= \int\left(\frac{x^2-4}{x^2-4}+\frac{4}{x^2-4}\right)dx$

$= \int\left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)dx$

$= \int dx + 4\int \frac{1}{x^2-2^2}\,dx$

$= x+4\times\frac{1}{2\times 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

$= x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

**Note:** $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

## Integration by parts (অংশক্রমে যোগজ নির্ণয়)

৮৪। $\int \ln 2x\,dx$ এর মান কোনটি? [য. বো. ১৭]

ক $\frac{1}{2x}+c$ খ $\frac{1}{x}+c$

গ $x\ln 2x+x+c$ ঘ $x\ln 2x-x+c$

উত্তর: ঘ $x\ln 2x-x+c$

ব্যাখ্যা: $\int \ln 2x\,dx$

$= \ln 2x\int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\ln 2x)\int dx\right\}dx$

$= \ln 2x\cdot x - \int \frac{1}{2x}\cdot 2.x\,dx$

$= x\ln 2x - \int dx$

$= x\ln 2x - x + c$

**Note:** $\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(u)\int v\,dx\right\}dx$

৮৫। $\int x\sec^2 x\,dx$ = কত? [কু. বো. ২৩]

ক $x\tan x+\ln|\sin x|+c$ খ $x\tan x-\ln|\sin x|+c$

গ $x\tan x+\ln|\cos x|+c$ ঘ $x\tan x-\ln|\cos x|+c$

উত্তর: গ $x\tan x+\ln|\cos x|+c$

ব্যাখ্যা: $\int x\sec^2 x\,dx$

$= x\int \sec^2 x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}x\int \sec^2 x\,dx\right\}dx$

$= x\tan x - \int \tan x\,dx$

$= x\tan x - \ln|\sec x|+c$

$= x\tan x + \ln|\cos x|+c$

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৮৬। $\int_1^{\sqrt{e}} \ln x \, dx$ এর মান কোনটি? [কু. বো. ২৩; য. বো. ২১; ব. বো. ১৭]

ক $-1-\frac{1}{2}\sqrt{e}$ খ $1-\frac{1}{2}\sqrt{e}$

গ $1+\frac{1}{2}\sqrt{e}$ ঘ $-1+\frac{1}{2}\sqrt{e}$

উত্তর: খ $1-\frac{1}{2}\sqrt{e}$

ব্যাখ্যা: $\int \ln x \, dx$

$= \ln x \int dx - \int \left[\frac{d}{dx}\ln x \int dx\right] dx$

$= x\ln x - \int \frac{1}{x}.x \, dx$

$= x\ln x - \int dx$

$= x\ln x - x + c$

$\therefore \int_1^{\sqrt{e}} \ln x \, dx = [x\ln x - x]_1^{\sqrt{e}}$

$= \sqrt{e}\ln\sqrt{e} - \sqrt{e} - 1\ln 1 + 1$

$= \sqrt{e}\ln e^{\frac{1}{2}} - \sqrt{e} + 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{e}\ln e - \sqrt{e} + 1$

$= 1 + \frac{\sqrt{e}}{2} - \sqrt{e}$

$= 1 - \frac{1}{2}\sqrt{e}$

অথবা, $\int_1^{\sqrt{e}} \ln x \, dx = 0.175$

অপশন খ $1-\frac{1}{2}\sqrt{e} = 0.175$ [Using Calculator]

৮৭। $\int_1^e \log_e x \, dx$ = কত? [ব. বো. ২১]

ক $-e$ খ $-1$

গ $1$ ঘ $e$

উত্তর: গ $1$

ব্যাখ্যা: $\int_1^e \log_e x \, dx$

$= \int_1^e \ln x \, dx$

$= \int \ln x \, dx$

$= \ln x \int dx - \int \left[\frac{d}{dx}\ln x \int dx\right] dx$

$= x\ln x - \int \frac{1}{x}.x \, dx$

$= x\ln x - \int dx$

$= x\ln x - x + c$

$\therefore \int_1^e \ln x = [x\ln x - x]_1^e \, dx$

$= e\ln e - e - \ln 1 + 1$

$= e - e - 0 + 1$

$= 1$

অথবা, Using Calculator, but use limit

$1 \to 1.001$ or $0.999$

$e \to e$

৮৮। $\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x \, dx$ = কত? [দি. বো. ১৯]

ক $-\frac{1}{4}$ খ $\frac{e}{2}-\frac{1}{4}$

গ $\frac{e}{2}+\frac{1}{4}$ ঘ $\frac{1}{4}$

উত্তর: ঘ $\frac{1}{4}$

ব্যাখ্যা: $\int x\ln x \, dx$

$= \ln x \int x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx}\ln x \int x \, dx\right] dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}.\frac{x^2}{2} dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} + c$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$

$\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^{\sqrt{e}}$

$= \frac{(\sqrt{e})^2}{2}.\ln\sqrt{e} - \frac{(\sqrt{e})^2}{4} - \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{4}$

$= \frac{e}{2}.\ln e^{\frac{1}{2}} - \frac{e}{4} - 0 + \frac{1}{4}$

$= \frac{e}{2}\times\frac{1}{2}\ln e - \frac{e}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{e}{4} - \frac{e}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4}$

অথবা, Using Calculator, but use limit

$1 \to 1.001$ or $0.999$

$e \to e$

ADMISSION STUFFS
ADMISSION STUFFS
Rhombus Publications
t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## $\int e^{ax}\{af(x)+f'(x)\}dx = e^{ax}f(x)+c$ আকারের যোগজ নির্ণয়

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ৮৯ ও ৯০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = x^2, g(x) = 2x$

**৮৯। $\int g(x)\,dx$ = কত?** [সি. বো. ১৯]

ক $x + c$ খ $2x^2 + c$

গ $2x + c$ ঘ $x^2 + c$

**উত্তর:** ঘ $x^2 + c$

**ব্যাখ্যা:** $\int 2x\,dx = 2 \times \frac{x^2}{2} + c$

$= x^2 + c$

**৯০। $\int_0^1 e^x\{f(x)+g(x)\}dx$ = কত?** [সি. বো. ১৯]

ক $e$ খ $-e$

গ $2e$ ঘ $-2e$

**উত্তর:** ক $e$

**ব্যাখ্যা:** $\int e^x\{x^2+2x\}dx = e^x \cdot x^2 + c$

$\therefore \int_0^1 e^x\{f(x)+g(x)\}dx = \left[e^x \cdot x^2\right]_0^1 = e^1 - e^0.0 = e$

**৯১। $\int e^x(x+1)\,dx$ = ?** [সি. বো. ২৩]

ক $x + e^x + c$ খ $e^x + x + c$

গ $e^x x^2 + c$ ঘ $xe^x + c$

**উত্তর:** ঘ $xe^x + c$

**ব্যাখ্যা:** $f(x) = x$

$\therefore f'(x) = 1$

$\int e^x(x+1)\,dx = xe^x + c$

**৯২। $\int e^{10x}\left[10\,\ln x + \frac{1}{x}\right]dx$ = কত?** [ব. বো. ২২]

ক $e^{10x}\ln|x| + c$ খ $e^{10x}.10\ln|x| + c$

গ $10e^x\ln|x| + c$ ঘ $\frac{1}{10}e^{10x}\ln|x| + c$

**উত্তর:** ক $e^{10x}\ln|x| + c$

**ব্যাখ্যা:** $\int e^{10x}\left\{10\,\ln x + \frac{1}{x}\right\}dx = e^{10x}\ln|x| + c$

**Note:** $\int e^{ax}\{a\,f(x)+f'(x)\}dx = e^{ax}f(x)+c$

**৯৩। $\int e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$ এর মান কত?** [রা. বো. ২১]

ক $-\frac{e^x}{x} + c$ খ $-\frac{e^x}{x^2} + c$

গ $\frac{e^x}{x} + c$ ঘ $\frac{e^x}{x^2} + c$

**উত্তর:** গ $\frac{e^x}{x} + c$

**ব্যাখ্যা:** $\int e^x\left(f(x)+f'(x)\right)dx = e^x f(x) + c$

$= \int e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{e^x}{x} + c$

$\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\right.$

**৯৪। $\int e^x(\cos x - \sin x)\,dx$ = ?** [ঢা. বো. ১৯]

ক $e^x\sin x + c$ খ $e^x\cos x + c$

গ $-e^x\cos x + c$ ঘ $-e^x\sin x + c$

**উত্তর:** খ $e^x\cos x + c$

**ব্যাখ্যা:** $\int e^x(\cos x - \sin x)\,dx$

$= \int e^x\{\cos x + (-\sin x)\}dx$

$= e^x\cos x + c$

**৯৫। $\int e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)dx$ = কত?** [চ. বো. ২২]

ক $e^x\ln x + c$ খ $e^x + \ln x + c$

গ $e^x \cdot \frac{1}{x} + c$ ঘ $e^x + \frac{1}{x} + c$

**উত্তর:** ক $e^x\ln x + c$

**ব্যাখ্যা:** $\int e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)dx$

$= \int e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)dx$

$= e^x\ln x + c$

**৯৬। $\int e^x\cos x\,(1+\tan x)\,dx$ এর মান কত?** [সি. বো. ২২]

ক $e^x\cos x + c$ খ $e^x\tan x + c$

গ $e^x\sec x + c$ ঘ $e^x\sin x + c$

**উত্তর:** ঘ $e^x\sin x + c$

**ব্যাখ্যা:** $\int e^x\cos x\,(1+\tan x)\,dx$

$= \int e^x(\cos x + \sin x)\,dx$

$= \int e^x(\sin x + \cos x)\,dx$

$= e^x\sin x + c$

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



৯৭। $\int e^x\left(\sin3x + \frac{3}{\sec3x}\right)dx = ?$ [সি. বো. ২৩]

ক $3e^x\sin3x + c$ খ $e^x\sin3x + c$

গ $3e^x\cos3x + c$ ঘ $e^x\cos3x + c$

উত্তর: খ $e^x\sin3x + c$

ব্যাখ্যা: $\int e^x\left(\sin3x + \frac{3}{\sec3x}\right)dx$

$= \int e^x(\sin3x + 3\cos3x)dx$

$= e^x\sin3x + c$

৯৮। $\int e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$ এর মান কোনটি?

ক $e^x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + c$ খ $e^x\sin\left(\frac{x}{2}\right) + c$

গ $e^x\tan\left(\frac{x}{2}\right) + c$ ঘ $e^x\cot\left(\frac{x}{2}\right) + c$

উত্তর: গ $e^x\tan\left(\frac{x}{2}\right) + c$

ব্যাখ্যা: $I = \int e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$

$= \int e^x\left(\frac{1 + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx$

$= \int e^x\left(\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}\right)dx$

$= \int e^x\left(\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\right)dx$

$= e^x\tan\left(\frac{x}{2}\right) + c$

➠ উদ্দীপকটির আলোকে ৯৯ ও ১০০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = \tan x$ এবং $g(x) = \sec^2 x$

৯৯। $\int f(x)\,dx =$ কত? [দি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১]

ক $-\ln\cos x + c$ খ $-\ln\sec x + c$

গ $\ln\cos x + c$ ঘ $\ln\sin x + c$

উত্তর: ক $-\ln\cos x + c$

ব্যাখ্যা: $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx$

$= -\ln|\cos x| + c$

১০০। $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\{f(x) + g(x)\}\,dx =$ কত? [দি. বো. ২১; অনুরূপ প্রশ্ন: ম. বো. ২১]

ক 0 খ $e^{\frac{\pi}{4}}$

গ 1 ঘ $e^{\frac{\pi}{4}} - 1$

উত্তর: খ $e^{\frac{\pi}{4}}$

ব্যাখ্যা: $\int e^x\{\tan x + \sec^2 x\}dx = e^x\tan x + c$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\{f(x) + g(x)\}\,dx = \left[e^x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= e^{\frac{\pi}{4}}\tan\frac{\pi}{4} - e^0\tan0$

$= e^{\frac{\pi}{4}}$

অথবা, Using Calculator

## ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত

১০১। $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল– [ম. বো. ২২]

ক $\frac{\pi}{3}$ খ $\frac{\pi}{2}$

গ $\pi$ ঘ $2\pi$

উত্তর: গ $\pi$

ব্যাখ্যা: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = r^2$

বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 1 একক

$\therefore$ ক্ষেত্রফল = $\pi r^2 = \pi$

Note: $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল = $\pi a^2$ বর্গ একক

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল = $\pi ab$ বর্গ একক

$y^2 = 4ax$ ও $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল

$= \frac{16a^2}{3}$ বর্গ একক

$y^2 = 4ax$ বা $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং এদের উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3}$ বর্গ একক

$y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $y = mx$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3m^3}$ বর্গ একক

$x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং $y = mx$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2m^3}{3}$ বর্গ একক

১০২। $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্ত প্রথম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [সি. বো. ২১]

ক $36\pi$ খ $24\pi$

গ $12\pi$ ঘ $9\pi$

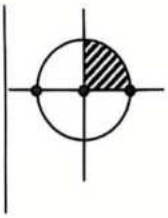
উত্তর: ঘ $9\pi$

ব্যাখ্যা: $x^2 + y = 6^2$ ; বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 6

$\therefore$ মোট ক্ষেত্রফল = $36\pi$

$\therefore$ একটি চতুর্ভাগে ক্ষেত্রফল = $\frac{36\pi}{4}$

$= 9\pi$ বর্গ একক



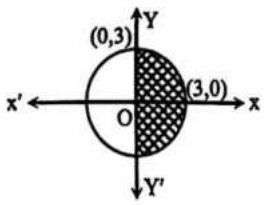


t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



১০৩।




চিত্রটির ক্ষেত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [কু. বো. ২১]

ক $\frac{3\pi}{2}$ খ $\frac{9\pi}{4}$

গ $\frac{9\pi}{2}$ ঘ $9\pi$

উত্তর: গ $\frac{9\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: চিত্রের বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 3 একক

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = $9\pi$ বর্গ একক

$\therefore$ অর্ধবৃত্ত বা ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল = $\frac{9\pi}{2}$ বর্গ একক

১০৪। $5x^2 + 20y^2 = 100$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [য. বো. ২৩]

ক 10 খ 100

গ $10\pi$ ঘ $100\pi$

উত্তর: গ $10\pi$

ব্যাখ্যা: $5x^2 + 20y^2 = 100$

$\Rightarrow \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

ক্ষেত্রফল = $\pi ab = \pi\sqrt{20} \times \sqrt{5} = 10\pi$ বর্গ একক

১০৫। $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ উপবৃত্তটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [ঢা. বো. ২১]

ক $16\pi$ খ $20\pi$

গ $25\pi$ ঘ $400\pi$

উত্তর: খ $20\pi$

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল = $\pi ab$

এখানে, $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল = $\pi \times 4 \times 5 = 20\pi$

১০৬। $y = 4x^2$ বক্ররেখা, x অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 2$ সরলরেখার দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কোনটি? [য. বো. ২১]

ক $\frac{24}{5}$ বর্গ একক খ $\frac{32}{3}$ বর্গ একক

গ 32 বর্গ একক ঘ $\frac{28}{3}$ বর্গ একক

উত্তর: ঘ $\frac{28}{3}$ বর্গ একক

ব্যাখ্যা: $\int_1^2 4x^2\,dx = \frac{28}{3}$ বর্গ একক [Using Calculator]

১০৭। $y = x^2$, x অক্ষ, $x = 0$ এবং $x = 3$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল– [চ. বো. ২১]

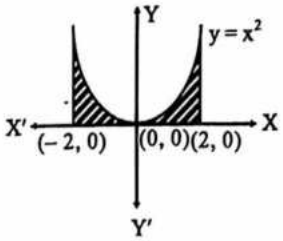
ক 3 খ 6

গ 8 ঘ 9

উত্তর: ঘ 9

ব্যাখ্যা: ক্ষেত্রফল = $\int_0^3 x^2\,dx = 9$ বর্গ একক [Using Calculator]

১০৮।




চিত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [সি. বো. ২১]

ক $\frac{32}{3}$ খ $\frac{16}{3}$

গ $\frac{8}{3}$ ঘ $\frac{4}{3}$

উত্তর: খ $\frac{16}{3}$

ব্যাখ্যা: ক্ষেত্রফল = $\int_{-2}^{2} x^2\,dx = \frac{16}{3}$ [Using Calculator]

১০৯।

ছায়াকৃত অংশের ক্ষেত্রফল কত? [দি. বো. ১৯]

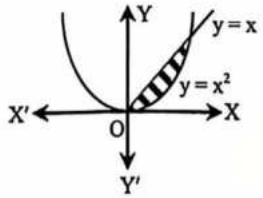
ক 93 খ 46

গ 39 ঘ 33

উত্তর: গ 39

ব্যাখ্যা: ক্ষেত্রফল = $\int_2^5 x^2\,dx = 39$ বর্গ একক [Using Calculator]

১১০।




চিত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গএকক? [রা. বো. ২২]

ক $\frac{5}{6}$ খ $\frac{1}{5}$

গ $\frac{1}{6}$ ঘ $\frac{6}{5}$

উত্তর: গ $\frac{1}{6}$

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



**ব্যাখ্যা:** $\int_0^1 (y_1 - y_2)\,dx$

$= \int_0^1 (x - x^2)\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{6}$

**Shortcut:**

$y = mx$ ও $x^2 = 4ay$ এদের দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2m^3}{3}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 1}{3}$

$= \frac{1}{6}$ বর্গ একক

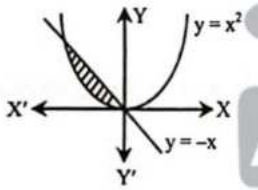
এখানে, $m = 1$

$\Rightarrow y = x^2$

$\Rightarrow x^2 = 4 \times \frac{1}{4} y$

$\therefore a = \frac{1}{4}$

১১১।




চিত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [চ. বো. ২৩]

ক $-\frac{5}{6}$ খ $-\frac{1}{6}$

গ $\frac{1}{6}$ ঘ $\frac{5}{6}$

**উত্তর:** গ $\frac{1}{6}$

**ব্যাখ্যা:** $y = x^2, y = -x$

$\therefore -x = x^2 \Rightarrow x^2 + x = 0$

$x = 0, -1$

$A = \int_{-1}^0 (y_1 - y_2)\,dx$

$= \int_{-1}^0 (-x - x^2)\,dx = \frac{1}{6}$ বর্গ একক [Using Calculator]

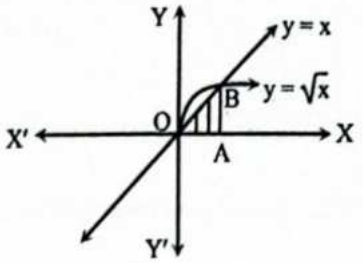
**অথবা,** এখানে, $m = -1$

$a = \frac{1}{4}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times (-1)^3}{3}$

$= -\frac{1}{6}$ বর্গ একক [ক্ষেত্রফল (– ve) হয় না]

১১২।




চিত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [ব. বো. ২৩]

ক $\frac{1}{2}$ খ 1

গ $\frac{3}{2}$ ঘ 2

**উত্তর:** ক $\frac{1}{2}$

**ব্যাখ্যা:** $y = x$ ..... (i)

$y = \sqrt{x}$ ..... (ii)

(i) নং ও (ii) নং হতে, $x = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right) = 0 \therefore x = 0, 1$

$x = 0$ হলে (i) নং হতে $y = 0$

$x = 1$ হলে (i) নং হতে $y = 1$

(i) নং ও (ii) নং পরস্পর O(0, 0) এবং B(1, 1) বিন্দুতে ছেদ করে।

$OA = 1, AB = 1$

$\therefore \Delta OAB$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ বর্গ একক।

১১৩। y-অক্ষ এবং $x = 4 - y^2$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? [সি. বো. ২২]

ক $\frac{3}{32}$ বর্গ একক খ $\frac{2}{33}$ বর্গ একক

গ $\frac{32}{3}$ বর্গ একক ঘ $\frac{33}{2}$ বর্গ একক

**উত্তর:** গ $\frac{32}{3}$ বর্গ একক

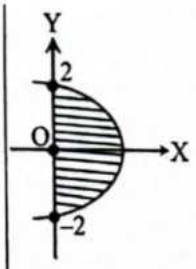
**ব্যাখ্যা:** y অক্ষ : $x = 0$ .... (i)

$x = 4 - y^2$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$4 - y^2 = 0 \therefore y = \pm 2$

ক্ষেত্রফল $= \int_{-2}^2 (4 - y^2)\,dy$




$= \frac{32}{3}$ বর্গ একক [Using Calculator]

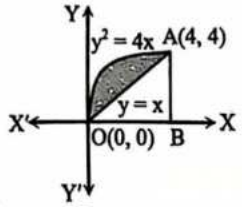
Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



১১৪।




উপরোক্ত চিত্রের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [দি. বো. ২৩]

ক $\frac{16}{3}$ খ $\frac{4}{3}$

গ $\frac{8}{3}$ ঘ $\frac{32}{3}$

উত্তর: গ $\frac{8}{3}$

ব্যাখ্যা: ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - x\right) dx = \frac{8}{3}$ বর্গ একক।

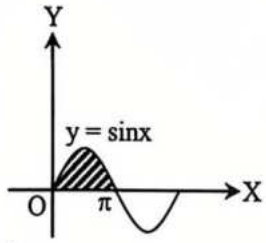
১১৫। x অক্ষ এবং $y = \sin x$ বক্ররেখার একটি চাপ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

ক 1 খ $\pi$

গ $\frac{\pi}{2}$ ঘ 2

উত্তর: ঘ 2

ব্যাখ্যা:




$y = \sin x$

x অক্ষের সমীকরণ: $y = 0$

$y = 0$ হলে, $x = 0, \pi$ [একটি চাপের জন্য]

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $\int y\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$ বর্গ একক

[Using Calculator in Radian Mode]

১১৬। $y^2 = 4ax$ ও $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুটি দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের জন্য কোন যোগজটি সঠিক? [ব. বো. ২১]

ক $\int_0^{4a} \left(2\sqrt{ax} - \frac{x^2}{4a}\right)dx$ খ $\int_0^{4a} \left(2\sqrt{ax} - \frac{4a}{x^2}\right)dx$

গ $\int_0^{4a} \left(\frac{x^2}{4a} - 2\sqrt{ax}\right)dx$ ঘ $\int_0^{4a} \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{2a}\right)dx$

উত্তর: ক $\int_0^{4a} \left(2\sqrt{ax} - \frac{x^2}{4a}\right)dx$

ব্যাখ্যা: সব Option ই যেহেতু 0 হতে 4a তাই আমাদের ছেদবিন্দু বের করতে হবে না।

ক্ষেত্রফল $= \int_0^{4a} (y_1 - y_2)dx$

$= \int_0^{4a} \left(2\sqrt{ax} - \frac{x^2}{4a}\right)dx$

$y^2 = 4ax$

$\therefore y_1 = 2\sqrt{ax}$

আবার,

$x^2 = 4ay$

$\therefore y_2 = \frac{x^2}{4a}$

## বিবিধ

১১৭। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\,dx = ?$ [য. বো. ১৯]

ক $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ খ $\frac{\pi}{2}$

গ 1 ঘ 2

উত্তর: খ $\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x)\,dx$

$= \left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\sin\pi}{2} - 0 - 0$

$= \frac{\pi}{2}$

অথবা, Using Calculator in radian mode

১১৮। $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x\,dx$ এর মান কত? [ম. বো. ২৩; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩, ২২]

ক $\frac{\pi}{2}$ খ $\frac{\pi}{4}$

গ $\pi$ ঘ $\frac{\pi}{8}$

উত্তর: ঘ $\frac{\pi}{8}$

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi}{4} - 0 - 0\right)$

$= \frac{\pi}{8}$

অথবা, Using Calculator in radian mode

১১৯। $\int \frac{1}{e^{ax} + e^{-ax}}\,dx = ?$

ক $\frac{1}{a}\cot^{-1}(e^{ax}) + c$ খ $\frac{1}{a}\tan^{-1}(e^{ax}) + c$

গ $\frac{1}{a}\tan^{-1}(1 + e^{ax}) + c$ ঘ $\frac{1}{a}\cot^{-1}(1 + e^{ax}) + c$

উত্তর: খ $\frac{1}{a}\tan^{-1}(e^{ax}) + c$

ADMISSION STUFFS

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



ব্যাখ্যা: $\int \frac{1}{e^{ax}+e^{-ax}}dx$

$= \int \frac{e^{ax}dx}{1+(e^{ax})^2}$ [$e^{ax}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{1}{a}\int \frac{dz}{1+z^2}$ | ধরি, $e^{ax} = z$

$= \frac{1}{a}\tan^{-1}z + c$ | $\therefore ae^{ax}dx = dz$

$= \frac{1}{a}\tan^{-1}(e^{ax}) + c$ | $\Rightarrow e^{ax}dx = \frac{dz}{a}$

১২০। $\int_{-1}^{1} |x|\,dx$ এর মান–

ক 2 খ $-1$

গ 1 ঘ 0

উত্তর: গ 1

ব্যাখ্যা: $\int_{-1}^{1} |x|\,dx$

$= \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx$

$= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$

$= -\frac{1}{2}(0-1) + \frac{1}{2}(1-0)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$= 1$

১২১। $\int_0^3 f(x)\,dx = 4$ হলে, $\int_2^5 f(x-2)\,dx =$ কত? [সি. বো. ২২]

ক 0 খ 4

গ 3 ঘ 2

উত্তর: খ 4

ব্যাখ্যা: ধরি, $x-2 = z$

$\therefore dx = dz$

এখন, $x = 2$ হলে, $z = 0$

$x = 5$ হলে, $z = 3$

$\therefore \int_2^5 f(x-2)\,dx = \int_0^3 f(z)\,dz = \int_0^3 f(x)\,dx = 4$

**Note:** If $\int_l^u f(x)\,dx = n$ then $\int_{l-a}^{u-a} f(x-a) = n$

১২২। $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ এর মান কত?

ক $\sin^{-1}x + c$ খ $\sqrt{1-x^2} + c$

গ $\sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$ ঘ $\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

উত্তর: গ $\sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$

ব্যাখ্যা: $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \int \sqrt{\frac{(1+x)(1+x)}{(1-x)(1+x)}}dx$

$= \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\times\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$= \sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$

১২৩। $\int_0^1 \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^x+e^{-x}}dx$ এর মান কোনটি? [ঘ. বো. ২২]

ক $4(e^4-1)$ খ $\frac{1}{5}(e^5-1)$

গ $5(e^5-1)$ ঘ $\frac{1}{4}(e^4-1)$

উত্তর: ঘ $\frac{1}{4}(e^4-1)$

ব্যাখ্যা: $\int_0^1 \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^x+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{e^{4x}(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})}dx$

$= \int_0^1 e^{4x}dx$

$= \left[\frac{1}{4}e^{4x}\right]_0^1$

$= \frac{1}{4}(e^4-1)$

অথবা, Calculator দিয়ে মান নির্ণয় করে Option Test করো।

১২৪। $F(x) = \int \frac{x-3}{x^2+7}dx$ হলে, x এর কোন মানের জন্য F(x) ন্যূনতম হবে?

ক 0 খ 3

গ $\sqrt{7}$ ঘ $-\sqrt{7}$

উত্তর: খ 3

ব্যাখ্যা: $F'(x) = \frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dx}\int \frac{x-3}{x^2+7}dx = \frac{x-3}{x^2+7}$

F(x) এর ন্যূনতম মানের জন্য, $F'(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{x-3}{x^2+7} = 0$

$\Rightarrow x-3 = 0$

$\therefore x = 3$

১২৫। যোগজীকরণের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য– [ব. বো. ২১]

(i) $\int f(x)dx = F(x) + c$, যেখানে c হল যোগজীকরণ ধ্রুবক

(ii) f(x) কে যোজ্য ফাংশন (Integrand) বলে

(iii) $\frac{d}{dx}$ ও $\int dx$ পরস্পর বিপরীত প্রক্রিয়া

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: সবগুলো সঠিক; এগুলো Basic ধারণা।



t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs



## নিজেকে যাচাই করো

১। $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx$ এর মান কোনটি?

ক $\sin(xe^x)+c$ খ $\cos(xe^x)+c$ গ $\tan(xe^x)+c$ ঘ $\cos^2(xe^x)+c$

২। $\int x\sec^2x\,dx =$ কত?

ক $x\tan x + \ln|\sin x| + c$ খ $x\tan x - \ln|\sin x| + c$
গ $x\tan x + \ln|\cos x| + c$ ঘ $x\tan x - \ln|\cos x| + c$

৩। $x^2+y^2=36$ বৃত্ত প্রথম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

ক $36\pi$ খ $24\pi$ গ $12\pi$ ঘ $9\pi$

৪। $\int \frac{1}{e^{ax}+e^{-ax}}dx = ?$

ক $\frac{1}{a}\cot^{-1}(e^{ax})+c$ খ $\frac{1}{a}\tan^{-1}(e^{ax})+c$
গ $\frac{1}{a}\tan^{-1}(1+e^{ax})+c$ ঘ $\frac{1}{a}\cot^{-1}(1+e^{ax})+c$

৫। $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ এর মান কত?

ক $\sin^{-1}x+c$ খ $\sqrt{1-x^2}+c$
গ $\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c$ ঘ $\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+c$

৬। $\int \frac{\tan x}{\ln\cos x}dx$ এর মান কত?

ক $\ln|\ln\cos x|+c$ খ $-\ln|\cos x|+c$
গ $-\ln|\ln\cos x|+c$ ঘ $|\ln\cos x|+c$

৭। $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}}$ এর মান কোনটি?

ক $\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}-2(1-x)^{\frac{1}{2}}+c$ খ $-\frac{2}{3}(\sqrt{1-x})(x+2)+c$
গ $\frac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}+c$ ঘ $\frac{2}{3}(\sqrt{1-x})(x+2)+c$

৮। $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\cos\theta\,d\theta$ এর মান–

ক $\frac{1}{9}$ খ $\frac{1}{8}$ গ $\frac{1}{7}$ ঘ 0

৯। $\int\frac{x^2}{x^2-4}dx$ এর মান কত?

ক $\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$ খ $\frac{1}{x}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$
গ $x-\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$ ঘ $x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

১০। $F(x)=\int\frac{x-3}{x^2+7}dx$ হলে, x এর কোন মানের জন্য F(x) ন্যূনতম হবে?

ক 0 খ 3 গ $\sqrt{7}$ ঘ $-\sqrt{7}$

১১। $f(x)=\sin2x, g(x)=\sin^2x$, x এর প্রেক্ষিতে $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ কোনটি?

ক $2\ln|1+\cos2x|+c$ খ $-\ln|1-\cos2x|+c$
গ $\ln|1+\cos2x|+c$ ঘ $\ln|1-\cos2x|+c$

১২। যদি $\int_1^5\frac{dx}{2x-1}=\ln P$ হয়, তবে P এর মান কত?

ক 3 খ 9 গ 10 ঘ 81

১৩। $\int e^{10x}\left[10\ln x+\frac{1}{x}\right]dx =$ কত?

ক $e^{10x}\ln|x|+c$ খ $e^{10x}.10\ln|x|+c$
গ $10e^x\ln|x|+c$ ঘ $\frac{1}{10}e^{10x}\ln|x|+c$

১৪। $I=\int_1^e\frac{dx}{x(1+\ln x)}$ হলে, I এর মান কত?

ক e খ $e+1$ গ $\ln e-1$ ঘ $\ln2$

১৫। $\int\sqrt{9-x^2}\,dx =$ কত?

ক $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}+c$ খ $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}-\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}+c$
গ $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}+c$ ঘ $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}-\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}+c$

❖ উদ্দীপকটির আলোকে ১৬ ও ১৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x)=\cot x, g(x)=\operatorname{cosec}^2x$

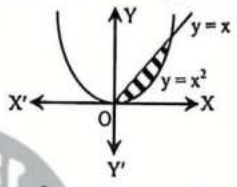
১৬। $\int f(x)\,dx =$ কত?

ক $\operatorname{cosec}^2x+c$ খ $-\operatorname{cosec}^2x+c$ গ $\ln|\operatorname{cosec}x|+c$ ঘ $\ln|\sin x|+c$

১৭। (i) $\int g\left(\frac{x}{2}\right)dx=-2\cot\frac{x}{2}+c$ (ii) $\frac{d}{dx}\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right\}=2\sec^2 2x$
(iii) $\int f(x)\,g(x)\,dx=-\frac{1}{2}\cot^2x+c$
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১৮।




চিত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গএকক?

ক $\frac{5}{6}$ খ $\frac{1}{5}$ গ $\frac{1}{6}$ ঘ $\frac{6}{5}$

১৯। $\int\frac{dx}{\sqrt{-2x^2+4x+1}}$ এর মান কোনটি?

ক $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)\right\}+c$ খ $\frac{1}{5}\sin^{-1}x+c$
গ $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}(x+1)+c$ ঘ $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}(x-1)+c$

২০। $\int_0^1\frac{1-x}{1+x}dx$ এর মান কোনটি?

ক $2\ln2+1$ খ $2\ln2-1$ গ $\ln2+1$ ঘ $\ln2-2$

২১। $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\,dx$ এর মান কত?

ক $\frac{\pi}{2}$ খ $\frac{\pi}{4}$ গ $\pi$ ঘ $\frac{\pi}{8}$

২২। $\int\frac{1+\tan^2x}{(1-\tan x)^2}dx$ এর মান কোনটি?

ক $\frac{-1}{1+\tan x}+c$ খ $\frac{-1}{1-\tan x}+c$ গ $\frac{1}{1-\tan x}+c$ ঘ $\frac{1}{1+\tan x}+c$

২৩। $\int_1^{\sqrt{e}}x\ln x\,dx =$ কত?

ক $-\frac{1}{4}$ খ $\frac{e}{2}-\frac{1}{4}$ গ $\frac{e}{2}+\frac{1}{4}$ ঘ $\frac{1}{4}$

২৪। $f(\theta)=\cos2\theta$ হলে–
(i) $\int f(\theta)\,d\theta=\frac{\sin2\theta}{2}+c$ (ii) $\int\sqrt{1-f(\theta)}\,d\theta=-\sqrt{2}\cos\theta+c$
(iii) $\int\sqrt{1+f(\theta)}\,d\theta=\sqrt{2}\sin\theta+c$
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

২৫। $\int\sqrt{2-3x}\,dx =$ কত?

ক $-\frac{2}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}}+c$ খ $-\frac{1}{6}(2-3x)^{-\frac{1}{2}}+c$
গ $-(2-3x)^{\frac{3}{2}}+c$ ঘ $-3(2-3x)^{-\frac{1}{2}}+c$

| উত্তরপত্র | ১ | গ | ২ | গ | ৩ | ঘ | ৪ | খ | ৫ | গ | ৬ | গ | ৭ | ক | ৮ | ক | ৯ | ঘ | ১০ | খ | ১১ | ঘ | ১২ | ক |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ১৩ | ক | ১৪ | ঘ | ১৫ | ক | ১৬ | ঘ | ১৭ | ঘ | ১৮ | গ | ১৯ | ক | ২০ | খ | ২১ | ঘ | ২২ | গ | ২৩ | ঘ | ২৪ | ঘ | ২৫ | ক |

Rhombus Publications

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs

ACS এর শিক্ষার্থীদের

# অভাবনীয় সাফল্য

**BUET**
২০২২ সালে ৭৭২ জন
২০২৩ সালে ৮৮৫ জন

**CKRUET**
২০২২ সালে ১৮৭৩ জন
২০২৩ সালে ২৫৩৩ জন

**IUT, MIST**
২০২২ সালে ৮২০ জন
২০২৩ সালে ৮৮৭ জন

**Dhaka University**
২০২২ সালে ১৬৩১ জন
২০২৩ সালে ১৭৫৩ জন

**GST**
গুচ্ছ ভর্তি পরীক্ষা
২০২২ সালে ৩১২০ জন
২০২৩ সালে ৩৯১৮ জন

**JU (A & D)**
২০২২ সালে ৪৬৫ জন
২০২৩ সালে ৫৮৬ জন

**MEDICAL**
২০২২ সালে ৬০১ জন
২০২৩ সালে ১৩৭৩ জন

**DENTAL**
২০২২ সালে ২৬৭ জন
২০২৩ সালে ২৮৬ জন

**BUTEX**
২০২২ সালে ৪৭১ জন
২০২৩ সালে ৫৯৩ জন

**Rajshahi University**
২০২২ সালে ১১২০ জন
২০২৩ সালে ১১৫৮ জন

**Chattogram University**
২০২২ সালে ৪২২ জন
২০২৩ সালে ৫২৩ জন

ADMISSION STUFFS

t.me/admission_stuffs

PDF Credit - Admission Stuffs

# উচ্চতর গণিত

Experience The Best Approach

১ম পত্র

এইচএসসি পরীক্ষার চূড়ান্ত প্রস্তুতির জন্য আমাদের বইসমূহ

ACS | RHOMBUS PUBLICATIONS

SCAN to Discover our website
ADMISSION STUFFS

t.me/admission_stuffs